T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Nurhan DÜNDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
HAZİRAN 2009

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Nurhan DÜNDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
HAZİRAN 2009

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Nurhan DÜNDAR tarafından yapılan "Doğrusal Olmayan Parabolik Diferansiyel Denklemlerin Matematiksel Davranışı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Üye : Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT (Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 16.07.2009

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

..........2009

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyiminden yararlandığım değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT’ a ve maddi desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu’na (TÜBİTAK’a) teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmanın temel amacı doğrusal olmayan parabolik tipten bazı kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin lokal varlık ve tekliğini, global varlık ve tekliğini ayrıca asimptotik davranışını incelemektir. Bu amaçla damping terimli doğrusal olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemler üzerinde önemle durduk.

Daha önce bu anlamda çalışılmamış dördüncü mertebeden doğrusal olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklem içeren bir Cauchy probleminin lokal ve global varlığını ispatladık. Ayrıca aynı problemin verilere sürekli bağımlılığını ispatlayarak iyi konulmuş bir problem olduğunu gösterdik.

ÖZET

Bu tezde doğrusal olmayan parabolik tipten kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışı incelenmiştir.

İlk bölümde, parabolik kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili günümüze kadar yapılmış çalışmalar tarihi gelişimiyle kısaca ele alınmıştır.

İkinci bölümde, tezin sonraki bölümleri için gerekli olan temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden parabolik denklemlerin zayıf çözümleri tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, lineer olmayan pseudo-parabolik denklemin bir Cauchy problemi için çözümün lokal, global varlığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, damping terimli dördüncü mertebeden bir Cauchy probleminin çözümünün lokal ve global varlığı, verilere sürekli bağımlılığı ispatlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, the mathematical behaviour of solutions of nonlinear parabolic partial differential equations is investigated.

In the first chapter, so far the studies done with the historical developments are shortly given about parabolic partial differential equations.

In the second chapter, some fundamental definitions and notations which are necessary for the remaining chapters of the thesis are presented.

Weak solutions of the second order parabolic equations is presented in the third chapter.

In the fourth chapter, local and global existence and asymptotic behaviour of Cauchy problem for a nonlinear pseudo-parabolic equation are investigated.

In the fifth chapter, local and global existence, continuous dependence on initial data of a fourth order Cauchy problem with damping term is proved.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde doğrusal olmayan parabolik tipten diferansiyel denklemler için lokal, global çözümler ve çözümlerin asimptotik davranışıyla ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalara kısaca değineceğiz.

Scott Russell'in 1834'te ki tek dalgalarla ilgili çalışmaları, akışkanlar, plazmalar, elastik ortamlar vb. dalga olaylarının modellenmesinde kullanılan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişimini sağlamıştır. Serbest sınıra sahip sıkıştırılamayan su dalgaları için temel denklemler ilk olarak Boussinesq tarafından ortaya atılmıştır. Boussinesq tek yönlü ve tek boyutlu dalgalar için iki model geliştirmiştir. Daha az bilinen bir gerçek de Boussinesq'in 1870'lerde

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde günümüzde KdV denklemi olarak bilinen ve gelecekteki birçok çalışmaya temel oluşturan denklemi bulmasıydı. Denklem Boussinesq'in [8, 9] daki makalelerinde görülebilir.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

formundaki KdV denklemi 1895'te Korteweg ve de Vries tarafından bulundu. Fakat Martin D. Kruskal (1.2) denklemini Fermi-Pasta-Ulam modelinden [21] bulup, yeni bir lineer olmayan denklem keşfettiğini düşündü. Yine de hidrodinamik bölümündeki uzmanlara bu denklemi sordu, ve uzmanlar ona Korteweg ve de Vries'in çalışmalarından bahsettiler [21]. Şimdi (1.2) denklemi en çok bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir.

Ayrıca, daha iyi analitik özelliklere sahip

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxt} = 0 \tag{1.3}$$

şeklindeki bir denklem Benjamin, Bona ve Mahong (BBM denklemi) tarafından bulunmuştur [4]. Camassa ve Holm tarafından su dalgalarını modelleyen lineer olmayan, dispersive terimli bir denklem

$$u_t + \kappa u_x - u_{xxt} = -3uu_x + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} \tag{1.4}$$

olarak verilmiştir [10, 11]. Rosenau tarafından belirtildiği gibi [31, 32, 33, 34] lineer olmayan dispersive sisteme geçiş, klasik zayıf lineer olmayan teoriler tarafından kestirilemeyen yeni çözüm yöntemlerine yol açmıştır. KdV ve Boussinesq modeli için solitonlar iyi birer analitik çözüm iken, Camassa ve Holm modeli için köşelere ve doruk noktalarına sahip analitik olmayan dalgalar çözüm olarak kabul edilir. Bu çözümler, zayıf çözümlerdir ve analitik tek dalga çözümlerinin limiti olarak görünürler.

Yapılan bu ilk çalışmalar (1.1) ve (1.4) denklemleri arasındaki belirgin farkın anlaşılmasını sağlamıştır.

Li ve Olver [22],

$$u_t - v u_{xxt} = \alpha u_x + \beta u_{xxx} + 3\gamma u u_x - \gamma v\left(u u_{xxx} + 2u_x u_{xx}\right)$$

şeklindeki Camassa Holm denkleminin H^s Sobolev uzayında $s > 3/2$ iken lokal iyi konulmuşluğunu göstermişlerdir. Burada α, β, γ, v sabitler ve $v > 0$ dır. Kullandıkları temel teknik, bu denklemi düzgünleştirmek ve denklemin çözümünü, düzgünleştirilmiş denklemin çözümünün limiti olarak bulmaktır. KdV denklemi için geliştirilen bu metot, Bona ve Smith [7], Dushane [15], Masayoshi ve Mukasa [23], Saut ve Temam [35, 37] gibi birçok yazar tarafından kullanılmıştır.

[36] da Şahin,

$$u_t - \Delta u_t + g\left(x,u\right) = 0$$

şeklindeki doğrusal olmayan parabolik denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığını çalışmış, ayrıca ikinci mertebeden problemlerin zayıf çözümlerinin global yokluğunu göstermiştir.

[18] de Güleç,

$$u_t - \Delta u - \alpha \Delta u_t + f\left(u\right) = h\left(x\right)$$

denkleminin verilen koşullar altında çözümünün varlığını ve tekliğini, çözümün sürekliliğini ve bu problem ile üretilen yarıgrubun asimptotik kompaktlığını göstermiştir.

[30] da Polat ve diğerleri Adomian Ayrıştırma metoduyla,

$$u_t + u^2 u_x + p u_{3x} + q u_{5x} = 0$$

şeklindeki modifiye Kawahara denkleminin ilerleyen dalga çözümünü, nümerik metotlarla çalışmış ve bulunan nümerik çözümü bilinen analitik çözümle karşılaştırmışlardır.

Chen and Xue [12] de,

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_x + f(v)_x = \varphi(v_x)_x + g(v) - \alpha g(v)_{xx}$$

pseudo parabolik denkleminin $C^1\left([0,\infty);H^s(R)\right)$ da bir tek global genelleştirilmiş çözümünün olduğunu ispatlamış ve çözümün asimptotik davranışını incelemişlerdir. Ayrıca

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} = g(v) - \alpha g(v)_{xx}$$

parabolik denklemi için $C^1\left([0,\infty);W^{m,p}(R)\cap L^\infty(R)\right)$ de bir tek genelleştirilmiş global çözüme sahip olduğunu ve bir tek global klasik çözümünün var olduğunu göstermiş ve ayrıca çözümün asimptotik davranışını incelemişlerdir.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar ve eşitsizlikler verilecektir [14, 16, 25, 27, 38].

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. Çalışılan alanlarda karşılaşılan problemlere bir yaklaşım olarak matematiksel modeller oluşturmak, bilimin hemen her dalının teorik açıdan gelişmesinde önem taşımıştır. Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan bir matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, çoğunlukla, bir bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini ihtiva eden bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bir fonksiyonu ve onun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemler *diferansiyel denklemler* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere *adi diferansiyel denklemler* denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem genel olarak

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

kapalı formunda gösterilebilir. Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n. mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F\left[x, \Phi(x), \Phi'(x), \ldots, \Phi^{(n)}(x)\right] = 0 \tag{2.2}$$

ise Φ fonksiyonu (2.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Tanım 2.1.3. $u = u(x, y, z, t)$ fonksiyonu, x, y, z ve t bağımsız değişkenleriyle bir Ω bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h} \tag{2.3}$$

limiti ile tanımlıdır. $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \ldots$ gibi gösterimler de kullanılabilir. İçinde kısmi türev bulunan denklemlere *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir. Yukarıda tanımladığımız u fonksiyonunun x, y, z, t değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren *m.* mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, \ldots, \underbrace{u_{ttt\ldots t}}_{m-\text{tane}}) = 0 \tag{2.4}$$

şeklinde gösterilir. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise denkleme *lineer kısmi diferansiyel denklem* denir. Örneğin,

$$xu_x + yu_y = 0$$

$$x^2u_x - y^2u_y = \ x - y \ u$$

denklemleri lineerdir. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevlerine göre lineer ise bu denkleme *yarı lineer denklem* denir. Örneğin,

$$u_{xx} + u_{yy} + uu_x = 0$$

denklemi yarı lineer bir denklemdir.

Bazen yarı lineer bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olur. Böyle bir yarı lineer denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir.

$$x^2u_x - y^2u_y = \ x - y \ u$$

denklemi hemen hemen lineer bir denklemdir.

Bu tanımlara göre, hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklem sınıfının lineer denklem sınıfını; yarı lineer denklem sınıfının ise hemen hemen lineer denklem sınıflarını içerdiği açıktır.

Tanım 2.1.4. Bir kısmi diferansiyel denklem

$$L_x u(x) = f(x) \tag{2.5}$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. u ve v herhangi iki fonksiyon, a ve b herhangi iki sabit olmak üzere eğer L_x bir lineer operatör ise aşağıdaki özelliği sağlar

$$L_x(au + bv) = aL_x u + bL_x v.$$

(2.5) denkleminde eğer L_x bir lineer operatör ise denklem de lineerdir ve $f(x) \equiv 0$ ise denkleme *homojen lineer denklem* aksi halde *homojen olmayan lineer denklem* denir.

Bir kısmi diferansiyel denklem eğer lineer değilse *lineer olmayan denklem* adını alır.

$$(u_x)^3 + u_y = 0$$

denklemi lineer olmayan homojen bir denklemdir.

Bir kısmi diferansiyel denklemdeki bağımsız değişken sayısının, denklemin mertebesinin çözüm üzerinde önemli etkileri olacağı açıktır. Bu yüzden kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm kavramının tanım ve izahı, sadece bir bağımsız değişken içeren adi diferansiyel denklemlerdeki çözüm kavramı kadar basit değildir.

Tanım 2.1.5. Bir kısmi diferansiyel denklemdeki değişkenler Γ sınırına sahip bir Ω açık bölgesinde tanımlanır. Ω bölgesi ile Γ sınırının birleşim kümesine Ω bölgesinin kapanışı denir ve $\bar{\Omega}$ şeklinde gösterilir. t zaman değişkeni olmak üzere $t_1 < t < t_2$ aralığında ve Ω bölgesindeki (x, y, z) noktasında ζ fonksiyonu ve *m.* mertebeye kadar türevleri sürekli ise yani, $\zeta \in C^m(\Omega)$ sınıfından ise $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ fonksiyonuna *m.* mertebeden kısmi diferansiyel denklemin *çözümüdür* denir. Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) Sınır Şartları: Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

Dirichlet şartı: $u\big|_{\Gamma} = g$,

Neumann şartı: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g$,

Karışık (mixed) veya Robin şartı: $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$.

(ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferansiyel denkleme *'Cauchy Problemi'* denir. Örneğin, $\mathbb{R}^n$ de $t > 0$ ve başlangıç şartları için

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u$$

$$u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x)$$

ikinci mertebeden bir C*auchy problemidir.*

Tanım 2.1.6. İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{2.6}$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. (2.6) denklemi, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskrimantının işaretine göre sınıflandırılır. Bu sınıflandırma;

Diskrimant	*Denklem Tipi*
$\Delta > 0$,	Hiperbolik,
$\Delta = 0$,	Parabolik,
$\Delta < 0$,	Eliptik

şeklinde yapılabilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik tiplerinin genel denklemleri sırasıyla Laplace (Δ), ısı ve dalga operatörünü içermektedir. Herhangi bir kısmi diferansiyel denklem, uygun birebir bir değişken dönüşümü yardımıyla kendi sınıfının genel operatörüne dönüşebilir.

Matematiksel Nicelik	*İsimlendirme*	*Fiziksel İsim*	*Sınıflandırma*
Δ_n	Laplacian	Potansiyel operatörü	Eliptik
$\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_{n-1}$	(ısı)	Difüzyon operatörü	Parabolik
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_{n-1}$	D'Alembert	Dalga operatörü	Hiperbolik

2.2. Adi Diferansiyel Denklemler için Varlık Teklik Teoremleri

Teorem 2.2.1. (Varlık Teoremi)

$$y' = f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \tag{2.7}$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. Eğer $f(x,y)$

$$|x-x_0|<a\,,\ |y-y_0|<b \tag{2.8}$$

ile tanımlı R dikdörtgensel bölgesinin her bir x, y noktasında sürekli ve $|f(x,y)|\le K$ olacak şekilde sınırlı ise o taktirde (2.7) probleminin en az bir $y(x)$ çözümü mevcuttur.

Teorem 2.2.2. (Teklik Teoremi)

$f(x,y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$; R bölgesinin her bir (x,y) noktasında sürekli ve R deki bütün (x,y) ler için

$$|f|\le K\,,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le M \tag{2.9}$$

olacak şekilde sınırlı ise, o taktirde (2.7) başlangıç değer probleminin en fazla bir $y(x)$ çözümü vardır.

Sonuç olarak Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 şartlarını sağlayan her başlangıç değer probleminin yalnız ve yalnız bir çözümü vardır.

2.3. İyi Konulmuş Problemler ve Klasik Çözümler

Bir diferansiyel denklem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa iyi konulmuş olarak adlandırılır:

(i) Varlık: Problem gerçekte bir çözüme sahip olmalı,

(ii) Teklik: Bu çözüm tek olmalı,

(iii) Sürekli Bağımlılık: Çözüm problemde verilen verilere sürekli bağımlı olmalıdır.

Son koşul özel olarak fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan problemler için önemlidir. Problemi belirleyen verilerdeki küçük bir değişiklik, çözümde (tek çözümde) de küçük değişikliklere neden olmalıdır. (Diğer taraftan, birçok problem için tek çözüm olması beklenmemektedir. Bu durumda matematiksel olarak çözümleri sınıflandırma ve karakterize etme önemlidir.) Örneğin Hadamard örneğini ele alalım. Şöyle ki

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.10}$$

Laplace denklemini $n > 0$ olmak üzere,

$$u(0, y) = 0, \;\; u_x(0, y) = \frac{1}{n}\sin y \tag{2.11}$$

Cauchy verileriyle göz önüne alalım. Bu problemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen çözümü

$$u_1(x, y) = \frac{1}{n^2}\sinh x \sin y \tag{2.12}$$

şeklindedir. Başlangıç verileri $u(0, y) = 0$ ve $u_x(0, y) = 0$ iken problemin çözümü $u_2 = 0$ aşikar çözümüdür. İki başlangıç verisi arasındaki fark $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty} \left| n^{-1} \sin ny \right| = 0$$

olur. Yani, başlangıç verisinde çok küçük bir değişiklik olmuştur. Bu başlangıç verisine karşılık gelen çözümler farkının $y = \frac{\pi}{2}$ noktasında, n tek pozitif sayı olmak üzere $n \to \infty$ iken limit değerine bakalım;

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_1(x,\frac{\pi}{2})-u_2(x,\frac{\pi}{2})\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sinh nx=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2n^2}=\infty$$

olur, yani, başlangıç verilerinde yapılan küçük değişiklik çözümde büyük bir değişikliğe yol açmıştır. Böylece (2.10) ve (2.11) Cauchy probleminin iyi konulmuş olmadığı sonucuna varılır.

Bir kısmi diferansiyel denklem (KDD) çözülürken yukarıdaki üç şartın sağlanması istenen durumdur. Fakat hala 'çözüm' ile kastedilenin ne olduğu tanımlanmadı. Örneğin, bir çözüm reel analitik veya sonsuz mertebeden türevlenebilir mi olmalıdır? Bu arzu edilendir fakat belki daha fazlası sorulur. Belki de, k-ıncı mertebeden bir KDD nin çözümünün en azından k-defa sürekli türevlere sahip olmasını istemek daha akıllıca olur. O zaman yüksek mertebeden türevlerin var olmamasına rağmen, en azından KDD de görülen tüm türevlerin var olması ve sürekli olması gerekir. Sezgisel olarak, böyle düzgün bir çözümü KDD nin klasik çözümü olarak adlandıralım. Bu kesinlikle çözümün en açık ifadesidir.

Böylece bir KDD yi klasik anlamda çözmek demek, eğer mümkünse yukarıdaki üç koşulu sağlayan bir klasik çözümü formüle etmek veya en azından böyle bir çözümün var olduğunu ve bu çözümün çeşitli özelliklerini çıkarmak demektir.

2.4. Zayıf Çözümler ve Düzgünlük

Belli KDD ler (Laplace Denklemi gibi) klasik anlamda çözülebilir ancak diğer birçoğu çözülemez. Örneğin, skaler korunum kanunu göz önüne alalım. Yani,

$$u_t+F(u)_x=0$$

denklemini ele alalım. Bu KDD, akışkanlar dinamiği, şok dalgalarının yayılması gibi birçok tek boyutlu olayın modellenmesinde ortaya çıkar. Bir şok dalgası, $u(x,t)$ çözümünün süreksizlik eğrisidir ve eğer korunum kanunlarını çalışmak istiyorsak, sürekli türevlere ve hatta sürekli bile olmayan çözümlere izin vermek durumunda kalırız. Genel olarak, korunum kanunları klasik çözümlere sahip değillerdir, fakat doğru tanımlanmış 'genelleştirilmiş veya zayıf çözümler' kabul edilirse korunum kanunları iyi konulmuştur.

Ele alınan problemin yapısı düzgün, klasik çözümler aramamızı engelleyebilir. Bunun yerine, yukarıdaki üç koşulu sağlayan daha geniş çözüm sınıfları arayabiliriz. Aslında klasik olarak çözülebilen KDD ler için bile başlangıçta uygun zayıf çözüm aramak daha faydalı olabilir.

Eğer başlangıçtan itibaren düzgün, yani k-defa sürekli türevlenebilen, çözümler istiyorsak o zaman onları bulmakta gerçekten zorlanırız, çünkü daha sonra ispatlarımız, kuracağımız fonksiyonlar yeterince düzgün olacağından, muhtemelen karmaşık gösterimler içerecektir. Daha mantıklı bir yol, varlık ve düzgünlük problemlerini ayrı olarak düşünmektir. Verilmiş bir KDD için oldukça geniş bir zayıf çözüm kavramı tanımlarsak, bu zayıf çözümün düzgünlüğü yoluyla çok fazla şey sorma beklentimiz olmadığından varlık, teklik ve verilere sürekli bağımlılığı kurmak daha kolay olacaktır. Böylece, bazı uygun zayıf veya genelleştirilmiş çözüm sınıflarında iyi konulmuşluğu göstermek uygun olacaktır.

Yukarıda bahsedildiği gibi çeşitli KDD lerde bu yapılabileceklerin en iyisidir. Diğer denklemler için zayıf çözümümüzü yeterince düzgün olmasından sonra klasik çözüm olarak nitelemeyi umabiliriz. Bu zayıf çözümlerin düzgünlüğü sorusuna yol açar. Zayıf çözümlerin düzgünlüğü genellikle çok karmaşık hesap tahminlerine dayanırken, zayıf çözümlerin varlığı oldukça basit tahminler ve fonksiyonel analiz yargılarına bağlıdır.

2.5. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.5.1. Bir X vektör uzayından, negatif olmayan sayılara tanımlanan ve her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna *norm* denir;

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Bu takdirde $(X, \|.\|)$ çiftine normlu uzay ve $\|x\|$ sayısına da *x* noktasının *normu* denir.

Verilen bir norm aracılığıyla

$$u(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan *u* bir uzaklık fonksiyonudur ve böylece her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olur.

Tanım 2.5.2. $\{x_n\}$, $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.5.3. $\{x_n\}$, $(X,\|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.4. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X,\|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.5.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A>0$, $B>0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le B\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *eşdeğer normlar* denir.

Tanım 2.5.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X\times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.): X\times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x,y\in X$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (burada $\bar{c}$, $c\in\mathbb{C}$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

ii) $(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$,

iii) $(x,x)\ge 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$K=R$ halinde $(x,y)=(y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\|: X\to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.5.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.5.8. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya *çoklu-indis* denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \le j \le n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,...,0)}u = u$ olur.

Tanım 2.5.9. Eğer $G \subset R^n$ ise R^n de G nin *kapanışı* $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ R^n in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. *u, G* de tanımlı bir fonksiyon ise, *u* fonksiyonun *desteği*

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ ise *u* fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe* sahiptir denir.

Tanım 2.5.10. Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her *m* tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olur. $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün bu fonksiyonlardan ibarettir.

2.6. Lebesque Uzayı $L_p(\Omega)$

Tanım 2.6.1. Ω, R^n de bir bölge ve *p* pozitif gerçel sayılar olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün *ölçülebilir u* fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

$L_p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \le p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir ve $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir. $L_\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde *p*. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.6.4. *X* ve *Y* normlu uzaylar olsun. Eğer

i) X, Y nin bir alt uzayı,

ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \le M\,\|x\|_X\,, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.6.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \le p \le q \le \infty$ olsun. Eğer $u \in L_q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L_p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq \left(vol(\Omega)\right)^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.6.6. $L_2(\Omega)$ uzayı

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.6.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\| f(.)\|_X \in L_p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonları uzayına $L_p(a,b;X)$ *uzayı* denir. $L_p(a,b;X)$ uzayı

$$\| f\|_{L_p(a,b;X)} = \begin{cases} \left\{\int_a^b \| f(t)\|_X^p \, dt\right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup} \| f(t)\|_X , & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $f \in L_p(c,d;X)$ ise, o zaman $f \in L_{p,loc}(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için *f lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.6.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den *X* e tanımlanmış ve *m*. mertebeden türevleri sürekli olan *u* fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ *uzayı* denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \left\|D^\alpha u(t)\right\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.7. Sobolev Uzayı $W^{m,p}(\Omega)$

Tanım 2.7.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun *genelleştirilmiş türevi* olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.7.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 2.7.3. Eğer $p=2$ ise $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 2.7.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\left(D^\alpha u,D^\alpha v\right)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise, bütün $u\in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}\leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

olacak şekilde bir $C(\Omega)$ sabiti vardır. Bu eşitsizlik *Poincare eşitsizliği* olarak bilinmektedir. $H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \nabla u\nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega(\nabla u)^2dx\right)^{1/2}$$

olur.

Tanım 2.7.5. Eğer Ω bölgesi açık ve Lipschitz sürekli sınıra sahipse, o zaman aşağıdakiler geçerlidir:

i) $1\leq p<n$ ise, $p^*=np/(n-p)$ olmak üzere her $q\in[p,p^*]$ için

$W^{1,p}(\Omega)\to L_q(\Omega)$,

ii) $p=n$ ise her $q\in[p,\infty)$ için $W^{1,p}(\Omega)\to L_q(\Omega)$,

iii) $p>n$ ise $\alpha=(p-n)/p$ olmak üzere $W^{1,p}(\Omega)\to L_\infty(\Omega)\cap C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ayrıca Ω bölgesi sınırlı ise, ii) ve iii) gömmeleri kompakttır. i) gömmesi $q\in[p,p^*)$ için kompakttır.

Eğer $W^{1,p}(\Omega)$ uzayı, $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayı ile değiştirilirse, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapmaksızın yukarıdaki gömmeler geçerli olur.

2.8. Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü analizin çeşitli alanlarında, kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamalarında ve olasılık teorisinde büyük bir öneme sahiptir. Fourier metodunu kullanarak problem çözmedeki (genellikle kısmi veya adi diferansiyel denklem) genel fikir aşağıdaki üç adımdan ibarettir:

i) Orjinal problemi fourier dönüşümünü kullanarak daha basit bir probleme (adi diferansiyel denkleme veya cebirsel denkleme) dönüştürme,

ii) Yeni denklemi çözme,

iii) Ters fourier dönüşümünü kullanarak orijinal problemin çözümünü elde etme.

$u\in L^1(R)$ olsun. $R\times R\to C$ ye tanımlanan $(\xi,x)\mapsto e^{-ix\xi}u(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Verilen $\xi\in R$ için $x\mapsto e^{-ix\xi}u(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri $|u|$ olduğundan R üzerinde integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\hat{u}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}u(x)\,dx$$

integrali ile verilen $\hat{u}:R\mapsto C$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Tanım 2.8.1. $\hat{u}$ fonksiyonu, u fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır ve $F(u)$ ya da Fu şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8.2. $v\in L^1(R)$ için

$$\overset{\vee}{v}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}v(\xi)\,d\xi$$

fonksiyonu v fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinin tanımı $u \in L^2(R)$ fonksiyonlarına aşağıdaki teoremler yardımıyla genişletebilinir.

Teorem 2.8.1. (Plancherel Teoremi) $u \in L^1(R) \cap L^2(R)$ olsun. O zaman $\hat{u},\ \overset{\vee}{u} \in L^2(R)$ ve

$$\|\hat{u}\|_{L^2(R)} = \|\overset{\vee}{u}\|_{L^2(R)} = \|u\|_{L^2(R)}$$

olur.

Teorem 2.8.2. $u, v \in L^2(R)$ olsun. O zaman

i) $\int_R u\bar{v}dx = \int_R \hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi$

ii) Her α çoklu indeksi için $(D^\alpha u)\hat{} \in L^2(R)$ olmak üzere $(D^\alpha u)\hat{}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$ dir.

iii) $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{u}\hat{v},$ burada $u * v,$ u ve v nin konvolüsyonudur (Konvolüsyon Teoremi)

iv) $u = \overset{\vee}{(\hat{u})}$

burada $\bar{z}$, $z \in C$ nin kompleks eşleniğidir.

$\|.\|_{L^2}$ yerine $\|.\|$ yazarsak $H^k(R)$ Sobolev uzayı aşağıdaki şekilde Fourier dönüşümüyle ilişkilendirilebilir.

$$\|u\|_{H^k}^2 = \|u\|_{W^{k,2}}^2 = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^2.$$

Plancherel Teoremi ve Teorem 2.8.2 den

$$\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^2 = \sum_{|\alpha| \le k} \left\|\widehat{D^\alpha u}\right\|^2$$

$$= \sum_{|\alpha| \le k} \|(i\xi)^\alpha \hat{u}\|^2 = \sum_{|\alpha| \le k} \int_R |i\xi|^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha| \le k} \int_R \xi^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_R \left(\sum_{|\alpha| \le k} \xi^{2\alpha} \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

olur.

$$\sum_{|\alpha|\le k}\xi^{2\alpha}=1+\xi^2+\xi^4+...+\xi^{2k}=P_k\left(\xi\right)$$

olsun.

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\frac{P_k\left(\xi\right)}{\left(1+\xi^2\right)^k}=1$$

ve

$$\frac{P_k\left(\xi\right)}{\left(1+\xi^2\right)^k}>0$$

olduğundan öyle c_1,c_2 sabitleri vardır ki $c_1>0,\ c_2=1$ iken

$$c_1\left(1+\xi^2\right)^k\le P_k\left(\xi\right)\le c_2\left(1+\xi^2\right)^k$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $P_k\left(\xi\right),\ \left(1+\xi^2\right)^k$ ya eşittir. Bu eşitlik kullanılarak H^k için aşağıdaki gibi bir tanım elde edilir.

Teorem 2.8.3. $H^k(R)$ Sobolev uzayı

$$H^k(R)=\left\{u\in L^2(R)\left|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{k}{2}}\hat{u}(\xi)\in L^2\left(R\right)\right.\right\}$$

şeklinde tanımlanabilir, burada $\xi\in R$ ve $\hat{u},\ u$ nun Fourier dönüşümüdür. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{H^k(R)}=\left[\int_R(1+\xi^2)^k\left|\hat{u}(\xi)\right|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

$k\ge 0$ tamsayıları yerine tüm $s\ge 0$ reel sayıları için $H^s(R)$ Sobolev uzayı

$$H^s(R)=\left\{u\in L^2(R)\left|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)\in L^2(R)\right.\right\}\tag{2.13}$$

olarak tanımlanabilir. Böylece $u\in H^s(R)$ olması ancak ve ancak ve u nun Lebesque ölçülebilir olması ve

$$\|u\|_{H^s(R)} = \left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

olması durumunda mümkündür.

$s_1 < s_2$ için

$$H^{s_2}(R) \subset H^{s_1}(R)$$

sürekli gömülmesi vardır ve $H^0(R) = L^2(R)$ dir. (2.13) kullanarak bu ispatlanabilir. $s_1 < s_2$ ve $1+\xi^2 \geq 1$ birlikte kullanılarak $\left(1+\xi^2\right)^{s_1} \leq \left(1+\xi^2\right)^{s_2}$ olduğu görülür. Bu eşitsizlik $|\hat{u}(\xi)|^2$ ile çarpılıp R üzerinde integrallenirse

$$\|u\|_{H^{s_1}} \leq \|u\|_{H^{s_2}}$$

elde edilir. Bu $H^{s_2}(R) \to H^{s_1}(R)$ gömülmesinin sürekli olduğu anlamına gelir. s fonksiyonların düzgünlük derecesi olmak üzere, s artarken daha fazla türevlenebilirdir. Diğer taraftan $L^p(R)$ Lebesque uzayı bu özelliği sağlamaz. Çünkü R sınırlı değildir.

2.9. Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 2.9.1. Bir X kümesini kendi içine dönüştüren bir $f: X \to X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir $x^* \in X$ noktası $f\left(x^*\right) = x^*$ bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonunun bir sabit noktası adını alır.

X bir Banach uzayı olsun. En basit sabit nokta teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.9.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

$$A: X \to X$$

lineer olmayan bir dönüşüm olsun ve bazı $\gamma < 1$ sabitleri için

$$\|A[u] - A[\tilde{u}]\| \leq \gamma \|u - \tilde{u}\| \qquad (u, \tilde{u} \in X)$$

olduğunu varsayalım. O zaman A tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.9.2. (Schauder Sabit Nokta Teoremi)

$K \subset X$ konveks ve kompakt ayrıca

$$A : K \to K$$

sürekli olsun. O zaman A K içinde bir sabit noktaya sahiptir.

2.10. Eşitsizlikler

Tanım 2.10.1. Cauchy Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R^1$ ise, o zaman

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.2. Young Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R^1$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \le \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.3. Hölder Eşitsizliği. $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, $p \ge 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L_1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \le \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L_q(\Omega)} = ess_\Omega \sup|v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği* denir.

Ayrıca $u \in L_r(\Omega)$, $p \le q \le r$ ve $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} \le \|u\|_{L_p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L_r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

ara değer eşitsizliği geçerlidir. Bunu görmek için $\alpha = \lambda q$ ve $\beta = (1-\lambda)q$ alınıp Hölder eşitsizliği uygulanarak $z = p/\lambda q$ ve $y = r/(1-\lambda)q$ için

$$\int_{\Omega}|u|^{q}dx=\int_{\Omega}|u|^{\alpha}|u|^{\beta}dx\le\left(\int_{\Omega}|u|^{\alpha z}dx\right)^{1/z}\left(\int_{\Omega}|u|^{\beta y}dx\right)^{1/y}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür.

Tanım 2.10.4. Minkowski Eşitsizliği. $u,v\in L_p(\Omega)$ ve $p\ge1$ olmak üzere

$$\|u+v\|_{L_1(\Omega)}\le\|u\|_{L_p(\Omega)}+\|v\|_{L_p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.5. Sobolev Eşitsizliği. $n>1$ olmak üzere $\Omega\subset R^n$ açık olsun. $n>p$, $p\ge1$ ve $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)}\le C\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C=C(n,p)$ sabiti vardır.

$p>n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u\in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega}|u|\le C|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olur.

Tanım 2.10.6. Daraltma Dönüşümü

X bir metrik uzay olsun. Bir $T:X\to X$ dönüşümü verilsin eğer

$$d\left(T(x),T(y)\right)\le cd(x,y),\qquad x,y\in X$$

olacak şekilde bir $0\le c<1$ sabit sayısı varsa, T daraltma dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 2.10.1 (Daraltma Dönüşümü Prensibi) X tam bir metrik uzay, $T:X\to X$ c büzülme sabiti ile verilmiş bir daraltma dönüşümü olsun. $x_0\in X$ olsun ve tümevarımsal olarak

$$x_{n+1}=T(x_n),\ \ n\ge0$$

tanımlansın. T tek bir a sabit noktasına sahip, x_n dizisi a ya yakınsak ve

$$d(a,x_n)\leq c^n d(a,x_0)$$

dir.

Tanım 2.10.7 Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form)

i) $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları $[0,T]$ üzerinde toplanabilir negatif olmayan fonksiyonlar olsun. $\eta(\,.\,)$ fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde hemen hemen her t için

$$\eta'(t)\leq \phi(t)\eta(t)+\psi(t)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman tüm $0\leq t\leq T$ ler için

$$\eta(t)\leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t \psi(s)ds\right] \tag{2.14}$$

olur.

ii) Özel olarak, eğer $[0,T]$ üzerinde $\eta'\leq\phi\eta$ ve $\eta(0)=0$ ise o zaman $\eta\equiv 0$ olur.

İspat. Hemen hemen her $0\leq s\leq T$ için $\eta'(t)\leq\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$ eşitsizliğinden

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right)=e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\left(\eta'(s)-\phi(s)\eta(s)\right)\leq e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)$$

olduğu görülür. Bundan dolayı her bir $0\leq t\leq T$ için

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr}\leq\eta(0)+\int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)ds\leq\eta(0)+\int_0^t \psi(s)ds$$

elde edilir. Bu da (2.14) eşitsizliğinin sağlandığı anlamına gelir.

Tanım 2.10.8. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form)

i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1,C_2\geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t)\leq C_1\int_0^t \xi(s)ds+C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \le t \le T$ için

$$\xi(t) \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \le t \le T$ için

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

İspat. $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)\,ds$ olsun. Bu durumda $[0,T]$ de hemen hemen her yerde $\eta \le C_1\eta + C_2$ olur. Gronwall eşitsizliğinin yukarıdaki diferansiyel formuna göre:

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 t\right) = C_2 t e^{C_1 t}$$

dir. O zaman $\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2$ den

$$\xi(t) \le C_1\eta(t) + C_2 \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

Tanım 2.10.9. Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = \left(A_1(x), ..., A_n(x)\right)$ vektörü $i = 1, ..., n$ olmak üzere $A_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $divA(x) = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_\Omega divA(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\,n(x)\,dS$$

olup burada $n(x)$ Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektör olup bu formül *Ostrogradskii formülü* olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $\Delta u = div(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot div(\nabla u) = div(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradskii formülüne göre

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ olup bu formül *Green formülü* olarak bilinmektedir.

Teorem 2.10.2. (Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi)

$f:[a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a,b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

3. BÖLÜM

İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER PARABOLİK DENKLEMLER

İkinci basamaktan parabolik KDD, ısı denklemlerinin doğal genelleştirilmişidir. Bu bölümde uygun olarak tanımlanmış zayıf çözümlerin varlığı ve tekliği çalışılacaktır [16].

3.1. TANIMLAR

3.1.1. Parabolik Denklemler

$U \subset R^n$ açık, sınırlı bir bölge, $T > 0$ olmak üzere $U_T = U \times (0,T]$ olsun.

$$\left.\begin{array}{lll} u_t + Lu = f, & & (x,t) \in U_T \\ u = 0 & \partial U \times [0,T], & (x,t) \in U_T \\ u = g & U \times \{t=0\}, & (x,t) \in U_T \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

problemi üzerinde durulacaktır. Burada $f = U_T \to R$ ve $g = U \to R$ verilmiş fonksiyonlar ve $u = u(x,t)$ $u : \bar{U}_T \to R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur. L sembolü her bir t zamanı için ikinci mertebeden bir kısmi operatör olmak üzere a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1,...,n)$ katsayıları için diverjans formu

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x,t) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t) u_{x_i} + c(x,t)u \tag{3.2}$$

diverjans olmayan formu

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t) u_{x_i} + c(x,t)u \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.1. Tüm $(x,t) \in U_T$, $\xi \in R^n$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $\theta > 0$ sabiti varsa $\frac{\partial}{\partial t} + L$ kısmi diferansiyel operatörüne düzgün paraboliktir denir.

$a^{ij} \equiv \delta_{ij}, b_i \equiv c \equiv f \equiv 0;\ L = -\Delta$ olması durumunda KDD $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu$ ısı denklemine dönüşür. Burada ikinci mertebeden parabolik KDD nin çözümlerinin birkaç yoldan ısı denkleminin çözümüne benzer olduğu gösterilecektir.

İkinci mertebeden genel parabolik denklemler fiziksel uygulamalarda bir U bölgesinde, kimyasal konsantrasyon olarak adlandırılan u niceliğinin yoğunluğunun zaman evolosyonunu tanımlar. Burada ikinci mertebeden $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j}$ terimi difüzyonu, birinci mertebeden $\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$ terimi taşımayı ve sıfırıncı mertebeden cu terimi de oluşumu veya azalmayı belirtir.

3.1.2. Zayıf Çözümler

L nin (3.2) diverjans formuna sahip olduğu kabul edilsin ve (3.1) başlangıç sınır değer probleminin zayıf çözümü için uygun bir notasyon bulunsun. Bunun için

$$a^{ij}, b^i, c \in L^{\infty}(U_T)\ \ (i, j = 1, ..., n), \tag{3.5}$$

$$f \in L^2(U_T), \tag{3.6}$$

$$g \in L^2(U) \tag{3.7}$$

ve $a^{ij} = a^{ji}\ (i, j = 1, ..., n)$ olsun.

Şimdi $u, v \in H_0^1(U)$ ve hemen hemen her yerde $0 \le t \le T$ için

$$B[u, v; t] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\,.,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(.,t) u_{x_i} v + c(.,t) uv\, dx \tag{3.8}$$

şeklinde zamana bağımlı bilineer form tanımlansın.

3.1.2.1. Zayıf Çözümün Tanımlanmasına Giriş

$u = u(x,t)$ nin (3.1) parabolik denkleminin düzgün bir çözümü olduğu varsayılsın.

$$\mathrm{u}:[0,T]\rightarrow H_0^1(U)$$

olmak üzere

$$[\mathrm{u}(t)](x)=u(x,t) \quad (x\in U, 0\le t\le T)$$

şeklindeki dönüşüm u ile ilişkilendirilsin. Diğer bir deyişle, u x ve t nin bir fonksiyonu olarak değil de, $H_0^1(U)$ daki x in fonksiyonlarının t ye bağlı bir u dönüşümü olarak alınacaktır.

(3.1) problemine dönerek, benzer şekilde

$$\mathrm{f}:[0,T]\rightarrow L^2(U)$$

olmak üzere

$$[\mathrm{f}(t)](x)=f(x,t) \quad (x\in U, 0\le t\le T)$$

dönüşümü tanımlansın. $(.,.)$, $L^2(U)$ da iç çarpımı göstermek üzere, her bir $0\le t\le T$ için, $v\in H_0^1$ olacak şekilde bir fonksiyon alınır, $\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=f$ kısmi diferansiyel denklemi v ile çarpılır ve kısmi integral alınırsa

$$(\mathrm{u}',v)+B[\mathrm{u},v;t]=(\mathrm{f},v) \quad \left('=\frac{d}{dt}\right) \tag{3.9}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra $g^0=f-\sum_{i=1}^{n}b^i u_{x_i}-cu$ ve $g^j=\sum_{i=1}^{n}a^{ij}u_{x_i}$ $(j=1,...,n)$ için

$$u_t=g^0+\sum_{j=1}^{n}g^j_{x_j} \quad (x,t)\in U_T \tag{3.10}$$

olduğu göz önüne alınsın. Böylece (3.10) denkleminden ve $H^{-1}(U)$ nun tanımından (3.10) denkleminin sağ tarafının

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)}\le\left(\sum_{j=0}^{n}\|g^j\|^2_{L^2(U)}\right)^{\frac{1}{2}}\le C\left(\|u\|_{H_0^1(U)}+\|f\|_{L^2(U)}\right)$$

eşitsizliği ile $H^{-1}(U)$ da olduğu görülür.

Tanım 3.1.2.1.

$$\mathrm{u}\in L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right),\ \ \mathrm{u}'\in L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon

i) Her $v\in H_0^1(U)$ ve hemen hemen her yerde $0\le t\le T$ için

$$\langle \mathrm{u}',v\rangle + B[\mathrm{u},v;t] = (\mathrm{f},v)$$

ve

ii) $\mathrm{u}(0)=g$

şartlarını sağlıyorsa, (3.1) parabolik başlangıç sınır değer probleminin bir zayıf çözümü olarak adlandırılır.

3.2. Zayıf Çözümlerin Varlığı

3.2.1. Galerkin Yaklaşımları

$$\left.\begin{array}{lll} u_t+Lu=f, & & (x,t)\in U_T \\ u=0 & \partial U\times[0,T], & (x,t)\in U_T \\ u=g & U\times\{t=0\}, & (x,t)\in U_T \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

parabolik başlangıç-sınır değer probleminin zayıf çözümü önce sonlu boyutlu yaklaşımı kurulup daha sonra limite geçilerek oluşturulacaktır. Bu yöntem *Galerkin Metodu* olarak adlandırılır.

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty},\ H_0^1(U) \text{ nun bir ortagonal bazı} \tag{3.12}$$

ve

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty},\ L^2(U) \text{ nun bir ortanormal bazı} \tag{3.13}$$

olacak şekilde $w_k=w_k(x)$ $(k=1,...)$ düzgün fonksiyonları seçilsin.

Bir pozitif m sabit tamsayısı alarak $\mathrm{u}_m:[0,T]\to H_0^1(U)$ olmak üzere

$$\mathrm{u}_m(t)=\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\,w_k \tag{3.14}$$

yazılsın. Burada $d_m^k(t)\ (0 \le t \le T,\ k=1,...,m)$ katsayıları

$$d_m^k(0) = (g, w_k)\ (k=1,...,m) \tag{3.15}$$

$$(\mathrm{u}_m', w_k) + B[\mathrm{u}_m, w_k; t] = (\mathrm{f}, w_k)\ (0 \le t \le T,\ k=1,...,m) \tag{3.16}$$

denklemini sağlar.

Teorem 3.2.1.1. (Yaklaşık Çözümlerin Oluşturulması)

Her $m=1,2,...$ için (3.15) ve (3.16) yı sağlayan (3.14) formunda tek bir u_m fonksiyonu vardır.

İspat. u_m in (3.14) yapısına sahip olduğu kabul edilsin ve (3.13) kullanılarak

$$(\mathrm{u}_m'(t), w_k) = d_m^{k\prime}(t) \tag{3.17}$$

olur. Ayrıca $e^{kl}(t) = B[w_l, w_k; t]\ (k, l = 1,...,m)$ için

$$B[\mathrm{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) \tag{3.18}$$

dir. Ayrıca $f^k(t) = (\mathrm{f}(\mathrm{t}), w_k)\ (k=1,...,m)$ dır. Sonuç olarak (3.16) denklemi, (3.15) başlangıç şartlarına bağlı olarak

$$d_m^{k\prime}(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (k=1,...,m) \tag{3.19}$$

lineer adi diferansiyel denklemine dönüşür. Adi diferansiyel denklemlerdeki standart teoriye göre hemen hemen her yerde $0 \le t \le T$ için (3.15) ve (3.19) u sağlayan bir tek $\mathrm{d}_m(t) = (d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ sürekli fonksiyonu vardır. O zaman hemen hemen her yerde $0 \le t \le T$ için (3.14) ile tanımlanan u_m, (3.16) yı çözer.

3.2.2. Enerji Kestirimleri

Bu kısımda, amaç m yi sonsuza göndermek ve (3.15) ve (3.16) yaklaşık problemlerinin u_m çözümlerinin bir alt dizisinin (3.11) zayıf çözümüne yakınsadığı göstermektir. Bunun için düzgün kestirimlere ihtiyaç duyulacaktır.

Teorem 3.2.2.1 (Enerji kestirimleri)

$m=1,2,...$ için

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\mathrm{u}_m(t)\right\|_{L^2(U)}+\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)}+\left\|\mathrm{u}'_m\right\|_{L^2\left(0,T;H_0^{-1}(U)\right)}$$

$$\le C\left(\left\|\mathrm{f}\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(U)\right)}+\left\|g\right\|_{L^2(U)}\right) \tag{3.20}$$

olacak şekilde, sadece U, T ve L nin katsayılarına bağlı bir C sabiti vardır.

İspat. *1. Adım*: (3.16) denklemi $d_m^k(t)$ ile çarpılıp, $k=1,...,m$ için toplanır ve (3.14) kullanılırsa, hemen hemen her $0\le t\le T$ için

$$\left(\mathrm{u}'_m,\mathrm{u}_m\right)+B\left[\mathrm{u}_m,\mathrm{u}_m;t\right]=\left(\mathrm{f},\mathrm{u}_m\right) \tag{3.21}$$

denklemi elde edilir. $\beta>0,\gamma\ge 0$ olacak şekilde tüm $0\le t\le T$, $m=1,2,...$ için

$$\beta\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{H_0^1(U)}^2\le B\left[\mathrm{u}_m,\mathrm{u}_m;t\right]+\gamma\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2(U)}^2 \tag{3.22}$$

olur. Ayrıca her $0\le t\le T$ için $\left|\left(\mathrm{f},\mathrm{u}_m\right)\right|\le\frac{1}{2}\left\|\mathrm{f}\right\|_{L^2(U)}^2+\frac{1}{2}\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2(U)}^2$, $\left(\mathrm{u}'_m,\mathrm{u}_m\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2(U)}^2\right)$ dir. (3.21) denklemi hemen hemen her $0\le t\le T$ ve uygun C_1 ve C_2 sabitleri için

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2(U)}^2\right)+2\beta\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{H_0^1(U)}^2\le C_1\left\|\mathrm{u}_m\right\|_{L^2(U)}^2+C_2\left\|\mathrm{f}\right\|_{L^2(U)}^2 \tag{3.23}$$

eşitsizliğini sağlar.

2. Adım: Şimdi

$$\eta(t)=\left\|\mathrm{u}_m(t)\right\|_{L^2(U)}^2 \tag{3.24}$$

ve

$$\xi(t)=\left\|\mathrm{f}(t)\right\|_{L^2(U)}^2 \tag{3.25}$$

alınsın. O zaman (3.23) den hemen hemen her $0 \le t \le T$ için $\eta'(t) \le C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$ olur. Böylece Gronwall eşitsizliğinin diferansiyel formu

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s)\,ds\right) \qquad (0 \le t \le T) \tag{3.26}$$

kestirimini verir. (3.15) den $\eta(0) = \|\mathrm{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 \le \|\mathrm{g}\|_{L^2(U)}^2$ olduğundan ve (3.24)-(3.26) dan

$$\max_{0 \le t \le T} \|\mathrm{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \le C\left(\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

kestirimi elde edilir.

3. Adım: (3.23) eşitsizliğine bir daha dönerek, 0 dan T ye integre edilsin ve yukarıdaki eşitsizlik kullanılsın, o zaman

$$\|\mathrm{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 = \int_0^T \|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2\,dt \le C\left(\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

4. Adım: Her hangi bir $v \in H_0^1(U)$ için $v^1 \in span\{w_k\}_{k=1}^m$ ve $(v^2, w_k) = 0$ $(k = 1, \dots, m)$ olmak üzere $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ alınıp $v = v^1 + v^2$ yazılsın. $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ fonksiyonları $H_0^1(U)$ da ortogonal olduğundan $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \le \|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ olur. (3.16) denklemi kullanılarak her $0 \le t \le T$ için

$$(\mathrm{u}_m', v^1) + B[\mathrm{u}_m, v^1; t] = (\mathrm{f}, v^1)$$

olduğu görülür. (3.14) den

$$\langle \mathrm{u}_m', v \rangle = (\mathrm{u}_m', v) = (\mathrm{u}_m', v^1) = (\mathrm{f}, v^1) - B[\mathrm{u}_m, v^1; t]$$

olur. $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \le 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$|\langle \mathrm{u}_m', v \rangle| \le C\left(\|\mathrm{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\left\|u_m'\right\|_{H^{-1}(U)} \le C\left(\left\|f\right\|_{L^2(U)} + \left\|u_m\right\|_{H_0^1(U)}\right)$$

dir ve bu yüzden

$$\int_0^T \left\|u_m'\right\|_{H^{-1}(U)}^2 dt \le C\int_0^T \left\|f\right\|_{L^2(U)}^2 + \left\|u_m\right\|_{H_0^1(U)}^2 dt \le C\left(\left\|g\right\|_{L^2(U)}^2 + \left\|f\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(U)\right)}^2\right)$$

olur.

3.2.3. Varlık ve Teklik

(3.11) başlangıç sınır değer probleminin bir zayıf çözümünü bulabilmek için $m \to \infty$ iken limitlere geçilecektir.

Teorem 3.2.3.1 (Zayıf Çözümün Varlığı)

(3.11) bir zayıf çözüme sahiptir.

İspat. *1. Adım*: (3.20) enerji kestirimine göre $\left\{u_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)$ de ve $\left\{u_m'\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi de $L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$ de sınırlıdır.

Bundan dolayı, bir $\left\{u_{m_l}\right\}_{l=1}^{\infty} \subset \left\{u_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)$ ile $u' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$ dır. Öyle ki

$$\left.\begin{array}{l} L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right) \text{ de } \quad u_{m_l} \to u \text{ ya zayıf yakınsar} \\ L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right) \text{ de } \; u_{m_l}' \to u' \text{ ne zayıf yakınsar} \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

olur.

2. Adım: Bir N tamsayısı belirlensin ve $\left\{d^k\right\}_{k=1}^{N}$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t)\, w_k \tag{3.28}$$

formunda bir $v \in \left(C^1[0,T];H_0^1(U)\right)$ fonksiyonu seçilsin. $m \ge N$ seçilir, (3.16) $k = 1,...,N$ için $d^k(t)$ ile çarpılır ve daha sonra t ye göre integral alınırsa

$$\int_0^T \langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt \tag{3.29}$$

denklemi elde edilir. $m = m_l$ alınıp (3.27) dikkate alınırsa limit durumunda

$$\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\,dt \tag{3.30}$$

bulunur. Bu eşitlik $v \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ fonksiyonları için sağlanır. Çünkü (3.28) formundaki fonksiyonlar bu uzayda yoğundurlar. Bundan dolayı özellikle her bir $v \in H_0^1(U)$ ve hemen hemen her yerdeki $0 \le t \le T$ için

$$\langle u', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v) \tag{3.31}$$

olur. Ayrıca $u \in C([0, T]; L^2(U))$ dir.

3. Adım: $u(0) = g$ olduğunu ispatlamak için, ilk olarak (3.30) dan her bir $v \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$ için $v(T) = 0$ olmak üzere

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt + (u(0), v(0)) \tag{3.32}$$

bulunur. Benzer şekilde, (3.29) dan

$$\int_0^T -\langle v', u_m\rangle + B[u_m, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt + (u_m(0), v(0)) \tag{3.33}$$

çıkar. $m = m_l$ alınır ve (3.27) tekrar kullanılırsa $L^2(U)$ de $u_{m_l}(0) \to g$ olduğundan

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt + (g, v(0)) \tag{3.34}$$

eşitliği elde edilir. $v(0)$ keyfi olduğundan (3.32) ve (3.34) eşitlikleri karşılaştırılarak $u(0) = g$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.3.2. (Zayıf Çözümün Tekliği)

(3.11) in zayıf çözümü tektir.

İspat. Sadece (3.11) in zayıf çözümünün $f \equiv g \equiv 0$ ile

$$\mathrm{u} \equiv 0 \tag{3.35}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu içinde (3.31) özdeşliğinde $\mathrm{v} = \mathrm{u}$ alınarak ($\mathrm{f} \equiv 0$ için)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathrm{u}\|^2_{L^2(U)}\right) + B[\mathrm{u},\mathrm{u};t] = \langle \mathrm{u}',\mathrm{u}\rangle + B[\mathrm{u},\mathrm{u};t] = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir.

$$B[\mathrm{u},\mathrm{u};t] \geq \beta\|\mathrm{u}\|^2_{H^1_0(U)} - \gamma\|\mathrm{u}\|^2_{L^2(U)} \geq -\gamma\|\mathrm{u}\|^2_{L^2(U)}$$

olduğundan Gronwall eşitsizliği ve (3.36) denkleminden (3.35) özdeşliği oluşur.

4.BÖLÜM

LİNEER OLMAYAN PSEUDO-PARABOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN GLOBAL VARLIĞI

4.1.Giriş

Bu bölümde aşağıdaki lineer olmayan pseudo-parabolik denklem için Cauchy problemi ele alınacaktır [12].

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_x + f(v)_x = \varphi(v_x)_x + g(v) - \alpha g(v)_{xx},\ x \in R,\ \ t > 0 \qquad (4.1)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in R \qquad (4.2)$$

Burada $v(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, $\alpha, \beta > 0$ sabitler, γ bir reel sayı, $f(s),\ \varphi(s),\ g(s)$ verilen lineer olmayan fonksiyonlar ve $v_0(x)$ verilen başlangıç değer fonksiyonudur. x ve t alt simgeleri de kısmi türevleri göstermektedir.

Ayrıca

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} = g(v) - \alpha g(v)_{xx}, \qquad x \in R,\ \ t > 0 \qquad (4.3)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in R \qquad (4.4)$$

şeklindeki Cauchy problemi çalışılmıştır [12]. Burada $\alpha, \beta, g(s)$ ve $v_0(x)$ (4.1) ve (4.2) probleminde verildiği gibidir.

(4.1) denklemi bir çok model içerir. Örneğin $\gamma = 0,\ \beta = 1$ ve $f(s) = g(s) = 0$ ise model

$$v_t - \alpha v_{xxt} = v_{xx} + g(v) + F(v) \qquad (4.5)$$

denklemine indirgenir. Burada $F(v) = -\alpha\left[g''(v)v_x^2 + g'(v)v_{xx}\right]$ ile verilmiş lineer olmayan bir fonksiyon, $\alpha = \dfrac{h^2}{12}$, h latis uzayıdır ve $"'"$ v ye göre türev belirtir. Aslında çalıştıkları yeni model

$$v_{n,t} = \Delta_2 v_n + F(v_n) \tag{4.6}$$

idi. Burada n latis bölgesini işaret etmekte ve $\Delta_2 v_n = \dfrac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2}$ dir. (4.5) denklemi, uzamsal kesikli sistemlerin modellenmesinde Padé yaklaşımlarının temeli ve onların etkililiği üzerine kurulmuş bir sürekli modeldir. Bu durum bir-bileşenli (kesikli) reaksiyon-difüzyonlarına karşılık gelir. Padé metodunu kullanarak (4.5) şeklindeki en genel formu elde ettiler. [19] da matematikçiler nümerik metotlar kullanarak (4.5) denklemini çözüp sonuçları orijinal kesikli (4.6) problemi ile karşılaştırdılar. Fakat [19] da (4.5) denkleminin belirli problemleri için herhangi bir tartışma yoktur.

Eğer $\varphi(s) = g(s) = 0$ ise, (4.1) denklemi

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_x + f(v)_x = 0 \tag{4.7}$$

şeklindeki genelleştirilmiş düzgün uzun-dalga Burgers denklemine dönüşür. [6] da matematikçiler $f(s)$ verilmiş lineer olmayan bir fonksiyon ve $\gamma > 0$ bir sabit iken t sınırsız olarak büyüdüğünde (4.7) denkleminin Cauchy problemi için sonlu enerji ile başlayan çözümlerin sıfıra azaldığını göstermişlerdir.

Eğer $\beta = \gamma = 0$, $f(s) = g(s) = 0$ ve $g(v) = 0$, ancak $g(v)_{xx} \neq 0$ ise (4.1) denklemi $\alpha > 0$ bir sabit ve $g(s)$ verilmiş lineer olmayan fonksiyon olmak üzere

$$v_t - \alpha v_{xxt} = \alpha g(v)_{xx} \tag{4.8}$$

şeklindeki akışmaz difüzyon denklemine dönüşür. Bu denklem populasyon dinamiklerinde ortaya çıkmıştır. [26] da matematikçiler bazı $\gamma > 0$ için $\varphi(s)$ düzgün fonksiyonu

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \qquad 0 < \varphi(p) \leq \varphi(\delta), \qquad \forall p > 0$$

şartlarını sağladığında (4.8) denkleminin zayıf konulmuş problemi için çözümün varlığını ve kararlığını ispatlamışlardır.

Eğer $\beta = \gamma = 0$, $f(s) = g(s) = 0$ ise (4.1) denklemi

$$v_t - \alpha v_{xxt} = \varphi(v_x)_x \tag{4.9}$$

şeklindeki Sobolev-Galpern tipi denkleme dönüşür. [13] de (4.9) denkleminin başlangıç sınır değer problemi için zayıf çözümün global varlık ve tekliği ispatlanmıştır.

(4.1) tipindeki denklemler, 1972'de T.B. Benjamin, J.L. Bona ve J.J. Mahong [4] tarafından KdV denkleminin bir geliştirilmişi olan

$$v_t - v_{xxt} + v_x + vv_x = 0$$

şeklindeki iyi bilinen BBM denklemiyle yakından ilgilidir [4, 24]. O zamandan beri genelleştirilmiş BBM denkleminin çeşitleri için periyodik sınır değer problemi [4], Cauchy problemleri [1, 2, 3, 5, 41, 42] ve başlangıç sınır değer problemi [17] çalışılmaktadır. Bu sonuçlar arasında, en etkilileri çeşitli genelleştirilmiş BBM denklemleri için Cauchy problemlerinin çözümlerinin geniş zaman davranışları ve belli varsayımlar altında L^2 ve L^∞ un her ikisinde yukarıda bahsedilen kurulmuş problemlerin çözümlerinin azalmaları göz önüne alınarak yapılır [1, 2, 3, 5, 41, 42]. Örneğin, [3] de matematikçiler

$$v_t - v_{xxt} - \alpha v_{xx} + v_x + vv_x = 0, \quad \alpha > 0, \quad x \in R, \ t > 0 \tag{4.10}$$

Benjamin-Bona-Mahong-Burgers denkleminin çözümlerinin azalmasını çalışmışlardır. Küçük sınır değer problemleri için, [1] ve [2] de matematikçiler

$$v_t - v_{xxt} + v_x + v^p v_x = 0, \qquad p > 4 \tag{4.11}$$

bir boyutlu genelleştirilmiş BBM denkleminin çözümlerinin azalmasını çalışmışlardır.

Bu çalışmada, (4.1), (4.2) Cauchy problemi için $s \geq 2$ iken $C^1\left([0,\infty); H^s\right)$ de bir tek genelleştirilmiş global çözümünün ve $s > \frac{5}{2}$ iken $C^1\left([0,\infty); H^s\right)$ de bir tek klasik global çözümünün olduğu gösterilecektir.

Bu çalışma boyunca şu notasyonlar kullanılacaktır: L^p $\|.\|_p = \|.\|_{L^p}$ normu ile R üzerindeki tüm L^p fonksiyonlarının genel uzayını gösterir, ayrıca $\|.\| = \|.\|_2$ dir. H^s $\|h\|_{H^s} = \left\|(I - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}} h\right\|$ normu ile R üzerindeki Sobolev uzayını gösterir, burada s bir reel sayı, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, I birim operatör, $W^{m,p}$ $\|h\|_{m,p} = \sum_{k=0}^{m} \left\|D^k h\right\|_p$ normu ile R üzerinde Sobolev uzayını gösterir, burada $D = \frac{\partial}{\partial x}$ ve m bir tamsayıdır.

Bu çalışmada sırasıyla, önce (4.1) ve (4.2) Cauchy problemi için lokal çözümün varlığı ve tekliği daha sonra aynı problem için klasik global çözümün ve genelleştirilmiş global çözümün varlık ve tekliği ispatlanacaktır, son olarak da çözümün asimptotik davranışı verilecektir.

4.2. (4.1), (4.2) Problemi İçin Global Çözümlerin Varlık ve Tekliği

Bu kısımda

$$v(x,t)=u\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x,t\right) \tag{4.12}$$

dönüşümüyle (4.1) ve (4.2) Cauchy problemi aşağıdaki Cauchy problemine dönüşür.

$$u_t-u_{xxt}-\frac{\beta}{\alpha}u_{xx}+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x+g(u)-g(u)_{xx},\quad x\in R,\ t>0, \tag{4.13}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in R \tag{4.14}$$

Burada $u_0(x)=v_0(\sqrt{\alpha}x)$ olup, sadece (4.13) ve (4.14) Cauchy problemi için genelleştirilmiş global çözüm, global klasik çözüm ve asimptotik davranış çalışılacaktır. Çünkü (4.12) dönüşümüyle (4.13) ve (4.14) problemi (4.1) ve (4.2) Cauchy problemi için aynı sonuçları verir.

4.2.1. (4.13) ve (4.14) Problemi İçin Genelleştirilmiş Lokal Çözümün Varlık ve Tekliği

Şimdi, (4.13) ve (4.14) problemi ikinci basamaktan adi diferansiyel denklemlerin temel çözümleri yardımıyla bir integral denkleme indirgenecektir. Daraltma dönüşümü prensibiyle genelleştirilmiş lokal çözümün varlık ve tekliği ispatlanacak, yani, (4.13) ve (4.14) probleminin tek bir genelleştirilmiş lokal çözüme sahip olduğu gösterilecektir.

$u\in C^1\left([0,T);H^s\right)$ $(s\geq 2)$ fonksiyonunun (4.13) ve (4.14) probleminin bir genelleştirilmiş çözümü olduğu kabul edilsin. (4.13) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_t+\frac{\beta}{\alpha}u-g(u)-\left(u_t+\frac{\beta}{\alpha}u-g(u)\right)_{xx}=\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x \tag{4.15}$$

(4.15) denklemi yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_t+\frac{\beta}{\alpha}u-g(u)=(I-\partial_x^2)^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right]$$

$$=G*\left[\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right] \tag{4.16}$$

burada $u*v$

$$u*v(x)=\int_R u(y)v(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanan u ve v nin konvolüsyonudur ve $G(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

$$w(x)-\frac{d^2}{dx^2}w(x)=0$$

adi diferansiyel denkleminin temel çözümüdür. (4.14) ve (4.16) dan (4.13) ve (4.14) Cauchy probleminin

$$u(x,t)=u_0(x)-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t u(x,\tau)d\tau+\int_0^t g\left(u(x,\tau)\right)d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau \tag{4.17}$$

integral denklemine özdeş olduğu görülür.

Tanım 4.2.1.1. Herhangi bir $T>0$ için $s\geq 2$ olmak üzere $u_0\in H^s$ ve $u\in C\left(\left[0,T\right];H^s\right)$ fonksiyonları (4.17) integral denklemini sağlarsa, $u(x,t)$ ye (4.17) integral denkleminin sürekli çözümü veya (4.13) ve (4.14) probleminin genelleştirilmiş çözümü denir. Eğer $T<\infty$ ise o zaman $u\left(x,t\right)$ ye (4.13) ve (4.14) probleminin genelleştirilmiş lokal çözümü denir. Eğer $T=\infty$ ise o zaman $u\left(x,t\right)$ ye (4.13) ve (4.14) probleminin genelleştirilmiş global çözümü denir.

Daraltma dönüşümü prensibi yardımıyla (4.17) integral denklemi için sürekli lokal çözümün varlık ve tekliği ispatlanacaktır. Bunun için ilk olarak aşağıdaki lemmalar verilsin.

Lemma 4.1. [40] $s \geq 0$ olmak üzere $h(u) \in C^k(R)$, $h(0)=0$, $u \in H^s \cap L^\infty$ ve $k=[s]+1$ olsun. Eğer $\|u\|_\infty \leq M_0$ o zaman $K(M_0)$ M_0 a bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|h(u)\|_{H^s} \leq K(M_0)\|u\|_{H^s}$$

olur.

Lemma 4.2. [20] $s \geq 0$, $h(u) \in C^k(R)$ $\left(k=[s]+1\right)$ olsun. Eğer $u,v \in H^s \cap L^\infty$, $\|u\|_\infty \leq M_0$, $\|v\|_\infty \leq M_0$ ise o zaman

$$\|h(u)-h(v)\|_{H^s} \leq K_1(M_0)\|u-v\|_{H^s}$$

dır. Burada $K_1(M_0)$ M_0 a bağlı bir sabittir.

Lemma 4.3. (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği) [17] $1 \leq p \leq \infty$, $u(x,t) \in L^p(R)$, $J \subset [0,\infty)$ aralığı ve hemen hemen her t için $t \to \|u(.,t)\|_p$ fonksiyonu $L^1(J)$ de ise, o zaman

$$\left\|\int_J u(.,t)dt\right\|_p \leq \int_J \|u(.,t)\|_p \, dt$$

eşitsizliği geçerli olur.

$g(0)=0$ olduğu kabul edilsin. $s > \dfrac{3}{2}$ ve $u_0 \in H^s$ için

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(.,t)\|_{H^s}, \qquad \forall u \in X(T)$$

normu ile verilen

$$X(T) = \left\{ u \,\middle|\, u \in C\left([0,T];H^s\right)\right\}$$

Banach uzayı ele alınsın.

Sobolev gömme teoreminden $\forall u \in X(T)$ için $u,\, u_x \in C\left([0,T];L^\infty\right)$ ve $\|u\|_\infty \leq K_2\|u\|_{H^s}$, $\|u_x\|_\infty \leq K_2\|u\|_{H^s}$ olduğu biliniyor.

Bir S dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Sv(x,t)=u_0(x)-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t v(x,\tau)d\tau+\int_0^t g\left(v(x,\tau)\right)d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}v-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}v_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(v)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau,\ \forall v\in X(T) \qquad (4.18)$$

$g\in C^{[s]+1}(R),\ f\in C^{[s]}(R)$ ve $\varphi\in C^{[s]}\left(R\right)$ ise o zaman $S:X(T)\to X(T)$ olduğu açıktır.

Şimdi, herhangi bir $u_0\in H^s$ başlangıç değeri için $\|u_0\|_{H^s}=M$ olsun.

$$Q(M,T)=\left\{u\,\middle|\,u\in X(T),\ \|u\|_{X(T)}\le M+1\right\}$$

kümesi tanımlansın. $Q(M,T)$ her bir $M,T>0$ için $X(T)$ nin kapalı, konveks, sınırlı, boş olmayan bir alt kümesidir. Burada amaç S in $Q(M,T)$ de tek bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermektir.

Lemma 4.4. $s>\frac{3}{2},\ u_0\in H^s,\ g\in C^{[s]+1}(R),\ g(0)=0,\ f\in C^{[s]}(R),\ \varphi\in C^{[s]}(R)$ olduğu kabul edilsin. O zaman S $Q(M,T)$ yi $Q(M,T)$ ye dönüştürür ve eğer T M ye bağlıysa $S:Q(M,T)\to Q(M,T)$ kesin büzülmedir.

İspat. İlk olarak, yeteri kadar küçük T için S in $Q(M,T)$ yi kendi içine dönüştürdüğü ispatlanacaktır. $v\in Q(M,T)$ verilsin. Lemma 4.1 den

$$\|g(v(.,t))\|_{H^s}\le K(K_2M+K_2)\|v(.,t)\|_{H^s} \qquad (4.19)$$

olduğu görülür, burada $K(K_2M+K_2)$, K nın K_2M+K_2 ye bağlı bir sabit olduğunu gösterir.

$$\|G*v(.,t)\|_{H^s}=\left(\int_R\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\left(\left(I-\partial_x^2\right)^{-1}v\right)^{\wedge}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_R\frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|^2)^2}|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=\|v(.,t)\|_{H^{s-2}} \qquad (4.20)$$

olduğu basit bir hesaplamayla ortaya çıkar, burada “^” x e göre Fourier dönüşümünü gösterir. (4.20) ve Lemma 4.1 kullanılarak

$$\|G*v_x(.,t)\|_{H^s}=\|v_x(.,t)\|_{H^{s-2}}\le\|v(.,t)\|_{H^s}\,, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\|G*f(v(.,t))_x\|_{H^s}&=\|f(v(.,t))_x\|_{H^{s-2}}\le\|f(v(.,t))\|_{H^{s-1}}\\&\le K(K_2M+K_2)\|v(.,t)\|_{H^s}\,,\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\left\|G*\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(.,t)\right)_x\right\|_{H^s}&=\left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(.,t)\right)_x\right\|_{H^{s-2}}\le\left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(.,t)\right)\right\|_{H^{s-1}}\\&\le K\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v_x(.,t)\|_{H^{s-1}}\\&\le K\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v(.,t)\|_{H^s}\end{aligned} \tag{4.23}$$

olduğu görülür. Böylece (4.18)-(4.23), Lemma 4.1 ve Lemma 4.3 den

$$\|Sv\|_{H^s}\le\|u_0\|_{H^s}+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|v(x,\tau)\|_{H^s}\,d\tau+\int_0^t\|g(v(x,\tau))\|_{H^s}\,d\tau$$

$$+\int_0^t\left\|G*\left[\frac{\beta}{\alpha}v-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}v_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(v)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x\right)_x\right](.,\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

$$\le M+(M+1)\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)K(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right]T \tag{4.24}$$

bulunur. T yeteri kadar küçük seçilerek

$$(M+1)\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)K(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right]T<1 \tag{4.25}$$

elde edilir. Buradan $\|Sv\|_{X(T)}\le M+1$ olur, yani $S:Q(M,T)\to Q(M,T)$ dir.

Şimdi S dönüşümünün kesin bir büzülme olduğu gösterilecektir. $T>0$ olsun ve $v_1,v_2\in Q(M,T)$ verilsin. O zaman

$$Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]d\tau+\int_0^t[g(v_1(x,\tau))-g(v_2(x,\tau))]d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left\{\frac{\beta}{\alpha}(v_1-v_2)-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}(v_{1x}-v_{2x})-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[f(v_1)_x-f(v_2)_x\right]+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right]\right\}(x,\tau)\,d\tau \tag{4.26}$$

olur. Lemma 4.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}\|Sv_1-Sv_2\|_{H^s} &\le \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|v_1(.,\tau)-v_2(.,\tau)\|_{H^s}\,d\tau+\int_0^t\|g(v_1(.,\tau))-g(v_2(.,\tau))\|_{H^s}\,d\tau\\ &+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|G*(v_1-v_2)(.,\tau)\|_{H^s}\,d\tau+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\|G*(v_{1x}-v_{2x})(.,\tau)\|_{H^s}\,d\tau\\ &+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\|G*[f(v_1)_x-f(v_2)_x](.,\tau)\|_{H^s}\,d\tau\\ &+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\left\|G*\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right](.,\tau)\right\|_{H^s}d\tau\end{aligned} \tag{4.27}$$

sonucu elde edilir. Lemma 4.2 den

$$\|g(v_1(.,t))-g(v_2(.,t))\|_{H^s}\le K_1(K_2M+K_2)\|v_1(.,t)-v_2(.,t)\|_{H^s} \tag{4.28}$$

olduğu görülür. (4.20)- (4.23) ün ispatına benzer olarak

$$\|G*(v_1-v_2)(.,t)\|_{H^s}\le\|v_1(.,t)-v_2(.,t)\|_{H^s}\,, \tag{4.29}$$

$$\|G*(v_{1x}-v_{2x})(.,t)\|_{H^s}\le\|v_1(.,t)-v_2(.,t)\|_{H^s}\,, \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\|G*[f(v_1)_x-f(v_2)_x](.,t)\|_{H^s} &\le\|f(v_1(.,t))_x-f(v_2(.,t))_x\|_{H^{s-2}}\\ &\le\|f(v_1(.,t))-f(v_2(.,t))\|_{H^{s-1}}\\ &\le K_1(K_2M+K_2)\|v_1(.,t)-v_2(.,t)\|_{H^s}\,,\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\left\|G*\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right](.,t)\right\|_{H^s} &\le\left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}(.,t)\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}(.,t)\right)_x\right\|_{H^{s-2}}\\ &\le\left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}(.,t)\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}(.,t)\right)_x\right\|_{H^{s-1}}\end{aligned}$$

$$\leq K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\left\|v_{1x}(.,t)-v_{2x}(.,t)\right\|_{H^{s-1}}$$

$$\leq K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\left\|v_1(.,t)-v_2(.,t)\right\|_{H^s} \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.28)-(4.32) (4.27) de yerine konulursa,

$$\left\|Sv_1-Sv_2\right\|_{X(T)}\leq\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)K_1(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right]T\left\|v_1-v_2\right\|_{X(T)}$$

olduğu sonucuna varılır. (4.25) sağlanacak şekilde T yeteri kadar küçük seçilir ve

$$\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)K_1(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right]T\leq\frac{1}{2} \tag{4.33}$$

alınırsa $\left\|Sv_1-Sv_2\right\|_{X(T)}\leq\frac{1}{2}\left\|v_1-v_2\right\|_{X(T)}$ olur. Diğer bir deyişle, S $Q(M,T)$ yi $Q(M,T)$ ye dönüştürür ve S kesin büzülmedir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1.1. $s\geq 2,\ \ u_0\in H^s,\ \ g\in C^{[s]+1}(R),\ g(0)=0;\ f\in C^{[s]}(R),\ \varphi\in C^{[s]}(R)$ olduğu kabul edilsin. O zaman $[0,T_0)$ maksimal aralık olmak üzere (4.13) ve (4.14) problemi tek bir genelleştirilmiş lokal $u\in C^1\left([0,T_0);H^s\right)$ çözümüne sahiptir. Ayrıca, eğer

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\left\|u(.,t)\right\|_{H^s}<\infty \tag{4.34}$$

ise o zaman $T_0=\infty$ olur.

İspat. Lemma 4.4 ve daraltma prensibinden uygun seçilmiş $T>0$ için S dönüşümü (4.17) integral denkleminin çözümü olan bir tek $u\in Q(M,T)$ sabit noktasına sahiptir. Her bir $T'>0$ için (4.17) integral denklemi $X(T')$ ne ait olan en çok bir çözüme sahiptir. Gerçekten, $u_1,u_2\in X(T')$ verilen (4.17) denkleminin iki çözümü olsun, o zaman

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\left[u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)\right]d\tau+\int_0^t\left[g\left(u_1(x,\tau)\right)-g\left(u_2(x,\tau)\right)\right]d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left\{\frac{\beta}{\alpha}(u_1-u_2)-\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}(u_{1x}-u_{2x})-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}[f(u_1)_x-f(u_2)_x]+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_{2x}\right)_x\right]\right\}(x,\tau)\,d\tau \tag{4.35}$$

olur. Lemma 4.4 deki metot kullanılarak, (4.35) den

$$\left\|u_1(.,t)-u_2(.,t)\right\|_{H^s}\le C\int_0^t\left\|u_1(.,\tau)-u_2(.,\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

elde edilir. Burada C sabiti $\sup_{0\le t\le T}\|u_1(.,t)\|_\infty$, $\sup_{0\le t\le T}\|u_2(.,t)\|_\infty$, $\sup_{0\le t\le T}\|u_{1x}(.,t)\|_\infty$ ve $\sup_{0\le t\le T}\|u_{2x}(.,t)\|_\infty$ a bağlıdır. Gronwall eşitsizliğinden $\|u_1-u_2\|_{H^s}=0$ çıkar. Yani (4.17) denkleminin $X(T')$ ne ait olan en çok bir çözümü vardır.

Şimdi, $[0,T_0)$ $u\in X(T_0)$ ın maksimal varlık zaman aralığı olsun. Sadece (4.34) ün sağlandığı gösterilirse $T_0=\infty$ olduğu görülür.

(4.34) ün sağlandığı ve $T_0<\infty$ olduğu kabul edilsin. Herhangi bir $T'\in[0,T_0)$ için

$$w(x,t)=u(x,T')-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t w(x,\tau)d\tau+\int_0^t g\left(w(x,\tau)\right)d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}w-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}w_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(w)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}w_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau \tag{4.36}$$

integral denklemi ele alınsın.

(4.34) den dolayı, $\|u(.,T')\|_{H^s}$ $T'\in[0,T_0)$ civarında düzgün süreklidir, ki bu da her $T'\in[0,T_0)$ için (4.36) integral denkleminin bir tek $w\in X(T^*)$ çözümüne sahip olmasını sağlayacak şekilde bir $T^*\in(0,T_0)$ seçilmesini sağlar. Öyle bir T^* ın varlığı Lemma 4.4 ve daraltma dönüşümü prensibinden gösterilir. Özel olarak (4.25) ve (4.33) den T^* ın $T'\in[0,T_0)$ dan bağımsız olarak seçilebileceği görülür. $w(x,t)$, (4.36) integral denklemine karşılık gelen çözüm olmak üzere $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$ alınarak

$$\hat{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & t\in[0,T']\\ w(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]\end{cases} \tag{4.37}$$

şeklindeki $\hat{u}(x,t)$ fonksiyonu tanımlansın. $\hat{u}(x,t)$, $\left[0, T_0+\frac{T^*}{2}\right]$ üzerinde (4.17) integral denkleminin bir çözümüdür ve lokal teklik ile $\hat{u}(x,t)$ $u(x,t)$ ye genişletilebilir. Bu $[0,T_0)$ ın maksimalliğini bozar. Böylece eğer (4.34) sağlanırsa, o zaman $T_0=\infty$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.2.2. (4.13) ve (4.14) Problemi İçin Global Çözümün Varlık ve Tekliği

Burada (4.13) ve (4.14) problemi için genelleştirilmiş global çözüm ve global klasik çözümün varlık ve tekliği ispatlanacaktır. Bunun için, ilk olarak aşağıdaki lemma aktarılsın.

Lemma 4.5. [39] $s=m+\frac{1}{2}+\lambda,\ \lambda\in(0,1),\ m\in Z_+$ (Z_+ negatif olmayan tamsayıların kümesi) olduğu kabul edilsin, o zaman $H^s(R)$ $C^{m,\lambda}(R)$ ye gömülür ve herhangi bir $h\in H^s(R)$ için

$$\left|D^k h(x)\right|\to 0 \qquad \left(|x|\to\infty\right),\ \forall k\in Z_+,\ 0\le k\le m$$

elde edilir. Burada $C^{m,\lambda}(R)$ Hölder uzayını gösterir ve $D=\frac{d}{dx}$ dir.

Teorem 4.2.2.1.

1) $s\ge 2,\ u_0\in H^s,$

2) $f\in C^{[s]}(R),$

3) $g\in C^{[s]+1}(R),\ g(0)=0$ ve C_0 bir sabittir, öyle ki herhangi bir $s\in R$ için,

$\frac{d}{ds}g(s)=g'(s)\le C_0,$

4) $\varphi\in C^{[s]}(R)$ ve herhangi bir $s\in R,\ \varphi(s)s\ge 0$ ya da öyle bir C_1 sabiti vardır ki,

$\varphi'(s)\ge C_1$ dir

şartlarının sağlandığı kabul edilsin.

O zaman (4.13) ve (4.14) Cauchy problemi bir tek $u\in C^1\left([0,\infty);H^s\right)$ genelleştirilmiş global çözümüne sahiptir.

İspat. Teorem 4.2.1.1 den dolayı sadece (4.34) şartının sağladığını ispatlamak yeterlidir. (4.13) ün her iki tarafı $u(x,t)$ ile çarpılıp R üzerinde x e göre integral alınırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u(.,t)\|^2+\|u_x(.,t)\|^2\right]+\frac{\beta}{\alpha}\|u_x(.,t)\|^2+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int_R u(x,t)u_x(x,t)dx$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_R f\left(u(x,t)\right)_x u(x,t)dx-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_R \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_x u(x,t)dx$$

$$=\int_R g\left(u(x,t)\right)u(x,t)dx-\int_R g\left(u(x,t)\right)_{xx}u(x,t)dx \tag{4.38}$$

elde edilir. Lemma 4.5 den ve kısmi integrasyondan

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int_R u(x,t)u_x(x,t)dx=\frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha}}\int_R \frac{d}{dx}u^2(x,t)dx=0 \tag{4.39}$$

$$\int_R f\left(u(x,t)\right)_x u(x,t)dx=-\int_R \frac{d}{dx}\left(\int_0^{u(x,t)} f(s)ds\right)dx=0 \tag{4.40}$$

elde edilir.

Eğer herhangi bir $s\in R$ için $\varphi(s)s\geq 0$ ise kısmi integrasyonla

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_R \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_x u(x,t)dx=\int_R \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)dx\geq 0 \tag{4.41}$$

bulunur. Eğer $\varphi'(s)\geq C_1$ ise ortalama değer teoreminden $0<\theta_1<1$ için

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_R \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_x u(x,t)dx=-\int_R\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)-\varphi(0)\right]_x\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u(x,t)dx$$

$$=\int_R \varphi'\left(\frac{\theta_1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)\frac{1}{\alpha}u_x^2(x,t)dx$$

$$\geq\frac{C_1}{\alpha}\|u_x(x,t)\|^2 \tag{4.42}$$

olduğu bulunur. Ayrıca $0<\theta_2<1$ için

$$\int_R g\left(u(x,t)\right)u(x,t)dx=\int_R\left[g\left(u(x,t)\right)-g(0)\right]u(x,t)dx$$

$$= \int_R g'\left(\theta_2 u(x,t)\right) u^2(x,t)dx \le C_0 \|u(.,t)\|^2 \qquad (4.43)$$

elde edilir.

$$-\int_R g\left(u(x,t)\right)_{xx} u(x,t)dx = \int_R g'\left(u(x,t)\right) u_x^2(x,t)dx \le C_0 \|u_x(.,t)\|^2 \qquad (4.44)$$

olur. (4.39)-(4.41), (4.43) ve (4.44), (4.38) de yerine yazılır ya da (4.39), (4.40) ve (4.42)-(4.44), (4.38) de yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u(.,t)\|^2 + \|u_x(.,t)\|^2\right] \le |C_0| \|u(.,t)\|^2 + \left(|C_0| + \frac{|C_1|}{\alpha}\right)\|u_x(.,t)\|^2$$

olur. Gronwall eşitsizliğinden

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(.,t)\|_{H^1} \le C_2(T) \qquad (4.45)$$

olur. Sobolev gömme teoreminden $\|u(.,t)\|_\infty \le C_3(T)$ olur.

(4.17) den

$$\|u(.,t)\|_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t \|u(.,\tau)\|_{H^s} d\tau + \int_0^t \left\|g\left(u(.,\tau)\right)\right\|_{H^s} d\tau$$

$$+\int_0^t \left\| G * \left[\frac{\beta}{\alpha}u - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(u)_x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right](.,\tau)\right\|_{H^s} d\tau \qquad (4.46)$$

olduğu görülür. Lemma 4.4 deki aynı metot ile (4.45) kullanılarak, (4.46) dan

$$\|u(.,t)\|_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s} + C_4(T)\int_0^t \|u(.,\tau)\|_{H^s} d\tau$$

bulunur. Gronwall eşitsizliği (4.34) ü verir. $T_0 = \infty$ olduğu teorem 4.2.1.1 den görülür. Bu, teorem 4.2.2.1 nin ispatını tamamlar.

4.3. (4.2) ve (4.3) İçin Çözümün Asimptotik Davranışı

Teorem 4.3.1. $u(x,t)$, (4.2) ve (4.3) problemi için global klasik çözüm veya genelleştirilmiş global çözüm olsun. Eğer $u_0 \in H^1$, $f \in C^1(R)$, $g \in C^2(R)$, $g(0) = 0$ ve

$\forall s \in R,\ g'(s) \le C_0 < 0;\ \varphi(s)s \ge 0$ veya $\varphi \in C^1(R)$ ise $\forall s \in R$ için $\varphi'(s) \ge C_1$ olacak şekilde bir $C_1 \ge -\beta$ sabiti vardır ve $u(x,t)$

$$\|u(.,t)\|^2 + \|u_x(.,t)\|^2 \le \left(\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2\right)e^{2C_0 t}, \quad t \ge 0 \tag{4.47}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (4.38)-(4.44) den $\forall s \in R$ için $\varphi(s)s \ge 0$ yada $C_1 \ge -\beta$ dan

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(.,t)\|^2 + \|u_x(.,t)\|^2\right) \le 2C_0\left(\|u(.,t)\|^2 + \|u_x(.,t)\|^2\right)$$

olur. (4.47) yukarıdaki eşitsizlikten sağlanır. Böylece teorem 4.3.1 ispatlanır.

5.BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN PSEUDO-PARABOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN GLOBAL VARLIĞI

5.1. Giriş

Bu bölümde

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} = g(u)_{xx}, \qquad x \in R,\ \ t > 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.2}$$

şeklindeki lineer olmayan parabolik denklem için Cauchy problemini çalışacağız. Bu Cauchy probleminin global çözümünün varlığını, tekliğini ve verilere sürekli bağımlılığını ispatlayarak iyi konulmuş bir problem olduğunu göstereceğiz.

Burada $\varphi(x)$ verilmiş başlangıç fonksiyonunu ve g, $g(0) = 0$ olacak şekilde reel değerli lineer olmayan bir fonksiyonu gösterir.

5.2. Lineerleştirilmiş Denklem İçin Cauchy Problemi

Bu kısımda (5.1) ve (5.2) Cauchy probleminin lineer versiyonu tanımlanacak ve çözüm için gerekli olacak kestirim ispatlanacaktır.

Teorem 5.2.1. $s \in R$ olsun. Herhangi bir $T > 0$ için $\varphi \in H^s$ ve $h \in L^1([0,T];H^s)$ olduğunu kabul edelim. O zaman Cauchy problemi

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} = \left(h(x,t)\right)_{xx}, \qquad x \in R,\ \ t > 0 \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.4}$$

lineer denklemi için bir tek $u \in C([0,T];H^s)$ çözümüne sahiptir ve

$$\|u(t)\|_{H_s} \le \left(\|\varphi\|_{H^s} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{H^s}\, d\tau\right), \qquad 0 \le t \le T \tag{5.5}$$

kestirimi geçerlidir.

İspat. (5.3) denklemine x e göre Fourier dönüşümünü uygularsak

$$\left(1+\xi^2\right)\hat{u}_t+\left(1+\xi^2\right)\xi^2\hat{u}=-\xi^2\left(\hat{h}(\xi,t)\right)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin her iki tarafını $\left(1+\xi^2\right)$ ile bölersek problem

$$\hat{u}_t+\xi^2\hat{u}=-\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\hat{h}(\xi,t) \tag{5.6}$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi) \tag{5.7}$$

şeklini alır. Kısmi diferansiyel denklemin ξ parametresine göre homojen olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştüğünü görürüz. Bu adi diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için denklemin her iki tarafı $e^{\xi^2 t}$ integral çarpanı ile çarpılırsa denklem

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\xi^2 t}\hat{u}(\xi,t)\right)=-\frac{\xi^2 e^{\xi^2 t}}{1+\xi^2}\hat{h}(\xi,t)$$

şeklinde tam diferansiyel formuna dönüşür. Daha sonra sırasıyla aşağıdaki işlemleri yaparak denklemin çözümünü buluruz.

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\xi^2\tau}\hat{u}(\xi,\tau)\right)d\tau=-\int_0^t \frac{\xi^2 e^{\xi^2\tau}}{1+\xi^2}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

$$e^{\xi^2 t}\hat{u}(\xi,t)-\hat{u}(\xi,0)=-\left(\int_0^t \frac{\xi^2 e^{\xi^2\tau}}{1+\xi^2}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau\right) \tag{5.8}$$

(5.8) denklemine başlangıç koşulunu uygularsak

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-\xi^2 t}\hat{\varphi}(\xi)-e^{-\xi^2 t}\left(\int_0^t \frac{\xi^2 e^{\xi^2\tau}}{1+\xi^2}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau\right) \tag{5.9}$$

eşitliğini elde ederiz.

$u(x,t)$ nin H^s deki normu ile ilgili kestirim elde etmek için

$$\|w\|_{H^s}^2=\left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{w}(\xi)\right\|^2=\int_R\left(1+\xi^2\right)^s\left|\hat{w}(\xi)\right|^2 d\xi$$

şeklindeki Fourier dönüşümüyle ilgili normu kullanacağız.

$$\hat{v}_1 = \hat{\varphi}(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

$$\hat{v}_2 = -\int_0^t \frac{\xi^2 e^{-\xi^2(t-\tau)}}{1+\xi^2} \hat{h}(\xi,\tau) d\tau$$

alınarak $u = v_1 + v_2$ şeklinde yazılırsa

$$\|u\|_{H^s} \le \|v_1\|_{H^s} + \|v_2\|_{H^s} \tag{5.10}$$

olur. Bundan dolayı her terim için ayrı kestirim elde etmemiz gerekir.

İlk terim için

$$\|v_1\|_{H^s}^2 = \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 e^{-2\xi^2 t} d\xi$$

$$\le \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

olup

$$\|v_1\|_{H^s} \le \|\varphi\|_{H^s}$$

elde ederiz. Burada $t \ge 0$ için $e^{-2\xi^2 t} \le 1$ eşitsizliğini kullandık.

İkinci terimi de benzer şekilde buluruz.

$$\|v_2\|_{H^s} = \left\| -\int_0^t \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\xi^2 e^{-\xi^2(t-\tau)}}{1+\xi^2} \hat{h}(\xi,\tau) d\tau \right\|$$

integraller için Minkowski eşitsizliğinden

$$\|v_2\|_{H^s} \le \int_0^t \left\| \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\xi^2 e^{-\xi^2(t-\tau)}}{1+\xi^2} \hat{h}(\xi,\tau) \right\| d\tau = \int_0^t \|J(\tau)\| d\tau$$

elde edilir. Yukarıdakine benzer olarak

$$\|J(\tau)\|^2 = \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\xi^4 e^{-2\xi^2(t-\tau)}}{\left(1+\xi^2\right)^2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

$$\leq e^{-2\xi^2 t}\int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

buluruz. Burada $t \geq 0$ için $e^{-2\xi^2 t} \leq 1$, $\dfrac{\xi^4}{\left(1+\xi^2\right)^2} \leq 1$ ve $0 \leq \tau \leq t$ olduğundan $t-\tau \leq t$ eşitsizliklerini kullandık.

Böylece

$$\left\|J(\tau)\right\| \leq \left\|h(\tau)\right\|_{H^s}$$

olduğunu elde ettik. Buradan da

$$\left\|\hat{v}_2\right\|_{H^s} \leq \int_0^t \left\|h(\tau)\right\|_{H^s} d\tau$$

bulunur. Bu kestirimleri (5.10) da yerine yazarsak

$$\left\|u(t)\right\|_{H^s} \leq \left(\left\|\varphi\right\|_{H^s} + \int_0^t \left\|h(\tau)\right\|_{H^s} d\tau\right) \tag{5.11}$$

olduğunu elde ederiz.

5.3. Lineer Olmayan Problem İçin Lokal Varlık ve Teklik

Bu kısımda (5.1) ve (5.2) Cauchy problemi için lokal varlık ve teklik ispatlanacaktır. Lokal varlık ile kastedilen küçük zaman aralığında çözümün var olmasıdır. Bunun için ilk olarak uygun uzay tanımlayalım.

$s > \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$ ve $T > 0$ için

$$X(T) = \left\{u \,\middle|\, u \in C\left([0,T];H^s\right)\right\}$$

şeklindeki Banach uzayını ele alalım. Bu uzayda norm

$$\left\|u\right\|_{X(T)} = \max_{0\leq t\leq T}\left\|u(t)\right\|_{H^s}$$

ile verilir. Sobolev gömme teoreminden R de $s > \dfrac{1}{2}$ için $H^s \subset L^\infty$ olup d pozitif sabiti için $\left\|\,.\,\right\|_\infty \leq d\left\|\,.\,\right\|_{H^s}$ dir. Böylece $u \in X(T)$ için $u \in C\left([0,T];L^\infty\right)$ ve $\left\|u(t)\right\|_\infty \leq d\left\|u(t)\right\|_{H^s}$ olur.

Şimdi herhangi bir $\varphi \in H^s$ için $\|\varphi\|_{H^s} = a$ olsun. $A > 0$ olacak şekilde

$$Y(A,T) = \left\{ u \in X(T) \middle| \|u(t)\|_{X(T)} \leq A \right\}$$

şeklindeki $X(T)$ nin kapalı bir alt kümesini tanımlayalım. Burada A a nın cinsindendir. $w \in Y(A,T)$ için

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} = g(w)_{xx} \tag{5.12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.13}$$

probleminin $g(w(x,t)) = h(x,t)$ ile (5.3) ve (5.4) problemine indirgeneceği görülür. Böylece Teorem 5.2.1 uygulanabilir. $u(x,t)$, (5.12) ve (5.13) probleminin tek çözümü olmak üzere, $S(w) = u(x,t)$ alalım. Burada S, w yi (5.12) ve (5.13) ün tek çözümüne götüren dönüşümdür. Amacımız A ya bağlı uygun seçilen T için S nin $Y(A,T)$ de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermektir.

Lemma 5.1. $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$ ve $g \in C^{[s]+1}(R)$ olduğunu kabul edelim. O zaman yeteri kadar küçük T için S, $Y(A,T)$ den kendi içine bir daraltma dönüşümüdür.

İspat. $w \in Y(A,T)$ olsun. O zaman $t \in [0,T]$ için

$$\|w(t)\|_\infty \leq d\|w(t)\|_{H^s} \leq d\|w(t)\|_{X(T)} \leq d(A)$$

olur. Sobolev gömme teoreminden ve Lemma 4.1 den

$$\|g(w(t))\|_{H^s} \leq K_1(d(A))\|w(t)\|_{H^s}$$

olup, burada $K(d(A))$ d ye ve A ya bağlı bir sabittir.

$$\|S(w)\|_{X(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^s}$$

$$\leq \left(\|\varphi\|_{H^s} + \int_0^t \|g(w(\tau))\|_{H^s} \, d\tau \right)$$

$$\leq \|\varphi\|_{H^s} + T\left(\max_{0\leq t\leq T}\|g(w(t))\|_{H^s}\right)$$

$$\leq \|\varphi\|_{H^s} + TK_1(d(A))\|w(t)\|_{X(T)}$$

$$\leq a + TK_1(dA)A$$

elde edilir. $a+TK_1(dA)A \leq A$ olacak şekilde T yeterince küçük seçilirse $S(w)_{X(T)} \leq A$ olur. Bundan dolayı $S: Y(A,T) \to Y(A,T)$ bir dönüşümdür.

Şimdi S dönüşümünün kesin büzülme olduğunu ispatlayacağız. $w, \tilde{w} \in Y(A,T)$ ve $u = S(w), \tilde{u} = S(\tilde{w})$ olsun. $V = u - \tilde{u},\ W = w - \tilde{w}$ alalım. O zaman V

$$V_t - V_{xx} - V_{xxt} + V_{xxxx} = \left(g(w) - g(\tilde{w})\right)_{xx} \tag{5.14}$$

$$V(x,0) = 0 \tag{5.15}$$

sağlar. Lemma 4.2 nin kullanılmasıyla

$$\|V(t)\|_{H^s} \leq \int_0^t \|g(w(\tau)) - g(\tilde{w}(\tau))\|_{H^s}\, d\tau$$

$$\leq \int_0^t K_2(dA)\|w(\tau) - \tilde{w}(\tau)\|_{H^s}\, d\tau$$

$$= \int_0^t K_2(dA)\|W(t)\|_{H^s}\, d\tau$$

$$\leq TK_2(dA)\max_{0\leq t\leq T}\|W(t)\|_{H^s}$$

bulunur. Böylece

$$\|V(t)\|_{X(T)} \leq TK_2(dA)\|W(t)\|_{X(T)}$$

elde edilir. Burada T yeteri kadar küçük seçilirse $TK_2(dA) \leq \frac{1}{2}$ olur. S bir daraltmadır. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.1. $s > \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in H^s, g \in C^{[s]+1}(R)$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.1) ve (5.2) probleminin $[0, T_0)$ maksimal zaman aralığında tanımlanan bir tek $u(x,t) \in C([0, T_0); H^s)$ çözümü vardır. Ayrıca

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|u(t)\|_{H^s} < \infty \tag{5.16}$$

ise o zaman $T_0 = \infty$ olur.

İspat. Lemma 5.1 ve daraltma dönüşümü prensibinden, uygun seçilen $T > 0$ için S (5.1) ve (5.2) probleminin çözümü olan bir tek $u(x,t) \in Y(A,T)$ sabit noktasına sahiptir. Her bir $T' > 0$ için $X(T')$ ne ait çözümün tekliğini ispat etmek zor değildir.

$u_1, u_2 \in X(T')$ (5.1) ve (5.2) nin iki çözümü olsun. $u = u_1 - u_2$ olsun. O zaman

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} = \left(g(u_1) - g(u_2)\right)_{xx}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denkleme Λ^{-2} operatörünü uygulayalım. Burada Λ^2, $-\partial_x^{\ 2}$ operatörüdür. Denklem

$$\Lambda^{-2}u_t + u + u_t - u_{xx} = -\left(g(u_1) - g(u_2)\right)$$

şekline dönüşür. Bu denklemin her iki tarafını u ile çarpıp R üzerinde x e göre integre edelim. $(.,.)$ L^2 uzayında iç çarpımı göstersin, yani $(f,g) = \int_R fg\,dx$ dir. O zaman denklem

$$\left(\Lambda^{-2}u_t + u + u_t - u_{xx} + \left(g(u_1) - g(u_2)\right), u\right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\left(\Lambda^{-1}u_t, \Lambda^{-1}u\right) + (u,u) + (u_t, u) - (u_{xx}, u) + \left(\left(g(u_1) - g(u_2)\right), u\right) = 0$$

elde edilir. Denklem son olarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\Lambda^{-1}u\right\|^2 + \|u\|^2\right] + \|u_x\|^2 + \|u\|^2 = -\int_R \left(g(u_1) - g(u_2)\right)u\,dx \tag{5.17}$$

halini alır. $X(T')$ tanımından, $s>\frac{1}{2}$ ve Sobolev gömme teoreminden $0\le t\le T'<T$ için $\|u_i(t)\|_\infty \le C_1(T')$ $i=1,2$ dir, burada $C_1(T')$ T' ne bağlı bir sabittir. Böylece, Cauchy eşitsizliğinden

$$\left|\int_R \left(g(u_1)-g(u_2)\right)udx\right| \le \|g(u_1)-g(u_2)\|_2 \|u\|_2 \le C_2(T')\|u\|_2\|u\|_2$$

elde edilir. Burada $C_2(T')$, $C_1(T')$ ne bağlı bir sabittir. Bundan dolayı

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\Lambda^{-1}u\right\|^2+\|u\|^2\right]+\|u_x\|^2+\|u\|^2 \le C_2(T')\|u\|_2^2$$

ve buradan

$$\left[\left\|\Lambda^{-1}u\right\|^2+\|u\|^2\right] \le 2C_2(T')\int_0^t \|u\|_2^2\, d\tau$$

eşitsizliği elde edilir ki

$$\|u\|^2 \le 2C_2(T')\int_0^t \|u\|_2^2\, d\tau \tag{5.18}$$

olduğu aşikardır. Gronwall eşitsizliği (5.18) e uygulanırsa, $\|u\|^2=0$ bulunur. Böylece $0\le t\le T'$ için $u=u_1-u_2=0$ olur. Yani (5.1) ve (5.2) problemi $X(T')$ için en çok bir çözüme sahiptir.

Şimdi, $[0,T_0)$, $u\in X(T_0)$ için maksimal varlık aralığı olmak üzere, eğer (5.16) sağlanırsa $T_0=\infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

(5.16) nın sağlandığını ve $T_0<\infty$ olduğunu kabul edelim. Her bir $T'\in[0,T_0)$ için

$$v_t - v_{xx} - v_{xxt} + v_{xxxx} = g(v)_{xx} \tag{5.19}$$

$$v(x,0)=u(x,T') \tag{5.20}$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. (5.16) dan

$$\|u(.,t)\|_{H^s} \le K$$

olur. Burada K, $T' \in [0,T_0)$ dan bağımsız pozitif bir sabittir. Her $T' \in [0,T_0)$ için (5.19) ve (5.20) problemi bir tek $v(x,t) \in X(T_1)$ çözümüne sahip olacak şekilde bir $T_1 \in (0,T_0)$ sabiti vardır. $T' = T_0 - T_1/2$ alalım ve

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0,T'], \\ v(x,t-T'), & t \in [T', T_0 + T_1/2] \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\tilde{u}(x,t)$, (5.1) ve (5.2) probleminin $[0, T_0 + T_1/2]$ aralığındaki bir çözümüdür ve teklikten, $\tilde{u}$, u ya genişler ki bu da $[0,T_0)$ ın maksimalliğini bozar. Bu yüzden eğer (5.16) sağlanırsa $T_0 = \infty$ olur. Böylece Teorem 5.2 ispatlanmış olur.

5.4. Lineer Olmayan Problem İçin Global Varlık ve Teklik

Bu kısımda (5.1) ve (5.2) Cauchy probleminin global varlığı ispatlanacaktır.

Teorem 5.4.1. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

1) $s \geq 2,\ \varphi \in H^s$;

2) $g \in C^{[s]+1}(R),\ g(0) = 0$ ve C_0 bir sabittir, öyle ki herhangi bir $s \in R$ için $g'(s) \geq C_0$ olur.

O zaman (5.1) ve (5.2) Cauchy probleminin tek bir $u \in C^1([0,\infty); H^s)$ global çözümü vardır.

İspat. Teorem 5.3.1 den dolayı, sadece (5.16) nın sağlandığını göstermek yeterlidir. (5.1) denkleminin her iki tarafını $u(t)$ ile çarpıp R üzerinde x e göre integral alalım.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2\right) + \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 = \int_R g(u)_{xx} u(t)\,dx \tag{5.21}$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafını

$$\int_R g(u)_{xx} u(t)\,dx = -\int_R g'(u(t)) u_x^2(t)\,dx \leq C_0 \|u_x(t)\|^2 \tag{5.22}$$

olarak yazabiliriz. Buradan da

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2\right) \leq C_0 \|u_x(t)\|^2 \tag{5.23}$$

buluruz. Yukarıdaki eşitsizlik

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2\right)\le|C_0|\|u_x(t)\|^2+\|u(t)\|^2 \tag{5.24}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2\right)\le C_1\left(\|u_x(t)\|^2+\|u(t)\|^2\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $C_1=\max\{C_0,1\}$ dir. Ayrıca $\|u(t)\|_{H^1}^2=\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2$ dir. Buradan

$$\|u(t)\|_{H^1}^2\le\|\varphi\|_{H^1}^2+2\left(|C_0|+1\right)\|u(t)\|_{H^1}^2$$

çıkar. Bu eşitsizliğe Gronwall eşitsizliğini uygularsak

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^1}\le C_2(T)<\infty \tag{5.25}$$

olduğunu buluruz. Sobolev gömme teoreminden $\|u(t)\|_\infty\le C_3(T)$ elde edilir.

5.5. Verilere Sürekli Bağımlılık

Şimdi (5.1) ve (5.2) nin çözümünün başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğunu göstereceğiz. Böylelikle problemin iyi konulmuş olduğunu görürüz. Bunun için (5.1) in bazı $[0,T]$ aralığında tanımlanan φ_1 ve φ_2 başlangıç verileriyle verilen u_1 ve u_2 çözümlerini ele alalım.

$v=u_1-u_2$ olsun. O zaman v

$$v_t-v_{xx}-v_{xxt}+v_{xxxx}=\left(g(u_1)-g(u_2)\right)_{xx}$$

$$v(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$$

problemini sağlar. Teorem 5.1 den

$$\|u_1-u_2\|_{H^s}\le\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^s}+\int_0^t\|g(u_1)-g(u_2)\|_{H^s}\,d\tau\right)$$

olduğu ayrıca Sobolev gömme teoreminden u_1 ve u_2 nin L^∞ uzayında olduğu bilinmektedir. $M=\max\left\{\|u_1\|_\infty,\|u_2\|_\infty\right\}$ olsun. Lemma 4.2 den

$$\|u_1-u_2\|_{H^s}\le\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^s}+K_1(M)\int_0^t\|u_1-u_2\|_{H^s}\,d\tau\right)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğe Gronwall eşitsizliğininin integral formunu uygularsak tüm $t\in[0,T]$ için,

$$\|u_1-u_2\|_{H^s}\le\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^s}\right)e^{K_1(M)t}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Çözüm, başlangıç koşullarının farkına bağlı sürekli bir fonksiyon tarafından sınırlı olduğundan verilen başlangıç verilerine sürekli bağımlıdır.

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada lineer olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışı üzerinde durduk. Özellikle son üç bölümde parabolik denklem içeren problemleri ele aldık.

Tezin üçüncü bölümünde, ikinci mertebeden lineer parabolik denklem içeren bir başlangıç sınır değer probleminin zayıf çözümleri *Galerkin metodu* kullanılarak verildi. Bu amaçla alınan $u_m(t)$ yaklaşık çözümü için enerji kestirimleri oluşturuldu. Daha sonra bu yaklaşık çözümün $u(t)$ zayıf çözümüne yakınsadığı ve son olarak da bu çözümün varlık ve tekliği ispatlandı.

Dördüncü bölümde ise damping terimli üçüncü mertebeden lineer olmayan pseudo-parabolik denklem için bir Cauchy problemi çalışıldı. Bu problemin çözümünün lokal ve global varlık ve tekliği ayrıca asimptotik davranışı incelendi. Bu amaçla çalışılan Cauchy problemine özdeş bir integral denklem oluşturuldu. Daha sonra daraltma dönüşümü prensibiyle lokal ve global varlığı ispatlandı. Problemin belli koşullar altında $s \geq 2$ için ve $[0,T_0)$ maksimal aralık olmak üzere tek bir lokal $u \in C^1([0,T_0);H^s)$ çözümüne sahip olduğu gösterildi. Daha sonra yine belli şartlar altında ve

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|u(.,t)\|_{H^s} < \infty$$

ise o zaman $T_0 = \infty$ olduğu ispatlanarak Cauchy probleminin bir tek $u \in C^1([0,\infty);H^s)$ global çözümüne genişletilebildiği gösterildi. Son olarak da yine verilmiş belli koşullar altında aynı problemin asimptotik davranışı incelendi.

Son bölüm olan beşinci bölüm orjinal çalışmamız olup

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} = g(u)_{xx}, \qquad x \in R, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

şeklindeki damping terimli dördüncü mertebeden lineer olmayan parabolik denklem için Cauchy problemininin lokal ve global varlık ve tekliğini ve verilere sürekli bağımlılığını inceledik. Bilindiği gibi lineer olmayan denklemlerin çözümleri lineerlere göre, yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri de daha düşük mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine göre daha zordur [16]. Çözümlerin matematiksel davranışları içinde benzer zorluklar geçerlidir.

Dördüncü bölümdeki metottan farklı olarak lineerleştirilmiş problemimizi Fourier dönüşüm metoduyla adi diferansiyel denklem içeren bir probleme indirgedik. İndirgenen problemimizin tam çözümünü bulduktan sonra $s \in R$, $T > 0$ için $\varphi \in H^s$ ve $h \in L^1\left([0,T]; H^s\right)$ olduğunu kabul ederek ve Fourier dönüşümüyle ilgili normu kullanarak

$$\left\|u(t)\right\|_{H_s} \leq \left(\left\|\varphi\right\|_{H^s} + \int_0^t \left\|h(\tau)\right\|_{H^s} d\tau\right), \qquad 0 \leq t \leq T$$

kestirimini elde ettik. Problemimizin $s \geq \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$ ve $T > 0$ için elde ettiğimiz bu kestirim, Sobolev gömme teoremi ve daraltma dönüşümü yardımıyla bir tek $u \in C\left([0,T_0); H^s\right)$ lokal çözümüne sahip olduğunu ispatladık. Ayrıca

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \left\|u(t)\right\|_{H^s} < \infty$$

ise o zaman $T_0 = \infty$ olduğu ispatlayarak $s \geq 2$, $\varphi \in H^s$ ve verilen diğer koşullar altında (5.1) ve (5.2) Cauchy problemimizin tek bir $u \in C^1\left([0,\infty); H^s\right)$ global çözümüne genişletilebildiğini gösterdik. Son olarak da (5.1) ve (5.2) nin çözümünün başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğunu göstererek problemimizin iyi konulmuş bir problem olduğunu ispatladık.

Ayrıca bu problem içinde dördüncü bölümde yapıldığı gibi integral denklem oluşturularak matematiksel davranış incelenebilir, bunların dışında problemimizin asimptotik davranışı ve global yokluğu (blow up) da çalışılabilir. Ele aldığımız denklem sınırlı bölgede ve farklı sınır koşullarıyla da verilebilir. Elbette yukarıda yapılanların denklemin n boyutlu durumuna da genişletilebilmesi yerinde olacaktır.

Bu çalışmalarımız lineer olmayan parabolik denklem içeren problemler içindi. Lineer olmayan hiperbolik denklem içeren problemler için lokal varlık ve teklik, global varlık ve teklik, asimptotik davranış ve ayrıca çözümlerin global yokluğu (blow up) için [27, 28, 29] a bakılabilir.

KAYNAKLAR

[1] J. Albert, Dispersion of low energy waves fort he generalized Benjamin-Bono-Mahong equation, *J. Differential Equations*, **63** (1986) 117-134.

[2] J. Albert, On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahong equation, *J. Math. Appl*., **141** (1989) 527-537.

[3] J. Amick, J. L. Bona and M. Schonbek, Decay of solutions of some nonlinear wave equations, *J. Differential Equations*, **81** (1989) 1-49.

[4] T. B. Benjamin, J.L. Bona and J. J. Mahong, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. R. Soc. Lond. Ser. A* **272** (1972) 47-78.

[5] P. Biler, Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahong equation in two space dimensions, *Differential Integral Equations*, **5** (1992) 891-901.

[6] J. L Bona and L. Luo, Asymptotik decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation, *Phys. D* **152-153** (2001) 363-383.

[7] J. L. Bona and R. Smith, The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **278** (1975), 555-601.

[8] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *J. Math. Pures Appl*., **17**, No. 2 (1872), 55-108.

[9] J. Boussinesq, Essai sur la théori des eaux courants, courants, *Mém. Acad. Sci. Inst. Nat. France*, **23**, No. 1 (1877), 1-680.

[10] R. Camasa and D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett*., **71** (1993), 1661-1664.

[11] R. Camasa, D. D. Holm and J. M. Hyman, A new integrable shallow water equation, *Adv. Appl. Mech*., **31** (1994), 1-33.

[12] G.Chen and H. Xue, Global exietence of solution of Cauchy problem for nonlinear pseudo-paradolic equation, *J. Differential Equations*, **245** (2008) 2705-2722.

[13] P. L. Davis, A quasilinear parabolic and a related third order problem, *J. Math. Appl*., **40** (2) (1972) 327-335.

[14] N. Duruk, Cauchy problem for a higher-order boussinesq equation, Sabancı University, 2006.

[15] T. E. Dushane, Generalizations of the Korteweg-de Vries equation, *Proc. Sympos. Pure Math*., **23** (1971), 303-307.

[16] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Soclety, Berkeley (1997).

[17] G.B. Folland, “Real analysis, modern techniques and their applications”, Wiley, New York, 1984.

[18] İ. Güleç, Doğrusal olmayan pseudo-parabolik denklemlerin başlangıç sınır değer problemleri, Doktora T ezi, Hacettepe Üniversitesi, (1999).

[19] P. G. Keverelidis, I. G. Kevrekidis, A. R. Bishop and E.S. Titi, Continuum approach to discreteness, *Phys, Rev. E* **65** (4) (2002) 046613-1.

[20] T. Koto and G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988) 891-907.

[21] M. D. Kruskal, Private commucation, (1966).

[22] Yi A. Li and P. Olver, Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *J. Differential Equations*, **162** (2000) 27-63.

[23] M. Masayoshi and T. Mukasa, Parabolic regularizations fort he generalized Korteweg-de Vries equation, *Funkcialaj Ekvacioj*, **14** (1971), 89-110.

[24] L. A. Medeiros and G. P. Menzala, Existence and uniquenessfor periodic solitions of the Benjamin-Bona-Mahong equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **8** (1977) 792-799.

[25] Tyn Myint-U, Partial differential equations of mathematical physich, North Holland, New York, (1981).

[26] V. Padorn, Sobolev regularization of some nonlinear ill-pose problems, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1990.

[27] N. Polat, Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu (Blow up), Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi, (2005).

[28] N. Polat and A. Ertaş, Existence and blow up of solution of the Cauchy problem of the generalized damped multidimensional Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **349** (2008), 10-20.

[29] N. Polat and D. Kaya, Existence, asymptotic behavior, and blow up of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative and dispersive terms, *Z. Naturforsch.*, **64a**, (2009), 11-12.

[30] N. Polat, D. Kaya and H. İ. Tutalar, A analytic and numerical solution to a modified Kawahara equation and a convergence analysis of the method, *Applied Mathematics and Computation*, **179** (2006) 466-472.

[31] P. Rosenau, Nonlinear dispersion and compact structures, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994), 1737-1740.

[32] P. Rosenau, On solitons, compactons and Lagrange maps, *Phys. Lett. A*, **211** (1996), 265-275.

[33] P. Rosenau, On nonanalytic waves formed by a nonlinear dispersion, *Phys. Lett. A*, **230** (1997), 305-318.

[34] P. Rosenau and J. M. Hyman, Compactons: solitons with finite wavelenght, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), 564-567.

[35] J. C. Saut and R. Temam, Remarks on the Korteweg-de Vries equation, *Israel J. Math.*, **24** (1976), 78-87.

[36] N.Şahin, Doğrusal olmayan parabolik denklemlerle üretilen dinamik sistemler, Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi, (1999).

[37] R. Temam, Sur un probléme non linéare, *J. Math. Pures Appl.*, **48** (1969), 159-172.

[38] Y. Uğurlu, Difüzyon denklemlerin çözümlerinin patlaması, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, (2005).

[39] Y. Wang, L^2 Theory of partial differential equations, Peking Press, 1989 (in Chinese).

[40] S. Wang and G. Chen, Small amplitude solutions of generalized IMBq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **274** (2002) 846-866.

[41] L. H. Zhang, Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahong-Burger equation, *Acta Math. Sinica*, **10** (1994) 428-438.

[42] L. H. Zhang, Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahong-Burger equations in n-space dimensions, *Nonlinear Anal.*, **25** (1995) 1343-1369.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nurhan DÜNDAR

Doğum Yeri: Bismil

Doğum Tarihi: 24-03-1983

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : 1997/2001 Bismil Lisesi (YDA)

Lisans : 2002/2007 Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: 2007/… Öğretmen (MEB)