T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ VE GEOMETRİK YORUMLARI

Faruk SURMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
EKİM 2009

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ VE GEOMETRİK YORUMLARI

Faruk SURMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN: Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
EKİM 2009

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Faruk SURMUŞ tarafından yapılan bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan	: Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ
Üye	: Prof. Dr. Ali YILMAZ
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ

Tez Savunma Sınav Tarihi
20/10/2009

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

…../…../………

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Sobolev Uzayları ve Zayıf Türev kavramlarının ortaya atılması ile Kısmi Diferansiyel Denklemler alanı üzerine yapılan çalışma ve uygulamalarda büyük ilerleme elde edilmiş, bu yüzden lisansüstü eğitimde mutlaka zaman ayrılması gereken bir alan olmuştur.

Diferansiyel Denklemler' in klasik çözüm yöntemleri ile Matematiksel Fizik de birçok problemin çözümü mümkün değildir. Bu gibi problemlerin çözülebilmesi için Zayıf Türev ve Sobolev Uzayı kavramlarının iyi bilinmesi gerekir.

Bu çalışmadaki esas amacımız Sobolev Uzayları' nın önemli ve temel özelliklerini mümkün olduğunca açık ve sade bir yolla, Kısmi Diferansiyel Denklem' ler konusuna girmeden incelemektir. Bu sayede Sobolev Uzaylarına ait elemanların hangi durumlarda ne gibi davranışlar sergiledikleri daha iyi anlaşılacaktır.

ÖZET

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sobolev uzaylarını tanımlamak için kullanılacak olan temel gösterim kavram ve teoremler verilmektedir.

İkinci bölümde, Sobolev uzaylarını karakterize etmekte kullanılan en önemli araçlardan biri olan zayıf türev kavramından bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde, fonksiyonel analizde kullanılan çok önemli bir araç olan Sobolev uzaylarının tanımları ve özellikleri ile birlikte bazı temel sonuçlar ifade edilmektedir.

Dördüncü bölümde, Sobolev uzaylarının bir karakterizasyonu Fourier Transform yardımı ile ifade edilmektedir.

Beşinci bölümde, Sobolev uzaylarının Kısmi Diferansiyel Denklemler de sınır koşullarının çözümünde kullanım alanı olan İz teoreminden bahsedilmektedir.

Altıncı bölümde, Sobolev uzaylarının matematiksel özelliklerini anlamada çok önemli bir uygulama alanı olan Gömülme teoremleri ve Sobolev eşitsizlikleri ortaya konulmaktadır.

Yedinci bölümde, bir önceki kısımda verilen gömülme teoremlerinin bazı durumlarda niçin kompakt olması gerektiği ele alınmaktadır.

Son olarak ***sekizinci bölümde***, Sobolev uzaylarında tanımlı fonksiyonların verilen bölgenin sınırına kısıtlamasının ne anlama geldiği anlatılmaktadır.

ABSTRACT

This study consists of eight chapters.

In the **first chapter**, in order to discuss the theory of Sobolev spaces we shall start with some simple basic notions that are necessary for introducing and studying these spaces.

In the **second chapter**, we introduce the concept of weak derivative that is a main tool to define the Sobolev spaces.

In the **third chapter,** we review definitions and properties of Sobolev spaces, which are indispensable for the functional analysis.

In the **fourth chapter**, we give a Characterization of Sobolev spaces via the Fourier transform.

In the **fifth chapter,** some results are easier to prove over the whole of $\mathbb{R}^n$; to prove them for Ω extend the setting from Ω to $\mathbb{R}^n$, then restrict it back again to Ω.

In the **sixth chapter, i**t is given the embedding theorems and Sobolev inequalities which are important areas to understand the mathematical properties of Sobolev spaces.

In the **seventh chapter;** even better, some of the inclusions of Sobolev spaces into other spaces are compact (in the functional analysis sense).

Finally in the **eigth chapter,** It is important to understand what is meant by restricting a Sobolev function to the boundary of the domain.

GİRİŞ

Matematiğin aksine Fonksiyonel Analiz Teorisi henüz 20. yüzyılın başlarında oluşmaya başlamış çok yeni bir bilim dalıdır ve olgunlaşma süreci halen devam etmektedir. Kümeler teorisi, Topoloji ve Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi fonksiyonel analizin gelişim süreci için oldukça uygun koşullar oluşturmaktadır. Fonksiyonel Analiz özellikle Kısmi Diferansiyel Denklemler Teorisi olmak üzere teorik matematik konularında karşılaşılan birçok problem için uygun cevaplar içermektedir.

Kısmi Diferansiyel Denklemler teorisinde karşılaşılan çeşitli problemlerin çözümünde fonksiyonel analizden yararlanılması S. L. Sobolev' den öncede oldukça başvurulan bir yöntemdi. Bu bağlamda verilebilecek en iyi örnek ünlü matematikçi D. Hilbert' dir. Hilbert özellikle Laplace Denklemleri ve Dirichlet Prensibi üzerine araştırmalar yapmaktaydı.

S. L. Sobolev' in 1930 lu yıllarda yaptığı çalışmalar Fonksiyonel Analiz, Matematiksel Fizik, Diferansiyel Geometri, Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Matematiğin diğer alanların gelişmesinde çok güçlü bir etki yaratmış ve mevcut çok sayıdaki problemin çözümünde evrensel çözüm yöntemleri elde edilmesini sağlamıştır. 1930'ların ortasında, S. L. Sobolev, kısmi diferansiyel denklemlerin gelişmesinde çok önemli olan bazı fonksiyon uzaylarını ve kavramlarını tanımladı. Bu konudaki en büyük başarısı hiç şüphesiz Genelleştirilmiş Türevli Fonksiyonlar Teorisin'i yani bilinen adıyla Sobolev Uzayları 'nı fonksiyonel analize kazandırmakla elde etti. Bunu yaparken LERAY'ın yaptığı gibi zayıf türevleri kullandı. Ardından FİCHERA ve FRIEDRICHS gibi bilim adamları da benzer uzayları tanımlamaya başladılar. Yine benzer bir düşünce NAVIER-STOKES denkleminin zayıf çözümlerinde kullanıldı.

1938 yılında ilk eşitsizliğin (Gömülme Teoreminin) S.L Sobolev tarafından orijinal adı “On A Theorem of Functional Analysis” olan kitapta yayınlanması Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Matematiksel Fizik gibi matematiğin birçok alanında çok geniş yankı uyandırdı ve büyük ilerleme sağlamasına neden oldu.

Bugün hala Sobolev eşitsizliklerinin çok çeşitli versiyonları ortaya atılmakta ve oldukça geniş kullanım alanları bulmaktadır. Çünkü Sobolev uzaylarının ifade ettiği eşitsizlikler ve teoremler matematiğin sayısız alanındaki birçok problemin çözümünün elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 L_p Uzayları

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzayı $\mathbb{R}^n$ öklit uzayının bir alt kümesi olan Ω kümesindeki tüm Lebesgue Ölçülebilir ve

$$\left(\|u\|_{L_p(\Omega)}\right)^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $u : \Omega \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşur. Yukarıda verilen integral ***Lebesgue İntegrali*** olup, $\| \ \|_{L_p(\Omega)}$ sembolü $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonunun Ω bölgesindeki normunu gösterir.

Eğer $L_p(\Omega)$ uzayında bulunan u ve v gibi iki fonksiyon için $\|u - v\|_{L_p(\Omega)} = 0$ oluyorsa bu halde u ve v fonksiyonlarına ***özdeş fonksiyondurlar*** denir. Böyle bir durumda $x \in \Omega \setminus A$ için $u(x) = v(x)$ olacak şekilde ölçüsü sıfır olan bir $A \subset \Omega$ kümesi vardır denir ve buradan hareketle de ***hemen hemen her yerde*** (hhh) $u(x) = v(x)$ olduğu söylenir.

$p = \infty$ için $L_\infty(\Omega)$ uzayı, hemen hemen her yerde sınırlı bir g fonksiyonuna eşit olan $u : \Omega \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşur ve eşdeğer olarak

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in A'} |u(x)| < C$$

olacak şekilde u fonksiyonuna bağlı bir C sabiti ve ölçüsü sıfır bir A kümesi vardır.

1.2 Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri

$1 \le p < \infty$ olmak üzere p' sayısı aralarında $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ bağıntısı olan p sayısının ***Eşlenik Üssü*** olsun. Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_{p'}(\Omega)$ oluyor ise, bu durumda $fg \in L_1(\Omega)$ olmakta ve aynı zamanda

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |f(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'},$$

şeklindeki ***Hölder Eşitsizliği*** sağlanmaktadır. Bu ifade daha basit olarak

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \le \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}$$

şeklinde de yazılabilir.

Yine $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ ile $g \in L_p(\Omega)$ ve $(f+g) \in L_p(\Omega)$ olsun. Bu durumda ***Minkowski Eşitsizliği***

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)},$$

şeklinde verilir.

1.3 Hölder Koşulu ve Hölder Uzayı

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $k \ge 0$ olsun. C ve α negatif olmayan iki reel sabit sayı ve u, $\mathbb{R}^n$ öklit uzayında tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\forall x, y \quad i\c{c}in \quad |u(x) - u(y)| \le C|x-y|^\alpha,$$

oluyor ise, bu durumda α sabiti ***Hölder Üssü'***nü göstermek üzere u fonksiyonuna ***Hölder süreklidir*** veya ***Hölder Koşulunu*** sağlıyor denir. Bu koşul herhangi iki metrik uzay için genelleştirilebilir.

Eğer $\alpha = 1$ ise bu durumda u fonksiyonu ***Lipschitz Koşulunu*** sağlar. Eğer $\alpha = 0$ ise o zaman u fonksiyona ***Sınırlıdır*** denir.

$0 < \alpha \leq 1$, $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ sembolü ile gösterilen ***Hölder Uzayı,*** $0 \leq |\alpha| \leq k$ ve C bir sabit olmak üzere $C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında tanımlı

$$\left|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)\right| \leq C|x-y|^{\alpha},$$

şeklindeki Hölder koşulunu sağlayan u fonksiyonlarının oluşturduğu uzaydır. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ Hölder uzayı

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)} + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{\left|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}} \quad , \qquad x, y \in \Omega$$

normu ile bir Banach uzaydır.

1.4 Sürekli Fonksiyon Uzayları

Ω sembolü $\mathbb{R}^n$ öklit uzayında boş olmayan bir açık kümeyi göstersin. K kümesi Ω açık kümesinde bir kompakt küme olsun. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) \in Z_+^n$ çok indislisi için $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$ olarak ifade edilsin. Eğer $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}....x_n^{\alpha_n}$ ve

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1.\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_n}x_n} = D^{\alpha_1}u.D^{\alpha_2}u...D^{\alpha_n}u$$

olarak yazılır.

Ω kümesinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C(\Omega)$ ile gösterilir. $C(\Omega)$ kümesi

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

Benzer olarak $C^k\left(\Omega\right)$, Ω bölgesinde k. mertebeye kadar tüm $D^{\alpha}u$ türevleri var ve sürekli olan fonksiyonların kümesidir. Burada $C^0\left(\Omega\right)=C\left(\Omega\right)$ olarak ifade edilir. Bu uzayda norm

$$\left\|u\right\|_{C^k(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\Omega}\left|D^{\alpha}u\left(x\right)\right|$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Yine $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $\overline{\Omega}$ da $\left|\alpha\right|\le k$ için $D^{\alpha}u$ türevleri sınırlı ve düzgün sürekli olan $u\in C^k\left(\Omega\right)$ fonsiyonlarından oluşur. Bu uzay

$$\left\|u\right\|_{C(\overline{\Omega})}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|D^{\alpha}u\left(x\right)\right|$$

normu ile bir Banach uzaydır.

Keza $C^{\infty}\left(\Omega\right)$ kümesi ise, her mertebeden türevleri var ve sürekli olan fonksiyonların uzayıdır. Yani $C^{\infty}\left(\Omega\right)=\bigcap_{k=0}C^k\left(\Omega\right)$ olarak gösterilebilir.

Benzer olarak $C_B\left(\Omega\right)$, $C\left(\Omega\right)$ da ki sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaydır. Bu uzay "sup" normu ile bir Banach uzaydır.

Aynı şekilde $C_B\left(\overline{\Omega}\right)$; $C\left(\overline{\Omega}\right)$ da ki sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaydır. Bu uzay "sup" normu ile bir Banach uzaydır. Eğer Ω sınırlı ise bu uzay $C\left(\Omega\right)$ uzayı ile çakışıktır.

Yine $C_B^k\left(\Omega\right)$, $C_B\left(\Omega\right)$ da bulunan ve k mertebeye kadar türevleri yine $C_B\left(\Omega\right)$ da olan fonksiyonların kümesidir.

$$C_B^k(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^k(\Omega)} < \infty \right\}$$

kümesi

$$\|u\|_{C_B^k(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\le k}} \left| D^\alpha u(x) \right|$$

normu ile birlikte bir Banach uzay olur.

Son olarak $C_B^k(\overline{\Omega})$ kümesi hem $C_B^k(\Omega)$ hem de $C^k(\overline{\Omega})$ bulunan fonksiyonlardan oluşur. Bu küme yine

$$\|u\|_{C_B^k(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\le k}} \left| D^\alpha u(x) \right|$$

normu ile bir Banach uzaydır. Eğer Ω sınırlı ise bu uzay $C^k(\overline{\Omega})$ uzayı ile çakışır.

1.5 Kompakt Destek Kavramı ve C_0^∞ Uzayı

Bir $u : \Omega \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlansın ve K, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in \Omega \setminus K$ için $u(x) = 0$ oluyor ise, bu duruma u fonksiyonuna ***Kompakt Desteklidir*** denir. Yukarıdaki gibi tanımlı tüm kompakt K kümelerinin arakesitine u fonksiyonun ***Desteği*** denir. Ayrıca bu arakesit kümesi sembolik olarak ***supp*** u biçiminde gösterilir. Daha matematiksel bir ifade ile

$$\textbf{\textit{supp}}\ u = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde yazılır.

$C(\Omega)$ sürekli fonksiyonlar uzayındaki kompakt destekli fonksiyonların oluşturduğu küme sembolik olarak $C_0(\Omega)$ ifadesi ile gösterilir. Doğal olarak $C_0^k(\Omega)$ ifadesi $C^k(\Omega)$ uzayındaki kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan kümeyi gösterir.

Son olarak $C_0^\infty(\Omega)$ kümesi kompakt destekli ve her mertebeden türevleri var ve sürekli olan fonksiyonların uzaydır.

1.6 $\mathbb{R}^n$ Öklit Uzayında Bölgeler

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve bağlantılı bir küme olsun. Bu durumda Ω kümesi n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ öklit uzayında bir ***bölge*** olarak adlandırılır. Sobolev uzaylarının özellikleri incelenirken aksi belirtilmedikçe Ω kümesi bir bölge kabul edilir. Ancak bazı durumlarda Sobolev uzayları için ifade edilen bir kısım özelliklerin sağlaması ancak verilen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgelerinin $\partial\Omega$ sınırlarının düzgün olmasıyla mümkündür. Bu yüzden bölge kavramı için birkaç farklı sınıflandırma yapılmıştır. Bu bölümde sınırlı bölgeler üzerinde yoğunlaşmak suretiyle yapılan sınıflandırmaların özellikleri ifade edilmeye çalışılmıştır.

Aşağıda en çok kullanılan üç özellik ifade edilmektedir.

Koni Koşulu

Ω bir bölge ve α ile h pozitif sabitler olsun. Eğer $\forall x \in \Omega$ için h yüksekliği ve α açıklığı ile $V_x \subset \Omega$ olacak şekilde bir V_x küresel konisi varsa Ω bölgesi ***Koni özelliğini*** sağlar denir.

Lipschitz Koşulu

Ω bir bölge olsun. Ω bölgesinin sınırındaki her x noktası için $\partial(U_x \cap \Omega)$ sınırı Lipschitz sürekli olacak şekilde bir U_x açık yuvarı varsa Ω bölgesi ***Lipschitz koşulunu*** sağlar denir.

C^k sınıfı Özelliği

B sembolü merkezi orjinde olan bir birim yuvarı göstersin ve Ω bir bölge olsun. Eğer $\partial\Omega$, sınırlı Ω_i açık kümeleri ile örtülebiliyor ise ve

i) $\psi_i\left(\Omega_i \cap \partial\Omega\right) = B \cap \partial\mathbb{R}_+^n$

ii) $\psi_i\left(\Omega_i \cap \Omega\right) = B \cap \mathbb{R}_+^n$

iii) $\psi_i \in C^k\left(\overline{\Omega_i}\right)$ ve $\psi_i^{-1} \in C^k\left(\overline{B}\right)$

olacak şekilde $\psi_i : \overline{\Omega_i} \to \overline{B}$ dönüşümleri var ise, bu durumda Ω ***bölgesi*** C^k ***nın bir sınıfıdır*** denir.

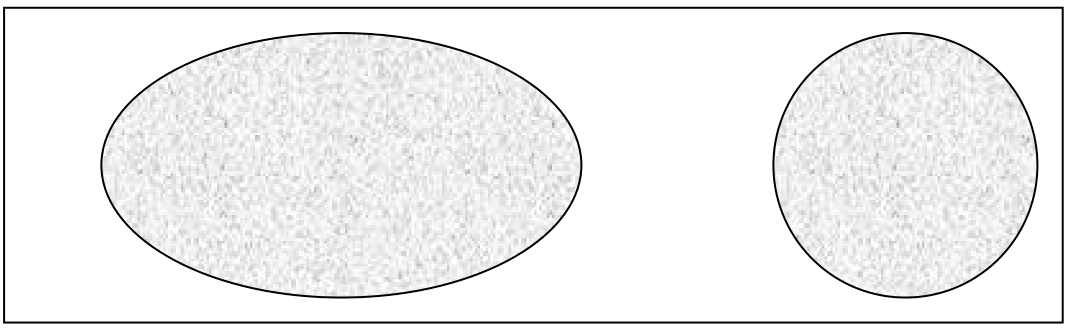
Not 1.6.1

iii) ifadesinden ψ_i dönüşümlerinin k sayısına eşit ve daha küçük mertebeli tüm türevlerinin var olduğu ve ψ_i^{-1} ters dönüşümlerinin sınırlı olduğu anlaşılır.

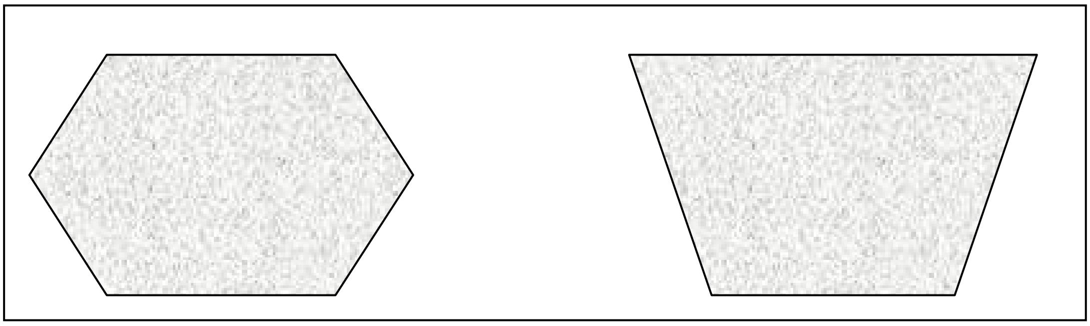
Not 1.6.2

Ω bir bölge olmak üzere yukarıda verilen özellikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

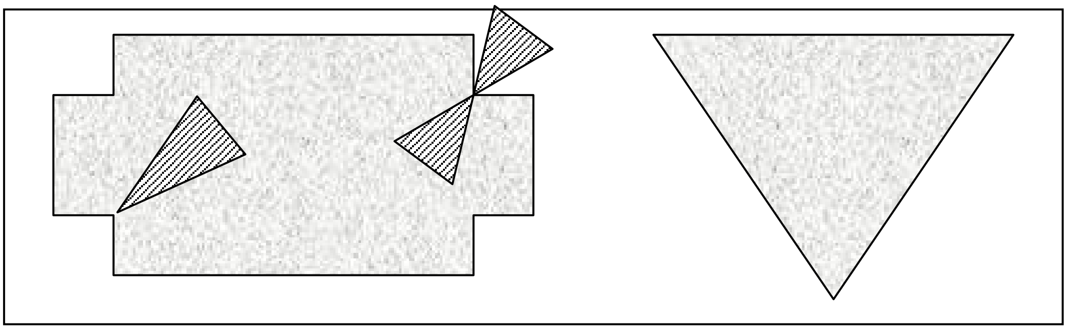
$$\begin{cases} C^k \ \text{sınıfı özelliği sağlar} \Rightarrow \\ \text{Lipschitz koşulunu sağlar} \Rightarrow \\ \text{Koni koşulunu sağlar} \end{cases}$$



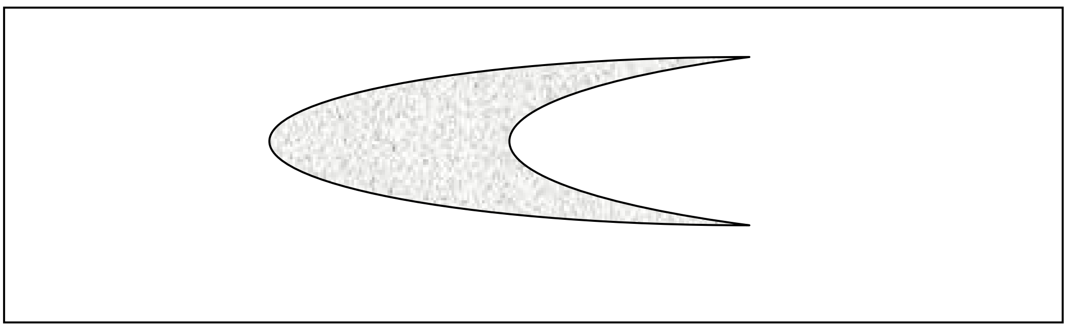
Şekil-1. Düzgün bölgeler.



Şekil-2. Lipschitz koşulunu sağlayan bölgeler.



Şekil-3. Koni koşulunu sağlayan bölgeler.



Şekil-4. Lipschitz koşulunu sağlamayan bölge.

1.7 Molifier fonksiyonu

Tanım 1.7.1 $\rho \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu

i) ***supp*** $\rho \in \mathrm{B}_1\left(0\right)$

ii) $\int_\Omega \rho\left(x\right)dx = 1$

iii) $\rho\left(x\right) \geq 0$

koşullarını sağlasın.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$J_\varepsilon u\left(x\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u\left(y\right)dy$$

şeklinde tanımlı $J_\varepsilon u$ fonksiyonuna u fonksiyonunun ***Molifieri*** denir.

Eğer u fonksiyonu Ω da lokal integrallenebilir ve K kümesi, Ω bölgesinin kompakt bir alt kümesi ise $dist(K,\partial\Omega) > 0$ olmak üzere $J_\varepsilon u$ molifieri, $C^\infty\left(K\right)$ kümesinin bir elemanıdır.

$L_{p,loc}\left(\Omega\right)$ kümesinde tanımlı bir u fonksiyonu için yukarıdaki ifadeden hareketle

$$J_\varepsilon u\left(x\right) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_1(0)} \rho\left(y\right)u\left(x-\varepsilon y\right)dy,$$

bulunur ve $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şeklinde ise

$$\begin{aligned}\left|J_\varepsilon u\left(x\right)\right| &= \int_{B_1(0)} \rho\left(y\right)^{\frac{1}{q}}\rho\left(y\right)^{\frac{1}{p}}\left|u\left(x-\varepsilon y\right)\right|dy \\ &\leq \left(\int_{B_1(0)}\left(\rho\left(y\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_1(0)}\left(\rho\left(y\right)^{\frac{1}{p}}\left|u\left(x-\varepsilon y\right)\right|\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\left|J_\varepsilon u(x)\right|^p \le \int_{B_1(0)} \rho(y)\left|u(x-\varepsilon y)\right|^p dy\,,$$

olur. $p=1$ için ifade açıktır. Eşitsizliğin her iki tarafının K üzerinden integrali alınır ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\int_K \left|J_\varepsilon u(x)\right|^p dx &\le \int_{B_1(0)} \rho(y)\int_K \left|u(x-\varepsilon y)\right|^p dxdy\\ &\le \int_{B_1(0)} \rho(y)\int_K \left|u(x)\right|^p dxdy\\ &\le \int_{K_0} \left|u(x)\right|^p dx,\end{aligned}$$

bulunur. K_0 sembolü Ω bölgesinin kompakt bir alt kümesi olmakla birlikte, aynı zamanda $K \subset iç(K_0)$ ve $dist(K,\partial K_0) > 0$ şeklindedir. Sonuç olarak

$$\left\|J_\varepsilon u(x)\right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\|u(x)\right\|_{L_p(\Omega)}\quad , \tag{1.7.1}$$

bulunur.

Yardımcı teorem 1.7.2

$u \in L_{p,loc}(\Omega)$ ve K, Ω bölgesinin kompakt bir alt kümesini göstersin. O zaman

$$\varepsilon \to 0 \quad iken \quad \left\|J_\varepsilon u - u\right\|_{L_p(\Omega)} \to 0, \tag{1.7.2}$$

ifadesi yazılabilir.

İspat

K_0, Ω bölgesinin kompakt bir alt kümesi ve $K \subset iç(K_0)$ olmak üzere $dist(K,\partial K_0) > 0$ olsun. $\left\|J_\varepsilon u - u\right\|_{L_p(\Omega)} < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı ve $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonun var olduğunu kabul edelim. Yukarıda verilen (1.7.1) ifadesine $u-w$ uygulanırsa

$$\|J_\varepsilon u - J_\varepsilon w\|_{L_p(\Omega)} < \delta \quad , \tag{1.7.3}$$

bulunur. Ancak

$$J_\varepsilon w(x) - w(x) = \int_{B_1(0)} \rho(y)\big(w(x-\varepsilon y) - w(x)\big)dy\,,$$

şeklinde olup K kümesinde $\varepsilon \to 0$ iken bu ifade sıfıra düzgün yakınsar. Bundan dolayı eğer $\varepsilon > 0$ sayısı yeterince küçük seçilirse

$$\|J_\varepsilon w - w\|_{L_p(\Omega)} < \delta \ , \tag{1.7.4}$$

bulunur. Böylece (1.7.3) ve (1.7.4) den

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon w - w\|_{L_p(\Omega)} &\le \|w-u\|_{L_p(\Omega)} + \|J_\varepsilon u - J_\varepsilon w\|_{L_p(\Omega)} + \|J_\varepsilon w - w\|_{L_p(\Omega)} \\ &< 3\delta, \end{aligned}$$

elde edilir ve δ sayısı keyfi seçildiği için

$$\varepsilon \to 0 \ \ iken \ \ \|J_\varepsilon u - u\|_{L_p(\Omega)} \to 0\,,$$

sonucuna varılır.

Teorem 1.7.3

$u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olmak üzere,

$$\forall \eta \in C_0^\infty \ \ ve \ \forall x \in \Omega \ \ için \ \int_\Omega u(x)\eta(x) = 0\,,$$

oluyor ise, bu durumda $u(x) = 0$ olur.

İspat

i) İlk önce kompakt destekli ve ***supp*** $\eta \subset G$ olan her $\forall \eta \in L_\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)dx = 0 \qquad , \tag{1.7.6}$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\overline{G} \subset \Omega$ ve $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekildeki sınırlı G bölgesi için ***supp*** $\eta \subset G$ olduğu kabul edelim. Bu durumda

$$dist\{G;\partial G\} =: 2\rho_0 > \rho \;\Rightarrow\; \eta_\rho \in C_0^\infty(\Omega) \quad ,$$

olur. Şimdi $G_{\rho_0} = \{x : dist\{x;G\} < \rho_0\}$ alalım ve

$$\chi_{\rho_0} = \begin{cases} 1, & x \in G_{\rho_0} \\ 0, & diğer \end{cases},$$

olacak şekilde bir χ_{ρ_0} fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda

$$\rho_0 > \rho, \quad \int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx = 0 \qquad , \tag{1.7.7}$$

çıkar. Ayrıca $\eta \in L_1(\Omega)$ olduğundan

$$\rho \to 0 \; iken \; \|\eta_\rho \to \eta\|_{L_1(\Omega)} \to 0\,,$$

bulunur. Buradan

$$\forall x \in \Omega \;\text{ için }\; k \to \infty \;\text{ iken }\; \eta_{\rho_k}(x) \to \eta(x),$$

olacak şekilde bir $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\rho_k \to 0,\ \rho_k < \rho_0$ dizisi vardır. Doğal olarak $\forall x \in \Omega$ için

$$k \to \infty \; iken \; \eta_{\rho_k}(x)u(x) \to \eta(x)u(x),$$

olur. Diğer taraftan

$$\left(\|\eta_\rho\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|\eta\|_{L_\infty(\Omega)}\right),$$

özelliğinden hareketle,

$$\|u(x)\eta_{\rho_k}(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \le \chi_{\rho_k}(x)|u(x)|\|\eta(x)\|_{L_\infty(\Omega)},$$

elde edilir. Lebesgue teoreminden

$$k \to \infty \ iken \int_{\Omega} u(x)\eta_{\rho_k}(x)dx \to \int_{\Omega} u(x)\eta(x)dx\,,$$

bulunur ve bu ifadenin sağ kısmı sıfıra eşit olacağından

$$\int_{\Omega} u(x)\eta(x)dx = 0\,,$$

sonucu çıkar.

ii) Teoremin asıl ifadesinin ispatı için $\overline{G} \subset \Omega$ ve $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir G kapalı bölgesini ele alalım. Ardından

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} \,, & x \in G \ ve \ u(x) \neq 0 \\ 0 \,, & diğer \end{cases}\,,$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman

$$u(x)\eta(x) = \begin{cases} |u(x)| \,, & x \in G \\ 0 \,, & x \in \Omega / G \end{cases}\,,$$

olur. $\eta(x)$ fonksiyonu $L_{\infty}(\Omega)$ uzayında kompakt destekli olmakla birlikte, bu destek $\mathrm{G} \subset \Omega$ şeklindeki G kümesinin bir alt kümesidir. O zaman ispatın ilk kısmından hareketle

$$0 = \int_{\Omega} u(x)\eta(x)dx = \int_{\Omega} |u(x)| dx\,,$$

bulunur. $\forall x \in G$ için $u(x) = 0$ olur. Son olarak G bölgesi $\overline{G} \subset \Omega$ ve $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde keyfi ve sınırlı seçildiğinden

$$\forall x \in \Omega \ için \ u(x) = 0\,,$$

ifadesi elde edilir.

2. BÖLÜM

ZAYIF VE GÜÇLÜ TÜREV KAVRAMLARI

Tanım 2.1

$u, v \in L_{p,loc}(\Omega)$ olsun. Eğer Ω bölgesinin kompakt her K alt kümesi için $L_p(K)$ kümesinde

$$\phi_m \to u \quad \text{ve} \quad D^\alpha \phi_m \to v$$

olacak şekilde bir $(\phi_m) \in C^{|\alpha|}(K)$ dizisi mevcut ise v fonksiyonu u fonksiyonunun α ***mertebeden güçlü manada türevidir*** denir.

Şimdi $u \in C^k(\Omega)$ ve bir $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. Parçalı integral formülünden

$$\int_\Omega u(x)\frac{d}{dx_i}\eta(x)\,dx = -\int_\Omega \frac{d}{dx_i}u(x)\eta(x)\,dx, \quad i = 1,2,...,n \tag{2.1}$$

yazılabilir. Bu ifade için sınır koşulları mevcut olmaz çünkü η fonksiyonu kompakt destekli olup $\partial\Omega$ sınırında sıfıra eşit değerler alır. Daha genel bir ifade ile k bir pozitif tamsayı , $u \in C^k(\Omega)$ ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ bir çok-indisli olmak üzere $k = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ şeklinde ise o zaman

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \eta(x)\,dx = -\int_\Omega D^\alpha u(x)\eta(x)\,dx \ ,$$

eşitliği yazılabilir. Çünkü

$$D^\alpha u = \frac{d^{\alpha_1}}{dx_1^{\alpha_1}}\frac{d^{\alpha_2}}{dx_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{d^{\alpha_n}}{dx_n^{\alpha_n}} \ ,$$

olup, (2.1) formülüne $|\alpha|$ defa uygulanabilir.

Tanım 2.2

α bir çok-indisli olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olmak üzere $L_{1,loc}(\Omega)$ kümesinde tanımlı u ile v fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha}\eta(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)\eta(x)dx, \quad \eta(x) \in C_0^{\infty}(\Omega) \tag{2.2}$$

oluyorsa $D^{\alpha}u(x)$ ***fonksiyonu,*** u ***fonksiyonun*** α***. mertebeden zayıf manada türevidir*** denir ve sembolik olarak $v = D^{\alpha}u$ şeklinde gösterilir. Eğer u fonksiyonu $D^{\alpha}u$ şeklindeki sürekli türevine sahip olacak kadar düzgün ise (2.2) ifadesi

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha}\eta(x)dx = \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}u(x)\eta(x)dx, \quad \eta(x) \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.3 (Başka bir zayıf türev tanımı)

$m \in \mathbb{N}$ ve α bir çok-indisli olsun. $|\alpha| \leq k$ ve $u_m \in C^k(\Omega)$ olmak üzere $L_{1,loc}(\Omega)$ uzayında

$$u_m \to u \ \ iken \ \ D^{\alpha}u_m \to v$$

olacak şekilde $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonları tanımlı olsun. O zaman v ***fonksiyonu*** u ***fonksiyonun zayıf manada türevidir*** denir.

Örnek 2.4

$n = 1$ ve $\Omega = (0,2)$ olmak üzere, aşağıdaki gibi

$$u(x) = \begin{cases} x & ,x \in (0,1] \\ 1 & ,x \in [1,2) \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad v(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in (0,1] \\ 0 & ,x \in (1,2) \end{cases}$$

u ve v fonksiyonlarını tanımlansın. v fonksiyonunun u fonksiyonunun zayıf türevi olduğunu gösterelim.

Çözüm

Bunun için $u'(x) = v$ olmak üzere

$$\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx = -\int_0^2 v(x)\eta(x)\,dx \qquad ,\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

olduğu gösterilmelidir. Sol kısımdan hareketle

$$\begin{aligned}\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx &= \int_0^1 xD\eta(x) dx + \int_1^2 D\eta(x) dx \\ &= -\int_0^1 \eta(x) dx + \eta(1) - \eta(1) \\ &= -\int_0^2 v(x)\eta(x) dx,\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx = -\int_0^2 v(x)\eta(x) dx,$$

olduğu görülür.

Örnek 2.5

$n = 1$ ve $\Omega = (0,2)$ olmak üzere,

$$u(x) = \begin{cases} x & ,x \in (0,1] \\ 2 & ,x \in (1,2) \end{cases},$$

fonksiyonu tanımlansın. u fonksiyonu için $Du = v \in L_{1,loc}(\Omega)$ olacak şekilde bir zayıf türevin mevcut olmadığını gösterelim.

Çözüm

$$\int_0^2 u(x)D\eta(x)dx = -\int_0^2 v(x)\eta(x)dx,$$

olacak şekilde bir v fonksiyonunun bulunmadığı gösterilmelidir. Eşitliğin sol kısmından

$$\begin{aligned}-\int_0^2 v(x)\eta(x)dx &= \int_0^2 u(x)D\eta(x)dx \\ &= \int_0^1 xD\eta(x)dx + 2\int_1^2 \eta(x)dx \\ &= -\int_0^1 D\eta(x)dx - \eta(1),\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\eta(1) = \int_0^2 v(x)\eta(x)dx - \int_0^1 \eta(x)dx,$$

şeklindedir. Şimdi $0 \le \eta_m \le 1$, $\eta_m(1) = 1$ ve $\forall x \ne 1$ için $\eta_m(x) \to 0$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan oluşan bir (η_m) fonksiyon dizisini alalım. Yukarıdaki işlemde η fonksiyonu yerine (η_m) fonksiyon dizisini yazılır ve $m \to \infty$ için limit alınırsa o zaman

$$1 = \lim_{m\to\infty} \eta_m(1) = \lim_{m\to\infty}\left[\int_0^2 v(x)\eta(x)dx - \int_0^1 \eta(x)dx\right] = 0,$$

çelişkisi bulunur. Yani zayıf türev mevcut değildir.

Not 2.6

i) $D^\alpha u$ zayıf türevini tanımlamak için, klasik türev tanımının aksine, daha küçük dereceli türevlerin var olması gerekli değildir.

ii) Zayıf türev $L_{1,loc}(\Omega)$ kümesinin bir elemanı olarak tanımlandığı için ölçüsü sıfır kümeler üzerinde değiştirilebilir.

Teorem 2.7 (Zayıf Türevin Özellikleri)

1) Zayıf Türev Var İse Tektir.

İspat

Aksine $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonunun $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ ve $w \in L_{1,loc}(\Omega)$ gibi iki zayıf türevi mevcut olsun. Zayıf türev tanımından

$$\int_{\Omega} \left(v(x) - w(x)\right)\eta(x)\,dx = 0 \qquad ,\forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

olup, Teorem 1.7.3 den hareketle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x) = w(x)$$

olduğu görülür.

2) Zayıf Türev Lineerdir. Yani $u_1, u_2 \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonları için $v_1 = D^{\alpha}u_1 \in L_{1,loc}(\Omega)$ ve $v_1 = D^{\alpha}u_1 \in L_{1,loc}(\Omega)$ şeklinde zayıf türevleri var ise, bu durumda

$$D^{\alpha}\left(c_1 u_1 + c_2 u_2\right) = c_1 D^{\alpha}u_1 + c_2 D^{\alpha}u_2 \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

olacak şekilde bir $D^{\alpha}\left(c_1 u_1 + c_2 u_2\right)$ zayıf türev vardır.

İspat

$$\int \left(c_1 u_1 + c_2 u_2\right) D^{\alpha}\eta dx = c_1 \int_{\Omega} u_1 D^{\alpha}\eta dx + c_2 \int_{\Omega} u_2 D^{\alpha}\eta dx \,.$$

3) $G \subset \Omega$ olsun. Ω bölgesi için $v = D^{\alpha}u$ eşitliği var ise o zaman G kümesi içinde de $v = D^{\alpha}u$ eşitliği mevcuttur.

İspat

Açık.

4) $D^{\alpha}u = v$ ve $D^{\alpha}v = w$ zayıf türevler olsunlar. Bu durumda $D^{\alpha+\beta}u = w$ şeklindeki ifade doğrudur.

İspat

$\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ve $\varphi \in D^{\beta}\psi$ fonksiyonları tanımlansın zayıf türev tanımından hareketle

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} uD^{\alpha+\beta}\psi dx &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\varphi v dx\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} vD^{\beta}\psi dx\\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_{\Omega}\psi w dx,\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.8

$L_{1,loc}(\Omega)$ kümesinde $u_m \to u$ olacak şekilde bir $(u_m) \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyon dizisi tanımlansın ve bu fonksiyon dizisi için $L_{1,loc}(\Omega)$ kümesinde

$$D^{\alpha}u_m \to v$$

olacak şekilde $D^{\alpha}u_m \in L_{1,loc}(\Omega)$ zayıf türevi mevcut olsun. O zaman $D^{\alpha}u = v$ eşitliği yazılır. Yani D^{α} operatörü kapalıdır.

İspat

Zayıf türev tanımından $D^{\alpha}u_m$ için

$$\int_{\Omega} u_m D^{\alpha}\eta dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} D^{\alpha}u_m \eta dx \qquad ,\forall\, \eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

olup $m \to \infty$ için ifadenin limiti alınır ise, bu durumda

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\eta dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} D^{\alpha}v\eta dx \qquad ,\forall\, \eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $D^{\alpha}u = v$ olduğu görülür.

Teorem 2.9

$u, v \in L_{p,loc}(\Omega)$ olmak üzere $D^{\alpha}u = v$ zayıf anlamda türevdir ancak ve ancak $D^{\alpha} = v$ güçlü anlamda türevdir.

İspat

$D^{\alpha} = v$, L_p anlamda güçlü türevi göstersin ve $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ve $K = \text{supp}\phi$ olsun. $\varepsilon > 0$, $\|\psi - u\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ ve $\|D^{\alpha}\psi - v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ olacak şekilde $\psi \in C^{|\alpha|}(K)$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|\int_K uD^{\alpha}\phi dx - (-1)^{|\alpha|}\int_K v\phi dx\right| &\leq \left|\int_K \psi D^{\alpha}\phi dx - (-1)^{|\alpha|}\int_K \psi\phi dx\right| \\
&\quad + \left|\int_K (u-\psi) D^{\alpha}\phi dx - (-1)^{|\alpha|}\int_K \left(v - D^{\alpha}\psi\right)\phi dx\right| \\
&\leq \|u-\psi\|_{L_p(\Omega)}\|D^{\alpha}\phi\|_{L_q(\Omega)} + \|v - D^{\alpha}\psi\|_{L_p(\Omega)}\|\phi\|_{L_q(\Omega)} \\
&\leq \varepsilon\left(\|D^{\alpha}\phi\|_{L_q(\Omega)} + \|\phi\|_{L_q(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

bulunur. ε sayısı keyfi seçildiği için sağ kısım sıfır olmak zorundadır. O yüzden $D^{\alpha} = v$ zayıf anlamda türevdir.

İspatın aksi yönü için $D^{\alpha} = v$ zayıf anlamda türev ve K, Ω bölgesinin kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer $dist\{K;\partial\Omega\} < \varepsilon$ oluyorsa, bu durumda $J_{\varepsilon}u \in C^{\infty}(K)$ olur ve $\forall x \in K$ için

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}J_{\varepsilon}u(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\Omega} D^{\alpha}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} D_y^{\rho}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\Omega}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)v(y)dy \\
&= J_{\varepsilon}v(x),
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ama Yardımcı teorem 1.7.2 den

$$\varepsilon \to 0 \; iken \; \|J_\varepsilon u - u\|_{L_p(K)} \to 0,$$

$$ve$$

$$\|D^\alpha J_\varepsilon u - v\|_{L_p(\Omega)} = \|J_\varepsilon v - v\|_{L_p(\Omega)} \to 0,$$

bulunur. Yani $D^\alpha = v$ güçlü anlamda türevdir.

3. BÖLÜM

SOBOLEV UZAYLARI

Bu kısımda Sobolev uzaylarının tanımları ve bazı temel özellikleri ifade edilmektedir. Ayrıca söz konusu bu uzayların çeşitli geometrik özellikleri vurgulanmakta ve verilen farklı Sobolev uzaylarının birbirleri ile olan ilişkileri hakkında çeşitli sonuçlar ortaya konulmaktadır.

Tanım 3.1 (Tamsayı Mertebeli Sobolev Uzayları)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve α, $|\alpha| \leq k$ şeklinde bir çok indisli olsun. $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k,\ k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı üzerindeki ***Standart Norm***

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}^p, & p = \infty \end{cases}$$

olup, ***Standart Yarı Norm***

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}^p, & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Doğal sonuç 3.2

Yerel Sobolev uzayı olarak bilinen $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ uzayı,

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega)=\left\{u\in L_{p,loc}(\Omega): D^{\alpha}u\in L_{p,loc}(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\leq k,\ k\in\mathbb{Z}^{+}\right\},$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.3

$\|\ \|_{W^{k,p}(\Omega)}$ standart normu ile $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir normlu uzaydır.

İspat

Norm olmanın ilk iki koşulu,

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=|\lambda|\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{ve} \quad \|u(x)\|_{W^{k,p}(\Omega)}=0 \ \Leftrightarrow\ u(x)=0,$$

şeklindedir. Son koşul olan üçgen eşitsizliği aşağıda gösterilmektedir.

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayındaki iki u ve v fonksiyonları için $1\leq p<\infty$ olmak üzere Minkovski eşitsizliğinden hareketle,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u+D^{\alpha}v\|_{L_p(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^{p}+\|D^{\alpha}v\|_{L_p(\Omega)}^{p}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}v\|_{L_p(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}+\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzaydır.

İspat

(u_m), $W^{k,p}(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Buradan doğal olarak $(D^\alpha u_m)$ dizisi de $L_p(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olur. $L_p(\Omega)$ uzayı bir tam uzaydır. Yani bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Doğal olarak $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ olacak şekilde bir (u_α) dizisi ve ayrıca $u_m \to u$ olacak şekilde bir $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonu vardır. Şimdi zayıf türev tanımından hareketle $|\alpha| \leq k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \eta dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \eta dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \eta dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \eta dx,\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_\Omega u D^\alpha \eta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \eta dx,$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $D^\alpha u = u_\alpha$ bulunur ve Sobolev uzayının tanımı gereği $u \in W^{k,p}(\Omega)$ olduğu görülür.

Teorem 3.5

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir ayrılabilir uzaydır.

ispat

$V^{k,p}(\Omega)$ uzayı vektör-değerli fonksiyonlardan oluşan,

$$V^{k,p}(\Omega) = \left\{ v : v = (v_\alpha)_{|\alpha|\leq k} \;\; ve \;\; v_\alpha \in L_p(\Omega), \, |\alpha| \leq k \right\},$$

şeklinde bir lineer uzay olsun. Bu uzayda norm

$$\|v\|_{V^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|v\|_{L_p(\Omega)},$$

şeklinde olsun. $1 \le p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı ayrılabilir bir Banach uzaydır. Ayrıca $V^{k,p}(\Omega)$ uzayı tanımı gereği $L_p(\Omega)$ uzayının sonlu sayıda elemanından oluşan bir yapıdır. Doğal olarak $V^{k,p}(\Omega)$ uzayı da ayrılabilir bir Banach uzaydır.

$W^{k,p}(\Omega)$ uzayından $V^{k,p}(\Omega)$ uzayına bir J transformasyonu tanımlı olsun.

$$J : W^{k,p}(\Omega) \to V^{k,p}(\Omega) \qquad , Ju = \left(D^{\alpha}u\right)_{|\alpha|\le k}$$

olarak tanımlanan söz konusu operatör normu korur yani

$$\|Ju\|_{V^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)},$$

şeklindedir. Ayrıca terslenebilirdir. O halde J bir lineer operatördür. Aynı zamanda bir izometridir. J operatörünün görüntü kümesi olan $RanJ = \widetilde{V}^{k,p}(\Omega)$ uzayı, $V^{k,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $v = (v_{\alpha})_{|\alpha|\le k}$, $v_{\alpha} \in L_p(\Omega)$ şeklinde ifade edilen vektör-değerli fonksiyonların oluşturduğu bir lineer uzaydır. Doğal olarak $\widetilde{V}^{k,p}(\Omega)$ uzayı $V^{k,p}(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Böylece $\widetilde{V}^{k,p}(\Omega)$ uzayı $V^{k,p}(\Omega)$ uzayı ile birlikte ayrılabilirdir, çünkü ayrılabilir bir uzayın herhangi bir altuzayı da ayrılabilirdir.

J operatörü izometrik olduğundan $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı $V^{k,p}(\Omega)$ uzayı ile tanımlanabilir. Buradan $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı $1 \le p < \infty$ için ayrılabilirdir.

Tanım 3.6

$p=2$ olsun. Bu durumda $W^{k,p}(\Omega)$ ve $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ Sobolev uzayları

$$W^{k,2}(\Omega)\equiv H^k(\Omega)$$
$$W^{k,p}_{loc}(\Omega)\equiv H^k_{loc}(\Omega)$$

olarak ifade edilirler. Daha özel olarak $p=2$ ve $k=0$ alınırsa $L_2(\Omega)=H^0(\Omega)$ olarak gösterilir. Ayrıca söz konusu $H^k(\Omega)$ Sobolev uzayı

$$(u,v)_{H^k(\Omega)}=\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)\,dx, \qquad u,v\in H^k(\Omega),$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzaydır.

Tanım 3.7

$W^{k,p}_0(\Omega)$ uzayı $C^\infty_0(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ normuna göre kapanışıdır. Doğal olarak $W^{k,p}_0(\Omega)$ uzayı $W^{k,p}(\Omega)$uzayının bir alt uzayıdır. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; $W^{k,p}_0(\Omega)$ uzayı, $W^{k,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $|\alpha|\le k-1$ olacak şekildeki her α sayısı için $\partial\Omega$ sınırında $D^\alpha u(x)=0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesidir.

Bir önceki tanımda verildiği gibi $k=0$ için $W^{0,p}(\Omega)=L_p(\Omega)$ ve $W^{0,p}_0(\Omega)=L_p(\Omega)$ şeklindedir ve $\forall k$ için

$$W^{k,p}_0(\Omega)\subset W^{k,p}(\Omega)\subset L_p(\Omega)$$

olmaktadır.

Tanım 3.8 (Reel Sayı Mertebeli Sobolev Uzayları)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$ bir tamsayı ve $\sigma \in (0,1)$ olmak üzere $s = k + \sigma$ olsun. Bu taktirde Reel Sayı Mertebeli $W^{s,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k,p} : \frac{\left| D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y) \right|}{\left\| x - y \right\|^{\sigma + n/p}} \in L_p(\Omega \times \Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| = k \right\},$$

Bu uzayda ***Standart Norm***

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^{p} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{\left| D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y) \right|^{p}}{\left\| x - y \right\|^{\sigma p + n}} dxdy \right)^{1/p},$$

şeklinde olup, $W^{s,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bu norm ile bir Banach uzaydır.

Ayrıca $p \in (1,\infty)$ için bu uzay yansımalıdır. Yine $p = 2$ için $H^{s}(\Omega) \equiv W^{s,2}(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^{s}(\Omega)} = (u,v)_{H^{k}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{\left(D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y) \right)\left(D^{\alpha}v(x) - D^{\alpha}v(y) \right)}{\left\| x - y \right\|^{2\sigma + n}} dxdy,$$

iççarpımı ile bir hilbert uzaydır.

Tanım 3.9

$s \geq 0$ olmak üzere reel mertebeli $W_0^{s,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $\| \ \|_{W^{s,p}(\Omega)}$ standart normuna göre kapanışıdır.

$W_0^{s,p}(\Omega)$ Sobolev uzayının tanımlanması ile negatif sayı mertebeli Sobolev uzayı elde edilebilmektedir.

Tanım 3.10

$s \geq 0$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ olsun. Bu durumda $W^{-s,p'}(\Omega)$ uzayı $W_0^{s,p}(\Omega)$ Sobolev uzayının dual uzayı olmaktadır. Yine özel olarak $H^{-s}(\Omega) \equiv W^{-s,2}(\Omega)$ ifadesi yazılabilmektedir.

İleriki kısımlarda $H^{-1}(\Omega)$ Sobolev uzayı $H_0^1(\Omega)$ uzayının duali olarak alınmaktadır. Böylece $H^{-1}(\Omega)$ uzayının elemanları $H_0^1(\Omega)$ uzayında tanımlı birer sınırlı lineer fonksiyoneldir. Buradan

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \; için \; |\ell| \leq M \|u\|,$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca ℓ fonksiyonunun normu

$$\|\ell\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\ell(u)}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}},$$

olarak tanımlıdır.

Doğal olarak $L_2(\Omega)$ uzayının her f elemanı

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad için \quad (f,u) = \int_\Omega fudx,$$

bağıntısı ile aynı zamanda $H^{-1}(\Omega)$ uzayının da bir elemanıdır.

Bazı durumlarda örneğin $f \in H^{-1}(\Omega)/L_2(\Omega)$ olduğunda; $L_2(\Omega)$ ve $H_0^1(\Omega)$ dual uzayları arasında

$$(f,u) = \int_\Omega fudx,$$

iççarpımı yazılabilmektedir.

Eğer $f \in H^{-1}(\Omega)$ olursa, bu durumda $L_2(\Omega)$ uzayında

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ için } \ell(u) = \int_\Omega \left[\ell_0 u + \sum_{i=1}^{d} \ell_i u_{x_i} \right] dx,$$

olacak şekilde $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_d$ fonksiyonları vardır. Sonuç olarak

$$\ell = \ell_0 - \sum_{i=1}^{d} \frac{D\ell_i}{Dx_i},$$

bulunur. Buradan da $L_2(\Omega)$ fonksiyonlarının differansiyellerinden $f \in H^{-1}(\Omega)$ fonksiyonları elde edilir.

Tanım 3.11 (Bir Bölgenin Sınırında Tanımlı Sobolev Uzayları)

$k \geq 0$ bir tamsayı, $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$ ve $s \in [0, k+\alpha]$ olsun. Bir Ω bölgesinin sınırının yerel bir gösterimi $\forall\ i = 1,2,...,I$ için

$$\partial\Omega \cap B(x_i, r_i) = \{x \in B(x_i, r_i) : x_d = g_i(x_1, x_2, ..., x_{d-1})\},$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $i = 1,2,...,I$ için $D_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ bölgeleri g_i fonksiyonlarının tanım kümeleri olduğu kabul olmak üzere, $\partial\Omega$ sınırının her noktası yukarıdaki gibi tanımlı yerel gösterimlerin en az birinde bulunmaktadır. Her $i = 1,2,...,I$ indisi için $g_i \in C^{k,\alpha}(D_i)$ olsun. Burada $\partial\Omega$ sınırının sonlu sayıda $g_i(D_i)$ alt bölgeye ayrışımına "***yol sistemi***" denmektedir.

Son olarak $s \leq k + \alpha$ olmak üzere $W^{s,p}(\partial\Omega)$ Sobolev uzayı

$$W^{s,p}(\partial\Omega) = \{u \in L_2(\partial\Omega) :\ u \circ g_i \in W^{s,p}(D_i),\ i = 1,2,...,I\},$$

olarak tanımlanır. Bu uzayda standart norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)} = \max_i \|u \circ g_i\|_{W^{s,p}(D_i)},$$

olarak ifade edilmektedir.

Ayrıca $p = 2$ olduğu taktirde

$$W^{s,2}\left(\partial\Omega\right) \equiv H^{s}\left(\partial\Omega\right),$$

olarak yazılmaktadır. Burada $H^{s}\left(\partial\Omega\right)$ bir Hilbert uzaydır.

Tanım 3.12

Bir diğer Sobolev uzayı $H^{k,p}\left(\Omega\right)$ şeklinde gösterilir. $H^{k,p}\left(\Omega\right)$ Sobolev uzayı

$$\widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right) = \left\{u \in C^{k} : \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\right\},$$

biçiminde gösterilen $\widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right)$ uzayının $\| \ \|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normuna göre tamlanışıdır. ($C_0^{\infty}\left(\Omega\right)$ uzayı $\widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right)$ uzayının bir alt uzayıdır). $H^{k,p}\left(\Omega\right)$ Sobolev uzayı güçlü türev kavramından yararlanılarak

$$H^{k,p}\left(\Omega\right) = \left\{\begin{array}{l} u \in L_p\left(\Omega\right):\ D^{\alpha}u \in L_p\left(\Omega\right), \left|\alpha\right| \le k,\ ve\, L_p\left(\Omega\right)\ uzayında \\ D^{\alpha}u_m \to D^{\alpha}u\ \ şeklinde\ \ \left(u_m\right) \in \widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right)\ \ dizisi\ \mathrm{var}\, dır \end{array}\right\},$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu tanımda verilen D^{α} türevi güçlü manada türevdir.

Not 3.13

$H^{k,p}\left(\Omega\right)$ uzayının geometrik özelliklerinin daha iyi anlaşılabilmesi için

$$H^{k,p}\left(\Omega\right) = \overline{C^{\infty}\left(\Omega\right) \cap W^{k,p}\left(\Omega\right)}$$

ve

$$H_0^{k,p}\left(\Omega\right) = \overline{C_0^{\infty}\left(\Omega\right) \cap W^{k,p}\left(\Omega\right)}$$

gösterimlerinin bilinmesi oldukça faydalı olmaktadır.

Yukarıda verilen bilgilerden $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ olduğu açıktır. Gerçekte $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ şeklindedir, ancak şu an için bu eşitlik açık değildir. Çünkü $H^{k,p}(\Omega)$ uzayının elemanları için $L_p(\Omega)$ topolojisine göre $D^{\alpha}u_m \to D^{\alpha}u$ olacak şekilde fonksiyonlar bulunabilirken güçlü türev tanımından dolayı $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı için bu şekildeki limit ancak $L_{p,loc}(\Omega)$ topolojisinde mevcuttur. $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ olduğunu ispatından önce ***Birimin parçalanışı*** kavramı ifade edilmelidir.

Yardımcı teorem 3.14 (Birimin parçalanışı)

$E \subset \mathbb{R}^n$ ve G, U açık kümelerinin bir ailesi olmak üzere $E \subset \left(\bigcup U : U \in G\right)$ olsun. O zaman negatif olmayan $0 \le f(x) \le 1$ şeklindeki $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir F kümesi vardır.

i) $\forall f \in F$ için $\operatorname{supp} f \subset U$ olacak şekilde bir $U \in G$ vardır.

ii) $K \subset E$ kompakt ise o zaman sonlu sayıda $f \in F$ fonksiyonu için $\operatorname{supp} f \cap K$ kümesi boştan farklıdır.

iii) $\forall x \in E$ için $\sum_{f \in F} f(x) = 0$ dır.

iv) Ω_i ler sınırlı ve $\Omega_i \subset E$ olsun. Eğer $G = \{\Omega_1, \Omega_2, ...\}$ şeklinde ise $F = \{f_1, f_2, ...\}$ ve $\operatorname{supp} f_i \subset \Omega_i$ olacak şekildeki F kümesi oluşturulabilir.

Yukarıda belirtilen ***F kümesi G örtüsüne birimin parçalanışı*** olarak adlandırılır.

İspat

E kümesi kompakt olsun. O zaman $U_i \subset G$ olmak üzere için $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı vardır. Şimdi $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ olacak şekilde $E_i \subset U_i$ kümeleri seçilsin ve $g_i = J_{\varepsilon_i} \chi E_i$ için $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ olacak kadar küçük $\varepsilon_i > 0$ sayıları alınsın. O zaman $g_i \in C_0^\infty(U_i)$ olup E_i nin komşuluğunda $g_i > 0$ olur. $g = \sum_{i=1}^{N} g_i$ ve $S = \operatorname{supp} g_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ olarak gösterilsin. Eğer $dist(E, \partial S) > \varepsilon$ ise, bu durumda E kümesin de $k = J_{\varepsilon_i} \chi S$ ifadesi sıfıra eşittir ve $h = g + k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ şeklindedir. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ de $h > 0$ ve E de $h = g$ olur. Buradan $F = \left\{ f_i : f_i = \dfrac{g_i}{h} \right\}$ olması yeterlidir. E açık bir küme olarak seçilirse

$$E_i = E \cap \overline{B_i} \cap \left\{ x : dist(x, \partial E) \geq \frac{1}{i} \right\},$$

biçiminde yazılır. Böylece E_i kompakt ve $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ olduğu görülür. G_i ifadesi, $U \in G$ ve $E_0 = E_{-1} = \varnothing$ olmak üzere $U \cap \left(iç(E_{i+1}) - E_{i-2} \right)$ formundaki açık kümelerin bir koleksiyonunu göstersin. G_i kümesinin elemanları $E_i - iç(E_{i-1})$ kompakt kümesi için birer açık örtüdürler, o yüzden sonlu sayıda eleman ile F_i birimin parçalanışlarına sahiptirler.

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{g \in F_i} g(x),$$

alınır ise, bu durumda; sadece sonlu sayıda koşulun var olduğu ve E de $s>0$ olduğu görülür.

Eğer F kümesi

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{s(x)} & ,x\in E \\ 0 & ,x\notin E \end{cases},$$

şeklindeki fonksiyonların bir kümesi olarak seçilirse ve eğer E bir açık küme değil ise, bu durumda U kümelerinin bileşimleri olan her birimin parçalanışı aynı zamanda E içinde bir birimin parçalanışıdır.

Tanım 3.15 (Meyers ve Serrin)

$$H^{k,p}(\Omega)=W^{k,p}(\Omega).$$

İspat

$H^{k,p}(\Omega)\subset W^{k,p}(\Omega)$ olduğu $H^{k,p}(\Omega)$ tanımından açıktır. $\forall u\in W^{k,p}(\Omega)$ ve $\forall\varepsilon>0$ için

$$|\alpha|\le k,\quad \left\|D^{\alpha}w-D^{\alpha}u\right\|_{L_p(\Omega)}<\varepsilon,$$

olacak şekilde bir $w\in \overset{\frown}{C}^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonu bulunabilir ise, bu durumda

$$W^{k,p}(\Omega)\subset H^{k,p}(\Omega),$$

olduğu gösterilir. $m\ge 1$ için

$$\Omega_m=\left\{x\in\Omega:\|x\|m,\ dist(x,\partial\Omega)>\frac{1}{m}\right\},$$

ve $\Omega_0=\Omega_1=\varnothing$ olsun. $\{\psi_m\}$, Yardımcı Teorem 3.3 ün iv) nolu maddesindeki gibi, $\left\{\Omega_{m+2}-\overline{\Omega}_m\right\}$ örtüsüne altordinatı olsun. Her $u\psi_m$ k-defa diferansiyellenebilir ve

$\Omega_{m+2} - \overline{\Omega_m}$ bölgesinde destekli olsun. Teorem 2.9 un ters yönlü ispatında olduğu gibi öyle küçük $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir ki $w_m = J_{\varepsilon_m}\left(u\psi_m\right)$ fonksiyonu $\Omega_{m+2} - \overline{\Omega_m}$ kümesinde desteklidir ve

$$\left\| w_m - u\psi_m \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^m},$$

İfadesi mevcuttur. Bu durumda $w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m$ olur. Bu fonksiyon $C^{\infty}\left(\Omega\right)$ sınıfındadır çünkü her $\Omega_{m+2} - \overline{\Omega_m}$ kümesinde

$$w = w_{m-2} + w_{m-1} + w_m + w_{m+1} + w_{m+2},$$

vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\| D^{\alpha} w - D^{\alpha} u \right\|_{L_p(\Omega)} &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} D^{\alpha}\left(w_m - u\psi_m\right) \right\|_{L_p(\Omega)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| D^{\alpha}\left(w_m - u\psi_m\right) \right\|_{L_p(\Omega)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Not 3.16

Teoremin ispatından aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

i) $\widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right) \cap C^{\infty}\left(\Omega\right)$ kesişimi $W^{k,p}\left(\Omega\right)$ kümesinde yoğundur.

ii) $\widehat{C}^{k,p}\left(\Omega\right) \cap C^{\infty}\left(\Omega\right)$ kesişim kümesinin elemanlarının $\partial\Omega$ sınırında ya da $\partial\Omega$ sınırına yakın yerde sürekli olmasına gerek yoktur.

Tanım 3.17

Aşağıdaki koşulları Ω sağlayan kümesi ***Parça özelliğini sağlar*** denir.

i) $\forall x \in \partial\Omega$ için x merkezli bir U açık yuvarı vardır.

ii) $0 < t < 1$, $z \in \Omega \cap U$ ise o zaman $z + ty \in \Omega$ olacak şekilde bir y vektörü vardır.

Teorem 3.18

Ω kümesi Parça özelligini sağlasın. O zaman $C^{\infty}(\Omega)$ kümesindeki fonksiyonların Ω kümesine kısıtlanmışı $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayında yoğundur.

Teorem 3.19 (Değişken değiştirme ve zincir kuralı)

V ile Ω, $\mathbb{R}^n$ de iki bölge olmak üzere, $T : V \to \Omega$ şeklindeki dönüşüm terslenebilir olsun. T ve T^{-1} dönüşümleri sürekli olsunlar. Aynı zamanda k pozitif tamsayından küçük ve eşit mertebeli sınırlı türevlere sahip olsunlar. Eğer $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ise o zaman $v = u \circ T \in W^{k,p}(V)$ olacak şekilde bir v fonksiyonu vardır ve bu v fonksiyonunun türevi zincir kuralı ile verilmektedir.

İspat

y sembolü ile Ω bölgesindeki koordinatları ve x sembolü ile V bölgesindeki koordinatları gösterelim. Yani $y = T(x)$ olsun. Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ise o zaman $f \circ T \in L_p(V)$ olur. Çünkü J sembolü T^{-1} dönüşümünün jakobiyen matrisini göstermek üzere

$$\begin{aligned} \int_V |f \circ T|^p dx &= \int_\Omega |f|^p J dy \\ &\leq sabit.\int_\Omega |f|^p dy, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ifadesi yazılabilir.

Eğer $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ise, bu durumda (u_m) fonksiyon dizisi , $\widehat{C}^{k,p}(\Omega)$ kümesinde $u \in W^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonuna yakınsayan ve $v_m = u_m \circ T$ şeklinde tanımlanan bir dizi olsun. Zincir kuralından hareketle ve $|\alpha| \le k$ için $R_{\alpha,\beta}$, T ile türevlerinin sınır koşullarını içerdiği kabul edilir ise, bu durumda

$$D_x^{\alpha} v_m = \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left(D_y^{\beta} u_m \right) \circ TR_{\alpha,\beta},$$

olur. Ama $|\beta| \le k$ için $R_{\alpha,\beta}$ sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} D_y^{\beta} u \in L_p(\Omega) &\Rightarrow \left(D_y^{\beta} u \right) \circ T \in L_p(V) \\ &\Rightarrow \left(D_y^{\beta} u \right) \circ TR_{\alpha,\beta} \in L_p(V), \end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.1) den

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{\alpha} v_m - \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left(D_y^{\beta} u \right) \circ TR_{\alpha,\beta} \right\|_{L_p(V)} &= \left\| \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left(D_y^{\beta} u_m - D_y^{\beta} u \right) \circ TR_{\alpha,\beta} \right\|_{L_p(V)} \\ &\le \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left\| \left(D_y^{\beta} u_m - D_y^{\beta} u \right) \circ TR_{\alpha,\beta} \right\|_{L_p(\Omega)} \\ &\le sabit. \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left\| \left(D_y^{\beta} u_m - D_y^{\beta} u \right) \circ T \right\|_{L_p(\Omega)} \\ &\le sabit. \sum\nolimits_{\beta \le \alpha} \left\| \left(D_y^{\beta} u_m - D_y^{\beta} u \right) \right\|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Not 3.20

i) $C_0^{\infty}(\Omega) \subset \widehat{C}^{k,p}(\Omega)$ olduğu için $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ şeklindedir.

ii) $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ olduğunu söylemek, u fonksiyonun ve türevlerinin $\partial\Omega$ sınırında sıfıra eşit olduğunu söylemekle aynı manadadır.

iii) $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$ şeklindedir. Çünkü $u \in C_0^\infty(\Omega)$ olduğu zaman yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normuna göre $J_\varepsilon u \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $J_\varepsilon u \to u$ olmaktadır.

4. BÖLÜM

SOBOLEV UZAYLARI VE FOURİER TRANSFORM

$\Omega = \mathbb{R}^n$ olarak alındığı taktirde $H^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ Sobolev uzayı, Fourier Transform kullanılarak tanımlanabilir. Bu bölümde kullanılan tüm fonksiyonlar kompleks değerlidir.

Tanım 4.1

$u \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ için $F(u)(y)$ ***Fourier Transformu***

$$F(u)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x) dx ,$$

ve $F^{-1}(u)(y)$ ***Ters Fourier Transformu***

$$F^{-1}(u)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(x) dx ,$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda Fourier Transform için çok önemli iki teorem verilmektedir.

Teorem 4.2 (Fourier Palancheral Teorem)

$u \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ olsun. Bu durumda $Fu, F^{-1}u \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve

$$\|Fu\|_{L_2\left(\mathbb{R}^n\right)} = \left\|F^{-1}u\right\|_{L_2\left(\mathbb{R}^n\right)} = \|u\|_{L_2\left(\mathbb{R}^n\right)},$$

olur.

Bu teoremin ifade ettiği eşitlik ve $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ kesişiminin $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu gerçeği kullanılarak, yukarıda ifade edilen Fourier ve Ters Fourier Transform ifadeleri $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki fonksiyonlar içinde genişletilebilir.

Teorem 4.3

$u, v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu taktirde

i) $\int_{\mathbb{R}^n} Fu(y)\overline{Fv(y)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\overline{v(y)}dx$;

ii) $D^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; F(D^\alpha u)(y) = (iy)^\alpha Fu(y)$;

iii) $Fu = v \;\Leftrightarrow\; F^{-1}v = u$;

olur.

Şimdi aşağıdaki çok önemli teorem verilebilir.

Teorem 4.4

$u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$u \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + |y|^k\right) Fu \in L_2(\mathbb{R}^n) ,$$

olur ve buna ek olarak $\forall u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ için

$$c_1 \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \le \left\|1 + (y)^k Fu\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le c_2 \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)},$$

olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sayıları vardır.

Yukarıdaki teorem $\left\|1 + (y)^k Fu\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ ifadesinin $H^k(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayı için bir norm olduğunu ifade etmektedir. Yani $\left\|1 + (y)^k Fu\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ normu $\| \; \|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$ doğal normuna denktir. Buradan itibaren $H^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ Sobolev uzayı aşağıdaki eşdeğer tanımın verilmesi oldukça anlamlı olmaktadır.

$$H^k\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{u\in L_2\left(\mathbb{R}^n\right):\ \left(1+|y|^k\right)Fu\in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right\},$$

$H^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ Sobolev uzayının yukarıda verilen eşdeğer tanımı için k mertebesi pozitif tamsayı olarak seçilmesi zorunluluğu yoktur. Yani $s\geq 0$ herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)$ Sobolev uzayı

$$H^s\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{u\in L_2\left(\mathbb{R}^n\right):\ \left(1+|y|^s\right)Fu\in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right\},$$

şeklinde olup, bu uzay üzerinde tanımlı norm ve iç çarpım sırası ile aşağıdaki verilmektedirler.

$$\|u\|_{H^s\left(\mathbb{R}^n\right)}=\left\|1+\left(y\right)^s Fu\right\|_{L_2\left(\mathbb{R}^n\right)},$$

$$\langle u,v\rangle_{H^s\left(\mathbb{R}^n\right)}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|y|^s\right)^2 Fu\left(y\right)\overline{Fv\left(y\right)}dy\ .$$

Özel durumda eğer $s=0$ alınırsa doğal olarak $H^0\left(\mathbb{R}^n\right)=L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ olur.

5. BÖLÜM

GENİŞLEME TEOREMİ

Sobolev uzayları için bazı özelliklerin $\mathbb{R}^n$ yerine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde gösterilmesi daha kolaydır. Bu bölümde $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayının elemanlarını kendisinden daha büyük olan $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayının birer elemanı olarak ifade edilmesini sağlayan genişleme operatörünün varlığı araştırılacak ve bu sayede gömülme teoremleri veya iz teoremi gibi konular yardımıyla $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı için elde uygun sonuçların $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayı içinde gösterilmesi sağlanacaktır.

Önerme 5.1

$v \in \mathbb{R}^n$ ve $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için

$$u_\delta(x) = u(x + \delta v)$$

olsun. Bu durumda $L_p(\mathbb{R}^n)$ kümesinde $\lim u_\delta = u$ şeklinde yazılır.

İspat

$\varepsilon > 0$ ve $\delta \le 1$ olmak üzere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kümesinde tanımlı ϕ fonksiyonu için $\|u - \phi\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ oluyorsa bu durumda ϕ_δ fonksiyonun tüm desteklerini içeren yeteri kadar büyük bir yuvarda ϕ_δ fonksiyonu ϕ fonksiyonuna düzgün yakınsar ve $\|\phi - \phi_\delta\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ olacak şekilde çok küçük bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Bu durumda

$$\|u-u_\delta\|_{L_p(\Omega)} \le \|u-\phi\|_{L_p(\Omega)} + \|\phi-\phi_\delta\|_{L_p(\Omega)} + \|\phi_\delta - u_\delta\|_{L_p(\Omega)}$$
$$< 3\varepsilon,$$

eşitsizliği elde edilebilir. Yani

$$\|u-u_\delta\|_{L_p(\Omega)} \le 3\varepsilon,$$

olduğu görülür.

Önerme 5.2

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ şeklinde olsun.

$C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right) \cap \widehat{C}^{k,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ kümesi $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ Sobolev uzayında yoğundur.

İspat

$\varepsilon > 0$ sayısı için $u \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $\phi \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right) \cap \widehat{C}^{k,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ fonksiyonlar olmak üzere $\forall|\alpha| \le k$ için

$$\|D^\alpha \phi - D^\alpha u\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n_+\right)} < \varepsilon,$$

olsun. Buradan $L_p\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ kümesinde seçilen bir ψ^α fonksiyonu

$$\psi^\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha \phi(x) & , x_n > 0 \\ 0 & , x_n \le 0 \end{cases},$$

olarak tanımlansın. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\phi_\delta \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right) \cap \widehat{C}^{k,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right),$$

olduğu kabul edilirse, bu durumda bir önceki yardımcı teoremden hareketle $\forall|\alpha| \le k$ için

$$\|\psi^\alpha_\delta - \psi\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n_+\right)} < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir. Bu durumda

$$\left\| D^{\alpha} \psi_{\delta}^{\alpha} - D^{\alpha} \psi \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)} < \varepsilon ,$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} \left\| D^{\alpha} \phi_{\delta} - D^{\alpha} u \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &\leq \left\| D^{\alpha} \phi_{\delta} - D^{\alpha} \phi \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)} + \left\| D^{\alpha} \phi - D^{\alpha} u \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \\ &< 2\varepsilon , \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.3

$\mathbb{R}_+^n$ kümesinde $E_0 u = u$ olacak şekilde bir $E_0 : W^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \to W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ lineer dönüşümü var olmakla birlikte, bu dönüşüm için

$$\left\| E_0 u \right\|_{W^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C \left\| u \right\|_{W^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} ,$$

olacak şekilde yalnızca n ve p ye bağlı bir C sabiti vardır.

İspat

$C^{\infty}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ kümesinden alınan u fonksiyonu

$$E_0 = \begin{cases} u(x) & , x_n \geq 0 \\ \sum_{r=1}^{k+1} c_r u\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, -r x_n\right) & , x_n < 0 \end{cases} ,$$

olarak tanımlansın. Burada c_r sabitlerinin $E_0 u \in C^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ olacak şekilde seçildiğine dikkat edilmelidir. Yani

$$\sum_{r=1}^{k+1} c_r \left(-r\right)^m = 1 \quad , m = 0,1,2,...,k$$

şeklindedir. Buradan

$$\left\| D^{\alpha} E_o u \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} \leq C \left\| D^{\alpha} u \right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)} , \tag{5.1}$$

olacak şekilde yalnızca n ve p ye bağlı bir C sabiti vardır. Eğer $u \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ise bu durumda $W^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayında u fonksiyonuna yakınsayan bir $u_m \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right) \cap \widehat{C}^{k,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyon dizisi alınsın. Bu durumda u_m bir Cauchy dizisidir ve (5.1) den $E_o u_m$ operatörü de $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayında bir Cauchy dizisi olur.

Teorem 5.4

Ω sınırlı bir bölge olsun. Eğer Ω bölgesi C^k nın bir sınıfı ise

$$E : W^{k,p}\left(\Omega\right) \to W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

olacak şekilde sınırlı ve lineer bir genişleme operatörü vardır.

Not 5.5

Teorem 5.4 de ifade edilen genişleme teoremi için birkaç yoldan iyileştirme yapılabilir.

i) Eğer $\partial\Omega$ sınırlı ise, bu durumda Ω bölgesinin kendisi sınırlı olmak zorunda değildir.

ii) Ω bölgesi, C^k yerine $C^{k-1,1}$ in bir sınıfı olabilir. Yani ψ_i fonksiyonlarının mertebeli türevleri Lipschitz süreklidir.

6. BÖLÜM

SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ VE GÖMÜLME TEOREMLERİ

Gömme teoremleri farklı fonksiyon uzayları arasında ilişki kurulmasını sağlayan matematiksel araçlardır. Gömme teoremleri kullanılarak fonksiyon uzayları hakkında bazı fikirler elde edilebilir. Söz gelimi bir fonksiyon uzayının matematiksel bir özelliğe sahip olup olmadığı ya da hangi durumlarda söz konusu özelliğe sahip olduğu gömme teoremleri sayesinde rahatlıkla görülebilir.

Tanım 6.1

A ve B iki Banach uzay olsun. $A \subset B$ olmak üzere $\forall x \in A$ için

$$\|u\|_B \leq C\|u\|_A,$$

olacak şekilde bir C sabiti var ise, bu durumda; ***A kümesi B kümesinde sürekli gömülür*** denir ve $A \mapsto B$ biçiminde gösterilir.

Teorem 6.2

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, h yüksekliği ve α açıklığı ile Koni koşulunu sağlayan bir bölge olsun. Eğer $p > 1$ ve $kp > n$ ise

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C_B(\Omega),$$

olur ve $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ için

$$\sup|u| \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

olacak şekilde yalnızca α, h, n ve p ye bağlı bir C sabiti vardır.

İspat

$u \in \widehat{C}^{k,p}(\Omega)$ olmak üzere

$$g(t) = \begin{cases} 1 \ , & t < 1/2 \\ 0 \ , & t \geq 1 \end{cases},$$

şeklindeki $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $x \in \Omega$ olmak üzere (r,θ) ikilisi x merkezli kutupsal koordinatları göstersin. Burada $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ açısal koordinatları göstersin ve ayrıca tepe noktası x olan Koniyi kutupsal koordinatlarda

$$\mathrm{V_x} = \{(\mathrm{r},\theta) : 0 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{h}, \theta \in A\},$$

biçiminde gösterelim. Eğer $(k-1)$ defa kısmi integral alınırsa

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_0^h \frac{d}{dr}\{g(r/h)u(r,\theta)\}dr \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^h r^{k-1}\frac{d^k}{dr^k}\{g(r/h)u(r,\theta)\}dr, \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ardından dS_θ açısal uzunluğuna bağlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned} u(x) &= C\int_A\int_0^h r^{k-1}\frac{d^k}{dr^k}\{g(r/h)u(r,\theta)\}drdS_\theta \\ &= C\int_A\int_0^h r^{k-n}\frac{d^k}{dr^k}\{g(r/h)u(r,\theta)\}r^{n-1}drdS_\theta \\ &= C\int_{V_x} r^{k-n}\frac{d^k}{dr^k}\{g(r/h)u(r,\theta)\}dV, \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafa Hölder Eşitsizliği uygulanırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} u(x) &\leq sabit.\left\|r^{k-n}\right\|_{L_q(V_x)}\left\|\frac{d^k}{dr^k}\{g(r/h)u(r,\theta)\}\right\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq sabit.\left\|r^{k-n}\right\|_{L_q(V_x)}\left\|u\right\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

bulunur. Fakat $q=\left(\dfrac{p}{p-1}\right)$ ve $kp>n$ olması durumunda eğer $n-1+(k-n)q>-1$ ise o zaman

$$r^{k-n}\in L_q\left(V_x\right),$$

olur. Buradan $\sup|u|\leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ifadesi elde edilir. Eğer elde edilen bu sonucun keyfi bir $u\in W^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanması isteniyorsa bu durumda $u\in\widehat{C}^{k,p}(\Omega)$ da $\|\ \|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normuna göre u ya yakınsayan fonksiyonlardan oluşan bir (u_m) dizisi alınmalıdır. O zaman (u_m) dizisinin $C_B(\Omega)$ da bir Cauchy dizisi olduğu gösterilirse

$$\sup\left|u_j-u_m\right|\leq C\left\|u_j-u_m\right\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

bulunur. Böylece u fonksiyonu $C_B(\Omega)$ uzayının bir elemanıdır ve

$$\sup|u\ |\leq C\|u\ \|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

ifadesinin her iki tarafının limitinin alınması ile eşitliğinin sağlandığı görülür.

Sonuç 6.3

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, h yüksekliği ve α açıklığı ile Koni koşulunu sağlayan bir bölge olsun. Eğer $p>1$, $(k-m)p>n$ ise o zaman

$$W^{k,p}(\Omega)\subset C_B^m(\Omega),$$

olur ve $\forall u\in W^{k,p}(\Omega)$ için

$$\sup_{|\alpha|\leq m}\left|D^\alpha u\right|\leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

olacak şekilde yalnızca α,h,n ve p ye bağlı bir C sabiti bulunabilir.

İspat

Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak $|\alpha| \leq k$ durumunda $D^{\alpha}u$ için uygulanırsa ispat yapılır.

Teorem 6.4

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Eğer $p > n$ ve $\alpha = 1 - \left(\dfrac{n}{p}\right)$ ise o zaman

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$$

olur ve $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\alpha}} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L_p(\Omega)},$$

olacak şekilde yalnızca α, h, n ve p ye bağlı bir C sabiti bulunabilir.

İspat

$u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ olsun. Aynı zamanda $u \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ olarak da alınabilir. Şimdi $d = \|x - y\|$, $S_x = B_d(y)$ ve $S = S_x \cap S_y$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| vol(S) &= \int_S |u(x) - u(y)| dz \\ &\leq \int_S (|u(x) - u(z)| dz + |u(z) - u(y)|) dz \\ &\leq \int_{S_x} |u(x) - u(z)| dz + \int_{S_x} |u(z) - u(y)| dz, \end{aligned}$$

olur. Eğer (r, θ) ikilisi koordinat düzleminde x merkezli z noktasının kutupsal koordinatları ise

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^r \left|\frac{du}{d\rho}\right| d\rho,$$

olur. Buradan $q=\dfrac{p}{p-1}$ için

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{S_x}\left|u(x)-u(y)\right|dz &\le \int\int\limits_0^d\int\limits_0^r\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|d\rho r^{n-1}drdS_\theta \\
&\le \int\int\limits_0^d\int\limits_0^d\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|d\rho r^{n-1}drdS_\theta \\
&\le \frac{d^n}{n}\int\int\limits_0^d\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|d\rho dS_\theta \\
&\le \frac{d^n}{n}\int\int\limits_0^d\rho^{1-n}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|\rho^{n-1}d\rho dS_\theta \\
&\le \frac{d^n}{n}\int_{S_x}\rho^{1-n}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|dz \\
&\le \frac{d^n}{n}\left\|\rho^{1-n}\right\|_{L_q(S_x)}\left\|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|_{L_p(S_x)},
\end{aligned}
$$

bulunur. Küçük bir hesaplama ile

$$\left\|\rho^{1-n}\right\|_{L_q(S_x)}=sabit.d^{1-\frac{n}{p}},$$

olduğu gösterilebilir. Buradan sonra

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|_{L_q(S_x)}=sabit.\sum_{i=1}^{n}\left\|\partial_i u\right\|_{L_p(\Omega)},$$

olduğunu görmek zor değildir.

Ayrıca vol(S)=sabit.d^n ve S_y üzerinde alınan integral farklı bir yoldan hesaplanabilir.

$$\left|u_j-u_m\right|\le Cd^{1-\frac{n}{p}}\sum_{i=1}^{n}\left\|\partial_i u\right\|_{L_p(V_x)}.$$

Bu eşitsizlik tam olarak elde edilmek istenen sonuçtur. Ek olarak

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C_B(\Omega),$$

teoreminin $\mathbb{R}^n$ öklit uzayına uygulanmasından

$$\sup|u| \leq C\|u\|_{1,p},$$

bulunur. Bu ifade ile yukarıda elde edilen sonucun birleştirilmesinden $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

bulunur.

Eğer $u \in W^{1,p}(\Omega)$ olursa ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayında $\| \ \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ normuna göre u ya yakınsayan fonksiyonların bir (u_m) dizisi varsa o zaman söz konusu bu fonksiyonlar dizisi $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$ uzayında yakınsaktır. Böylece $u \in C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$ olur. Son olarak limit işleminin uygulanmasının ardından verilen u fonksiyonun teoremde verilen eşitsizliği sağladığı görülür.

Teorem 6.5

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $p < n$ ve $q = \dfrac{np}{n-p}$ ise

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$$

olur ve $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq C\sum_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{L_p(\Omega)},$$

olacak şekilde yalnızca n ve p ye bağlı bir C sabiti bulunabilir.

İspat

İlk olarak Hölder eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir hali olan

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+...+\frac{1}{p_n}=1$$

olmak üzere

$$\int_\Omega |u_1.u_2.u_3....u_n|\,dx \le \|u_1\|_{L_1(\Omega)}.\|u_2\|_{L_2(\Omega)}.\|u_3\|_{L_3(\Omega)}....\|u_n\|_{L_n(\Omega)}\ , \qquad (6.1)$$

eşitsizliğini verelim.

Teoremin ispatı için $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ durumunu gösterilmesi yeterlidir. İlk olarak $p=1$ durumu ele alalım. $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u|\,dx_i \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u|\,dx_i,\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu şekildeki $n-$tane integrali taraf tarafa toplar ve ardından $(n-1)$ mertebeden kökü alınırsa

$$\left|u(x)^{\frac{n}{n-1}}\right| \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_i u(x)|\,dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (6.2)$$

bulunur.

$\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|dx_i$ integrali x_i ye bağlı değil iken, kalan $(n-1)$ tane değişkene bağlıdır. (6.2) ifadesinin her iki tarafının x_i değişkenine bağlı olarak integralini alıp genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğini uygularsak $p_i = m = n-1$ için

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|D_1 u|dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1 \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|D_1 u|dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|\,dx_i dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}},\end{aligned}$$

olur. Bu ifade hala x_2 nin $(n-1)$ tane fonksiyonundan oluşmaktadır, o yüzden her iki tarafın bu kez x_2 ye bağlı integralini alır ve tekrar (6.1) ifadesinde $p_i = m = n-1$ uygulanırsa son olarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \left(\prod_{i=1}^{n} |D_i u(x)| \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

bulunur. Bu ifade geometrik olarak

$$\|u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \le \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u| \, dx \right)^{\frac{1}{n}},$$

ve aritmetik olarak

$$\|u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \le \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u| dx,$$

şeklindedir. Buraya kadar $p=1$ durumu için ispat yapıldı.

Şimdi $p>1$ durumunu ele alalım.

$\delta = \dfrac{(n-1)p}{n-p} = 1 + \dfrac{(p-1)n}{n-p}$ olsun. Çünkü $\delta > 1$ ve $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ise $|u|^{\delta} \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ olur. Buradan

$$D_i |u|^{\delta} = \frac{(n-1)p}{n-p} |u|^{\frac{(p-1)n}{n-p}} (\pm D_i u),$$

olur. $|u|^{\delta}$ durumu için $p=1$ alırsak

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(n-1)p}{n-p}|u|^{\frac{(p-1)n}{n-p}}|D_iu|\,dx$$

$$\le \frac{(n-1)p}{n(n-p)}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^{\frac{(p-1)n}{n-p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|D_iu\|_{L_p(\Omega)}$$

$$=\frac{(n-1)p}{n(n-p)}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|D_iu\|_{L_p(\Omega)},$$

olur ve böylece

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \frac{(n-1)p}{n(n-p)}\sum_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{L_p(\Omega)},$$

ifadesi elde edilir. Aynı sonuç açık olarak $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ içinde elde edilebilir, bunun için sadece $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında u ya yakınsayan bir fonksiyonlar dizisi alınmalıdır.

Not 6.6

$r = \dfrac{np}{n-p}$ için $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ olduğu önceki teoremde gösterilmişti. Ama $\underset{o}{W}^{1,p}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ olduğu zaten açıktır. O yüzden şimdi verilecek önermede $p \le q \le r$ şeklindeki uygun tüm q değerleri için $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ olduğu gösterilmektedir. Eğer Ω sınırlı ise söz konusu ifade bu kez $1 \le q \le r$ şeklindeki uygun tüm q değerleri için sağlanır.

Yardımcı teorem 6.7

Eğer $s \le q \le r$ ve $\Phi \in L_s(\Omega) \cap L_r(\Omega)$ ise $\Phi \in L_q(\Omega)$ olur ve

$$\lambda = \frac{s(r-q)}{q(r-s)}$$

için

$$\|\Phi\|_{L_q(\Omega)} \le \|\Phi\|_{L_s(\Omega)}^{\lambda} . \|\Phi\|_{L_s(\Omega)}^{1-\lambda},$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat

Bu önemenin ispatı için $|\Phi|^q$ ifadesinin integraline Hölder eşitsizliği uygulanmalı ve $|\Phi|^{(1-\lambda)q} \in L_{\frac{r}{(1-\lambda)q}}(\Omega)$ için $|\Phi|^{\lambda q} \in L_{\frac{r}{\lambda q}}(\Omega)$ olduğu gerçeği kullanılmalıdır.

Sonuç 6.8

$\mathbb{R}^n$ deki her Ω bölgesi için yalnızca n ve p ye bağlı bir C sabiti vardır ki

i) Eğer $kp < n$ ise

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$$

olur ve $\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

ii) Eğer $kp > n$ ise $0 < k - m - \dfrac{n}{p} < 1$ ve $\alpha = k - m - \dfrac{n}{p}$ koşullarını sağlayan k tamsayısı için

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

olur ve $\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)},$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

İspat

i) Eğer $|\beta| \leq k-1$ ve $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ise $D^{\alpha}u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olur. $r = \dfrac{np}{n-p}$ için $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ olduğu da önceki teoremde gösterilmişti. Buradan hareketle $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W_0^{k-1,\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ olur. Bu süreç bir kez daha ilerletilirse $W_0^{k,p} \subset W_0^{k-2,\frac{np}{n-2p}}(\Omega)$ ifadesi elde edilir. Aynı iterasyon k-defa yapılırsa en sonunda $W_0^{k,p} \subset W_0^{k-2,\frac{np}{n-kp}}(\Omega)$ sonucu elde edilir.

ii) $(k-m-1) < n$ olduğu için i) durumu

$$W_0^{k-m-1,p}(\Omega) \subset L_{\frac{np}{n-(k-m-1)p}}(\Omega) = L_{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega),$$

olduğunu gösterir. Böylece eğer $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ve $|\beta| \leq m+1$ ise $D^{\beta}u \in W_0^{k-m-1,p}(\Omega)$ olur. Bundan dolayı $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ bulunur. Fakat buradan anlaşılmaktadır ki eğer $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ve $|\beta| \leq m$ ise, bu durumda; $D^{\beta}u \in W_0^{1,\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)$ olur. Aynı zamanda $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ olduğu da gösterilmişti. Sonuç itibariyle $W_0^{k,p}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ olur.

Not 6.9

Bir kaç özel durum aşağıda ispat verilmeden yazılmıştır. Bunların her biri birbirinden bağımsız ispatlar gerektirmektedir.

i) $kp = n$ ve $p > 1$ ise $p \le q < \infty$ koşulunu sağlayan tüm q değerleri için aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$$

ii) $kp = n$ ve $p = 1$ ise ($k = 1$ olduğundan) aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset C_B(\overline{\Omega})$$

iii) $kp > n$, $p > 1$ ve $\frac{n}{p}$ ifadesi bir tamsayı ise $p \le q < \infty$ koşulunu sağlayan tüm q değerleri için aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset W_0^{k-\frac{n}{p},q}(\Omega)$$

iv) $kp > n$, $p = 1$ ise (ki o zaman $\frac{n}{p}$ bir tamsayıdır) aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset C_B^{k-n}(\overline{\Omega})$$

Yukarıda gösterilen özel durumlar uygun normlarla verilen birer eşitsizliğe sahiptirler.

Sonuç 6.10

Eğer Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir C^1 bölgesi ise (ya da içinde $E : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde sınırlı Genişleme operatörü var olan herhangi bir bölge ise) bu durumda Sonuç 6.8 ve Not 6.9 dan $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı için söylenenler $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı için de geçerlidir. C sabiti verilen uzaya göre değişir.

Not 6.11

Not 5.7 incelendiğinde Genişleme operatörünün Lipschitz bölgeleri ve hatta Koni koşulunu kesin olarak sağlayan bölgeler için var olduğu görülür.

7. BÖLÜM

KOMPAKTLIK TEOREMİ

Bazı durumlarda verilen gömülmenin kompakt olması tercih edilen bir durumdur.

Tanım 7.1

$A \mapsto B$ gömülmesini ele alalım. Eğer A kümesinde bulunan her sınırlı dizinin B kümesinde yakınsak bir alt dizisi varsa ***A kümesi B kümesin de kompakt olarak gömülür*** denir.

A ve B iki Banach uzay ve $M : A \to B$ bir sınırlı lineer dönüşüm olsun. A uzayında alınan her sınırlı kümeye karşılık B kümesinde sınırlı bir küme dizisi varsa $M : A \to B$ ***dönüşümü kompakttır*** denir.

A, B ve C Banach uzaylar ve $M : A \to B$ ile $P : B \to C$ lineer dönüşümleri sınırlı olsun. A veya B uzaylarından herhangi biri kompakt ise, bu durumda; PM dönüşümü de kompakttır. Sonuç olarak şu çok önemli sonuç elde edilir; eğer $A \mapsto B$ veya $B \mapsto C$ gömülmelerinden herhangi biri kompakt ise o zaman $A \mapsto C$ gömülmesi de kompakttır.

Yardımcı teorem 7.2

Ω sınırlı bir bölge olmak üzere eğer

i) $0 \le \lambda \le 1$ ise $C^{m,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesi $C^{m}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

ii) $0 < v < \lambda \le 1$ ise $C^{m,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesi $C^{m,v}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

İspat

İspatın $m = 0$ durumu için gösterilmesi yeterli olacaktır. Bu yapıldıktan sonra elde edilen sonuç fonksiyonların türevlerine uygulanabilir ve m değerleri için genelleştirebilir. (u_i), $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ kümesinde $\|u_i\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leq M$ olacak şekilde bir dizi olsun. Buradan

$$|u_i(x) - u_i(y)| \leq M \|x-y\|^{\lambda}{}_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})},$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik söz konusu dizinin sınırlı olduğunu ve eş sürekli fonksiyonlardan oluştuğunu ifade eder. Arzela-Ascoli teoreminden $C(\overline{\Omega})$ kümesinde yakınsak bir (u_{i_k}) alt dizisinin olduğu görülür. Buradan $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ kümesi $C(\overline{\Omega})$ kümesinde kompakt olarak gömülür denir.

Söz konusu (u_{i_k}) alt dizisinin $C^{0,v}(\overline{\Omega})$ kümesinde de yakınsak olduğunu gösterilebilir. Bunun için $\psi \in C^{0,v}(\overline{\Omega})$ olduğu kabul edilir ise, bu durumda;

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{C^{0,v}(\overline{\Omega})} &= \sup \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{\|x-y\|^{\lambda}} \\
&= \sup \left(\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{\|x-y\|^{\lambda}} \right)^{\frac{v}{\lambda}} |\psi(x) - \psi(y)|^{1-\frac{v}{\lambda}} \\
&\leq 2^{1-\frac{v}{\lambda}} \left(\|\psi\|_{C^{0,v}(\overline{\Omega})} \right)^{\frac{v}{\lambda}} \left(\max|\psi| \right)^{1-\frac{v}{\lambda}},
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade $f_{i_k}(x) - f_{i_r}(y)$ için düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\left\| f_{i_k}(x) - f_{i_r}(y) \right\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} &\leq \left\| f_{i_k}(x) \right\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} + \left\| f_{i_r}(x) \right\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \\
&\leq 2M,
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left\| f_{i_k}(x) - f_{i_r}(y) \right\|_{C^{0,v}(\overline{\Omega})} \leq 2M^{\frac{v}{\lambda}} \left(maks \left| f_{i_k}(x) - f_{i_r}(y) \right| \right)^{1-\frac{v}{\lambda}}$$

bulunur. Böylece söz konusu alt dizi $C^{0,v}\left(\overline{\Omega}\right)$ da bir Cauchy dizisidir. (Çünkü C(Ω) da yakınsaktır). Bundan dolayı alt dizi $C^{0,v}\left(\overline{\Omega}\right)$ da yakınsaktır.

Sonuç 7.3

Eğer Ω sınırlı, $kp > n$, β<k-m-$\frac{n}{p}$ ve 0<k-m-$\frac{n}{p}$<1 ise bu taktirde $W^{k,p}(\Omega)$ kümesi $C^{m,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

İspat

β=k-m-$\frac{n}{p}$ olsun. O zaman $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ ikinci gömülmesi kompakttır.

Sonuç 7.4

Ω sınırlı bir C^1 bölgesi (ya da içinde şeklindeki sınırlı genişleme operatörü olan başka bir bölge) olmak üzere $kp > n$ ve 0<k-m-$\frac{n}{p}$<1 olsun. Eğer β<k-m-$\frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega)$ kümesi $C^{m,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

İspat

$\phi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu Ω da $\phi = 1$ şeklinde tanımlı olsun. Ayrıca $\phi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonunun tüm destekleri Ω bölgesinde bir B yuvarında olsun. Buradan $\phi\widetilde{E}(f) = \phi E(f)$ olacak şekilde bir

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

dönüşümü tanımlansın. Sonuç 7.3 de $W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesinin $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ kümesinde kompakt olarak gömüldüğü söylenmişti. Bundan dolayı $W^{1,p}(B)$ kümesi $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

Bu sonuç genel k değerleri için genişletilebilir. Bunun için fonksiyonların türevlerinin alınması gerekir.

Not 7.5

Sonuç 7.3 ve Sonuç 7.4 sunulan ifadeler $0 < k - m - \frac{n}{p} < 1$ yerine $0 < k - m - \frac{n}{p} \leq 1$ alınması durumunda bile geçerlidir. Yani $\frac{n}{p}$ sayısının bir tamsayı değeri alması durumu da ilave edilebilir.

Tanım 7.6

Bir metrik uzayın bir E alt kümesi $\forall \varepsilon > 0$ için eğer E kümesi ε yarıçaplı yuvarlarla kesin olarak örtülebiliyorsa E ***tam sınırlıdır*** denir.

Teorem 7.7

E, tam bir X metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda

i) E kompakttır.

ii) E deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

iii) E tam sınırlıdır.

ifadeleri eşdeğerdir.

Bu teorem kompakt dönüşümler ve gömülmeler için çok yaralı iki karakterizasyonu ifade eder.

Teorem 7.8

Ω sınırlı bir bölge ve $p < n$ olsun. Bu durumda $q < \dfrac{np}{n-p}$ olacak şekildeki $\forall q$ için $\underset{o}{W}^{1,p}(\Omega)$ uzayı $L_q(\Omega)$ uzayında kompakt olarak gömülür.

ispat

İlk olarak $q = 1$ olsun. A kümesi $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayında sınırlı bir küme olsun. A kümesinin elemanlarını Ω bölgesindeki destekleri ile beraber $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayının elemanları olarak kabul edilebilir. $A_h = \{J_h u : u \in A\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}|J_h u| &\leq h^{-n}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-z}{h}\right)|u(z)|dz\\ &\leq h^{-n}(\max\rho)\|u\|_{L_1(\Omega)},\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}|D_i J_h u(x)| &\leq h^{-n-1}\int_\Omega D_i\rho\left(\frac{x-z}{h}\right)|u(z)|dz\\ &\leq h^{-n}(\max|D_i\rho|)\|u\|_{L_1(\Omega)}\end{aligned}$$

olur.

Ω sınırlı olduğu için

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} \leq sabit.\|u\|_{L_p(\Omega)},$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitsizliğin anlatmak istediği A_h kümesinin $C(\overline{\Omega})$ sınıfında bulunan sınırlı ve eşsürekli fonksiyonların bir kümesi olduğudur. Arzela -Ascoli teoreminden A_h kümesindeki her dizi $C(\overline{\Omega})$ sınıfında yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Bu türden alt dizilerin $L_1(\Omega)$ uzayında da yakınsak olduğu açıktır, o yüzden A_h, $L_1(\Omega)$ uzayında tam sınırlıdır. Eğer $u \in A_h$ ise, bu durumda;

$$\begin{aligned} u(x) - J_u(x) &= \int_{|z|\le 1} \rho(z)\big(u(x) - u(x - hz)\big)dz \\ &= \int_{|z|\le 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} -\frac{d}{dr}u\left(x - r\frac{z}{\|z\|}\right)drdz, \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\left|u(x) - J_u(x)\right| = \int_{|z|\le 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} \sum_{i=1}^{n} \left|D_i u\left(x - r\frac{z}{\|z\|}\right)\right| drdz,$$

olur. Her iki tarafın x değişkenine bağlı integrali alınır ise, bu durumda;

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|u(x) - J_u(x)\right| dx &= \int_{|z|\le 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_i u\left(x - r\frac{z}{\|z\|}\right)\right| dxdrdz \\ &= \int_{|z|\le 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|D_i u\left(x - r\frac{z}{\|z\|}\right)\right| dxdrdz \\ &= \int_{|z|\le 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|D_i u\left(x - r\frac{z}{\|z\|}\right)\right| dxdrdz \qquad 9.1 \\ &\le h\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|D_i u(x)\right| dx \\ &\le hB, \end{aligned}$$

olur. Bu ifade de B sembolü , $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayında A kümesinin elemanlarının sınırına bağlı bir sabiti temsil etmektedir. Çünkü sınırlı bir bölgede $\| \ \|_{L_1(\Omega)}$ normu $\| \ \|_{L_p(\Omega)}$ normundan daha zayıftır.

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. A_h kümesi, $L_1(\Omega)$ uzayında tam sınırlı olduğundan, sonlu sayıda $\varepsilon/2$ yarıçaplı B_i yuvarı ile örtülebilir. $h = \dfrac{\varepsilon}{2B}$ olsun. (9.1) den eğer $J_h u \in B_i$ ise u fonksiyonu ε yarıçaplı merkezi B_i yuvarının merkezi ile çakışık olan bir yuvar içindedir. Böylece A kümesi sonlu sayıda ε yarıçaplı yuvar ile örtülebilirdir yani A kümesi $L_1(\Omega)$ uzayında tam sınırlıdır. Buradan $\underset{o}{W}^{1,p}(\Omega)$ uzayı $L_1(\Omega)$ uzayında kompakt olarak gömülüdür.

$\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olduğu kabul edilir ise, bu durumda; $\psi \in L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ olur. Teorem 6.5 ve Yardımcı Teorem 6.7 den hareketle $s=1$ ve $r=\dfrac{np}{n-p}$ ise, bu durumda;

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L_q(\Omega)} &\le \|\phi\|_{L_1(\Omega)}^{\lambda}\,\|\phi\|_{L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}^{1-\lambda}\\ &\le C\|\phi\|_{L_1(\Omega)}^{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}\|D_{i\phi}\|_{L_p(\Omega)}\right)^{1-\lambda},\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $W_0^{1,p}(\Omega)$ Sobolev uzayında $\|u_m\|_{L_1(\Omega)} \le M$ olacak şekilde sınırlı bir (u_m) dizisi alınsın. $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayı $L_1(\Omega)$ uzayında kompakt olarak gömüldüğü için $L_1(\Omega)$ uzayında yakınsak bir (u_{m_i}) alt dizisi bulunabilir. Yukarıdaki eşitsizlik $(u_{m_i})-(u_{m_k})$ için düzenlenirse

$$\left\|(u_{m_i})-(u_{m_k})\right\|_{L_1(\Omega)} \le 2M,$$

bulunur ve buradan hareketle

$$\left\|(u_{m_i})-(u_{m_k})\right\|_{L_q(\Omega)} \le sabit.\left\|(u_{m_i})-(u_{m_k})\right\|_{L_1(\Omega)}^{\lambda},$$

bulunur. Bu ifade (u_{m_i}) dizisinin $L_q(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bundan dolayı (u_{m_i}) dizisi $L_q(\Omega)$ uzayında yakınsaktır ve $W_0^{1,p}(\Omega)$uzayı $L_q(\Omega)$ uzayında kompakt olarak gömülür.

Sonuç 7.9

Eğer Ω sınırlı ve $kp < n$ ise o zaman $q < \dfrac{np}{n-kp}$ için $W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesi $L_p(\Omega)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

İspat

$W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesinin $W^{1,\frac{np}{n-(k-1)p}}(\Omega)$ kümesinde sürekli olarak gömülü olduğu gösterilmişti. Teorem 7.8 den $q < \dfrac{np}{n-kp}$ için $W^{k,p}(\Omega)$ kümesi $L_p(\Omega)$ kümesinde kompakt olarak gömülür.

Sonuç 7.10

Yukarıdaki kompaktlık sonucu Ω sınırlı bir C^1 bölgesi (yada içinde şeklindeki sınırlı genişleme operatörü olan başka bir bölge) olması durumunda $W_0^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı içinde geçerlidir.

İspat

Sonuç 7.5 in ispatına benzer yoldan gösterilebilir.

Not 7.11

Önceki sonuçlarda $kp = n$ olması durumu gösterilmedi. Ama Ω sınırlı olmak üzere $\forall r < p$ için $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı $W^{k,r}(\Omega)$ uzayında sürekli gömüldüğü için Sonuç 7.10 dan $\forall q < \infty$ için $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında kompakt olarak gömülür. Aynı durum $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı içinde geçerlidir.

Teorem 7.12

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir C^1 bölgesi olsun. Eğer $p > n,\ 1 \le q < \infty,\ 0 \le r < k$ ve $k - r - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} \ge 0$ oluyorsa bu durumda

$$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{r,q}(\Omega),$$

ifadesi yazılabilir ve eğer $k - r - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} > 0$ şeklinde ise, bu durumda söz konusu gömülme kompakttır.

İspat

$s = k - r$ olsun. $1 - \dfrac{n}{q_i} + \dfrac{n}{q_{j+1}} \ge 0$ ve $q_j \ge 1$, $q_0 = p$ ve $q_s = q$ olacak şekilde $q_0, q_1, ...q_s$ sayılar alalım. $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} \ge 0$ olduğu için bu şekildeki sayıların varlığı kesindir. Eğer $k - r - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} = 0$ ise o zaman $j \in \{0, 1, ..., s\}$ için $1 - \dfrac{n}{q_i} + \dfrac{n}{q_{j+1}} = 0$ eşitliğinden dolayı $q_0, q_1, ...q_s$ sayıların tekliği söz konusudur. Eğer $\theta = s - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} > 0$ oluyorsa $q_0, q_1, ...q_s$ sayıları yine vardır ancak teklik yoktur. Önceki teoremlerden hareketle $W^{1,q_j}(\Omega) \mapsto L_{q_{j+1}}(\Omega)$ olduğu görülebilir. Buradan $W^{k-j,q_j}(\Omega) \mapsto W^{k-j-1,q_{j+1}}(\Omega)$ olur. Gerçekten $u \in W^{k-j,q_j}(\Omega)$ olur ise, bu durumda; $|\alpha| \le k - j - 1$ için $D^\alpha u \in W^{1,q_j}(\Omega)$ olmaktadır. Yine $|\alpha| \le k - j - 1$ için $W^{1,q_j}(\Omega) \mapsto L_{q_{j+1}}(\Omega)$ olduğundan $D^\alpha u$ zayıf türevi $L_{q_{j+1}}(\Omega)$ uzayının bir elemanıdır. Aynı zamanda $|\alpha| \le k - j - 1$ şeklindeki $\forall \alpha$ için

$$\left\|D^{\alpha}u\right\|_{L_{q_{j+1}}(\Omega)} \leq C_1 \left\|D^{\alpha}u\right\|_{W^{1,q_j}(\Omega)} \leq C_2 \left\|D^{\alpha}u\right\|_{W^{k-j,q_j}(\Omega)}$$

olmaktadır. Eğer $u \in W^{k-j-1,q_{j+1}}\left(\Omega\right)$ ise, bu durumda;

$$\left\|u\right\|_{W^{k-j-1,q_{j+1}}(\Omega)} \leq C\left\|u\right\|_{W^{k-j,q_j}(\Omega)},$$

İfadesi yazılır. Buradan sürekli J_i gömülme operatörü

$$J_i : W^{k-j,q_j}\left(\Omega\right) \rightarrow W^{k-j-1,q_{j+1}}\left(\Omega\right) \quad , j = 0,1,2,...,s-1$$

şeklinde gösterilir. Buradan

$$W^{k-j,q_j}\left(\Omega\right) = W^{k,q_0}\left(\Omega\right) \xrightarrow{J_0} W^{k-1,q_1}\left(\Omega\right) \xrightarrow{J_1} W^{k-2,q_2}\left(\Omega\right) \xrightarrow{J_2} ... \xrightarrow{J_{s-1}} W^{s-1,q_s}\left(\Omega\right) = W^{r,q}\left(\Omega\right)$$

olup, $J = J_{s-1}...J_1J_0$ formunda gösterilen bir

$$J : W^{k,q_0}\left(\Omega\right) \rightarrow W^{r,q}\left(\Omega\right)$$

operatörü vardır ve üstelik bu operatör süreklidir. Eğer $\theta > 0$ ise J_i ler den en az biri kompakttır (en az j indeksi için $1 - \frac{n}{q_i} + \frac{n}{q_{j+1}} > 0$ şeklindedir). Bu yüzden J nin kendisi de kompakttır.

8. BÖLÜM

İZ TEOREMİ

Sobolev uzayları Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin arandığı doğal uzaylardır. Fakat bu tür denklemler genelde sınır koşulları ile birlikte verilmektedir. Bu yüzden Sobolev uzaylarından seçilmiş bir u fonksiyonunun verilen bir Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırına kısıtlanmasından ne anlaşıldığı ve yine aynı fonksiyonun söz konusu Ω bölgesinin sınırında nasıl davrandığı önemlidir. Ω bölgesinde tanımlı bir u fonksiyonun $\partial\Omega$ kısıtlamasına o fonksiyonun ***İzi*** denir. İz teoremin temel amacı söz konusu kısıtlamaya bir anlam kazandırmaktır.

Eğer u fonksiyonu $L_p(\Omega)$ uzayında tanımlı ise, bu durumda u fonksiyonunun izi yeteri kadar iyi-tanımlı olmaz; çünkü $\partial\Omega$ sınırının ölçümü sıfırdır. Fakat $kp > n$ olmak üzere Ω kümesinin $\mathbb{R}^n$ öklit uzayında bir C^1 sınıfı olması durumunda ise u fonksiyonun iyi-tanımlı sınırlı bir ize sahip olması gerekir. Çünki $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlar $\overline{\Omega}$ bölgesinde süreklidirler. O yüzden bu bölümde asıl kritik koşul olan $kp < n$ durumu üzerinde durulmaktadır.

Bu kısımda $\mathbb{R}^n$ öklit uzayındaki bir x vektörü $x = (x', x_n)$ olarak tanımlanmakta ve $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ olduğu kabul edilmektedir.

Yardımcı Teorem 8.1

Eğer $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ ise, bu durumda; $\forall \zeta \in \mathbb{R}$ için $v(x) = u(x', x_n)$ fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^{n-1})$ kümesinin bir elemanıdır ve

$$\|v\|_{L_1(\mathbb{R}^{n-1})} \le \|v\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|D_n u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

eşitsizliği söz konusudur.

Not 8.2

Öncelikle eşdeğer sınıflarda tanımlı fonksiyonların izlerinden bahsedilirken dikkatli olunmalıdır. Ayrıca $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonları için iz fonksiyonun varlığı kesindir. $u \in W^{1,1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonları için ise $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ sınıfında söz konusu u fonksiyonuna yakınsayan bir fonksiyon dizisi vardır. Yardımcı Teoremde 8.1 de verilen norm eşitsizliği söz konusu uzayda tanımlı fonksiyonların izlerinden oluşan dizilerin $L_1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ kümesinde yakınsak olduklarını iddia etmektedir. Yani u fonksiyonu $L_1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ kümesinde bir ize sahiptir.

İspat

$u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ olmak üzere $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu için $\zeta = 0$ durumunu göstermek yeterlidir. İntegraller için ortalama değer teoreminden $\sigma \in [0,1]$ olmak üzere

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u\left(x', x_n\right)\right| dx' dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u\left(x', \sigma\right)\right| dx',$$

olduğu görülür. Fakat

$$\begin{aligned} \left|u\left(x',0\right)\right| &= \left|u\left(x',\sigma\right) - \int_0^\sigma D_n u\left(x',t\right) dt\right| \\ &\leq \left|u\left(x',\sigma\right)\right| - \int_0^\sigma \left|D_n u\left(x',t\right)\right| dt, \end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathbb{R}^{n-1}$ üzerinden integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{L_1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)} &\le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u\left(x',\sigma\right)\right| dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^1 \left|u\left(x',\sigma\right)\right| dt dx' \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u\left(x',\sigma\right)\right| dx' dt + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^1 \left|D_n u\left(x',\sigma\right)\right| dt dx',
\end{aligned}
$$

olur.

Yardımcı Teorem 8.3

Eğer $p<n$ ve $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise bu durumda; $\forall \zeta \in \mathbb{R}$ için

$$
r = \frac{(n-1)p}{n-p} = 1 + \frac{n(p-1)}{n-p},
$$

olmak üzere $v(x') = u(x',\zeta)$ fonksiyonu $L_r\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ kümesinin bir elemanıdır ve

$$
\|v\|_{L_r\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)} \le C\|v\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)},
$$

olacak şekilde yalnızca n ve p ye bağlı bir C sabiti vardır.

İspat

$p=1$ durumu Yardımcı Teorem 8.1 de gösterilmişti. $p>1$ için $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ olması durumunda ise $w = |u|^r \in W^{1,1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve

$$
\|w\|_{L_1\left(\mathbb{R}^n\right)} \le sabit.\|u\|_{L_p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)}, \tag{8.1}
$$

$$
\|D_i w\|_{L_1\left(\mathbb{R}^n\right)} \le sabit.\|Du\|_{L_p\left(\mathbb{R}^r\right)}, \tag{8.2}
$$

oldukları gösterilirse ispat biter.

Bu sonucun $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu için gösterilmesi yeterlidir. $q = \dfrac{p}{p-1}$ olsun. O zaman $(r-1)q = \dfrac{np}{(n-p)}$ olmak üzere Teorem 6.5 deki gömülme teoreminden

$$\left\| |u|^{r-1} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^{q} \le sabit.\|Du\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{np}{n-p}},$$

eşitsizliği bulunur. Bu ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} &= \int |u|^r \, dx \\
&= \int |u|^{r-1} |u| \, dx \\
&\le \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \left\| |u|^{r-1} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le sabit.\|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

şeklindeki (8.1) eşitsizliği elde edilir. $D_i w = \pm |u|^{r-1} D_i u$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\|D_i u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} &= r \left\| |u|^{r-1} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \|D_i u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\
&\le sabit.\|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{r},
\end{aligned}$$

şeklindeki (8.2) eşitsizliği elde edilir. Son olarak Yardımcı teorem 8.1 den hareketle

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L_r(\mathbb{R}^{n-1})} &\le sabit.\left(\|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{r-1} \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{r} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\le sabit.\left(\|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{r}} \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{r}} + \|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&\le sabit.\left(\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right),
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yardımcı Teorem 8.4

$kp < n$ ve $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ise $r = \dfrac{(n-1)p}{n-kp}$ olmak üzere $\forall \zeta \in \mathbb{R}$ için $v(x') = u(x', \zeta)$ fonksiyonu $L_r(\mathbb{R}^{n-1})$ kümesinin bir elemanıdır ve

$$\|v\|_{L_r(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)},$$

olacak şekilde yalnızca n,k ve p ye bağlı C sabiti vardır.

İspat

Teorem 6.5 deki gömülme $u \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonun birinci türevine uygulanırsa $u \in W^{k,\frac{(n-1)p}{n-kp}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu elde edilir ve Yardımcı teorem 3.3 e uygulanarak ispat yapılır.

Not 8.6 (Parametrelendirilmiş Yüzey İntegralleri)

Eğer $X(u) = \left(x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2), x_3(u_1,u_2)\right)$ ifadesi $\mathbb{R}^3$ de ki bir S düzgün yüzeyinin bir parametrizasyonu olsun. Ξ sembolü X uzayında bir bölgeyi göstermek üzere

$$K(u) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(x_1, x_2, K, \hat{x}_k, K, x_n\right)}{\partial\left(u_1, u_2, K, u_n\right)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

için

$$\int_S f(x)\,dS = \iint\limits_{\Xi} f o X(u) K(u)\, du_1 du_2,$$

bulunur.

Burada $\hat{x}_k$ gösterimi x_k terimlerinin görülmediği anlamına gelir.

Teorem 8.7

Ω sınırlı bir C^1 sınıfı olsun. $kp < n$ ve $r = \dfrac{(n-1)p}{n-kp}$ olmak üzere $u \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise u fonksiyonunun $\partial\Omega$ ya v kısıtlaması $L_r\left(\partial\Omega\right)$ kümesindedir ve

$$\|v\|_{L_r(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

olacak şekilde yalnızca n, k ve p ye bağlı C sabiti vardır.

Not 8.8

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki fonksiyonların Ω ya kısıtlaması $W^{k,p}(\Omega)$ uzayında yoğundur. Çünkü $E: W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ genişleme operatörü vardır.

İspat

$E: W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ genişleme operatörü olsun. $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonu için bir $Eu \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ifadesi vardır. Buradan $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının $\partial\Omega$ sınırındaki iz fonksiyonları üzerinde çalışılabilir.

Ω_i ve ψ_i birer C^k sınıfı olsunlar. $\partial\Omega$ kompakt olduğu için $1 \le j \le N$ olmak üzere $\partial\Omega$ sınırını örten sonlu sayıda ψ_i bölgesi vardır. $1 \le j \le N$ olmak üzere θ, $\partial\Omega$ için bir birimin parçalanışı olsun. Eğer $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ise $(\theta_j u) o \psi_j^{-1} \in C_0^k(B)$ olur ve aynı zamanda $(\theta_j u) o \psi_j^{-1}$ fonksiyonu $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ kümesinin bir elemanı olacak şekilde sıfırla genişletilebilir. Yardımcı teorem 8.4 den hareketle $(\theta_j u) o \psi_j^{-1}$ fonksiyonunun w_j izi için $P: y_n = 0$ hiperdüzlemi üzerinde

$$\|w_j\|_{L_p(p)} \le C \left\|(\theta_j u) o \psi_j^{-1}\right\|_{W^{k,p}(B)} \le C_j \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)},$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde yalnızca n, p ve k ya bağlı bir C sabiti bulunabilir. Burada C_j sabitleri u fonksiyonundan bağımsızdırlar.

$$X_j(y) = \psi_j^{-1}(y_1, K, y_{n-1}, 0)$$

ifadesi $S_j = (\partial\Omega) \cap \Omega_j$ hiperyüzeyinin parametrizasyonudur. $R_j = maks(K_j)$ olmak üzere

$$\int_{S_j} |v_j(x)|^r dS = \int_{P\cap B} |w_j(x)|^r K_j(y)dy$$
$$\leq R_j \int_{P\cap B} |w_j(x)|^r dy,$$

parametrizasyonu kullanılarak $\theta_j u$ fonksiyonunun $v_j = w_j o\psi_j$ izi $S_j = (\partial\Omega) \cap \Omega_j$ hiperyüzeyi üzerinden hesaplanabilir. Bundan önceki eşitsizlik ile karşılaştırıldığında

$$\|v_j\|_{L_r(S_j)} \leq M_j \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)},$$

olacak şekilde u fonksiyonundan bağımsız M_j sabitlerinin var olduğu görülür.

$v = \sum v_j$ olduğundan v fonksiyonu içinde benzer eşitsizlik gösterilebilir. Son olarak bulunan sonucun keyfi bir $u \in W^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonu içinde sağlandığı görülür.

Problem 8.9

Yardımcı Teorem 8.1 de eğer $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alınır ise, bu durumda; $\forall \zeta \in \mathbb{R}$ için $v(x') = u(x', \zeta)$ fonksiyonu $L_r(\mathbb{R}^{n-1})$ kümesinin bir elemanıdır ve

$$\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

olacak şekilde yalnızca n ve p ye bağlı bir K sabiti vardır.

Problem 8.10

Problem 8.9 ve Yardımcı Teorem 8.3 den hareketle $p \leq q \leq r$ olacak şekildeki her q fonksiyonu için Yardımcı Teorem 8.3 deki v fonksiyonun $L_q(\mathbb{R}^{n-1})$ uzayının bir elemanı olduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] ADAMS R.A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, **(1975)**.

[2] RUDIN W. *Functional Analysis*, MacGraw-Hill, **(1973)**.

[3] ZIEMER W.P. *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, **(1989)**.

[4] FRIEDMAN A. *Partial Differential Equations*, Krieger, **(1983)**.

[5] GILBARG D.; TRUDINGER, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, **(1983)**.

[6] MORREY, C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer–Verlag, **(1966)**.

[7] KUFNER, A.; JOHN, O. and FURCIK, S. *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden **(1977)**.

[8] JONSSON, A.; WALLIN H. *Function Spaces on Subsets of* $\mathbb{R}^n$, Harwood Acad. Publ., **(1984)**.

[9] HAJLASZ, P.; KOSKELA, P. *Sobolev Meets Poincar´e*, C. R. Acad. Sci. Paris (**1995**).

[10] FRANCHI, B.; SERAPIONI, R.: *Pointwise Estimates For A Class Of Strongly Degenerate Elliptic Operators: A Geometric Approach*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (**1987**), 527–568.

[11] FRANCHI, B.; GUTI´ERREZ, C. E.; WHEEDEN, R. L. *Weighted Sobolev–Poincar´E Inequalities For Grushin Type Operators*, Comm. Partial Differential Equations (**1994**), 523–604.

[12] FUGLEDE, B. *Extremal Length and Functional Completion*, Acta Math. 98 (**1957**), 171–219.

[13] GAGLIARDO, E. *Proprieta Di Alcune Classi Di Funzioni In Piu Variabili*, Ricerche Mat. 7 (**1958**), 102–137.

[14] WHITNEY, H.: *On Totally Differentiable and Smooth Functions*, Pac. Journ. Math. 1 (**1951**), 143–159.

[15] Univ. of California Publ. in Math., new ser. 1 (**1943**), 1–130.

[16] MICHAEL, J. and ZIEMER, W. *A Lusin Type Approximation Of Sobolev Functions By Smooth Functions*, Contemp. Math. 42 (**1985**), 135–167.

[17] LEWIS, J.L. *On Very Weak Solutions Of Certain Elliptic Systems,* Comm. Partial Diff. Equations 18 (**1993**), 1515–1537.

[18] KIGAMI, J. and LAPIDUS, M. L. *Weyl's Problem For The Spectral Distribution Of Laplacian On P.C.F. Self-Similar Fractals*, Comm. Math. Phys. 158 (**1993**), 93–125.

[19] TAYLOR, S. *An Introductıon to Sobolev Spaces*. Montana State University.

[20] ATKİNSON, K.E.; HAN, W. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Springer (**2007**).

SİMGELER

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}^n$: N- Boyutlu Öklit Uzayı

Ω : N- Boyutlu Öklit Uzayında Bir Bölge

$\partial\Omega$: Ω Bölgesinin Sınırı

∇u : u Vektörünün Diverjansı

$D^{\alpha}u$: u Vektörel Fonksiyonun α Mertebeden Türevi

suppu : u Vektörel Fonksiyonun Desteği

$J_{\varepsilon}u$: u Vektörel Fonksiyonun Molifieri

$L_p(\Omega)$: Lebesgue Ölçülebilir ve Lebesgue İntegrali Sonlu Fonksiyonlar Uzayı.

$C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$: Hölder Uzayı.

$W^{k,p}(\Omega)$: Sobolev Uzayı.

$W^{k,p}_{loc}(\Omega)$: Yerel Sobolev Uzayı.

$C_0^{\infty}(\Omega)$: Kompakt Destekli ve Sürekli Türevlenebilir Fonksiyon Uzayı.

$dist\{A,B\}$: A ve B Kümeleri Arasındaki Uzaklık.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Faruk SURMUŞ

Doğum Yeri : Silvan

Doğum Tarihi : 01.04.1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Şeyhmus Sultan TATLICI lisesi

Lisans : Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Yüksek Lisans : Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: T.C. BAŞBAKANLIK GÜMRÜK MÜSTEŞARLIĞI (2009/…)

Yayınları (SCI ve diğer):