T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK TOPLAMLAR ve BAZI SONUÇLAR

Arife ATAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Eylül 2010

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Arife ATAY tarafından yapılan “Topolojik Toplamlar ve Bazı Sonuçlar ” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>

Başkan : Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Şemsettin OSMANOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat İLHAN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03/11/2010

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.........

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Lisans öğrenimim sırasında engin matematik bilgisinden dolayı kendisine olan hayranlığıma, yüksek lisans öğrenimimin başlamasıyla, disiplinli eğitim anlayışı ve her alanda sahip olduğu bilgi, tecrübe ile, hayranlık katan; her yönüyle kendime örnek aldığım ve bana öğrencisi olma ayrıcalığını tattıran, saygıdeğer hocam

Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR’a

minnettarım.

Bana duydukları sevgi, anlayıs ve güvenle beni bugünüme getiren sevgili

Anneme ve Babama

Çalışmalarımın her aşamasında yanımda olan, benimle birlikte bıkmadan usanmadan koşuşturan sevgili eşim

Cihad ATAY’a

Tezin yazımı esnasında sahip oldukları tecrübeleri ve bilgileri aktarmaktan çekinmeyen, samimiyetlerinin içtenliğine canı gönülden inandığım sayın Doç. Dr. H. Özlem GÜNEY, Yrd. Doç. Dr. Sedat İLHAN, Yrd. Doç. Dr. Bilal Çekiç, Arş. Gör. Seçil YALAZ ve Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanlarına,

Bunca yardımın ve desteğin yanı sıra beni bezdirmek için elinden geleni yapmasına rağmen başaramayan ancak bana dünyanın en onurlu mesleğini bahşeden kıymetli hazinem sevgili kızım Ceren’e,

katkılarından dolayı sonsuz teşekkürler…

ÖZET

TOPOLOJİK TOPLAMLAR; AYRIK BİRLEŞİM TOPOLOJİSİ VE ÖZEL DURUMLARI; TOPOLOJİK TOPLAMIN AÇIK-KAPALI ALT KÜMELERİ; TOPOLOJİK TOPLAMIN BİR ALT KÜMESİNİN İÇİ-KAPANIŞI, TOPOLOJİK TOPLAMLAR ÜZERİNDE TABAN, SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER VE AYIRMA AKSİYOMLARI ADLI KONU BAŞLIKLARI ÜZERİNDE ARAŞTIRMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arife ATAY

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2010

Bu çalışmada, topolojik uzayların boş olmayan ayrık bir ailesinin serbest bileşimi ve ayrık bileşim topolojisi üzerine araştırmalar yer almaktadır.

Genel bilgiler verilip topolojik uzaylar tanıtıldıktan sonra, serbest bileşim için iki yönlü yaklaşımdan bahsedilmiştir. İlk olarak; verilen bir (X,τ) topolojik uzayın $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ alt uzayları ele alınmış ve bu alt uzayların belirli koşulları sağlaması durumunda alınan topolojik uzayın alt uzaylarının serbest bileşimi oluşu anlatılmıştır. İkinci olarak; $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların boş olmayan ayrık bir ailesi için $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ uzayının, ileride bahsedilecek olan ayrık birleşim topoloji ile verilen ailenin serbest bileşimi olacağı anlatılmıştır.

Çalışmanın devamında yukarıda bahsedilen yaklaşımlardan ikincisi ele alınarak araştırmalar sürdürülmüştür. Öncelikle ayrık birleşim topolojisinin özel durumlarından, sonrasında serbest bileşimin açık ve kapalı alt kümeleri tanımlanarak iç ve kapanış kavramlarından bahsedilmiştir. Araştırmanın ilerleyen bölümlerinde ise topolojik toplamlar üzerinde taban, sürekli dönüşümler ve ayırma aksiyomları ile ilgili elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Bu araştırma ile, tanıdığımız $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayları için bilinen tanım ve teoremlerden yararlanılarak (X,τ) topolojik toplamı için tanımlar, teoremler ve beraberinde bir takım sonuçlar elde edilmiştir

Anahtar Kelimeler: Topolojik toplamlar, ayrık birleşim (topoloji), serbest birleşim

ABSTRACT

RESEARCH ON THE TOPOLOGİCAL SUMMED; DISJOINT UNION TOPOLOGY AND IT'S SPECIAL CONDITIONS; OPEN-CLOSED SUBSETS OF TOPOLOGICAL SUMMED; INTERIOR-CLOSURE OF ANY SUBSET OF TOPOLOGİCAL SUMMED; BASES, CONTINUOUS TRANSFORMATIONS AND SEPARATION AXIOMS ON THE TOPOLOGICAL SUMMED

MASTER THESIS
Arife ATAY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE
2010

This study includes free union of a disjoint non-empty family of topological spaces and research on the discrete union topology.

After general information of topology were given and topological spaces were introduced, the release of two comprehensive approaches to free union are discussed. Firstly, $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ subspaces of a given (X,τ) topological space are considered, and topological spaces taken in case of certain conditions are provided by these subspaces are described by the free union. Secondly, it has been told that for a $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ family of disjoint non-empty topological space, the $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ topological space with the discrete topology that will be discussed future, will be free union of the given family.

The continuation of the study, research was conducted by taking the second directional approach mentioned above. Primarily, the special case of disjoint union topology has been alluded, then open and closed subsets of free union have been defined, and inner and closing conceptions have been discussed. The part of the research in progress, the results related with base on the topological sum, continuous transformations and separation axioms are provided with their proofs.

With this research, definitions, theorems and some results for (X,τ) topological sum have been obtained by using the known definitions and theorems for the $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ topological spaces.

Keywords: Topological sum, disceret union (topology), free union

KISALTMA VE SİMGELER

Mantık

$=$: Eşittir

$\neq$: Farklıdır

$\Rightarrow$: İse, Gerektirir, İçin gerek şart

$\Leftarrow$: Ancak, İçin yeter şart

$\Leftrightarrow$: Ancak ve ancak, İçin gerek ve yeter şart

Niceleyeciler

$\forall$: Her, Bütün

$\exists$: Vardır, En az bir

$\exists!$: Yalnızca bir tane vardır, Vardır tek türlü

Kümeler

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\subseteq$: Altkümesidir

$\supseteq$: Kapsar

$\cup$: Birleşim

$\cap$: Kesişim

$A \setminus B$: A kümesinin B kümesinden farkı

$\bigcup$: Çoklu birleşim

$\bigcap$: Çoklu kesişim

$\times$: Kartezyen çarpım

Φ **:** Boş aile

Bazı Özel Kümeler ve Sınıflar

$(X) = 2^X$: Bir X kümesinin kuvvet kümesi (bütün alt kümelerini içeren sınıf)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$: Doğal sayılar kümesi (Bu tezde doğal sayıların 1'den başladığı kabul edilmektedir).

$\mathbb{Z}$: Tamsayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^+$: Pozitif gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^-$: Negatif gerçel sayılar kümesi

(X, τ): X kümesi ve τ topolojisinden oluşan topolojik uzay

$\underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$: $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ topolojik uzaylarının topolojik toplamı

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$: $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ topolojik uzaylarının bir ailesi

τ_A: X üzerindeki τ topolojisinin $A \subseteq X$ alt kümesine indirgenmiş alt uzay topolojisi

τ_{tso}: Sonlu tümleyenler topolojisi

τ_{tsa}: Sayılabilir tümleyenler topolojisi

$\eta(x)$: x noktasının bütün komşuluklar ailesi

N_x: x noktasının bir komşuluğu

A^c : A'nın tümleyeni

A° : A'nın içi

$\overline{A}$: A'nın kapanışı

$\tilde{A}$: A'nın yığılma noktaları kümesi

A^{d} : A'nın değme noktalarının kümesi

τ_Z : ***Zorgenfrey topolojisi***

$X \approx Y$: X ile Y uzayları homeomorftur

Parantez Benzeri İşaretlerin Kullanımı

(a,b) : a,b uçlu açık aralığı

$[a,b),(a.b]$: a,b uçlu yarı açık aralığı

$\{a,b\}$: Elemanları a ve b olan küme

Fonksiyonlar

$f : X \to Y$: f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyondur.

$x \overset{f}{\mapsto} y$: x elemanının f altındaki resmi y dir.

$f^{-1} : Y \to X$: $f : X \to Y$ fonksiyonunun tersi (genellikle bir bağıntıdır).

$f \circ g$: f ve g fonksiyonlarının bileşkesi

I_X : X kümesinin özdeşlik dönüşümü

$f|_A : A \to Y$: $f : X \to Y$ fonksiyonunun $A \subseteq X$ alt kümesine kısıtlanmışı

1.BÖLÜM

Giriş

Topolojik toplamlara yaklaşımımızda topolojik uzaylar, taban kavramı, sürekli dönüşümler ve ayırma aksiyomları sıklıkla önemli rol oynar. Bu anlamda, işe, bahsedilen konulara genel bir bakışla başlamak en doğaldır. Burada içerikleri belirtilmeyen bu konu başlıkları; alt uzaylar, açık-kapalı kümeler, topolojik uzaylarda verilen bir kümenin içi-kapanışı, gömme dönüşümleri, homeomorfizmalar gibi temel kavramları barındırır. Bu bölümün ikinci ana amacı, topolojik uzaylara açık bir giriş yaparak, asıl anlatılmak istenen topolojik toplamlar kavramını net olarak benimsemektir.

Ayrıca bu bölümde taban kavramı, sürekli dönüşümler ve ayırma aksiyomları ile ilgili temel tanımlara yer verilecektir. Gerekli tanımlardan başka bu kavramlarla ilgili temel bazı sonuçlar ve ispatlar verilecektir. Burada hazırlanan kavramlar, bundan sonraki kavramları ve diğer bölümleri okumaya devam edebilmek için yeterli olsa bile genel topoloji hakkındaki ders kitaplarından ve özellikle kaynak özetleri bölümünde belirtilen kaynaklardan daha fazla bilgi edinilebilir.

1.1 Gösterimler

p ve q önermeler veya formüller olsun. Eğer p, q yu gerektiriyorsa $p \Rightarrow q$, aynı zamanda $q \Rightarrow p$ oluyorsa $p \Leftrightarrow q$ yazılır.

A ve B birer küme olmak üzere A nın B den farkı,

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

şeklinde tanımlanır ve gösterilir. Özel olarak $A \subseteq X$ alt kümesinin X ten farkı A nın tümleyeni olarak adlandırılır ve A^c ile gösterilir.

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, boş olmayan kümelerin boş olmayan bir ailesi olsun bu ailenin birleşimi $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ile gösterilir.

X in elemanlarını Y nin elemanlarına karşılık getiren bir $f : X \to Y$ kuralı aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa fonksiyon adını alır.

(i) $\forall x \in X$ için $f(x) = y \in Y$ (kapalılık)

(ii) $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (iyi tanımlılık).

f fonksiyonu

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ için } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

koşulunu sağlıyorsa "birebir";

$$\forall y \in Y \text{ için } \exists x \in X : f(x) = y$$

koşulunu sağlıyorsa "örten"dir denir.

f fonksiyonu birebir ve örten ise tersi de bir fonksiyon olur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^{-1} : Y \to X,\; y = f(x) \mapsto x$$

$f : X \to Y, g : Y' \to Z$ gibi iki fonksiyonun ***bileşkesini*** özel olarak $Y = Y'$ [1] koşuluyla bir "$\circ$" işlemi anlamında aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

$$g \circ f : X \to Z,\; x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Bu tanıma göre bire-bir ve örten bir f fonksiyonu için $f \circ f^{-1}$ ve $f^{-1} \circ f$ bileşke bağıntıları vardır ve özel olarak ***birim (özdeşlik) dönüşümü*** olarak adlandırılır. $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $f : X \to Y$ fonksiyonunun $A \subseteq X$ alt kümesine ***kısıtlanmışı*** $f|_A : A \to Y$ şeklinde gösterilir ve $f|_A : \underset{a \mapsto f(a)}{A \to Y}$ şeklinde tanımlıdır.

Bunların dışında iki cebirsel yapı arasında sıra koruyan fonksiyona ***homomorfizama***, bire-bir homomorfizmaya bir ***gömme*** ve bire-bir örten bir homomorfizmaya da bir ***izomorfizma*** denir

.

[1] $g \circ f$ için $Y = Y'$ olması şart değildir. $g \circ f$ nin varlığı için,

$$Y \cap Y' \neq \varnothing \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \exists y \in Y \cap Y' : y = f(x), g(y) = z \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = z = g(f(x))$$

oluşu yeterlidir.

(X,τ) ve (X',τ') iki topolojik uzay ve $f: X \to X'$ bir fonksiyon olmak üzere;

(a) f fonksiyonuna, açık kümeleri açık kümelere resmediyorsa ***açık dönüşüm***,

(b) f fonksiyonuna, kapalı kümeleri kapalı kümelere resmediyorsa ***kapalı dönüşüm***,

denir.

Boş kümeden farklı bir X kümesi ile X kümesinin alt kümelerinden oluşan ve ilerde değineceğimiz bazı koşulları sağlayan τ ailesinin oluşturduğu ikiliye bir topolojik uzay denilir ve (X,τ) ile gösterilir. Boş küme, gerçel sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesi üzerinde bilinen adi topoloji sırasıyla $\emptyset, \mathbb{R}$ ve α simgeleri ile gösterilir. Negatif gerçel sayılar, pozitif gerçel sayılar; bunlar üzerine kondurulmuş alt uzay topolojileri ile birlikte sırasıyla $(\mathbb{R}^-, \alpha_-)$ ve $(\mathbb{R}^+, \alpha_+)$ ile gösterilir. Kümelerin bir ailesi için $\bigcap$, ailesinin bütün elemanlarının kesişimini; $\bigcup$ ise ailesinin bütün elemanlarının birleşimini gösterir.

Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerindeki ayrık (discrete) topoloji, 2^X veya (X) ile; ayrık olmayan (indiscrete) topoloji τ_0 ile gösterilecektir. Ayrıca herhangi bir X kümesi ayrık topoloji ile birlikte ayrık uzay olarak adlandırılacaktır.

X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisi τ_{tso} ile, sayılabilir tümleyenler topolojisi τ_{tsa} ile gösterilecektir.

Bir τ topolojisinin bir A kümesine kısıtlanmışı τ_A ile gösterilir.

2. BÖLÜM

Kaynak Özetleri

LIPSCHUTZ, S. 1965. Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology:

İsimli kitap; genel topolojiyi konu almıştır. Topolojiyi tanıtma amacıyla öncelikle ön hazırlık olarak kümeler ve fonksiyonlardan bahsetmiştir. Daha sonra reel sayılar üzerinde durarak sayı doğrusu ve açık kümeleri ele almıştır.

Bu ön hazırlıktan sonra topoloji tanımı verilerek topolojik uzaylar ve ilgili konular verilmiştir.

MC CARTY, G. 1967. TOPOLOGY An Introduction With Application to Topological Groups:

İsimli kitap; genel olarak topolojik gruplarla ilgilenmesine karşın ilgili konunun anlaşılabilmesi için topolojik uzaylara da yer vermiştir. Biz de çalışmalarımız için kitabın "topolojik uzaylar" başlıklı bölümü ile ilgilendik.

GÜRKANLI, A.T. 1993. Genel Topoloji:

İsimli kitap; metrik uzaylar, topolojik uzaylar ve benzeri özel uzayları ele almıştır. Çalışmamızda yer alan birçok tanım için kullanılmış olan bu kitap kolay anlaşılabilir oluşu ile öğrenciler tarafından da tercih edilir.

TUTALAR, H.İ. 2004. Topolojiye Giriş Ders Notları:

İsimli kitap; topolojik uzaylar ile ilgili birçok ayrıntıyı ele alarak topolojik toplamlardan temel anlamda bahseder. Kitap aynı zamanda topolojik toplamlara giriş için bizim ilham kaynağımız olup, ders notları olarak öğrenciler için çalışma kaynağıdır.

Kitaplar dışında kaynaklar bölümünde yer alan ***internet çıktıları*** da topolojik toplamları tanıtıp incelemede yol gösterici olmuştur.

3.BÖLÜM

Materyal ve Metot

3.1 Materyal

Bu Yükseklisans Tez Çalışması temelde topolojik toplamlar üzerine kurulmuştur. Topolojik toplam tanımı verilecek ve sonrasında topolojik uzaylar için bilinen temel bazı kavramlar topolojik toplamlar için uyarlanarak bazı sonuçlar verilecektir.

Materyal olarak kullandığımız "topolojik toplamlar" kavramı ile ilgili olarak çeşitli kaynaklar araştırılmış, genel bir tanımı yanında topolojik toplamın oluşturuluşuna ilişkin bazı örneklere rastlansa da kapanış, iç, kenar vbg. kavramlar ile yakınsaklık ve süreklilik ilişkileri bakımından yapılmış çalışmalara rastlanmamıştır. Ayırma aksiyomları bakımından herhangi bir araştırma da yapılmamıştır, diyebiliriz.

Temelde ne olduğu hakkında fikir sahibi olduktan sonra elde ettiğimiz sonuçlar açık bir dille anlatılmıştır.

3.2 Metot

Topolojik toplamların anlaşılabilmesi adına ön hazırlık olarak topolojik uzaylar tanıtılmıştır.

Topolojik uzayların en bilinen tanımı ve bilinmesi gereken ana başlıkları anlatılarak topolojik toplamlara geçiş için temel oluşturulmuştur.

Şimdi topolojik uzaylara bir giriş yapılacaktır.

3.2.1 Topolojik Uzaylar

Özellikle 19. yüzyılın sonlarına doğru ***Henri POINCARE***'nin çalışmalarıyla kesin temellerine oturtulan, 1950'li yıllarda altın dönemini yaşayan ve 20. yüzyılda ***Felix HAUSDORFF*** tarafından geliştirilen **topoloji**, geometrik şekillerin bükme, germe, uzatma ya da sıkıştırma yoluyla deformasyonundan sonra değişmeden kalan özelliklerini inceleyen matematik dalıdır. Geometri şekillerini klasik geometri gibi katı birer cisim olarak almak yerine onu lastik gibi kullanabildikleri için matematikçiler arasında lastik geometride denilir. Yunanca'da yer, yüzey veya uzay anlamına gelen ***topos*** ve bilim anlamına gelen ***logos*** sözcüklerinden türetilmiştir. Topoloji biliminin kuruluş aşamalarında yani 19. yüzyılın ortalarında, bu sözcük yerine bir süre aynı dalı ifade eden Latince ***analysis situs*** (konumun analizi) deyimi kullanılmıştır [6].

Son yıllarda çok gelişme gösteren ve diğer ülkelerdeki gelişmelere paralel olarak ülkemizde de pek çok araştırmacının kullanır olduğu *topoloji,* topolojik değişmezleri açık bir deyimle bire-bir, örten ve iki yönlü sürekli fonksiyonlar altında değişmeyen özellikler olarak inceleyen bir bilim dalı olarak daha genel bir şekilde tanımlanabilir. Yukarıda da bahsedildiği gibi, topolojinin analizden geometriye kadar çok geniş bir uygulama alanı vardır. Bir eğri, bir yüzey, bir eğriler ailesi veya bir fonksiyonlar kümesi birer topolojik uzay olabilirler.

Topoloji sözcüğü, özel anlamıyla, bir topolojik uzayı tanımlamak için inşa edilen ve belli koşulları sağlayan kümeler ailesi için kullanılmaktadır. Aşağıdaki matematiksel tanımda bu koşullar sıralanmıştır. Topolojik yapı, geometri bağlamında bir kümenin üzerine konabilecek en basit yapı olarak görülebilir. Başka bir deyişle, topoloji, geometri yapmak için atılan ilk adımdır [6].

Topolojik uzaylar, matematiğin topoloji dalının başlıca uğraş konusudur ve boş olmayan bir X kümesi ile birlikte bu kümenin alt kümelerinin bir kısmını içeren ve aşağıdaki varsayımları sağlayan bir τ ailesinden oluşur [1]:

$[T_1]$ $\varnothing, X \in \tau$

$[T_2]$ Her sonlu $\{U_1, U_2, U_3, ..., U_r\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcap_{i=1}^{r} U_i \in \tau$

$[T_3]$ Her $\{U_1, U_2, U_3, ...\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcup_i U_i \in \tau$

Burada üçüncü koşulda yer alan ailenin (sayılabilir) sonsuz sayıda eleman içerebileceğine ancak ikinci koşulda sözü edilen altkümelerin sayısının sonlu olduğuna dikkat etmek gereklidir. Öte yandan birinci varsayım, her ne kadar ikinci ve üçüncü varsayımların bir sonucu olsa da, uygulamalardan kaynaklanan uyarıcı bir nedenle eklenmiştir.

Bu durumda τ ailesine X de bir ***topoloji***; (X,τ) ikilisine ***topolojik uzay*** ve τ ailesinin elemanlarına da X in ***açık kümeleri*** denir [1].

Bir $\left[(X,\tau)\right]$ topolojik uzayının bir $(A \subseteq X)$ altkümesi üzerinde, uzayın topolojisi sayesinde bir topoloji kurulabilir. X'te açık herhangi bir kümenin A ile kesişimine A'da açık diyerek oluşturulan topolojiye ***altuzay topolojisi*** (kondurulan topoloji) denir.

Şimdi aşağıda ***bazı özel topolojiler*** tanımlayacağız:

Tanım 3.2.1.1:

Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ ailesi bir topolojidir. Bu topolojiye ***ayrık olmayan (indescrete) topoloji*** denir [2].

Tanım 3.2.1.2:

Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $\tau = 2^X =$ (X) ailesi (X in kuvvet kümesi) X de bir topolojidir. Bu topolojiye X in ***ayrık (descrete) topolojisi*** denir [2].

Tanım 3.2.1.3:

X bir sonsuz küme olsun.

$$\{U \subseteq X : U^c = X \setminus U \text{ sonludur}\} \cup \{\varnothing\}$$

ailesi bir topolojidir. Bu aile τ_{tso} ile gösterilecektir. Bu topolojiye X in ***sonlu tümleyenler topolojisi*** denir. ***Zariski topolojisi*** de denilmektedir [4].

Tanım 3.2.1.4:

X bir sonsuz küme olsun.

$$\{U \subseteq X : U^c = X \setminus U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\varnothing\}$$

ailesi bir topolojidir. Bu topolojiye X in ***sayılabilir tümleyenler topolojisi*** adı verilir ve τ_{tsa} sembolü ile gösterilir [4].

Tanım 3.2.1.5:

$\mathbb{R}$ kümesinde

$$\tau_{\text{sağ}} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

ve

$$\tau_{\text{sol}} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

aileleri birer topolojidir [4].

Buradan bir X kümesi üzerinde aynı anda birden çok topoloji tanımlanabileceği aşikardır. Bu nedenle bir topolojik uzayın açık kümelerinden söz ederken gerekli ise τ ***-açık*** terimi kullanılır.

Bazı topolojik uzay örnekleri verilerek topolojik uzay kavramı pekiştirilecektir.

Örnek 1

Bir $X = \{a,b,c\}$ kümesini düşünelim.

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}\},$$

$$\eta = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\},$$

$$\sigma = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

aileleri birer topolojidir.

Üç elemanlı kümeler üzerinde daha birçok topoloji yazılabileceği gibi dört ve daha fazla elemanlı kümeler için de topolojiler yazılabilir.

Tanım 3.2.1.6:

$X \neq \varnothing$ bir küme τ ve η X üzerinde iki topoloji olsun. Eğer $\tau \subseteq \eta$ ise τ ya η dan daha ***kaba topoloji*** veya η ya τ dan daha ***ince topoloji*** adı verilir.

Bir X kümesi üzerindeki topolojilerin içinde ayrık topoloji diğer bütün topolojilerden daha ince; ayrık olmayan topoloji ise hepsinden daha kaba topolojidir. Dolayısıyla, 2^X ***en ince topoloji*** τ_0 ise ***en kaba topoloji*** adını alır [4].

Teorem 3.2.1.1

X üzerinde keyfi sayıda topolojinin arakesiti X üzerinde bir topoloji olduğu halde bileşimi genel olarak topoloji olmaz.

İspat:

X üzerindeki keyfi sayıdaki topolojilerin ailesi $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, ...\}$ olsun. Bu ailenin arakesitine τ diyelim, yani $\tau = \bigcap_i \tau_i$ olsun. O zaman,

$[T_1]$ Her i için $\varnothing, X \in \tau_i$ olduğundan $\varnothing, X \in \bigcap_i \tau_i$ ve böylece $\varnothing, X \in \tau$ çıkar.

$[T_2]$ Bir sonlu $\{U_1, U_2, U_3, ..., U_r\} \subseteq \tau$ alt ailesini düşünelim. Bu durumda, her $i = 1, 2, 3, ...$ için $\{U_1, U_2, U_3, ..., U_r\} \subseteq \tau_i$ olur. τ_i ler topoloji olduklarından her i için $\bigcap_j U_j \in \tau_i$ olmalıdır. Tanım gereğince $\bigcap_j U_j \in \tau$ çıkar.

$[T_3]$ Bir $\{U_1, U_2, U_3, ...\} \subseteq \tau$ alt ailesi verilsin. O zaman, her $i = 1, 2, 3, ...$ için $\{U_1, U_2, U_3, ...\} \subseteq \tau_i$ olacaktır. τ_i ler topoloji olduklarından 3. aksiyom gereğince $\bigcup_j U_j \in \tau_i$ olmalıdır. Tanımından $\bigcup_j U_j \in \tau$ çıkar.

Teoremin ikinci iddiasına gelince, daha önce tanımlanan $\tau_{\text{sağ}}$ ve τ_{sol} topolojileri için $\tau_{\text{sağ}} \cup \tau_{\text{sol}}$, $\mathbb{R}$ de bir topoloji olmaz [4]. ♦

Tanım 3.2.1.7:

(X, τ) bir topolojik uzay, $B \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer B nin $B^c = X \setminus B$ tümleyeni açık (yani $B^c \in \tau$) ise B kümesine bu uzayda ***kapalı küme*** veya kısaca ***kapalıdır*** denir [1].

Buna göre her açık kümenin tümleyeni kapalı; her kapalı kümenin tümleyeni ise açık olmaktadır.

(X, τ) topolojik uzayında $\mathcal{K} = \{V_j : j \in J\}$, kapalı kümeler ailesi olsun. O zaman kolayca ispatlanabileceği gibi,

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{K}$,

(2) Her sonlu $\{V_1, V_2, ..., V_m\} \subseteq \mathcal{K}$ alt ailesi için $\bigcup_{k=1}^{m} V_k \in \mathcal{K}$,

(3) Her $J' \subseteq J$ ve $\{V_j : j \in J'\} \subseteq \mathcal{K}$ alt ailesi için $\bigcap_{j \in J'} V_j \in \mathcal{K}$

olur [4].

Teorem 3.2.1.2

$X \neq \varnothing$ bir küme ve X in alt kümelerinin bir $\mathcal{K}$ ailesi için,

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{K}$,

(ii) $\mathcal{K}$ nin her sonlu alt ailesinin birleşimi $\mathcal{K}$ da,

(iii) $\mathcal{K}$ nin her alt ailesinin arakesiti $\mathcal{K}$ da,

olsun. O zaman

$$\tau = \{V : \exists F \in \mathcal{K} : V = F^c\}$$

ailesi X de bir topolojidir (Buna X de ***kapalı kümeler topolojisi*** denilmektedir).

İspat:

$[T_1]$ $\varnothing \in \mathcal{K} \Rightarrow X = \varnothing^c \Rightarrow X \in \tau$; $X \in \mathcal{K} \Rightarrow \varnothing = X^c \Rightarrow \varnothing \in \tau$ bulunur.

$[T_2]$ $\{V_1, V_2, ..., V_n\} \subseteq \tau$ sonlu alt ailesini düşünelim. O zaman her $i = 1, 2, ..., n$ için $V_i = F_i^c$ olacak şekilde $F_i \in \mathcal{K}$ kümeleri vardır. $\mathcal{K}$ nın tanımından $\bigcup F_i \in \mathcal{K}$ olmaktadır. Buna göre,

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c$$

yazılır. $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ dersek, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = F^c, F \in \mathcal{K}$, olmaktadır. τ nun tanımından $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$ çıkar.

$[T_3]$ $\{V_1, V_2, V_3, ...\} \subseteq \tau$ olsun. O zaman her $i = 1,2,3,...$ için $V_i = F_i^c$ olacak şekilde $F_i \in \mathcal{K}$ kümeleri vardır. $\mathcal{K}$ nın tanımı gereğince $F = \bigcap_i F_i \in \mathcal{K}$ olmaktadır.

Buna göre,

$$\bigcup_i V_i = \bigcup_i F_i^c = \left(\bigcup_i F_i\right)^c = F^c$$

yazılabilmektedir. τ nun tanımından $\bigcup_i V_i \in \tau$ olacaktır [4]. ♦

Tanım 3.2.1.8:

(X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ olsun. Bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer $x \in U \subseteq A$ sağlanacak şekilde $U \in \tau$ varsa A kümesine x ***noktasının bir komşuluğu*** denir. Bir $M \subseteq X$ kümesi için, bir $V \subseteq X$ kümesi M nin her noktasının bir komşuluğu oluyorsa, V kümesine M ***kümesinin bir komşuluğu*** denir. $\eta(x)$ ile, x noktasının bütün komşuluklar ailesini ve N_x ile x noktasının bir komşuluğunu göstereceğiz [4].

Tanım 3.2.1.9:

(X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunun A ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına A kümesinin bir ***değme noktası*** denir. Değme noktaları kümesi A^d ile gösterilir.

Teorem 3.2.1.3

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$, bir alt küme olsun. Bu durumda,

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ için } A, x \text{ in bir komşuluğudur}$$

yazılır [4].

İspat:

$A \in \tau$ ve $x \in A$ olsun. $x \in A \subseteq A$ ve $A \in \tau$ yazılabildiğinden A, x noktasının bir komşuluğu olur.

Tersine; A her noktasının bir komşuluğu ise $x \in U_x \subseteq A$ koşulunu sağlayan $U_x \in \tau$ vardır. Buradan

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq \bigcup_{x \in A} A = A$$

olur. Yani A kümesi U_x açık kümelerinin bir bileşimi olur. O halde A açıktır [4]. ♦

Tanım 3.2.1.10:

(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir küme olsun. A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin ***kapanışı*** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Buna göre $\overline{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.

$\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{K \supseteq A \\ K^c \in \tau}} K$ yazılışından $\overline{A}$ kapalı ve her $K \supseteq A$ kapalıları için $\overline{A} \subseteq K$ olmaktadır [4].

Teorem 3.2.1.4

Topolojik uzaylarda kapanış, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\overline{A}$ kapalı bir kümedir,

2. A kapalıdır $\Leftrightarrow \overline{A} = A$,

3. $A \subseteq \overline{A}$,

4. $\overline{\varnothing} = \varnothing$,

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

7. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

İspat:

İlk dört özellik kapanış tanımından hemen elde edilebilir.

5. Üçüncü özellikten $A \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$ olup $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ yazılır. $\overline{A} \cup \overline{B}$ kapalı küme olduğu için

$$A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

olacaktır. Diğer yandan, $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ oluşundan yine 3. özellik gereğince

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \text{ ve } \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

olacaktır. Buradan da

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

yazabiliriz.

6. İkinci özellikten görmek kolaydır: $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$ ve $\overline{A}$ kapalı olduğundan $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ olmalıdır.

7. $A \subseteq B$ ise $B = A \cup B$ ve buradan $\overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olur ki $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ olmak zorundadır [4]. ♦

Tanım 3.2.1.11:

(X,τ) bir topolojik uzay ve A onun bir alt kümesi ve $x \in A$ olsun. Eğer x in uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir ***iç noktası*** denir.

A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın ***içi*** denilir ve iç(A) veya A° ile gösterilir [4]:

$$A^{\circ} = \left\{ x \in A : \exists N \in \eta(x) : N \subseteq A \right\}$$

Teorem 3.2.1.5

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ iki küme olsun.

1. A°, A nın kapsadığı en büyük açık kümedir,

2. A açıktır $\Leftrightarrow A^{\circ} = A$,

3. $A^{\circ} = X \setminus \left(\overline{X \setminus A} \right) = \left(\overline{A^c} \right)^c$,

4. $X^{\circ} = X$,

5. $\left(A^{\circ} \right)^{\circ} = A^{\circ}$,

6. $\left(A \cap B \right)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$,

7. $A \subseteq B \Rightarrow A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$.

İspat:

1. A° kümesinin tanımından $A^{\circ} \subseteq A$ olur. A° nın açık olduğunu gösterelim. Her $x \in A^{\circ}$ için tanımdan $x \in N_x \subseteq A$ yazarız. Genelliği bozmayacağı için x in N_x komşuluğunu açık alabiliriz. O halde, her $y \in N_x$ noktası için N_x kümesi y nin bir komşuluğudur, yani y noktası iç noktasıdır. Dolayısıyla, $N_x \subseteq A^{\circ}$ olur. Böylece her $x \in A^{\circ}$ noktası A° kümesine N_x komşuluğu ile aittir. Bu koşul ise kümenin açık olması için gerek ve yeterdir.

Şimdi A° kümesinin A da kapsanan en büyük açık küme olduğunu gösterelim. Eğer $U \in \tau$ ve $A^{\circ} \subseteq U \subseteq A$ ise her $y \in U$ için U kümesi y nin bir komşuluğu ve $y \in U \subseteq A$ olduğundan $y \in A^{\circ}$ olur ve buradan $U \subseteq A^{\circ}$ elde edilir. Yani böyle bir $U \in \tau$ kümesi olsa olsa A° nin ta kendisidir.

2. A açık ise bir $x \in A$ için $x \in A \subseteq A$ yazılışından $x \in A^{\circ}$, yani $A^{\circ} = A$ olur. Tersine $A^{\circ} = A$ ise 1. den A° açık olduğu için eşiti olan A da açık olur.

3. Her $x \in A^{\circ} \subseteq A$ için $x \notin A^c$ olur. $x \notin \overline{A^c}$ olduğunu gösterebiliriz: Aksine $x \in \overline{A^c}$ olsun. O zaman her N_x komşuluğu ile A^c nin arakesiti boş değildir. O halde x in hiçbir komşuluğu A kümesine ait olamaz, yani x, A nın iç noktası olamaz. Bu çelişki $x \notin \overline{A^c}$ olduğunu gösterir. O halde $x \in \left(\overline{A^c}\right)^c$ olur ve $A^{\circ} \subseteq \left(\overline{A^c}\right)^c$ elde edilir.

Tersine, her $x \in \left(\overline{A^c}\right)^c$ için $x \notin \overline{A^c}$ olur, yani x noktası A^c kümesinin bir değme noktası değildir. O halde, x noktasının $N_x \cap A^c = \varnothing$ koşulunu sağlayan en az bir N_x komşuluğu vardır. Buradan $x \in N_x \subseteq A$ olur, yani $x \in A^{\circ}$ olur. Buradan $\left(\overline{A^c}\right)^c \subseteq A^{\circ}$ bulunur. Böylece $A^{\circ} = \left(\overline{A^c}\right)^c$ çıkar.

4. ve **5.** Kolayca gösterilebilir. Bunlar **2.** nin birer sonucudur.

6. $$\left(A \cap B\right)^{\circ} \subseteq A \cap B \subseteq A; \ \left(A \cap B\right)^{\circ} \subseteq A \cap B \subseteq B$$

yazılabileceğinden

$$\left(A\cap B\right)^{\circ}\subseteq A^{\circ};\ \left(A\cap B\right)^{\circ}\subseteq B^{\circ},$$

buradan ise

(1) $$\left(A\cap B\right)^{\circ}\subseteq A^{\circ}\cap B^{\circ}$$

bulunur. Diğer yandan, $A^{\circ}\subseteq A$ ve $B^{\circ}\subseteq B$ oluşundan da

$$A^{\circ}\cap B^{\circ}\subseteq A\cap B$$

yazılır. Buradan da ilgili tanımın bir sonucu olarak

(2) $$A^{\circ}\cap B^{\circ}\subseteq\left(A\cap B\right)^{\circ}$$

elde edilir. **(1)** ve **(2)** den istenen çıkar.

7. $A\subseteq B$ olsun. $x\in A^{\circ}$ alalım. O zaman

$$x\in N_x\subseteq A$$

olacak şekilde bir $N_x\in\eta\left(x\right)$ vardır. $A\subseteq B$ den $x\in N_x\subseteq B$ de yazılır. Bu ise $x\in B^{\circ}$ demektir [4]. ♦

Tanım 3.2.1.12:

$\left(X,\tau\right)$ bir topolojik uzay, $A\subseteq X$ bir küme ve $x\in X$ bir nokta olsun.

(a) Eğer $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$ ise x noktasına A nın bir ***yığılma noktası***; A nın tüm yığılma noktalarının kümesine A ***nın türev (kümes)i*** denir. Bu küme $\tilde{A}$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\tilde{A}=\left\{x\in X : x\in\overline{A\setminus\{x\}}\right\}$$

yazılır.

(b) Eğer x in, A ile arakesiti sadece x noktasından oluşan, bir komşuluğu varsa, x noktasına A için bir ***ayrık nokta*** veya A ***nın bir ayrık noktas***ı denir [4].

Teorem 3.2.1.6

Bir (X,τ) topolojik uzayının iki $A,B \subseteq X$ kümesi için aşağıdakiler doğrudur.

(a) $\overline{A} = A \cup \tilde{A}$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

(c) $\widetilde{(A \cup B)} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$

(d) $\widetilde{(\bigcup_{i\in I} A_i)} = \bigcup_{i\in I} \tilde{A}_i$

İspat:

(a) $x \in \overline{A}$ olsun. $x \in A$ ise $x \in A \cup \tilde{A}$ olacağı açık. $x \notin A$ varsayalım. O zaman $A = A \setminus \{x\}$ ve $x \in \overline{A} = \overline{A \setminus \{x\}}$ ve tanımdan $x \in \tilde{A}$, yani $x \in A \cup \tilde{A}$ bulunur. Tersine $x \in A \cup \tilde{A}$ ise $x \in A$ veya $x \in \tilde{A}$ olur. $x \in A$ ise $A \subseteq \overline{A}$ oluşundan $x \in \overline{A}$ çıkar. Eğer $x \notin A$ ise $x \in \tilde{A}$ dan $x \in \overline{A \setminus \{x\}} = \overline{A}$ çıkar.

(b) $A \subseteq B$ olsun. $x \in \tilde{A}$ alalım. O zaman $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ olur. $A \subseteq B$ den $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$ ve $\overline{A \setminus \{x\}} \subseteq \overline{B \setminus \{x\}}$ ve $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ den $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$, yani $x \in \tilde{B}$ bulunur.

(c) ve **(d)** yi görmek zor olmayacaktır [4]. ♦

3.2.2 Topolojik Uzaylarda Taban

Tanım 3.2.2.1:

(X,τ) bir topolojik uzay, $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ bir alt aile olsun. Eğer X in her açık kümesi $\mathfrak{B}$ nin bir takım elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\mathfrak{B}$ ailesine τ ***topolojisinin bir tabanı*** denir[3].

Boş olmayan bir X kümesi için 2^X topolojisini düşünelim. X in tek nokta kümelerinden oluşan $\mathfrak{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ ailesi 2^X topolojisinin, yani X üzerindeki ayrık topolojinin bir tabanıdır. Çünkü bir $A \in 2^X$ için

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\},\ \{a\} \in \mathfrak{B}$$

her zaman yazılabilir. Diğer yandan bu $\mathfrak{B}$ ailesini kapsayan her aile de 2^X için bir tabandır, yani $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ ise $\mathfrak{B}'$ ailesi $\mathfrak{B}' \subseteq 2^X$ koşulu ile bir tabandır.

Diğer yandan X üzerinde ayrık olmayan τ_0 topolojisini düşünelim. $\mathfrak{B} = \{X\} \subseteq \tau_0$ alt ailesi τ_0 için bir tabandır: $\Phi \subseteq \mathfrak{B}$ boş ailesinin birleşimi $\varnothing$ kümeyi verir.

Gerçel sayılar kümesinde bilinen adi topoloji ile $(\mathbb{R}, \mathfrak{a})$ topolojik uzayını düşünelim.

$$\mathfrak{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{a}$$

ailesi $\mathfrak{a}$ topolojisi için bir tabandır.

$$\underline{\mathfrak{B}} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \underline{\mathfrak{a}}$$

ailesi $\mathbb{R}$ nin alt limit topolojisi için bir tabandır. $\mathbb{R}$ nin üst limit topolojisi için bir taban ise

$$\overline{\mathfrak{B}} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \overline{\mathfrak{a}}$$

şeklinde olacaktır [4].

Teorem 3.2.2.1

(X, τ) bir topolojik uzay olsun ve bir $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ alt ailesi verilsin.

(a) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir tabandır $\Leftrightarrow$ $\forall G \in \tau$ ve $\forall x \in G$ için $\exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x \subseteq G$

(b) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir taban olsun. O zaman her $B_i, B_j \in \mathfrak{B}$ ve her $x \in B_i \cap B_j$ için $x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ olacak şekilde bir $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ bulunabilir.

İspat:

a) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir taban, $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. Varsayımdan $G = \bigcup_k B_k$ olacak şekilde bir takım $B_k \in \mathfrak{B}$ öğeleri bulunabilir. $x \in G$ olduğundan $x \in \bigcup_k B_k$ ve buradan $x \in B_x \subseteq G$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ elemanının varlığı açıktır.

Tersine; her $G \in \tau$ ve her $x \in G$ için $x \in B_x \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $B_x \in \mathfrak{B}$ kümesinin bulunabildiğini varsayalım. Buna göre,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in G} B_x \subseteq G$$

ve dolayısıyla $G = \bigcup_{x \in G} B_x$ yazabiliriz. Tanım ışığında $\mathfrak{B}$ ailesi τ için bir tabandır.

b) $B_i, B_j \in \mathfrak{B}$, $x \in B_i \cap B_j$ olsun. $B_i \cap B_j \in \tau$ ve $\mathfrak{B}$ taban olduğundan öyle bir takım $B_k \in \mathfrak{B}$ kümeleri bulunabilir ki

$$B_i \cap B_j = \bigcup_k B_k$$

yazılır. $x \in B_i \cap B_j \Rightarrow x \in \bigcup_k B_k \Rightarrow \exists B_{ij} \in \mathfrak{B} : x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ çıkar [4]. ♦

Teorem 3.2.2.2

Boş olmayan bir X kümesi ile onun alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{B}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ sayılabilir alt ailesi için,

(a) $X = \bigcup \mathfrak{B}'$

(b) Her $B_i \cap B_j \in \mathfrak{B}$ ve her $B_i \cap B_j$ için $p \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ olacak şekilde bir $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ vardır,

denilebiliyorsa, I sayılabilir bir indis kümesi olmak üzere,

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

ailesi X de bir topolojidir ve $\mathfrak{B}$ ailesi bu topolojinin bir tabanıdır.

İspat:

$\varnothing$ ve X kümelerinin τ da oldukları açıktır:

$$\varnothing = \bigcup \Phi, \ \Phi \subseteq \mathfrak{B}$$

ve **(a)** şıkkından X in kendisi τ da olacaktır.

$k \in I \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $U_k \in \tau$ alalım. τ nun tanımından her bir k için $I_k \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U_k = \bigcup_{i \in I_k} B_{ik}$$

ve buradan

$$\bigcup_{k \in I} U_k = \bigcup_{k \in I} \left(\bigcup_{i \in I_k} B_{ik} \right) = \bigcup_{j \in \bigcup_k I_k} B_j$$

yazılışı gereği

$$\bigcup_{k \in I} U_k \in \tau$$

bulunur. Böylece $[T_3]$ aksiyomu sağlanmış olur.

$U, V \in \tau$ alalım. O zaman $J \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ ve } V = \bigcup_{j \in J} B_j$$

yazarız. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
U \cap V &= \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
&= \bigcup_{i,j} \left(B_i \cap B_j\right) \\
&= \bigcup_{i,j} \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right); \quad \text{(b) den } (K \subseteq \mathbb{N}) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \qquad ; \quad \Lambda = I \cup J \cup K
\end{aligned}
$$

buluruz. τ nın tanımlanışından $U \cap V \in \tau$ olacaktır. Bu ise $[T_2]$ aksiyomu demektir. $\mathfrak{B}$ ailesinin taban olduğunu göstermek zor olmaz [4]. ♦

Örnek 2

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde $\mathfrak{B} = \{[x, r) : x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}\}$ ailesi ***Teorem 3.2.2.2*** de verilen ve taban olmanın gerekli koşulları olan (a) ve (b) koşullarını sağlar. Bu ailenin taban olduğu topolojiye ***Zorgenfrey topolojisi*** denir ve τ_Z ile gösterilir. $(\mathbb{R}, \tau_Z)$ uzayına ***Zorgenfrey doğrusu*** denilmektedir.

(a) $\quad \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n)$

(b) $\quad B_i = [x_i, r_i),\ B_j = [x_j, r_j)$ ve $a \in B_i \cap B_j$ olsun. $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ ve $r_i, r_j \in \mathbb{Q}$ olduğundan $x = \text{maks}\{x_i, x_j\}$ ve $r = \min\{r_i, r_j\}$ alır ve $B_{ij} = [x, r)$ dersek

$$x_i, x_j \leq x < r \leq r_i, r_j$$

olacağı için

$$B_{ij} = [x, r) \leq [x_i, r_i) \cap [x_j, r_j) = B_i \cap B_j$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\tau_Z = \left\{ \bigcup_{i\in I} [x_i, r_i) : x_i \in \mathbb{R}, r_i \in \mathbb{Q}, I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

olacaktır [4].

Örnek 3

X sonsuz bir küme, $x_0 \in X$ onun bir noktası olsun. X üzerindeki τ topolojisini şöyle tanımlayalım:

$$\tau = \left\{ G \subseteq X : x_0 \notin G \text{ veya } G^c \text{ sonlu} \right\}$$

Bu durumda,

$$\mathfrak{B} = \left\{ \{x\} \subseteq X : x \neq x_0 \right\} \cup \left\{ X \setminus F : F \subseteq X \text{ sonlu} \right\}$$

ailesi τ topolojisi için bir tabandır.

Ayrıca bu topolojik uzayda,

(a) $\{x_0\}$ kapalı kümedir,

(b) $x \neq x_0$ için $\{x\}$ açık ve kapalı kümedir,

(c) A sonlu ise $\overline{A} = A$; A sonsuz ise $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$ olur,

(d) $X \cap A^c$ sonlu ise $A^\circ = A$; $X \cap A^c$ sonsuz ise $A^\circ = A \cup \{x_0\}$ olur,

(e) Her sonsuz öğeli ve kapalı A, B kümeleri için $A \cap B \neq \varnothing$ olur,

özellikleri sağlanır [4].

Öncelikle τ gerçekten bir topolojidir: $x_0 \notin \varnothing$ doğru olduğu için $\varnothing \in \tau$; $X^c = \varnothing$ sonlu olduğundan da $X \in \tau$ olup $[T_1]$ sağlanır. $G, H \in \tau$ iken $G \cap H \in \tau$ olacağını görelim:

$G \in \tau$ olduğuna göre $x_0 \notin G$ veya G^c sonlu olmalıdır. Diğer yandan $H \in \tau$ oluşu gereği $x_0 \notin H$ veya H^c sonlu olacaktır. Bu durumda, aşağıdaki durumlardan en az biri geçerlidir.

(i) $x_0 \notin G$ ve $x_0 \notin H$; o zaman $x_0 \notin G \cap H \overset{\tau}{\Rightarrow} G \cap H \in \tau$

(ii) $x_0 \notin G$ ve H^c sonlu ; o zaman $x_0 \notin G \cap H \overset{\tau}{\Rightarrow} G \cap H \in \tau$

(iii) $x_0 \notin H$ ve G^c sonlu ; o zaman $x_0 \notin G \cap H \overset{\tau}{\Rightarrow} G \cap H \in \tau$

(iv) G^c ve H^c sonlu ; $(G \cap H)^c = G^c \cup H^c$ sonlu $\overset{\tau}{\Rightarrow} G \cap H \in \tau$

görüldüğü olası her durumda $G \cap H \in \tau$ olmaktadır. Böylece $[T_2]$ sağlanır.

Şimdi $G_1, G_2, G_3, ... \in \tau$ verilmiş olsun. $\bigcup_i G_i \in \tau$ olduğunu görelim.

O zaman,

(1) Her $i = 1,2,3,...$ için $x_0 \notin G_i$; o zaman $x_0 \notin \bigcup_i G_i \overset{\tau}{\Rightarrow} \bigcup_i G_i \in \tau$

(2) $\exists i = 1,2,3,...$ için G_i^c sonlu ; o zaman $\left(\bigcup_i G_i\right)^c = G_i^c$ sonlu $\overset{\tau}{\Rightarrow} \bigcup_i G_i \in \tau$

halleri geçerlidir ki, görüldüğü gibi bu iki durumda da $\bigcup_i G_i \in \tau$ olmaktadır. Yani $[T_3]$ beliti de sağlanır. O halde τ bir topolojidir.

Sonra, $\mathfrak{B}$ nin ***Teorem 3.2.2.2*** deki taban olma koşullarını sağladığını ve $\mathfrak{B}$ nin verilen τ için taban olacağını gösterelim.

Verilen topolojiye göre, $X \setminus \emptyset = X$ ve $\emptyset$ sonlu olduğundan $X \in \mathfrak{B}$ olmaktadır. Buna göre, ilgili teoremin (a) koşulu için sözü edilen B_i kümelerinden birini X in kendisi seçebiliriz. Diğer yandan, $B_i, B_j \in \mathfrak{B}$ için üç durum geçerlidir:

(I) $B_i, B_j \in \{\{x\} : x \neq x_0\}$;

$$p \in B_p = \{p\} \subseteq B_i \cap B_j = \{p\} \text{ ve } B_p \in \mathfrak{B}$$

yazılır.

(II) $B_i \in \{\{x\} : x \neq x_0\}$ ve $B_j \in \{X \setminus F : F \text{ sonlu}\}$

$p \neq x_0, B_i = \{p\}$ oluşundan, en az bir sonlu $F_j \subseteq X$ için $B_j = X \setminus F_j$ ve $p \notin F_j$ olur. Bu durumda

$$p \in B_p = B_i \subseteq B_i \cap B_j = \{p\} \setminus F_j = \{p\}$$

olacaktır. $\{p\} = B_p \in \mathfrak{B}$ bulunmuş olur.

(III) $\quad B_i, B_j \in \{X \setminus F : F \text{ sonlu}\}$

$$p \in B_p = B_i \cap B_j \subseteq B_i \cap B_j = X \setminus \left(F_i \cup F_j\right) \text{ ve } B_p = X \setminus \left(F_i \cup F_j\right) \in \mathfrak{B}$$

bulunmuş olur.

Şimdi $\mathfrak{B}$ nin τ için taban olduğunu göstermeliyiz. ($\mathfrak{B}$ nin X üzerinde bir topoloji için taban olacağını biliyoruz, ama o topoloji bize verilen topoloji olmak zorunda değildir). Bunun için $G \in \tau$ alalım. G nin, $\mathfrak{B}$ nin bazı öğeleri olarak yazılabileceğini göstermeliyiz. $G \in \tau$ olduğuna göre $x_0 \notin G$ veya G^c sonludur.

Eğer $x_0 \notin G$ ise G nin her g öğesi için $g \neq x_0$ olup $\{g\} \in \mathfrak{B}$ olacaktır. Bu durumda,

$$G = \bigcup_{g \in G} \{g\}, \ \{g\} \in \mathfrak{B}$$

yazılabileceği açıktır. Eğer G^c sonlu ise $F = G^c$ alırsak F sonlu olduğundan $X \setminus F \in \mathfrak{B}$, yani $G = X \setminus G^c = X \setminus F$ nin kendisi $\mathfrak{B}$ ailesinde olacağından durum açıktır. Taban tanımına göre gerçekten, $\mathfrak{B}$ ailesi bize verilen, tanımlanan topolojinin tabanıdır.

Verilen özelliklerin sağlandığını görmek zor olmaz:

(a) $\quad \{x_0\} = \left(\{x_0\}^c\right)^c$ sonlu olduğundan $\{x_0\}^c \in \tau$ olur. Tümleyeni açık olan küme kapalıdır, yani $\{x_0\}$ kapalıdır.

(b) $\quad x \neq x_0$ ise $\{x\} \in \mathfrak{B} \subseteq \tau$ oluşundan $\{x\} \in \tau$ ve $\{x\}$ açıktır. (a) da tanımlanan şekliyle $\{x\}$ kapalıdır.

(c) $\quad A$ sonsuz ise A nın x_0 dan başka yığılma noktası yoktur, yani $\tilde{A} = \{x_0\}$ dır. Gerçekten $x \neq x_0$ ise $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$ olur. Aksi halde, yani $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ olsa, $x \in \{x\}$ ve $\{x\} \in \tau$ olduğundan $\left(A \setminus \{x\}\right) \cap \{x\} = \varnothing$ oluşu ile çelişir. $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$ olduğu açıktır.

Bu durumda, $\overline{A} = A \cup \tilde{A}$ bağıntısından $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$ bulunur. Diğer yandan, A sonlu ise $X \setminus A \in \mathfrak{B}$ ve dolayısıyla, $X \setminus A \in \tau$, yani A kapalı ve buradan $\overline{A} = A$ çıkar.

(d) ve (e) şıklarını gerçeklemek zor olmayacaktır [4]. ♦

3.2.3 Sürekli Dönüşümler ve Homeomorfizmalar

Homeomorfizma [veya **topolojik eşyapı (topolojik izomorfizm)]**, matematiksel alanda topolojinin incelediği temel konulardan biridir ve iki uzaydan birinin diğerine sürekli dönüşümlerini inceler.

Üzerinde topoloji bulunan iki kümenin karşılaştırılması, ancak topolojileri dikkate alan ve sürekli dönüşümlerle olasıdır. Kabaca, bu tür dönüşümler topolojik nesneleri sürekli anlamda bir başka nesneye dönüştürür. Bu nedenle iki topolojik uzayın denkliği, aralarında, topolojiyi koruyan ve sürekli bir dönüşümün [*topolojik eşyapı*nın] varlığıyla olanaklıdır.

Bir homeomorfizmaya örnek olarak, bir üçgenin (içi boş) bir çembere ya da bir çay bardağının, çay tabağına dönüşümü verilebilir. Bunu geometrik olarak görmek çok kolaydır. Gerçekten çay bardağı ya da tabağından birinin kauçuktan yapıldığını düşünürsek, o cismi yırtmadan, kesip koparmadan sadece çekip uzatarak ve eğip bükerek diğer cisme dönüştürebileceğimizi görürüz. Benzer şekilde kulplu bardak ve simidin birbirlerine aynı yöntemle dönüştürülebileceğini de görebiliriz.

Aralarında homeomorfizma olan iki cisim ***homeomorfik*** olarak adlandırılır. Topolojik açıdan bunlar aynıdır.

Tanım 3.2.3.1

(X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay; $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

(a) eğer $y_0 = f(x_0)$ noktasının her V_{y_0} komşuluğu için $f(U_{x_0}) \subseteq V_{y_0}$ olacak şekilde, x_0 noktasının en az bir U_{x_0} komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 ***noktasında süreklidir*** denir.

(b) eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X ***de süreklidir*** denir [4].

Teorem 3.2.3.1

(X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay; $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $f: X \to Y$ fonksiyonu süreklidir.

(b) her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ olur.

(c) Y nin tabanının her elemanının ters görüntüsü X de açıktır.

(d) $x \in X$ ve $y = f(x) \in Y$ olsun. O zaman, öyle $\eta(x)$ ve $\eta'(y)$ komşuluklar ailesi bulunabilir ki, her $V \in \eta'(y)$ için $f(U) \subseteq V$ koşulunu sağlayan en az bir $U \in \eta(x)$ vardır.

(e) Y nin her kapalı B kümesi için $f^{-1}(B), X$ de kapalıdır.

(f) Her $A \subseteq X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ olur.

(g) Her $B \subseteq Y$ için $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ olur.

(h) Her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(B^{\circ}) \subseteq f^{-1}(B)^{\circ}$ olur [4].

Teorem 3.2.3.2

$(X,\tau),(X',\tau')$ ve (X'',τ'') topolojik uzaylar olsun. Eğer $f: X \to X'$ ve $g: X' \to X''$ fonksiyonları sürekli ise $g \circ f: X \to X'$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

İspat:

$W \in \tau''$ keyfi bir açık küme olsun. Bileşke fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek için $(g \circ f)^{-1}(W)$ kümesinin X de açık olduğunu göstermemiz gerekir.

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)$$

yazabileceğimizi biliyoruz. O halde, g sürekli olduğu için $g^{-1}(W) \in \tau'$ olur. f sürekli olduğu için de $f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \in \tau$ çıkar. Yani $g \circ f$ süreklidir [4]. ♦

Teorem 3.2.3.3

(X,τ) ve (X',τ') iki topolojik uzay olsun ve bir $f : X \to X'$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman

$$f \text{ süreklidir} \Leftrightarrow f^{-1}(\tau') \subseteq \tau$$

İspat:

$f : X \to X'$ sürekli olsun. O zaman her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ olduğundan $f^{-1}(\tau') \subseteq \tau$ çıkar.

Tersine; eğer $f^{-1}(\tau') \subseteq \tau$ ise her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in f^{-1}(\tau')$, dolayısıyla da $f^{-1}(V) \in \tau$ olacaktır. Tanımı gereğince $f : X \to X'$ süreklidir [4]. ♦

Verilen bilgiler ışığında ***homeomorfizma,*** iki uzay arasında tanımlanan birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca iki uzay arasında bir homeomorfizma tanımlı ise bu iki uzaya ***homeomorf uzaylar*** (***homeomorfiktir***) denir. Homeomorf olma bir denklik bağıntısı olduğundan (gerçekten yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını görmek kolaydır) uzayları denklik sınıflarına ayırabiliriz ve birbirine denk olan uzayların aynı özellikleri gösterdiğini görebiliriz. Başka bir deyişle X ve Y uzayları homeomorfik ise X ile Y aynı topolojik özelliklere sahiptir.

3.2.4 Alt Uzaylar

Teorem 3.2.4.1

(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. O zaman,

$$\tau_A = \{T \cap A : T \in \tau\}$$

ailesi A alt kümesi üzerinde bir topolojidir.

İspat:

(a) $\bigcup_j (T_j \cap A) = \left(\bigcup_j T_j \right) \cap A$

(b) $(T_1 \cap A) \cap (T_2 \cap A) = (T_1 \cap T_2) \cap A$

eşitlikleri gereğince τ_A ailesi A üzerinde topoloji olabilmek için gerekli aksiyomları sağlamış olacağından istenen çıkar [4]. ♦

Yukarıda tanımlanan τ_A için (A, τ_A) topolojik uzayına (X, τ) topolojik uzayının bir ***alt uzayı***; τ_A topolojisine de ***alt uzay topolojisi*** denir. $i_A(x) = x$ ile tanımlanan $i_A : A \to X$ fonksiyonuna ise ***gömme fonksiyonu*** veya ***kapsama dönüşümü*** denilmektedir. Aynı zamnda, $i_A^{-1}(T) = T \cap A \in \tau_A$ olduğu için i_A fonksiyonu süreklidir.

(X', τ') bir diğer topolojik uzay olmak üzere $f : X \to X', g : X' \to A$ fonksiyonları verilsin. $f|_A : A \to X'$ diyelim. $f|_A = f \circ i_A$ olduğu açıktır. Bu gösterimler ışığında,

Teorem 3.2.4.2

(a) f sürekli ise $f \circ i_A$ fonksiyonu da süreklidir.

(b) g süreklidir $\Leftrightarrow i_A \circ g$ fonksiyonu süreklidir.

İspat:

Yukarıda bir $f : X \to X'$ fonksiyonunun bir (A, τ_A) alt uzayı için $f|_A : A \to X'$ kısıtlanmışından söz ettik. Şimdi, bir $B \subseteq X'$ alt kümesi için (B, τ'_B) alt uzayını düşünelim. Bu durumda,

$$f_B : f^{-1}(B) \to B$$

fonksiyonuna, f nin B ***alt uzayına daraltılmışı*** (***kısıtlanmışı***) diyeceğiz. Buna göre, $L \subseteq B$ için

$$f_B^{-1}(L) = f^{-1}(L)$$

ve

$$f_B\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$$

olduğundan f sürekli, kapalı ve açık oluyorsa, f_B de sürekli, kapalı ve açık fonksiyon olur [4]. ♦

3.2.5 Ayırma Aksiyomları

Burada T_0, T_1, T_2 - uzaylarının ve bazı özel uzayların tanımı verilecektir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

Tanım 3.2.5.1

T_0 ***uzay:*** $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için birini içeren, diğerini içermeyen bir açık küme vardır.

T_1 ***uzay:*** $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için x i içeren y yi içermeyen bir açık küme ve y yi içeren x i içermeyen bir açık küme vardır.

T_2 ***uzay:*** $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ çifti için $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde X de U, V açık kümeleri vardır [3].

T_i koşulunu sağlayan bir topolojik uzay, $T_i -$uzayı $(i = 0,1,...,5)$ olarak isimlendirilir. Özel olarak $T_2 -$uzayı, Hausdorf uzay olarak da bilinmektedir.

Teorem 3.2.5.1

X in bir Hausdorf uzay olması için gerek ve yeter koşul, her tek nokta kümesinin kapalı olmasıdır.

İspat:

Teoremin ispatı için $x \in X$ olmak üzere $X \setminus \{x\}$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $y \in X \setminus \{x\}$ alalım. $x \neq y$ ve X bir Hausdorf uzay olduğundan $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $x \in U$ ve $y \in V$ açıkları vardır. Öte yandan $x \notin V$ olduğundan $V \subseteq X \setminus \{x\}$ dolayısıyla $X \setminus \{x\}$, y nin bir komşuluğu olur. O halde $X \setminus \{x\}$ her noktasının bir komşuluğu olur. Bu nedenle $X \setminus \{x\}$ açık (Teorem 3.2.1.3) yani $\{x\}$ kapalıdır [3]. ♦

Tanım 3.2.5.2

Eğer X uzayının her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa X uzayına ***kompakt uzay*** denir [3].

Tanım 3.2.5.3

p, X topolojik uzayının herhangi bir noktası ve $\mathfrak{B}_p$ de p noktasını kapsayan açık kümelerin sayılabilir bir ailesi olsun. Eğer p noktasını kapsayan her U açık alt kümesi için $B_p \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_p \in \mathfrak{B}_p$ bulunabilirse (X, τ) ya ***birinci sayılabilir uzay*** denir [3].

Tanım 3.2.5.4

Eğer (X, τ) topolojik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa bu uzaya ***ikinci sayılabilir uzay*** denir [3].

Tanım 3.2.5.5

(X, τ) topolojik uzayında X ve $\varnothing$ kümelerinden başka hem açık hem de kapalı hiçbir alt küme yoksa bu (X, τ) topolojik uzayına ***bağlantılıdır*** denir. Eğer bir topolojik uzay bağlantılı değilse bu uzaya ***bağlantılı olmayan*** topolojik uzay denir [3].

3.2.6 Diziler ve Yakınsaklık

Tanım 3.2.6.1

$X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $f:\mathbb{N} \to X$ şeklindeki bir fonksiyona X de bir dizi veya X in bir dizisi denir. f fonksiyonu $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x_n$ kuralı ile tanımlanmış ise söz konusu f dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterilir. Çoğu kez (x_n) yazılır [3].

Tanım 3.2.6.2

$(x_1, x_2, ...)$, X topolojik uzayındaki noktalardan oluşan bir dizi ve $b \in X$ olsun. b yi içeren her G açığı için $n \geq n_0$ iken $x_n \in G$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n), b noktasına yakınsar veya b, (x_n) dizisinin limitidir denir ve $x_n \to b$ ile gösterilir. Yani eğer G dizinin hemen hemen her terimini (sonlu tanesi hariç hepsini) içeriyorsa b, (x_n) dizisinin limiti olur [1].

Örnek 4:

(X, τ_0) ayrık olmayan topolojik uzayının elemanlarından oluşan $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ dizisini düşünelim. Herhangi bir $b \in X$ elemanını içeren tek açık küme X olduğundan ve X, (x_n) dizisinin her terimini içerdiğinden (x_n) dizisi X in her elemanına yakınsar.

Örnek 5:

$(X, \ (X))$ ayrık topolojik uzayının elemanlarından oluşan (x_n) dizisini düşünelim. Her $b \in X$ noktası için $\{b\}$ tek nokta kümesi b yi içeren bir açık kümedir. Dolayısıyla eğer $x_n \to b$ ise o zaman $\{b\}$ dizinin tüm terimlerini içermelidir. O halde (x_n) dizisinin bir $b \in X$ noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $(x_n) = (x_1, x_2, ...x_{n_0}, b, b, ...)$ şeklinde olmasıdır.

Örnek 6:

X sonsuz bir küme ve sayılabilir tümleyenler topolojisine sahip olsun. İddia ediyoruz ki, X deki bir (x_n) dizisinin bir $b \in X$ noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul dizinin $(x_n) = (x_1, x_2, ... x_{n_0}, b, b, ...)$ formunda olmasıdır. Yani (x_n) dizisinin b den farklı terimlerini kapsayan A kümesi sonludur. Dolayısıyla $x_n \to b$ olduğunu göstermek için A nın sonlu olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. A sayılabilir olduğundan A^c b yi içeren açık bir kümedir. Bu nedenle eğer $x_n \to b$ ise o zaman A^c, dizinin terimlerinin sonlu tanesi hariç hepsini kapsar ve dolayısıyla A sonludur.

Teorem 3.2.6.1

X bir Hausdorff uzay olsun. Eğer (x_n) X de yakınsak bir dizi ise limit noktası tektir [3].

İspat:

(x_n) dizisinin a ve b gibi iki farklı limit noktası olsun. X Hausdorff ve $a \neq b$ olduğundan $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde a nın bir U komşuluğu ve b nın bir V komşuluğu vardır. Komşuluk tanımından $a \in A \subseteq U$ ve $b \in B \subseteq V$ olacak şekilde A ve B açıkları vardır. (x_n) dizisi a noktasına yakınsadığından $n \geq n_0$ iken $x_n \in A$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı ve (x_n) dizisi b noktasına yakınsadığından $n \geq m_0$ iken $x_n \in B$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $p_0 = \text{maks}\{n_0, m_0\}$ olarak seçilirse $n \geq p_0$ iken $x_n \in A$ ve $x_n \in B$ yani $x_n \in A \cap B \subseteq U \cap V$ olur ki bu da $U \cap V = \varnothing$ ile çelişir. ♦

4.BÖLÜM

Araştırma Bulguları

4.1 Topolojik Toplamlar

(X,τ) bir topolojik uzay; $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi de $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ koşulunu sağlayan alt uzayları ailesi olsun. Alt uzay topolojisi tanımı ışığında her $\lambda\in\Lambda$ ve her $T\subseteq X$ açık (veya kapalı) kümesi için $T\cap X_\lambda$ kümesi X_λ da açık (veya kapalı) olur.

Yukarıdaki gösterimler ışığında,

$T\in\tau$ (veya $T^c\in\tau$) $\Leftrightarrow$ her $\lambda\in\Lambda$ için $T\cap X_\lambda\in\tau_\lambda$ $\left[\text{veya } (T\cap X_\lambda)^c\in\tau_\lambda\right]$

oluyorsa, X uzayına (X_λ,τ_λ) uzaylarının ***serbest bileşimi*** denir.

$A\subseteq X$ alt kümesi açık veya kapalı ise (A,τ_A) alt uzayı, $(A\cap X_\lambda,\tau_{A\cap X_\lambda})$ alt uzaylarının serbest bileşimi olacaktır [4].

Şimdi konu ile ilgili temel teoremi verelim.

Teorem 4.1.1

(X,τ) bir topolojik uzay; (X_λ,τ_λ) alt uzaylar ve $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ olsun. Eğer

her $\lambda\in\Lambda$ için X_λ alt kümesi X de açık,

veya

her $\lambda\in\Lambda$ için X_λ, X de kapalı ve $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ yerel sonlu

oluyorsa X uzayı $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin serbest bileşimi olur.

İspat:

Önce, her $\lambda\in\Lambda$ için X_λ nın X de açık olduğunu kabul edelim. Tanım gereği X_λ alt uzayı için açık olan her kümenin X de açık olduğu görülür. Buna göre, $T\subseteq X$

olmak üzere $T \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$ kümelerinin $\{T \cap X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesi X in açık kümeleri ailesi olup $[T_3]$ gereği,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T \cap X_\lambda) = T \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = T \cap X = T$$

kümesi X de açık olacaktır. $T \in \tau$ ise her $\lambda \in \Lambda$ için $T \cap X_\lambda$ nın X_λ da açık olacağı açıktır. O halde X, $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin serbest bileşimidir.

Şimdi $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, her $\lambda \in \Lambda$ için X_λ, X de kapalı olmak üzere yerel sonlu bir aile olsun. Bu durumda, X_λ için kapalı olan her küme X için de kapalıdır. Bunun için X_λ nın bir kapalı kümesi $F \cap X_\lambda$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $F \cap X_\lambda$, X_λ uzayında kapalı olduğundan $F \cap X_\lambda$ kümeleri X uzayında da kapalı ve $\{F \cap X_\lambda\}$ ailesi yerel sonludur. Buradan

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (F \cap X_\lambda) = F \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = F \cap X = F$$

ve X de kapalı kümelerin (sonlu) bileşimi kapalı olduğundan F, X de kapalıdır [4]. ♦

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ bir topolojik uzaylar ailesi ve $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ olsun. X üzerinde söz konusu topoloji, τ,

$$T \subseteq X \text{ açıktır} \Leftrightarrow \text{her } \lambda \in \Lambda \text{ için } T \cap X_\lambda \text{ kümesi } X_\lambda \text{ da açıktır}$$

ifadesiyle tanımlanmış olsun. (X, τ) topolojik uzayı için, $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ topolojik uzaylarının alt uzay olması gerekmez. Eğer her bir $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ topolojik uzayı (X, τ) uzayının birer alt uzayı oluyorsa, bu koşullar altında sözü edilen ailenin serbest bileşimi olur.

Eğer her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2}$ kümesi, X_{λ_1} ve X_{λ_2} uzaylarında açık (veya kapalı) oluyorsa X uzayı verilen ailenin serbest bileşimi olduğu gibi her bir X_λ kümesi de X de açık veya kapalı olur.

Bir diğer düşünüşle, verilen aile ayrık aile ise $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ uzayı ailenin yine serbest bileşimi olacaktır [4].

Tanım 4.1.1

Topolojik uzayların $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi ayrık ise (yukarıda sözü edilen topoloji ile) $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ uzayı bu ailenin serbest bileşimi olup X uzayına X_λ uzaylarının ***topolojik toplamı*** denir ve bu durumu anlatmak üzere $X=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ yazılır. Daha açık bir dille, bir (X,τ) topolojik uzayı, ikişer ikişer ayrık ve açık X_λ kümelerinin bileşimi oluyorsa $X=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ olur [3]. $X=\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ topolojik toplamının sahip olduğu τ topolojisi ayrık bileşim topolojisi olarak adlandırılmaktadır.

4.1.1 Açık Kümeler

Topolojik uzayların $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ayrık ailesi için $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ uzayı üzerinde

$$T\in\tau \Leftrightarrow \text{her } \lambda\in\Lambda \text{ için } T\cap X_\lambda\in\tau_\lambda$$

şeklinde tanımlanan τ ailesi aşağıda kanıtlanacağı üzere $[T_1]-[T_3]$ özelliklerini sağlar. Dolayısıyla (X,τ) ikilisi bir topolojik uzay olur. Özel olarak bu X uzayı tanımlanan τ topoloji ile $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin serbest bileşimi olacaktır.

Önerme 4.1.1.1

Tanımlanan τ ailesi $[T_1]-[T_3]$ özelliklerini sağlar.

İspat:

$[T_1]$: her $\lambda\in\Lambda$ için $\varnothing\cap X_\lambda=\varnothing\in\tau_\lambda\Rightarrow\varnothing\in\tau$

$$\text{her } \lambda\in\Lambda \text{ için } X\cap X_\lambda=X_\lambda\in\tau_\lambda\Rightarrow X\in\tau$$

$[T_2]$: her sonlu $\{T_1,T_2,...,T_r\}\subseteq\tau$ alt ailesi için;

$$\forall\lambda\in\Lambda,\left(\bigcap_{i=1}^{r}T_i\right)\cap X_\lambda=\bigcap_{i=1}^{r}\left(T_i\cap X_\lambda\right)$$

ifadesinde $T_i\in\tau$ olduğundan $\forall\lambda\in\Lambda$ için $T_i\cap X_\lambda\in\tau_\lambda$ olur. Her $\lambda\in\Lambda$ için $\left(X_\lambda,\tau_\lambda\right)$ topolojik uzay olduğundan $\bigcap_{i=1}^{r}\left(T_i\cap X_\lambda\right)\in\tau_\lambda$ olur.

$$\bigcap_{i=1}^{r}\left(T_i\cap X_\lambda\right)=\left(\bigcap_{i=1}^{r}T_i\right)\cap X_\lambda\in\tau_\lambda\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{r}T_i\in\tau$$

$[T_3]$: her $\{T_1,T_2,T_3,...\}\subseteq\tau$ alt ailesi için;

$$\forall\lambda\in\Lambda,\left(\bigcup_{i}T_i\right)\cap X_\lambda=\bigcup_{i}\left(T_i\cap X_\lambda\right)\in\tau_\lambda\Rightarrow\left(\bigcup_{i}T_i\right)\in\tau$$

elde edilir. ♦

Tanım 4.1.1.1

X uzayına X_λ uzaylarının ***topolojik toplamı*** denir ve $X=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ yazılır. τ ailesinin elemanlarına da X in ***açık kümeleri*** denir.

O halde X in açıkları, her bir X_λ ile arakesiti X_λ da açık olan kümelerdir.

Sonuç 4.1.1.1

Her $\lambda\in\Lambda$ için $\tau_\lambda\subseteq\tau$ olur.

İspat:

$A\in\tau_\lambda\Rightarrow A\subseteq X_\lambda, A\cap X_\lambda=A\in\tau_\lambda$ ve $\lambda\neq\lambda'$ için $A\cap X_{\lambda'}=\varnothing\in\tau_\lambda\Rightarrow\forall\lambda\in\Lambda, A\cap X_\lambda\in\tau_\lambda\underset{\tau}{\overset{\text{Tn}}{\Rightarrow}}A\in\tau$ ♦

Örnek 7:

$X=\{a,b,c,d,e\}$, $X_1=\{a,b,c\}$, $X_2=\{d,e\}$ kümeleri ve X_1,X_2 kümelerine ait topolojiler $\tau_1=\{\varnothing,X_1,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$, $\tau_2=\{\varnothing,X_2,\{d\}\}$ şeklinde verilmiş olsun. (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) ayrık topolojik uzaylar ve $X=\bigcup_{\lambda=1}^{2}X_\lambda$ şeklindedir. Şimdi

$X = \underset{\lambda=1,2}{\oplus} X_\lambda$ topolojik toplamı topolojik uzay yapacak τ topolojisini bulalım. Yukarıdaki sonuçtan $\tau_1 \subseteq \tau$, $\tau_2 \subseteq \tau$ olur. Ayrıca

$$\exists \lambda \in \Lambda \text{ için } T_i \in \tau_\lambda \text{ olmak üzere } \bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$$

olduğunu görmek kolaydır. Buna göre;

$$\tau = \{\varnothing, X, X_1, X_2, \{a\}, \{d\}\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{a,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,d,e\}, \{a,c,d,e\}\}$$

ailesi ile (X, τ) bir topolojik uzay ve $X, \{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda=1,2}$ ailesinin topolojik toplamı olur.

Örnek 8:

$X_1 = \mathbb{R}^+, X_2 = \mathbb{R}^-, X_3 = \{0\}, X = \mathbb{R}$ kümeleri ile $\mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{R}^-$ üzerinde adi topolojiden indirgenen α_+, α_- alt uzay topolojilerini düşünelim. $\tau_1 = \alpha_+, \tau_2 = \alpha_-$, $\tau_3 = \{\varnothing, \{0\}\}$ diyelim. Topolojik uzayların ayrık $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda=1,2,3}$ ailesi için $X = \bigcup_{\lambda=1}^{3} X_\lambda$ olduğu açıktır. Şimdi (X, τ) topolojik uzay olacak şekilde τ topolojisini bulalım. İlk örnekte yapılan yolu izlersek

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : \exists \lambda = 1,2,3,\ T_i \in \tau_\lambda \right\}$$

şeklinde bulunur. Ancak bu topoloji $\mathbb{R}$ de bilinen adi topolojiden (α) farklıdır. Çünkü $\{0\} \in \tau$ iken $\{0\} \notin \alpha$ olacaktır.

Örnek 9:

Bir $X \neq \varnothing$ kümesi, $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ topolojik uzayların ayrık ailesi için $X = \underset{\lambda \in \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olsun. Ayrıca herbir τ_λ ayrık olmayan topoloji olsun. Önceki örneklerde de söz edildiği gibi

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : \exists \lambda \in \Lambda, T_i \in \tau_\lambda \right\}$$

şeklinde olacağından hiç olmazsa her $\lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda \in \tau$ olacak ve dolayısıyla $\Lambda = \{1\}$ durumu dışında τ ayrık olmayan topoloji olmaz.

Sonuç 4.1.1.2

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ topolojik uzayların ayrık ailesi ve $X = \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olsun τ, X in bahsedilen topolojisi olmak üzere $\Lambda = \{1\}$ durumunun dışında τ ayrık olmayan topolojiden daima farklıdır.

İspat:

İspatı için 6. örneği incelemek yeterlidir. ♦

Sonuç 4.1.1.3

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ topolojik uzayların ayrık ailesi ve $X = \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı için;

τ ayrık topolojidir $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$ için τ_λ ayrık topolojidir.

İspat:

τ ayrık topoloji ise her $x \in X$ için $\{x\} \in \tau$ olur. O halde her $\lambda \in \Lambda$ için $\{x\} \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$ dır. Ayrıca X_λ lar ayrık olduklarından $x \in X$ elemanı sadece bir X_λ kümesinde kapsanır. Yani $x \in X_\lambda$ ise $\lambda \neq \lambda'$ için $\{x\} \cap X_{\lambda'} = \varnothing$ ve $\{x\} \cap X_\lambda = \{x\} \in \tau_\lambda$ olur. Bu durumda her bir $\lambda \in \Lambda$ için τ_λ lar bütün tek nokta kümelerini kapsar. Yani τ_λ ların her biri ayrık topolojidir.

Tersine; τ_λ ların her biri ayrık topoloji ise $\tau_\lambda \subseteq \tau$ olduğundan τ ayrık topoloji olacaktır. ♦

Örnek 10:

Sonlu tümleyenler topolojik uzaylarının ayrık bileşimi sonlu tümleyenler topolojisine sahip olmayabilir. $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ kümeleri üzerinde sonlu tümleyenler topolojisini ve $\{0\}$ kümesi için de ayrık topolojiyi (ki buda sonlu tümleyenler topolojisidir) düşünelim. $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ şeklinde olacaktır ve **örnek 6** dikkate alınırsa $(\mathbb{R}, \tau)$

topolojik toplamı için $\{0\} \in \tau$ ancak $\{0\}^c = \mathbb{R} - \{0\}$ sonlu olmadığından (ki böylece $\{0\}$ kapalı değildir) τ topolojisi sonlu tümleyenler topolojisi değildir.

4.1.2 Kapalı Kümeler

Tanım 4.1.2.1

$X = \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayı için $B \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer B nin $B^c = X \backslash B$ tümleyeni X de açık (yani $B^c \in \tau$) ise B kümesine bu uzayda ***kapalı küme*** veya kısaca ***kapalıdır*** denir.

Teorem 4.1.2.1

Bir $M \subseteq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $M \cap X_\lambda$ kümesinin X_λ uzayında kapalı olmasıdır.

İspat:

$B \subseteq \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda = X$, X uzayında kapalı ise her bir $B \cap X_\lambda$ kümesinin X_λ uzayında kapalı olacağı alt uzay tanımından açıktır. Şimdi her bir $B \cap X_\lambda$ kümesi X_λ uzayında kapalı olsun. B kümesinin kapalı olması için $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \backslash B$ kümesinin açık olması gerekir.

$$\left[\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) \backslash B \right] \cap X_\lambda = X_\lambda \backslash (B \cap X_\lambda)$$

$B \cap X_\lambda$ kapalı olduğundan $X_\lambda \backslash (B \cap X_\lambda)$ kümesi açıktır. Dolayısıyla B kümesi kapalıdır [4]. ♦

Bu durumda bir sonuç olarak, her bir X_λ uzayı, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ uzayında hem açık ve hem de kapalı kümedir. Diğer yandan, her X_λ uzayı $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ topolojik toplamının bir alt uzayıdır.

Sonuç 4.1.2.1

Her X_λ uzayı, $X = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ topolojik toplamının bir alt uzayıdır.

İspat:

$X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ olduğundan $X_\lambda \subseteq X$ olduğu açıktır. Ayrıca her $\lambda \in \Lambda$ için $\tau' = \{X_\lambda \cap T : T \in \tau\}$ olmak üzere $\tau_\lambda = \tau'$ olduğunu göstermeliyiz.

$$T \in \tau' \Rightarrow \exists V \in \tau : T = X_\lambda \cap V \overset{V\in\tau}{\Rightarrow} X_\lambda \cap V \in \tau_\lambda \Rightarrow T \in \tau_\lambda$$

$$U \in \tau_\lambda \overset{\tau_\lambda\subseteq\tau}{\Rightarrow} U \in \tau \overset{U\subseteq X_\lambda}{\Rightarrow} U = U \cap X_\lambda, U \in \tau \Rightarrow U \in \tau'$$

o halde $\tau_\lambda = \tau'$ olur. ♦

4.1.3 Komşuluk

Tanım 4.1.3.1

$X = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olmak üzere (X,τ) topolojik uzayı için bir $x \in X$ öğesi ve $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde $U \in \tau$ varsa A kümesine x ***noktasının bir komşuluğu*** denir. Eğer $M \subseteq X$ olmak üzere $M \subseteq V \subseteq A$ olacak şekilde $V \in \tau$ bulunabilirse A ya M ***nin bir komşuluğu*** denir. $x \in X$ noktasının X deki komşuluklarının ailesi $\eta_X(x)$ ile gösterilirse;

$$\eta_X(x) = \left\{N \cup A : N \in \eta_{X_\lambda}(x), A \subseteq X\right\}$$

olur. Burada $\eta_{X_\lambda}(x)$, x öğesinin $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ uzayındaki komşulukları ailesidir.

O halde $x \in X$ elemanının X_λ daki komşuluklarını incelemek yeterli olacaktır. $x \in X_\lambda$ elemanının X_λ alt kümesinde X_λ dan farklı hiçbir komşuluğu yoksa X kümesinde de X_λ dan ve X den farklı hiçbir komşuluğu olmayacaktır. Gerçekten $x \in X_\lambda$ öğesinin X de $N_x \neq X_\lambda$ veya $N_x \neq X$ olacak şekildeki N_x komşuluklarının varsa en küçüğü ve X in onu kapsayan her alt kümesi $x \in X_\lambda$ öğesinin X_λ kümesinde bir komşuluğu olur ($\forall \lambda \in \Lambda$ için $\tau_\lambda \subseteq \tau$ olduğundan). Bu ise varsayım ile çelişir.

Sonuç 4.1.3.1

$X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $x \in A \subseteq X$ olsun. Buna göre $x \in X_i$ olmak üzere $A \cap X_i = \{x\}$ ve $\{x\} \notin \tau_i$ ise A, x in komşuluğu olamaz.

İspat:

$i \in \Lambda$ için, X_λ kümeleri ayrık olduğundan $x \in X_i$ olacak şekilde X_i alt kümesi tektir. A, $A \cap X_i = \{x\}$ ve $\{x\} \notin \tau_i$ olacak şekilde x in bir komşuluğu olsa, bu durumda $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. O zaman her $\lambda \in \Lambda$ için $U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$, yani $i \in \Lambda$ için $U \cap X_i = \{x\} \in \tau_i$ olur. Bu ise varsayımımızla çelişir. ♦

Sonuç 4.1.3.2

$A \subseteq X$ kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul A nın her noktasının bir komşuluğu olmasıdır.

İspat:

$A \in \tau$ ve $x \in A$ olsun. $x \in A \subseteq A$ yazılabildiğinden A, x noktasının bir komşuluğu olur.

Tersine A her noktasının bir komşuluğu ise $x \in U_x \subseteq A$ koşulunu sağlayan bir $U_x \in \tau$ vardır. Buradan

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq \bigcup_{x \in A} A = A$$

ve dolayısıyla A kümesi U_x açık kümelerinin bir bileşimi ve böylece A açık olur. ♦

Sonuç 4.1.3.3

$x \in X_\lambda \subseteq X$ alalım. $x \in A \subseteq X$ ve $A \neq X_\lambda$ koşullu bir A kümesinin x in X de bir komşuluğu olması, $A \cap X_\lambda$ kümesinin x in X_λ da bir komşuluğu olması için gerekli ve yeterlidir.

İspat:

Söylendiği gibi A x elemanının X de bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. Öte yandan $x \in U \cap X_\lambda \subseteq A \cap X_\lambda$ ve $U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$ olacağından $A \cap X_\lambda$, X_λ da x in bir komşuluğu olur.

$A \cap X_\lambda$, X_λ da x in bir komşuluğu ise $x \in U \subseteq A \cap X_i$ olacak şekilde bir $U \in \tau_\lambda$ vardır. $\tau_\lambda \subseteq \tau$ gereğince $U \in \tau$ ve ayrıca $U \subseteq A \cap X_\lambda \subseteq A$ gerçeğinden A, x elemanının X de bir komşuluğu olur. ♦

4.1.4 Kapanış

Tanım 4.1.4.1

$X = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ topolojik toplamı için (X,τ) uzayının bir A alt kümesi verilsin. A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A ***kümesinin kapanışı*** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Buna göre $\overline{A}$ kümesi, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ K^c \in \tau}} K$$

yazılışından $\overline{A}$ kapalı ve bütün $K \supseteq A$ kapalıları için $\overline{A} \subseteq K$ olmaktadır.

Sonuç 4.1.4.1

X, $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

$$\overline{A} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A \cap X_\lambda}$$

şeklindedir.

İspat:

$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall K \supseteq A\left(K^c \in \tau\right)$ için $x \in K$

$$\Rightarrow \exists\lambda \in \Lambda \text{ için } x \in K \cap X_\lambda \supseteq A \cap X_\lambda \left[\left(K \cap X_\lambda \right)^c \in \tau_\lambda \right]$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A \cap X_\lambda}$$

Tersine,

$$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A \cap X_\lambda} \Rightarrow \exists\lambda \in \Lambda \text{ için } x \in \overline{A \cap X_\lambda}$$

$$\Rightarrow A \cap X_\lambda \subseteq A \text{ olduğundan } x \in \overline{A}$$ ♦

4.1.5 İç Nokta ve İç

Tanım 4.1.5.1

X, $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı olsun. (X, τ) topolojik uzayı için, $A \subseteq X$ alt kümesini ve $x \in A$ öğesini düşünelim. Eğer x in uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir ***iç noktası*** denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A ***nın içi*** denilir ve iç(A) veya A° ile gösterilir:

$$A^\circ = \left\{ x \in A : \exists N \in \eta(x) : N \subseteq A \right\}$$

Sonuç 4.1.5.1

X, $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

$$A^\circ = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ$$

olur.

İspat:

$$x \in A^\circ \Rightarrow \exists G \subseteq A \left(G \in \tau \right) \text{ için } x \in G$$

$$\Rightarrow \exists\lambda \in \Lambda, \exists G \subseteq A \text{ için } x \in G \cap X_\lambda$$

$$\Rightarrow x \in G \cap X_\lambda \subseteq A \cap X_\lambda , G \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ$$

$$\Rightarrow A^\circ \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ$$

Tersine,

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda \text{ için } x \in \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ$$

$$\Rightarrow A \cap X_\lambda \subseteq A \text{ olduğundan } x \in A^\circ$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A \cap X_\lambda \right)^\circ \subseteq A^\circ$$ ♦

4.1.6 Taban

Daha önce topolojik uzaylar için verdiğimiz taban tanımına benzer olarak; X, $\left\{ \left(X_\lambda , \tau_\lambda \right) \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı olmak üzere $\left(X, \tau \right)$ topolojik uzayında $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ alt ailesi için eğer X in her açık kümesi $\mathfrak{B}$ nin bir takım elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, $\mathfrak{B}$ ailesine τ ***topolojisinin bir tabanı*** diyeceğiz.

Teorem 4.1.6.1

$\left(X, \tau \right)$ bir topolojik uzay olsun ve bir $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ ailesi verilsin.

a) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir tabandır $\Leftrightarrow \forall G \in \tau$ ve $\forall x \in G$ için $\exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x \subseteq G$

b) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir taban olsun. O zaman her $B_i , B_j \in \mathfrak{B}$ ve her $x \in B_i \cap B_j$ için öyle bir $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ bulunabilir ki, $x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ sağlanır.

İspat:

a) $\mathfrak{B}, \tau$ için bir taban, $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. Varsayımdan öyle bir takım $B_k \in \mathfrak{B}$ öğeleri bulunabilir ki $G = \bigcup_k B_k$ yazarız. $x \in G$ den $x \in \bigcup_k B_k$ ve buradan $x \in B_x \subseteq G$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ elemanının varlığı açıktır.

Tersine; her $G \in \tau$ ve her $x \in G$ için $\exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x \subseteq G$ yazabildiğimizi varsayalım. Buna göre,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in G} B_x \subseteq G$$

ve dolayısıyla $G = \bigcup_{x \in G} B_x$ yazabiliriz. Tanım ışığında $\mathfrak{B}$ ailesi τ için bir tabandır.

b) $B_i, B_j \in \mathfrak{B}$, $x \in B_i \cap B_j$ olsun. $B_i \cap B_j \in \tau$ oluşundan ve $\mathfrak{B}$ taban olduğundan öyle bir takım $B_k \in \mathfrak{B}$ kümeleri bulunabilir ki

$$B_i \cap B_j = \bigcup_k B_k$$

yazılır. $x \in B_i \cap B_j \Rightarrow x \in \bigcup_k B_k \Rightarrow \exists B_{ij} \in \mathfrak{B} : x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ çıkar [4]. ♦

Sonuç 4.1.6.1

X, $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı olsun. Bu durumda $\mathfrak{B} = \{T \subseteq X : \exists \lambda \in \Lambda, T \in \tau_\lambda\}$ ailesi, (X, τ) topolojik uzayı için bir taban olur.

İspat:

i) $\forall \lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda \in \tau_\lambda$ ve $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X$ olduğu biliniyor.

ii) $B_i, B_j \in \mathfrak{B}$ olsun. Bu durumda en az bir $i, j \in \Lambda$ için $B_i \in \tau_i, B_j \in \tau_j$ olur. $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \varnothing$ olacağından durum açık. $i = j$ ve $B_i \cap B_j \neq \varnothing$ olsun. Topolojinin özelliğinden $B_i, B_j \in \tau_i$ ise $B_i \cap B_j \in \tau_i$ olduğunu biliyoruz. O halde $B_{ij} = B_i \cap B_j$ olarak alınırsa her $x \in B_i \cap B_j$ için, $x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ olacak şekilde $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ bulunabilir. ♦

Sonuç 4 1.6.2

X, $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı ve $\mathfrak{B}_\lambda$ aileleri X_λ topolojik uzaylarının bir tabanı olsunlar. Bu durumda $\mathfrak{B}=\{T:\exists\lambda\in\Lambda, T\in B_\lambda\}$ ailesi, (X,τ) topolojik uzayı için bir taban olur.

İspat:

i) $\mathfrak{B}_\lambda$ aileleri X_λ topolojik uzaylarının bir tabanı olduklarından $\bigcup\limits_{T\in B_\lambda} T = X$ olduğu açıktır.

ii) $\mathfrak{B}_\lambda$ ailelerinin ayrık oldukları açıktır: $T_i\in\mathfrak{B}_i, T_j\in\mathfrak{B}_j$ ve ve $i=j$ için $T_i\cap T_j\neq\varnothing$ olsun. $\mathfrak{B}_i$, X_i için bir taban olduğundan her $x\in T_i\cap T_j$ için öyle bir $T_{ij}\in\mathfrak{B}_i$ bulunabilir ki $x\in T_{ij}\subseteq T_i\cap T_j$ sağlanır. ♦

4.2 Sürekli Dönüşümler

X, $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin topolojik toplamı olsun. (X,τ) topolojik uzayı için, $\varphi_\lambda : X_\lambda \to X,\ \ x\mapsto (x,\lambda)$ şeklinde tanımlı gömme dönüşümü süreklidir. Gerçekten; $U\subseteq X$ açık alt kümesi için φ nin tanımı gereği $\varphi_\lambda^{-1}(U)=X_\lambda\cap U$ olduğunu görmek kolaydır:

$$x\in\varphi_\lambda^{-1}(U)\Rightarrow\varphi_\lambda(x)\in U\Rightarrow(x,\lambda)\in U$$

ve aynı zamanda

$$\sigma : X_\lambda \to X_\lambda\times\{\lambda\}, x\mapsto(x,\lambda)$$

şeklinde tanımlanan σ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $x\in X_\lambda\Rightarrow\exists!\lambda\in\Lambda : x=(x,\lambda)\in X_\lambda\times\{\lambda\}$ olarak düşünülebilir yani $X_\lambda\cong X_\lambda\times\{\lambda\}$ şeklindedir. Buradan $(x,\lambda)\in X_\lambda$ olur. Yani $(x,\lambda)\in X_\lambda\cap U$ bulunur. Tersine; $y\in X_\lambda\cap U\Rightarrow y\in X_\lambda\wedge y\in U\Rightarrow(y,\lambda)\in X_\lambda\wedge\varphi_\lambda(y)=(y,\lambda)\in U\Rightarrow y\in\varphi_\lambda^{-1}(U)$

$U \in \tau$ olduğundan $U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$ olur. Yani $\varphi_\lambda^{-1}(U)$ açıktır. Ayrıca topolojik toplamın topolojisi τ (ki buna ***ayrık bileşim topolojisi*** diyeceğiz), φ_λ dönüşümlerini sürekli yapan en küçük topolojidir.

Teorem 4.2.1

Bir (Y,τ') topolojik uzayı verilmiş olsun. $f : \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeterli koşul her $\lambda \in \Lambda$ için $f \circ \varphi_\lambda : X_\lambda \to Y$ dönüşümünün sürekli olmasıdır.

İspat:

$f : \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve $O \subseteq Y$ açık olsun. O zaman $f^{-1}(O)$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ kümesinde açık olur ve böylece φ_λ lar sürekli olduklarından her $\lambda \in \Lambda$ için, $\varphi_\lambda^{-1}\left(f^{-1}(O)\right) = (f \circ \varphi)^{-1}(O)$, X_λ kümesinde açık olur. Buradan, $f \circ \varphi_\lambda : X_\lambda \to Y$ süreklidir.

Tersine $f \circ \varphi_\lambda : X_\lambda \to Y$ her $\lambda \in \Lambda$ için sürekli ve $O \subseteq Y$ açık olsun. Buradan, her $\lambda \in \Lambda$ için $\varphi_\lambda^{-1}\left(f^{-1}(O)\right) = (f \circ \varphi)^{-1}(O)$ açık olduğundan $f^{-1}(O)$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ kümesinde açıktır. Yani f süreklidir [5]. ♦

Teorem 4.2.2

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\psi_\lambda : X_\lambda \to \mathrm{X}$ homeomorfizmi ile $X_\lambda \approx \mathrm{X}$ olacak şekilde topolojik uzayların bir ailesi olsun. O zaman $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$, ayrık bileşim topolojisine sahiptir ve Λ ayrık uzay olmak üzere $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda \approx \mathrm{X} \times \Lambda$ olur.

İspat:

$\eta : \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda \to \mathrm{X} \times \Lambda$, $(x,\lambda) \mapsto (\psi_\lambda(x), \lambda)$ dönüşümünü tanımlayalım. Öncelikle η dönüşümünün birebir ve örten olduğunu göstereceğiz. $\eta((x,\lambda)) = \eta((x',\lambda'))$ olsun. O halde $(\psi_\lambda(x),\lambda) = (\psi_{\lambda'}(x'),\lambda') \Rightarrow \psi_\lambda(x) = \psi_{\lambda'}(x')$ ve $\lambda = \lambda'$ yazılabilir. $\lambda = \lambda' \Rightarrow \psi_\lambda = \psi_{\lambda'}$ olduğu açıktır. Böylece, ψ birebir olduğundan

$\psi_\lambda(x)=\psi_\lambda(x')\Rightarrow x=x'$ olur. Yani η birebirdir. Eğer $(y,\lambda)\in \mathrm{X}\times\Lambda$ ise o zaman $y\in \mathrm{X}$ ve buradan en az bir $x\in X_\lambda$ için $y=\psi_\lambda(x)$ olur. Böylece $\eta((x,\lambda))=(\psi_\lambda(x),\lambda)=(y,\lambda)$ yani η örtendir.

Şimdi η dönüşümünün sürekliliğini gösterelim. $O\subseteq \mathrm{X}\times\Lambda$ açık olsun. O zaman O_1, X kümesinde açık ve $O_2\subseteq\Lambda$ olmak üzere $O=O_1\times O_2$ şeklinde olur. Biz $\eta^{-1}(O_1\times O_2)=\bigcup_{k\in O_2}\psi_k^{-1}(O_1)\times\{k\}$ olduğunu göstermeliyiz. $(x,m)\in\bigcup_{k\in O_2}\psi_k^{-1}(O_1)\times\{k\}$ olsun. O zaman $(x,m)\in\psi_m^{-1}(O_1)\times\{m\}$ ve buradan $x\in\psi_m^{-1}(O_1)$, $m\in O_2$ olur. Böylece, $\psi_m(x)\in O_1$ ve $m\in O_2$ ise $(\psi_m(x),m)\in O_1\times O_2$ bulunur. Buradan $\eta^{-1}((\psi_m(x),m))=(x,m)\in\eta^{-1}(O_1\times O_2)$ çıkar.

Tersine, $(x,m)\in\eta^{-1}(O_1\times O_2)$ olsun. O zaman $\eta((x,m))=(\psi_m(x),m)\in O_1\times O_2$ ve böylece $\psi_m(x)\in O_1$, $m\in O_2\Rightarrow x\in\psi_m^{-1}(O_1)$, $m\in O_2$ olur. Tanımdan, $(x,m)\in\psi_m^{-1}(O_1)\times\{m\}\subseteq\bigcup_{k\in O_2}\psi_k^{-1}(O_1)\times\{k\}$ bulunur. Buradan kolayca görülebilir ki, $\eta^{-1}(O_1\times O_2)$ kümesi, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ kümesindeki açıkların birleşimi şeklindedir yani $\eta^{-1}(O_1\times O_2)$ açıktır. O halde η sürekli bir dönüşümdür. Benzer düşünceyle, η açık bir dönüşümdür. O halde ispat tamamlanmış olur [5]. ♦

Ayrıca açıkça görülebilir ki doğal dönüşüm hem kapalı ve hem de açıktır.

4.3 Ayrık Bileşim Topolojisi İçin Ayırma Aksiyomları

Teorem 4.3.1

$\{(X_\lambda,\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ T_0 **(Kolmogorov)** uzayların boş olmayan bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, ayrık bileşim topolojisi τ ile bir T_0 uzay olur.

İspat:

$(x,\lambda),(y,\lambda') \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ birbirlerinden farklı elemanlar olsunlar. Eğer $\lambda \neq \lambda'$ ise $X_\lambda \times \{\lambda\}$ ve $X_{\lambda'} \times \{\lambda'\}$ kendilerinin ayrık komşuluklarıdır. Eğer $\lambda = \lambda'$ ise o zaman $x, y \in X_\lambda$ elemanları birbirlerinden farklı olmak zorundadır. Diğer taraftan X_λ, T_0 uzay olduğundan x elemanının, $y \notin U_x$ olacak şekilde bir U_x komşuluğu vardır. Buradan $(x,\lambda) \in U_x \times \{\lambda\}$ olur ve gerçekten $U_x \times \{\lambda\}$ açık ve $(y,\lambda) \notin U_x \times \{\lambda\}$ şeklindedir. O halde $\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda, \tau\right)$, T_0 uzaydır [5]. ♦

Teorem 4.3.2

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ T_1 uzayların boş olmayan bir ailesi olsun. O zaman $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$, ayrık bileşim topolojisi τ ile bir T_1 uzay olur.

İspat:

$(x,\lambda),(y,\lambda') \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ birbirlerinden farklı elemanlar olsunlar. Eğer $\lambda \neq \lambda'$ ise $X_\lambda \times \{\lambda\}$ ve $X_{\lambda'} \times \{\lambda'\}$ kümeleri sırasıyla x ve y elemanlarının komşuluklarıdır ve $x \notin X_{\lambda'} \times \{\lambda'\}$, $y \notin X_\lambda \times \{\lambda\}$ şeklindedir. $\lambda \neq \lambda'$ olmasın, bu durumda $x, y \in X_\lambda$ ayrıktır ve böylece kabulden x in y yi içermeyen bir U_x komşuluğu ve y nin de x i içermeyen bir U_y komşuluğu vardır. O halde kolayca söylenebilir ki, $U_x \times \{\lambda\}$ ve $U_y \times \{\lambda\}$ kümeleri sırasıyla, (x,λ) elemanının (y,λ) yı içermeyen ve (y,λ) elemanının da (x,λ) yı içermeyen komşuluklarıdır [5]. ♦

Teorem 4.3.3

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ T_2 **(Hausdorff)** uzayların boş olmayan bir ailesi olsun. O zaman $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$, ayrık bileşim topolojisi τ ile T_2 uzay olur.

İspat:

$(x,\lambda),(y,\lambda') \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ birbirlerinden farklı elemanlar olsunlar. Eğer $\lambda \neq \lambda'$ ise o zaman $\mathrm{N}_x = X_\lambda \times \{\lambda\}$ ve $\mathrm{N}_y = X_{\lambda'} \times \{\lambda'\}$ kümeleri sırasıyla (x,λ) ve (y,λ') elemanlarının komşuluklarıdır ve $\mathrm{N}_x \cap \mathrm{N}_y = \varnothing$ şeklindedir. $\lambda = \lambda'$ olduğunu varsayalım o zaman $x, y \in X_\lambda$ elemanları birbirlerinden farklıdır. X_λ lar Hausdorff uzaylar olduklarından x ve y elemanlarının sırayla U_x ve U_y komşulukları vardır ki $U_x \cap U_y = \varnothing$. O halde $U_x \times \{\lambda\}$ ve $U_y \times \{\lambda\}$ ayrık kümeleri sırasıyla $(x,\lambda),(y,\lambda')$ elemanlarının komşulukları olurlar [5]. ♦

Teorem 4.3.4

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ birinci sayılabilir uzayların boş olmayan bir ailesi olsun. O zaman $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$, ayrık bileşim topolojisi τ ile birinci sayılabilir uzay olur.

İspat:

$(x,k) \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ ve $\{B_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$, birinci sayılabilir X_k uzayının $x \in X_k$ deki bilinen sayılabilir tabanı olsun. $\mathfrak{B}_x = \left\{B \times \{j\} : B \in \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ ailesini tanımlayalım. $\mathfrak{B}_x$ ailesinin, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ de açık olduğu aşikardır. $\mathfrak{B}_x$ in, (x,k) da bir taban olduğunu gösterelim, N, (x,k) elemanının, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ kümesindeki komşuluğu olsun. Buradan, $\varphi_k^{-1}(N)$, x in X_k daki bir komşuluğudur. Böylece bazı $B_l \in \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeleri vardır ki $x \in B_l \subseteq \varphi_k^{-1}(N)$ şeklindedir. O halde, $(x,k) \in B_l \times \{k\} \subseteq N$ ve $B_l \times \{k\} \in \mathfrak{B}_x$ olduğundan ispat tamamlanır [5]. ♦

Teorem 4.3.5

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ikinci sayılabilir uzayların boş olmayan bir ailesi olsun. Bu durumda, eğer Λ kümesi sayılabilir ise $\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda, \tau\right)$ uzayı da ikinci sayılabilir uzay olur.

İspat:

Her bir X_λ nın sayılabilir tabanlarının $\{\mathfrak{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi ve $\mathfrak{D}_\lambda = \{B\times\{\lambda\} : B\in\mathfrak{B}_\lambda\}$ olmak üzere $\mathfrak{B} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{D}_\lambda$ olsun. $\mathfrak{B}$ sayılabilir kümelerin sayılabilir bileşimi olduğundan sayılabilirdir ve elemanlarının her biri açıktır. Bu bilgiler ışığında, $\mathfrak{B}$ bir tabandır:

$(x,k)\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ keyfi bir eleman ve N onun bir komşuluğu olsun. O zaman $\varphi_k^{-1}(N)$, x in X_k daki bir komşuluğu olur. Böylece, $x\in B\subseteq\varphi_k^{-1}(N)$ olacak şekilde $B\in\mathfrak{B}$ bulabiliriz. Buradan, $(x,k)\subseteq B\times\{k\}\subseteq N$ olur. $B\times\{k\}\in\mathfrak{B}$ olduğundan ispat biter [5]. ♦

Teorem 4.3.6

$X_1, X_2, ..., X_n$ sonlu topolojik uzaylar olsunlar. O zaman $\bigoplus_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ kompakt olması için gerek ve yeterli koşul $\lambda = 1,2,...,n$ için X_λ nın kompakt olmasıdır.

İspat:

Öncelikle $\lambda = 1,2,...,n$ için X_λ kompakt ve Ω, $\bigoplus_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ için bir açık örtü olsun. O zaman $\{\varphi_k^{-1}(\omega), \omega\in\Omega\}$, X_k için bir açık örtü olur ve böylece kabulden X_k, $\{\varphi_k^{-1}(\omega_1),...,\varphi_k^{-1}(\omega_m)\}$ sonlu alt örtüsüne sahip olur. Buradan, eğer $\Delta_k = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ ise Δ_k, $X_k\times\{k\}$ yı örter ve dolayısıyla $\Delta_1\cup...\cup\Delta_n$, Ω nın sonlu alt örtüsüdür.

Tersini göstermek için $\varphi_k : X_k \to \bigoplus_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ dönüşümünün örten olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla sadece $X_k\times\{k\}$ nın kompaktlığını göstermeliyiz. Bunu için $(X_k\times\{k\})'$, tüm $X_l\times\{l\}, l\neq k$ kümelerinin birleşimi olduğuna dikkat edelim. $\varphi_l^{-1}\left((X_k\times\{k\})'\right) = \begin{cases} X_l; l\neq k \\ \varnothing; l=k \end{cases}$ şeklinde olduğundan $(X_k\times\{k\})'$ kümesinin açık olduğunu görmek kolaydır. O halde $X_k\times\{k\}$, kapalıdır. Böylece, $X_k\times\{k\}$ kümesi kompakt uzayın kapalı alt uzayıdır ve buradan $X_k \times \{k\}$ kompakt olur. Yani X_k kompakttır [5]. ♦

Teorem 4.3.7

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ boş olmayan topolojik uzaylar olsunlar. O zaman, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ bağlantılı değildir.

İspat:

$$\varphi_l^{-1}\left(X_k \times \{k\}\right) = \begin{cases} X_k; l = k \\ \varnothing; l \neq k \end{cases}$$

olduğundan $\varnothing \subsetneq X_k \times \{k\} \subsetneq \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ açıktır. Ayrıca kapalıdır çünkü

$$\varphi_l^{-1}\left(\left(X_k \times \{k\}\right)'\right) = \begin{cases} X_l; l \neq k \\ \varnothing; l = k \end{cases}$$

şeklindedir [5]. ♦

4.4 Ayrık Bileşim Topolojisi İçin Yakınsaklık

Tanım 4.4.1

$X = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$ olmak üzere (X, τ) bir topolojik uzay, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X de bir dizi ve $b \in X$ olsun. Eğer bir tek $\lambda \in \Lambda$, her $T^{(k)} \in \tau_\lambda \left(b \in T^{(k)}\right)$ için $n \geq N_k$ olduğunda $x_n \in T^{(k)}$ olacak şekilde bir $N_k \in \mathbb{N}$ sayısı varsa bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizinin limiti b veya dizi b noktasına yakınsıyor denir ve bu tanım sembolik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$(x_n) \to b \Leftrightarrow \exists! \lambda \in \Lambda,\ \forall T^{(k)} \in \tau_\lambda \left(b \in T^{(k)}\right) \text{ için } \exists N_k \in \mathbb{N} : n \geq N_k \Rightarrow x_n \in T^{(k)}$$

Uyarı: $m \leq N_k$ iken $x_m \in X_\lambda$ olması gerekmez.

Sonuç 4.4.1

X_λ nın yakınsak dizileri X de de yakınsaktır.

İspat:

(x_n), X_λ da $b \in X_\lambda$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $X_\lambda \subseteq X$ olduğundan (x_n) aynı zamanda X in de bir dizisi olur. Yakınsaklığın tanımından

$$\forall T^\lambda \in \tau_\lambda \left(b \in T^\lambda \right) \text{ için } \exists n_0^\lambda \in \mathbb{N} : n \geq n_0^\lambda \Rightarrow x_n \in T^\lambda$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\forall T \in \tau(b \in T)$ için $T = T^\lambda$ veya $T \supseteq T^\lambda$ olduğundan $n_0 = n_0^\lambda$ olarak alınırsa $n \geq n_0$ iken $x_n \in T$ olur. Yani (x_n) dizisi X de yakınsaktır. ♦

Uyarı: X de yakınsak dizilerin, herhangi bir X_λ da yakınsak olması gerekmez.

Örnek 11:

$X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{a,b\}$, $X_3 = \{x,y,z\}$ olmak üzere (X_1,τ_1), (X_2,τ_2) ve (X_3,τ_3) ayrık topolojik uzaylar olsunlar. $X = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} X_\lambda$, $\Lambda = \{1,2,3\}$ olmak üzere (X,τ) uzayı da ayrık topolojik uzay olur (teorem). Şimdi X in bir $(x_n) = (1,a,x,y,y,y,...)$ dizisini düşünelim. Bu dizi $y \in X$ noktasına yakınsar ancak (x_n) dizisi ne X_1 ne X_2 ne de X_3 ün dizisidir. Dolayısıyla bu kümelerdeki yakınsaklığından da bahsedilemez.

Şimdi (X,τ) bir topolojik uzay, $(x_n), X$ in bir dizisi ve $G \in \tau$ için $Z_G = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin G\}$ şeklinde bir küme tanımlanarak, maks Z_G yardımıyla yakınsaklık için farklı bir yaklaşımdan bahsedilecektir. Burada $Z_G = \varnothing$ ise maks$Z_G = 1$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.4.3

X in bir (x_n) dizisinin X in bir $b \in X$ noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her $G \in \tau(b \in G)$ için maks Z_G nin var olmasıdır.

İspat:

$N_k = \text{maks}\{n_G : n_G = \text{maks} Z_G,\ G \in \tau,\ (b \in G)\}$ seçilirse (x_n), Tanım 4.4.1 de verilen anlamda yakınsak olur. Tanım 4.4.1 de verilen anlamda yakınsak iken teoremde ifade edilen anlamda da olacağı açıktır. ♦

Örnek 12:

$X \neq \{p\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayında tanımlı $(x_n) = (p, p, p, ...)$ sabit dizisini düşünelim. $p \in X$ öğesi için, $Z_X = \varnothing$ yani, maks Z_G var ve 1 dir. Ayrıca $\forall G \in \tau (p \in G)$ için $Z_G = \varnothing$, maks Z_G =1 olduğundan X in verilen dizisi $p \in X$ öğesine yakınsar. Dikkat edilirse X üzerindeki topoloji ne olursa olsun $(x_n) = (p, p, p, ...)$ sabit dizisi $p \in X$ noktasına yakınsar. Ancak aynı dizi için bir $q \in X (q \neq p)$ öğesinin varlığını düşünürsek $\forall G \in \tau (q \in G)$ için $p \notin G$ iken $Z_G = \mathbb{N}$ olacağından maks Z_G yok, ama $\forall G \in \tau (q \in G)$ için $p \in G$ iken $Z_G = \varnothing$ olup tanım gereğince maks Z_G =1 olacağından X üzerindeki topolojiye göre sabit dizi bir $q \neq p$ noktasına da yakınsayabilecektir.

Örnek 13:

(X, τ_0) ayrık olmayan topolojik uzayında bir (x_n) dizisi için X in her noktasının bu dizinin limit noktası olduğundan bahsetmiştik. $X = \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ topolojik toplamın sahip olduğu topoloji $\Lambda = \{1\}$ durumunun dışında daima ayrık olmayan topolojiden farklı olduğundan (sonuç 4.1.1.2) topolojik toplamlar için bu durum söz konusu değildir. Zaten bir topolojik toplamda $\lambda, \mu \in \Lambda$ $(\lambda \neq \mu)$ $b \in X_\lambda,\ b' \in X_\mu$ olmak üzere b ve b' gibi iki noktaya yakınsama söz konusu değildir. Aşağıda vereceğimiz sonuç bunu göstermektedir.

Sonuç 4.4.4

$X = \underset{\lambda \in \Lambda}{\oplus} X_\lambda$ topolojik toplamının bir (x_n) dizisi için $\lambda, \mu \in \Lambda$ olmak üzere $b \in X_\lambda,\ b' \in X_\mu$, (x_n) dizisinin birer limit noktası ise $\lambda = \mu$ dür.

İspat:

Tersine $\lambda \neq \mu$ olsun. $\lambda \neq \mu$ ise $X_\lambda \cap X_\mu = \varnothing$ olur. $(x_n) \to b$ olduğundan $n \geq n_0$ olmak üzere $x_n \in X_\lambda$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan $(x_n) \to b'$ olduğundan $n \geq m_0$ olmak üzere $x_n \in X_\mu$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $p_0 = maks\{n_0, m_0\}$ olarak alınırsa $n \geq p_0$ için $x_n \in X_\lambda \cap X_\mu$ olur ki buda $X_\lambda \cap X_\mu = \varnothing$ ile çelişir. ♦

5.BÖLÜM

Tartışma ve Sonuç

Çalışmada, topolojik uzaylar için genel anlamda bilinenler topolojik toplamlara uyarlandı. Bu amaç doğrultusunda elde edilen birçok sonuç, ispatları ile birlikte “Araştırma Bulguları” bölümünde verildi.

Bu çalışmanın devamında topolojik toplamsal uzayların kompaktlığı, bağlantılılığı yanında ayırma aksiyomları bakımından özellikleri incelenebilir. Ayrıca yakınsaklık ve süreklilik ve ilgili diğer kavramlar daha ayrıntılı araştırılabilir. Topolojik uzaylarla ilgili olarak ortaya atılmış daha birçok bilgi topolojik toplamlar için düşünülebilir veya yeniden yorumlanabilir.

6.BÖLÜM

Kaynaklar

Kitap

[1] LIPSCHUTZ, S. 1965. Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology. McGRAW-HILL Book Company, Sayfa Sayısı:239, United States of America.

[2] MC CARTY, G. 1967. TOPOLOGY An Introduction With Application to Topological Groups. McGRAW-HILL Book Company, Sayfa Sayısı: 270, United States of America.

[3] GÜRKANLI, A.T. 1993. Genel Topoloji. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Sayfa Sayısı: 204, Samsun.

[4] TUTALAR, H.İ. 2010. Topolojiye Giriş Ders Notları. Kelebek Kırtasiye, Sayfa Sayısı: 209, Diyarbakır.

İnternet Çıktısı

[5] By drexe128. 2010. Disjoint Union Topolgy.

Erisim: [http://drexe128.wordpress.com/2010/04/02/disjoint-union-topology/].

Erisim Tarihi: 02.04.2010

[6] Wikipedia, the free encyclopedia. 2009. Disjoint Union (topology)

Erisim: [http://en.wikipedia.org/wiki/Disjoint-unioni(topology)].

Erisim Tarihi: 2009

SÖZLÜK

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

A

Açık	• Open
Adi topoloji	• Ordinary (usual) topology
Aile (sınıf)	• Class
Alt aile	• Subclass
Alt küme	• Subset
Alt uzay	• Subspace
Alt uzay topolojisi	• Relative topology
Aksiyom (belit)	• Axiom
Aralık	• Interval
Aşikar	• Trivial
Ayırma aksiyomları	• Separation axioms
Ayrık (topoloji)	• Discrete (topology)
Ayrık bileşim	• Disjoint union
Ayrık olmayan (topoloji)	• Indiscrete (topology)

B

Bağlantılı	• Connected
Bağlantılı olmayan	• Disconnected
Benzerdönüşüm	• Homomorphism
Benzerdönüşümlü	• Homomorphic
Bileşke fonksiyon	• Composite (compound, product) function
Bire-bir	• Injective
Bire-bir ve örten	• Bijective
Birim (özdeşlik) (fonksiyonu)	• Identity function
Birinci sayılabilir uzay	• First countable space
Birleşim	• Union
Boş küme	• Empty set
Boyut	• Dimension

Ç

Çelişki	• Contradiction

D

Değişken	• Variable

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Değme noktası	• Point of contact
Denklik bağıntısı	• Equivalence relation
Dönüşüm	• Mapping
E-F	
Eğri	• Curve
Eleman (öğe)	• Member
Eşdönüşüm	• Isomorphism
Eşdönüşümlü	• Isomorphic
Fark	• Difference
Fonksiyon	• Function
G	
Genel topoloji	• General topology
Gerçel sayılar	• Reel number
Gömme	• Embedding
Gösterim (temsil)	• Representation
H	
Has	• Proper
Homeomorfik uzaylar	• Homeomorphic spaces
Homeomorfizm (Topolojik eşyapı dönüşümü)	• Homeomorphism
İ	
İç nokta	• Interior point
İçi (bir kümenin)	• Interior
İkili	• Binary
İkinci sayılabilir uzay	• Secand countable space
İnce topoloji	• Thin topology
İndirgeme	• Reduction
İspat	• Proof
İyi tanımlılık	• Well-defined
K	
Kaba topoloji	• Heavy topology
Kanonic	• Canonical
Kapalı	• Closed

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Kapalılık özelliği	• Closed-property
Kapanış	• Closure
Kapsama	• Inclusion
Kesişim	• Intersection
Kısıtlama	• Restriction
Komşuluk	• Neighborhood
Kompakt uzay	• Compact space
Kuvvet kümesi	• Power set
Küme	• Set
M-N	
Monifold	• Monifold
Negatif gerçel sayılar	• Negative reel number
Ö	
Öklit uzay	• Euclidean space
Önerme	• Proposition
Örten	• Surjective
Örtü, örten	• Covering
Örtmek	• Cover
P-R	
Pozitif gerçel sayılar	• Positive reel number
S-Ş	
Sayılabilir	• Countable
Sayılamaz	• Uncountable
Sayılabilir tümleyenler topolojisi	• Countable complement topology
Sembol	• Symbol
Serbest birleşim	• Free union
Sonlu	• Finite
Sonlu tümleyenler topolojisi	• Finite complement topology
Sonsuz	• Infinite
Sonuç	• Remark, corollary
Sürekli	• Continuous
T	
Taban	• Base

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Tanım kümesi	• Domain
Tek nokta kümesi	• Singleton
Ters	• Inverse
Teorem	• Theorem
Topoloji	• Topology
Topolojik toplam	• Topological sum
Topolojik uzay	• Topological space
Tümleyen	• Complement
Türev kümesi (türevi)	• Derivative set

U-Ü

Uzay	• Space
Üçgen	• Triangle
Üzerine	• Onto

Y

Yarı açık aralık	• Half open interval
Yerel	• Local
Yerel sonlu	• Local finite
Yığılma noktası	• Accumulation (cluster, derived) point
Yoğun	• Dense

SÖZLÜK

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

A

Accumulation (cluster, derived) point	• Yığılma noktası
Axiom	• Aksiyom

B

Base	• Taban
Bijective	• Bire-bir ve örten
Binary	• İkili

C

Canonical	• Kanonik
Class	• Sınıf (aile)
Closed-property	• Kapalılık özelliği
Closed set	• Kapalı Küme
Closure	• Kapanış
Complement	• Tümleyen
Compact space	• Kompakt uzay
Composite (compound, product) function	• Bileşke fonksiyon
Connected	• Bağlantılı
Continuous	• Sürekli
Contradiction	• Çelişki
Countable	• Sayılabilir
Countable complement topology	• Sayılabilir tümleyenler topolojisi
Cover	• Örtmek
Covering	• Örtü, örtü
Curve	• Eğri

D

Dense	• Yoğun
Derivative set	• Türev(i) kümesi
Difference	• Fark
Dimension	• Boyut
Disconnected	• Bağlantılı olmayan
Discrete (topology)	• Ayrık topoloji
Disjoint union	• Ayrık birleşim

Domain	• Tanım kümesi
E-F	
Embedding	• Gömme
Empty set	• Boş küme
Equivalence relation	• Denklik bağıntısı
Euclidean space	• Öklit uzay
Finite	• Sonlu
First countable space	• Birinci sayılabilir uzay
Free union	• Serbest birleşim
Function	• Fonksiyon
G-H	
General topology	• Genel Topoloji
Half open interval	• Yarı açık aralık
Heavy topology	• Kaba topoloji
Homeomorphic spaces	• Homeomorfik uzaylar
Homeomorphism	• Homeomorfizm(Topolojik eşyapı dönüşümü)
Homomorphic	• Benzerdönüşümlü
Homomorphism	• Benzerdönüşüm
I	
Identity function	• Birim (özdeşlik) fonksiyonu
Inclusion	• Kapsama
Indiscrete (topology)	• Ayrık olmayan topoloji
Infinite	• Sonsuz
Injective	• Bire-bir
Interior	• İçi (bir kümenin)
Interior point	• İç nokta
Intersection	• Kesişim
Interval	• Aralık
Inverse	• Ters
Isomorphic	• Eşdönüşümlü
Isomorphism	• Eşdönüşüm
L	
Local	• Yerel

Local finite	• Yerel sonlu
M-N	
Mapping	• Dönüşüm
Member	• Eleman (öğe)
Monifold	• Monifold
Negative reel number	• Negatif gerçel sayılar
Neighborhood	• Komşuluk
O	
Onto	• Üzerine
Open	• Açık
Ordinary (usual) topology	• Adi (Bilinen) topoloji
P-R	
Point of contact	• Değme noktası
Positive reel number	• Pozitif gerçel sayılar
Power set	• Kuvvet kümesi
Proff	• İspat
Proper	• Has
Proposition	• Önerme
Reduction	• İndirgeme
Reel number	• Gerçel sayılar
Relative topology	• Alt uzay topolojisi
Remark, corollary	• Sonuç
Representation	• Gösterim (temsili)
Restriction	• Kısıtlama
S	
Singleton	• Tek nokta kümesi
Secand countable space	• İkinci sayılabilir uzay
Separation axioms	• Ayırma aksiyomları
Set	• Küme
Space	• Uzay
Subclass	• Alt aile
Subspace	• Alt uzay
Subset	• Alt küme

Surjective	• Örten
Symbol	• Sembol
T	
Theorem	• Teorem
Thin topology	• İnce topoloji
Topological space	• Topolojik uzay
Topological sum	• Topolojik toplam
Topology	• Topoloji
Triangle	• Üçgen
Trivial	• Aşikar
U-V-W	
Uncountable	• Sayılamaz
Union	• Birleşim
Variable	• Değişken
Well-defined	• İyi tanımlılık

DİZİN

A

B

D- F

Y- Z

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Diyarbakır da doğdum. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimimi Diyarbakır da tamamladım. 2000 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2004 yılında mezun oldum. 2004 yılında Birey Dershanesinde matematikçi olarak başlayıp bir yıl görev yaptım. Halen görev yerim olan Dicle üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde 2007 yılında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. 2007 yılında Dicle üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans yapmaya hak kazandım.

Arife ATAY