T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİVERJANS OLMAYAN FORMDA ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN HARNACK EŞİTSİZLİĞİ

Ali AKGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

EYLÜL -2010

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİVERJANS OLMAYAN FORMDA ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN HARNACK EŞİTSİZLİĞİ

Ali AKGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

1. **Danışman: Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ**
2. **Danışman: Prof. Dr. Farman MAMMADOV**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

EYLÜL-2010

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ali AKGÜL tarafından yapılan "Diverjans Olmayan Formda Eliptik Denklemler İçin Harnack Eşitsizliği" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. A.Kadir ERTAŞ

Üye : Prof. Dr. Ali YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 15.09.2010

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2010

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanlarım Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ ve Prof. Dr. Farman MAMMADOV' a; ayrıca, Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV'e, Yr.Doç.Dr. Adem EROĞLU'na, arkadaşım Arş. Gör. M. Özgür KELEŞ'e ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Son zamanlarda matematik, geometri ve fizik alanlarında, ayrıca sıvı katı madde mekaniğinin bazı problemlerinde mevcut düşünce sistemleri yetersiz kalmıştır. Dolayısıyla yeni düşünce sistemleri ortaya çıkmıştır. Bu düşünce sistemleri fizik parametrelerini ani olarak 1000 kata kadar değiştirebilmektedir. Önceki yaklaşımlarda bu sistemleri çözmenin ve incelemenin imkânsız olduğu düşünülmekteydi ancak bugünlerde böyle sistemlere merak artmıştır. Fakat bu sistemler tam bir teori haline dönüşememiştir. Bu açıdan, literatürde Harnack Eşitsizliği olarak geçen temel bir teorinin bilgileri ve yöntemleri büyük önem taşımaktadır. İlk olarak Laplace denkleminin bir özelliği gibi dersliklere giren bu eşitsizlik, fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı, bir fonksiyonun daha geniş kümeye devam ettirilebilmesi gibi uygulamalarda yer bulmuş olsa da, bugün adı gecen eşitsizlik kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinin ana hattını teşkil etmektedir.

Günümüzde Harnack Eşitsizliği üzerinde çalışmalar devam etmektedir. Lineer denklemler için yeni sınıf katsayıları göz önünde bulundurulduğunda bu alanın daha çözülmemiş pek çok probleminin olduğu görülmektedir. Lineer olmayan denklemlere gelince klasik olmayan büyüme koşullu denklemler hala göz önünde bulundurulamamaktadır. Eliptik ve parabolik denklemler dışında Harnack Eşitsizliği ile ilgili araştırmaların az olmasına dayanarak bu alanda daha çok çalışma yapılabileceğini söyleyebiliriz. Bu tez Harnack Eşitsizliğine genel bir bakış gibi değerlendirilebilir. Fakat bununla beraber diverjans olmayan formdaki denklemler hakkında tam teoriyi anlatmada başarılı olabildiğimizi düşünmekteyiz. Ayrıca, tezin son bölümünde bu alanda yapılan son çalışmaları kapsayacak şekilde birkaç makaleyi inceleyebilmiş durumdayız.

ÖZET

Bu tez Kısmi Diferansiyel Denklemler teorisinde önemli bir yer tutan, Diverjans olmayan formda Eliptik Denklemler için Harnack Eşitsizliği ile ilgilidir. Tez 4 bölümden ve referans listesinden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Harnack Eşitsizliği'nin gelişim basamakları ve kullanım alanları ele alınmıştır. İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılan temel tanımlar ve ön bilgiler verilmiş ve sınırlı bir bölgede Dirichlet Problemi'nin çözümünün tekliği üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde harmonik fonksiyonlar için Harnack Eşitsizliği incelenip, bilinen yöntemler uygulanarak, Harnack Eşitsizliği'nin ispatı yapılmıştır. Son bölümde konu ile ilgili olan, Dirichlet Probleminin çözümünün tekliğini göstermede çok önemli bir yer tutan, zayıf ve güçlü maksimum prensipleri incelenmiştir. Güçlü maksimum prensibinin ispatı için Normal Türev Lemması ve Aleksandrov tipli maksimum prensibi tartışılarak, Harnack Eşitsizliği'ni anlamamızda çok yararlı olan "s-kapasite" ve "Artış Lemması" konularına değinilmiştir. Ayrıca, Artış Lemması'nın bu alandaki önemi anlatılmaya çalışılmış ve lemmanın diverjans olmayan formdaki denklemler için genel formunun, Krylov ve Safanov tarafından önerilen ispatı incelenmiştir. Tezin son kısmı Harnack Eşitsizliği ile ilgili bazı güncel makalelere ait ana teoremlerden oluşmaktadır.

SUMMARY

This thesis deals with Harnack Inequality for Non-divergence Elliptic Type Partial Differential Equations (PDEs) which takes an important part in the theory of PDEs. The thesis consists of four chapters and the reference list.

In the first chapter, the progress and the usage area of Harnack Inequality have been discussed. In the second chapter, the fundamental definition used in other chapters and related information have been given and the uniqueness solution of Dirichlet Problem in a bounded domain has been viewed. In the third chapter, by examining the Harnack Inequality for harmonic functions and applying known methods, Harnack Inequality has been proved. In the last chapter, weak and strong maximum principles which take an important place to show the eniqueness solution of Dirichlet problem, related to subject, have been examined. Disputing the Normal Derivative Lemma for the proof of strong maximum problem and Aleksandrov type maximum principle, “s-capacity”, “Growth lemma” which are very useful to understand Harnack Inequality have been discussed. Furthermore, it has been tried to explain the importance of the growth lemma for this area and the proof of the general form of the growth lemma for non-divergence PDEs which was suggested by Krylov and Safanov has been prospected. The last part of the thesis consists of some main theorems of current articles.

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde Maksimum prensibi ile Harnack eşitsizliklerinin, Matematik ve Fizik uygulamalarında hangi alanlarda kullanıldığı üzerinde duracağız.

Maksimum prensibini kullanarak sınırlı bir bölgede Dirichlet probleminin çözümünün tekliğini elde edebiliriz.

Harnack eşitsizlikleri lineer olmayan, yarı-lineer ve lineer denklemlerin geniş bir bölümünde çözümlerin iç ve sınır düzgünlüğünü çalışmak için düzenli olarak çalışılmış eşitsizliklerdir. Bu eşitsizlikler eliptik ve parabolik diferansiyel denklemlerin teorisinde, bu denklemlerin uygulamalarında önemli rol oynamakta; ilgili çözümlerin sınır davranışlarını, dejenere olan eliptik ve parabolik denklemlerin tekil çözümlerini incelemede temel teşkil etmektedir. Ayrıca Harnack eşitsizlikleri Laplace operatörü için Dirichlet probleminin çözümünün Perron metodunda da gereklidir. Bugün bu alan Literatür'de engel problemi, akışkanlık çözümleri diye geçmektedir. Böylece zengin bir gelenekten gelen Harnack eşitsizlikleri analizde ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerde modern gelişmelerin önemli bir aracı olmuştur.

Harnack eşitsizlikleri yarı lineer, tekil ve dejenere olmuş parabolik denklemlerin genel bir sınıfı için de kurulmuştur. İlk parabolik Harnack tipi eşitsizlik bağımsız bir şekilde Hadamard ve Pini tarafından ele alınmıştır. Daha sonra Moser[13], aynı parabolik Harnack eşitsizliğini diverjans formda lineer parabolik denklemlerin negatif olmayan zayıf çözümleri için ele almıştır. Harnack eşitsizliği yine selfadjoint bir denklem için keyfi ölçülebilir katsayılarla Moser[13] tarafından ispat edilmiştir. Diverjans olmayan formda Harnack eşitsizliğinin daha genel formu ise J. Serrin[13] tarafından ispat edilmiştir.

Bazı geometrik akışlar için Harnack eşitsizliğine LYH (Li- Yau- Hamilton) eşitsizliği de denilmektedir Çünkü bu eşitsizlik ilkin sayısal ısı akışı için Li ve Yau[21] tarafından belirlenmiştir. Daha sonra Hamilton sayısal ısı akışında Matris Harnack eşitsizliğini elde etmiştir[21]. Hamilton aynı zamanda tüm boyutlar için Ricci akışında ve ortalama eğrilik akışında da yüzey üzerinde böyle bir eşitsizliğe sahip olmuştur.[21]. Chow buna benzer bir eşitsizliği Gauss eğrilik akışı ve Yamabe akışı için elde etmiştir.

Son zamanlarda difüzyon yarı gruplarında serbest boyutlu Harnack eşitsizliği çok önem taşımaya başlamıştır. Riemannian yüzeyleri üzerinde difüzyon fonksiyonları için bu eşitsizlik ilk olarak Wang[14] tarafından sunulmuştur. Daha sonra Harnack eşitsizliğinin sonsuz boyutlusu bulunmuştur. Son zamanlarda ise serbest boyutlu Harnack eşitsizliği, stokastik gözenekli ortam ile stokastik hız difüzyon denklemleri için kurulmuştur.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı notasyonlar ve tanımlar verilecektir.

Notasyonlar.

R^n , n boyutlu Euclid uzayı

$Q_R^{x^0}$, R^n de R yarıçaplı x^0 merkezli bir açık yuvar

$S_R^{x^0}$, küre yüzeyi ($\left|x-x^0\right|=R$)

$\Omega_{R_1,R_2}^{x^0}$, $R_1 \le \left|x-x^0\right| < R_2$ eşitsizliğiyle tanımlı küresel katman

O, orijin

Q_R^0, orijin merkezli R yarıçaplı bir yuvar

$\overline{E}$, E kümesinin kapanışı

∂E, E kümesinin sınırı

$L^p(\Omega)$, Ω bölgesinde p dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı

$L_{p,loc}(\Omega)$, $\overline{A} \subset \Omega$ olan A bölgesinde L^p den olan fonksiyonlar uzayı

$C(\Omega)$, Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı

$C^2(\Omega)$, Ω bölgesinde iki kez sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar uzayı.

$B_R(x_0)$, x_0 merkezli ve R yarıçaplı yuvar.

2.1. Tanımlar

Tanım 2.1.1. $u \in L_{1,loc}\left(\Omega\right)$, α çoklu indisi için $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ alındığında

$$\int_\Omega \varphi\, v\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. zayıf türevi denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve

$$v = D^{\alpha} u$$

şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^{\alpha} u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, bu durumda $D^{\alpha} u$, u fonksiyonunun zayıf kısmi türevi olur. Açıkça $D^{\alpha} u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.1.2. Ω , R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) :\ D^{\alpha} u \in L_p(\Omega),\ 0 \leq \alpha \leq m \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev* uzayı denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^{p} \right)^{1/p},\ 1 \leq \text{p} < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L_{\infty}(\Omega)},\ \text{p} = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Açık olarak $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. [1]

Tanım 2.1.3. $W^{m,p}(\Omega)$ sobolev uzayında özel olarak p=2 olarak alınırsa $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ olup, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ şeklinde gösterilir. $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L_2(\Omega)}^{2} \right)^{1/2}$$

şeklindedir. [1]

Tanım 2.1.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$\left(u,v\right)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \left(D^\alpha u, D^\alpha v\right)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Burada

$$\left(u,v\right) = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

Ω sınırlı bir bölge olmak üzere, bütün $u \in H_0^1(\Omega)$ için, $C(\Omega)$ bir sabit olarak alındığında

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğine Sobolev eşitsizliği adı verilir.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$\left(u,v\right)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\nabla u\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

şeklinde gösterilir. [1]

Tanım 2.1.5. Eğer Ω bölgesinde $\Delta u = 0$ ise o zaman $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonu bu bölgede harmoniktir. [9]

2.2. Ortalama Değer Özelliği

Ω bölgesinin R^n de bağlantılı bölge olduğunu varsayalım ve $u \in C(\Omega)$ olarak seçelim.

(i) Eğer herhangi $B_r(x) \subset \Omega$ için

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y$$

ise o zaman u fonksiyonu birinci *ortalama değer özelliğini* sağlar.

(ii) Eğer herhangi $B_r(x)\subset\Omega$ için, ω_n, R^n de birim kürenin yüzey alanını göstermek üzere

$$u(x)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int\limits_{B_r(x)} u(y)dy$$

ise o zaman u fonksiyonu ikinci *ortalama değer* özelliğini sağlar. Bu iki tanım birbirine eşdeğerdir. Gerçekten (i) eşitliğini

$$u(x)r^{n-1}=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y$$

şeklinde yazar her iki tarafı integre edersek (ii) eşitliğini elde ederiz.

Eğer (ii) eşitliğini

$$u(x)\ r^n=\frac{n}{\omega_n}\int\limits_{B_r(x)} u(y)dy$$

şeklinde yazıp her iki tarafın r ye göre kısmi türevini alırsak bu kez de (i) eşitliğini elde ederiz.

Önerme 2.2.1. *Eğer $u\in C(\overline{\Omega})$ fonksiyonu, Ω bölgesinde ortalama değer özelliğini sağlarsa o zaman u fonksiyonu sabit olmadığı sürece maksimum ve minimum değerini yalnızca $\partial\Omega$ üzerinde alır.*

İspat. Yalnızca maksimum için ispatlayalım.

$$\sum=\left\{x\in\Omega;\ \ u(x)=M=\max_{\overline{\Omega}} u\right\}\subset\Omega$$

olarak alalım. Açıktır ki $\sum$ kapalıdır. Gerçekten $u(x_n)=M$ olarak alındığında $x_n\to x_0$ gittiğinde $u(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $u(x_0)=M$ olur. Yani $\sum$ kapalıdır. Şimdi de $\sum$ nın açık olduğunu gösterelim. Herhangi $x_0\in\sum$ *için* $\overline{B}_r(x_0)\subset\Omega$, $(r>0)$ yuvarını ele alalım. Ortalama değer özelliğinden

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy \le M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} dy = M$$

yazabiliriz. Bu da, $B_r(x_o)$ yuvarında $u = M$ olduğunu gösterir. Bu nedenle $\sum$, Ω da hem açık hem de kapalıdır. Bu yüzden ya $\sum = \varnothing$ ya da $\sum = \Omega$ dır.

Teorem 2.2.1. *$u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonu Ω bölgesinde harmonik olsun. Bu halde u fonksiyonu Ω bölgesinde ortalama değer özelliğini sağlar.*

İspat. Herhangi $B_r(x) \subset \Omega$ yuvarını ele alalım. $\rho \in (0, r)$ için $B_\rho(x)$ yuvarında diverjans teoremini uygulayalım. Bu durumda

$$\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial v} dS = \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x + \rho w)dS_w = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} u(x + \rho w)dS_w \qquad (2.1)$$

elde ederiz. Dolayısıyla u harmonik fonksiyonu ve herhangi $\rho \in (0, r)$ için

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} u(x + \rho w)dS_w = 0$$

eşitliğini yazabiliriz. Bunu 0 dan r ye kadar integre edersek

$$\int_{|w|=1} u(x + rw)dS_w = \int_{|w|=1} u(x)dS_w = u(x)\omega_n$$

eşitliğini ya da

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw)dS_w = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y$$

eşitliğini elde ederiz.

Teorem 2.2.2. *Eğer $u \in C(\Omega)$ fonksiyonu Ω bölgesinde Ortalama Değer Özelliğine sahipse o zaman u fonksiyonu Ω bölgesinde düzgün ve harmonik olur.*

İspat. $\int_{B_1(0)} \varphi(x)\, dx = 1$ olmak üzere $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ ve $\varphi(x) = \psi(|x|)$ olarak alalım. Bu durumda

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)dr = 1$$

yazılır ve $\varepsilon > o$ için

$$\varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{z}{\varepsilon})$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi herhangi $x \in \Omega$ için $\varepsilon < dist(x, \partial\Omega)$ sayısını göz önünde bulunduralım. Bu halde ortalama değer özelliğiyle beraber

$$\int_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(y-x)dy = \int u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|y|<\varepsilon} u(x+y)\varphi(\frac{y}{\varepsilon})dy$$

$$= \int_{|y|<1} u(x+y)\varphi(y)dy = \int_0^1 r^{n-1}dr \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rw)\varphi(r\omega)dS_w$$

$$= \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)dS_w = u(x)\omega_n \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr = u(x)$$

çıkar ki, buradan da herhangi $x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega;\ d(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ için $u(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x)$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla u düzgündür. Üstelik teorem 2.2.1 de kullanılan (2.1) bağıntısı ve ortalama değer özelliğinden herhangi $B_r(x) \subset \Omega$ için

$$\int_{B_r(x)} \Delta u = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}(\omega_n u(x)) = 0$$

yazılabilir. Bu da Ω bölgesinde $\Delta u = 0$ olduğunu gösterir.

2.3. Dirichlet Probleminin Çözümünün Tekliği

Uyarı 2.3.1. Harmonik fonksiyonlar düzgündür ve ortalama değer özelliğini sağlar. Bu nedenle harmonik fonksiyonlar maksimum prensibine uyarlar. Bunun sonucunda sınırlı bir bölgede Dirichlet probleminin çözümünün tekliğine ulaşırız. Sınırlı bir bölgede Dirichlet probleminin çözümünün tekliğini aşağıdaki örnekle gösterebiliriz. Sınırlı bir D bölgesini ve bu bölgede

$$\Delta u = 0 \text{ ve } u\big|_{\partial D} = \varphi$$

olacak şekilde bir u fonksiyonunu göz önüne alalım ve $\omega = u_1 - u_2$ olacak şekilde ω fonksiyonunu ele alalım. $\Delta u_1 = 0$ ve $\Delta u_2 = 0$ olduğundan

$$\Delta\omega = \Delta\left(u_1 - u_2\right) = 0$$

olur. Ayrıca

$$\omega\big|_{\partial D} = \varphi - \varphi = 0$$

olup

$$\int_D \omega \, \Delta\omega \, dx = 0$$

olduğu görülür. Green formülünden

$$\int_D \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2}\right) dx = \int_{\partial D} \omega \sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i} \cos(\vec{N}, x_i) ds - \sum_{i=1}^{n} \int_D \omega_{x_i}^2 \; dx = 0 \tag{2.2}$$

çıkar ki buradan da

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \omega_{x_i}^2 \; dx = 0 \tag{2.3}$$

elde edilir. Sobolev eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_D \omega^2 \; dx \le C(D) \sum_{i=1}^{n} \int_D \omega_{x_i}^2 \; dx$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Sonuç olarak

$$\int_D \omega^2 \; dx = 0$$

elde edilir. Böylece hemen hemen her yerde $\omega = 0$ elde ederiz. Buradan limite geçerek ω fonksiyonunun her yerde sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Böylece sınırlı bir bölgede Dirichlet probleminin çözümünün tek olduğunu ispatlamış olduk. Genelde teklik sınırsız bölgelerde gerçekleşmez. Sınırsız Ω bölgesinde

$$\begin{cases} \Delta u=0 \ ; & \Omega \ \text{bölgesinde} \\ u=0 \ ; & \partial\Omega \ \text{sınırı üzerinde} \end{cases}$$

Dirichlet problemini göz önünde bulunduralım.

İlk olarak

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \ ; \ |x| > 1 \right\}$$

durumunu göz önünde bulunduralım $n = 2$ için

$$u(x) = \log|x|$$

bir çözümdür. $|x| \to \infty$ iken $u \to \infty$ olur. $n \geq 3$ için

$$u(x) = |x|^{2-n} - 1$$

bir çözümdür. Limit durumunda $|x| \to \infty$ iken $u \to -1$ olur. Bu nedenle u sınırlıdır. Sonra

$$\Omega = \left\{ x \in R^n ; \ x_n > 0 \right\}$$

üst yarım uzayını göz önünde bulunduralım. O zaman

$$u(x) = x_n$$

aşikar olmayan bir çözüm olur. Bu ise sınırsızdır.

Sınırsız bir bölgede Dirichlet probleminin çözümünün tek olmadığını bir örnekle gösterelim

$$\begin{cases} \Delta u=0 \ ; & \Omega \ \text{bölgesinde} \\ u=0 \ ; & \partial\Omega \ \text{sınırı üzerinde} \end{cases}$$

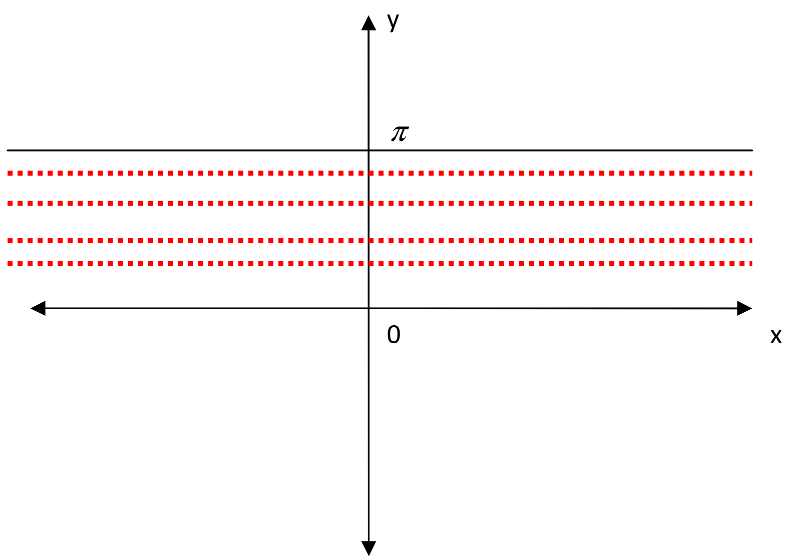
Dirichlet problemi için

$$u(x, y) = e^x . \sin y , \quad u(x, y) : \ \Omega \to \mathrm{R}, \ \Omega := \left\{ (x, y) : \ -\infty < x < \infty \ \text{ve} \ 0 \leq \mathrm{y} \leq \pi \right\}$$

fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Açıktır ki $u(x, y) = e^x . \sin y$ fonksiyonu Ω bölgesinde

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca $u(x, y) = 0$ fonksiyonu da aynı bölgede Laplace denkleminin bir çözümüdür. Böylece sınırsız Ω bölgesinde Dirichlet probleminin çözümünün tek olmadığı görülür. Şekil 1 de görüldüğü gibi Ω bölgesinin sınırları $y = 0$ ve $y = \pi$ doğrularıdır ve $u(x, y) = e^x.\sin y$ fonksiyonu sınırlarda sıfır değerini alır. Yani $u(x, y) = e^x.\sin y$ fonksiyonu Ω bölgesinde Dirichlet probleminin çözümüdür. Ancak x değerlerini $x = a$ ve $x = b$ gibi iki değerle sınırlandırırsak elde edilecek $\Omega' = \{(x, y) : a \le x \le b \text{ ve } 0 \le y \le \pi\}$ sınırlı bölgesinin tüm sınırında $u(x, y) = e^x.\sin y$ fonksiyonu sıfır değerini almaz. Böylece bu fonksiyon sınırlı bir bölgede Dirichlet probleminin çözümü olamaz. Bu örnekten de anlaşıldığı gibi Dirichlet probleminin çözümü sınırlı bir bölgede tektir fakat sınırsız bölgede tek değildir.



Şekil 1

2.4. Temel Çözümler

u harmonik bir fonksiyon yani $\Delta u = 0$ olsun. R^n de bu harmonik fonksiyon sabit $a \in R^n$ ler için yalnızca $r = |x - a|$ ya bağlıdır. $v(r) = u(x)$ olarak kuralım. Buradan

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0$$

yazılabilir ki bunun da çözümü c_i ler sabit olmak üzere

$$v(r)=\begin{cases} c_1+c_2\log r, & n=2 \\ c_3+c_4 r^{n-2}, & n\geq 3 \end{cases}$$

şeklindedir.

Biz bir fonksiyonun herhangi $r>0$ için

$$\int_{\partial B_r}\frac{\partial u}{\partial r}dS=1$$

olacak şekilde tekilliğiyle ilgilenmekteyiz. Bu nedenle herhangi $a\in R^n$ için

$$\Gamma(a,x)=\frac{1}{2\pi}\log|a-x|, \qquad n=2 \;\; için$$

$$\Gamma(a,x)=\frac{1}{\omega_n(2-n)}|a-x|^{2-n}, \qquad n\geq 3 \; için$$

eşitliklerini kuralım. Özetle şunu söyleyebiliriz. $a\in R^n$ sabiti için $x\neq a$ noktasında $\Gamma(a,x)$ fonksiyonu harmoniktir. Yani herhangi $x\neq a$ için $\Delta_x\Gamma(a,x)=0$ yazılabilir ve $x=a$ noktasında $\Gamma(a,x)$ fonksiyonunun tekilliği vardır. Üstelik herhangi $r>0$ için

$$\int_{\partial B_r(a)}\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(a,x)dS_x=1$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 2.4.1. Ω R^n *de sınırlı bir bölge ve* $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ *olsun. Bu halde herhangi* $a\in\Omega$ *için*

$$u(a)=\int_{\Omega}\Gamma(a,x)\Delta u(x)dx-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(a,x)\frac{\partial u}{\partial n_x}u(x)-u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(a,x)\right)dS_x$$

eşitliği yazılabilir. [9]

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki uyarıya ihtiyaç vardır.

Uyarı 2.4.1.

(i) Herhangi $a \in \Omega$ için $\Gamma(a,.)$, Ω bölgesinde tekilliğe sahip olmasına rağmen integrallenebilirdir.

(ii) $a \notin \overline{\Omega}$ için

$$u(a) = \int_{\Omega} \Gamma\left(a,x\right) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma\left(a,x\right) \frac{\partial u}{\partial n_x} u(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x} \left(a,x\right) \right) dS_x$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ifade sıfırdır.

(iii) $u = 1$ alındığında herhangi $a \in \Omega$ için

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x} (a,x) dS_x = 1$$

eşitliğini yazabiliriz.

Teorem 2.4.1. in ispatı. Green formülünü $\Omega \backslash B_r(a)$ bölgesinde $r > 0$ için u fonksiyonuna ve $\Gamma(a,.)$ ya uygulayalım. Bu durumda

$$\int_{\Omega \backslash B_r(a)} \left(\Gamma \Delta u - u \Delta \Gamma\right) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS_x - \int_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS_x$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\Omega \backslash B_r(a)$ da $\Delta \Gamma = 0$ olduğundan

$$\int_{\Omega} \Gamma \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS_x - \lim_{r \to 0} \int_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS_x$$

eşitliğini yazabiliriz. $n \geq 3$ için Γ nın tanımından $r \to o$ iken

$$\left| \int_{\partial B_r(a)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} dS \right| = \left| \frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial u}{\partial n} dS \right| \leq \frac{r}{n-2} \sup_{\partial B_r(a)} |Du| \to 0$$

ve $r \to o$ iken

$$\int_{\partial B_r(a)} u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} dS = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u dS \to u(a)$$

olur. $n=2$ için de aynı sonucu benzer bir şekilde elde edebiliriz.

Sonuç 2.4.1. Ω bölgesinin, R^n de sınırlı bir bölge ve $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ olduğunu varsayalım. Herhangi $x \in \Omega$ için Teorem 2.4.1 e dayanarak

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(x,y) \right) dS_y$$

eşitliğini yazabiliriz. Eğer u *fonksiyonu* $f \in C(\bar{\Omega})$ ve $\varphi \in C(\partial\Omega)$ için

$$\begin{cases} \Delta u = f; & \Omega \text{ bölgesinde} \\ \text{u}=\varphi \quad ; & \partial\Omega \text{ sınırı üzerinde} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dirichlet sınır değer problemini çözerse o zaman u fonksiyonu, bir tane bilinmeyen terimle, f ve φ tarafından ifade edilebilir. Bu bilinmeyen terimi Γ yı ayarlayarak ortadan kaldıralım. Herhangi belirli $x \in \Omega$, Ω bölgesinde $\Delta_y \Phi(x,y) = 0$ ile birlikte $\Phi(x,.) \in C^2(\bar{\Omega})$ için

$$\gamma(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$$

fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. $\Phi(x,y)$ harmonik olduğundan herhangi $x \in \Omega$

için Teorem 2.4.1.

$$u(x) = \int_{\Omega} \gamma(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial \gamma}{\partial n_y}(x,y) \right) dS_y$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi Φ yi uygun seçerek, Green fonksiyonununun önemli bir kavramına ulaşırız. Her bir belirli $x \in \Omega$ için

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x,y) = 0 & ; \ \text{y} \in \Omega \ \text{ için} \\ \Phi(x,y) = \text{-}\Gamma(x,y) & ; \ \text{y} \in \partial\Omega \text{ için} \end{cases}$$

olacak şekilde $\Phi(x,.) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ seçelim. Sonuçta oluşan $\gamma(x,y)$ fonksiyonunu $G(x,y)$ ile belirtelim. $G(x,y)$, Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer böyle bir $G(x,y)$ mevcutsa o zaman (2.4) Drichlet probleminin çözümü olan u fonksiyonu

$$u(x)=\int_{\Omega} G(x,y) f(y)dy+\int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)\,dS_y$$

şeklinde ifade edilebilir. [9]

Önerme 2.4.1. $B_R(0)$ yuvarı için Green fonksiyonunu

(i) $n\geq 3$ için

$$G(x,y)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right)$$

(ii) $n=2$ için

$$G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\log|x-y|-\log\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}y\right|\right)$$

şeklindedir.

İspat. $|x|<R$ ile $x\neq 0$ ı sabitleyelim. $|X||x|=R^2$ ile birlikte $X\in R^n\backslash\overline{B}_R$ yi göz önünde bulunduralım ve $X=\frac{R^2}{|x|^2}x$ olarak alalım. Burada X ve x, ∂B_R küresinin yüzeyine göre birbirinin yansıması ve $x\to X$ dönüşümü konformal bir dönüşümdür. Yani açıyı korumaktadır. Eğer $|y|=R$ ise şekil 2 deki $\overset{\Delta}{oxy}$ ve $\overset{\Delta}{oyX}$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|x|}{R}=\frac{R}{|X|}=\frac{|y-x|}{|y-X|}$$

elde edilir. Buradan da herhangi $y\in\partial B_R$ için $|y|=R$ iken $\frac{1}{|y-X|}=\frac{|x|}{R|x-y|}$ eşitliği çıkar. Green fonksiyonu tanıma göre

$$G(x,y)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-2}}+\Phi(x,y)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $B_R(0)$ içinde harmonik olan $\Phi(x,y)$ fonksiyonunu α, y den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{(2-n)\omega_n} \cdot \frac{\alpha}{|y - X|^{n-2}}$$

şeklinde ararsak o halde

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\alpha}{|y-X|^{n-2}} \right)$$

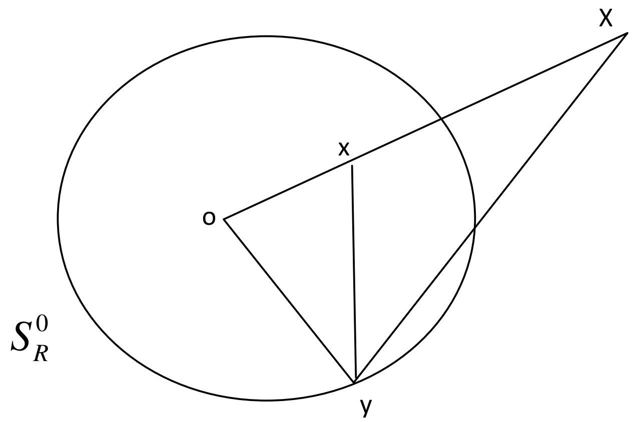
fonksiyonunun, Green fonksiyonu tanımına göre, $|y| = R$ küre yüzeyi üzerinde sıfıra eşit olması şartından α sabitini buluruz. Bu yüzden sıfır sınır değerini bulmak adına $n \geq 3$ için $|y| = R$ iken $\frac{1}{|y-X|} = \frac{|x|}{R|x-y|}$ olduğundan

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\alpha}{|y-X|^{n-2}} \right) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{|x|^{n-2}\alpha}{R^{n-2}|x-y|^{n-2}} \right) = 0$$

eşitliği yazılabilir ki buradan $\alpha = \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}|y-X|^{n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - \left(\frac{|x||y-X|}{R} \right)^{2-n} \right) \\ &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - \left| \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right|^{2-n} \right) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $n = 2$ durumu da buna benzerdir.



Şekil 2

Sonuç 2.4.2. *G fonksiyonunun $B_R(0)$ yuvarında Green fonksiyonu olduğunu varsayalım. O zaman herhangi $x \in B_R$ ve $y \in \partial B_R$ için*

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - y|^n} \tag{2.5}$$

eşitliği mevcut olur.

İspat. Sadece $n \geq 3$ durumunu göz önünde bulunduralım. $X = \dfrac{R^2}{|x|^2} x$ olduğunu anımsayarak $x \in B_R$ ve $y \in \partial B_R$ için

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n-2} |y - X|^{2-n} \right)$$

eşitliğini yazalım. Bu nedenle böyle x ve y ler için

$$D_{y_i} G(x, y) = \frac{-1}{\omega_n} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \cdot \frac{X_i - y_i}{|X - y|^n} \right) = \frac{y_i}{\omega_n R^2} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}$$

eşitliğini yazabiliriz. Önerme 2.4.1. in ispatında (2.5) e dayanarak $|y| = R$ için $n_i = \dfrac{y_i}{R}$ ile birlikte

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)=\sum_{i=1}^{n} n_i D_{y_i} G(x,y)=\frac{1}{\omega_n R}\cdot\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}$$

eşitliğini elde ederiz. $x\in\Omega$, $y\in\partial\Omega$ için (2.5) teki $\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}$ fonksiyonunu $K(x,y)$ ile belirtelim. Bu fonksiyona Poisson çekirdeği denir ve bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $x\neq y$ için $K(x,y)$ düzgündür.

(ii) $|x|<R$ için $K(x,y)>0$ dır.

(iii) Herhangi $|x|<R$ için

$$\int_{|y|=R} K(x,y)\,dS_y=1$$

dir.

3.BÖLÜM

HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN HARNACK EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 3.1. $\varphi \in C\left(\partial B_R(0)\right)$ *için*

$$u(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\varphi(y)\,dS_y & ; \quad |x|<R \\ \varphi(x) & ; \quad |x|=R\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan u fonksiyonu $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$ *yı sağlar ve,*

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & ; \quad \Omega \quad \text{bölgesinde} \\ u=\varphi & ; \quad \partial\Omega \quad \text{sınırı } \textit{üzerinde}\end{cases}$$

olur. [9]

Uyarı 3.1. Poisson İntegral formülünde x=0 alınarak

$$u(0)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(0)} \varphi(y)\,dS_y$$

eşitliği elde edilir. Bu da ortalama değer özelliğidir. [9]

Lemma 3.1. *u fonksiyonunun* $B_R(x_0)$ *da harmonik ve* $u \geq 0$ *olduğunu varysayalım. O zaman* $r=\left|x-x_0\right|<R$ *olmak üzere*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(x_o) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(x_o)$$

eşitsizliği mevcut olur.

İspat. $x_0=0$ ve $u \in C(\bar{B}_R)$ olduğunu varsayabiliriz. $u(x)$ poisson integral formülünden alınmak üzere

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u(y)\,dS_y$$

$$R-|x| \leq |y-x| \leq R+|x|$$

olduğundan $|y| = R$ için

$$\frac{1}{\omega_n R}.\frac{R-|x|}{R+|x|}\left(\frac{1}{R+|x|}\right)^{n-2}\int_{\partial B_R} u(y)dS_y \le u(x) \le \frac{1}{\omega_n R}.\frac{R+|x|}{R-|x|}\left(\frac{1}{R-|x|}\right)^{n-2}\int_{\partial B_R} u(y)dS_y$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ortalama değer özelliğine göre

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R} u(y)dS_y$$

eşitliği yazılabilir ki bu da ispatı tamamlamaktadır.

Düzlemde bir harmonik fonksiyon için Harnack eşitsizliğini inceleyelim. $x^2 + y^2 < R^2$ diskinde negatif olmayan $u(x, y)$ harmonik fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Disk içinde herhangi bir (x, y) noktası için $r^2 = x^2 + y^2$ olmak üzere

$$\frac{R-r}{R+r}u(0,0) \le u(x, y) \le \frac{R+r}{R-r}u(0,0)$$

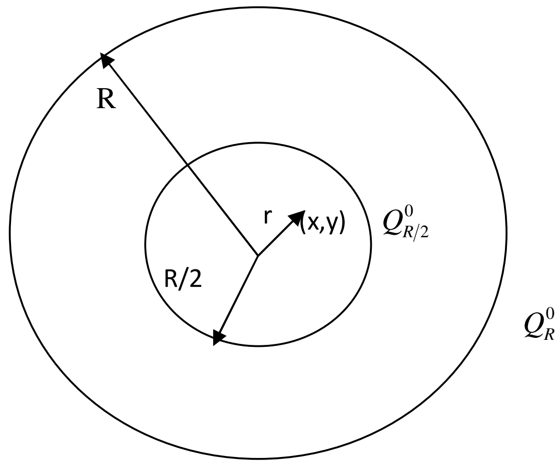
eşitsizliğini yazabiliriz. Belirli durumlarda eğer $r \le R/2$ ise o zaman

$$\frac{1}{3}u(0,0) \le u(x, y) \le 3u(0,0)$$

eşitsizliği elde edilir. Bunu şekil 3 te görebiliriz. Sonuç olarak eğer u fonksiyonu , Q_R^0 da harmonik olup pozitifse ve $R/2$ yarıçaplı $Q_{R/2}^0$ diski Q_R^0 diskinin içindeyse o zaman

$$\sup_{Q_{R/2}^0} u / \inf_{Q_{R/2}^0} u \le 9 \qquad (3.1)$$

eşitsizliği gerçekleşir.



Şekil 3

Eğer içteki ve dıştaki disklerin yarıçaplar oranı değişirse o zaman (3.1) eşitsizliğindeki sabit de değişir. Daha yüksek boyutta bir uzay için boyuta bağlı bir sabitle benzer bir eşitsizlik elde edilir. Örneğin $n=3$ için

$$\frac{R(R-r)}{(R+r)^2}u(0)\le u(x)\le\frac{R(R+r)}{(R-r)^2}u(0)$$

bulunur. Bu nedenle $n=3$ için

$$\sup_{Q^0_{R/2}} u/\inf_{Q^0_{R/2}} u\le 27$$

olur. n boyutlu durumda eğer $u(x)$ harmonik fonksiyonu Q^0_R diskinde negatif değilse o zaman $r<R$ için C; r/R oranına ve uzayın boyutuna bağlı olmak üzere

$$\sup_{Q^0_r} u/\inf_{Q^0_r} u\le C \tag{3.2}$$

eşitsizliği mevcut olur.

Lemma 3.2. Belirli *sınırlı bir bölgenin kapanışında sürekli ve bu bölgenin iç kısmında harmonik olan bir fonksiyon dizisi verilsin. Eğer bu fonksiyon dizisi bu bölgenin sınırı üzerinde düzgün yakınsak ise o zaman bu fonksiyon dizisi bu bölgenin kapanışında da düzgün yakınsak olur.*

İspat. $u_1,.....,u_n,....$ lemmada bahsedilen fonksiyon dizisi olsun. f_i, G bölgesinin Γ sınırı üzerinde u_i değerlerini belirtsin. Varsayıma dayanarak f_i dizisi Γ üzerinde düzgün yakınsaktır. Cauchy kriterinden verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için Γ üzerinde $|f_n - f_m| < \varepsilon$ olacak şekilde $n, m > N$ i sağlayan bir N mevcuttur. Bu n ve m için $\overline{G}$ nın tümünde $|u_n - u_m| < \varepsilon$ yazılabilir. Cauchy kriterinin yeterliliğinden $u_1,.....,u_n,....$ dizisi $\overline{G}$ da düzgün yakınsak olur.

Teorem 3.2. $u_k(x, y)$ (k=1,2,.....) *sonlu bir* G *bölgesinin içinde harmonik ve* $\overline{G}$ *da sürekli olan bir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer bu dizi bölgenin sınırında düzgün yakınsaksa o zaman bu dizi* G *bölgesinin içinde harmonik olan bir limit fonksiyonuna G bölgesinin içinde de düzgün yakınsar.*

İspat. Lemma 3.2. ye göre $u_n(x, y)$ fonksiyonlar dizisi G bölgesinin içinde düzgün yakınsaktır. Geriye limit fonksiyonunun G bölgesinin içinde harmonik olduğunu göstermek kalıyor. Bu amaçla G bölgesinin içinde G bölgesinin keyfi bir iç noktası Q merkezli bir K dairesi seçelim Şimdi K dairesinin içine u_n fonksiyonlarının her birini bir poisson integrali olarak sunalım. Böylece $f_n(\psi)$, R yarıçaplı K dairesinin çevresi üzerindeki u_n değerlerini belirtmek üzere

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\psi)\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\phi - \psi)}d\psi \tag{3.3}$$

eşitliği yazılabilir. $f_n(\psi)$ fonksiyonlar dizisinin ve K dairesinin keyfi (x, y) iç noktasında u_n fonksiyonlar dizisinin yakınsaklığına göre (3.3) denkleminin her iki tarafında limiti inceleyebiliriz. Limit fonksiyonları sırasıyla $u_n(x, y) \to u(x, y)$ ve $f_n(\psi) \to f(\psi)$ olmak üzere

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\phi - \psi)}d\psi$$

eşitliğini elde ederiz ki bu da K dairesinde $u(x, y)$ fonksiyonunun harmonikliğini ifade eder.

Teorem 3.3. *G bölgesinin içinde harmonik olup negatif olmayan*

$u_n(x,y)$ fonksiyon serisi G bölgesinin bir A iç noktasında düzgün yakınsak olsun. Bu durumda bu seri G bölgesinin tümünde bir harmonik fonksiyona yakınsar ve yakınsaklık G bölgesinin içindeki her kapalı sınırlı bölgede düzgündür.

İspat. İlkin bu serinin A merkezli R yarıçaplı her K_1 dairesinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. K_1 in $\overline{K}_1$ kapanışı G tarafından kapsansın. Bu amaçla $R+\varepsilon$ yarıçaplı ve K_1 ile eş merkezli olan bir K^* dairesi seçelim. Burada ε; K^* dairesi, G *bölgesinin* içinde kalacak şekilde yeterince küçüktür. K^* dairesi içinde u_n fonksiyonlarının her birini

$$u_n(\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(R+\varepsilon,\psi)\frac{(R+\varepsilon)^2-\rho^2}{(R+\varepsilon)^2+\rho^2-2(R+\varepsilon)\rho\cos(\phi-\psi)}d\psi \tag{3.4}$$

poisson integrali olarak ifade edelim. $-1\le\cos(\phi-\psi)\le+1$ olduğundan

$$\frac{R+\varepsilon-\rho}{R+\varepsilon+\rho}\le\frac{(R+\varepsilon)^2-\rho^2}{(R+\varepsilon)^2+\rho^2-2(R+\varepsilon)\rho\cos(\phi-\psi)}\le\frac{R+\varepsilon+\rho}{R+\varepsilon-\rho} \tag{3.5}$$

bağıntısını yazabiliriz. $u_n(R+\varepsilon,\psi)\ge 0$, (3.4) ve (3.5) e dayanarak

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R+\varepsilon-\rho}{R+\varepsilon+\rho}\int_0^{2\pi}u_n(R+\varepsilon,\psi)\,d\psi\le u_n(\rho,\phi)\le\frac{1}{2\pi}\frac{R+\varepsilon+\rho}{R+\varepsilon-\rho}\int_0^{2\pi}u_n(R+\varepsilon,\psi)\,d\psi$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ortalama Değer Teoremine dayanarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(R+\varepsilon,\psi)\,d\psi=u_n(0,\psi)=u_n(A)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{R+\varepsilon-\rho}{R+\varepsilon+\rho}u_n(A)\le u_n(\rho,\phi)\le\frac{R+\varepsilon+\rho}{R+\varepsilon-\rho}u_n(A)$$

eşitsizliği elde edilir.

4. BÖLÜM

DİVERJANS OLMAYAN FORMDA İKİNCİ MERTEBEDEN GENEL ELİPTİK DENKLEMLER

Eğer $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ kuadratik formu pozitif tanımlı ise o zaman

$$L=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x), \qquad x=(x_{1,\dots\dots\dots,}x_n) \tag{4.1}$$

lineer ikinci mertebeden diferansiyel operatörüne eliptiktir denir. Daima $a_{ik}=a_{ki}$ olduğunu varsayarız. Eğer,

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \le \lambda|\xi|^2 \tag{4.2}$$

olacak şekilde pozitif λ sayısı mevcutsa, b_i ve c katsayıları sınırlı olmak şartıyla tüm ξ ve $x\in D$ için (4.1) operatörüne D bölgesinde *düzgün eliptiktir* denir.

$$Lu=0 \tag{4.3}$$

denkleminin çözümünden klasik çözüm kastedilmektedir. Yani çözüm fonksiyonu iki kez sürekli kısmi türevlere sahip ve (4.3) denklemini sağlar. Benzer şekilde $Lu\le 0$ ya da $Lu\ge 0$ eşitsizliklerin çözümünden sürekli iki kez diferensiyellenebilir ve bunlara karşılık gelen eşitsizlikleri sağlayan bir fonksiyon kastedilmektedir.

Bir u fonksiyonu eğer $Lu\le 0$ eşitsizliğinin bir çözümü ise bu fonksiyona supereliptik eğer $Lu\ge 0$ eşitsizliğinin çözümü ise bu fonksiyona subeliptiktir denir.

Düzgün eliptiklik şartı (4.2) yerine genellikle ona denk olan

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \ge a|\xi|^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\le M \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri kullanırız. Burada ξ keyfi seçilir. $a>0$, M>0 sabitlerine de eliptiklik sabitleri denir. L operatöründeki düşük terimleri ihmal edelim. Yani L operatörü denilince

$$L=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \tag{4.5}$$

operatörünü dikkate alalım. Bu tür operatörlerde yalnızca a ve M sabitlerinin oranı önemlidir. Yani tüm sabitlerin kendi başlarına bir önemi yoktur. L operatörünün eliptiklik sabitini $'e'$ ile gösterip

$$e=\sup_{x\in D,|\xi|=1}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k}$$

şeklinde ifade ederiz. Eliptiklik sabiti, herhangi $x\in D$ için $\|a_{i,k}(x)\|$ matrisinin tüm özdeğerler toplamının en küçük özdeğere oranının supremumu demektir. $e\geq n$ dir. Eğer $e=n$ olursa o zaman L operatörü bazı pozitif fonksiyonlarla çarpılarak Laplace operatörüne dönüşür.

4.1. Klasik Maksimum Prensibi

Teorem 4.1.1. *$D\subset R^n$ sınırlı bir bölge ve L, D bölgesinde*

$$L=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

eliptik operatörü olsun. Eğer u fonksiyonu D bölgesinde supereliptik(subeliptik) sürekli bir fonksiyon ise, o zaman

$$u(x)\geq \min_{\partial D} u \quad (u(x)\leq \max_{\partial D} u)$$

olur. u fonksiyonunun supereliptik durumunu göz önünde bulundurmak yeterlidir. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır. [13]

Lemma 4.1.1. *Eğer D bölgesinde $Lu<0$ ise o zaman u* fonksiyonu, *D bölgesinin herhangi bir iç bölgesinde minimum değerine ulaşmaz.*

İspat. u fonksiyonunun D bölgesinin herhangi bir x^0 iç noktasında minimum değere ulaştığını varsayalım. L operatörünün x^0 noktasında kanonik forma bürünmesi altında $x\leftrightarrow y$ değişken dönüşümünü yaparak

$$Lu\Big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\Bigg|_{x=x^0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^{\,2}}\Bigg|_{y=y^0 \leftrightarrow x^0} \geq 0$$

elde edilir. Bu da $Lu < 0$ ile çelişmektedir.

Teorem 4.1.1. in İspatı.

$a_{ii} > 0$ olduğunu eliptik operatörden dolayı söyleyebiliriz.

$$v_\varepsilon = u - \varepsilon x_1^2, \quad \varepsilon > 0$$

yardımcı fonksiyonunu göz önünde bulunduralım

$$Lv_\varepsilon = Lu - 2\varepsilon a_{11} < 0$$

olduğundan lemma 4.1.1. den

$$v_\varepsilon(x) \geq \min_{\partial D} v_\varepsilon(x)$$

yazabiliriz. Yine

$$u(x) \geq v_\varepsilon(x) \text{ ve } \varepsilon \to 0 \text{ iken } v_\varepsilon(x) \to u(x)$$

olduğundan

$$u(x) \geq \min_{\partial D} u(x)$$

bulunur ki bu da teoremi ispatlar.

4.2. Güçlü Maksimum Prensibi

Teorem 4.2.1. *L operatörü bir D bölgesinde tanımlı* (4.5) *operatörü olsun. $u(x)$ bir subeliptik(supereliptik) fonksiyon olmak üzere eğer u(x) maksimum(minimum) değerini D bölgesinin herhangi bir iç noktasında alırsa o zaman u fonksiyonu sabit olur.*[13]

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Lemma 4.2.1. *L, bir D bölgesinde, e, eliptiklik sabitiyle tanımlı bir düzgün eliptik operatör olsun.*

$$s \geq e - 2$$

eşitsizliğini sağlayan her s için

$$\frac{1}{\left|x - x^0\right|^s}$$

fonksiyonu, x in bir fonksiyonu olarak, herhangi $x^0 \in R^n$ *için* $D\backslash(\mathrm{x}^0)$ *bölgesinde subeliptiktir*.

İspat. $\left|x - x^0\right| = r$, $\dfrac{x_i - x_i^0}{r} = \gamma_i$, i=1,2,………,n olarak alalım. Bu durumda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r^s}\right) = s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i\gamma_k \quad , \quad i \neq k \text{ için}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^s}\right) = s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i^2 - s\frac{1}{r^{s+2}}$$

eşitliklerini yazabiliriz ve buradan da

$$L\left(\frac{1}{r^s}\right) = \frac{s}{r^{s+2}}\left[(s+2)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\gamma_i\gamma_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right] \geq \frac{s\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\gamma_i\gamma_k}{r^{s+2}}\left[(s+2) - e\right]$$

çıkar. Sonuç olarak $s \geq e - 2$ için son eşitsizlik negatif olamayacağından $L\left(\dfrac{1}{r^s}\right) \geq 0$ olur.

Dolayısıyla $\dfrac{1}{\left|x - x^0\right|^s}$ fonksiyonu subeliptik olur.

Uyarı 4.2.1. (4.5) operatörü yerine (4.1) operatörünü göz önünde bulundurursak, $\dfrac{1}{r^s}$ fonksiyonuna (4.1) operatörünü etki ettirerek

$$L\left(\frac{1}{r^s}\right) \geq \frac{s\sum a_{ik}\gamma_i\gamma_k\left[(s+2) - e\right]}{r^{s+2}} + \frac{\sum b_i\gamma_i}{r^{s+1}} + \frac{c}{r^s}$$

eşitsizliğini elde ederiz Dolayısıyla $s > e-2$ ve yeterince küçük r için ($r < r_0$, burada r_o, s ye ve L operatörüne bağlıdır) $\dfrac{1}{\left|x-x^0\right|^s}$ fonksiyonu D bölgesi operatör bölgesini göstermek üzere $(D \cap Q_{r_0}^{x^0}) \setminus (x^0)$ bölgesinde subeliptik olur.

Lemma 4.2.2. *L, Q_R^0 yuvarında (4.1) ile verilen operatör ve $u(x)$ de subeliptik (supereliptik) bir fonksiyon olsun. $u(x)$ fonksiyonu $\bar{Q}_R^0$ da sürekli olmak üzere tüm $x \in Q_R^0$ için $x^0 \in S_R^0$ ve*

$$u(x) < u(x^0) \quad (u(x) > u(x^0))$$

olduğunu varsayalım. Bu halde eğer x^0 noktasında $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ iç normal türevi varsa o zaman

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x^o} < 0, \left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x^o} > 0 \right)$$

olur.

İspat. $u(x)$ in subeliptik olduğunu varsayalım. e, L operatörünün eliptiklik sabiti olsun. $u(x^0) = m$ olarak alalım. Bu durumda

$$\max_{|x|=R/2} u(x) = m - a, \quad \text{a}>0,$$

olur. Şimdi

$$v(x) = m - \frac{\varepsilon}{|x|^{e-2}} + \varepsilon \frac{1}{R^{e-2}}$$

yardımcı fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\varepsilon > 0$,

$$|x| = R/2$$

için

$$v(x) > m - a$$

olacak şekilde yeterince küçük seçilmelidir. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları

$$\bar{\Omega}_{R/2,R} = \{R/2 \le x \le R\}$$

küresel katmanında tanımlı olmak üzere

$$Lv < o\,, \quad v\big|_{\partial\Omega_R^0} \ge u\big|_{\partial\Omega_R^0}$$

olduğunu lemma 4.2.1. e dayanarak söyleyebiliriz. Yine

$x \in \Omega^0_{R/2,R}$ için $v(x) \ge u(x)$ olduğunu teorem 4.1.1. den yazabiliriz. Böylece

$v(x^0) = u(x^0)$ olduğundan

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x^o} \le \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{x=x^o} < 0$$

olur

Teorem 4.2.1 in ispatı. $u(x)$ subeliptik bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $u(x)$ D bölgesinin herhangi bir iç noktasında maksimum M değerine ulaşsın.

$$E = \{x \,|\, u(x) = M\}$$

seviye kümesi D bölgesinde kapalıdır. Eğer E ile D çakışmıyorsa o zaman

$$0 < \rho(x', E) < \rho(x', \partial D)$$

olacak şekilde bir $x' \in D\backslash E$ noktası vardır. Burada $\rho(x, A)$, $x \in R^n$ den $A \subset R^n$ kümesine olan uzaklığı tanımlar.

$$\rho(x', E) = \rho$$

olarak alalım. O zaman $Q_\rho^{x'}$ yuvarı $D\backslash E$ de bulunur. Üstelik $S_\rho^{x'}$ nün sınırı ve E kümesi aynı x^0 noktasına sahipler. Öyle ki

$$x \in Q_\rho^{x'} \text{ için } u(x) < u(x^0)$$

olur. Diğer taraftan

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x^o} < 0$$

olduğunu lemma 4.5.1. den söyleyebiliriz. ki bu da imkansızdır. Çünkü x^0 noktası u fonksiyonunun maksimum noktasıydı. Bu nedenle $E = D$ dir. Yani $u(x) \equiv M$ şeklindedir.

Lemma 4.2.3. *$G \subset R^n$ koni şartını sağlayan sınırlı bir bölge olsun. $\bar{G}$ da sürekli olan ve sabit olmayan supereliptik(subeliptik) $u(x)$ fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Eğer her $x \in G$ için*

$$x' \in G \text{ ve } u(x) \geq u(x') \;\; (u(x) \leq u(x'))$$

ise, o zaman $\frac{\underline{\partial} u}{\underline{\partial} v}\left(\frac{\bar{\partial} u}{\partial v}\right)$, v vektörünün doğrultusunda u fonksiyonun alt(üst) türevlerini göstermek üzere x' noktasının herhangi $\Omega \in \partial G$ komşuluğunda

$$\left.\frac{\partial u}{\underline{\partial} v}\right|_{x=x''} > 0 \;\; \left(\left.\frac{\bar{\partial} u}{\partial v}\right|_{x=x''} < 0\right)$$

olacak şekilde bir $x'' \in \partial G$ noktası vardır. [12]

Bu lemmanın ispatı aşağıda açıklayacağımız fonksiyon teorisi lemmasına bağlıdır.

Lemma 4.2.4. *f(x) ve g(x), tüm $x \in (0,\beta)$ için $f(0)=0$, $f(x)>0$ olacak şekilde $[0,\beta]$ aralığında fonksiyonlar $f(x)$, $[0,\beta]$ aralığında alt yarısürekli ve f in orjindeki alt sağ türevi sıfır ve $C^1[0,\beta]$ deki $g(x)$ tüm $x \in [0,\beta]$ için g(0)=0, $g'(x) > \delta > 0$*

olsun. O zaman $(0,\beta)$ aralığında $h(g(x)) \leq f(x)$ ve tüm $x \in (0, g(\beta))$ için

$$h(x) \geq 0 \;\; , \;\; h'(x) > 0 \;\; , \;\; h''(x) \geq 0$$

olacak şekilde bu aralık üzerinde iki kez diferansiyellenebilir olup $(0, g(\beta))$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli bir $h(x)$ fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca

$$m \to \infty \text{ iken } x_m \to 0$$

olacak şekilde bir $x_m \in (0,\beta)$ dizisi için

$$h(g(x_m)) = f(x_m)$$

dir. [12]

Lemma 4.2.3.ün İspatı.

İspatı 6 adımda inceleyeceğiz.

1.adım. u, supereliptik bir fonksiyon ve $u(x') = 0$ olsun.

$$E = \{x \in \bar{G} : \quad u(x) = 0\}$$

olarak alalım. Maksimum prensibinden $x \in G$ için $\mathrm{E} \subset \partial \mathrm{G}$, $\mathrm{u(x)>0}$ yazabiliriz.

$$Q_{r_0}^{x_0} \cap E \neq \varnothing$$

olacak şekilde $Q_{r_0}^{x_0}$ yuvarının var olduğunu gösterelim. Öyle ki

$$\left(x_0 - x_1, v(x_1)\right) > 0$$

şartını sağlayan

$$x_1 \in \Omega \cap E \cap S_{r_0}^{x_0}$$

mevcut olsun. Lemmanın varsayımına dayanarak tepesi dışında tamamen G bölgesinin içinde kalan ve ekseni $v(x')$ boyunca yönlendirilen x' tepesi ve H yüksekliğiyle bir koni vardır. Bu koniyi K ile belirtelim. Koninin tepe açısının $3\Pi/4$ ten daha büyük olduğunu varsayabiliriz. (Eğer gerekli görülürse lineer bir dönüşüm yapılıp daha küçük bir H seçilebilir.)

$$\partial G \cap G_{r'}^{x'} \subset \Omega$$

olacak şekilde $r' > 0$ ı yeterince küçük seçelim. v vektör alanının sürekliliğinden tüm

$$x \in \partial G \cap Q_{r''}^{x'}$$

için $v(x)$ ve $\mathrm{v(x')}$ arasındaki açı $\Pi/8$ den az olacak şekilde

$$r'' \ , \quad 0<r''<r'$$

mevcuttur. Herhangi

$$Q \subset K \subset Q_{r''}^{x'}$$

yuvarını seçelim.

$$E \cap Q_{r''}^{x'}$$

kümesine dokunacak şekilde K konisinin ekseni boyunca bu yuvarı çevirelim. Sonuçta oluşan yuvar açıkça arzu edilen özelliğe sahiptir.

2.Adım.

$$r_2 = \min(r_0/2, 1)$$

olarak alalım. $Q_{r_0}^{x_0}$ yuvarında x_0 merkezi ve x_1 noktasıyla bağlantılı bir yarıçap göz önünde bulunduralım. Bu yarıçap üzerinde x_1 den r_2 uzaklıkta bulunan bir x_2 noktası ele alalım. O zaman $S_{r_2}^{x_2}$ küre yüzeyi E ile yalnız x_1 noktasında kesişirken $Q_{r_2}^{x_2}$ açık yuvarı E den ayrık olur. Üstelik

$$\left(x_2 - x_1, v(x_1)\right) > 0$$

dır.

3.Adım. Eğer

$$Q_{r_2}^{x_2} \cap Q_{\varepsilon}^{x_1}$$

kesişimi ∂G den hiçbir nokta içermeyecek şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcutsa o zaman

$$Q_{r_2}^{x_2} \cap Q_{\varepsilon}^{x_1} \subset G$$

olur ve x_1 sınır noktasına yeterince küçük bir yuvar tarafından bölgenin içinden dokunulabilir. Böylece lemma 4.2.2. ye dayanarak

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{x=x_1} > 0$$

yazabiliriz. Şimdi de herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$Q_{r_2}^{x_2} \cap Q_{\varepsilon}^{x_1} \cap \partial G$$

kümesinin boş olmadığını varsayalım.

4.Adım.

$$A(\xi) = S_{r_2-\xi}^{x_2} \cap \partial G$$

olarak alalım. $\left[0, r_2/2\right]$ aralığı üzerinde $\mathrm{A}(\xi)$ boş değilken

$$f\left(\mathrm{r}_2/2\right) = \min_{S_{r_2/2}^{x_2} \cap G} u(x), \quad f(\xi) = \min_{\mathrm{x} \in \mathrm{A}(\xi)} u(x), \quad \xi \in [0, \mathrm{r}_2/2)$$

olarak kurarak $f(\xi)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Diğer tüm noktalarda

$$f(x) = \max u$$

olarak kuralım. $\mathrm{A}(\xi) = \varnothing$ olduğunda ξ kümesi açık olduğundan $f(\xi)$ alt yarı süreklidir.

5.Adım. $f_r\,'(0) = 0$ olduğunu varsayalım. Yeterince büyük s için x in bir fonksiyonu olarak

$$|x-y|^{-s}$$

fonksiyonu

$$0 < |x-y| < 1$$

için subeliptiktir. Böyle bir s yi belirleyelim.

$$g(\xi) = \frac{1}{\left(\xi - r_2\right)^s} - \frac{1}{r_2^s}$$

olarak kuralım. f ve g fonksiyonları Lemma 4.2.4.ün şartlarını sağlar. Buna karşılık gelen h fonksiyonunu ve

$$\xi_m \to 0, \ \xi_m > 0, \quad \mathrm{h}(\mathrm{g}(\xi_m)) = f(\xi_m)$$

dizisini bulalım. O zaman

$$z_m \in Q_{r_2}^{x_2} \cap \partial G \ , \ \left| \mathrm{z_m} - x_1 \right| \to 0 \quad \text{iken} \quad \mathrm{h}(\left| \mathrm{z_m} - x_2 \right|^{-s} - r_2^{-s}) = u(z_m)$$

olacak şekilde bir z_m dizisi mevcuttur.

$$\mathrm{h}(\left| \mathrm{x} - x_2 \right|^{-s} - r_2^{-s})$$

fonksiyonu da aynı zamanda subeliptiktir. Maksimum prensibine dayanarak

$$G \cap (Q_{r_2}^{x_2} \backslash Q_{r_2/2}^{x_2})$$

nin içinde

$$\mathrm{h}(\left| \mathrm{x} - x_2 \right|^{-s} - r_2^{-s}) \le u(x)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. x_1 in komşuluğunda

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}(\left| \mathrm{x} - x_2 \right|^{-s} - r_2^{-s}) > u(x)$$

dir. Bu nedenle m_0 ile başlayan tüm m ler için

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} \right|_{x = x_m} > 0$$

yazılabilir.

6.Adım.

$$f\ '_r(0) = \delta > 0$$

olsun. Bu durumda

$$G \cap (Q_{r_2}^{x_2} \backslash Q_{r_2/2}^{x_2})$$

nin içinde

$$\varepsilon(\left| \mathrm{x} - x_2 \right|^{-s} - r_2^{-s}) \le u$$

olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı seçebiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}(\left|\mathrm{x}-x_2\right|^{-s}-r_2^{-s})\Big|_{x=x_1}>0$$

iken

$$\frac{\partial}{\underline{\partial} \mathrm{v}}\Big|_{x=x_1}>0$$

olur. Böylece Lemma 4.2.3. ispatlanmış oldu.

4.3. A.D. Aleksandrov Tipli Maksimum Prensibi

Teorem 4.3.1. *L operatöründe* $\mathrm{c(x)}\leq 0$ *ve* $u(x)$, *G sınırlı bölgesinde* $Lu=f$ *denkleminin bir çözümü olsun. Bu çözüm* $\overline{\mathrm{G}}$ *da sürekli ve* $u(x)\big|_{\partial G}=0$ *şartını sağlasın. O zaman C;* n , M *,* G *bölgesinin çapı ve (4.2) deki düzgün eliptiklik sabitlerine bağlı olmak üzere*

$$\max_{\bar{G}}\left|u(x)\right|\leq C\left\|f\right\|_{L^n(G)}$$

olur.

İspat. Teoremin ispatını $b_i(x)\equiv c(x)\equiv 0$ durumunda verelim. Genel durumda ispat esas olarak aynı fakat teknik birtakım değişiklikler gerektirmektedir. R , G bölgesinin çapı olmakla birlikte

$$\max_{\bar{G}}\left|u(x)\right|=\left|u(x_0)\right|=M,\quad \mathrm{x}_0\in G$$

olsun. Genelleme özelliğini kaybetmeksizin $\mathrm{u(x_0)}<0$ olduğunu varsayabiliriz. $\mathrm{u(x)}\leq 0$ olacak şekilde $\mathrm{x}\in\mathrm{G}$ noktalar kümesini E ile belirtelim.

$$\left|\mathrm{p}\right|<M/R \tag{4.6}$$

ile birlikte her $\mathrm{p}\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ için $n+1$ boyutlu $\left(\mathrm{x}_1,.......,x_n,z\right)$ uzayında n boyutlu

$$\mathrm{z}=\left(\mathrm{p,x}\right)+C$$

hiper düzlemi göz önünde bulunduralım. Bu $z = u(x)$ fonksiyonunun grafiğini alttan destekler. (4.6) koşuluna göre $x' \in E$ noktalarının H kümesi

$$u(x') = \left(p, x'\right) + C$$

için boş değildir. Bu noktaların her birinde ikinci mertebeden diferansiyel negatif tanımlı değildir. Bu küme üzerinde

$$x \to gradu(x) \quad = \quad p$$

gradyant dönüşümünü göz önünde bulunduralım. Bu dönüşüm altında H kümesinin görüntüsü

$$|\mathrm{p}| < M/R$$

yuvarını içermektedir. Bu dönüşümün jakobiyeni

$$\det\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| \quad \mathrm{i,k=1,.....,n}$$

tarafından verilir.

$$\mathrm{Hessian}\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| \quad \mathrm{i,k=1,.....,n}$$

negatif tanımlı olmadığı gerçeği hesaba katılarak, Ω_{n}, birim yuvarın hacmi olmak üzere

$$\int_{\mathrm{H}} \det\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| \mathrm{dx} \geq \Omega_{\mathrm{n}} \left(\mathrm{M/R}\right)^{\mathrm{n}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\mu_1(x), \ldots\ldots, \mu_n(x)\,; \quad \left\|a_{ik}\right\| . \left\|u_{x_i x_k}\right\|$$

matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\int_{\mathrm{H}} \det\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| \mathrm{dx} = \int_{\mathrm{H}} \frac{\det\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| . \det\left\|a_{ik}(x)\right\|}{\det\left\|a_{ik}(x)\right\|} dx = \int_{\mathrm{H}} \frac{\det(\left\|u_{x_i x_k}(x)\right\| . \left\|a_{ik}(x)\right\|)}{\det\left\|a_{ik}(x)\right\|} dx \tag{4.7}$$

$$\leq \lambda^{\mathrm{n}} \int_H \det(\left\|a_{ik}\right\| . \left\|u_{x_i x_k}\right\|) dx = \lambda^{\mathrm{n}} \int_H \prod_{i=1}^{n} \mu_i(x) dx$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada

$$\mu_1(x),.....,\mu_n(x), \qquad \|a_{ik}\|.\|u_{x_i x_k}\|$$

matrisinin özdeğerleridir. $\|a_{ik}\|$ matrisi pozitif tanımlı ve $\|u_{x_i x_k}\|$ kesinlikle negatif olmadığından

$$\mu_i(x) \geq 0, \qquad i = 1,.....,n$$

dır. (Aslında $\|a_{ik}\|$ matrisinin kesinlikle pozitif olmasından iki matris te aynı anda köşegen forma indirgenebilir.) $\mu_i(x)$ in negatif olmayışından

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i(x)\right)^{1/n} \leq 1/n \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) = 1/n\, Sp\left(\|a_{ik}(x)\|.\|u_{x_i x_k}(x)\|\right) = 1/n \sum_{\mathrm{i,k=1}} a_{ik}(x)_{x_i} u_{x_i x_k} = f(x)/\mathrm{n} \quad (4.8)$$

yazılabilir. (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerine dayanarak

$$\lambda^n (1/n)^n \int_G |f(x)|^n\, dx \geq (\lambda/n)^n \int_H |f|^n\, dx \geq \Omega_n (M/R)^n \quad (4.9)$$

eşitsizliği ya da

$$M \leq \frac{\lambda R}{n(\Omega_n)^{1/n}} \|f_n\|_{L^n} \quad (4.10)$$

eşitsizliği yazılabilir.

4.4. s-Kapasite

s pozitif bir sayı, E ve T kümeleri R^n de Borel kümeleri olsun. E kümesi üzerinde tüm olası μ ölçümlerini yani B kümelerini ve E kümesinin alt kümelerini içeren, σ-cebiri üzerinde tanımlı tamamen toplanabilir negatif olmayan fonksiyonları göz önünde bulunduralım. Eğer $x \in T$ için

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leq 1 \quad (4.11)$$

olursa μ ölçümüne kabul edilebilir bir ölçüm denir.

$$\sup \mu E = C_s^T(E)$$

olarak kuralım. Burada supremum tüm kabul edilebilir ölçümler üzerinden alınır. $C_s^T(E)$ sayısına E kümesinin T kümesine göre bağlantılı s- kapasitesi denir. E kümesinin tümleyenine göre bağlantılı kapasitesine kısaca s kapasite denir ve $C_s(E)$ ile gösterilir. Böylece

$$C_s^{R^n \setminus E}(E) = C_s(E)$$

olarak gösterilir. s- kapasitenin bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 4.4.1. *$E_1 \subseteq E_2$ ve $T_1 \supseteq T_2$ olsun. O zaman*

$$C_s^{T_1}(E_1) \leq C_s^{T_2}(E_2)$$

olur. Özel durumda

$$E_1 \subset E_2 \text{ için } C_s(E_1) \leq C_s(E_2) \text{ dir.}[13]$$

Teorem 4.4.2. *Eğer $E = U_{i=1}^m E_i$ ise o zaman:*

$$C_s^T(E) \leq \sum_{i=1}^m C_s^T(E_i)$$

olur.

İspat. μ, E üzerinde kabul edilebilir bir ölçüm olsun. O zaman μ aynı zamanda E_i üzerinde de kabul edilebilir bir ölçüm olur. Ölçümlerin özelliğinden dolayı

$$\mu E \leq \sum_{i=1}^m E_i$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Teorem 4.4.3. *k katsayılı benzerlik dönüşümü altında s kapasitesi k^s ile çarpılır.*[13]

Teorem 4.4.4. *Q_R^{x0} yuvarının s kapasitesi R^s den az değildir.*

İspat. Bir μ ölçümü yuvarın merkezinde yoğunlaşsın ve R^s ye eşit olsun. Böyle bir ölçüm kabul edilebilirdir ve $\mu(Q_R^{x^0}) = R^s$ dir. Yani $C_s(Q_R^{x^0}) \geq R^s$ dir.

Teorem 4.4.5. *s>1 ve* $Q_{\rho,h}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq \rho^2 \ , \ 0 < x_n < h \ ve \ \rho < \frac{1}{4} h$$

şartlarıyla tanımlı bir silindir olsun. O zaman c; s *ye bağlı pozitif bir sabit olmak üzere*

$$C_s(Q_{\rho,h}) \geq ch\rho^{s-1}$$

olur.

İspat. Bir μ ölçümü x_n ekseninin $[\rho, h-\rho]$ parçası üzerinde yoğunlaşsın. Bu μ ölçümünün $[\rho, h-\rho]$ parçası üzerinde v lineer yoğunluğuyla düzgün dağıtıldığını varsayalım. Öyle ki x silindire ait olmazsa o zaman

$$v\int_{\rho}^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - \xi)^2\right]^{s/2}} \leq 1 \qquad (4.12)$$

eşitsizliği mevcut olur. Bu durumda

$$C_s(Q_{\rho,h}) \geq v(h - 2\rho) \geq \frac{vh}{2} \qquad (4.13)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(4.12) deki integral için kestirimde bulunuruz. Bir x noktası silindirin yanal yüzeyi üzerinde bulunsun. x_n ekseninin $[\rho, h-\rho]$ parçasından $[x_n - \rho, x_n + \rho]$ parçasını çıkaralım. Kalan kümeyi H ile belirtelim.(Kalan kısım tüm $[\rho, h-\rho]$ kısmıyla çakışabilir.)

$$\int_{\rho}^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - \xi)^2\right]^{s/2}} \leq \int_H \frac{d\xi}{|x_n - \xi|^s} < 2\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^s} = \frac{2}{s-1} \cdot \frac{1}{\rho^{s-1}} \qquad (4.14)$$

yazabiliriz.

$$\int_{x_n-\rho}^{x_n+\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - \xi)^2\right]^{s/2}} < 2\rho \frac{1}{\rho^s} = \frac{2}{\rho^{s-1}} \tag{4.15}$$

olduğundan silindirin yanal yüzeyindeki bir x noktası için

$$\int_{\rho}^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - \xi)^2\right]^{s/2}} < \frac{2s}{s-1} \frac{1}{\rho^{s-1}} \tag{4.16}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Eğer x silindirin tabanında bulunursa o zaman

$$\int_{\rho}^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - \xi)^2\right]^{s/2}} < \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^s} = \frac{2s}{s-1} \frac{1}{\rho^{s-1}} \tag{4.17}$$

eşitsizliği mevcut olur. Eğer yardımcı fonksiyonu

$$v = \frac{s-1}{2s} \rho^{s-1}$$

şeklinde kurarsak o zaman (4.12) eşitsizliği mevcut olur ve (4.13) eşitsizliğine dayanarak $c = \dfrac{s-1}{4s}$ olmak üzere

$$C_s(Q_{\rho,h}) \geq ch\rho^{s-1}$$

yazılabilir.

Teorem 4.4.6. $s < n$ *olsun.* $C_s(E) \geq \dfrac{measE}{K}$ *olacak şekilde herhangi* $E \subset Q_1^{x^0}$ *kümesi için* s ve n ye *bağlı pozitif bir K sayısı mevcuttur. Burada* $measE$, E *kümesinin Lebesgue ölçümünü belirtmektedir*.

İspat. $K = \int_{Q_1^0} \dfrac{dx}{|x|^s}$ olarak kuralım. O zaman

$$\frac{1}{K}\int_E \frac{dy}{|x-y|^s} \leq \frac{1}{K}\int_{Q_1^{x^0}} \frac{dy}{|x-y|^s}$$

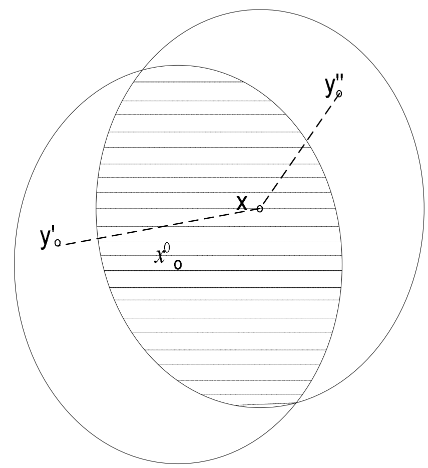
olur. Şekil 4 ten görülebileceği gibi

$$\int_{Q_1^{x^0}} \frac{dy}{|x-y|^s} \le \int_{Q_1^x} \frac{dy}{|x-y|^s} \le \int_{Q_1^0} \frac{dy}{|y|^s}$$

dir. Sonuç olarak

$$\frac{1}{K}\int_E \frac{dy}{|x-y|^s} \le \frac{1}{K}\int_{Q_1^0} \frac{dy}{|y|^s} = 1, \quad C_s(E) \ge \frac{1}{K}\int_E dx = \frac{measE}{K}$$

olur



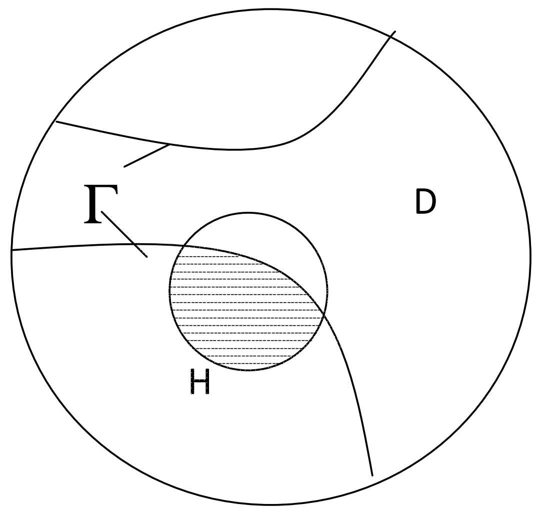
Şekil-4

4.5. Artış lemması

Lemma 4.5.1. *$Q_{4R}^{x^0}$ yuvarında bir D bölgesi ele alalım. Bu yuvarın $S_{4R}^{x^0}$ yüzeyi üzerinde limit noktaları olsun ve bu D bölgesi $Q_R^{x^0}$ yuvarıyla kesişsin. D bölgesinin tümleyeni ile $Q_R^{x^0}$ kesişimini H ile belirtelim. D bölgesinin $Q_{4R}^{x^0}$ içinde konumlanan sınır parçasını da Γ ile belirtelim. Bunları şekil 5 te görmek mümkündür. D bölgesinde tanımlı düzgün eliptik L operatörünü göz önünde bulunduralım. $u(x)$, $Lu \ge 0$ eşitsizliğinin bir çözümü olsun ve bu çözüm D bölgesinde pozitif, $\overline{D}$ da sürekli, Γ üzerinde de sıfır olsun. Eğer $s > 0$ için s- kapasitesi L operatörü için üst ise (yani $s \ge e - 2$, burada e, L operatörünün eliptiklik sabiti) o zaman $\xi > o$, s ye bağlı bir sabit olmak üzere*

$$\sup_{x\in D} u(x) \geq \left(1+\xi \frac{C_s(H)}{R^s}\right) \sup_{x\in D\cap Q_R^{x^0}} u(x) \tag{4.18}$$

olur.



Şekil 5

İspat. Benzerlik dönüşümü altında operatör benzerlik katsayısının karesi ile çarpılabildiğinden eliptiklik sabiti korunur. Başka bir deyişle böyle bir dönüşüm altında bir kümenin kapasitesi benzerlik katsayısının bazı kuvvetleri ile çarpılabilir. Bunu teorem 4.4.3. ten söyleyebiliriz. Bu yüzden R=1 durumunu göz önünde bulundurmak yeterlidir. R=1, $x^0 = 0$ olduğunu varsayabiliriz. $C_s(H) = 0$ olması durumunda (4.18) eşitsizliği maksimum prensibine göre gerçekleşir. $C_s(H) > 0$ olması durumunda keyfi bir ε sayısını,

$$0 < \varepsilon < C_s(H),\; U(x) = \int_H \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leq 1,\; x \notin H$$

için, $\mu H > C_s(H) - \varepsilon$ olacak şekilde bir μ ölçümü ele alalım.

$$\sup_{x\in D} u(x) = M$$

olarak belirtelim.

$$v(x)=M\left[1-U(x)+\frac{C_s(H)}{3^s}\right]$$

olarak alalım. H ın dışında $LU\geq 0$ olduğundan D bölgesinin içinde $Lv\leq 0$ yazabiliriz. Ayrıca D bölgesinin sınırı üzerinde v fonksiyonu u fonksiyonundan az değildir. Gerçekten sınır Γ yı ve S_4^0 küresi üzerinde bulunan noktaları içerdiğinden

$$u\big|_{\Gamma}=0\,,\ v\big|_{\Gamma}>0\,,\ u\big|_{S_4^0}\leq M$$

$$v\big|_{S_4^0}\geq M\left[1-\frac{1}{\inf_{\substack{x\in S_4^0\\ y\in Q_1^0}}|x-y|^s}\int d\mu+\frac{C_s(H)}{3^s}\right]\geq M\left[1-\frac{1}{3^s}C_s(H)+\frac{C_s(H)}{3^s}\right]=M$$

yazılabilir. Bu yüzden D bölgesinde $u\leq v$ dir. Açıkçası $v\big|_{\Gamma}>0$ yazmayabiliriz. (Her ne kadar D de $v>\dfrac{C_s(H)}{3^s}>0$ olduğu bilinse de) Çünkü $x\in D$, Γ ya meyilli iken $U(x)$ in limitinin var olup olmadığını bilmiyoruz. Bununla beraber herhangi bir durumda

$$\varliminf_{x\in D,x\to\Gamma} v(x)>0$$

eşitsizliğinin var olduğunu söyleyebiliriz. Bu maksimum prensibinin uygulamaları için yeterlidir. Böylece $u\leq v$ dir.

$$\sup_{x\in D\cap Q_1^0}u(x)\leq\sup_{x\in D\cap Q_1^0}v(x)\leq M\left(1-\frac{1}{\sup_{\substack{x\in Q_1^0\\ y\in Q_1^0}}|x-y|^s}\int d\mu+\frac{C_s(H)}{3^s}\right)\leq M\left[1-\left(\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}\right)C_s(H)+\frac{\varepsilon}{2^s}\right]$$

sonucuna ulaşırız. ε keyfi olduğundan lemmanın ispatı tamamlanır.

Uyarı 4.5.1. Eğer Lemma 4.5.1. in varsayımlarında $s<n$ ve $R<1$ ise o zaman

$$C_s(H)\geq\frac{measH}{K}$$

eşitsizliğini kullanarak (Bu teoerem 4.4.6. dan geçerlidir.)

$$\sup_{x\in D} u(x) \geq \left(1+\frac{\xi}{K}\frac{measH}{R^s}\right)\sup_{x\in D\cap Q_R^{x^0}} u(x) \tag{4.19}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bununla beraber $R<1$ koşulu arzu edilmeyen bir koşuldur. Ayrıca (4.19) eşitsizliğinde R^s yerine R^n yazılarak bu eşitsizlik geliştirilebilir.

Lemma 4.5.2. *Eğer lemma 4.5.1. in varsayımlarında $s<n$ ise o zaman $\eta>0$; s ve n ye bağlı bir sabit olmak üzere*

$$\sup_{x\in D} u(x) \geq \left(1+\eta\frac{measH}{R^n}\right)\sup_{x\in D\cap Q_R^{x^0}} u(x) \tag{4.20}$$

olur.

İspat. İlkin $Q_{4R}^{x^0}$ ı $Q_4^{x^0}$ a dönüştüren benzerlik dönüşümünü yapalım. Daha önce bahsedildiği gibi operatör yalnızca bir pozitif sayıyla çarpılıyor. Bu dönüşüm altında H, H' ne gitsin. O zaman

$$measH' = \frac{measH}{R^n}$$

olur. Sonuç olarak

$$C_s(H') \geq \frac{measH}{KR^n}$$

elde edilir. Bu da lemmanın ispatını tamamlamaktadır.

Asağıda anlatacağımız artış lemmasından Hölder normunun Priori kestirimlerini ve Harnack eşitsizliğini elde edebiliriz.(Keyfi katsayılı diverjans olmayan formdaki denklemler için bunlar ilkin N.V.Krylov ve M.Safanov [1979,1980] [12] tarafından ispat edilmiştir.)

Lemma 4.5.3. *Lemma 4.5.1. de Artış lemmasını kapasiteye bağlı olarak ifade ettik. Şimdi ise Artış lemmasını ölçüme bağlı olarak ifade edeceğiz. Bu lemma uygulamalar için çok kullanışlı bir lemmadır.* D *açık kümesinin $Q_{4R}^{x_0}$ yuvarı tarafından kapsandığını varsayalım.($0<R\leq 1/4$) Öyle ki bu kümenin $Q_R^{x_0}$ ile kesişimi boş olmasın. Lu=0 denkleminin bir çözümü D bölgesinde tanımlı ve üstelik $c(x)\leq 0$ olsun. Eğer u*

fonksiyonu $\overline{D}$ *da sürekli,* D *de pozitif ve* $Q_{4R}^{x_0}$ *tarafından kapsanan* ∂D *parçasında* $u=0$ *ise o zaman güçlü maksimum prensibine dayanarak*

$$\max_{D} u > \max_{D \cap Q_R^{x_0}} u$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\max_{D} u \Big/ \max_{D \cap Q_R^{x_0}} u = h$$

kestiriminde bulunmayı deneyelim. Bunu yapmak için bölgenin yapısına bazı sınırlamalar getirilmeli.

$$H = Q_R^{x_0} \backslash \mathrm{D}$$

olsun. O zaman H *kümesinin ölçümünün* $Q_R^{x_0}$ *ın ölçümüne oranı ne kadar büyükse* h *da o kadar büyük olur.*

$$D \subset Q_{4R}^{x_0} \;\; , \;\; 0 < \mathrm{R} \le 1/4$$

$$H = Q_R^{x_0} \backslash \mathrm{D} \;\; , \;\; \Gamma = \partial \mathrm{D} \cap Q_{4R}^{x_0}$$

notasyonlarını kullanalım. $u(x)$, $Lu=0$ *denkleminin bir çözümü olsun. Bu çözüm* D *bölgesinde pozitif ve* Γ *sınırı üzerinde sıfır olsun. O zaman* ξ*, operatörün eliptiklik sabitlerine bağlı pozitif bir fonksiyon olmak üzere*

$$\max_{D} u \ge \left(1 + \xi\left(\frac{measH}{R^n}\right)\right) \max_{x \in D \cap Q_R^{x_0}} u$$

olur.

İspat. *Kendimizi* $b_i(x) \equiv c(x) \equiv 0$ *durumuyla sınırlandıralım. Düşük dereceli terimlerin varlığı gerekli olmayan bir zorluk ortaya çıkarır. Bu nedenle bunları ihmal edeceğiz.* İspatı 3 adımda inceleyelim

1. Adım. H , $Q_\rho^{x'}$ yuvarını içersin. Burada ρ , $(measH)^{1/n}$ ile aynı büyüklüktedir.

$$1 \big/ \left|x - x'\right|^{s}$$

fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Bu fonksiyon $Lu = 0$ denkleminin sub çözümü olacak şekilde s sayısı seçilebilir.

$$M = \max_D u$$

olsun.

$$V = M\left(1 - \frac{\rho^s}{|x - x'|^s} + \frac{\rho^s}{(3R)^s}\right)$$

olarak kuralım. D bölgesinde $V > u$ olduğunu görürüz. Bu yüzden

$$\xi = \left(\frac{\rho}{R}\right)^s \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right)$$

olmak üzere

$$u\big|_{D \cap Q_\rho^{x_0}} < M\left(1 - \frac{\rho^s}{(2R)^s} + \frac{\rho^s}{(3R)^s}\right)$$

olur. Bu da lemmayı bu durumda ispatlar.

2.Adım. Şimdi de D bölgesinin küçük ölçümlü durumunu göz önünde bulunduralım. Yani eğer

$$measD / measQ_R^{x_0} < \delta$$

olacak şekilde λ ve n ye bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman

$$\max_D u > 2 \max_{D \cap Q_R^{x_0}} u$$

olur. $a_{ik}(x)$ fonksiyonlarının sürekli diferensiyellenebilir olduğunu varsayacağız. δ nın sadece λ ve n ye bağlı olduğu ortaya çıkacak yani δ denklemin katsayılarının türevlerinin büyüklüğüne bağlı olmayacak. Basit bir limit işlemi katsayıların düzgünlüğü üzerindeki tüm sınırlamaları kaldırmamıza izin verir.

$$meas\Gamma = 0$$

olduğunu varsayabiliriz. Aksi durumda keyfi küçük ε için D bölgesinin yerine

$$D' = \left\{ x \in Q_{4R}^{x_0},\ u(x) > \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0$$

bölgesini ve $u(x)$ in yerine

$$u'(x) = u(x) - \varepsilon$$

fonksiyonunu göz önünde bulundurabilmeliyiz. Eğer

$$meas\Gamma = 0$$

ise o zaman

$$\bar{D} \subset D_0 \ \text{ ve } \ \mathrm{measD}_0 / measQ_R^{x_0} < \delta$$

olacak şekilde açık bir D_0 kümesi mevcuttur.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-n\lambda}{8R^2} & ; \ \mathrm{x} \in \mathrm{D} \ \text{ iken} \\ 0 & ; \ \ \mathrm{x} \in \mathrm{Q}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{x}_0} \backslash \mathrm{D}_0 \end{cases}$$

olacak şekilde C^{∞} dan olan bir $f(x)$ fonksiyonu inşa edelim.

$$\mathrm{x} \in (\mathrm{Q}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{x}_0} \cap \mathrm{D}_0) \backslash \mathrm{D}$$

için

$$0 \geq f(x) \geq \frac{-n\lambda}{8R^2}$$

olsun. $\mathrm{Q}_{4\mathrm{R}}^{\mathrm{x}_0}$ yuvarında

$$\mathrm{Lv}=f \quad , \quad \mathrm{v}\big|_{S_{4R}^{x_0}} = 0$$

Dirichlet problemini çözelim. Bu problemin çözümleri için katsayıların düzgünlüğü gereklidir.(Miranda[1970]) . Teorem 4.3.1. e dayanarak

$$|v| \ \leq \ C \ \delta^{1/n}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\max_{\bar{D}} u = M$$

olsun.

$$\omega(x) = M\left(\frac{(x-x_0)^2}{(4R)^2} + v(x) + 1/4\right)$$

olarak kuralım. D bölgesinde

$$L\omega(x) \le M\left(\frac{n\lambda}{8R^2} + f(x)\right) \le 0$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Lemmanın durumu şimdi D bölgesinde $\omega - u$ fonksiyonuna maksimum prensibini uygulamayla davam edecek.

3. Adım. Şimdi de genel duruma doğru ilerleyelim.

$$measH\ ,\ measQ^{x_0}_{R/4}$$

ten küçük keyfi bir sayı olsun. Benzerlik dönüşümü ile üzerinde düşünülen denklem aynı λ eliptik sabitli bir denkleme dönüşür ve bu yüzden $R = 1/4$ durumunu göz önünde bulundurmak yeterlidir. h sayısı

$$meas(H \cap Q^{x_0}_{1/4-h}) = (measH)/2, \quad \mathrm{v}_1 = 1 - u/\max_{\bar{D}} u$$

eşitlikleri mevcut olacak şekilde seçilsin.

$$\inf_{\overline{D \cap Q^{x_0}_{1/4}}} v_1 \ge \sigma$$

eşitsizliği var olacak şekilde

$$\sigma = \sigma(measH)$$

varlığını ispatlamalıyız. $H = H_1$ olsun.

$$measH_1^0 = (measH_1)/2$$

olacak şekilde

$$Q^{x_0}_{1/4-h} \cap H_1 = H_1^0$$

olarak kuralım. x, H_1^0 kümesinin yoğunluk noktası olsun ve r_x

$$meas(Q_{r_x}^x \backslash \mathrm{H}_1) \le \delta r_x^n$$

olacak şekilde h ı aşmayan en büyük sayı olsun. Burada δ, 2. adımdan bir sabittir. İki durum meydana gelebilir.

$$1)\ r_x < h \ \text{ ve } \ 2)\ r_x = h$$

İkinci durumda 2. adımdan

$$v_1\big|_{Q_h^x} > 1/2$$

ve sonra 1. adımdan σ, λ ve h a bağlı yani λ ve $measH$ a bağlı olmak üzere

$$v_1\big|_{D\cap Q_{1/4}^{x_0}} > \sigma$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış oldu.

Uyarı 4.5.2. Lemma 4.5.3. ün ispatında 3. adımda bahsedilen 2 durumdan her $x \in H_1^0$ noktaları için birinci durum gerçekleşsin. O zaman

$$meas(Q_{r_x}^x \backslash \mathrm{H}_1) = \delta r_x^n \tag{4.21}$$

olur. H_1^0 ın tüm kümeleri $Q_{r_x}^x$ yuvarı tarafından kapsanır. Herhangi $\mathrm{x} \in \mathrm{H}_1^0$ için (4.21) eşitliği gerçekleşir. Banach sürecini uygulamayı seçelim. Ya sonlu ya da sayılabilir sayıda ikili ayrık yuvarların ölçümleri toplamı

$$meas\, H_1^0 / 5^{\mathrm{n}} = meas\, H_1 \Big/ \left(2.5^n\right)$$

ölçümler toplamından daha büyüktür. Bu yuvarlar

$$Q_1, \ldots\ldots, Q_{s,\ldots\ldots}$$

olsun. 2. adımdan

$$v_1\big|_{Q_1 \backslash \mathrm{H}_1} > 1/2$$

yazabiliriz.

$$measH_2 > measH_1\left(1+\delta/\left(2.5^n\right)\right) = measH\left(1+\delta/\left(2.5^n\right)\right)$$

olacak şekilde

$$v_2 = 2v_1 \quad , \quad \mathrm{D}_2 = \left\{x \in D : v_2 < 1\right\} \text{ ve } \mathrm{H}_2 = Q_{1/4}^{x_0} \backslash \mathrm{D}_2$$

olarak kuralım. Şimdi de v_1, D_1 ve H_1 yerine sırasıyla v_2, D_2 ve H_2 yerleştirerek aynı görüşü tekrarlayalım.

$$measH_3 > measH\left(1+\delta/\left(2.5^n\right)\right)^2$$

olacak şekilde

$$v_3 = 2v_2 = 2^2\mathrm{u} \ , \quad \mathrm{D}_3 = \left\{x \in D : v_3 < 1\right\} \text{ ve } \mathrm{H}_3 = Q_{1/4}^{x_0} \backslash \mathrm{D}_3$$

bulacağız. Eğer birinci durum ya da ikinci durumdan biri gerçekleşirse lemma ispatlanacak. Bu işlemi devam ettirerek

$$v_k = 2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{v}_1 \ , \quad \mathrm{D}_\mathrm{k} = \left\{x \in D : v_k < 1\right\}, \ \mathrm{H}_\mathrm{k} = Q_{1/4}^{x_0} \backslash \mathrm{D}_\mathrm{k}$$

$$measH_k > measH\left(1+\delta/\left(2.5^n\right)\right)^{k-1}$$

olacak şekilde v_k, D_k ve H_k elde ederiz. Fakat $H_k \subset Q_{1/4}^{x_0}$ olduğundan bu işlem sonlu k_0 adımından sonra sonlanmalı. Bu durum δ, measH ve h a bağlı yani measH , λ ve n ye bağlıdır. Diğer taraftan

$$meas\left(Q_{1/4}^{x_0} \backslash \mathrm{H}_\mathrm{k}\right) = 0$$

olmadan önce de bu işlem sonlanmaz. Böylece

$$v_{k_0}\Big|_{Q_{1/4}^{x_0} \cap D} > 1$$

eşitsizliği ya da

$$v_1\Big|_{Q_{1/4}^{x_0} \cap D} > 1/2^{k_0}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $\sigma = 1/2^{k_0}$ olur ve lemma ispatlanmış olur.

4.6. Harnack Eşitsizliği

Teorem 4.6.1. *Eğer* $u(x)$ $G \subset R^n$ *bölgesinde* $Lu = 0$ *denkleminin bir çözümü ise o zaman* G *bölgesine kompakt bir şekilde gömülen herhangi* G' *alt bölgesi ve tüm* $x, y \in G'$, $x \neq y$ için

$$\frac{|u(x)\text{-}u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C \sup_{G} u$$

olacak şekilde ∂G *den* G' *ne olan uzaklığa bağlı* $C > 0$ *sayısı ve* λ, n ve μ *ye bağlı* $\alpha > 0$ *sayısı mevcuttur. Bu teorem aşağıdaki salınım teoreminin kesin bir sonucudur.* [12]

Uyarı 4.6.1. Teorem 4.6.1. deki α sabitinin keyfi bir şekilde küçük seçilebileceğini 1987 de M. Safanov göstermiştir. [12]

Teorem 4.6.2. $Lu = 0$ *denkleminin bir çözümü* $Q_R^{x_0}$ ($R<R_0$) *üzerinde tanımlansın. o zaman* $\eta > 0$; λ, M, n ve R_0 *a bağlı olmak üzere*

$$\underset{Q_R}{osc}\, u > (1+\eta)\, \underset{Q_{R/4}}{osc}\, u$$

olur. Eğer $b_i \equiv c \equiv 0$ *olursa o zaman* $R<R_0$ *sınırlaması kaldırılabilir. Bu durumda* η; *yalnızca* λ ve n *ye bağlı olur.*

İspat. $b_i \equiv c \equiv 0$ olduğunu varsayalım.

$$\sup_{Q_{R/4}^{x_0}} u - \inf_{Q_{R/4}^{x_0}} u = d, \quad v = u - d/2$$

olarak alalım. Ayrıca

$$E^+ = \left\{ x \in Q_R^{x_0} : \quad v \geq 0 \right\} \quad \text{ve} \quad E^- = \left\{ x \in Q_R^{x_0} : \quad v \leq 0 \right\}$$

olsun. E^+ *ya* da E^- kümelerinden en az biri

$$meas E^{+(-)} \geq \left(meas Q_{R/4}^{x_0} \right) / 2$$

şartını sağlar. Bu şartı sağlayan küme E^{-} kümesi olsun. O zaman lemma 4.5.3. e dayanarak

$$\sup_{Q_R} v > (1+\xi)\,d/2$$

eşitsizliği ya da

$$\operatorname{osc}_{Q_R} u > (1+\xi/2)\,d$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.6.3. $Lu=0$ *denkleminin pozitif bir çözümü* $Q_R^{x_0}$ $(R<R_0)$ *üzerinde tanımlansın.*

$$\sup_{Q_{R/16}} u \Big/ \inf_{Q_{R/16}} u < C$$

olacak şekilde λ, M, n ve R_0 *a bağlı bir* $C>0$ *sabiti mevcuttur. Eğer* $b_i \equiv c \equiv 0$ *olursa o zaman* $R<R_0$ *sınırlaması gerekli değildir.* [12]

İspat. Artış lemmasından Harnack eşitsizliğinin elde ediliş sürecini detaylandıralım.

$$b_i(x) \equiv c(x) \equiv 0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda R^n üzerine benzerlik dönüşümünü uygulayabilir ve aynı zamanda çözümü, bazı sabitler ekleyerek değiştirebiliriz. $R=16$ olduğunu varsayalım. Uygun olması için yuvarın merkezi orjinde olsun. Böylece

$$u\big|_{Q_{16}^0} > 0$$

olur. Çözümü bir sabitle çarparak

$$\sup_{Q_1} u = 2$$

olarak ele alabiliriz. O zaman

$$\inf_{Q_1} u > \sigma$$

olacak şekilde λ ve n ye bağlı bir $\sigma>0$ sabitinin varlığını göstermek gerekir.

İspatı 4 adımda inceleyelim.

1.Adım. Artış lemması aşağıdaki gibi değiştirilebilir. Eğer $u(x)$

$$\mathrm{D} \cap Q_{R/4}^{x_0} \neq \varnothing \quad , \mathrm{u}\big|_{\partial \mathrm{D} \cap Q_R^{x_0}} = 0, \;\; D \subset Q_R^{x_0}$$

bölgesinde denklemin pozitif bir çözümü ve

$$meas D < \varepsilon_0 meas Q_R^{x_0} \tag{4.22}$$

olacak şekilde herhangi $A > 1$ için bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı mevcutsa o zaman

$$\sup_D u > A \sup_{D \cap Q_{R/4}^{x_0}} u$$

olur. Aslında δ, lemma 4.5.3.te 2. adımından bir sabit ve N

$$2^N > A$$

olacak şekilde en küçük doğal sayı olsun.

$$Q_R^{x_0} \backslash Q_{R/4}^{x_0}$$

katmanını S_i eş merkezli kürelerle $3R/4N$ kalınlıkta N katmana bölelim.

$$u(x_i) = \max_{D \cap S_i} u$$

olacak şekilde $x_i \in S_i$ noktasını göz önünde bulunduralım. Lemma 4.5.3 ün 2. adımı $Q_{3R/4N}^{x_i}$, $Q_{3R/16N}^{x_0}$ yuvarlarına ve $\mathrm{D} \cap Q_{3R/4N}$ e uygulandığında arzu edilen durum elde edilir. Sonradan belirlenmiş λ ve n gibi A da yukarıda ki gibi seçilecek. Bu nedenle bunun verildiğini varsayıp buna tekabül eden ε_0 ı bulalım.

$$G = \left\{ x \in Q_4^0 : \;\; u(x) > 1 \right\}$$

notasyonunu kullanalım.

2. Adım.

$$meas G \geq \varepsilon_0 \Omega_n$$

olsun. Burada Ω_n birim yuvarın hacmidir. Lemma 4.5.3. te

$$\xi = \xi\left(\left(measQ^0_{4-\varepsilon_0}\right)\Big/4^n\right), \quad \text{v=1-u+}\xi$$

olarak alalım.

$$D = \left\{x \in Q^0_{16} : \ v(x) > 0\right\}$$

olarak belirleyelim. O zaman (4.22) den

$$meas\left(Q^0_4 / D\right) \geq measQ^0_{4-\varepsilon_0}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer $x_0 \in Q^0_4$ noktasında $u(x_0) \leq \xi$ ise o zaman

$$\sup_{D \cap Q^0_{16}} v \geq 1$$

olur. Böylece Lemma 4.5.3. e dayanarak

$$\sup_{D \cap Q^0_{16}} v \ \geq \ 1+\xi$$

yazılabilir. Yani

$$\inf_{D \cap Q^0_{16}} u \leq 0$$

elde edip bir çelişkiyle karşılaşırız. Bu yüzden σ yı ξ olarak seçebiliriz. Bu durumda eşitsizlik ispatlanır. Bundan böyle

$$measG < \varepsilon_0 \Omega_n$$

olduğunu varsayalım

3.Adım.

$$u_1 = u - 1$$

olduğunu varsayalım. O zaman

$$u_1(x_1) \geq 1$$

olacak şekilde S_1^0 küresi üzerinde bir x_1 noktası mevcuttur. x_1 noktasını içeren

$$\left\{x \in Q_4^0 : \quad u_1(x) > 0\right\}$$

kümesinin bileşenini G_1 ile belirtelim. Yeterince küçük ρ için

$$meas\left(G_1 \cap Q_\rho^{x_1}\right) > \varepsilon_0 meas Q_\rho^{x_1}$$

olur. $\rho = 1$ için

$$meas\left(G_1 \cap Q_1^{x_0}\right) < \varepsilon_0 meas Q_1^{x_0}$$

olur. Bu yüzden ρ da $meas\left(G_1 \cap Q_\rho^{x_1}\right)$ ölçümünün sürekliliğinden

$$meas\left(G_1 \cap Q_{\rho_1}^{x_1}\right) = \varepsilon_0 meas Q_{\rho_1}^{x_0}$$

olacak şekilde ρ_1 mevcuttur. $G_1 \cap Q_{4\rho}^{x_1}$ kesişimini D_1 ile belirtelim. O zaman

$$\sup_{D_1} u > A$$

elde edilir. $B = A/2$ olarak kuralım. İlkin

$$u\big|_{D_1} > 1 = B^0 \quad , \ \text{measD}_1 > \varepsilon_0 meas Q_{\rho_1}^{x_1}$$

yazabiliriz. İkinci olarak $u_1(x_2) > 2B$ olacak şekilde $S_{1+4\rho_1}^0$ küresi üzerinde bir x_2 noktası vardır. $u_2 = u_1 - B$ olarak kuralım. x_2 noktasını içeren

$$\left\{x \in Q_4^0 : \ u_2(x) > 0\right\}$$

kümesinin bileşenini G_2 ile belirtelim. Sözü geçen görüşü tekrarlayarak

$$meas\left(G_2 \cap Q_{\rho_2}^{x_2}\right) = \varepsilon_0 meas Q_{\rho_2}^{x_2}$$

olacak şekilde ρ_2 bulabiliriz. Eğer $D_2 = G_2 \cap Q_{4\rho_2}^{x_2}$ olarak kurarsak o zaman

$$u\big|_{D_2} > B^1, \ \text{measD}_2 > \varepsilon_0 meas Q_{\rho_2}^{x_2}$$

olur. Bu işlemi devam ettirelim. O zaman

$$x_i \in S^0_{1+4\rho_1+\dots\dots+4\rho_i} \quad , \quad \mathrm{u}\big|_{D_i} > B^{i-1} \quad , \mathrm{measD_i} > \varepsilon_0 Q^{x_i}_{\rho_i}$$

olacak şekilde

$$\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, x_1, \dots, x_i, \dots, D_1, \dots, D_i, \dots$$

dizilerini elde ederiz. k,

$$4\rho_1 + \dots\dots + 4\rho_k < 1$$

olacak şekilde en küçük indis olsun.(Böyle bir k mevcuttur çünkü $u(x_i)$, i ile sınırlı olmadan artar). Bu yüzden

$$\rho_i > \frac{1}{4}.\frac{1}{2^{i_0}}$$

olacak şekilde $i_0 \le k$ mevcuttur. Böylece

$$D_{i_0} \subset Q^0_3 \quad , \mathrm{measD_{i_0}} > \varepsilon_0 \Omega_n \frac{1}{4.2^{ni_0}} \quad , \ \mathrm{u}\big|_{D_{i_0}} > B^{i_0-1}$$

olur.

4.Adım Artış lemmasını kullanarak

$$\xi_0 = \xi\left(1 - 1/4^n\right)$$

sabiti bulabiliriz. $B = 1/\xi_0$ olsun. Dolayısıyla $A = 2/\xi_0$ olur. Böylece ε_0, sadece λ ve n ye bağlıdır.

$$\xi_1 = \xi\left(1 - \varepsilon_0\right) \quad , \mathrm{v} = \mathrm{u}\left(1\text{-}\xi_1\right)$$

olarak kuralım.1. adım da ki görüşü kullanarak

$$u\big|_{Q^{x_{i_0}}_{\rho_{i_0}}} > \xi_1 B^{i_0-1} = \xi_1 \left(1/\xi_0\right)^{i_0-1}$$

elde ederiz. Bu nedenle aynı görüşü

$$v = u\left(1 - \xi\left(4/\xi_0\right)^{i_0-1}\right)$$

fonksiyonuna uygulayarak

$$u\big|_{Q^{x_{i_0}}_{4\rho_{i_0}}} > \xi_0 \xi_1 B^{i_0-2} = \xi_0 \xi_1 \left(1/\xi_0\right)^{i_0-2}$$

elde ederiz. Aynı görüşü $Q^{x_{i_0}}_{4^2 \rho_{i_0}}$, $Q^{x_{i_0}}_{4^3 \rho_{i_0}}$ yuvarlarına vs. ardışık olarak uygulayarak

$$u\big|_{Q^{x_{i_0}}_{4^l . \rho_{i_0}}} > \xi_0^l \xi_1 \left(1/\xi_0\right)^{i_0-l-1}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$Q^{x_{i_0}}_{4^l \rho_{i_0}} \supseteq Q^{x_{i_0}}_{4^l . 1/4.(1/2)^{i_0}} \supset Q^0_1 \quad , \quad l \ < \ i_0/2+3$$

olacak şekilde bir l mevcuttur. Bu yüzden

$$\left(1/\xi_0\right)^{i_0-1} . \xi_1 . \xi_0^{i_0/2+3} \le 1$$

ya da

$$\mathrm{i}_0 < \ln\left(\ln\frac{1}{\xi_1} \Big/ \ln\frac{1}{\xi_0} \right) + 4$$

olur. Dolayısıyla i_0, λ ve n ye bağlıdır. Böylece

$$measD_{i_0} > \varepsilon_1$$

yani

$$\text{measG} > \varepsilon_1$$

olur. Burada $\varepsilon_1 > 0$; λ ve n ye bağlıdır. Öyle ki 1. adımdaki görüş şu sonuca varmamıza izin verir.

$$\inf_{Q_1} v > \sigma_1$$

olacak şekilde λ ve n ye bağlı $\sigma_1 > 0$ mevcuttur. Böylece Harnack eşitsizliği ispatlanmış oldu.

Uyarı 4.6.2. Artış lemmasının ispatı ve bunun sonucunda Hölder normunun bir kestirimi ve Harnack Eşitsizliği $Lu = 0$ denkleminin çözümleri için daha sonra Novruzov [1983][12] tarafından değişik metotlar kullanılarak sunulmuştur. Novruzov $|x|^{-s}$ çekirdeğiyle potansiyelleri yapılandırıp sınır fonksiyonlarını kullanmıştır. Burada $s > 0$ yeterince küçüktür. Orjinal denklem yerine

$$Lu + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} = 0$$

denklemi göz önünde bulundurulmuş ve $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,........,x_n,x_{n+1}) \equiv \mathrm{u}(\mathrm{x}_1,........,x_n)$ dir. $|x|^{-s}$ fonksiyonu yeterince küçük $s > 0$ için yeni denklemin bir süper çözümüdür.

Tanım 4.6.1.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{i,k}(x)u) = 0 \tag{4.23}$$

denkleminin çözümünden D bölgesinde sürekli bir $u(x)$ fonksiyonu kastedilmektedir. Öyle ki herhangi $\varphi \in C^1\left(\bar{D}\right) \cap C^2\left(D\right)$ test fonksiyonu için

$$\varphi|_{\partial D} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right|_{\partial D} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} m_i = 0$$

ile birlikte

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_D u(x)\ a_{i,k}(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} dx = 0 \tag{4.24}$$

integral özdeşliği geçerlidir. [16]

Burada $C^s\left(D\right)$, D bölgesinde *s* kere sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayını ve $\frac{\partial}{\partial v}$ dış normal türevi belirtmektedir.

Teorem 4.6.4. $u(x)$ *,sınırlı bir* D *bölgesinde* (4.24) *manasında* (4.23) *denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman herhangi* D', $\bar{D}' \subset D$ *alt bölgesi için* c *sabiti yalnızca* D, D', λ, K ve n *ye bağlı olmak üzere*

$$\max_{D'} u(x) \leq c \min_{D'} u(x)$$

eşitsizliği mevcuttur. [16]

Not: Burada K sabiti (4.23) teki $a_{i,k}(x)$ katsayılarının Dini- süreklilik şartından gelir.

$\forall x \in D$ ve $\forall y \in D$ için $\left|a_{i,k}(x) - a_{i,k}(y)\right| \leq \omega(|x-y|)$ mevcuttur. Burada $\omega(t)$ fonksiyonu

$$\omega(0) = 0; \ \int_0^d \frac{\omega(t)}{t} dt \leq K \ ; \ d = \max_{x,y \in D} |x-y|$$

olacak şekilde $[0, \infty]$ aralığında tanımlı monoton, pozitif, sürekli bir fonksiyondur.

4.7. Harnack Eşitsizliği İle İlgili Güncel Çalışmalar

Teorem 4.7.1. $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, *ve*

$$DivA(x, u, \nabla u) = 0$$

denkleminin

$$A(x,\xi,\eta)\eta \geq \omega(x)|\eta|^p, \quad A(x,\xi,-\eta) = -A(x,\xi,\eta)$$

şartlarını sağlayan sınırlı pozitif bir çözümü $u \in W^1_{pw}(Q_R^{x_0})$ *fonksiyonu,* $Q_R^{x_0}$ *da tanımlı olsun. O zaman*

$$\sup_{Q_{R/4}^{x_0}} u(x) \Big/ \inf_{Q_{R/2}^{x_0}} u(x) \leq C$$

olacak şekilde n, p, λ ve A_p *ye bağlı bir* $C > 0$ *sabiti mevcuttur.* [15]

Not: Burada $\omega \in A_p$ olması için

$$\sup_{Q\subset R^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1-p'} dx\right)^{p-1} = A_p < \infty$$

$Q\in R^n$ keyfi bir yuvar, $|Q|$ onun Lebesgue ölçümü, $1<p<\infty$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,

$p=\infty$ için $p'=1$, $p'=\infty$ için $p=1$ şartlarını sağlaması gerekir.

$W^1_{p\omega}(\Omega)$ ise Ω bölgesinde tanımlı ağırlıklı Sobolev uzayıdır

Tanım 4.7.1. Ω da herhangi lokal integrallenebilir V fonksiyonu ve $\sigma\in R$ için

$$\|V\|_{\sigma,\Omega} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<2R}} \frac{1}{r^\sigma} \int_{\{y\in\Omega:|x-y|<r\}} |V(y)| \int_{|x-y|}^{4R} \frac{s}{\omega(B_s(x))} ds\,\omega(y)dy$$

normu sınırlı ise V fonksiyonuna $M_\sigma(\Omega,\omega)$ sınıfındandır denir. [6]

Teorem 4.7.2. *ω, $B_{3r}\subset\Omega$ yuvarında*

$$\exists\lambda>0:\ \lambda^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \le a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \le \lambda\omega(x)|\xi|^2$$

düzgün eliptiklik şartını sağlayan

$$b_0\in R\backslash\{0\},\ \left(\frac{b_i}{\omega}\right)^2, \frac{c}{\omega}, \left(\frac{d_i}{\omega}\right)^2, \frac{f}{\omega}, \left(\frac{h_i}{\omega}\right)^2 \in M_\sigma(\Omega,\omega),\ \sigma>0$$

olmak üzere

$$-\left(a_{ij}\omega_{x_i}+d_j\omega\right)_{x_j} + \frac{b_0}{\lambda}\omega|D\omega|^2 + b_i\omega_{x_i} + c\omega = f - \left(h_i\right)_{x_i}$$

denkleminin negatif olmayan zayıf bir süper çözümü olsun.

B_{3r} yuvarında $\omega\le M$ olacak şekilde $M>0$ bir sabit olsun. O zaman

$$\omega^{-1}(B_{2r})\int_{B_{2r}} w\ \omega\,dx \le c\left\{\min_{B_r} w + r^\sigma \left\|\frac{f}{\omega}\right\|_{\sigma,B_{3r}} + \left(r^\sigma\sum_{i=1}^n\left\|\left(\frac{h_i}{\omega}\right)^2\right\|_{\sigma,B_{3r}}\right)^{1/2}\right\}$$

olacak şekilde n, M, λ ve ω nın A_2 *sabitine bağlı c sayısı mevcuttur.*[6]

KAYNAKLAR

[1] R. A. Adams and J.J.F.Fournier, Sobolev Spaces, *Academic Press*, New York, (2003).

[2] G. Caristi and E. Mitidieri,Harnack inequality and applications to solutions of Biharmonic Equations, Operator Theory: Advances and Applications, **168**, 1-26, (2006)

[3] F. Chiarenza, E. Fabes and N. Garofalo, Harnack's inequality for schrödinger operatörs and the continuity of solutions,Proceeding of the American *Mathematical Society*, **98,**(1986), 415-425

[4] L. Damascelli and B. Sciunzi, Harnack inequalities,maximum and comparison principles and regularity of positive solutions of m-laplace equations,*Springer Verlag*, Claculus of Variations (2005) 25(2):139-159

[5] E. DiBenedetto, Partial Differential Equations, *Springer New York Dordrecht Heidelberg,*(London), (2000)

[6] G. Di Fazio, M.S. Fanciullo, P. Zamboni, Harnack İnequality And Smoothness For Quasilinear Degenerate Elliptic Equations, *J. Differential Equations*, 2008, 245, 2939–2957

[7] R. Garattini, Harnack's inequality on homogeneous spaces,*Annali di Matematica pura ed applicata(4),***179** (2001), 1-16

[8] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, *Springer Verlag*, New York,(1998)

[9] Q. Han and F.Lin, Elliptic Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,* New York,(2000)

[10] F.John, Partial Differential Equations, *Springer Verlag*, New York ,(1982)

[11] M. Kassmann, "Harnack Inequalities: An Introduction," *Boundary Value Problems*, vol. 2007, Article ID 81415, 21 pages, 2007. doi:10.1155/2007/81415

[12] V.A Kondrat'ev and E.M Landis, Qualitative Theory of Second Order Linear Partial Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York (1989)

[13] E.M.Landis, Second order equations of elliptic and parabolic type, *American Mathematical Society,* USA, (1998)

[14] W. Liu, Harnack inequality and applications for stochastic evolution equations whith monotone. *Drifts, J. Evol. Equ.* 2009, **9**, 747-770

[15] F.I. Mamedov, R.A. Amanov, On Some Propertıes Of Solutıons Of Quasılınear Degenerate Equatıons**,** *Ukrainian Mathematical Journal*, 2008, **60**, 7, 1073-1098

[16] F.I Mamedov, On the Harnack inequality for the equation formally adjoint to a linear Elliptic Differential Equation. *Sibirski matematicheski zhurnal.* (1992) **33**, 5, 100-106

[17] I.G Petrovsky, Lectures on Partial Differential Equations, *Dover Publications*,USA, (1991)

[18] Y. Pinchover and J. Rubinstein, An introduction to partial differential equations, *Cambridge University Pres*, New York, (2005)

[19] P. Pucci and J. Serin, The Harnack inequality in R^2 for quasilinear elliptic equations,*Journal d'analyse math.,***85**(2001), 1-14

[20] J. Serin, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J.d'Analyse Math,*(1963), 481-486

[21] J. Wang, Harnack Estimate For the H^k Flow, Science in China Series A: Mathematics Nov., 2007, **50**, 11, 1642-1650