T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Erhan PİŞKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
HAZİRAN 2009

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Erhan PİŞKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
HAZİRAN 2009

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Erhan PİŞKİN tarafından yapılan "Doğrusal Olmayan Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Matematiksel Davranışı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Üye : Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT (Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 16.07.2009

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

..../..../2009

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu teze başlamamda, tezin devamında, bilgileri ve önerileri ile bana rehberlik eden, yardımlarını ve teşviklerini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Necat POLAT' a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmanın temel amacı doğrusal olmayan hiperbolik tipten bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışını incelemektir. Bu amaçla zayıf çözümler ve güçlü çözümlerin lokal ve global varlıkları ile asimptotik davranışları üzerinde durduk.

Ayrıca, daha önce bu anlamda yapılmamış damping terimli altıncı mertebeden bir Cauchy probleminin lokal ve global varlık ve tekliği, verilere sürekli bağımlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

ÖZET

Bu tezde doğrusal olmayan hiperbolik tipten bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışı incelenmiştir.

İlk bölümde, hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili günümüze kadar yapılmış çalışmalar tarihi gelişimi ile kısaca ele alınmıştır.

İkinci bölümde, tezin sonraki bölümleri için gerekli olan temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden hiperbolik denklemlerin zayıf çözümleri tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, dördüncü mertebeden dispersive ve dissipative terimli bir dalga denkleminin asimptotik davranışı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, damping terimli altıncı mertebeden bir Cauchy probleminin lokal ve global varlığı, başlangıç verilerine sürekli bağımlılığı ve asimptotik davranışı ispatlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, mathematical behavior of solutions of some partial differential equations which are hyperbolic type is investigated.

In the first chapter, the historical development of studies related to partial differential equations up to now is shortly discussed.

In the second chapter, some fundamental definitions and notations which are necessary for the following chapters are given.

In the third chapter, weak solutions of the second order hyperbolic equations are defined.

In the fourth chapter, asymptotic behavior of a forth order wave equations with dissipative and dispersive terms is investigated.

In the last chapter, local and global existence, continuous dependence on initial data and asymptotic behavior of a sixth order Cauchy problem with damping is proved.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde doğrusal olmayan hiperbolik tipten bazı kısmi diferansiyel denklemler için lokal ve global varlık ile çözümlerin asimptotik davranışı ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalara kısaca değineceğiz.

Scott Russell'in 1834 teki tek dalgalarla ilgili çalışmaları, akışkanlar, plazmalar, elastik ortamlar gibi dalga olaylarının modellenmesinde ortaya çıkan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişimini sağlamıştır [21].

Hiperbolik denklemlerin özel bir hali olan Boussinesq denklemi, 1872 yılında sığ suların yüzeylerindeki küçük genlikli dalgaların yayılımını tanımlamak için Boussinesq tarafından ortaya konulmuştur [17, 21]. Bu tek dalgaların varlığıyla ilgili ilk bilimsel tanımlamaydı. Boussinesq denklemlerinin iki temel formu

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - u_{xx} = \beta\left(u^2\right)_{xx} \tag{1.1}$$

ve

$$u_{tt} - \alpha u_{xxtt} - u_{xx} = \beta\left(u^2\right)_{xx} \tag{1.2}$$

şeklindedir. Burada $u\left(x,t\right)$ akışkanın serbest yüzeyindeki eğimi ifade etmekte olup, α ve β sabitleri de akışkanın derinliğine ve uzun dalgaların karakteristik hızına bağlıdır. Klasik Boussinesq denklemini farklı açılardan ele alan kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. (1.1) denkleminin başlangıç-sınır değer problemi ve Cauchy problemi [16-18] de çalışılmıştır. (1.2) nin başlangıç-sınır değer problemi ve Cauchy problemi [5, 17] de çalışılmıştır.

Wang ve Chen [35]

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \alpha u_{xxt} = g\left(u\right)_{xx}$$

damping terimli Cauchy probleminin lokal çözüm, global çözüm ve patlamasını gerçekleştirdiler.

Aassila ve Guesmia [1]

$$u'' + k_1 \Delta^2 u + k_2 \Delta^2 u' + \Delta g(\Delta u) = 0$$

lineer olmayan damping terimli denkleminin asimptotik davranışını gerçekleştirdiler.

Yadong [38]

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u)$$

denkleminin global varlık ve tekliğini göstermiştir.

Polat ve Ertaş [23]

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - k\Delta u_t = \Delta\left(f(u)\right)$$

damping terimli genelleştirilmiş çok boyutlu Boussinesq denkleminin Cauchy problemi için lokal ve global çözümlerin varlığını ve çözümlerin patlamasını gerçekleştirdiler.

Polat ve Kaya [24]

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - \lambda u_{xxt} + u = \sigma(u_x)_x$$

dispersive ve dissipative terimli doğrusal olmayan dalga denklemi için çözümlerin lokal ve global varlığını, asimptotik davranışını ve patlamasını gerçekleştirdiler.

Schneider ve Eugene yüzey gerilimli su dalgalarını incelemek için, bu dalgaları modelleyen aşağıdaki gibi bir Boussinesq denklemini ele almışlardır [29].

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} + \mu u_{xxxx} - u_{xxxxtt} + \left(u^2\right)_{xx}$$

$x, t, \mu \in R$ ve $u(x,t) \in R$ dir.

Duruk, Erkip ve Erbay [9, 10]

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \beta u_{xxxxtt} = g(u)_{xx}$$

yüksek mertebeli Boussinesq (HBq) denkleminin lokal çözüm, global çözüm ve verilere sürekli bağımlılığını gerçekleştirdiler.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler verilecektir [2, 6, 7, 8, 19, 21, 27, 31].

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. Çalışılan alanlarda karşılaşılan problemler için matematiksel modeller oluşturmak, bilimin hemen her dalının teorik açıdan gelişmesinde önem taşır. Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan bir matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, çoğunlukla bir bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini ihtiva eden bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bir fonksiyonu ve onun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemler *diferansiyel denklemler* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere *adi diferansiyel denklemler* denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

kapalı formunda gösterilebilir. Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n. mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F\left[x, \Phi(x), \Phi'(x), ..., \Phi^{(n)}(x)\right] = 0 \tag{2.2}$$

ise Φ fonksiyonu (2.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Tanım 2.1.3. $u=u(x,y,z,t)$ fonksiyonu, x,y,z ve t bağımsız değişkenleriyle bir Ω bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z,t)-u(x,y,z,t)}{h} \tag{2.3}$$

limiti ile tanımlıdır. $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=u_{tt}$, ... gibi gösterimler de kullanılabilir. İçinde kısmi türev bulunan denklemlere *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir. Yukarıda tanımladığımız u fonksiyonunun x,y,z,t değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren m. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x,y,z,t,u,u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},u_{yy},u_{zz},u_{tt},u_{xy},...,u_{\underbrace{tt...t}_{m-\text{tane}}})=0 \tag{2.4}$$

şeklinde gösterilir. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise *lineer kısmi diferansiyel denklem* denir. Örneğin,

$$xu_x+yu_y=0,$$

$$x^2u_x-y^2u_y=(x-y)u$$

denklemleri lineerdir. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevlerine göre lineer ise bu denkleme *yarı lineer denklem* denir. Örneğin,

$$u_yu_{xx}-2x^3uu_{xy}=y$$

denklemi yarı lineer bir denklemdir.

Bazen yarı lineer bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olur. Böyle bir yarı lineer denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir.

$$u_{tt}+tu_{yy}-u^3u_x=t+2$$

denklemi hemen hemen lineer bir denklemdir.

Bu tanımlara göre, hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklem sınıfının lineer denklem sınıfını; yarı lineer denklem sınıfının ise hemen hemen lineer denklem sınıfını içerdiği açıktır.

Tanım 2.1.4. Bir kısmi diferansiyel denklem

$$L_x u(x) = f(x) \tag{2.5}$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. Eğer L_x bir lineer operatör ise u ve v herhangi iki fonksiyon, a ve b herhangi iki sabit olmak üzere

$$L_x(au + bv) = aL_x u + bL_x v$$

özelliğini sağlar. (2.5) denkleminde eğer L_x bir lineer operatör ise denklem de lineerdir. Ve $f(x) \equiv 0$ ise denkleme *homojen lineer denklem* aksi halde *homojen olmayan lineer denklem* denir.

Bir kısmi diferansiyel denklem eğer lineer değilse *lineer olmayan denklem* adını alır.

$$(u_x)^3 + u_y = 0$$

denklemi lineer olmayan homojen bir denklemdir.

Bir kısmi diferansiyel denklemdeki bağımsız değişken sayısının, denklemin mertebesinin çözüm üzerinde önemli etkileri olacağı açıktır. Bu yüzden kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm kavramının tanım ve izahı, sadece bir bağımsız değişken içeren adi diferansiyel denklemlerdeki çözüm kavramı kadar basit değildir.

Tanım 2.1.5. Bir kısmi diferansiyel denklemdeki değişkenler Γ sınırına sahip bir Ω açık bölgesinde tanımlanır. Ω bölgesi ile Γ sınırının birleşim kümesine Ω bölgesinin kapanışı denir ve $\overline{\Omega}$ şeklinde gösterilir. t zaman değişkeni olmak üzere $t_1 < t < t_2$ aralığında ve Ω bölgesindeki (x, y, z) noktasında ζ fonksiyonu ve *m.* mertebeye kadar türevleri sürekli ise yani, $\zeta \in C^m(\Omega)$ sınıfından ise $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ fonksiyonuna *m.* mertebeden kısmi diferansiyel denklemin *çözümüdür* denir. Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) Sınır Şartları: Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α,β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

Dirichlet şartı: $u\big|_{\Gamma} = g$

Neumann şartı: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g$

Karışık (mixed) veya Robin şartı: $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$

(ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferansiyel denkleme *'Cauchy Problemi'* denir. Örneğin, R^n de $t > 0$ ve başlangıç şartları için

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$$

ikinci mertebeden bir C*auchy problemidir*.

Tanım 2.1.6. İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{2.6}$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. (2.6) denklemi, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskrimantının işaretine göre sınıflandırılır. Bu sınıflandırma

Diskrimant	*Denklem Tipi*
$\Delta > 0$	Hiperbolik
$\Delta = 0$	Parabolik
$\Delta < 0$	Eliptik

şeklinde yapılabilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik tiplerinin genel denklemleri sırasıyla Laplace (Δ), ısı ve dalga operatörünü içermektedir. Herhangi bir kısmi diferansiyel denklem, uygun birebir bir değişken dönüşümü yardımıyla kendi sınıfının genel operatörüne dönüşebilir.

Matematiksel Nicelik	*İsimlendirme*	*Fiziksel İsim*	*Sınıflandırma*
Δ_n	Laplacian	Potansiyel operatörü	Eliptik
$\dfrac{\partial}{\partial t}-\Delta_{n-1}$	Isı	Difüzyon operatörü	Parabolik
$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_{n-1}$	D'Alembert	Dalga operatörü	Hiperbolik

2.2. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Varlık ve Teklik Teoremleri

Teorem 2.2.1. (Varlık Teoremi)

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0 \tag{2.7}$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. Eğer $f(x,y)$

$$|x-x_0| < a\,,\ |y-y_0| < b \tag{2.8}$$

ile tanımlı R dikdörtgensel bölgesinin her bir (x,y) noktasında sürekli ve $|f(x,y)| \le K$ olacak şekilde sınırlı ise o taktirde (2.7) probleminin en az bir $y(x)$ çözümü mevcuttur.

Teorem 2.2.2. (Teklik Teoremi)

$f(x,y)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; R bölgesinin her bir (x,y) noktasında sürekli ve R deki bütün (x,y) ler için

$$|f| \le K\,,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M \tag{2.9}$$

olacak şekilde sınırlı ise, o taktirde (2.7) başlangıç değer probleminin en fazla bir $y(x)$ çözümü vardır.

Sonuç olarak Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 şartlarını sağlayan her başlangıç değer probleminin yalnız ve yalnız bir çözümü vardır.

2.3. İyi Konulmuş Problemler ve Klasik Çözümler

Bir diferansiyel denklem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa iyi konulmuş olarak adlandırılır:
(i) Varlık: Problem gerçekte bir çözüme sahip olmalı,
(ii) Teklik: Bu çözüm tek olmalı,
(iii) Sürekli Bağımlılık: Çözüm problemde verilen verilere sürekli bağımlı olmalıdır.

Son koşul özel olarak fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan problemler için önemlidir. Problemi belirleyen verilerdeki küçük bir değişiklik, çözümde (tek çözümde) de küçük değişikliklere neden olmalıdır (Diğer taraftan, birçok problem için tek çözüm olması beklenmemektedir. Bu durumda matematiksel olarak çözümleri sınıflandırma ve karakterize etme önemlidir.). Örnek olarak Hadamard problemini ele alalım. Şöyle ki

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.10}$$

Laplace denklemini $n > 0$ olmak üzere

$$u(0, y) = 0, \; u_x(0, y) = \frac{1}{n}\sin ny \tag{2.11}$$

Cauchy verileriyle göz önüne alalım. Bu problemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen çözümü

$$u_1(x, y) = \frac{1}{n^2}\sinh nx \sin ny \tag{2.12}$$

şeklindedir. Başlangıç verileri $u(0, y) = 0$ ve $u_x(0, y) = 0$ iken problemin çözümü $u_2 = 0$ aşikar çözümüdür. İki başlangıç verisi arasındaki fark $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty} \left| n^{-1} \sin ny \right| = 0$$

olur. Yani, başlangıç verisinde çok küçük bir değişiklik olmuştur. Bu başlangıç verisine karşılık gelen çözümler farkının $y = \frac{\pi}{2}$ noktasında, n tek pozitif sayı olmak üzere $n \to \infty$ iken limit değerine bakalım;

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_1(x,\frac{\pi}{2})-u_2(x,\frac{\pi}{2})\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sinh nx=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2n^2}=\infty$$

olur, yani; başlangıç verilerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde büyük bir değişikliğe yol açmıştır. Böylece (2.10) ve (2.11) Cauchy probleminin iyi konulmuş olmadığı sonucuna varılır.

Bir kısmi diferansiyel denklem çözülürken yukarıdaki üç şartın sağlanması istenen durumdur. Fakat hala 'çözüm' ile kastedilenin ne olduğu tanımlanmadı. Örneğin, bir çözüm reel analitik veya sonsuz mertebeden türevlenebilir mi olmalıdır? Bu arzu edilendir fakat belki daha fazlasını soruyoruz. Belki de, k-ıncı mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin çözümünün en azından k-defa sürekli türevlere sahip olmasını istemek daha akıllıca olur. O zaman yüksek mertebeden türevlerin var olmamasına rağmen, en azından kısmi diferansiyel denklemde görülen tüm türevlerin var olması ve sürekli olması gerekir. Sezgisel olarak, böyle düzgün bir çözümü kısmi diferansiyel denklemin klasik çözümü olarak adlandıralım. Bu kesinlikle çözümün en açık ifadesidir.

Böylece bir kısmi diferansiyel denklemi klasik anlamda çözmek demek, eğer mümkünse yukarıdaki üç koşulu sağlayan bir klasik çözümü formüle etmek veya en azından böyle bir çözümün var olduğunu ve bu çözümün çeşitli özelliklerini çıkarmak demektir.

2.4. Zayıf Çözümler ve Düzgünlük

Belli kısmi diferansiyel denklemler (Laplace denklemi gibi) klasik anlamda çözülebilir ancak diğer birçoğu çözülemez. Örneğin, skaler korunum kanununu göz önüne alalım. Yani,

$$u_t+F(u)_x=0$$

denklemini ele alalım. Bu kısmi diferansiyel denklem akışkanlar dinamiği, şok dalgalarının yayılması gibi birçok tek boyutlu olayın modellenmesinde ortaya çıkar. Bir şok dalgası, $u(x,t)$ çözümünün süreksizlik eğrisidir ve eğer korunum kanunlarını çalışmak istiyorsak, sürekli türevlere ve hatta sürekli bile olmayan çözümlere izin vermek durumundayız. Genel olarak, korunum kanunları klasik çözümlere sahip değillerdir, fakat doğru tanımlanmış 'genelleştirilmiş veya zayıf çözümler' kabul edilirse korunum kanunları iyi konulmuştur.

Ele aldığımız problemin yapısı düzgün, klasik çözümler aramamızı engelleyebilir. Bunun yerine, yukarıdaki üç koşulu sağlayan daha geniş çözüm sınıfları arayabiliriz. Aslında klasik olarak çözülebilen kısmi diferansiyel denklemler için bile başlangıçta uygun zayıf çözüm aramak daha faydalı olabilir.

Eğer başlangıçtan itibaren düzgün, yani k-defa sürekli türevlenebilen, çözümler istiyorsak o zaman onları bulmakta gerçekten zorlanırız, çünkü daha sonra ispatlarımız, kuracağımız fonksiyonlar yeterince düzgün olacağından, muhtemelen karmaşık gösterimler içerecektir. Daha mantıklı bir yol, varlık ve düzgünlük problemlerini ayrı olarak düşünmektir. Verilmiş bir kısmi diferansiyel denklem için oldukça geniş bir zayıf çözüm kavramı tanımlarsak, bu zayıf çözümün düzgünlüğü yoluyla çok fazla şey sorma beklentimiz olmadığından varlık, teklik ve verilere sürekli bağımlılığı kurmak daha kolay olacaktır. Böylece, bazı uygun zayıf veya genelleştirilmiş çözüm sınıflarında iyi konulmuşluğu göstermek uygun olacaktır.

Yukarıda bahsedildiği gibi çeşitli kısmi diferansiyel denklemlerde bu yapılabileceklerin en iyisidir. Diğer denklemler için zayıf çözümümüzü yeterince düzgün olmasından sonra klasik çözüm olarak nitelemeyi umabiliriz. Bu zayıf çözümlerin düzgünlüğü sorusuna yol açar. Zayıf çözümlerin düzgünlüğü genellikle çok karmaşık hesap kestirimlerine dayanırken, zayıf çözümlerin varlığı oldukça basit kestirimler ve fonksiyonel analiz yargılarına bağlıdır.

2.5. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.5.1. Bir X vektör uzayından, negatif olmayan sayılara tanımlanan ve her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna *norm* denir.

(i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bu takdirde $\left(X, \|.\|\right)$ çiftine normlu uzay ve $\|x\|$ sayısına da x noktasının *normu* denir.

Verilen bir norm aracılığıyla

$$u(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan u bir uzaklık fonksiyonudur ve böylece her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olur.

Tanım 2.5.2. $\{x_n\}$, $(X,\|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n,m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.5.3. $\{x_n\}$, $(X,\|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.4. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X,\|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.5.5. *X* vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A > 0$, $B > 0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

eşitsizliği *X* uzayındaki her *x* noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *eşdeğer normlar* denir.

Tanım 2.5.6. *K* cismi üzerinde bir *X* vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı *K* değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a,b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir.

(i) $(x,x) \geq 0,\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (burada $\overline{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir)

(iii) $(ax+by,z) = a(x,z) + b(y,z)$

$K = R$ halinde $(x,y) = (y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\|: X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.5.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.5.8. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya *çoklu-indis* denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \le j \le n$ için $D_j = \partial / \partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,...,0)} u = u$ olur.

Tanım 2.5.9. Eğer $G \subset R^n$ ise R^n de G nin *kapanışı* $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, R^n in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. *u, G* de tanımlı bir fonksiyon ise, *u* fonksiyonun *desteği*

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ ise *u* fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe* sahiptir denir.

Tanım 2.5.10. Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her *m* tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olur. $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün bu fonksiyonlardan ibarettir.

2.6. Lebesque Uzayı $L_p(\Omega)$

Tanım 2.6.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayılar olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün *ölçülebilir u* fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

$L_p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \le p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir. $L_\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.6.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \le M\|x\|_X\,, \quad x\in X$$

olacak şekilde bir $M>0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.6.5. $vol(\Omega)=\int_\Omega 1dx$ ve $1\le p\le q\le\infty$ olsun. Eğer $u\in L_q(\Omega)$ ise o zaman $u\in L_p(\Omega)$ dır. Ve

$$\|u\|_p \le \left(vol(\Omega)\right)^{(1/p)-(1/q)}\|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L_q(\Omega)\to L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.6.6. $L_2(\Omega)$ uzayı

$$\left(u,v\right)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.6.7. $-\infty\le a<b\le\infty$ olsun. $\|f(.)\|_X\in L_p\left(a,b\right)$ koşulunu sağlayan $\left(a,b\right)$ den X e tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonları uzayına $L_p\left(a,b;X\right)$ *uzayı* denir. $L_p\left(a,b;X\right)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)}=\begin{cases}\left\{\int_a^b\|f(t)\|_X^p\,dt\right\}^{1/p}, & 1\le p<\infty\\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup}\|f(t)\|_X\,, & p=\infty\end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a<c<d<b$ olmak üzere her bir c, d için $f\in L_p\left(c,d;X\right)$ ise, o zaman $f\in L_{p,loc}\left(a,b;X\right)$ yazılır ve $p=1$ için f *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.6.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m\left([0,T];X\right)$ *uzayı* denir. $C^m\left([0,T];X\right)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \left\|D^\alpha u(t)\right\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.7. Sobolev Uzayı $W^{m,p}(\Omega)$

Tanım 2.7.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun *genelleştirilmiş türevi* olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.7.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 2.7.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 2.7.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v \right)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Burada $(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise, bütün $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

olacak şekilde bir $C(\Omega)$ sabiti vardır. Bu eşitsizlik *Poincare eşitsizliği* olarak bilinmektedir. $H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2}$$

olur.

Tanım 2.7.5. Eğer Ω bölgesi açık ve Lipschitz sürekli sınıra sahipse, o zaman aşağıdakiler geçerlidir:

(i) $1 \le p < n$ ise, $p^* = np/(n-p)$ olmak üzere her $q \in [p, p^*]$ için

$W^{1,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$,

(ii) $p = n$ ise her $q \in [p, \infty)$ için $W^{1,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$,

(iii) $p > n$ ise $\alpha = (p-n)/p$ olmak üzere $W^{1,p}(\Omega) \to L_\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ayrıca Ω bölgesi sınırlı ise, ii) ve iii) gömmeleri kompakttır. i) gömmesi $q \in [p, p^*)$ için kompakttır.

Eğer $W^{1,p}(\Omega)$ uzayı, $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayı ile değiştirilirse, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapmaksızın yukarıdaki gömmeler geçerli olur.

2.8. Fourier Dönüşümü [10]

Fourier dönüşümü analizin çeşitli alanlarında, kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamalarında ve olasılık teorisinde büyük bir öneme sahiptir. Fourier metodunu kullanarak problem çözmedeki (genellikle kısmi veya adi diferansiyel denklem için) genel fikir aşağıdaki üç adımdan ibarettir.

(i) Önce orjinal problem Fourier dönüşümü kullanılarak daha basit bir probleme (adi diferansiyel denkleme veya cebirsel denkleme) dönüştürülür,

(ii) Yeni denklem çözülür,

(iii) Daha sonra ters Fourier dönüşümünü kullanılarak orijinal problemin çözümü elde edilir.

$u \in L^1(R)$ olsun. $R \times R \to C$ tanımlanan $(\xi, x) \mapsto e^{-ix\xi} u(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Verilen $\xi \in R$ için $x \mapsto e^{-ix\xi} u(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri $|u|$ olduğundan R üzerinde integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\hat{u}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}u(x)dx$$

integrali ile verilen $\hat{u}:R\mapsto C$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Tanım 2.8.1. $\hat{u}$ fonksiyonu u fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır ve $F(u)$ ya da Fu şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8.2. $v\in L^1(R)$ için

$$\breve{v}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}v(\xi)d\xi$$

fonksiyonu v fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinin tanımı $u\in L^2(R)$ fonksiyonlarına aşağıdaki teoremler yardımıyla genişletilebilir.

Teorem 2.8.1. (Plancherel Teoremi) $u\in L^1(R)\cap L^2(R)$ olsun. O zaman $\hat{u}$, $\breve{u}\in L^2(R)$ ve

$$\|\hat{u}\|_{L^2(R)}=\|\breve{u}\|_{L^2(R)}=\|u\|_{L^2(R)}$$

olur.

Teorem 2.8.2. $u,v\in L^2(R)$ olsun. O zaman

(i) $\int_R u\bar{v}dx=\int_R \hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi,$ burada $\bar{z}$, $z\in C$ nin kompleks eşleniğidir.

(ii) Her α çoklu indeksi için $\widehat{(D^{\alpha}u)}\in L^2(R)$ olacak şekilde $\widehat{(D^{\alpha}u)}(\xi)=(i\xi)^{\alpha}\hat{u}(\xi)$ vardır.

(iii) $\widehat{(u*v)}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\hat{u}\hat{v},$ burada $u*v,$ u ve v nin konvolüsyonudur (Konvolüsyon teoremi)

(iv) $u=\breve{(\hat{u})}$

$\|.\|_{L^2}$ yerine $\|.\|$ yazarsak $H^k(R)$ Sobolev uzayı

$$\|u\|^2_{H^k} = \|u\|^2_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^2$$

şeklinde Fourier dönüşümüyle ilişkilendirilebilir.

Plancherel teoremi ve Teorem 2.5.2 den

$$\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \left\|\widehat{D^\alpha u}\right\|^2$$

$$= \sum_{|\alpha|\le k} \|(i\xi)^\alpha \hat{u}\|^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \int_R |i\xi|^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha|\le k} \int_R \xi^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_R \left(\sum_{|\alpha|\le k} \xi^{2\alpha} \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

olur.

$$\sum_{|\alpha|\le k} \xi^{2\alpha} = 1 + \xi^2 + \xi^4 + \ldots + \xi^{2k} = P_k(\xi)$$

olsun

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{P_k(\xi)}{(1+\xi^2)^k} = 1$$

ve

$$\frac{P_k(\xi)}{(1+\xi^2)^k} > 0$$

olduğundan öyle c_1, c_2 sabitleri vardır ki $c_1 > 0,\ c_2 = 1$ iken

$$c_1(1+\xi^2)^k \le P_k(\xi) \le c_2(1+\xi^2)^k$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $P_k(\xi)$, $\left(1+\xi^2\right)^k$ ya eşittir. Bu eşitlik kullanılarak H^k için aşağıdaki gibi bir tanım elde edilir.

Teorem 2.8.3. $H^k(R)$ Sobolev uzayı

$$H^k(R) = \left\{ u \in L^2(R) \;\middle|\; (1+\xi^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(R) \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir burada $\xi \in R$ ve $\hat{u}$, u nun Fourier dönüşümüdür. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{H^k(R)} = \left(\int_R (1+\xi^2)^k \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

$k \geq 0$ tamsayıları yerine tüm $s \geq 0$ reel sayıları için $H^s(R)$ Sobolev uzayı

$$H^s(R) = \left\{ u \in L^2(R) \,\middle|\, (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(R) \right\} \tag{2.13}$$

olarak tanımlanabilir. Böylece $u \in H^s(R)$ olması ancak ve ancak u nun Lebesque ölçülebilir ve

$$\|u\|_{H^s(R)} = \left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

olması durumunda mümkündür.

$s_1 < s_2$ için

$$H^{s_2}(R) \subset H^{s_1}(R)$$

sürekli gömülmesi vardır ve $H^0(R) = L^2(R)$ dir. (2.13) kullanılarak bu ispatlanabilir. $s_1 < s_2$ ve $1+\xi^2 \geq 1$ birlikte kullanılarak $\left(1+\xi^2\right)^{s_1} \leq \left(1+\xi^2\right)^{s_2}$ olduğu görülür. Bu eşitsizlik $|\hat{u}(\xi)|^2$ ile çarpılıp R üzerinde integrallenirse

$$\|u\|_{H^{s_1}} \leq \|u\|_{H^{s_2}}$$

elde edilir. Bu $H^{s_2}(R) \to H^{s_1}(R)$ gömülmesinin sürekli olduğu anlamına gelir. s fonksiyonların düzgünlük derecesi olmak üzere $H^s(R)$ fonksiyonları s artarken daha fazla türevlenebilirdir. Diğer taraftan $L^p\left(R\right)$ Lebesque uzayı bu özelliği sağlamaz. Çünkü R sınırlı değildir.

2.9. Sabit Nokta Teoremleri [6]

Bir X kümesini kendi içine dönüştüren bir $f:X\to X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir $x^*\in X$ noktası $f(x^*)=x^*$ bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonunun bir sabit noktası adını alır.

X bir Banach uzayı olsun. En basit sabit nokta teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.9.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

$$A:X\to X$$

lineer olmayan bir dönüşüm olsun ve bazı $\gamma<1$ sabitleri için

$$\left\|A(u)-A(\tilde{u})\right\|\le\gamma\left\|u-\tilde{u}\right\| \quad (u,\tilde{u}\in X)$$

olduğunu varsayalım. O zaman A tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.9.2. (Schauder Sabit Nokta Teoremi)

$K\subset X$ konveks ve kompakt ayrıca

$$A:K\to K$$

sürekli olsun. O zaman A, K içinde bir sabit noktaya sahiptir.

2.10. Eşitsizlikler

Tanım 2.10.1. Cauchy Eşitsizliği

Eğer $\varepsilon>0,\ a,b\in R^1$ ise, o zaman

$$|ab|\le\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.2. Young Eşitsizliği

Eğer $\varepsilon>0,\ a,b\in R^1,\ p>1$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ise, o zaman

$$|ab|\le\frac{|\varepsilon a|^p}{p}+\frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.3. Hölder Eşitsizliği

$u \in L_p(\Omega),\ v \in L_q(\Omega),\ p \geq 1$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ise, o zaman $uv \in L_1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p=1$ durumunda, $q=\infty$ ve $\|v\|_{L_q(\Omega)} = ess_\Omega \sup|v|$ alırız.

$p=q=2$ iken bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği* denir.

Ayrıca $u \in L_r(\Omega),\ p \leq q \leq r$ ve $\dfrac{1}{q}=\dfrac{\lambda}{p}+\dfrac{1-\lambda}{r}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L_r(\Omega)}$$

ara değer eşitsizliği geçerlidir. Bunu görmek için $\alpha = \lambda q$ ve $\beta = (1-\lambda)q$ alınıp Hölder eşitsizliği uygulanarak $z = p/\lambda q$ ve $y = r/(1-\lambda)q$ için

$$\int_\Omega |u|^q dx = \int_\Omega |u|^\alpha |u|^\beta dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha z} dx\right)^{1/z} \left(\int_\Omega |u|^{\beta y} dx\right)^{1/y}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür.

Tanım 2.10.4. Minkowski Eşitsizliği

$u, v \in L_p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u+v\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.5. Sobolev Eşitsizliği

$n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık olsun. $n > p,\ \ p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n,p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \le C |\Omega|^{1/n - 1/p} \|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olur.

Tanım 2.10.6. Nirenberg Eşitsizliği [24]

Eğer; $u \in L^p$, $D^m u \in L^q$, $1 \le p, q \le \infty$ ve herhangi bir $0 \le i \le m$ için, $\frac{1}{r} = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\frac{1}{p} + \frac{i}{m}\frac{1}{q}$ ise,

$$\|D^i u\|_r \le C \|u\|_p^{1-i/m} \|D^m u\|_q^{i/m}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada C, u dan bağımsız bir sabittir.

Tanım 2.10.7. Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form) [6]

$\eta(.)$ negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında kesin sürekli bir fonksiyon olsun. $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ de toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \tag{2.14}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda tüm $0 \le t \le T$ için,

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right] \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (2.14) ten hemen hemen her $0 \le t \le T$ için,

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\right)$$

$$\le e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)$$

olur. Sonuç olarak, her $0 \le t \le T$ için

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr} \le \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)ds$$

$$\le \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds$$

olur. Bu da (2.15) eşitsizliğini verir.

Tanım 2.10.8. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form) [6]

$\xi(t)$ hemen hemen her t için, negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında toplanabilir bir fonksiyon ve C_1, $C_2 \ge 0$ sabitler olmak üzere

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2 \tag{2.16}$$

ise hemen hemen her $0 \le t \le T$ için,

$$\xi(t) \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right) \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)\,ds$ olsun. Bu durumda $[0,T]$ de hemen hemen her yerde $\eta' \le C_1\eta + C_2$ olur. Gronwall eşitsizliğinin diferansiyel formuna göre,

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 t\right) = C_2 t e^{C_1 t}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\xi(t) \le C_1\eta(t) + C_2 \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

elde edilir.

Tanım 2.10.9. İntegraller için Minkowski Eşitsizliği [33]

Eğer $1 \le p \le \infty$ ve $u \in L^1\left(I, L^p\left(R\right)\right)$ ise burada $I \subset [0,\infty)$ dır. Bu durumda

$$\left\| \int_I u(.,t)\,dt \right\|_{L^p} \le \int_I \left\| u(.,t) \right\|_{L^p} dt$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.10.10. Kısmi İntegral Alma Formülleri

$\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = \left(A_1(x), ..., A_n(x)\right)$ vektörü $i = 1,...,n$ olmak üzere $A_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $divA(x) = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_\Omega divA(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\,n(x)\,dS$$

olup burada $n(x)$ Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektör olup bu formül *Ostrogradskii formülü* olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $v(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $\Delta u = div(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot div(\nabla u) = div(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradskii formülüne göre

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}$ olup bu formül *Green formülü* olarak bilinmektedir.

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK DENKLEMLER

Bu bölümde uygun bir şekilde tanımlanmış zayıf çözümleri, bu çözümlerin tekliğini ve diğer bazı özelliklerini inceleyeceğiz [6].

3.1. Tanımlar

3.1.1. Hiperbolik Denklemler

$U \subset R^n$ açık sınırlı bir bölge, $T > 0$ olmak üzere $U_T = U \times (0,\mathrm{T}]$ olsun.

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = f & (x,t) \in U_T \\ u = 0 & (x,t) \in \partial U \times [0,T] \\ u = g, u_t = h & (x,t) \in U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemi üzerinde duracağız. Burada $f : U_T \to R$, $g,h : U \to R$ verilmiş fonksiyonlar ve $u = u(x,t)$ $u : \bar{U}_T \to R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur. L sembolü, her bir t zamanı için ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel operatör olmak üzere, bu operatörün a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1,...,n)$ katsayıları için diverjans formu

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x,t) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t) u_{x_i} + c(x,t) u \tag{3.2}$$

diverjans olmayan formu

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t) u_{x_i} + c(x,t) u \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.1. Eğer tüm $(x,t) \in U_T$, $\xi \in R^n$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $\theta > 0$ sabiti var ise $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ kısmi diferansiyel operatörüne (düzgün) hiperboliktir denir.

Eğer, $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ ise, bu durumda $L = -\Delta$ olur ve KDD dalga denklemine dönüşür.

3.1.2. Zayıf Çözümler

L nin (3.2) diverjans formuna sahip olduğunu kabul edelim ve (3.1) probleminin zayıf çözümü için uygun bir notasyon bulalım. Bunun için

$$a^{ij}, b^i, c \in C^1\left(\bar{U}_T\right) \ \left(i, j = 1, \ldots, n\right) \tag{3.5}$$

$$f \in L^2\left(U_T\right) \tag{3.6}$$

$$g \in H_0^1\left(U\right), \ h \in L^2\left(U\right) \tag{3.7}$$

ve $a^{ij} = a^{ji}$ $\left(i, j = 1, \ldots, n\right)$ olsun.

$u, v \in H_0^1\left(U\right)$ ve $0 \le t \le T$ için zamana bağlı bilineer form

$$B\left[u, v; t\right] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(., t\right) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i\left(., t\right) u_{x_i} v + c\left(., t\right) uv dx \tag{3.8}$$

şeklindedir.

3.1.2.1. Zayıf Çözümlerin Tanımlarına Giriş

$u = u\left(x, t\right)$ nin (3.1) in düzgün çözümü olduğunu kabul edelim. $x \in U$, $0 \le t \le T$ ve $\mathrm{u} : \left[0, T\right] \to H_0^1\left(U\right)$ olmak üzere $\left[\mathrm{u}\left(t\right)\right]\left(x\right) = u\left(x, t\right)$ şeklindeki dönüşümü tanımlayalım. Benzer şekilde $x \in U$, $0 \le t \le T$ ve $\mathrm{f} : \left[0, T\right] \to L^2\left(U\right)$ olmak üzere $\left[\mathrm{f}\left(t\right)\right]\left(x\right) = f\left(x, t\right)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Şimdi $v \in H_0^1\left(U\right)$ herhangi bir fonksiyon olsun, $u_{tt} + Lu = f$ kısmi diferansiyel denklemini v ile çarpar ve kısmi integral alırsak, $0 \le t \le T$ için

$$\left(\mathrm{u}'', v\right) + B\left[\mathrm{u}, v; t\right] = \left(\mathrm{f}, v\right) \tag{3.9}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $(\,,\,)$, $L^2(U)$ deki iç çarpımı gösterir.

$u_{tt} + Lu = f$ kısmi diferansiyel denkleminden $g^0 = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$ ve

$g^j = \sum_{i=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} \quad (j = 1,...,n)$ için

$$u_{tt} = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j_{x_j}$$

olur ki bu da hemen hemen her $0 \le t \le T$ için $\mathrm{u}'' \in H^{-1}(U)$ olacak şekilde bir u zayıf çözümü aramamız gerektiğini ve (3.9) un ilk terimini $\langle \mathrm{u}'', v \rangle$ şeklinde yeniden yorumlamamız gerektiğini gösterir. $\langle\,,\,\rangle$, $H^{-1}(U)$ ile $H_0^1(U)$ arasındaki ikilidir.

Tanım 3.1.2.1. Bir $\mathrm{u} \in L^2\left(0,T; H_0^1(U)\right)$ fonksiyonu, $\mathrm{u}' \in L^2\left(0,T; L^2(U)\right)$, $\mathrm{u}'' \in L^2\left(0,T; H^{-1}(U)\right)$ olmak üzere

(i) Her $v \in H_0^1(U)$ ve hemen hemen her $0 \le t \le T$ zamanı için $\langle \mathrm{u}'', v \rangle + B[\mathrm{u}, v; t] = (\mathrm{f}, v)$

(ii) $\mathrm{u}(0) = g$, $\mathrm{u}'(0) = h$

koşullarını sağlıyorsa (3.1) hiperbolik başlangıç-sınır değer probleminin bir zayıf çözümü olarak adlandırılır.

3.2. Zayıf Çözümlerin Varlığı

3.2.1. Galerkin Yaklaşımları

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = f & (x,t) \in U_T \\ u = 0 & (x,t) \in \partial U \times [0,T] \\ u = g, u_t = h & (x,t) \in U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.10}$$

hiperbolik başlangıç-sınır değer probleminin zayıf çözümünü önce sonlu boyutlu yaklaşımı kurup daha sonra limite geçerek oluşturacağız.

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\ ,\ H_0^1(U) \text{ nin ortogonal bazı} \tag{3.11}$$

ve

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\ ,\ L^2(U) \text{ nin ortonormal bazı} \tag{3.12}$$

olacak şekilde $w_k = w_k(x)$ $(k=1,...)$ düzgün fonksiyonları seçerek *Galerkin metodunu* kullanacağız.

Bir pozitif m sabit tamsayısı alarak

$$\mathrm{u}_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\, w_k \tag{3.13}$$

yazalım. Burada $0 \le t \le T$ olmak üzere $d_m^k(t)$ $(k=1,...,m)$ katsayıları

$$d_m^k(0) = (g, w_k)\ \ (k=1,...,m) \tag{3.14}$$

$$d_m^{k\prime}(0) = (h, w_k)\ \ (k=1,...,m) \tag{3.15}$$

ve

$$\left(\mathrm{u}_m'', w_k\right) + B[\mathrm{u}_m, w_k; t] = (\mathrm{f}, w_k)\ \ (0 \le t \le T,\ k=1,...,m) \tag{3.16}$$

denklemini sağlar.

Teorem 3.2.1.1. (Yaklaşık Çözümlerin Oluşturulması)

Her $m = 1,2,...$ için (3.13) formunda (3.14)-(3.16) yı sağlayan bir tek u_m fonksiyonu vardır.

İspat. u_m, (3.13) teki gibi verilsin (3.12) yi kullanırsak

$$\left(\mathrm{u}_m''(t), w_k\right) = d_m^{k\prime\prime}(t) \tag{3.17}$$

olur. $e^{kl}(t) = B[w_l, w_k; t]$ $(k,l = 1,...,m)$ için

$$B[\mathrm{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^l(t)$$

dır. Ayrıca, $f^k(t) = (\mathrm{f}(t), w_k)$ $(k = 1, ..., m)$ yazabiliriz. Sonuç olarak (3.16)

$$d_m^{k\prime\prime}(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^l(t) = f^k(t) \;\; (0 \le t \le T,\; k = 1, ..., m) \tag{3.18}$$

şeklindeki lineer adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Bununla birlikte (3.14) ve (3.15) başlangıç koşullarını sağlar. Adi diferansiyel denklemlerdeki standart teoriye göre de $0 \le t \le T$ için (3.18) denkleminin çözümü olan, (3.14) ve (3.15) koşullarını sağlayan bir tek $\mathrm{d}_m(t) = (d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ fonksiyonu vardır.

3.2.2. Enerji Kestirimleri

Bu kısımda, $m \to \infty$ durumunu ele alacağız, bunun için m de düzgün olan bazı kestirimlere ihtiyacımız olacaktır.

Teorem 3.2.2.1. (Enerji Kestirimleri)

$m = 1, 2, ...$ için

$$\max_{0 \le t \le T} \left(\|\mathrm{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\mathrm{u}_m'(t)\|_{L^2(U)} \right) + \|\mathrm{u}_m''(t)\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)} \le C \left(\|\mathrm{f}\|_{L^2\left(0,T;L^2(U)\right)} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)} \right) \tag{3.19}$$

olacak şekilde sadece U, T ve L nin katsayılarına bağlı bir C sabiti vardır.

İspat. *1. Adım*: Hemen hemen her $0 \le t \le T$ için (3.16) eşitliğini $d_m^{k\prime}(t)$ ile çarpar $k = 1, ..., m$ için toplar ve (3.13) ü kullanırsak

$$(\mathrm{u}_m'', \mathrm{u}_m') + B[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m'; t] = (\mathrm{f}, \mathrm{u}_m') \tag{3.20}$$

denklemini elde ederiz. $(\mathrm{u}_m'', \mathrm{u}_m') = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\|\mathrm{u}_m'\|_{L^2(U)}^2\right)$ olduğunu dikkate alırsak

$$B[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m'; t] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\, \mathrm{u}_{m,x_i} \mathrm{u}_{m,x_j}'\, dx + \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i \mathrm{u}_{m,x_i} \mathrm{u}_m' + c\,\mathrm{u}_m \mathrm{u}_m'\, dx$$

$$= B_1 + B_2 \tag{3.21}$$

olur. $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1,...,n)$ olduğundan $A[u,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx$ $\left(u, v \in H_0^1(U)\right)$ simetrik bilineer formu için

$$B_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} A[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m; t]\right) - \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_t^{ij} \mathrm{u}_{m,x_i} \mathrm{u}_{m,x_j} dx \tag{3.22}$$

olur. (3.22) den

$$B_1 \geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} A[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m; t]\right) - C\|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \tag{3.23}$$

olur. Ayrıca

$$|B_2| \leq C\left(\|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{u}_m'\|_{H_0^1(U)}^2\right) \tag{3.24}$$

yazılabilir. Düzgün hiperboliklik koşulundan gelen

$$\theta \int_U |Du|^2 dx \leq A[u,u;t] \quad \left(u \in H_0^1(U)\right) \tag{3.25}$$

eşitsizliği kullanılır ve (3.20)-(3.24) teki kestirimler birleştirilirse

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathrm{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m; t]\right) \leq C\left(\|\mathrm{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(U)}^2\right)$$

$$\leq C\left(\|\mathrm{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathrm{u}_m, \mathrm{u}_m; t] + \|\mathrm{f}\|_{L^2(U)}^2\right) \tag{3.26}$$

elde edilir.

2. Adım: Şimdi

$$\eta(t) = \|\mathrm{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathrm{u}_m(t), \mathrm{u}_m(t); t] \tag{3.27}$$

ve

$$\xi(t) = \|\mathrm{f}(t)\|_{L^2(U)}^2 \tag{3.28}$$

alır ve bunları (3.25) teki eşitsizlikte kullanırsak $0 \le t \le T$ ve uygun C_1 ve C_2 sabitleri için

$$\eta'(t) \le C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

elde ederiz. Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s)\,ds\right) \quad (0 \le t \le T) \tag{3.29}$$

kestirimi elde edilir.

Bununla beraber (3.14), (3.15) ve $\|\mathrm{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)} \le \|g\|_{H_0^1(U)}$ kestiriminden

$$\eta(0) = \|\mathrm{u}'_m(0)\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathrm{u}_m(0), \mathrm{u}_m(0); t] \le C\left(\|h\|_{L^2(U)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right)$$

dır. Böylece (3.27)-(3.29) dan

$$\|\mathrm{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathrm{u}_m(t), \mathrm{u}_m(t); t] \le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

sınırı elde edilir. $0 \le t \le T$ keyfi olduğundan bu kestirim ve (3.26) dan

$$\max_{0 \le t \le T}\left(\|\mathrm{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2\right) \le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

olur.

3. Adım: Herhangi bir $v \in H_0^1(U)$ için $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ alıp $v^1 \in span\{w_k\}_{k=1}^m$ ve $(v^2, w_k) = 0$ $(k = 1, ..., m)$ olacak şekilde $v = v^1 + v^2$ yazalım. Ayrıca $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \le 1$ dır. O halde (3.13) ve (3.16) dan

$$\langle \mathrm{u}''_m, v \rangle = (\mathrm{u}''_m, v) = (\mathrm{u}''_m, v^1) = (\mathrm{f}, v^1) - B[\mathrm{u}_m, v^1; t]$$

dır. Böylece, $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \le 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\left\langle \mathrm{u}_m'', v\right\rangle\right| \le C\left(\|\mathrm{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\int_0^T \|\mathrm{u}_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 dt \le C\int_0^T \left(\|\mathrm{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2\right) dt$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

olur.

3.2.3. Varlık ve Teklik

Şimdi Galerkin yaklaşımlarında limite geçeceğiz.

Teorem 3.2.3.1. (Zayıf Çözümün Varlığı)

(3.1) in bir zayıf çözümü vardır.

İspat. *1. Adım:* (3.19) daki enerji kestirimine göre $\{\mathrm{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)$ de, $\{\mathrm{u}_m'\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^2\left(0,T;L^2(U)\right)$ de ve $\{\mathrm{u}_m''\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi de $L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$ de sınırlıdır.

Sonuç olarak bir $\{\mathrm{u}_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\mathrm{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve $\mathrm{u} \in L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)$, $\mathrm{u}' \in L^2\left(0,T;L^2(U)\right)$, $\mathrm{u}'' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$ dır. Öyle ki

$$\left.\begin{array}{l} L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right) \text{ de } \quad \mathrm{u}_{m_l} \to \mathrm{u} \text{ ya zayıf yakınsar} \\ L^2\left(0,T;L^2(U)\right) \text{ de } \quad \mathrm{u}_{m_l}' \to \mathrm{u}' \text{ ne zayıf yakınsar} \\ L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right) \text{ de } \quad \mathrm{u}_{m_l}'' \to \mathrm{u}'' \text{ ne zayıf yakınsar} \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

2. Adım: Bir N tamsayısı belirleyelim ve $\{d^k\}_{k=1}^{N}$ düzgün fonksiyon olmak üzere

$$\mathrm{v}(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t)\, w_k \tag{3.31}$$

formunda bir $\mathrm{v} \in C^1\left([0,T];H_0^1(U)\right)$ fonksiyonu seçelim. $m \ge N$ seçer (3.16) yı $d^k(t)$ ile çarpar $k = 1,\dots,N$ için toplar ve daha sonra t ye göre integral alırsak

$$\int_0^T \left\langle \mathrm{u}_m'', \mathrm{v} \right\rangle + B[\mathrm{u}_m, \mathrm{v}; t]\, dt = \int_0^T \left(\mathrm{f}, \mathrm{v} \right) dt \tag{3.32}$$

elde edilir. $m = m_l$ alıp (3.30) dikkate alınırsa limit durumunda

$$\int_0^T \left\langle \mathrm{u}'', \mathrm{v} \right\rangle + B[\mathrm{u}, \mathrm{v}; t]\, dt = \int_0^T \left(\mathrm{f}, \mathrm{v} \right) dt \tag{3.33}$$

bulunur.

Bu eşitlik tüm $\mathrm{v} \in L^2\left(0, T; H_0^1(U)\right)$ fonksiyonları için sağlanır. Zira (3.31) formundaki fonksiyonlar bu uzayda yoğundurlar. (3.33) ten her $v \in H_0^1(U)$ ve hemen hemen her $0 \le t \le T$ için

$$\left\langle \mathrm{u}'', v \right\rangle + B[\mathrm{u}, v; t] = \left(\mathrm{f}, v \right)$$

olur. Ayrıca $\mathrm{u} \in C\left([0,T]; L^2(U)\right)$ ve $\mathrm{u}' \in C\left([0,T]; H^{-1}(U)\right)$ dır.

3. Adım: Şimdi

$$\mathrm{u}(0) = g \tag{3.34}$$

$$\mathrm{u}'(0) = h \tag{3.35}$$

koşullarını sağlatmalıyız. Bunun için herhangi bir $\mathrm{v} \in C^2\left([0,T]; H_0^1(U)\right)$ fonksiyonunu $\mathrm{v}(T) = \mathrm{v}'(T) = 0$ olacak şekilde seçelim. (3.33) e iki defa t ye göre kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_0^T \left(\mathrm{v}'', \mathrm{u} \right) + B[\mathrm{u}, \mathrm{v}; t]\, dt = \int_0^T \left(\mathrm{f}, \mathrm{v} \right) dt - \left(\mathrm{u}(0), \mathrm{v}'(0) \right) + \left\langle \mathrm{u}'(0), \mathrm{v}(0) \right\rangle \tag{3.36}$$

buluruz. Benzer şekilde (3.32) den

$$\int_0^T \left(\mathrm{v}'', \mathrm{u}_m \right) + B[\mathrm{u}_m, \mathrm{v}; t]\, dt = \int_0^T \left(\mathrm{f}, \mathrm{v} \right) dt - \left(\mathrm{u}_m(0), \mathrm{v}'(0) \right) + \left(\mathrm{u}_m'(0), \mathrm{v}(0) \right)$$

sonucu çıkar. $m = m_l$ yazar, (3.14), (3.15) ve (3.30) dikkate alınırsa

$$\int_0^T \left(\mathrm{v}'',\mathrm{u}\right)+B[\mathrm{u},\mathrm{v};t]\,dt=\int_0^T \left(\mathrm{f},\mathrm{v}\right)dt-\left(g,\mathrm{v}'(0)\right)+\left(h,\mathrm{v}(0)\right) \qquad (3.37)$$

elde edilir.

$\mathrm{v}(0)$, $\mathrm{v}'(0)$ keyfi olduğundan, (3.36) ve (3.37) özdeşliklerini karşılaştırırsak, (3.34) ve (3.35) eşitliklerini elde ederiz. Bu nedenle u (3.1) in bir zayıf çözümüdür.

Not: Teorem 3.2.2.1 deki enerji kestirimleri dikkate alınırsa $\mathrm{u}\in L^\infty\left(0,T;H_0^1(U)\right)$, $\mathrm{u}'\in L^\infty\left(0,T;L^2(U)\right)$, $\mathrm{u}''\in L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.3.2. (Zayıf Çözümün Tekliği)

(3.1) in zayıf çözümü tektir.

Not: Zayıf çözümün tanımında eğer $\mathrm{u}'(t)$ nin v nin yerine geçebilecek kadar düzgün olduğunu bilseydik aşağıdaki işlem çok kolaylaşacaktı. Ama öyle değil.

İspat. *1. Adım:* $\mathrm{f}\equiv g\equiv h\equiv 0$ olmak üzere sadece (3.1) in zayıf çözümünün

$$\mathrm{u}\equiv 0 \qquad (3.38)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu sağlamak için, $0\le s\le T$ aralığında

$$\mathrm{v}(t)=\begin{cases}\int_s^t \mathrm{u}(\tau)\,d\tau, & 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{s}\\ 0, & \mathrm{s}\le \mathrm{t}\le \mathrm{T}\end{cases}$$

olarak alalım. O zaman her $0\le t\le T$ için $\mathrm{v}(t)\in H_0^1(U)$ olup bu yüzden

$$\int_0^s \left\langle \mathrm{u}'',\mathrm{v}\right\rangle+B[\mathrm{u},\mathrm{v};t]\,dt=0$$

dır. $\mathrm{u}'(0)=\mathrm{v}(s)=0$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin birinci teriminin kısmi integrali alınırsa

$$\int_0^s -\left(\mathrm{u}',\mathrm{v}'\right)+B[\mathrm{u},\mathrm{v};t]\,dt=0 \qquad (3.39)$$

elde edilir. Şimdi $\mathrm{v}'=-\mathrm{u}$ $\left(0\le \mathrm{t}\le \mathrm{s}\right)$ alınırsa

$$\int_0^s \left\langle \mathrm{u}', \mathrm{u} \right\rangle - B\left[\mathrm{v}', \mathrm{v}; t\right] dt = 0$$

olur. Bundan dolayı

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathrm{u}\|_{L^2(U)}^2 - \frac{1}{2}B[\mathrm{v},\mathrm{v};t] \right) dt = -\int_0^s C[\mathrm{u},\mathrm{v};t] + D[\mathrm{v},\mathrm{v};t]\,dt$$

olur. Burada $u, v \in H_0^1(U)$ için

$$C[u,v;t] = \int_U \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} u + \frac{1}{2} b_{i,x_i} uv\,dx$$

ve

$$D[u,v;t] = \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_{i,t} u_{x_i} v + c_t uv\,dx$$

dir. Buradan da

$$\frac{1}{2}\|\mathrm{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}B[\mathrm{v}(0),\mathrm{v}(0);t] = -\int_0^s C[\mathrm{u},\mathrm{v};t] + D[\mathrm{v},\mathrm{v};t]\,dt$$

ve sonuç olarak

$$\|\mathrm{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{v}(0)\|_{H_0^1(U)}^2 \le C\left(\int_0^s \|\mathrm{v}\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{u}\|_{L^2(U)}^2\,dt + \|\mathrm{v}(0)\|_{L^2(U)}^2 \right) \tag{3.40}$$

bulunur.

2. Adım: Şimdi

$$\mathrm{w}(t) = \int_0^t \mathrm{u}(\tau)\,d\tau \quad (0 \le t \le T)$$

yazarsak (3.40) ın sonucu olarak

$$\|\mathrm{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2 \le C\left(\int_0^s \|\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{u}(t)\|_{L^2(U)}^2\,dt + \|\mathrm{w}(s)\|_{L^2(U)}^2 \right) \tag{3.41}$$

elde edilir. $\|\mathrm{w}(t)-\mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2 \le 2\|\mathrm{w}(t)\|_{H_0^1(U)}^2 + 2\|\mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2$ ve $\|\mathrm{w}(s)\|_{L^2(U)} \le \int_0^s \|\mathrm{u}(t)\|_{L^2(U)} dt$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa (3.41) den

$$\|\mathrm{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + (1-2sC_1)\|\mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2 \le C_1 \int_0^s \|\mathrm{w}\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathrm{u}\|_{L^2(U)}^2 \, dt$$

elde edilir. T_1 i

$$1-2T_1C_1 \ge \frac{1}{2}$$

olacak şekilde yeterince küçük seçelim. Eğer, $0 \le s \le T_1$ ise

$$\|\mathrm{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{w}(s)\|_{H_0^1(U)}^2 \le C \int_0^s \|\mathrm{u}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathrm{w}\|_{H_0^1(U)}^2 \, dt$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Gronwall eşitsizliğinin integral formundan $[0,T_1]$ üzerinde $u \equiv 0$ bulunur.

3. Adım: Aynı argümanlar $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$,… vb aralıklara uygulanırsa sonunda (3.38) elde edilir.

3.3. Damping Terimli Lineer Olmayan Dalga Denkleminin Bir Sınıfı İçin Varlık ve Teklik Problemi

3.3.1. Giriş

Bu kısımda

$$u_{tt} - 2bu_{xxt} + \alpha u_{xxxx} = f(u_x)_x, \; x \in (0,1), \; t > 0 \tag{3.42}$$

dalga denklemi aşağıdaki başlangıç ve sınır koşullarıyla

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \; u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \; t \ge 0 \tag{3.43}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \; x \in [0,1] \tag{3.44}$$

veya aşağıdaki başlangıç ve sınır koşullarıyla

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)=0,\ \ t\geq 0 \tag{3.45}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ x\in[0,1] \tag{3.46}$$

ele alınacaktır [4]. Burada $\alpha>0$, $b>0$ sabit sayılar, $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyondur. Alt indisler x ve t sırasıyla x ve t ye göre kısmi türevleri göstermektedir, $f(s)$ verilen lineer olmayan fonksiyon ve $\varphi(x)$, $\psi(x)$ verilen $[0,1]$ aralığında tanımlı başlangıç değer fonksiyonlarıdır.

Bu kısım boyunca, şu gösterimleri kullanacağız: $\|\ .\ \|$, $\|\ .\ \|_{L^p}$ $(1\leq p\leq\infty)$ ve $\|\ .\ \|_{H^m}$ (m doğal sayıdır) normları sırasıyla $L^2[0,1]$, $L^P[0,1]$ ve $H^m[0,1]$ normlu uzayları göstermektedir.

3.3.2. Global Çözümün Varlık ve Tekliği

Bu kısımda (3.42)-(3.44) ve (3.42), (3.45), (3.46) problemlerinin global çözümlerinin varlık ve tekliği Galerkin metodu ve kompaktlık teoremi ile ispatlanacaktır. İlk önce (3.42)-(3.44) başlangıç-sınır değer problemini ele alalım.

3.3.2.1. (3.42)-(3.44) Probleminin Global Genelleştirilmiş Çözümünün Varlık ve Tekliği

$\{y_i(x)\}$,

$$y''+\lambda y=0,\ x\in(0,1)$$

$$y(0)=y(1)=0 \tag{3.47}$$

özdeğer probleminde $\lambda_i\ (i=1,2,...)$ özdeğerlerine tekabül eden özfonksiyonlarının $L^2[0,1]$ deki ortonormal bazı olsun. Burada $\ ' =\dfrac{d}{dx}$ dır.

$$u_N(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_{Ni}(t)y_i(x) \tag{3.48}$$

(3.42)-(3.44) probleminin Galerkin yaklaşık çözümü olsun. Burada $\gamma_{Ni}(t)$ belirsiz fonksiyonlar ve N bir doğal sayıdır. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarının

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i y_i(x),\ \ \psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i y_i(x) \tag{3.49}$$

olarak gösterilebileceğini kabul edelim. Burada μ_i ve ν_i $(i=1,2,...)$ sabit sayılardır. $u_N(x,t)$ yaklaşık çözümünü (3.42) denkleminde yerine koyup denklemin her iki tarafını $y_s(x)$ ile çarptıktan sonra $(0,1)$ aralığı üzerinde integral alırsak

$$\left(u_{Ntt}-2bu_{Nxxt}+\alpha u_{Nxxxx},y_s\right)=\left(f(u_{Nx})_x,y_s\right),\ \ s=1,2,...,N \tag{3.50}$$

elde ederiz. Burada $(.,.)$ ile $L^2[0,1]$ deki iç çarpımı gösteriyoruz.

$u_N(x,t)$ yaklaşık çözümünün ve

$$\varphi_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i y_i(x),\ \psi_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\nu_i y_i(x)$$

başlangıç değer fonksiyonlarının (3.44) başlangıç koşullarında yazılmasıyla

$$\gamma_{Ns}(0)=\mu_s\,,\ \dot{\gamma}_{Ns}(0)=\nu_s\,,\ s=1,2,...,N \tag{3.51}$$

elde edilir. Burada $\dot{\gamma}_{Ns}(t)=\dfrac{d}{dt}\gamma_{Ns}(t)$ dır.

(3.42)-(3.44) probleminin global genelleştirilmiş çözümünün varlığını ispatlamak için $u_N(x,t)$ yaklaşık çözümü için bir çok kestirim elde edilecektir.

Lemma 3.3.2.1. Kabul edelim ki $\varphi\in H^2[0,1]$ ve $\psi\in L^2[0,1]$ (3.43) deki sınır koşullarını sağlasın, $f\in C^1(R)$ ve $f'(s)$ alttan sınırlı yani öyle bir C_0 sabiti vardır ki herhangi bir $s\in R$ için $f'(s)\geq C_0$ dır. O halde herhangi N için (3.50) ve (3.51) başlangıç değer problemi $\gamma_{Ns}\in C^2[0,T]$ $(s=1,2,...,N)$ global klasik çözümüne sahiptir. Ayrıca, aşağıdaki kestirim sağlanır;

$$\left\|u_N(.,t)\right\|_{H^2}^2+\left\|u_{Nt}(.,t)\right\|^2\leq C_1(T),\ \ t\in[0,T] \tag{3.52}$$

burada $C_1(T)$ ve $C_i(T)$ $(i=2,3,...)$ sadece T ye bağlı sabitlerdir.

İspat. $f_0(s)=f(s)-k_0 s-f(0)$, $k_0=\min\{C_0,0\}$ (≤ 0) olsun. O zaman

$$f_0(0)=0\,,\ f_0'(s)=f'(s)-k_0\ge 0$$

ve $f_0(s)$ monoton artan fonksiyondur. Böylece

$$F(s)=\int_0^s f_0(\tau)d\tau\ge 0$$

olur. Açıkça (3.42) denklemi

$$u_{tt}-2bu_{xxt}+\alpha u_{xxxx}-k_0u_{xx}=f_0(u_x)_x \tag{3.53}$$

denklemine denktir. (3.50) sistemi

$$(u_{Ntt}-2bu_{Nxxt}+\alpha u_{Nxxxx}-k_0u_{Nxx},y_s)=(f_0(u_{Nx})_x,y_s)\ ,\ \ s=1,2,...,N \tag{3.54}$$

sistemine denktir.

(3.54) in her iki tarafını $2\gamma_{Nst}(t)$ ile çarpıktan sonra $s=1,2,...,N$ için toplar, her iki tarafa $2(u_N,2u_{Nt})$ ekler ve x e göre kısmi integral alırsak

$$\frac{d}{dt}\left[\|u_N(.,t)\|^2+\|u_{Nt}(.,t)\|^2+\alpha\|u_{Nxx}(.,t)\|^2+2\int_0^1F(u_{Nx}(x,t))dx\right]+4b\|u_{Nxt}(.,t)\|^2$$

$$\le\|u_N(.,t)\|^2+2\|u_{Nt}(.,t)\|^2+k_0^2\|u_{Nxx}(.,t)\|^2 \tag{3.55}$$

elde ederiz. (3.55) in $[0,t]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\|u_N(.,t)\|^2+\|u_{Nt}(.,t)\|^2+\alpha\|u_{Nxx}(.,t)\|^2+2\int_0^1F(u_{Nx}(x,t))dx+4b\int_0^t\|u_{Nx\tau}(.,\tau)\|^2d\tau$$

$$\le\int_0^t\left(\|u_N(.,\tau)\|^2+2\|u_{N\tau}(.,\tau)\|^2+k_0^2\|u_{Nxx}(.,\tau)\|^2\right)d\tau+\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2+\alpha\|\varphi_{xx}\|^2+2\int_0^1F(\varphi_{Nx}(x))dx$$

bulunur. Gronwall eşitsizliğinden

$$\left\|u_{Nt}\left(.,t\right)\right\|^{2}+\left\|u_{N}\left(.,t\right)\right\|_{H^{2}}^{2}\leq C_{2}e^{T}\left(\left\|\varphi\right\|_{H^{2}}^{2}+\left\|\psi\right\|^{2}+2\int_{0}^{1}F\left(\varphi_{x}\left(x\right)\right)dx\right),\ t\in\left[0,T\right] \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.56) dan (3.52) elde edilir.

Larey-Schauder sabit nokta teoremi uygulanırsa (3.50) ve (3.51) başlangıç değer probleminin bir $\gamma_{Ns}\in C^{2}\left[0,T\right]$, $\left(s=1,2,...,N\right)$ çözümü bulunur.

Lemma 3.3.2.2. Kabul edelim ki Lemma 3.3.2.1 deki koşullar sağlansın. Eğer $f\in C^{2}\left(R\right)$, $\varphi\in H^{4}\left[0,1\right]$ ve $\psi\in H^{2}\left[0,1\right]$ ise, o zaman (3.42)-(3.44) ün yaklaşık çözümü için

$$\left\|u_{N}\left(.,t\right)\right\|_{H^{4}}^{2}+\left\|u_{Nt}\left(.,t\right)\right\|_{H^{2}}^{2}+\left\|u_{Ntt}\left(.,t\right)\right\|^{2}\leq C_{3}\left(T\right),\ 0\leq t\leq T \quad (3.57)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat. (3.50) nin her iki tarafını $2\lambda_{s}^{2}\gamma_{Nst}\left(t\right)$ ile çarpıp, $s=1,2,...,N$ kadar toplar, x e göre kısmi integral alır, (3.52) yi ve $H^{2}\left[0,1\right]$ in $C^{1}\left[0,1\right]$ uzayına gömüldüğünü göz önünde bulundurursak

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_{Nx^{2}t}\left(.,t\right)\right\|^{2}+\alpha\left\|u_{Nx^{4}}\left(.,t\right)\right\|^{2}\right)+4b\left\|u_{Nx^{3}t}\left(.,t\right)\right\|^{2}$$

$$=2\int_{0}^{1}f(u_{Nx})_{x}u_{Nx^{4}t}dx$$

$$\leq C_{4}\left(\left\|f''\left(u_{Nx}\right)u_{Nxx}^{2}\right\|^{2}+\left\|f'\left(u_{Nx}\right)u_{Nx^{3}}\right\|^{2}\right)+b\left\|u_{Nx^{3}t}\left(.,t\right)\right\|^{2}$$

bulunur. Burada $u_{Nx^{3}t}=\dfrac{\partial^{3}u_{N}}{\partial x^{2}\partial t}$ dır. Böylece

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_{Nx^{2}t}\left(.,t\right)\right\|^{2}+\alpha\left\|u_{Nx^{4}}\left(.,t\right)\right\|^{2}\right)\leq C_{5}\left(T\right)\left(\left\|u_{Nxx}\left(.,t\right)\right\|_{L^{4}}^{2}+\alpha\left\|u_{Nx^{3}}\left(.,t\right)\right\|^{2}\right) \quad (3.58)$$

bulunur. Gagliardo-Nirenberg interpolasyon teoremi, (3.52) ve Cauchy eşitsizliğinden

$$\left\|u_{Nxx}\left(.,t\right)\right\|_{L^{4}}^{2}\leq C_{6}\left\|u_{Nxx}\left(.,t\right)\right\|^{\frac{7}{4}}\left\|u_{Nxx}\left(.,t\right)\right\|_{H^{2}}^{\frac{1}{4}}\leq C_{7}\left(T\right)+\left\|u_{Nx^{4}}\left(.,t\right)\right\|^{2},$$

$$\left\|u_{Nxxx}(.,t)\right\|_{L^4}^2 \le C_8 \left\|u_N(.,t)\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|u_N(.,t)\right\|_{H^4}^{\frac{3}{2}} \le C_9(T) + \left\|u_{Nx^4}(.,t)\right\|^2$$

sonuçlarına ulaşırız. Yukarıdaki bu iki eşitsizliği (3.58) de yazarsak

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_{Nx^2t}(.,t)\right\|^2 + \alpha\left\|u_{Nx^4}(.,t)\right\|^2\right) \le C_{10}(T) + \left\|u_{Nx^4}(.,t)\right\|^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin integralini alırsak ve Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\|u_{Nx^2t}(.,t)\right\|^2 + \alpha\left\|u_{Nx^4}(.,t)\right\|^2 \le C_{11}(T)\left(\left\|\varphi\right\|_{H^4}^2 + \left\|\psi\right\|_{H^2}^2 + 1\right),\ t \in [0,T] \tag{3.59}$$

elde ederiz. Benzer şekilde, (3.50) nin her iki tarafını $\gamma_{Nstt}(t)$ ile çarpıp $s = 1,2,...,N$ için toplar, Cauchy eşitsizliğini ve (3.59) da Sobolev gömme teoremini kullanırsak

$$\left\|u_{Ntt}(.,t)\right\|^2 \le C_{12}(T),\ 0 \le t \le T \tag{3.60}$$

buluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.2.1. (3.43) deki sınır koşulları sağlanacak şekilde $\varphi \in H^4[0,1]$ ve $\psi \in H^2[0,1]$ alalım. $f \in C^2(R)$ ve $f'(s)$ alttan sınırlı olsun yani öyle bir C_0 sabiti vardır ki herhangi bir $s \in R$ için $f'(s) \ge C_0$ dır. O halde (3.42)-(3.44) probleminin tek global genelleştirilmiş çözümü

$$u \in C\left([0,T]; H^4[0,1]\right) \cap C^1\left([0,T]; H^2[0,1]\right) \cap C^2\left([0,T]; L^2[0,1]\right) \tag{3.61}$$

olup burada $u(x,t)$ genelleştirilmiş anlamda (3.43) deki sınır koşullarını ve klasik anlamda (3.44) teki başlangıç koşullarını sağlar.

İspat. (3.57) den

$$u_N \in C\left([0,T]; H^4[0,1]\right),\ u_{Nt} \in C\left([0,T]; H^2[0,1]\right),\ u_{Ntt} \in C\left([0,T]; L^2[0,1]\right)$$

olduğunu biliyoruz. Sobolev gömme teoremini kullanırsak

$$u_{Nx^s} \in C([0,T]\times[0,1]),\ 0 \le s \le 3$$

$$u_{Nx^s t} \in C([0,T]\times[0,1]),\ 0 \le s \le 1$$

elde ederiz. Bu iki bağıntıdan ve Ascoli-Arzela teoreminden burada bir $u(x,t)$ fonksiyonu ve yine $\{u_N(x,t)\}$ ile gösterilen, bir $\{u_N(x,t)\}$ alt dizisi vardır ki $N \to \infty$ iken $\{u_N(x,t)\}$ dizisi $[0,T]\times[0,1]$ üzerinde $u(x,t)$ ye düzgün yakınsar. Buna karşılık gelen $\{u_{Nx}(x,t)\}$ alt diziside $[0,T]\times[0,1]$ üzerinde $u_x(x,t)$ e düzgün yakınsar. Kompaktlık teoreminden $\{u_{Nx^s}(x,t)\}$ $(0 \le s \le 4)$, $\{u_{Nx^s t}(x,t)\}$ $(0 \le s \le 2)$ ve $\{u_{Ntt}(x,t)\}$ alt dizileri $L^2([0,T]\times[0,1])$ de sırasıyla $u_{x^s}(x,t)$ $(0 \le s \le 4)$, $u_{x^s t}(x,t)$ $(0 \le s \le 2)$ ve $u_{tt}(x,t)$ dizilerine zayıf yakınsaktırlar. Buradan $u(x,t)$, (3.61) i sağlar.

Ayrıca, $u(x,t)$ genel anlamda (3.43) sınır değer şartlarını ve klasik anlamda (3.44) başlangıç değer şartlarını sağladığından $u(x,t)$, (3.42)-(3.44) probleminin genel çözümüdür. (3.42)-(3.44) probleminin çözümünün tekliğini ispatlamak kolaydır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

3.3.2.2. (3.42)-(3.44) Probleminin Global Klasik Çözümünün Varlık ve Tekliği

Lemma 3.3.2.3. Kabul edelim ki Lemma 3.3.2.2 deki koşullar sağlansın. Eğer $\varphi \in H^7[0,1]$, $\psi \in H^5[0,1]$ ve $f \in C^5(R)$ ise o zaman (3.42)-(3.44) probleminin yaklaşık çözümü $u_N(x,t)$ aşağıdaki kestirimini sağlar.

$$\|u_N(.,t)\|_{H^7}^2 + \|u_{Nt}(.,t)\|_{H^5}^2 + \|u_{Ntt}(.,t)\|_{H^3}^2 + \|u_{Nttt}(.,t)\|_{H^1}^2 \le C_{13}(T),\ t \in [0,T] \tag{3.62}$$

İspat. (3.50) nin her iki tarafını $-2\lambda_s^5 \gamma_{Nst}(t)$ ile çarpıp $s = 1,2,...,N$ için toplar, x e göre kısmi integral alır, Hölder ve Cauchy eşitsizliklerini kullanırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{Nx^5 t}(.,t)\|^2 + \alpha\|u_{Nx^7}(.,t)\|^2\right) + 4b\|u_{Nx^6 t}(.,t)\|^2 = \left(f(u_{Nx})_x, u_{Nx^{10} t}\right)$$

$$\le C_{14}(T)\left\|f(u_{Nx})_{x^5}\right\|^2 + b\|u_{Nx^6 t}(.,t)\|^2$$

$$\le C_{15}(T)\left\|u_{Nx^6}(.,t)\right\|^2 + b\left\|u_{Nx^6t}(.,t)\right\|^2$$

$$\le C_{16}(T)\left\|u_{Nx^7}(.,t)\right\|^2 + b\left\|u_{Nx^6t}(.,t)\right\|^2 + C_{17}(T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin integralini alır ve Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\|u_{Nx^7}(.,t)\right\|^2 + \left\|u_{Nx^5t}(.,t)\right\|^2 \le C_{18}(T)\left(\left\|\varphi\right\|_{H^7}^2 + \left\|\psi\right\|_{H^5}^2 + 1\right),\ t\in[0,T] \qquad (3.63)$$

elde ederiz. (3.50) nin her iki tarafını $-2\lambda_s^3\gamma_{Nstt}(t)$ ile çarpıp $s=1,2,...,N$ için toplar, x e göre kısmi integral alır ve Cauchy eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\|u_{Nx^3tt}(.,t)\right\|^2 = \left(2bu_{Nxxt} - \alpha u_{Nx^4} + f(u_{Nx})_x, 2u_{Nx^6tt}\right)$$

$$\le C_{19}(T)\left(\left\|u_{Nx^5t}(.,t)\right\|^2 + \left\|u_{Nx^7}(.,t)\right\|^2 + \left\|f(u_{Nx})_{x^4}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left\|u_{Nx^3tt}(.,t)\right\|^2 \quad (3.64)$$

buluruz. (3.63) ü kullanarak ve (3.64) ten

$$\left\|u_{Nx^3tt}(.,t)\right\|^2 \le C_{20}(T),\ t\in[0,T] \qquad (3.65)$$

buluruz. (3.50) nin t ye göre türevini alıp her iki tarafını $-2\lambda_s\gamma_{Nsttt}(t)$ ile çarpar ve $s=1,2,...,N$ için toplarsak, benzer şekilde

$$\left\|u_{Nxt^3}(.,t)\right\|^2 \le C_{21}(T),\ t\in[0,T] \qquad (3.66)$$

elde ederiz. (3.52), (3.57), (3.63), (3.65) ve (3.66) kestirimlerinden (3.62) kestirimi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.2.3 ü kullanır ve Teorem 3.3.2.1 in ispatındaki aynı işlemleri uygularsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.2.2. (3.43) sınır koşullarını sağlayacak şekilde $\varphi \in H^7[0,1]$, $\psi \in H^5[0,1]$ alalım ve $f \in C^5(R)$ ve $f'(s)$ alttan sınırlı olsun yani herhangi bir $s \in R$ için $f'(s) \geq C_0$ olacak şekilde bir C_0 sabiti vardır. O halde (3.42)-(3.44) probleminin tek global klasik çözümü

$$u \in C\left([0,T];C^4[0,1]\right) \cap C^1\left([0,T];C^2[0,1]\right) \cap C^2\left([0,T];C[0,1]\right) \tag{3.67}$$

olur.

3.3.2.3. (3.42), (3.45), (3.46) Probleminin Global Çözümünün Varlık ve Tekliği

Bu kısımda, (3.42), (3.45), (3.46) başlangıç-sınır değer problemini Galerkin metodu ve tamlık teoremi yoluyla ele aldık.

$\{y_i(x)\}$, $L^2[0,1]$ de $\lambda_i\,(i=1,2,...)$ özdeğerlerine karşılık gelen

$$y'' + \lambda y = 0\,,\ x \in (0,1)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{3.68}$$

özdeğer probleminin özfonksiyonlarından oluşan ortonormal baz olsun.

Kısım 3.3.2.1 ve 3.3.2.2 deki yöntemle aşağıdaki teoremleri ispatlayabiliriz.

Teorem 3.3.2.3. (3.45) sınır koşulları sağlanacak şekilde $\varphi \in H^4[0,1]$, $\psi \in H^5[0,1]$ alalım ve $f \in C^2(R)$ ve $f'(s)$ alttan sınırlı olsun yani öyle bir C_0 sabiti vardır ki herhangi bir $s \in R$ için $f'(s) \geq C_0$ dır. Bu durumda (3.42), (3.45), (3.46) probleminin tek global genelleştirilmiş çözümü

$$u \in C\left([0,T];H^4[0,1]\right) \cap C^1\left([0,T];H^2[0,1]\right) \cap C^2\left([0,T];L^2[0,1]\right) \tag{3.69}$$

dir. Burada $u(x,t)$ genelleştirilmiş anlamda (3.45) deki sınır koşullarını ve klasik anlamda (3.44) teki başlangıç değer koşullarını sağlar.

Teorem 3.3.2.4. (3.45) sınır koşulları sağlanacak şekilde $\varphi \in H^7[0,1]$, $\psi \in H^5[0,1]$ olsun, $f \in C^5(R)$ ve $f'(s)$ alttan sınırlı olsun yani öyle bir C_0 sabiti vardır ki herhangi bir $s \in R$ için $f'(s) \geq C_0$ dır. O halde (3.42), (3.45), (3.46) probleminin tek global klasik çözümü

$$u \in C\left([0,T];C^4[0,1]\right) \cap C^1\left([0,T];C^2[0,1]\right) \cap C^2\left([0,T];C[0,1]\right) \qquad (3.70)$$

dir.

4. BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DİSPERSİVE VE DİSSİPATİVE TERİMLİ BİR DALGA DENKLEMİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

4.1. Giriş

Yadong [38] de

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u),\ x \in \Omega,\ t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \overline{\Omega} \tag{4.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \geq 0 \tag{4.3}$$

başlangıç sınır değer problemini çalışmıştır. $n = 1,2,3$, $f \in C^1$ ve $f'(u)$ üstten sınırlı olduğunu kabul edelim

(H_0) $\left|f'(u)\right| \leq A|u|^p + B,\ 0 < p < \infty$ eğer $n = 2$ ise; $0 < p \leq \dfrac{2}{n-2}$ eğer $n = 3$ ise, $u_i(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(i = 0,1)$ koşullarını sağlasın. (4.1)-(4.3) probleminin $\forall T > 0$ için bir tek $u \in W^{2,\infty}\left(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$ global güçlü çözümünü kabul ettiği ispatlamıştır.

[39] da Yacheng, (4.1)-(4.3) problemi $n \geq 1$ için tekrar çalışılmıştır. $f \in C^1$, $f'(u)$ üstten sınırlı ve $f'(u)$ nun

(H_1) $\left|f'(u)\right| \leq A|u|^p + B,\ 0 < p < \infty$ eğer $n = 2$ ise; $0 < p \leq \dfrac{4}{n-2}$ eğer $n \geq 3$ ise, $u_i(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(i = 0,1)$ koşullarını sağladığı kabul edilerek, (4.1)-(4.3) probleminin $\forall T > 0$ için bir tek global $u \in W^{2,\infty}\left(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$ güçlü çözümünün olduğu ispatlanmıştır. Böylece [38] deki sonuçlar daha kapsamlı bir duruma genelleştirildi.

Çözümlerin global özellikleri anlaşıldıktan sonra, çözümün asimptotik davranışlarıyla daha fazla ilgileneceğiz. Bu bölümün amacı (4.1)-(4.3) probleminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını açıklamaktır. Bunun için (4.1)-(4.3) probleminin $t \to \infty$ iken global güçlü çözümlerinin üstel olarak sıfıra gittiğini üstel çarpan metodu ile belirtmektir.

Bu bölüm boyunca $\|\,.\,\|_p = \|\,.\,\|_{L^p(\Omega)}$ ile standart $L^p(\Omega)$ normunu göstereceğiz. Gösterimin basit olması için özellikle $\|\,.\,\|_2$ nın yerine $\|\,.\,\|$ gösterimini ve $(u,v)=\int_\Omega uvdx$ gösterimlerini kullanacağız, burada $\Omega \subset R^n$ uygun düzgün sınırlı bir bölgedir.

4.2. Çözümün Asimptotik Davranışı

Teorem 4.2.1. Kabul edelim ki $f(u)$ aşağıdaki şartları sağlasın

$(H)\quad 0 \geq F(u) \geq f(u)u,\ \forall u \in R,\ F(u)=\int_0^u f(s)ds$

O halde, (4.1)-(4.3) probleminin global güçlü çözümü için öyle C ve λ pozitif sabitleri oluşur ki

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t},\ \ 0 \leq t < \infty \tag{4.4}$$

burada

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2-\int_\Omega F(u)dx$$

olur.

İspat. $u(x,t)$, (4.1)-(4.3) probleminin global güçlü çözümü olsun. (4.1) denklemini u_t ile çarpar ve Ω üzerinde integral alırsak

$$\frac{d}{dt}E(t)+\|\nabla u_t\|^2=0 \tag{4.5}$$

denklemini elde ederiz. $\delta > 0$ için (4.5) denklemini $e^{\delta t}$ ile çarparsak

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right)+e^{\delta t}\|\nabla u_t\|^2=\delta e^{\delta t}E(t) \tag{4.6}$$

denklemini elde ederiz. (4.6) denkleminin t ye göre 0 dan t ye kadar integralini alırsak

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau = E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$= E(0) + \frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2 + \|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau$$

$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx\right)d\tau \qquad (4.7)$$

elde edilir. Dikkat edersek $-F(u)\geq 0$ ve $0\leq t<\infty$ durumunda $E(t)\geq 0$ buluruz. $-F(u)\leq -f(u)u$ ve (4.1) denkleminden

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(u)udx$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \left(u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt}, u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^2 - (u_{tt}, u) - (\nabla u_{tt}, \nabla u) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\leq -(u_{tt}, u) - (\nabla u_{tt}, \nabla u) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \qquad (4.8)$$

bulunur. Buradan

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx\right)d\tau \leq -\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left((u_{\tau\tau}, u) + (\nabla u_{\tau\tau}, \nabla u) + \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\right)d\tau \quad (4.9)$$

elde ederiz. Kısmi integral alırsak

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}, u)d\tau = -e^{\delta t}(u_t, u) + (u_1, u_0) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau, u)d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{1}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2 + \|u\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2 + \|u\|^2\right)d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2 d\tau \qquad (4.10)$$

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\nabla u_{\tau\tau},\nabla u\right)d\tau=-e^{\delta t}\left(\nabla u_t,\nabla u\right)+\left(\nabla u_1,\nabla u_0\right)$$

$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\nabla u_\tau,\nabla u\right)d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau$$

$$\leq\frac{1}{2}e^{\delta t}\left(\left\|\nabla u_t\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u_1\right\|^2+\left\|\nabla u_0\right\|^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left\|\nabla u_\tau\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2\right)d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \quad (4.11)$$

ve

$$-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau=-\frac{1}{2}e^{\delta t}\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|^2+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau$$

$$\leq\frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau \quad (4.12)$$

elde ederiz. (4.10)-(4.12) yi (4.9) ve (4.7) de yerine yazıp, Poincare eşitsizliğini kullanırsak, yani; $\|v\|^2\leq\lambda_0\|\nabla v\|^2$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$, burada λ_0 pozitif bir sabittir, buradan C_0, C_1 ve C_2 pozitif sabitleri vardır ki

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau$$

$$\leq C_0E(0)+\frac{3}{2}\left(1+\lambda_0\right)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau+C_1\delta e^{\delta t}E(t)+C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau \quad (4.13)$$

olur. Burada δ yı $0<\delta<\min\left\{\frac{1}{2C_1},\frac{2}{3\left(1+\lambda_0\right)}\right\}$ olacak şekilde alırsak.

Bu durumda (4.13) denkleminden

$$e^{\delta t}E(t)\leq 2C_0E(0)+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$e^{\delta t}E(t)\leq 2C_0E(0)e^{2C_2\delta^2 t},\ \ 0\leq t<\infty$$

ve

$$E(t) \le 2C_0 E(0) e^{-\left(\delta - 2C_2\delta^2\right)t}, \quad 0 \le t < \infty$$

ayrıca δ yı, $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2C_1}, \frac{2}{3(1+\lambda_0)}, \frac{1}{2C_2}\right\}$ olacak şekilde alırsak bu durumda (4.4) elde edilir, burada $\lambda = \delta - 2C_2\delta^2 > 0$, $C = 2C_0$ dır.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1 deki koşullar altında (4.1)-(4.3) probleminin global güçlü çözümü için

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 \le 2CE(0)e^{-\lambda t}, \; 0 \le t < \infty \tag{4.14}$$

elde ederiz. (4.1) denkleminde $f(u) = -|u|^{p-1} u$ alırsak, temel denklem modelini ele alırsak

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = -|u|^{p-1} u$$

bulunur. Bu durumda $f'(u) = -p|u|^{p-1} \le 0$, $-F(u) = \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$ bulunur. Buradan

$$0 \le -F(u) \le |u|^{p+1} = -f(u)u$$

bulunur. Bu yüzden aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.2.2. Kabul edelim ki $f(u) = -|u|^{p-1} u$ ve p, (H_1) deki koşulları sağlasın, $u_i(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(i = 0,1)$. O zaman (4.1)-(4.3) probleminin tek global güçlü çözümü $u \in W^{2,\infty}\left(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$, $\forall T > 0$ için (4.4) ve (4.14) denklemlerini sağlar.

5. BÖLÜM

DAMPİNG TERİMLİ ALTINCI MERTEBEDEN BİR CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

5.1. Giriş

Bu bölümde damping terimli lineer olmayan altıncı mertebeden bir Cauchy probleminin lokal ve global varlık ve tekliğini ve verilere sürekli bağımlılığını inceleyip problemin iyi konulmuş olduğunu göstereceğiz. Ayrıca daha sonra problemin asimptotik davranışını inceleyeceğiz.

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxxtt} - u_{xxxxxx} - \alpha u_{xxt} = f(u)_{xx}, \quad x \in R, \; t > 0 \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.2}$$

burada α sabit, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ verilmiş başlangıç değer fonksiyonlarıdır. $f(u)$ ise doğrusal olmayan bir fonksiyondur.

5.2. Lokal Çözümün Varlık ve Tekliği

Bu kısımda, daraltma dönüşümü yardımıyla (5.1) ve (5.2) probleminin lokal çözümünün varlık ve tekliğini ispatlayacağız. (5.1) ve (5.2) probleminin çözümü lineer dalga denklemlerinin Cauchy problemleriyle bağlantılı olarak ‘çözüm operatörünün’ sabit noktası şeklinde kurulur.

Lemma 5.2.1. $s \in R$ ve bazı $T > 0$ için $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ ve $h \in L^1\left([0,T];H^{s-2}\right)$ olduğunu kabul edelim.

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxxtt} - u_{xxxxxx} = \left(h(x,t)\right)_{xx}, \quad x \in R, \; t > 0 \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.4}$$

O zaman lineer denklem için Cauchy problemi (5.2) deki başlangıç koşuluyla bir tek $u \in C\left([0,T],H^s\right) \cap C^1\left([0,T],H^{s-1}\right)$ çözümüne sahip olur ve

$$\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-1}} \le 4(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{H^{s-2}}\, d\tau\right) \tag{5.5}$$

kestirimi geçerlidir.

İspat. (5.3) denklemine x e göre Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\hat{u}_{tt} + \xi^2 \hat{u} = -\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,t) \tag{5.6}$$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi),\ \ \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{\psi}(\xi) \tag{5.7}$$

elde edilir. Böylece kısmi diferansiyel denklem ξ parametresiyle homojen olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu adi diferansiyel denklemin çözümü

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_{\text{hom}}(\xi,t) + \hat{u}_{\text{part}}(\xi,t)$$

şeklindedir. Burada

$$\hat{u}_{\text{hom}}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(t\xi) + c_2(\xi)\sin(t\xi)$$

homojen denklemin çözümünü belirtir. (5.6) nın $\hat{u}_{\text{part}}$ özel çözümü için parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa

$$\hat{u}_{\text{part}}(\xi,t) = \hat{u}_1(\xi)\cos(t\xi) + \hat{u}_2(\xi)\sin(t\xi)$$

olarak bulunur. t ye göre türev alınırsa

$$\left(\hat{u}_{\text{part}}\right)_t = -\xi\sin(t\xi)\hat{u}_1 + \xi\cos(t\xi)\hat{u}_2 + \cos(t\xi)\left(\hat{u}_1\right)_t + \sin(t\xi)\left(\hat{u}_2\right)_t$$

olur. Bu metotta

$$\cos(t\xi)\left(\hat{u}_1\right)_t + \sin(t\xi)\left(\hat{u}_2\right)_t = 0$$

olarak alınır ve bu özel çözüm (5.6) da kullanılırsa

$$-\xi\sin(t\xi)(\hat{u}_1)_t+\xi\cos(t\xi)(\hat{u}_2)_t=-\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,t)$$

olduğu görülür. Bu denklemler çözülürse

$$(\hat{u}_1)_t=\sin(t\xi)\frac{\xi}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,t)$$

ve

$$(\hat{u}_2)_t=-\cos(t\xi)\frac{\xi}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,t)$$

bulunur ve bunlar $[0,t]$ aralığında integre edilirse

$$\hat{u}_1=\int_0^t\sin(\tau\xi)\frac{\xi}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

ve

$$\hat{u}_2=-\int_0^t\cos(\tau\xi)\frac{\xi}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

elde edilir. Bunların tümü birleştirilirse

$$\hat{u}_{\text{part}}(\xi,t)=-\int_0^t\frac{\xi\sin((t-\tau)\xi)}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

olur. Böylece

$$\hat{u}(\xi,t)=c_1(\xi)\cos(t\xi)+c_2(\xi)\sin(t\xi)-\int_0^t\frac{\xi\sin((t-\tau)\xi)}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

olarak bulunur. (5.7) başlangıç koşullarının kullanılmasıyla $c_1(\xi)=\hat{\varphi}(\xi),\quad c_2(\xi)=\dfrac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi}$ olarak bulunur ve çözüm

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\varphi}(\xi)\cos(t\xi)+\frac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi}\sin(t\xi)-\int_0^t\frac{\xi\sin((t-\tau)\xi)}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau \tag{5.8}$$

olur. $u(x,t)$ nin H^s deki normu için gerekli kestirimi, Fourier dönüşümüyle bağlantılı

$$\|w\|_{H^s}^2 = \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{w}(\xi)\right\|^2 = \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{w}(\xi)\right|^2 d\xi$$

şeklindeki normu kullanarak bulabiliriz.

$$\hat{v}_1 = \hat{\varphi}(\xi)\cos(t\xi)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi}\sin(t\xi)$$

$$\hat{v}_3 = -\int_0^t \frac{\xi\sin\left((t-\tau)\xi\right)}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)\,d\tau$$

olacak şekilde alınır ve $u = v_1 + v_2 + v_3$ yazılırsa o zaman

$$\|u\|_{H^s} \le \|v_1\|_{H^s} + \|v_2\|_{H^s} + \|v_3\|_{H^s} \tag{5.9}$$

elde edilir. Şimdi buradaki terimleri ayrı ayrı elde edelim. İlk terim için

$$\|v_1\|_{H^s}^2 = \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 \cos^2(t\xi)\,d\xi \le \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi = \|\varphi\|_{H^s}^2$$

bulunur. İkinci terim için $\left|\frac{\sin(t\xi)}{\xi}\right| \le \frac{|\xi t|}{|\xi|} = t$ eşitsizliğini kullandığımızda ξ kaybolacağından bu kestirimimizi etkileyecektir. $\left|\frac{\sin(t\xi)}{\xi}\right| \le \frac{1}{\xi}$ eşitsizliğini göz önünde bulundurursak $\xi = 0$ da bir tekillik meydana gelecektir. Bunları dikkate alınca integrali iki parçaya bölmemiz gerekir.

$$\|v_2\|_{H^s}^2 = \int_R \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_{|\xi|<1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{|\xi|\ge 1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq t^2 \int_{|\xi|<1} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{1}{\xi^2} \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$|\xi| < 1$ için $\left(1+\xi^2\right) \leq 2$ ve $|\xi| \geq 1$ için $\dfrac{1}{\xi^2} \leq 1$ olur. Bu nedenle

$$\|v_2\|_{H^s}^2 \leq 2t^2 \int_{|\xi|<1} \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi + 2\int_{|\xi|\geq 1} \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq 2\left(1+t^2\right) \int_R \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi = 2\left(1+t^2\right) \|\psi\|_{H^{s-1}}^2$$

bulunur. (5.8) deki üçüncü terimin H^s normunu benzer olarak hesaplayalım

$$\|v_3\|_{H^s} = \left\| -\int_0^t \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\xi \sin\left((t-\tau)\xi\right)}{1+\xi^4} \hat{h}(\xi,\tau)\, d\tau \right\|$$

Minkowski eşitsizliğinin integral formundan

$$\|v_3\|_{H^s} \leq \int_0^t \left\| \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\xi \sin\left((t-\tau)\xi\right)}{1+\xi^4} \hat{h}(\xi,\tau) \right\| d\tau = \int_0^t \|J(\tau)\| d\tau$$

bulunur. Şimdi

$$\|J(\tau)\|^2 = \int_{|\xi|<1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\xi^2 \sin^2\left((t-\tau)\xi\right)}{\left(1+\xi^4\right)^2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

$$+\int_{|\xi|\geq 1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\xi^2 \sin^2\left((t-\tau)\xi\right)}{\left(1+\xi^4\right)^2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

dir. Daha önceki benzer tartışmalar

$$\|J(\tau)\|^2 \leq \int_{|\xi|<1} \left(1+\xi^2\right)^s (t-\tau)^2 \frac{\xi^2 . \xi^2}{\left(1+\xi^4\right)^2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

$$+\int_{|\xi|\geq 1} \left(1+\xi^2\right)^s \frac{\xi^2}{\left(1+\xi^4\right)^2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

$$=\int_{|\xi|<1}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}(t-\tau)^2\frac{\xi^4\left(1+\xi^2\right)^2}{\left(1+\xi^4\right)^2}\left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

$$+\int_{|\xi|\geq 1}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\frac{\xi^2\left(1+\xi^2\right)^2}{\left(1+\xi^4\right)^2}\left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi$$

olduğunu gösterir. $|\xi|<1$ için $\dfrac{\xi^4\left(1+\xi^2\right)^2}{\left(1+\xi^4\right)^2}\leq 1,$ $|\xi|\geq 1$ için $\dfrac{\xi^2\left(1+\xi^2\right)^2}{\left(1+\xi^4\right)^2}\leq 1$ ve $0\leq\tau\leq t$ için $(t-\tau)^2\leq t^2$ geçerli olduğundan

$$\left\|J(\tau)\right\|^2\leq 2\left(1+t^2\right)\int_R\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\left|\hat{h}(\xi,t)\right|^2 d\xi$$

olur. Bu nedenle

$$\left\|\hat{v}_3\right\|_{H^s}\leq\sqrt{2}(1+t)\int_0^t\left\|h(\tau)\right\|_{H^{s-2}}d\tau$$

bulunur. Bulduğumuz kestirimleri (5.9) da yazarsak

$$\left\|u(t)\right\|_{H^s}\leq\left\|\varphi\right\|_{H^s}+\sqrt{2}(1+t)\left\|\psi\right\|_{H^{s-1}}+\sqrt{2}(1+t)\int_0^t\left\|h(\tau)\right\|_{H^{s-2}}d\tau \qquad (5.10)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi u_t için bir kestirim bulalım. (5.8) de t ye göre türev alınırsa

$$\hat{u}_t(\xi,t)=-\xi\sin(t\xi)\hat{\varphi}(\xi)+\cos(t\xi)\hat{\psi}(\xi)-\int_0^t\cos\left((t-\tau)\xi\right)\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\hat{h}(\xi,\tau)d\tau \quad (5.11)$$

olur. Şimdi, u_t nin H^{s-1} normunu göz önüne alalım. Yukarıda yaptıklarımıza benzer olarak

$$\left\|-\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s-1}{2}}\xi\sin(t\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right\|^2=\int_R\left(1+\xi^2\right)^{s-1}\xi^2\sin^2(t\xi)\left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq\int_R\left(1+\xi^2\right)^s\left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi=\left\|\varphi\right\|_{H^s}^2$$

$$\int_R \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \cos^2(t\xi)\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_R \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi = \|\psi\|_{H^{s-1}}^2$$

$$\left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^{s-1} \cos^2\left((t-\tau)\xi\right)\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\right)^2 \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_R \left(1+\xi^2\right)^{s-2} \left|\hat{h}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|h\|_{H^{s-2}}$$

olduğundan

$$\|u_t(t)\|_{H^{s-1}} \leq \|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{H^{s-2}} d\tau \tag{5.12}$$

elde ederiz. Böylece (5.5) kestirimi sağlanır.

Lemma 5.2.2. [34, 35]. $f(u) \in C^k(R)$, $f(0)=0$, $u \in H^s \cap L^\infty$, $h = [\![s]\!]+1$, $s \geq 0$ olsun. Eğer $\|u\|_\infty \leq M$ ise o zaman

$$\|f(u)\|_{H^s} \leq K_1(M)\|u\|_{H^s}$$

olur. Burada $K_1(M)$, M ye bağlı bir sabittir.

Lemma 5.2.3. [34, 35]. $f(u) \in C^k(R)$, $u, v \in H^s \cap L^\infty$, $k = [\![s]\!]+1$, $s \geq 0$ olsun. Eğer $\|u\|_\infty \leq M$, $\|v\|_\infty \leq M$ ise o zaman

$$\|f(u) - f(v)\|_{H^s} \leq K_2(M)\|u - v\|_{H^s}$$

olur. Burada $K_2(M)$, M ye bağlı bir sabittir.

Aşağıda $f(0)=0$ olduğunu kabul edeceğiz. Aksi taktirde $f(u)$ fonksiyonunu $f(u)-f(0)$ ile değiştirebiliriz. $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$ ve $\psi \in H^{s-1}$ için

$$X(T) = \left\{u \in C\left([0,T], H^s\right) \cap C^1\left([0,T], H^{s-1}\right) \mid u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\right\}$$

şeklindeki Banach uzayını göz önüne alalım.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{t\in[0,T]}\left(\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-1}}\right)$$

ile verilsin.

Sobolev gömme teoreminden, eğer $u \in X(T)$ ise $u \in C\left([0,T], L^\infty\right)$ ve $\|u\|_\infty \le C\|u\|_{H^s}$ olur. $a = \|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}$ ve

$$Y(T) = \left\{u \in X(T) \,\middle|\, \|u\|_{X(T)} \le A\right\}$$

olarak alalım. Burada $Y(T)$ nin $T \ge 0$ için $X(T)$ nin kapalı konveks bir altkümesi olduğu açıktır. $w \in Y(T)$ için

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxxtt} - u_{xxxxxx} = \left[\alpha w_t + f(w)\right]_{xx} \tag{5.13}$$

şeklindeki lineer denklemi ele alalım ve S, w yi (5.13) ve (5.2) probleminin tek çözümüne götüren bir dönüşüm olsun. Yani $S(w) = u(x,t)$ olsun. Burada amacımız S nin uygun seçilmiş T ler için $Y(T)$ de bir tek sabit noktasının olduğunu göstermektir.

Lemma 5.2.4. $s > \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ ve $f \in C^{[\![s]\!]+1}(R)$ olsun. O zaman S, A ya bağlı yeterince küçük T ler için, $Y(T)$ den kendi içine bir daraltma dönüşümüdür.

İspat. İlk olarak S nin yeterince küçük T ler için $Y(T)$ yi kendi içine dönüştürdüğünü ispatlayacağız. $w \in Y(T)$ verilmiş olsun. $h(x,t)$ yi

$$h(x,t) = \alpha w_t + f(w)$$

şeklinde tanımlayalım. Lemma 5.2.3 kullanılarak ve $K_1(A)$, A ya bağlı bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_{H^{s-2}} &\le \|\alpha w_t\|_{H^{s-2}} + \|f(w(t))\|_{H^{s-2}}\\ &\le |\alpha|\|w_t\|_{H^{s-1}} + \|f(w(t))\|_{H^s}\end{aligned}$$

$$\leq |\alpha| \|w_t\|_{H^{s-1}} + K_1(A)\|w(t)\|_{H^s}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten $h(x,t) \in L^1([0,T];H^{s-2})$ sonucuna varılır. Lemma 5.2.1 den (5.13), (5.2) probleminin $u = S(w)$ çözümünün $C([0,T],H^s) \cap C^1([0,T],H^{s-1})$ ye ait olduğu açıktır. Ayrıca

$$\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-1}} \leq 4(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{H^{s-2}}\, d\tau\right)$$

$$\leq 4(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \left(|\alpha|\|w_\tau\|_{H^{s-1}} + K_1(A)\|w(\tau)\|_{H^s}\right) d\tau\right)$$

geçerlidir. Bu nedenle

$$\|S(w)\|_{X(T)} = \max_{t\in[0,T]}\left(\|u\|_{H^s} + \|u_t\|_{H^{s-1}}\right) \leq 4(1+T)\left(a + \left(K_1(A)+\alpha\right)AT\right)$$

olup

$$4(1+T)\left(a + \left(K_1(A)+\alpha\right)AT\right) \leq A \tag{5.14}$$

olacak şekilde T yi yeterince küçük seçilirse $\|Sw\|_{X(T)} \leq A$ elde edilir. Bundan dolayı $S(Y(T)) \subset Y(T)$ bulunur.

Şimdi, yeterince küçük T ler için S nin $Y(T)$ de bir daraltma dönüşümü olduğunu ispatlayacağız. $w, \overline{w} \in Y(T)$ olsun. O zaman (5.13) ve (5.2) probleminin w ve $\overline{w}$ ya karşılık gelen çözümleri $u = S\,w$ ve $\overline{u} = S\,\overline{w}$ olur.

$U = u - \overline{u}$, $W = w - \overline{w}$ alalım. O zaman U,

$$U_{tt} - U_{xx} + U_{xxxxtt} - U_{xxxxxx} = \left[\alpha W_t + f(w) - f(\overline{w})\right]_{xx},\ (x,t) \in R\times(0,T) \tag{5.15}$$

$$U(x,0) = U_t(x,0) = 0 \tag{5.16}$$

problemini sağlar. Lemma 5.2.1 ve Lemma 5.2.3 den

$$\|U(t)\|_{H^s} + \|U_t(t)\|_{H^{s-1}} \leq 4(1+T)\int_0^t \left[\alpha \|W_\tau(\tau)\|_{H^{s-2}} + \|f(w) - f(\overline{w})\|_{H^{s-2}}\right] d\tau$$

$$\leq 4(1+T)\left[\alpha T \left\|W_t(t)\right\|_{H^{s-1}} + \left\|W(t)\right\|_{H^{s-2}}\right]$$

$$\leq 4(1+T)\left[\alpha T \left\|W_t(t)\right\|_{H^{s-1}} + K_2(A) T \left\|W(t)\right\|_{H^{s}}\right]$$

$$\leq 4(1+T)\left[\alpha + K_2(A)\right] T \left\|W\right\|_{X(T)}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|U\right\|_{X(T)} \leq 4(1+T)\left[\alpha + K_2(A)\right] T \left\|W\right\|_{X(T)}$$

olur. (5.14) ile birlikte T yi

$$4(1+T)\left[\alpha + K_2(A)\right] T < 1$$

olacak şekilde yeterince küçük seçersek

$$\left\|U\right\|_{X(T)} \leq \left\|W\right\|_{X(T)} \tag{5.17}$$

elde edilir. Böylece S, $Y(T)$ yi $Y(T)$ ye dönüştürür ve S kesin daraltmadır. Bu da Lemmanın ispatını tamamlar.

Teorem 5.2.1. $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ ve $f \in C^{[\![s]\!]+1}(R)$ olsun. O zaman (5.1) ve (5.2) problemi, $[0,T_0)$ en büyük zaman aralığı olmak üzere, bir tek $u \in C\left([0,T_0), H^s\right) \cap C^1\left([0,T_0), H^{s-1}\right)$ lokal çözümüne sahiptir. Ayrıca, eğer

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \left[\left\|u(t)\right\|_{H^s} + \left\|u_t(t)\right\|_{H^{s-1}}\right] < \infty \tag{5.18}$$

ise o zaman $T_0 = \infty$ olur.

İspat. Lemma 5.2.4 ten ve daralma dönüşümü prensibinden, uygun seçilmiş $T > 0$ için H, (5.1)-(5.2) probleminin güçlü çözümü olan bir tek $u(x,t) \in Y(A,T)$ sabit noktasına sahip olur. Her $T' > 0$ için $X(T')$ ye ait olan çözümün tekliğini ispatlayalım.

$u_1, u_2 \in X(T')$, (5.1) ve (5.2) probleminin iki çözümü olsun. $u = u_1 - u_2$ olarak alalım. O zaman

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxxtt} - u_{xxxxxx} - \alpha u_{xxt} = \left[f(u_1) - f(u_2)\right]_{xx}$$

olur. Yukarıdaki denklemi $\left(-\partial_x^{\,2}\right)^{-1} u_t$ ile çarpar ve elde ettiğimiz çarpımı x e göre integrallersek

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\left(-\partial_x^{\,2}\right)^{-1} u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2\right] + |\alpha|\|u_t\|^2 = \int_R [\, f(u_1) - f(u_2)]u_t dx \quad (5.19)$$

buluruz. $X\left(T'\right)$ uzayının tanımından, $s > \frac{1}{2}$ olmasından ve Sobolev gömme teoreminden $C_1\left(T'\right)$, T' ne bağlı bir sabit olmak üzere, $i = 1,2$ ve $0 \le t \le T' < T$ için $\left\|u_i\left(t\right)\right\|_\infty \le C_1\left(T'\right)$ olur. Böylece Cauchy eşitsizliğinden

$$\left|\int_R [\, f(u_1) - f(u_2)]u_t dx\right| \le \|\, f(u_1) - f(u_2)\|_2 \|u_t\|_2 \le C_2\left(T'\right)\|u\|_2 \|u_t\|_2$$

elde edilir. Burada $C_2\left(T'\right)$, $C_1\left(T'\right)$ ye bağlı bir sabittir. Young eşitsizliğinden

$$\left[\left\|\left(-\partial_x^{\,2}\right)^{-1} u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2\right] + 2\alpha\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau = C_2\left(T'\right)\int_0^t \left[\|u\|^2 + \|u_\tau\|^2\right] d\tau$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\|u\|^2 + \|u_t\|^2 \le \left[C_2\left(T'\right) + 2|\alpha|\right]\int_0^t \left[\|u\|^2 + \|u_\tau\|^2\right] d\tau \quad (5.20)$$

elde eldir. Gronwall eşitsizliği yardımıyla, (5.20) dan $0 \le t \le T'$ için $\|u\|^2 + \|u_t\|^2 \equiv 0$ olduğu bulunur. Buradan da $0 \le t \le T'$ için $u \equiv 0$ olur. Yani, (5.1) ve (5.2) problemi $X\left(T'\right)$ de en fazla bir çözüme sahiptir.

Şimdi, $\left[0, T_0\right)$, $u \in X\left(T_0\right)$ için maksimal varlık aralığı olmak üzere, eğer (5.18) sağlanırsa $T_0 = \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

(5.20) nin sağlandığını ve $T_0 < \infty$ olduğunu kabul edelim. Her bir $T' \in \left[0, T_0\right)$ için

$$v_{tt} - v_{xx} + v_{xxxxtt} - v_{xxxxxx} = \left[\, f\left(u\right) + \alpha u_t\right]_{xx} \quad (5.21)$$

$$v\left(x,0\right) = u\left(x,T'\right),\ v_t\left(x,0\right) = u_t\left(x,T'\right) \quad (5.22)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. (5.18) den

$$\left\|u(t)\right\|_{H^s}+\left\|u_t(t)\right\|_{H^{s-1}}\le K \tag{5.23}$$

olur. Burada K, $T'\in[0,T_0)$ dan bağımsız pozitif bir sabittir. Her $T'\in[0,T_0)$ için (5.21) ve (5.22) problemi bir tek $v(x,t)\in X(T_1)$ çözümüne sahip olacak şekilde bir $T_1\in(0,T_0)$ sabiti vardır. $T'=T_0-T_1/2$ alalım ve

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & t\in[0,T'],\\ v(x,t-T'), & t\in[T',T_0+T_1/2],\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\tilde{u}(x,t)$, (5.1) ve (5.2) probleminin $[0,T_0+T_1/2]$ aralığındaki bir çözümüdür ve teklikten, $\tilde{u}$, u ya genişler ki bu da $[0,T_0)$ ın maksimalliğini bozar. Bu yüzden eğer (5.18) sağlanırsa, $T_0=\infty$ olur. Böylece Teorem 5.2.1 ispatlanmış olur.

5.3. Global Çözüm

Lemma 5.3.1. $f(u)\in C(R)$, $F(u)=\int_0^u f(s)ds$, $\varphi\in H^2$, $\psi\in H^1$, $\Lambda^{-1}\psi\in L^2$ ve $F(\varphi)\in L^1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümün olduğu her $t>0$ için (5.1) ve (5.2) probleminin $u(x,t)$ çözümünün enerji özdeşliği

$$E(t)=\left\|\Lambda^{-1}u_t\right\|^2+\left\|u\right\|^2+\left\|u_{xt}\right\|^2+\left\|u_{xx}\right\|^2+2\alpha\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau+2\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx=E(0) \tag{5.24}$$

şeklindedir.

Burada F Fourier, F^{-1} de ters Fourier dönüşümünü göstermektedir ve $\Lambda^{-\alpha}w=F^{-1}\left[|\xi|^{-\alpha}Fw\right]$ şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. (5.1) denklemini kullanarak basit bir hesaplamayla

$$\frac{d}{dt}E(t)=2\left(\Lambda^{-1}u_{tt},\Lambda^{-1}u_t\right)+2(u,u_t)+2(u_{xt},u_{xtt})+2(u_{xx},u_{xxt})+2\alpha(u_t,u_t)+2\left(f(u),u_t\right)$$

$$=2\left(\Lambda^{-2}u_{tt}+u-u_{xxtt}+u_{xxxx}+\alpha u_t+f(u),u_t\right)$$

$$=2\left(u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxxtt}-u_{xxxxxx}-\alpha u_{xxt}-f(u)_{xx},\ \Lambda^{-2}u_t\right)=0 \tag{5.25}$$

buluruz. Burada $(.,.)$ L^2 uzayındaki iç çarpımı gösterir. (5.25) eşitliğini $[0,t]$ aralığında t ye göre integrallersek (5.24) ü elde ederiz.

Teorem 5.3.2. $s \geq 2,\ \varphi \in H^s,\ \psi \in H^{s-1},\ \Lambda^{-1}\psi \in L^2,\ F(\varphi) \in L^1,\ f \in C^{[\![s]\!]+1}(R)$ ve $F(u) \geq 0$ olduğunu kabul edelim. $f'(u)$ alttan sınırlı yani her $s \in R$ için $f'(s) \geq A_0$ olacak şekilde bir A_0 sabiti var olsun. O halde (5.1) ve (5.2) problemi bir tek $u \in C\left([0,\infty), H^s\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{s-1}\right)$ global çözüme sahiptir.

İspat. Öncelikle $s = 2$ için ispatlayalım.

Eğer $F(u) \geq 0$ ise, o zaman (5.24) ten

$$\left\|\Lambda^{-1}u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq E(0) + 2|\alpha| \int_0^t \|u_\tau\|^2 \, d\tau$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve Gronwall eşitsizliğinden

$$\left\|\Lambda^{-1}u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq E(0)e^{2|\alpha|T} \leq C_3(T),\ \forall t \in [0,T) \tag{5.26}$$

olur.

Eğer $f'(u)$ alttan sınırlı ise, $k_0 = \min\{A_0, 0\}\ (\leq 0)$ olmak üzere $f_0(u) = f(u) - k_0 u$ olsun. O zaman $f_0(0) = 0$, $f_0'(u) = f'(u) - k_0 \geq 0$ olup $f'(u)$ monoton artan bir fonksiyondur. Ayrıca $F_0(u) = \int_0^u f_0(s)\,ds \geq 0$ dir. Ayrıca

$$F(u) = \int_0^u f(s)\,ds = \int_0^u \left[f_0(s) + k_0 s\right] ds = F_0(u) + \frac{k_0}{2}u^2$$

olur. (5.24) ten ve Young eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left\|\Lambda^{-1}u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} F_0\left(u(x,t)\right) dx$$

$$= E(0) - 2\alpha \int_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 \, d\tau - k_0\|u\|^2$$

$$= E(0) - 2\alpha \int_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 \, d\tau - k_0\|\varphi\|^2 - 2k_0 \int_0^t (u, u_\tau)\, d\tau$$

$$\leq E(0) - k_0 \|\varphi\|^2 + \int_0^t \left[(2|\alpha|+1) \|u_\tau(\tau)\|^2 + k_0^2 \|u_\tau\|^2 \right] d\tau$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikten ve Gronwall eşitsizliğinden

$$\left\|\Lambda^{-1} u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq \left(E(0) - k_0 \|\varphi\|^2\right) e^{\left(2|\alpha|+1+k_0^2\right)T}, \ \forall t \in [0,T) \qquad (5.27)$$

bulunur. $\|u\|_{H^2}$ ve $\|u_t\|_{H^1}$ kestirimlerine ihtiyacımız vardır.

(5.26) ve (5.27) den

$\|u_{xt}\|^2 \leq C_4(T)$ ve $\|u_{xx}\|^2 \leq C_5(T)$ mevcuttur. Sobolev-Poincare eşitsizliğinden $d_1 \in R^+$ ve $d_2 \in R^+$ için

$$\|u_t\|^2 \leq d_1 \|u_{xt}\|^2 \leq C_6(T) < \infty, \ \forall t \in [0,T) \qquad (5.28)$$

ve

$$\|u_x\|^2 \leq d_2 \|u_{xx}\|^2 \leq C_7(T) < \infty, \ \forall t \in [0,T) \qquad (5.29)$$

kestirimleri geçerlidir.

(5.27)-(5.29) eşitsizlikleri birlikte değerlendirilirse

$$\|u\|_{H^2}^2 + \|u_t\|_{H^1}^2 < \infty, \ \forall t \in [0,T) \qquad (5.30)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1 den açıktır ki $u \in C\left([0,\infty), H^2\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^1\right)$ tek global çözümü vardır ve ayrıca $\Lambda^{-1} u_t \in L^2$ dır.

Şimdi $s > 2$ durumu için ispatlayalım. (5.5) kestiriminden

$$\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-1}} \leq 4(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \left\|\alpha u_\tau(\tau) + f(u(\tau))\right\|_{H^{s-2}} d\tau\right)$$

$$\leq 4(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + |\alpha| \int_0^t \|u_\tau(\tau)\|_{H^{s-2}} d\tau\right.$$

$$\left. + \int_0^t C\left(\|u(\tau)\|_\infty\right) \|u(\tau)\|_{H^{s-2}} d\tau\right) \qquad (5.31)$$

elde edilir. (5.30) dan $\|u(t)\|_\infty < \infty$ ve $\|u_t(t)\|_\infty < \infty$ olduğu dikkate alınırsa (5.31) den

$$\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-1}} < \infty$$

elde edilir.

Sonuç olarak $u \in C\left([0,\infty), H^s\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{s-1}\right)$ tek global çözümü mevcuttur ve ayrıca $\Lambda^{-1}u_t \in L^2$ dır.

5.4. Başlangıç Verilerine Sürekli Bağımlılık

Şimdi (5.1) ve (5.2) probleminin başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğunu ve böylece problemin iyi konulmuş olduğunu ispatlayacağız. Bu amaçla, (5.1) denkleminin $[0,T]$ aralığında sırasıyla (φ_1, ψ_1) ve (φ_2, ψ_2) başlangıç verileriyle verilmiş u_1, u_2 gibi iki çözümünü alalım. Ve $v = u_1 - u_2$ olsun. Bu durumda v

$$v_{tt} - v_{xx} + v_{xxxxtt} - v_{xxxxxx} - \alpha v_{xxt} = \left(f(u_1) - f(u_2)\right)_{xx}$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \; v_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$$

problemini sağlar. Lemma 5.2.1 den

$$\|u_1 - u_2\|_{H^s} \le 4(1+T)\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s} + \int_0^t \|f(u_1) - f(u_2)\|_{H^{s-1}} d\tau\right)$$

$$\le 4(1+T)\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s} + \int_0^t \|f(u_1) - f(u_2)\|_{H^s} d\tau\right)$$

olduğu görülür. Ayrıca Sobolev gömme teoreminden, u_1 ve u_2 nin L^∞ uzayında olduğu bilinmektedir. $M = \max\left\{\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\right\}$ olsun. Lemma 5.2.3 ten

$$\|u_1 - u_2\|_{H^s} \le 4(1+T)\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s} + K_2(M)\int_0^t \|u_1 - u_2\|_{H^s} d\tau\right)$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinin integral formundan

$$\|u_1 - u_2\|_{H^s} \le 4(1+T)\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^s} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s}\right)e^{4(1+T)K_2(M)t}, \; t \in [0,T]$$

bulunur. Böylece çözüm, başlangıç verilerinin farkının bir fonksiyonu tarafından sınırlı olduğundan, başlangıç verilerine sürekli bağımlıdır.

5.5. Asimptotik Davranış

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxxtt}-u_{xxxxxx}-\alpha u_{xxt}=f(u)_{xx},\ \ x\in R,\ \ t>0 \tag{5.32}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{5.33}$$

denkleminde $u=w_x$ dönüşümünü uygularsak,

$$w_{tt}-w_{xx}+w_{xxxxtt}-w_{xxxxxx}-\alpha w_{xxt}=f(w_x)_x,\ \ x\in R,\ \ t>0 \tag{5.34}$$

$$w_x(x,0)=\varphi(x),\ \ w_{xt}(x,0)=\psi(x) \tag{5.35}$$

problemini elde ederiz.

Bu kısımda, (5.34) ve (5.35) probleminin çözümünün asimptotik davranışını inceleyeceğiz. Bu amaçla enerji denklemini

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(\|w_t\|^2+\|w_x\|^2+\|w_{xxt}\|^2-\|w_{xxx}\|^2\right)+\int F(w_x)\,dx \tag{5.36}$$

şeklinde tanımlayacağız. Burada $F(s)=\int_0^s f(y)\,dy$ dir.

Teorem 5.5.1. $\alpha>0,\ 1<p<\infty$ olsun ve

(i) C_0 bir sabit olmak üzere $f(s)s\geq 0$ veya $f'(s)\geq C_0,\ s\in R$

(ii) $E(0)>0$

(iii) $b>0$ bir sabit olmak üzere $F(s)\leq bf(s)s,\ s\in R$

olduğunu kabul edelim. O zaman (5.1) ve (5.2) probleminin global çözümü için

$$\|w_t\|^2+\|w_x\|^2+\|w_{xxt}\|^2-\|w_{xxx}\|^2+2\int F(w_x)\,dx\leq ME(0)e^{-\delta_1 t},\ \ t>0 \tag{5.37}$$

olacak şekilde bir $\delta_1>0$ ve $M>0$ vardır. Burada $w\in C\left([0,\infty),H^{s+1}\right)\cap C^1\left([0,\infty),H^s\right)$ dır.

İspat. $w(x,t)$, (5.34) ve (5.35) probleminin global çözümü olsun. (5.34) denkleminin L^2 de w_t ile iç çarpımı alınırsa

$$\frac{d}{dt}E(t)+\alpha\|w_{xt}\|^2=0,\ t>0 \tag{5.38}$$

elde edilir. (5.38) denklemi $e^{\delta t}$ ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right)+\alpha e^{\delta t}\|w_{xt}\|^2=\delta e^{\delta t}E(t),\ t>0 \tag{5.39}$$

bulunur. (5.39) denklemi $(0,t)$ aralığında integrallenirse

$$\begin{aligned} e^{\delta t}E(t)+\alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|w_{x\tau}(\tau)\|^2\,d\tau &= E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \\ &= E(0)+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|w_\tau\|^2+\|w_{xx\tau}\|^2\right)d\tau \\ &\quad +\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|w_x\|^2-\frac{1}{2}\|w_{xxx}\|^2+\int F(w_x)\,dx\right)d\tau,\ t>0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

elde edilir.

Eğer $f(s)s\geq 0,\quad s\in R$ ise $F(s)\geq 0$ dir. Böylece teoremdeki (iii) kabulünden $0\leq F(s)\leq bf(s)s$ olur. Bu bağıntıyı ve (5.34) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|w_x\|^2-\frac{1}{2}\|w_{xxx}\|^2+\int F(w_x)\,dx\right)d\tau \\ &\leq b_1\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|w_x\|^2-\|w_{xxx}\|^2+\int f(w_x)w_x\,dx\right)d\tau \\ &= -b_1\int_0^t e^{\delta\tau}\left(w,w_{\tau\tau}+w_{xxxx\tau\tau}-\alpha w_{xx\tau}\right)d\tau \\ &= -b_1\int_0^t e^{\delta\tau}\left((w,w_{\tau\tau})+(w,w_{xxxx\tau\tau})-(w,\alpha w_{xx\tau})\right)d\tau \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} (w,w_{\tau\tau}) &= \int_R ww_{\tau\tau}\,dx=\int_R\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(ww_\tau)-w_\tau^2\right]dx=\frac{\partial}{\partial\tau}(w,w_\tau)-\|w_\tau\|^2 \\ (w,w_{xxxx\tau\tau}) &= \int_R ww_{xxxx\tau\tau}\,dx \\ &= \int_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(ww_{xxx\tau\tau}-w_xw_{xx\tau\tau})+\frac{\partial}{\partial\tau}(w_{xx}w_{xx\tau})-(w_{xx\tau})^2\right]dx=\frac{\partial}{\partial\tau}(w_{xx},w_{xx\tau})-\|w_{xx\tau}\|^2 \\ (w,\alpha w_{xx\tau}) &= \int_R w,\alpha w_{xx\tau}\,dx=\alpha\int_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(ww_{x\tau})-\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(w_x)^2\right]dx=-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\tau}\|w_x\|^2 \end{aligned}\right)$$

$$=-b_1\left[e^{\delta t}\left((w,w_t)+(w_{xx},w_{xxt})+\frac{\alpha}{2}\|w_x\|^2\right)-\left((w_0,w_1)+(w_{0xx},w_{1xx})+\frac{\alpha}{2}\|w_{0x}\|^2\right)\right.$$

$$\left.-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|w_\tau\|^2+\|w_{xx\tau}\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left((w,w_\tau)+(w_{xx},w_{xx\tau})+\frac{\alpha}{2}\|w_x\|^2\right)d\tau\right]$$

elde ederiz. Young eşitsizliği kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\leq b_1\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|w_\tau\|^2+\|w_{xx\tau}\|^2\right)d\tau+\frac{b_1}{2}e^{\delta t}\left(\|w_t\|^2+\|w\|^2+\|w_{xxt}\|^2+\|w_{xx}\|^2+\alpha\|w_x\|^2\right)$$

$$+\frac{b_1}{2}e^{\delta t}\left(\|w_1\|^2+\|w_0\|^2+\|w_{1xx}\|^2+\|w_{0xx}\|^2+\alpha\|w_{0x}\|^2\right)$$

$$+\frac{b_1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|w_\tau\|^2+\|w\|^2+\|w_{xx\tau}\|^2+\|w_{xx}\|^2+\alpha\|w_x\|^2\right)d\tau$$

$$\leq 2b_1\int_0^t e^{\delta\tau}\|w_{xx\tau}\|d\tau+(1+\alpha)b_1e^{\delta t}E(t)$$

$$+(1+\alpha)b_1e^{\delta t}E(0)+(1+\alpha)b_1\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau,\ t>0 \tag{5.41}$$

bulunur. Burada $b_1=\max\left\{\frac{1}{2},b\right\}$ dir.

(5.41) eşitsizliğini (5.42) da yerine koyarsak

$$e^{\delta t}E(t)+\alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|w_{x\tau}(\tau)\|^2d\tau$$

$$\leq\left(1+(1+\alpha)b_1\delta\right)E(0)+(1+2b_1)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|w_{xx\tau}(\tau)\|^2d\tau$$

$$+(1+\alpha)b_1\delta e^{\delta t}E(t)+(1+\alpha)b_1\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau \tag{5.42}$$

bulunur.

δ yı $0<\delta<\min\left\{\frac{\alpha}{1+2b_1},\frac{1}{(1+\alpha)b_1}\right\}$ olacak şekilde seçersek, (5.42) denkleminden

$$e^{\delta t}E(t)\leq\frac{M}{2}E(0)+\theta\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau \tag{5.43}$$

sonucu çıkar. Burada $\frac{M}{2}=\frac{1+(1+\alpha)b_1\delta}{1-(1+\alpha)b_1\delta}$ ve $\theta=\frac{(1+\alpha)b_1\delta}{1-(1+\alpha)b_1\delta}$ dır. (5.43) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\|w_t\|^2+\|w_x\|^2+\|w_{xxt}\|^2-\|w_{xxx}\|^2+2\int F(w_x)\,dx \le ME(0)e^{-\delta_1 t},\ \ t>0 \qquad (5.44)$$

elde ederiz. Burada $\delta_1=(1-\theta)\delta>0$ dır.

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Tezin üçüncü bölümünde, ikinci mertebeden hiperbolik denklemlerin zayıf çözümleri Galerkin Metodu yardımı ile verildi. Bu amaçla, ele alınan $u_m(t)$ yaklaşık çözümü için enerji kestirimleri oluşturuldu. Daha sonra bu yaklaşık çözümün $u(t)$ zayıf çözümüne yakınsadığı ve bu çözümün varlık ve tekliği ispatlandı. Ayrıca damping terimli lineer olmayan dalga denkleminin bir sınıfı için zayıf çözüm Galerkin Metodu kullanılarak verildi.

Dördüncü bölümde, dördüncü mertebeden dispersive ve dissipative terimli

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u),\ x \in \Omega,\ t > 0$$

dalga denkleminin asimptotik davranışı üstel çarpan metodu kullanılarak verildi.

Beşinci bölüm ise orijinal çalışmamız olup burada

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxxtt} - u_{xxxxxx} - \alpha u_{xxt} = f(u)_{xx},\ \ x \in R,\ t > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

şeklindeki damping terimli lineer olmayan altıncı mertebeden bir Cauchy problemi için çözümün lokal ve global varlık ve tekliğini ve verilere sürekli bağımlılığını ispatladık. Ayrıca çözümün asimptotik davranışını inceledik.

Bilindiği gibi lineer olmayan denklemlerin çözümleri lineer denklemlere göre, yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri de daha düşük mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine göre daha zordur [6]. Çözümlerin matematiksel davranışları için de benzer zorluklar geçerlidir.

Fiziksel olarak gerçek süreçlerde damping ve dispersive terimler lineer olmamaktan kaynaklanan enerji büyümelerinde önemli rol oynarlar ve bu terimlerin lineer olmayan terimlerle etkileşimleri yığılma, denge ve enerjinin yayılımına eşlik eder [24]. Boussinesq denklemlerinde, lineer olmama ve dispersion etkileri dikkate alınırken birçok gerçek durumda damping etkileri lineer olmama ve dispersive etkilerle karşılaştırılır [22]. Bu nedenle denklemimizin damping terimli olması önemlidir.

Kısım 5.2 de, önce denklemin lineerleştirilmiş hali için Fourier dönüşümünü kullanarak norm altında kestirimler elde ettik. Daha sonra daraltma dönüşümü yardımıyla $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ ve $f \in C^{[\![s]\!]+1}(R)$ için lokal çözümün varlık ve tekliğini ispatladık.

Kısım 5.3 te, $s \geq 2$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, $\Lambda^{-1}\psi \in L^2$, $F(\varphi) \in L^1$, $f \in C^{[\![s]\!]+1}(R)$, $F(u) \geq 0$ ve $f'(u)$ alttan sınırlı olacak şekilde tanımlanan $f(u)$ için problemin $u \in C\left([0,\infty), H^s\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{s-1}\right)$ global çözümüne sahip olduğunu gösterdik. Bunu önce $s = 2$ durumu için daha sonra da $s > 2$ durumu için ispatladık.

Kısım 5.4 te, problemin başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğunu gösterdik. Böylece ele aldığımız problemin iyi konulmuş olduğunu ispatladık.

Kısım 5.5 te, $E(0) > 0$ pozitif başlangıç enerjisi ve diğer koşullar ile problemin çözümünün asimptotik davranışını üstel çarpan metodunu kullanarak inceledik. Ayrıca

$$\|w_t\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w_{xxt}\|^2 - \|w_{xxx}\|^2 + 2\int F(w_x)\,dx \leq ME(0)e^{-\delta_1 t}, \; t > 0$$

olduğunu göstererek çözümün kararlı olduğunu ispatladık.

Beşinci bölümde ele aldığımız problemin lokal çözümü integral denklemlerden faydalanılarak da gösterilebilir. Asimptotik davranış üstel çarpan metodu kullanılarak gösterildi ancak farklı metodlar da kullanılabilir. Ayrıca problemin global olmayan çözümü gibi diğer bazı davranışları da çalışılabilir.

Ele aldığımız denklem sınırlı bölgede ve farklı sınır koşullarıyla da verilebilir.

Elbette yukarıda yapılanların denklemin n-boyutlu durumuna da genişletilebilmesi yerinde olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] M. Aassila and A. Guesmia, Energy Decay for a Damped Nonlinear Hyperbolic Equation, *App. Math. Let.,* 12 (1999) 49-52.

[2] R. A. Adams and J.J.F.Fournier, Sobolev Spaces, *Academic Press*, New York, (2003).

[3] T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, *Oxford*, (1998).

[4] G. Chen and B. Lu, The initial-boundary value problems for a class of nonlinear wave equations with damping term, *J. Math. Anal. Appl*., 351 (2009) 1-15.

[5] G. Chen and S. Wang, Existence and nonexistenge of global solutions for the generalized IMBq equations, *Nonlinear Anal.,* TMA 36 (1999) 961-980.

[6] L. C. Evans, Partial Differential Equations, *Graduate Studies in Mathematics*, vol.19, (1998).

[7] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 2, *Wiley-Interscience*, (1962).

[8] P. Duchateau and D. W. Zachmann, Schaum's Outline of Theory and Problems of Partial Differential Equations, *McGraw-Hill Comp*., (1986).

[9] N. Duruk, Cauchy problem for a higher-order Boussinesq equation, *Thesis (M.Sc.)*, Sabanci Universty, (2006).

[10] N. Duruk, A. Erkip and H. A. Erbay, A higher-order Boussinesq equation in locally non-linear theory of one-dimensional non-local elasticity, *IMA Journal of App. Math*., 74 (2009), 97-106.

[11] D. Erdem and V. K. Kalantarov, A remark on nonexistence of global solutions to quasi-linear hyperbolic and parabolic equations, *Appl. Math. Let.,* 15 (2002), 585-590.

[12] V. Georgiev and G. Todorova, Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, *J. Diff. Eq.,* 107 (1994), 295-308.

[13] M. Houshiyari, Doğrusal olmayan pseudo-hiperbolik denklemler için başlangıç sınır değer problemleri, *Doktora Tezi*, Hacettepe Üniversitesi, (1999).

[14] V. K. Kalantarov, Nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, Turbulence Modeling and Vortex Dyanamics, Proceedings Ist., *Springer-Verlag*, (1996), 169-181.

[15] Y. A. Li and P. J. Olver, Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *J. Diff. Eq.,* 162 (2000), 27-63.

[16] Y. Liu, Instability of solitary waves for generalized Boussineq Equations, *J. Dyna Diff. Equ*., 5 (3) (1993) 537-557.

[17] Y. Liu, Instability and blow-up of solutions to a generalized Boussinesq equation, *SIAM J. Math. Anal*., 26 (1995) 1527- 1546.

[18] Y. Liu, Decay and scattering of small solutions of generalized Bossinesq equatiun, *J. Funct. Anal*., 147 (1997) 51-68.

[19] T. Myint-U, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, New York: *Elsevier North-Holland*, (1980).

[20] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions of quasilinear hyperbolic equations with linear damping, *J. Diff. Eq.,* 137 (1997), 384–395.

[21] N. Polat, Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu, *Doktora Tezi*, Dicle Üniversitesi, (2005).

[22] N. Polat, Existence and Blow up of Solutions of the Cauchy problem of the generalized damped multidimensional improved modified Boussinesq equation, *Z. Naturforsch*, 63a, (2008) 1-10.

[23] N. Polat and A. Ertaş, Existence and Blow up of Solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl*., 349 (2009) 10-20.

[24] N. Polat and D. Kaya, Existence, Asymptotic Behaviour, and Blow up of Solution for a class of Nonlinear Wave Equations with Dissipative and Dispersive Term, *Z. Naturforsch*, 64a, (2009) 1-12.

[25] N. Polat, D. Kaya and H.İ. Tutalar, Blow up of solution for a class of nonlinear wave equations, *2004-Dynamical Systems and Applications,* GBS Publishers and Distributors (India) (2005), 572-576.

[26] N. Polat, D. Kaya and H. Ilhan Tutalar, Blow up of Solutions for the damped Boussinesq equation, *Z. Naturforsch,* 64a**,** (2005), 1-4.

[27] S. L. Ross, Differential Equations, *Blashdell Pub. Comp*., (1964).

[28] X. Run-zhang, Z. Xi-ren and S. Ji-hong, Asymptotic behaviour of solution for fourth order wave equation with dispersive and dissipative terms, *Appl. Math. Mech. –Engl. Ed*., (2008), 29 (2): 259-262.

[29] G. Schneider and C.W. Eugene, Kawahara dynamics in dispersive media, *Physica D: Nonlinear Phenomena,* 152-153 (2001) 384-394.

[30] S. Selberg, Multilinear Space-time estimates and applications to local existence theory for nonlinear wave equations, *Ph. D. Thesis*, Princeton University, (1999).

[31] Y. Uğurlu, Difüzyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması, *Yüksek Lisans Tezi*, Fırat Üniversitesi, (2005).

[32] V. V. Varlamov, Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions, *Int. J. Maths. & Math. Sci*., 22 (1999), 131–145.

[33] S. Wang and G. Chen, The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in $W^{s,p}\left(R^n\right)$, *J. Math. Anal. Appl*., 266 (2002) 38-54.

[34] S. Wang and G. Chen, Small ampliqude solutions of the generalized IMBq equation, *J.Math. Anal. Appl.* 274 (2002) 846-866.

[35] S. Wang and G. Chen, Cauchy problem of the generalized double dispersion equation, *Nonlinear Anal.,* 64 (2006) 159-173.

[36] Y. Wang and C. Mu, Blow-up and scattering of solution for a generalized Boussinesq equation, *Appl. Math. Comput*., (2007) 1131-1141.

[37] R. Xue, Local and global existence of solutions for the Cauchy problem of a generalized Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.,* 316 (2006) 307-327.

[38] S. Yadong, Initial boundary value problem of equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f\left(u\right)$, *Acta Math. Appl. Sinica*, (2000).

[39] L. Yacheng and L. Xiaoyuan. Some remarks on the equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f\left(u\right)$, *J. of Natural Scie. of Hei. Unv*., (2004), 21(3): 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erhan PİŞKİN

Doğum Tarihi : 1981

Doğum Yeri : Diyarbakır

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail: episkin@dicle.edu.tr / erhan1081@mynet.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Diyarbakır Yunus Emre Lisesi, 1997-2000

Lisans : Dicle Ü. Eğitim Fak. Matematik Öğr., 2000-2005

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Diyarbakır Bismil Ş.C.Sıtkı Tarancı Lisesi : 2005-2008

Diyarbakır Bismil Anadolu Lisesi : 2008-2009

Dicle Ü. Eğitim Fak. Araştırma Görevlisi : 2009-