T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE SOBOLEV UZAYLARINDA NEHARİ MANİFOLD YAKLAŞIMI VE MOUNTAİN PASS TEOREMİNİ KULLANARAK $p(x)-$ LAPLACE DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Zehra YÜCEDAĞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Ekim-2010

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Zehra YÜCEDAĞ tarafından yapılan "Değişken Üstlü Lebesgue Sobolev Uzaylarında Nehari Manifold Yaklaşımı ve Mountain Pass Teoremini kullanarak p(x)- Laplace Denklemlerin Çözümleri" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan: Prof. Dr.	Rabil MAŞİYEV (Danışman)
Üye : Prof. Dr.	Sezai OĞRAŞ
Üye : Prof. Dr.	Abdulkadir ERTAŞ
Üye : Prof. Dr.	Ali YILMAZ
Üye : Prof. Dr.	Etibar PENAHLI

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 21/10/2010

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

/ /2010

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasında bilgi ve yardımlarını hiç esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam,

Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV'e

sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tezimin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım,

Öğr. Gör. Mustafa AVCİ'ya

ve bu çalışmayı destekleyen,

DÜAPK'a

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne ulaşmamda verdikleri emek, sevgi ve destekleri için sevgili aileme teşekürlerimi sunarım...

Zehra YÜCEDAĞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında varyasyonel yaklaşımla Nehari Manifold metodu, Mountain Pass Teoremi ve Z_2 – Simetrik Mountain Pass Teoremini kullanılarak $p(x)$ – Laplace tipindeki denklemlerin çözümlerinin varlığı araştırılmıştır.

DOKTORA TEZİ

Zehra YÜCEDAĞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2010

Bu tezde, standart olmayan büyüme koşuluna sahip iki farklı denklemin çözümleri değişken üstlü Lebesgue ve sobolev uzaylarında elde edilmiştir.

Birinci bölümde, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tarihi gelişiminden ve standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin uygulamaları hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili şimdiye kadar yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel bilgiler ve Lebesgue-Sobolev uzayları hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, standart ve standart olmayan büyüme koşullu denklemlerin çözümlerinin varlığı için kullanılan temel tanımlar, temel teoremler ve varyasyonel yaklaşım hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca, bu teoremlerin kullanıldığı belli başlı çalışmalardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, standart olmayan büyüme koşullu Dirichlet sınır değer koşullarına sahip yarılineer bir elliptik problem için varyasyonel bir yaklaşımla Nehari Manifold metodu kullanarak problemin en az iki pozitif çözümün varlığı değişken üstlü Sobolev uzayında elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, $p(x)$ – Laplace tipindeki düzgün olmayan eliptik denklem için Mountain Pass ve Simetrik Mountain Pass Teoremini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu değişken üstlü Sobolev uzayında elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, using variational approach and applying Nehari Manifold method, Mountain Pass theorem and Z_2 – Symmetric Mountain Pass theorem the existence of the solutions of the $p(x)$ – Laplacian type equations were investigated in the variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces.

PhD THESIS

Zehra YÜCEDAĞ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE
2010

In the present thesis, solutions of two different equations which have non-standard growth condition were obtained in variable exponent Lebesque and Sobolev spaces.

In the first part, some information was given about the historical progress of variable exponent Lebesgue --Sobolev spaces and about the applications of differential equations with non-standard growth condition.Then, some account was also added about the studies carried out so far and the results obtained with regard to differential eqations with non-standard growth condition.

In the second part, some other information was given about the Lebesque Sobolev spaces as well as the basic kowledge that we would use in the following parts.

In the third part, some account was given about the basic theorems, basic definitions and variational approach used for the existence of solutions of equations with standard and non-standard growth conditions. In addition, some major studies, in which these theorems were used, were referred to.

In the fourth part, for a semilinear elliptic problem that possesses the Dirichlet boundary value conditions with non- Standard growth condition, at least the existence of two positive solutions was obtained in variable exponent Sobolev space by using the Nehari Manifold Method through a variational approach.

In the fifth part, the existence and multiplicity of the the solutions were obtained in variable exponent Sobolev space for the nonuniform elliptic $p(x)$ – Laplacian equation by using the Mountain Pass theorem and Symetric Mountain Pass theorem.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Son yıllarda, standart olmayan büyüme koşullu ($p(x)$ büyüme koşullu) kısmi diferansiyel denklemlere ve varyasyonel integrallere olan ilgi artmıştır. Bu ilgi, onların uygulama alanlarında rol alan elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesaplamalar ve Non-Newtonian akışkanların matematiksel modelleri olan Electrorheological akışkanlar üzerine yoğunlaşmıştır[1, 7, 13, 16, 28, 29, 30, 42]. Özellikle; standart ve standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel problemler ve varyasyonel integralin minimizelerinin regülerliği üzerinde çalışmalar olmuştur. İlk olarak; Zhikov (1986),

$$\int\limits_{\Omega} \left(1 + |\nabla u(x)|^2\right)^{\alpha(x)} dx$$

şeklindeki varyasyonel integralini çalışmıştır ve $\alpha(x)-$Hölder sürekli ise regüler olmayan minimizelerinin olmadığını göstermiştir [64]. Marcellini (1989,1991) ise

$$\int\limits_{\Omega} F\left(\nabla u(x)\right) dx$$

varyasyonel integralleri için regulerlik problemlerini

$$c_1 |\xi|^p \leq F(\xi) \leq c_2 (1 + |\xi|)^q, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N \tag{1.1.1}$$

ve $p < q$ koşulu altında incelemiştir [36, 37]. Ayrıca, $p = q$ durumunda bu tip promlemlerin ele alınmasında Sobolev uzaylar teorisi ($W^{m,\,p}(\Omega)$) doğal ve etkili bir yoldur [21]. Bu yüzden, birçok materyal ve problem klasik Lebesgue ve Sobolev uzaylarını kullanılarak yeterli doğrulukla matematiksel olarak modellenebilir. Ancak, (1.1.1) koşulunda p ve q sabitleri yerine $p(x)$ ve $q(x)$ şeklinde birer reel fonksiyon olarak alınırlarsa bu durumda varyasyonel integralin minimizeleri hangi uzayda kalacaklar sorunu ortaya çıkar. Değişken üstlü uzay araştırmaların inancı değişken üstlü Sobolev uzaylarında ($W^{m,\,p(x)}(\Omega)$, $p(x)$ bir reel fonksiyon, m negatif olmayan herhangi bir tam sayı) olacaktır. Burada, (1.1.1) koşulunun genelleştirilmesinin temel amacı homojen olmayan (Electrorheological akışkanlar) bazı materyaller için klasik Lebesgue ve Sobolev uzaylarının yeterli olmamasıdır. Bu yüzden p üstünün değişken olması gerekir. Bu son durum çalışmaların değişken üstlü Lebesgue ($L^{p(x)}$) ve Sobolev ($W^{m,\,p(x)}$) uzaylarına yönlendirilmesine sebep olmuştur. Ancak, bu uzaylarda çalışmak her zaman için avantajlı olmayabilir. Çünkü; birçok klasik sonuçlar bu uzaylarda sağlanmaz. Örneğin; öteleme operatörünün sınırlılığı, Young eşitsizliğini, Hardy eşitsizliği, kritik üste sahip Sobolev gömme Teoremi ve Lagrange Multiplier Theoremi gibi önemli özellikler $p(x)$ değişken üstüne bırakılan bazı koşullar altında sağlanır [5, 15]. Ayrıca, çok önemli özelliklerden biri olan enerji fonksiyonelinin Coercive'lik özelliğinin standart olmayan büyüme koşullu denklemler için ispatlanması oldukça zor olmaktadır.

Electrorheological (ER) akışkanlara karşılık gelen matematiksel modeller, standart olmayan büyüme koşullu denklem türündendir. Non-Newtonian akışkan olarak da bilinen ER akışkanlar, standart olmayan büyüme koşullu denklemlerle ilgili çalışmalar içerisinde ayrı bir öneme sahiptir.

Bu ER akışkanlar teorisi ile ilgili ilk önemli çalışma 1949'da Winslow tarafından yapılmıştır [66]. Bu akışkanlar çok ilginç özelliklere sahiptir şöyle ki, kendi içlerindeki bağıl devinime gösterdikleri direnme özelliği (viscosity), akışkana uygulanan elektrik alanına bağlıdır. Winslow fark etmiştir ki bu şekildeki akışkanlarda, örneğin lithium polymetachrylate, bir elektrik alanındaki viscosity, alanın kuvveti ile ters orantılıdır. Bu alan, alana paralel olan akışkanda şeride benzer formlar oluşmasına neden olur. Bunlar viscosity' nin yaklaşık beş katına kadar büyümesini sağlayabilirler. Bu olay Winslow etkisi olarak bilinir.

ER akışkanların fiziğinin matematiksel modelinin oluşturulmasında birkaç farklı yöntemi mevcuttur. Bunlar içersinde son zamanlarda Rajagopal ve Ruzicka (2001) tarafından elde edilen ve daha sonra Ruzicka'nın (2000) daha da geliştirdiği matematiksel model öne çıkmaktadır [52, 53]. Bu model, elektromanyetik alanlar ile hareketli akışkanlar arasındaki hassas etkileşimi heseba katmaktadır. Buna göre, ER akışkanların hareketine karşılık gelen temel matematiksel model aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div} S\left(u\right) + \left(u.\nabla\right)u + \nabla\pi = f \tag{1.1.2}$$

burada $u : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$, akışkanın hızını veren fonksiyonu; $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ gradient operatörünü; $u : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}$ basınç fonksiyonunu; $f : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$, harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonunu ve $S : W^{1,1}_{loc} \rightarrow \mathbb{R}^{3x3}$ fonksiyonu da ekstra stres tensörünü göstermekte olup, bu tensör aşağıdaki gibi verilir.

$$S\left(u\right)\left(x\right) = \mu(x)\left(1 + \left|\nabla u(x)\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \nabla u(x) \tag{1.1.3}$$

burada $Du : \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^r\right)$, u fonksiyonunun gradientinin simetrik kısmıdır. Dikkat edilirse (1.1.3)'de, $p(x) = 2$ iken (1.1.2) denklemi boyutlandırılmamış Navier-Stokes denklemine dönüşür. Bununla birlikte, (1.1.2) denklemi, bilinen Laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türeve sahip terim için, $\lambda = 1$ iken

$$\operatorname{div}\left(\lambda + \left|\nabla u(x)\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \nabla u(x), \tag{1.1.4}$$

Laplace denklemlerine oldukça benzerdir. Nitekim dejenere durumda, yani $\lambda = 0$ iken, (1.1.4) ifadesi $p(x)$ -Laplace operatörüne dönüşür. $p(x)$ -Laplace operatörü,

$$\begin{aligned} -\Delta_{p(x)}u &= -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) \\ \Delta_{p(x)}u &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2+...+(\frac{\partial u}{\partial x_n})^2\right]^{\frac{p(x)-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

ER akışkanlar belirli bir manyetik alanla karşılaştıklarında bu akışkanların parçacıkları hareket esnasında belli bir miktar kütle kaybına uğramaktadırlar. Kaybolan bu kütle miktarını p kuvveti sabit iken $x \in \mathbb{R}^N$'nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca eşit kabul etmek zorunluluğu ortaya çıkmakta ve dolayısıyla bu farklı kütle kayıpları hesaba katılamamaktadır. Kaybolan bu kütle miktarını bu şekilde eşit kabul etmek ise bazı fizik, mekanik ve özellikle ER akışkanlarla ilgili problemlere karşılık gelen matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulamamasına sebep olmaktadır. Ancak; p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon şeklinde seçilirse, o zaman $x \in \mathbb{R}^N$'nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca ortaya çıkan farklı kütle kayıpları hesaba katılabilmekte bu da matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulabilmesine imkân vermektedir. Dolayısıyla, ER akışkanlar teorisinden kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemlere karşılık gelen matematiksel modeller ancak değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında oluşturulabilirler ve incelenebilirler.

ER akışkanlar teorisinden kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemler için model teşkil edebilecek temel denklemlerden biri, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve f belli koşullara sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.6)$$

tipindeki denklemlerin, lineer olmayan kısmını oluşturan $f(x)$ fonksiyonunun sağladığı standart olmayan büyüme koşullarına göre fizikte farklı durumlara karşılık gelirler. Şöyle ki, $F(x,u) = \int_0^s f(x,t)\,dt$ ve $c > 0$ tamsayı olmak üzere, $f(x,u)$ fonksiyonunun sağladığı standart olmayan büyüme koşulu

$$|F(x,u)| \le c\left(1+|u|^{r(x)}\right)$$

şeklinde verilsin. Buna göre,

i) $p(x) > r(x)$ ise Sublineer durum (Parçacığın kütle kaybı süreci yavaş)

ii) $p(x) < r(x)$ ise Superlineer durum (Parçacığın kütle kaybı süreci hızlı)

iii) $p(x) = r(x)$ ise Rezonans durum (Parçacığın kütle kaybı miktarı fazla veya kütlenin tamamen kaybolması) şeklinde verilir.

Rezonans durumu matematiksel olarak şöyle ifade edilir; $f(x,u)$ fonksiyonu standart olmayan büyüme koşullu bir denklemin lineer olmayan kısmı ve $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{p(x)-2}u}$ sonlu olmak üzere, eğer $\frac{f(x,u)}{|u|^{p(x)-2}u}+\lambda_1$ terimi $\lambda_1$özdeğerine karşılık gelirse o zaman verilen standart olmayan büyüme koşullu denklem (sonsuzda) Rezonance durumuna sahiptir denir. Dikkat edilirse Rezonans probleminin incelenebilmesi için öncelikle denklemin birinci özdeğerinin yani λ_1'in bilinmesi gerekir. Rezonans durumu fizikte çok önemli bir yere sahip olmakla birlikte, standart büyüme koşullu denklemlerde $f(x,u)$ fonksiyonuna bırakılan özel koşullar altında incelenmiştir. Ancak, standart olmayan büyüme koşullu denklemler için henüz incelenmemiştir. Bunun en önemli nedeni:

$$\inf\Lambda = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,p(x)}\\ u\neq 0}} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx}{\int\limits_\Omega |u|^{p(x)}\,dx} \tag{1.1.7}$$

oranı düşünüldüğünde şu belirsizlikler ortaya çıkmaktadır:

i) $p-$büyüme koşulu denklem için daima $\inf\Lambda = \lambda_1 > 0$ iken, $p(x)-$büyüme koşullu denklemler için bu durum genel olarak gerçekleşmez ve (genel olarak) $\inf\Lambda = 0$ olur. Ancak $\inf\Lambda > 0$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul Poincaré eşitsizliğinin modüler versiyonu olarak bilinen, $c > 0$ sabit sayısı için

$$\int\limits_\Omega |u|^{p(x)}\,dx \le c\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx \tag{1.1.8}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır, ancak bu eşitsizlik değişken üstlü Lebesgue-Sobolev uzaylarında genel olarak sağlanmaz.

ii) (1.1.7)'deki orana göre λ_1(birinci özdeğer), bu şekildeki özdeğerlerin infimumu olmalıdır, $p(x)-$büyüme koşullu denklemlerde λ_1'in varlığı hakkında, (1.1.8) eşitsizliği sağlansa dahi, kesin birşey söylenmediği gibi λ_1'in var olması durumunda bile bunun, $p(x)-$büyüme koşullu denklem için bir özdeğer olması gerekmez.

iii) $p(x)-$büyüme koşullu denklemler için λ_1'in varlığı kesin olsa bile λ_1'e sadece bir tek Φ_1 öz fonksiyonun karşılık geleceği hakkında kesin birşey söylenemez. Oysaki, $p-$büyüme koşullu denklemlerde $\lambda_1$özdeğerine sadece Φ_1 öz fonksiyonu (veya Φ_1'in katlılıkları) karşılık gelmektedir.

Fan, Zhang ve Zhao (2005) çalışmalarında, (1.1.6)'daki problemde $f(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $p(x) = q(x)$ ve $p(x)$'in monoton fonksiyon olması durumunda (1.1.6) problemini özdeğerlerinin sonsuz tane olduğu ve $\inf\Lambda = \lambda_1 > 0$ ve $\sup\Lambda = +\infty$ koşullarının sağlandığını göstermişler [27].

Günümüzde ER akışkanların kullanım ve uygulama alanları ile ilgili birçok yenilik söz konusudur, bunları bazıları: ABD ordusunda 'geleceğin savaş gücü' adında bir proje planlanmaktadır. Bu projeye göre, ER akışkanların kumaşın içine derinlemesine işleme ve kumaşın normal durumundan çok daha katı (dayanıklı) hale dönüşmesini çok hızlı bir şekilde sağlayabilme özelliklerinden faydalanarak şuankinden çok daha hafif olan kurşun geçirmez yelekler üretilmesi amaçlanmaktadır. Bununla birlikte, yine ABD' de NASA laboratuarlarında ER akışkanların robot ve uzay teknolojisinde kullanımıyla ilgili deneysel çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca; ER akışkanların, sarılabilir/döndürülebilir ekranlar ve keypadler ile birlikte kullanılarak ihtiyaç duyulduğunda katı hale getirilebilen, ihtiyaç olmaması durumunda ise esnekleşerek sarılabilir/döndürülebilir hale getirilebilen 'esnek elektronik cihazlar' üretimi için de kullanılabileceği öngörülmektedir. Bu amaçla ünlü mobil telefon üreticisi Motorola, 2006 yılında bahsedilen özellikte mobil telefon üretimi için tescil hakkı almıştır.

Yukarıda bahsedilen durumlar gözönüne alındığında, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında çalışmak gerek teorik gerekse uygulama alanları düşünüldüğünde birçok avantaj sağlamaktadır. Aşağıda, bu uzayların ortaya çıkışından günümüze kadar meydana gelen çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

Değişken üstlü Lebesgue uzayları literatürde ilk defa, 1931 yılında Orlicz tarafından yazılan makalede ortaya konmuştur [50]. Bu makalede, şu soru göz önüne alınmıştır: (p_i) $(p_i > 1)$ ve (x_i) dizileri $\sum x_i^{p_i}$ yakınsak olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda, $\sum x_i y_i$ ifadesinin yakınsak olması için (y_i) üzerindeki gerek ve yeter koşullar nelerdir? Bu soruya yanıt, en az bir $\lambda > 0$ ve $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}$ için $\sum (\lambda y_i)^{p_i'}$ serisinin yakınsak olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Orlicz aynı zamanda, reel aralıkta degişken üstlü Lebesgue uzayını değerlendirmiştir ve bu uzayda Hölder eşitsizliğini ispatlamıştır. Bu makaleden sonra Orlicz değişken üstlü Lebesgue uzayında çalışmayı bırakıp, kendi ismi ile anılan Orlicz fonksiyon uzaylar teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Orlicz uzaylar teorisi (L^{φ}); $u : \Omega \to [0, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere en az bir $\lambda > 0$ ve belirli koşulları sağlayan φ fonksiyonu için

$$\rho\left(\lambda u\right) = \int\limits_{\Omega} \varphi\left(\lambda \left|u(x)\right|\right) dx < \infty$$

olacak şekildeki fonksiyonlardan oluşan uzaydır. Eğer, φ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda **genelleştirilmiş Orlicz uzayları** veya **Musielak-Orlicz uzayları** adı verilen daha genel uzaylar elde edilir. Ek olarak, φ fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da modüler uzaylar adı verilir. Bu uzaylar ilk kez sistematik olarak Nakano (1950 ve 1951) tarafından çalışılmış ve Nakano kitabında değişken üstlü Lebesgue uzayının daha genel uzayların bir örneği olduğunu düşünmüştür [46, 47]. Nakano'nun çalışmalarından sonra modüler uzaylar üzerinde birçok araştırmacı çalışmıştır. Daha sonra, özellikle Hudzik [31, 32, 33], Kamınska [34] ve Musielak [45] tarafından modüler fonksiyon uzayları incelenmiştir.

Reel aralıkta değişken üstlü Lebesgue uzayları, bağımsız olarak Rus araştırmacılardan özellikle de Sharapudinov (1978) tarafından geliştirilmiştir [56]. Bu araştırmacıların orjin noktası 1961 yıllında Tsenov (1961) tarafından üretilen ve Sharapudinov tarafından cevaplanan u sabit bir fonksiyon ve v, $L^{p(x)}\left([a, b]\right)$

uzayınnın sonlu boyutlu alt uzayında değişmek üzere

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)}\, dx$$

ifadesinin minimize problemine dayanır [56, 59]. Ayrıca, Sharapudinov Lebesgue uzayları için Luxemburg normunu tanımlamış ve eğer $p(x)$ değişkeni $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ koşulunu sağlarsa bu uzayın yansımalı uzay olduğunu göstermiştir. 1980 'li yılların ortasında Zhikov dekişken üstlü uzayların çalışmaları ile yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel integralleri göz önüne alarak araştırmalar için yeni bir çizgi oluşturmuştur [64].

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki büyük adım 90'lı yılların başlarında Kovacik ve Rakosnik (1991) tarafından atılmıştır. Bu makalede, $\mathbb{R}^N$ 'de değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özelliği ortaya konmuştur. Kovacik ve Rakosnik, değerlerini $[1, \infty]$ aralığında alan p fonksiyonu için değişken üstlü Lebesgue uzayının tanımını genişletmişler dir [35].

Bu tanıma göre Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge ve $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$ olmak üzere,

$$\rho(u) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{ess\sup} |u(x)|$$

ve

$$|u|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(u/\lambda) \leq 1\}$$

olarak alınsın. En az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm fonksiyonların sınıfına **değişken üstlü Lebesgue uzayı** adı verilir. Ayrıca, değişken üstlü Lebesgue uzayında sobolev gömme teoremini ıspatlamışlardır.

Bu makaleden sonra uzun bir süre herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Daha sonra, bu konu birçok matematikçi tarafından yeniden ele alınmıştır. Ayrıca, Edmunds ve Rakosnik (2000) benzer bir çalışma yaparak, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Lipschitz sınıra sahip iken Sobolev gömme teoremini vermişlerdir [21].

Ayrıca Samko (2005), Rus bilim adamlarının çalışmalarına dayalı olarak değişken üstlü Lebesgue uzayında Konvolüsyon ve Young eşitsizliğinin geçerli olmadığını ispatlamıştır [54] .

Son yıllarda, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının standart olmayan büyüme koşullu $p(x)-$Laplace operatörünü içeren sınıfların çözümleri üzerinde çalışmalar yoğunlaşmıştır. Bu alanda yapılan belli başlıca çalışmalar ;

Fan ve Zhao (2001), standart olmayan büyüme koşullu eliptik denklemler ve varyasyonel problemlerin temel özelliklerinden yaralanarak değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayların özelliklerini incelemişler. Ayrıca, sınırlı bölgede Sobolev gömme teoremini göstermişler. Ayrıca, $C^\infty(\Omega)$ uzayının değişken üstlü

Sobolev ve Lebesgue uzaylarında yoğunluğunu göstermişler [23] .Daha sonra Fan ve arkadaşları (2001); Ω, $\mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ koni özelliğine sahip açık bir bölge ve $p(x)$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ 'da Lipschitz sürekli bir fonksiyon olmak üzere değişken üstlü Sobolev ve Lebesgue uzaylarında $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)$ Sobolev gömme teoremini ispatlamışlardır [22].

Fan ve Han (2004), $p(x)-$Laplace operatörünü içeren, Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almışlar. Bu çalışmada; Ambrosetti ve Rabinowitz koşulu altında varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak, denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, denklemin çözümlerin varlığı ve katlılığı gösterilmiş-dir [25].

Fan ve Zhang (2003), $\mathbb{R}^N$ 'de $p(x)-$Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan elliptik denklemini ele almışlardır.Yazarlar; Ambrosetti ve Rabinowitz koşulu altında varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını inceleyerek, denklemin çözümlerinin varlığını ve katlılığını göstermişlerdir. [24]

Mihăilescu ve Rădulescu (2006), standart olmayan büyüme koşullu denklemi ele almışlar. Yazarlar; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini ve Mountain Pass teoremini kullanarak, denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, denklemin çözümlerinin varlığını göstermişlerdir [39].

Fan (2005), $p(x)-$Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini, Fountain ve Dual Fountain teoremlerini kullanarak, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denklemin çözümlerinin varlığını ve katlılığını göstermiştir [26].

Mihăilescu (2006), standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremini ve Ekeland Varyasyonel prensibini kullanarak, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir [40].

Mihăilescu (2008), standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini, Fountain, Dual Fountain ve Z_2-Simetrik Mountain Pass teoremlerini kullanarak, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir [43].

Ogras ve arkadaşları (2008), standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklem sistemini ele almışlar. Yazarlar; varyasyonel yaklaşımla

Mountain Pass teoremini ve Cerami koşulunu kullanarak, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermişlerdir [49].

Zang (2008), standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Fountain teoremini, Cerami koşulunu ve Ambrosetti-Rabinovitz tip koşulları kullanarak, denklemin Superlineer durumu inceleyerek, denklemin çözümlerinin varlığını göstermiştir [62].

Boureanu (2006), standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremini kullanarak, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denkleminin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğununu göstermiştir [8].

Calota (2008), standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremini ve Ekeland prensibini kullanarak, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir [14].

Alves ve Souto (2005), standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemi incelemişler. Yazarlar; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremini kullanarak, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin çözümlerinin varlığını göstermişlerdir [5].

Bütün bu çalışmalarla birlikle $p-$Laplace operatörünü içeren denklemler için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu denklemlerin çözümleri araştırılırken yukarıda bahsedilen varyasyonel yaklaşımlardan kullanılan teoremlerin dışında Nehari Manifoldu ve Fibrering metodu kullanılmıştır [4, 9, 10]. Özellikle vurgulamak gerekir ki; Nehari Manifold yaklaşımı kullanılarak, standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemlerin çözümleri çalışılmamıştır.

Wu (2007), $p-$Laplace operatörünü içeren Dirichlet sınır koşullarına sahip eliptik denklemini ele almıştır. Yazar; varyasyonel yaklaşımla Nehari Manifold yöntemini kullanarak, denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, denklemin en az iki pozitif çözümü olduğunu göstermiştir [68].

Brown ve Wu (2003), standart büyüme koşullu sahip ve Dirichlet sınır koşullarına sahip yarı lineer eliptik denklemini ele almışlar. Yazarlar; varyasyonel yaklaşımla Fibrering metodunu kullanarak, denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, denklemin en az iki pozitif çözümü olduğunu göstermişlerdir [9].

Afrouzi ve arkadaşları (2007), $p-$Laplace operatörünü içeren ve Dirichlet sınır koşullarına sahip yarı lineer eliptik denklemini ele almışlar. Yazarlar;

varyasyonel yaklaşımla denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, Nehari Manifold metodunu ve Fibrering metodu arasındaki ilişkiden yararlanarak pozitif çözümlerinin olup olmadığı göstermişlerdir [4].

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde; öncelikle daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler hakkında bilgi verilecektir. Daha sonra, çalışmamızda kullanacağımız uzaylar hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Normlu Uzay ve İç Çarpım Uzayı

Tanım 2.1.1. Bir X vektör uzayında

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \to \|x\|$$

linde tanımlanan fonksiyon her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

liklerini sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine normlu uzay denir. Bundan sonra bir $x \in X$ elemanın normu $\|x\|$ şeklinde ve X uzayında tanımlanan norm $\|.\|_X$ şeklinde gösterilecektir.

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayında bir $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$ vektörünün normu

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.2. (x_n), $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.1.3. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

ii) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

iii) Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayda (x_n) bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x 'e yakınsaktır.

iv) Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir [44].

Tanım 2.1.4. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tam normlu** uzay veya **Banach uzayı** adı verilir.

Tanım 2.1.5. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir.

Eğer, f fonksiyoneli her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda f fonksiyoneli lineer olur.

Tanım 2.1.6. $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X vektör uzayının **dual uzayı** denir ve X^* ile gösterilir.

Bu uzay

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \text{ ve } (cu)(x) = cu(x); \quad u, v \in X^*, \; x \in X, \;\; c \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan noktasal toplam ve çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X^*$ elemanın normu

$$\|u\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır. X^* uzayı $\|.\|_{X^*}$ normu ile bir Banach uzay olur. Ayrıca, X vektör uzayının duali de normlu vektör uzayı olduğundan dolayı bu uzayın da dual uzayı tanımlanabilir.

Tanım 2.1.7. X^* normlu uzayının duali olarak tanımlanan $X^{**} = (X^*)^*$ vektör uzayına X uzayının **ikinci duali** denir. X^{**} ikinci dual uzayı da bir Banach uzay olur.

Sabit bir $x \in X$ elemanı ve $u \in X^*$ için

$$\begin{aligned} g : X^* &\longrightarrow \mathbb{R}\,(\text{veya } \mathbb{C}) \\ u &\longrightarrow g_x(u) = u(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir g_x fonksiyoneli olduğunu varsayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden, bu durumda

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longrightarrow T(x) = g_x(u) \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** denir. Eğer, bu dönüşüm üzerine ise bu durumda X uzayına **yansımalı uzay** adı verilir. X yansımalı bir uzay ise $X = X^{**}$ olur.

Teorem 2.1.8. Yansımalı bir $(X, \|.\|_X)$ Banach uzayının her alt uzayı da yansımalıdır [44].

Tanım 2.1.9. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

Eğer, $(x_n) \in X$ dizisi için

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisine x_0 'a **güçlü yakınsıyor** denir ve $x_n \to x_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisine x_0'a **zayıf yakınsıyor** denir ve $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.11. Normlu bir $(X, \|.\|_X)$ uzayında bir (x_n) dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin.Bu durumda,
i) $x_n \rightharpoonup x_0$ ise x_0 elemanı tektir;
ii) $x_n \rightharpoonup x_0$ ise $\|x_n\|_X$ dizisi sınırlıdır;
iii) $x_n \rightharpoonup x_0$ ise (x_n) dizisinin her alt dizisi x_0'a zayıf yakınsaktır;
iv) $x_n \to x_0$ ise $x_n \rightharpoonup x_0$ olur. Bunun tersi genel olarak doğru değildir
v) Boy$X < \infty$ ise $x_n \to x_0 \Longleftrightarrow x_n \rightharpoonup x_0$ olur. Yani, sonlu boyutlu uzaylarda zayıf ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır [44].

Teorem 2.1.12. Yansımalı bir $(X, \|.\|_X)$ Banach uzayında sınırlı bir dizi aynı zamanda X'de zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir [65].

Tanım 2.1.13. $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$, X normlu uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$c_1 \; \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \, \|x\|_1$$

olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sabitleri varsa $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Bir sonlu boyutlu vektör uzayında tanımlı normlar denk olduğundan dolayı, o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlar. Yani, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları denk normlar ise X içinde $\|.\|_1$ $(\|.\|_2)$ normuna göre yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi ise $\|.\|_2$ $(\|.\|_1)$ normuna göre de yakınsak, sınırlıdır ve Cauchy dizisidir. Ayrıca, $(X, \; \|.\|_1)$ (veya $(X, \|.\|_2)$) bir Banach uzay ise $(X, \|.\|_2)$ (veya $(X, \; \|.\|_1)$) uzayı da bir Banach uzay olur.

Tanım 2.1.14. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzay ve X 'in bir E $(E \subset X)$ alt kümesi verilsin. Eğer, E'nin elemanlarından oluşan herbir (x_n) dizinin yakınsadığı değer X uzayının bir elemanı oluyorsa E kümesine X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.15. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Teorem 2.1.16. $(X, \|.\|_X)$ ayrılabilir yansımalı bir Banach uzay ve (x_n), X^* uzayında sınırlı bir dizi ise o zaman bu dizi X^* uzayında zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir [65].

Teorem 2.1.17. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzayı olsun. X uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşul X^* uzayının yansımalı olmasıdır. Eğer X uzayı ayrılabilir ise, X^* uzayıda ayrılabilirdir. Bu durumda, X ayrılabilir ve yansımalı bir uzay ise X^* ayrılabilir ve yansımalı bir uzay olur [2].

Tanım 2.1.18. X, K ($K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to K$$

onu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($\overline{c}, c \in \mathbb{C}$'nin karmaşık eşleneğidir)

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

liklerini sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$'ye X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** denir. $K = \mathbb{R}$ olması durumunda **ii)** özelliği $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ şeklinde olur.

$(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayında bir x vektörünün normu,

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

$n-$ buyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayındaki $x = (x_{1,\dots,}x_n)$ ve $y = (y_{1,\dots,}y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.19. $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayı bir Banach uzay ise, bu uzaya **Hilbert uzayı** denir.

Tanım 2.1.20. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ olsun. $\alpha_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

şeklindeki bir toplama $x_1, x_2, ..., x_n$ nin lineer birleşimi denir. $M \neq \varnothing \subset X$ ise M den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer birleşimlerinin kümesine M nin **gereni (span)** denir ve Span$M$ olarak gösterilir. Span$M$, X'in bir alt uzayıdır.

2.2. Süreklilik ve Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de açık bir bölge ve $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x, x_0 \in \Omega$ elemanları için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε'a bağlı bir δ pozitif sayısı bulunabiliyorsa $u(x)$ fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında süreklidir denir.

Ω'da tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümeye de sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C^0(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j 'lerin $n-$ bileşenlisi ise α'ya **çoklu indis** denir ve $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$ şeklinde yazılabilir.

Buna göre $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ise, o zaman $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$ ifadesi $|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Bu ifade

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca bir u fonksiyonunun grandienti

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde ve u fonksiyonunun grandientinin normu

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3. $\overline{G}, G \subset \mathbb{R}^N$ alt kümesinin kapanışıdır. $\mathbb{R}^N$ 'de bir Ω bölge için $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^N$'nin kompakt (kapalı ve sınırlı) bir alt kümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. G'de tanımlı bir u fonksiyonun desteği

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω'da **kompakt desteğe** sahiptir denir [2].

Tanım 2.2.4. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde, $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^a u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonların oluşturduğu uzay $C^m(\Omega)$ vektör uzayıdır.

$$C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$$

ve

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

olarak yazılabilir.

$C_0(\Omega)$ ve $C_0^{\infty}(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^{\infty}(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu denir. Ω açık bir bölge olduğundan dolayı $C^m(\Omega)$ daki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir.

Tanım 2.2.5. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayısı olsun. Ω bölgesinde $D^{\alpha}u$ kısmi türevlerin sınırlı olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının belirtiği uzaya $C_B^m(\Omega)$ vektör uzayı adı verilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.6. Eğer $u \in C(\Omega)$ fonksiyonları Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $0 \le |\alpha| \le m$ için Ω bölgesinde $D^{\alpha}u$ sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonların belirtiği vektör uzayı $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ şeklinde gösterilir . $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı, $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında tanımlanan norm

$$\|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

yada

$$\|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} + \max_{0 < |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

şeklinde yazılır. Bu norm altında $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

2.3. Normlu Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 2.3.1. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzayda açık kümelerin bir ailesi $\mathcal{D} = (D_j)_{j\in\Lambda}$olsun. Eğer bir $E \subset X$ alt kümesi için $E \subset \bigcup_{j\in\Lambda} D_j$ oluyorsa $\mathcal{D}$ ailesine E kümesinin açık bir örtüsü denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{j\in\Lambda_0} D_j$ ise $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{j\in\Lambda_0} D_j$ ailesine E kümesinin sonlu alt örtüsü adı verilir. E kümesini örten $\mathcal{D}$ ailesinin her kümesinin çapı bir $\varepsilon > 0$'dan büyük değilse $\mathcal{D}$ örtüsüne E kümesinin ε örtüsü denir[44].

Tanım 2.3.2. $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X 'de **kompakt** bir küme adı verilir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X'de kompakt bir küme ise E'ye X'de bir **ön-kompakt küme** denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayına kompakt (ön-kompakt) normlu uzay adı verilir.

Ön-kompaktlık kavramı (kompaktlık kavramından farklı olarak), verilen kümenin hangi uzayda incelendiğine bağlıdır. Örneğin, $(0, 1)$ açık aralığında yer alan tüm rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'de ön-kompakt olmasına rağmen $\mathbb{Q}$'da ön-kompakt değildir. Normlu uzaylarda kompaktlık ile ön-kompaktlık kavramları denktir.

Tanım 2.3.3. $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayı ve E'de X 'in bir alt kümesi olsun. Eğer E içindeki her dizinin, limiti E'den olan yakınsak bir alt dizisi varsa E kümesine, X'de **dizisel kompakt küme** adı verilir. Eğer E'nin $\overline{E}$ kapanışı X'de dizisel kompakt küme ise E'ye X'de **dizisel ön-kompakt** bir küme denir. Eğer X dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) normlu uzay adı verilir.

Bu tanıma göre; X'de dizisel kompakt bir $E \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi var olacaktır. Bu $x \in E$ noktası (x_n) dizisi için bir limit noktasıdır. Ayrıca, $E \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ limit noktası varsa (x_n) dizisinin bu "x" noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunabilir.

Tanım 2.3.4. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. E içindeki her dizinin E 'de bir limit noktası varsa E kümesine X 'de bir **dizisel kompakt küme** adı verilir.

Teorem 2.3.5. (Heine-Borel teoremi)

$\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesinin kompak olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır [65].

Yukarıdaki teoremden, "$\mathbb{R}$ içinde her kompakt küme $\mathbb{R}$ içinde kapalı ve sınırlıdır" sonucunu çıkarabiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}$ 'de bir kümenin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Fakat, sonsuz boyutlu Banach uzaylarında kapalılık ve sınırlılık koşulu kompaktlık için gerekli olmasına rağmen yeterli bir koşul değildir.

Lemma 2.3.6. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E kümesi X 'de kompakt ise bu küme X 'de dizisel kompakt bir kümedir [44].

Tanım 2.3.7. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. O zaman

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B_r}(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X = r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.3.8. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için E kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan $\varepsilon-$örtüsü varsa E kümesine X 'de **tamamen sınırlı bir küme** adı verilir.

Teorem 2.3.9. Bir $(X, \|.\|_X)$ Banach uzay ve $E \subset X$ alt kümesi verilmiş olsun. E 'nin X 'de ön-kompakt olması için gerek ve yeter koşul, E 'nin X 'de tamamen sınırlı olmasıdır [44].

Yukarıdaki teoremden; kapalı bir kümenin tamamen sınırlı bir küme olması için gerek ve yeter koşul, bu kümenin kompakt bir küme olmasıdır. Böylece, sonlu boyutlu uzaylarda doğru olan "kapalılık + sınırlılık=kompaktlık" özelliği yerine, "kapalılık + tamamen sınırlılık=kompaktlık" özelliğinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 2.3.10. Bir $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşul, bu uzayın kapalı $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ yuvarının kompakt olmasıdır [2, 65].

Tanım 2.3.11.$(X, \|.\|_X)$ Banach uzayı ve tanım kümesi $E \subset X$ olan $f : E \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli verilsin. f fonksiyonelinin E üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, y \in E$ için

$$\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

Teorem 2.3.12. u, $(X, \|.\|_X)$ Banach uzayının kompakt E alt kümesinde sürekli reel bir fonksiyonel olsun. Bu durumda, u fonksiyoneli E üzerinde sınırlıdır ve bu küme üzerinde bir en küçük ve bir en büyük değere ulaşır [44].

Tanım 2.3.13. $(X, \|.\|_X)$ Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E içindeki her sonsuz (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $(X, \|.\|_X)$ 'da zayıf kompakt (veya dizisel zayıf kompakt) küme adı verilir.

Teorem 2.3.14. $(X, \|.\|_X)$ Banach uzayının zayıf kompakt her kümesi sınırlıdır [66].

2.4. Operatörler ve Gömmeler

Tanım 2.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve D_T, X 'in bir alt kümesi olsun. $T : D_T \subset X \to Y$ dönüşümü D_T'nın herbir elemenını Y 'nin yalnız bir elemana karşılık getiriyorsa, T 'ye D_T 'den Y 'ye bir **operatör** adı verilir ve D_T 'ye T operatörünün tanım kümesi denir.

$$\{y \in Y : y = Tx, \ x \in D_T\}$$

kümesine T operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir.

Tanım 2.4.2. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir operatörü olsun. Eğer T operatörü, her $x, y \in D_T$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **lineer operatör** denir.

Tanım 2.4.3. $D_T \subset X$ ve $T : X \to Y$ operatör olmak üzere, her $x \in D_T$ için

$$\| Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X \qquad (2.4.1)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörüne D_T üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D_T = X$ ise T operatörüne **sınırlıdır** denir.

(2.4.1) eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayılarının infumumuna $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörünün normu denir. Buna göre

$$\| T\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in D_T \text{ için } \| Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X\}$$

olur. Ayrıca, (2.4.1) eşitsizliği $x \neq 0$ için

$$\frac{\| Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$$

yazılabilirki bu durumda c'nin en az sol taraftaki ifadenin $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremumu kadar olabileceğini gösterir. O halde (2.4.1) eşitsizliğinde mümkün olan en küçük c'nin söz konusu olduğu supremum değerine T operatörünün normu denir ve

$$\| T\| = \sup_{\substack{x \in D_T \\ x \neq 0}} \frac{\| Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

şeklinde gösterilebilir. Ayrıca, X'den Y 'ye tanımlanan bütün sınırlı ve lineer operatörlerin oluşturduğu uzay $L(X,Y)$ şeklinde gösterilsin. Eğer Y bir Banach uzay ise $L(X,Y)$ uzayı da bir Banach uzaydır.

Tanım 2.4.4. $T : X \to Y$ operatör, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer, $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\|_X &\to 0 \ (x_n \to x_0) \text{ olduğunda} \\ \|T(x_n) - T(x_0)\|_Y &\to 0 \ (T(x_n) \to T(x_0)) \end{aligned}$$

oluyorsa T operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir. Lineer operatörler için sınırlılık ve süreklilik kavramları denktir. Lineer olmayan operatörler için bu ifade geçerli değildir [66].

Tanım 2.4.5. $T : X \to Y$ operatör, X'de $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer,

i) $n \to \infty$ iken Y'de $T(x_n) \to T(x_0)$ sağlanıyorsa T operatörüne x_0 noktasında güçlü süreklidir

ii) $n \to \infty$ iken Y'de $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ sağlanıyorsa T operatörüne x_0 noktasında zayıf süreklidir denir.

Norma göre güçlü yakınsak olan bir T operatörü, aynı zamanda zayıf yakınsak olduğundan dolayı, eğer T operatörü güçlü sürekli ise aynı zaman da süreklidir. Bu yüzden, güçlü süreklilik kavramı süreklilik'ten daha güçlü bir kavramdır.

Teorem 2.4.6. X yansımalı bir Banach uzayı ve $T : X \to Y$ güçlü sürekli operatör ise T operatörü kompaktır [66].

Tanım 2.4.7. $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \qquad (2.4.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı-süreklidir denir. Eğer (2.4.2) eşitsizliği $x_n \rightharpoonup x_0$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında alttan zayıf yarı-süreklidir denir.

Tanım 2.4.8. $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \qquad (2.4.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında üstten yarı-süreklidir denir. Eğer (2.4.3) eşitsizliği $x_n \rightharpoonup x_0$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında üstten zayıf yarı-süreklidir denir.

Eğer f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında (zayıf) sürekli ise, o zaman f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında (zayıf) alttan yarı-sürekli ve (zayıf) üstten yarı-sürekli olur.

Tanım 2.4.9. X ve Y iki Banach uzay ve $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine dönüştürüyorsa, T'ye **kompakt lineer operatör** (tamamen sürekli lineer operatör) adı verilir. T kompakt lineer operatör ise aynı zamanda tamamen sürekli lineer operatör olur.

Tanım 2.4.10. X ve Y iki Banach uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer, $f : X \to Y$ şeklinde tanımlanan operatör her $h \in X$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left\|f\left(x+th\right)-f\left(x\right)\right\|_Y}{t}=T_x\left(h\right)$$

olacak şekilde bir $T \in L(X,Y)$ varsa f 'ye $x \in X$ noktasında ve h yönünde **Gâteaux differansiyellenebilirdir** denir. T operatörüne ise f 'in $x \in X$ noktasındaki **Gâteaux türevi** denir. Eğer, bu durum her $x \in X$ için doğru ise f operatörü **Gâteaux differansiyellenebilirdir** denir [55].

Tanım 2.4.11. X bir Banach uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli X'de Gâteaux differansiyellenebiliyorsa ve bu Gâteaux differansiyelli sürekli ise f fonksiyonelinin differansiyeli zayıf süreklidir denir [19].

Teorem 2.4.12. (Ortalama Değer Teoremi)
X bir Banach uzayı ve $x, h \in X$ olsun. Eğer $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=f^{\,\prime}\left(x+th\right)h$$

olacak şekilde bir $0 < t < 1$ sayısı vardır [51].

Tanım 2.4.13. X ve Y iki Banach uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer $f : X \to Y$ tanımlanan operatör her $h \in X$ için

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)-T_x\left(h\right)\right\|_Y}{\left\|h\right\|_X}=0$$

olacak şekilde bir $T \in L(X,Y)$ varsa f operatörüne $x \in X$ noktasında **Fréchet differansiyellenebilir** denir. T_x operatörüne ise f 'in $x \in X$ noktasındaki **Fréchet türevi** denir. Eğer, her $x \in X$ için bu durum doğru ise f operatörü **Fréchet differansiyellenebilir** denir [51].

Teorem 2.4.14. Eğer, $f : X \to Y$ operatörü $x \in X$ 'de Fréchet differansiyellenebilir ise, o zaman f operatörü $x \in X$ 'de süreklidir [51].

Teorem 2.4.15. Eğer, $f : X \to Y$ fonksiyonelinin X 'de Gâteaux türevi sürekli ise bu durumda f fonksiyoneli Fréchet differansiyellenebilirdir ve $f \in C^1(X, Y)$ olur [66].

Ayrıca bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.4.16. X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer,

i) X, Y 'nin bir alt uzayı

ii) Her $x \in X$ için X'ten Y 'ye $I(x) = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü doğrusal olduğundan **ii)** koşulu her $x \in X$ için

$$\|I(x)\|_Y \leq c \ \|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığına denktir. Eğer, I birim operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir [2].

2.5. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyon

Tanım 2.5.1. $\Re$, $\mathbb{R}^N$ 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\Re$ ailesi

i) $\mathbb{R}^N \in \Re$

ii) Eğer $A \in \Re$ ise $A^c = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x \notin A\right\} \in \Re$

iii) Eğer $j = 1, 2, ...$ için $A_n \in \Re$ ise $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \Re$

sağlıyorsa $\Re$ ailesine $\mathbb{R}^N$ üzerinde bir σ-cebir denir.

i) - iii) özelliklerinin bir sonucu olarak

iv) $\varnothing \in \Re$

v) Eğer $j = 1, 2, ...$için $A_j \in \Re$ ise $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \Re$

vi) Eğer $A, B \in \Re$ ise $A - B = A \cap B^c \in \Re$

özellikleri yazılabilir. **i- iii** koşulları ile **iv - vi** koşulları birbirine denktir.

Tanım 2.5.2. $\Re$, $\mathbb{R}^N$ 'in alt kümelerinin bir ailesi ve $\mu : \Re \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer μ fonksiyonu, $\Re$ ailesindeki ayrık kümelerin bir $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ ailesinin sayılabilir her bileşimi için

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right), \quad \forall A_j \cap A_k = \varnothing, \quad j \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\Re$ üzerinde bir **ölçüm** denir.

Teorem 2.5.3. μ fonksiyonuna $\Re$ üzerinde bir ölçüm olsun. Bu durumda,

i) Eğer $A, B \in \Re$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonluk özelliği)
ii) $j = 1, 2, ...$için $A_j \in \Re$ ve $A_1 \subset A_2 \subset ....$(monoton artan) ise

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) \text{ (ölçümün sürekliligi)}$$

ifadeleri yazılabilir [2].

Teorem 2.5.4. $\mathbb{R}^N$ 'nin alt kümelerinin $\Re$ ailesi $\mathbb{R}^N$ üzerinde bir σ-cebir ve $\Re$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir μ öçümümü vardır
i) $\mathbb{R}^N$ 'de her açık küme $\Re$'ya aittir,
ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Re$ ve $\mu(B) = 0$ ise, o zaman $A \in \Re$ ve $\mu(A) = 0$ olur,
iii) $A = \left\{x \in \mathbb{R}^N : a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, ..., n\right\}$ ise o zaman $A \in \Re$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j),$$

iv) μ ötelemeye göre değişmeyen, yani; eğer $x \in \mathbb{R}^N$ ve $A \in \Re$ ise

$$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Re \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A).$$

Bu özelliklere sahip bir $\Re$ ailesinin elemanlarına $\mathbb{R}^N$ 'nin **Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri;** μ fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$ 'nin **Lebesgue ölçümü** ve herhangi bir $A \in \Re$ için $\mu(A)$ ifadesine A nın ölçümü denir [2].

Tanım 2.5.5. Eğer $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ ve $\mu(B) = 0$ ise bu durumda $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her yerde $(h.h.h)$ sağlanan bir özellik adını alır.

Tanım 2.5.6. Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesindeki değerleri alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\{x : f(x) > k\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Teorem 2.5.7.
i) f ölçülebilir ise $|f|$de ölçülebilir.

ii) f ve g ölçülebilir ve reel değerli ise $f + g$ ve fg de ölçülebilir ve reel değerlidir.

iii) $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ ve $\liminf_n f_n$ ifadeleri de ölçülebilir.

iv) f sürekli ve ölçülebilir bir küme de tanımlı ise o zaman f ölçülebilir.

v) f, $\mathbb{R}^N$ 'den $\mathbb{R}$'ye sürekli bir fonksiyon ve g ölçülebilir ve reel değerli fonksiyon ise $(f \circ g)(x) = f\ (g(x))$ ile tanımlanan "$f \circ g$ " bileşke fonksiyonu da ölçülebilirdir.

vi) (Lusin's teoremi): f ölçülebilir ve $x \in A^c$ için $f(x) = 0$ $(\mu(A) < \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ ise bu durumda

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |g(x)| \quad \leq \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)| \text{ ve } \mu\left\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g(x)\right\} < 0$$

olacak şekilde bir $g \in C_0(A)$ fonksiyonu vardır [2].

Teorem 2.5.8. (Fatou's lemma)
$A, \mathbb{R}^N$ ölçülebilir bir alt kümesi ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_A \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \quad \leq \quad \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x) dx$$

eşitsizliği yazılabilir [2]

Tanım 2.5.9. $E \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi için

$$\chi_E(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_E(x)$ fonksiyonuna, E 'nin **karekteristik fonksiyonu** denir.

2.6. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Ω, $\mathbb{R}^N$ 'nin ölçülebilir bir altkümesi, $|\Omega| > 0$ ve

$$S(\Omega) = \{u \in \Omega : u,\ \Omega \text{ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi}\}$$

olsun. Ayrıca, $S(\Omega)$ kümesinin elemanlarını hemen hemen heryerde $(h.h.h.)$ eşit fonksiyonların bir elemanı olarak kabul edelim.

Tanım 2.6.1. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir.

$L^p(\Omega)$ uzayı

$$L^{\ p}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olur. Ayrıca $u, v \in L^p(\Omega)$ için

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^p \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)$$

olduğundan $u + v \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Bu durumda, $L^p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olur.

$L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^{\ p}(\Omega)} := |u|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sabit sayısı varsa u fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Bu eşitsizliği sağlayan $K \geq 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına da $|u|$ 'nın Ω bölgesindeki **esas** (essential) **supremumu** denir ve $ess \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

$L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \ |u|_\infty = \underset{x \in \Omega}{esssup} \, |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.3. $L^p(\Omega)$ uzayında $p = 2$ olarak alındığında $L^2(\Omega)$ uzayı oluşur. Bu uzay

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} \, dx$$

iç çarpım altında Hilbert uzay olur.

Tanım 2.6.4. $1 < p < \infty$ iken $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ veya $p' = \frac{p}{1-p}$ sayısına p'nin eşleneği denir.

Bu durumda, $1 < p < \infty$ ve $\phi \in (L^p(\Omega))'$ alınırsa, her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}\Omega$ vardır. Ayrıca

$$|v|_{L^{p'}(\Omega)} = |\phi|_{(L^p(\Omega))'}$$

olduğundan $L^{p'}(\Omega) \cong (L^p(\Omega))'$ olur. Dolayısıyla elemanları çok farklı olmasına rağmen, Banach uzay olmaları açısından bu iki uzay aynı kabul edilebilir.

Teorem 2.6.5. $|\Omega| = \int\limits_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$|u|_p \leq |\Omega|_q^{(1/p)-(1/q)} |u|_q$$

eşitsizliği yazılabilir.Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır [2].

Teorem 2.6.6. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur [2].

Teorem 2.6.7. Eğer $1 < p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır [2].

2.7. Sobolev Uzay $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 2.7.1. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p.kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonların uzayına $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayı adı verilir. Bu uzay $p = 1$ için $L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonalar sınıfını gösterir.

Tanım 2.7.2. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu- indisi verilsin. Eğer, her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int\limits_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. **zayıf türevi** denir. Bu durumda v fonksiyonuna, u fonksiyonun **genelleşmiş türevi** denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.7.3. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **Sobolev uzayı** denir. Bu uzayda tanımlanan norm;

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_p^p \right)^{1/p} \quad ; 1 \leq p < \infty,$$

ve

$p = \infty$ için

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_\infty \quad ; \qquad p = \infty$$

olur. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı normları ile bir Banach uzayıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı olur.

Uzayların tanımlarının bir sonucu olarak, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ iken $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan dolayı $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, bu uzaylar arasında negatif olmayan herhangi m tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır.

Teorem 2.7.4. (Sobolev Eşitsizliği)
Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise, bu durumda $p^* = \frac{Np}{N-mp}$ olmak üzere

$$|u|_{p^*} \leq C \|u\|_{m,p}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C(n, m, p)$ sabiti vardır [28].

Tanım 2.7.5. $p = 2$ iken

$$W^{2,p}(\Omega) = H^m(\Omega), \quad W_0^{2,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

olur. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde verilir.

$H^m(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı oluşturur.

Teorem 2.7.6. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $W^{m,p}$ (Ω) ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları ayrılabilirdir [2].

Teorem 2.7.7. Eğer $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}$ (Ω) ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları yansımalı ve düzgün konvekstir $[2, 18, 66]$.

Tanım 2.7.8. $\mathbb{R}^N$ 'de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermiyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine, tepe noktası x olan bir **sonlu koni** denir. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde ediliyorsa bu durumda Ω bölgesinin koni özelliği vardır denir.

Teorem 2.7.9. (Sobolev Gömme Teoremi)

Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklinde tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömmeler yazılabilir. Eğer;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N - mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N - mp}$$

elde edilir.

ii) $mp = N$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

olur.

Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir $[2, 3]$.

2.8. Modüler Uzay ve Orlicz Uzayı

Tanım 2.8.1. X bir reel vektör uzay olsun. Eğer $\rho : X \to [0, \infty]$ tanımlı fonksiyonel her $x, y \in X$ için

i) $\rho(x) = 0 \iff x = 0,$

ii) $\rho(x) = \rho(-x),$

iii) Her $\alpha, \beta \geq 0, \alpha+\beta = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde **modüler** adı verilir.

Eğer **iii)** özelliği yerine her $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\ \rho(x) + \beta\ \rho(y),$$

özelliği sağlanıyorsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir **konveks modüler** adı verilir.

Tanım 2.8.2. X bir reel vektör uzay ve $\rho : X \to [0, \infty]$ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise, bu durumda

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

uzayına bir **modüler uzay** adı verilir. X_ρ modüler uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.8.3. X bir reel vektör uzay ve ρ fonksiyoneli X üzerinde konvenks modüler ise, bu durumda ρ fonksiyoneli X_ρ üzerinde

$$|u|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanan norma **Luxemburg normu** adı verilir.

Tanım 2.8.4. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de ölçülebilir bir bölge olsun. Eğer $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) Her $t \in \Omega$ için $\varphi(t, u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon

ii) $\varphi(t, 0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t, u) > 0$ ve $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi(t, u) \to \infty$,

iii) Her $u \geq 0$ için $\varphi(t, u)$ ölçülebilir bir fonksiyon

özelliklerine sağlıyorsa, φ fonksiyonuna Φ **sınıfına aittir** denir.

Eğer φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise, her $x \in X$ için $\varphi(t, |x(t)|)$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\rho(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(t, |x(t)|)\, dt$$

ifadesi X 'de bir ρ modülerini tanımlar.

Eğer $\varphi(t, u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u' nun konveks fonksiyonu ise ρ, X 'de konveks modülerdir. Bu durumda

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0^+} \int\limits_{\Omega} \varphi(t, \lambda |x(t)|) = 0 \right\}$$

modüler uzayına **genelleştirilmiş Orlicz uzayı** veya **Musielak-Orlicz uzayı** denir ve L^φ ile gösterilir. Ayrıca,

$$L_0^\varphi = \left\{ x \in X : \int\limits_{\Omega} \varphi(t, |x(t)|)\, dt < \infty \right\}$$

kümesine **genelleştirilmiş Orlicz sınıfı** adı verilir.

2.9. Ağırlıklı Lebesgue ve Sobolev Uzayları

Tanım 2.9.1. a fonksiyonu hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^N$ için $a(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^N$ 'de local integrallenebilir olsun. Bu durumda, a fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 2.9.2. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge ve a bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int\limits_{\Omega} a\, |u|^p\, dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir ve $L_a^p(\Omega)$ ile gösterilir. $L_a^p(\Omega)$ uzayı

$$|u|_{p,a} = \left(\int\limits_{\Omega} a\, |u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında bir Banach uzayıdır [17].

Tanım 2.9.3. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge, a bir ağırlık fonksiyonu, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$W_a^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_a^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_a^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **ağırlıklı Sobolev uzayı** adı verilir ve $W_a^{m,p}(\Omega)$ şeklinde gösterilir. $W_a^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{m,p,a} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m}^{p} |D^\alpha u|_{p,a}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır [17].

2.10. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı $\left(L^{\,p(x)}(\Omega)\right)$

Tanım 2.10.1. Her $x \in \Omega$ için $p(x) \in S(\Omega)$ ve $s \geq 0$ olmak üzere

$$\varphi(x,s) = s^{p(x)}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi(x,.) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ foksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayorsa Φ sınıfına ait olur

i) Her $x \in \Omega$ için $\varphi(x,.) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon

ii) $\varphi(x,0) = 0$ ve $s > 0$ için $\varphi(x,s) > 0$ ve $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi(x,s) \to \infty$

iii) Her $s \geq 0$ için $\varphi(.,s) \in S(\Omega)$.

Ayrıca, $\varphi(x,.)$ foksiyonu **i-iii** özelliklerine sahip olduğundan her $x \in \Omega$ için s'nin bir konveks fonksiyonu olur.

Tanım 2.10.2. Her $x \in \Omega$ için $u \in S(\Omega)$ ve $\varphi(x,s) = s^{p(x)}$ olmak üzere

$$\rho_{\,p(x)}(u) = \int_\Omega \varphi(x,|u|)\,dx = \int_\Omega |u(x)|^{\,p(x)}\,dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho_{\,p(x)}(u) : S(\Omega) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

i) $\rho_{\,p(x)}(u) = 0 \iff u = 0$

ii) $\rho_{\,p(x)}(u) = \rho_{\,p(x)}(-u)$

iii)$\rho_{\,p(x)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha\rho_{\,p(x)}(u) + \beta\rho_{\,p(x)}(v), \forall u, v \in S(\Omega), \forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$

özelliklerini sağladığı için $S(\Omega)$ kümesi üzerinde bir konveks modüllerdir.

Bu durumda, $L^{\,p(x)}(\Omega)$ modüller uzayı

$$L^{\,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \lim_{\lambda\to 0^+} \rho_{p(x)}(\lambda u) = 0 \right\}$$

Musielak- Orlicz uzayının özel bir çeşiti olup $S(\Omega)$ kümesinin de lineer alt uzayıdır.

Genelleştirilmiş Orlicz sınıfının $(L^{\,p(x)}(\Omega))$ bir çeşiti olan

$$L_0^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \rho_{\;p(x)}(u) < \infty \right\}$$

uzayı, $L^{\,p(x)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayıdır. $L_1^{p(x)}(\Omega)$ uzayıda

$$L_1^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \forall \lambda > 0,\ \rho_{\;p(x)}(\lambda u) < \infty \right\}$$

$S(\Omega)$'nin $L_0^{p(x)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzaydır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(x)}(\Omega) \subset L_0^{p(x)}(\Omega) \subset L^{\,p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Tanım 2.10.3. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge olsun. $p(x) : \Omega \to [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$1 \leq\ p^- := ess \inf_{x \in \Omega}\ p(x) \quad \text{ve} \quad p^+ := ess \sup_{x \in \Omega}\ p(x) < \infty$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$L^{\,p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u|^{\,p(x)} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **değişken üstlü Lebesgue uzayı** denir.

p'nin sabit $(p(x) = p)$ olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı, klasik Lebesgue uzayına dönüşür. $L_+^\infty(\Omega)$ uzayı da

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ h \in L^\infty(\Omega) : ess \inf_{x \in \Omega} h(x) \geq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Aksi belirtmedikçe, $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $1 \leq\ p^- \leq\ \ p^+\ < \infty$ olarak kabul edilecektir ve

Sobolev kritik

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

olarak alınacaktır. $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ fonksiyonun eşleneğini ise $p'(x)$ ile gösterilecektir ve $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dır.

Teorem 2.10.4. $L_1^{p(x)}(\Omega) := L^{p(x)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır $[23, 35]$.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak; $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ ise

$$L^{p(x)}(\Omega) := L_0^{p(x)}(\Omega) := L_1^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir .

$p(x) \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$ olduğunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklere sahip olur.

i) $\rho_{\ p(x)}(u+v) \le 2^{p^+}\left(\rho_{\ p(x)}(u) + \rho_{\ p(x)}(v)\right)$

ii) $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için $\lambda > 1$ ise

$\rho_{\ p(x)}(u) \le \lambda\rho_{\ p(x)}(u) \le \lambda^{p^-}\rho_{\ p(x)}(u) \le \rho_{\ p(x)}(\lambda u) \le \lambda^{p^+}\rho_{\ p(x)}(u)$

$0 < \lambda < 1$ ise

$\lambda^{p^+}\rho_{\ p(x)}(u) \le \rho_{\ p(x)}(\lambda u) \le \lambda^{p^-}\rho_{\ p(x)}(u) \le \lambda\rho_{\ p(x)}(u) \le \rho_{\ p(x)}(u)$

olur,

iii) $u \in L^{p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ için $\rho_{\ p(x)}(\lambda u)$ fonksiyonu için λ'ya göre sürekli konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0,\infty)$ için artandır.

$\rho_{\ p(x)}(u)$ modülü konvenks olduğundan dolayı $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(x),\Omega} := |u|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\ p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

Luxemburg normu olarak adlandırılan norm tanımlanabilir. Bu norm altında $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur.

Ayrıca; $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $h.h.h.$ $|u(x)| \le |v(x)|$ ise $|u|_{p(x)} \le |v|_{p(x)}$ yazılabilir.

Teorem 2.10.5. $u \in L^{p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ olsun. Bu durumda, $|u|_{p(x)} = a$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ olmasıdır $[23, 35]$.

Teorem 2.10.6. Eğer $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $\rho_{p(x)}(u) : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ise, bu durumda

i)

$$|u|_{p(x)} < 1\,(=1; >1) \Leftrightarrow \rho_{\ p(x)}(u) < 1\,(=1; >1)$$

ii) Eğer

$$|u|_{p(x)} > 1 \quad \text{ise} \quad |u|_{p(x)}^{p^-} \le \rho_{\ p(x)}(u) \le |u|_{p(x)}^{p^+}$$

iii) Eğer

$$|u|_{\rho(x)} < 1 \quad \text{ise} \quad |u|_{p(x)}^{p^+} \le \ \rho_{\ p(x)}(u) \le \ |u|_{p(x)}^{p^-}$$

olur $[23, 25, 26, 35]$.

Teorem 2.10.7. Eğer $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, ...$ için $(u_n) \in L^{p(x)}(\Omega)$ ise, bu durumda

i) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - u|_{p(x)} = 0$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\ p(x)}(u_n - u) = 0$,

iii) Ω bölgesindeki ölçüme göre $u_n \to u$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\ p(x)}(u_n) = \rho_{\ p(x)}(u)$,

ifadeleri eşdeğerdir $[23, 25, 26, 35]$.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.10.8. Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ uzayında yoğundur $[23, 66]$.

Teorem 2.10.9. Eğer $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ uzayı ayrılabilir. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ uzayı düzgün konvenks ve dolayısıyla yansımalı bir uzay olur $[23, 35, 66]$.

Teorem 2.10.10. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge ise, o zaman $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ uzayında yoğun olur $[23, 66]$.

Teorem 2.10.11. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesi açık ise, bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ uzayında yoğundur $[24, 67]$.

Teorem 2.10.12. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani;

i) Her $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega) \tag{2.10.1}$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyoneli $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir,

ii) $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde (2.10.1) şeklinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ vardır $[2]$.

Tanım 2.10.13. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge, E kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve $\chi_E(x)$, E'nin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer, her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\lim_{|E|\to 0} |u(x)\chi_E(x)|_{p(x)} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $u(x)$ fonksiyonuna $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan $|.|_{p(x)}$ normuna göre **mutlak süreklidir** denir.

Teorem 2.10.14. Her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu $|.|_{p(x)}$ normuna göre mutlak süreklidir [23, 66].

Teorem 2.10.15. (Hölder Eşitsizliği)
$L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayı $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı ve $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ olmak üzere, her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\left| \int_\Omega uvdx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)} \leq 2 |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)}$$

olur [23, 26].

Teorem 2.10.16. Her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ ve $w \in L^{r(x)}(\Omega)$ için $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)} = 1$ ise, o zaman

$$\left| \int_\Omega uvwdx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} + \frac{1}{r^-} \right) |u|_{p(x)} |v|_{q(x)} |w|_{r(x)} \leq 3 |u|_{p(x)} |v|_{q(x)} |w|_{r(x)}$$

olur [25].

Teorem 2.10. 17. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(x), q(x) \in L^\infty_+(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul *h.h.h.* $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$|u|_{p(x)} \leq C (1 + |\Omega|) |u|_{q(x)}$$

eşitsizliği yazılabilir [35].

Teorem 2.10.18. (Lebesgue Dominated Yakınsaklık Teoremi) Ω, $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, ve Ω'da $(u_n)_{n=1}^\infty$ ve öçülebilir u fonksiyonları için Ω'da h.h.h. $u_n \to u$ olsun. Eğer herbir $n \in \mathbb{N}$ için Ω'da h.h.h. $|u_n| \leq \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi \in L^1(\Omega)$ varsa o zaman $L^1(\Omega)$ uzayında $u_n \to u$ olur [65].

2.11. Değişken Üstlü Sobolev Uzayı $\left(W^{m,p(x)}(\Omega)\right)$

Tanım 2.11.1. $\Omega, \mathbb{R}^N$ 'de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $|\alpha| \leq m$ özellikli her $\alpha-$ çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına **değişken üstlü Sobolev uzayı** adı verilir ve

$$W^{m,p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x),m,,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|_{p(x)}$$

şeklinde gösterilir. Bu norm altında $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur.

$W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında $m = 1$ olarak alınırsa,

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\}$$

şeklinde tanımlanan $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayına dönüşür. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

olur. Bu norm altında $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur.

$C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı olur. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$$

şeklindedir. Bu norm altında $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı da bir Banach uzayı olur.

Teorem 2.11.2. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(x)}(\Omega)$, $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve yansımalı Banach uzaylarıdır [66].

Teorem 2.11.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $p(x), q(x) \in C(\overline{\Omega})$ olarak kabul edelim. Her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 \leq q(x) < p^*(x)$ ise, o zaman

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \quad \hookrightarrow \quad L^{q(x)}(\Omega) \quad \text{ve} \quad W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli ve kompakt gömmesi vardır [22, 23, 35].

Teorem 2.11.4. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N > 1)$ sınırlı bir bölge ve $p(x)$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ bölgesinde sürekli ve her $x \in \Omega$ için $p(x) < \frac{N}{m}$, $(m < N, m \in \mathbb{N})$ olsun. Bu durumda $0 < \varepsilon < \frac{m}{N-m}$ için

$$1 \leq q(x) \leq p^*(x) - \varepsilon \ , \ \forall x \in \Omega$$

koşullunu altında

$$|u|_{q(x)} \quad \leq \quad c\,|\nabla u|_{p(x)} \quad ; \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır [35] .

Aşağıdaki teoremde, Edmunds ve Rakosnik (2000) yukarıdaki çalışmayı $m = 1$ için ıspatlamışlar [21].

Teorem 2.11.5. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N > 1)$ sınırlı bir bölge ve $p(x) : \overline{\Omega} \to [1, N)$ fonksiyonu sürekli olsun. Ayrıca, $0 < \varepsilon < \frac{1}{N-1}$ ve her $x \in \Omega$ için $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonu

$$1 \leq q(x) \leq p^*(x) - \varepsilon$$

özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$|u|_{q(x)} \leq c\,|\nabla u|_{p(x)}\ , \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c > 0$ sayısı vardır [21] .

Tanım 2.11.6. X ve Y iki normlu uzay ve $f : X \to Y$ tanımlı bir fonksiyonu olsun. Eğer herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A\,|x_1 - x_2|^\alpha$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ sayıları varsa f fonksiyonu X üzerinde Hölder koşulusunu sağlar denir. A ve α sayılarına sırasıyla Hölder katsayısı ve Hölder üstü denir. Eğer $\alpha = 1$ ise

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

koşuluna **Lipschitz koşulu** sağlar veya **Lipschitz süreklidir** denir [44]

Teorem 2.11.7. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ koni özelliğine sahip açık bir bölge, m pozitif bir sayı ve $p(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \quad \text{ve} \quad mp(x) < N$$

koşulunu sağlayan Lipschitz sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $q(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$$

sağlansın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır [22].

Teorem 2.11.8. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ koni özelliğine sahip açık bir bölge ve $p(x) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \quad \text{ve} \quad mp(x) < N$$

olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, Ω 'da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$ess \inf_{x \in \overline{\Omega}} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır [22].

Teorem 2.11.9. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $p(x) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \quad \text{ve} \quad mp(x) < N$$

olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, Ω 'da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$ess \inf_{x \in \overline{\Omega}} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

koşululları sağlansın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli kompakt gömmesi vardır [22].

Teorem 2.11.10. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge; $p(x)$ ve $q(x)$, $\overline{\Omega}$ da ölçülebilir fonksiyonlar ve $p(x)$,

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \text{ ve } mp(x) < N$$

koşulunu sağlasın. Eğer

i) $p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \forall x \in \overline{\Omega}$

ii) $q(x) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli

iii) $ess \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} \left(q(x)\frac{N-1}{N} - \ p(x)\right) > 0$

koşulları sağlanıyorsa

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır [22].

Teorem 2.11.11. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de$(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $x \in \Omega$ için

$$\sup_{x\in\Omega} q(x)\left[\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{N}\right] \quad \leq \quad 1-\delta; \qquad \delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}, \quad N^* = \frac{N}{N-1}$$

olacak şekilde $1 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ ve $1 \leq p^+ < N$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$C\left(N,p,q,\Omega\right) \quad = \quad \begin{cases} C\left(N,p,q\right)\left|\Omega\right|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^+}} & \text{eğer} \quad |\Omega| \leq 1 \\ C\left(N,p,q\right)\left|\Omega\right|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^+}+\frac{1}{q^-}} & \text{eğer} \quad |\Omega| \geq 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$|u|_{q(x)} \quad \leq \quad C\left(N,p,q,\Omega\right)|\nabla u|_{p(x)}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir $C\left(N,p,q,\Omega\right)$ sayısı vardır [15].

Tanım 2.11.12. $\Omega, \mathbb{R}^N$'de açık bir bölge ve $p(x) : \Omega \to [1,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p\left(y\right)| \quad \leq \quad \frac{c}{-\log|x-y|}, \qquad |x-y| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c > 0$ sayısı varsa $p(x)$ fonksiyonuna (local olarak) **log-Hölder süreklidir** denir [31].

Teorem 2.11.13. $\Omega, \mathbb{R}^N$ 'de Lipschitz sınırına sahip açık sınırlı bir bölge, $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}$, $N^* = \frac{N}{N-1}$ ve $p(x)$ fonksiyonu local olarak log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda en az bir $\delta > 0$ için $q(x) \leq p^*(x) - \delta$ özelliğindeki q fonksiyonu için

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \quad \hookrightarrow \quad \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır [16].

Teorem 2.11.14. (Poincaré Eşitsizliği)
Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de düzgün sınıra sahip bir bölge ve $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$|u|_{p(x)} \quad \leq \quad c \ |\nabla u|_{p(x)}$$

eşitsizğini sağlayacak $c > 0$ sabiti vardır [35].

2.12. Değişken Üstlü Ağırlıklı Lebesgue Uzayı $\left(L_{a(x)}^{p(x)}(\Omega)\right)$

Tanım 2.12.1. Ω, $\mathbb{R}^N$ 'de açık bir bölge ve a bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $1 \leq p(x) \leq \infty$ için

$$\int_\Omega a(x) \left|u(x)\right|^{p(x)} dx < \infty,$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **değişken üstlü ağırlıklı lebesgue uzayı** denir ve $L_{a(x)}^{p(x)}(\Omega)$ ile gösterilir.
Bu uzayı,

$$L_{a(x)}^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \int_\Omega a(x) \left|u(x)\right|^{p(x)} dx < \infty; a : \Omega \to \mathbb{R}^+ \right\}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu uzay, değişken üstlü Lebesgue uzayına benzer özellikler gösterir.
$L_{a(x)}^{p(x)}(\Omega)$ uzayı

$$|u|_{L_{a(x)}^{p(x)}}(\Omega) := |u|_{a(x),p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int a(x) \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Bu uzayda tanımlanan modüler fonksiyon; $\rho_{a(x),p(x)}(u) : L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\rho_{a(x),p(x)}(u) = \int\limits_{\Omega} a(x)\left|u(x)\right|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.12.2. Eğer $u \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, ...$ için $(u_n) \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ ise, bu durumda

i)

$$u \neq 0 \ \text{ için } \ |u|_{a(x),p(x)} = \lambda \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}(\frac{u}{\lambda}) = 1$$

ii)

$$|u|_{a(x),p(x)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}(u) < 1 (= 1; > 1)$$

iii) Eğer

$$|u|_{a(x),p(x)} > 1, \ \text{ise } |u|^{p^-}_{a(x),p(x)} \leq \rho_{a(x),p(x)}(u) \leq |u|^{p^+}_{a(x),p(x)}$$

iv) Eğer

$$|u|_{a(x),p(x)} < 1, \ \text{ise } |u|^{p^+}_{a(x),p(x)} \leq \rho_{a(x),p(x)}(u) \leq |u|^{p^-}_{a(x),p(x)}$$

v)

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|_{a(x),p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{a(x),p(x)}(u_n) = 0$$

vi)

$$|u_n|_{a(x),p(x)} \to \infty \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}(u_n) \to \infty$$

olur [25] .

Teorem 2.12.3. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir ve yansımalı bir Banach uzayı olur [27] .

Teorem 2.12.4. $p(x)$ ve $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonları her $x \in \Omega$ için $p(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ ve $1 \leq p(x)q(x) < \infty$ olsun. $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \neq 0$ ise o zaman

i)

$$|u|_{p(x)q(x)} \leq 1 \implies |u|^{p^+}_{p(x)q(x)} \leq \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \leq |u|^{p^-}_{p(x)q(x)},$$

ii)

$$|u|_{p(x)q(x)} > 1 \implies |u|^{p^-}_{p(x)q(x)} \leq \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \leq |u|^{p^+}_{p(x)q(x)}.$$

yazılabilir. Eğer $p(x) = p$ şeklinde bir sabit ise

$$\left||u|^p\right|_{q(x)} = |u|^p_{pq(x)}$$

olur [35] .

Teorem 2.12.5. Ω'nın sınırı koni özelliğine sahip sınırlı bir bölge ve $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. $x \in \Omega$ için $a(x) > 0$, $a(x) \in L^{r(x)}$, $r(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $r^- > 1$ olarak kabul edilsin. Eğer $q(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$1 \leq q(x) < \frac{r(x)-1}{r(x)} p^*(x) \quad ; \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

ise

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}_{a(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır [26] .

3.BÖLÜM

STANDARD VE STANDARD OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNDE KULLANILAN TEOREMLER VE YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde, standart ve standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için kullanılan teoremler ve yaklaşımlar hakkında bilgi verilecektir.

Üzerinde çalıştığımız Lebesgue-Sobolev uzayları yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olduklarından dolayı, bu bölümde X Banach uzayı denildiğinde yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olarak kabul edilecektir. Bu X uzayının dual uzayı X^* şeklinde gösterilecektir.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfında bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her $v \in X$ için

$$\langle J'(u), v \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan herbir $u \in X$ elemanına J fonksiyonelinin **kritik noktası** denir.

Tanım 3.1.2. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her $u \in X$ elemanı için

$$|J(u)| \leq c$$

olacak şekilde pozitif bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa J fonksiyoneline **sınırlıdır** veya **iyi tanımlıdır** denir.

Tanım 3.1.3. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her $u \in X$ için

$$J(v) \leq J(u)$$

olacak şekilde bir $v \in X$ varsa, bu v fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir **minimumu** veya **minimize edici** denir ve

$$\inf_{u \in X} J(u) = J(v)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.1.4. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, herbir $(u_n) \subset X$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in X} J(u)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu (u_n) dizisine J fonksiyonelinin **minimize dizisi** denir.

Tanım 3.1.5. X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ için $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,s)\,ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), \tag{3.1.1}$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen

$$J(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\ dx - \int\limits_\Omega F(x,u)\ dx, \quad \forall u \in X$$

$J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneline **Euler-Lagrange fonksiyoneli** (enerji fonksiyoneli) denir. Bu J enerji fonksiyonelinin türevi

$$\langle J'(u), v\rangle = \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx - \int\limits_\Omega f(x,u)\,v dx,$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, herbir $v \in C_0^\infty$ için

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\ dx - \int\limits_\Omega f(x,u)\,v dx = 0$$

eşitliği sağlanırsa, bu durumda her $u \in X$ elemanına (3.1.1) denkleminin **zayıf çözümü** denir. Bir denklemin zayıf çözümleri aynı zamanda denklemin kritik noktalarıdır.

Tanım 3.1.6. X bir Banach uzay, $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 2)$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ için $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,s)\,ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer her $x \in \Omega$ ve $|t| \geq M$ $(\exists M > 0)$ $t \in \mathbb{R}$ için

$$0 \quad < \quad \theta F(x,t) \leq t\ f(x,t)$$

olacak şekilde en az bir tane $\theta > p^{+}$ sayısı varsa, o zaman f fonksiyonu **Ambrosetti - Rabinovitz koşulunu (AR)** sağlar denir. $\theta > p^{+}$ eşitsizliğindeki p^{+} esnek olan kısımdır.

Ambrosetti-Rabinovitz koşulu sınırlı bir dizi bulmak için f fonksiyonuna bırakılan önemli koşullardan biridir.

Tanım 3.1.7. Yukarıda tanımladığımız (3.1.1) denkleminin,

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

kısmı ve bu kısmın türevi

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

aşağıdaki koşulları sağlar

i) $I(u)$ convex fonksiyonel,

ii) $I' : X \to X^{*}$ fonksiyoneli sürekli, sınırlı ve kesin monotundur,

iii) $I' : X \to X^{*}$ fonksiyoneli (S_{+}) tipindedir: eğer $(u_n) \subset X$ dizisi için X uzayında $u_n \rightharpoonup u$ iken

$$\limsup_{n\to\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle \leq 0$$

oluyorsa o zaman X uzayında

$$u_n \to u$$

olur,

iv) $I' : X \to X^{*}$ fonksiyoneli bir homeomorfizmdir.

Tanım 3.1.8. X bir Banach uzay ve $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 2)$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer f fonksiyoneli,

i) Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $\xi \to f(x,\xi)$ fonksiyoneli sürekli,

ii) Her $\xi \in \mathbb{R}$ için $x \to f(x,\xi)$ fonksiyoneli Ω'da ölçülebilir,

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyoneli **Carathéodory koşulunu** sağlar denir.

Tanım 3.1.9. X bir Banach uzay ve $J \in C^{1}(X,\mathbb{R})$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer, $u \in X$ için

$$\|u\|_{X} \to \infty \quad \text{iken} \quad J(u) \to \infty$$

koşulu sağlanıyorsa J fonksiyoneli X üzerinde **Coercive** fonksiyoneldir denir.

3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Tanım 3.2.1. X bir Banach uzay ve $T : X \rightarrow X^*$ tanımlı bir operatör olarak verilsin. Eğer

$$T(.) = J'(.)$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonel bulunabiliyorsa T operatörüne **varyasyonel operatör** adı verilir.

Eğer bir problem

$$T(.) = 0$$

şeklinde bir fonksiyonel denklem olarak yazılabiliyorsa bu probleme **varyasyonel problem** adı verilir. Bu durumda, $T(u) = 0$ denklemini sağlayan u fonksiyonları aynı zamanda $J'(u) = 0$ enerji fonksiyonelini de sağlar. Dolayısıyla, $J(u)$ enerji fonksiyonelini sağlayan u kritik noktaları aynı zamanda $T(u) = 0$ probleminin de zayıf çözümleri olur. Yani, $J(u)$ enerji fonksiyonelini minimize eden bir minimum fonksiyonunu bulmak, varyasyonel yaklaşımın temel amacıdır. Daha açık söylemek gerekirse; X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlayalım. Varyasyonel yaklaşım, verilen bir $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümlerini ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge) bulmak için, $F(x, u(x), \nabla u(x))$ karşılık gelen ve

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) \; dx$$

şeklinde tanımlanan $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları (veya kritik noktaları) olan $u = u(x)$ fonksiyonlarını bulmak olarak ifade edilebilir. Çünkü $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları, $F(x, u(x), \nabla u(x))$ diferansiyel denkleminin çözümleridir. $J(u)$ enerji fonksiyonelinin kritik noktalara sahip olması için gerekli koşul $J(u)$ karşılık gelen Euler-Lagrange denkleminin sağlaması yani

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla u)}\right) = 0$$

olmasıdır.

3.3. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Yöntemler

3.3.1. Nehari Manifold Yöntemi

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, X Banach uzayında tanımlı probleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli olarak verilsin. Eğer J, X uzayında alttan sınırlı ve bir minimize sahipse o zaman bu minimize değeri J'nin bir kritik noktasıdır. Bu kritik nokta aynı zamanda problemin çözümüdür. Birçok problemde; J enerji fonksiyoneli, X uzayının tamamında alttan sınırlı olmaz. Bu durumlarda X uzayının uygun bir alt uzayı üzerinde sınırlı olduğu gösterilir ve eğer uygun bir alt uzayı varsa problemin çözümleri bu uzayda araştırılır. Bütün bunlar için X 'in en uygun alt uzayı **Nehari manifoldu**'dur. Nehari Manifoldu ($M_\lambda\ (\Omega)$);

$$M_\lambda\ (\Omega) = \{u \in X : \langle J'(u), u\rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $\langle .,.\rangle$, X ve X^* arasındaki iç çarpımdır. Nehari Manifoldu aşağıda gösterildiği gibi local minimum, local maximum ve dönüm noktaları olarak

$$\begin{aligned} M_\lambda^+(\Omega) &= \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u\rangle > 0\} \\ M_\lambda^-(\Omega) &= \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u\rangle < 0\} \\ M_\lambda^0(\Omega) &= \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u\rangle = 0\} \end{aligned}$$

şeklinde üç ayrı kümeye ayrılır. Bu durumda, J'nin bütün kritik noktaları M_λ (Ω) üzerindedir. $M_\lambda\ (\Omega)$ üzerindeki local minimize fonksiyonu, aynı zamanda J'nin kritik noktasıdır. Dolayısıyla bu kritik noktalar problemin çözümleri olur.

Wu (2007),

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x)\,|u|^{q-2}\,u + g(x)\,|u|^{r-2}\,u, & x \in\ \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki elliptik denklemi ele almıştır. Denklemde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $1 < q < p < r < p^*(\ N > p$ ise $p^* = \frac{Np}{N-p}$; $N \leq p$ ise $p^* = \infty), \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve f, g ağırlık fonksiyonları $f^{\mp} = \max\{\mp f, 0\} \neq 0$ ve $g^{\mp} = \max\{\mp g, 0\} \neq 0$ olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada, varyasyonel yaklaşımla Nehari Manifold Yöntemi kullanılarak, denklemin Superlineer ve Sublineer durumları incelenerek, denklemin en az iki pozitif çözümünün varlığı gösterilmiştir [68].

3.3.2. Fibrering Yöntemi

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, X Banach uzayında tanımlı bir probleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli ve $M_\lambda\ (\Omega)$ Nehari Manifold'u olarak tanımlayalım. Nehari Manifold'u $\phi_u\,(t) = J\,(tu)\ (t > 0)$ fonksiyonelinin davranışı ile yakından ilişkilidir. $\phi_u\,(t) = J\,(tu)\ (t > 0)$ fonksiyonelinin davranışına **Fibrering yaklaşımı** olarak adlandırılır. Nehari Manifoldu'nun tanımından,

$$u \in M_\lambda(\Omega) \Leftrightarrow \phi_u'\,(1) = 0$$

ve daha genel olarak,

$$\phi_u'\,(t) = 0 \Leftrightarrow tu \in M_\lambda(\Omega)$$

yazılabilir.

$M_\lambda(\Omega)$' nın bütün elemanları, Fibrering yaklaşımındaki durgun (stationary points) noktalara veya J fonksiyonelin kritik noktalarına karşılık gelir. Fibrering yaklaşımı da Nehari Manifoldu yaklaşımına benzer olarak aşağıdaki gibi local minimum $\left(M_\lambda^+(\Omega)\right)$, local maximum $\left(M_\lambda^-(\Omega)\right)$ ve dönüm noktaları $\left(M_\lambda^0(\Omega)\right)$ olarak üç ayrı kümeye ayrılır.

$$M_\lambda^+(\Omega) = \left\{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(t) > 0\right\},$$

$$M_\lambda^-(\Omega) = \left\{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(t) < 0\right\},$$

$$M_\lambda^0(\Omega) = \left\{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(t) = 0\right\}.$$

Eğer $u,\ J$ fonksiyonelinin local minimize ise o zaman ϕ_u, $t = 1$ için bir local minimum sahiptir. Sonuç olarak, $\phi_u'(t) = 0$ ise $t = t(u)$ noktası J fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır [4].

3.4. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler

Çalışmamızın bu kısmında varyasyonel yaklaşımda kullanılan temel teoremler ve bu teoremlerin kullanıldığı belli başlıca çalışmalar verilecektir.

Teorem 3.4.1. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde coercive

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli

koşullarını sağlıyorsa, o zaman $J(u) = \inf\limits_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır [66].

J fonksiyoneli coercive ve alttan zayıf yarı sürekli koşulunu sağladığı zaman bir minimum noktaya sahip olur. Eğer, J fonksiyoneli coercive ve alttan zayıf yarı sürekli koşulunu sağlamadığı durumda bu teorem geçerli olmaz. Bu durumda Kritik Nokta teorisi kullanılarak bu problem aşılır. Bu teoriye göre, fonksiyonelin alttan sınırlı olmadığı durumlarda fonksiyoneli minimize eden global minimum değerler yerine kritik noktalar (saddle points) bulunur .

Tanım 3.4.2. (Palais-Smale Dizisi) X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

i)

$$|J(u_n)| \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii)

$$X^* \text{ uzayında } n \to \infty \text{ için } J'(u_n) \to 0$$

koşulları sağlanıyorsa, o zaman (u_n) dizisine J enerji fonksiyonelinin bir Palais-Smale dizisi denir. Palais-Smale dizisi J fonksiyonelini minimize eden bir dizidir.

Ancak, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonel alttan sınırlı değilse, o zaman J fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi hakkında kesin birşey söylenemez [25, 67].

Teorem 3.4.3.(Palais-Smale Koşulu) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, J'nin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip ise o zaman J enerji fonksiyoneli Palais-Smale koşuluna sahiptir denir [24, 43, 55, 66].

Tanım 3.4.4. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer,

i)

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii)

$$X^* \text{ uzayında } n \to \infty \text{ için } J'(u_n) \to 0$$

koşullarını sağlanyan bir $(u_n) \subset X$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse, o zaman J fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ seviyesinde $(PS)_c$ koşulunu sağlar denir. Eğer J fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlarsa, o zaman her $c \in \mathbb{R}$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar.

J enerji fonksiyoneli Palais-Smale koşulununa sahip olduğunu gösterebilmek için öncelikle (u_n) dizisinin X uzayında sınırlı olduğu gösterilecek. Sınırlılığın gösterilmesi durumunda (u_n) dizisinin X uzayında zayıf yakınsak olduğu gösterilmiş olur. Çünkü, X yansımalı Banach uzay olduğundan X 'deki her sınırlı dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur. Daha sonra, (u_n) dizisinin X uzayında güçlü yakınsak olup olmadığı gösterilecek. Bunun için de, kompakt gömme teoremlerinden yaralanılacaktır. Böylece, J enerji fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu sağlar ve alttan sınırlı olursa o zaman bu Palais-Smale dizisi J enerji fonksiyonelini minimize eder. Ayrıca; dizinin güçlü yakınsadığı değer, fonksiyonelin bir kritik noktası ve denklemin de çözümü olur. Ancak, Palais-Smale koşulu sağlanmazsa bu ifade yanlış olur.

Palais-Smale koşulu ve coercive'lik özelliği J fonksiyonelinin infimumunun (yani kritik noktasının/çözümünün) X uzayında olduğunun ispatı için yeterli koşullardır.

Teorem 3.4.5. (Ekeland Varyasyonel Prensibi) X bir Banach uzay ve $J : X \to (-\infty, \infty]$ tanımlı bir fonksiyoneli olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı,

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

koşullarını sağlarsa o zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u_\varepsilon) < \inf_{u\in X} J(u) + \varepsilon$$

$$J(u_\varepsilon) < J(u) + \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_X \ , \ u_\varepsilon \neq u$$

olacak şekilde bir $(u_\varepsilon) \in X$ dizisi vardır. Ekeland's Varyasyonel yaklaşımı yardımıyla J fonksiyoneli için Palais-Smale dizisi elde edilebilir [41, 66].

Teorem 3.4.6. (Ekeland Varyasyonel Prensibi 2) X bir Banach uzay ve $J : X \to (-\infty, \infty]$ alttan sınırlı bir fonksiyonel ise, o zaman her $\epsilon > 0$ için

$$J(u) < \inf_{u \in X} J(u) + \epsilon$$

$$X^* \text{ uzayında } |J'(u_n)| \leq \epsilon$$

olacak şekilde bir $u \in X$ vardır [66].

Teorem 3.4.7. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı,

ii) J fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlıyor,

ise bu durumda $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır [66].

Teorem 3.4.8. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı,

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

iii) J fonksiyoneli X üzerinde coercive,

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır [66].

Teorem 3.4.9. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde coercive,

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı ve $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır [66].

Tanım 3.4.10. (Cerami koşulu) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olsun. Eğer J fonksiyoneli, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

i)

$$|J(u_n)| \leq c$$

ii)

$$n \to +\infty \text{ iken } (1 + \|u_n\|_X) \ |J'(u_n)| \to 0$$

koşullarını sağlayan yakınsak bir alt diziye sahip ise, o zaman J fonksiyoneli Cerami koşuluna (C) sahiptir. Buradaki (u_n) dizisine de Cerami dizisi adı verilir [55, 62, 66].

Teorem 3.4.11. (Mountain Pass Geometrisi) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X\ ,\mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlasın. Farzedelimki J fonksiyoneli,

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0$$

olacak şekilde α ve ρ pozitif sayılar vardır,

ii) $J(v) < 0$ (veya $t \to \infty$ iken $J(tv) < -\infty$) olacak şekilde $\|v\|_X > \rho$ koşulunu sağlayan bir $v \in X$ fonksiyonu vardır

lindeki geometrik koşulları sağlasın. Bu durumda J fonksiyoneli, X uzayında sıfırdan farklı en az bir kritik noktaya sahiptir [14, 42, 48, 60, 66].

J fonksiyonelinin coercive'lik özelliğinin yerine Mountain Pass Geometrisi olarak bilinen teorem de kullanılabilir. Eğer J fonksiyoneli, Palais-Smale koşulunu ve Mountain Pass Geometri'sini sağlarsa o zaman J fonksiyonelin en az bir kiritik noktaya sahip olur. Bu kritik nokta denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu gösterir.

Calota (2008),

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q(x)-2} u + |u|^{p^*(x)-2} u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Denklemde; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip açık sınırlı bir bölge, $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $x \in \overline{\Omega}$ için $q(x) > 1$ ve $q(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ bir sabit ve $p^* = Np/(N-p)$ Sobolev kritik kuvveti olarak alınmıştır. Bu çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremi ve Ekeland prensibi kullanılarak, denklemin Superlineer durumu incelenerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir [14].

Teorem 3.4.12. (Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi) X bir Banach uzayı, $J \in C^1(X\ ,\mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlasın ve $J(0) = 0$ olsun. Farzedelimki

i)

$$\|u\|_X > \rho \text{ iken } J(u) \leq J(0),$$

ii)

$$\alpha = \inf\{J(u) : u \in X,\ \|u\| = \rho\} > 0,$$

olacak şekilde bir ρ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun. Ayrıca $G \neq \varnothing$ olacak şekilde

$$G = \{\varphi \in C([0,1], X) : \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf\{\max J(\varphi([0,1])) : \varphi \in G\}$$

kümeleri verilsin. Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ olmak üzere; β, J 'nin kritik noktasıdır $[6, 20, 21, 39, 55, 57]$.

Bu açıklanan yöntemlerle, verilen bir standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemin en az bir çözümünün varlığını göstermek için yeterlidir. Ancak, denklemin sonsuz çözümünün varlığını gösterebilmek için bazı teoremlerin de ispatlanması gerekecektir. Bunlardan bir tanesi Z_2-Symmetric Mountain Pass Lemma olarak bilinen teoremdir. Diğer önemli teorem ise Fountain Teoremi'dir.

Mihăilescu ve Rădulescu (2006),

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = \lambda\left(u^{\gamma-1} - u^{\beta-1}\right), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

şeklindeki dejenere sınır koşullarına sahip standart olmayan büyüme koşullu denklemi incelemişler. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$, her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < \beta < \gamma < \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$ ve $p(x) > 1$ olarak alınmaktadır. Bu çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini ve Genelleştirilmiş Mountain Pass teoremi kullanılarak, denklemin Sublineer durumu incelenerek, denklemin sıfırdan farklı en az iki tane zayıf çözümünün olduğu gösterilmiştir [39].

Teorem 3.4.13. ($\mathbb{Z}_2$-Symmetric Mountain-Pass Teoremi) X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı; $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan çift bir fonksiyonel ve $J(0) = 0$ olsun. Farzedelimki J fonksiyoneli

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \quad \text{iken} \quad J(u) \geq \alpha > 0,$$

olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır,

ii) X' in her sonlu boyutlu X_1 $(X_1 \subset X)$ alt uzay için

$$\{u \in X_1 : J(u) \geq 0\}$$

kümesi X 'de sınırlıdır,

koşullarını sağlasın. Bu durumda J fonksiyoneli, X uzayında sınırsız olan bir kiritik değerler dizisine sahiptir $[43, 48, 57, 66]$.

$\mathbb{Z}_2$-Symmetric Mountain -Pass Teoremi, denklemin sonsuz çözümünün varlığını göstermek için kullanılmaktadır.

Mihăilescu (2008) ,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2}\nabla u\right) + \left(|\nabla u|^{p_2(x)-2}\nabla u\right) = \pm(-\lambda\,|u|^{m(x)-2}u + |u|^{q(x)-2}u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, her $x \in \overline{\Omega}$ ve $i \in \{1,2\}$ için $p_i(x) > 1$ ve $q(x)$, $p_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\lambda > 0, m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{Nm(x)}{N-m(x)}$ olarak alınmaktadır. Bu çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass Geometrisi kullanılarak denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu ve $\mathbb{Z}_2$-Simetrik Mountain Pass teoremini kullanılarak, denklemin sonsuz çözümünün varlığı gösterilmiştir [43].

Tanım 3.4.14. X yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olsun. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ olmak üzere $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(e_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & , \ n = m \\ 0 & , \ n \neq m \end{cases}$$

ve

$$X = \overline{span\{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}} \text{ ve } X^* = \overline{span\{f_n : n \in \mathbb{N}^*\}}$$

olacak şekilde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$ ve $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq X^*$ vardır.

Bu durumda $k \in \mathbb{N}^*$ için

$$X_k = span\{e_k\}, \qquad Y_k = \oplus_{j=1}^{k} X_j, \qquad Z_k = \overline{\oplus_{j=k}^{\infty} X_j}$$

olmak üzere X uzayını, $X = Y_k \oplus Z_k$ şeklinde iki uzayın toplamı olarak yazılabilir.

Teorem 3.4.15. (Fountain Teorem) X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ çift bir fonksiyonel ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herbir $k \in \mathbb{N}^*$ için

i)

$$k \to \infty \quad \text{iken} \quad \inf_{u\in Z_k, \|u\|=\gamma_k} J(u) \to +\infty,$$

ii)

$$\max_{u\in Y_k, \|u\|=\rho_k} J(u) \leq 0,$$

iii) Herbir $c > 0$ için J fonksiyoneli $(PS)_c$ koşulu

koşulunu sağlayacak şekilde $\rho_k > \gamma_k > 0$ sayıları varsa, o zaman J fonksiyoneli X uzayında sınırsız olan (∞'a yakınsayan) bir kritik değerler dizisine sahiptir [25, 66].

Fan ve Zhang (2003),

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almışlardır. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $\Delta_{p(x)}u(x) = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right)$, her $x \in \overline{\Omega}$

için $p(x) > 1$, $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu ve Ambrosetti-Rabinovitz koşulu) sağlayan bir fonksiyon olarak alınmaktadır. Bu çalışmada; varyasyonel yaklaşımla, Ambrosetti-Rabinovitz koşulu altında Fountain teoremi kullanılarak, denklemin Sublineer durumu incelenerek, denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir [24].

Teorem 3.4.16. X bir Banach uzay, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneli, $c \in \mathbb{R}$ ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herhangi bir $(u_{n_j}) \subset X$ dizisi için

i)

$$\left|J(u_{n_j})\right| < c, \quad u_{n_j} \in Y_{u_{n_j}}$$

ii)

$$u_{n_j} \to \infty \text{ iken } \left(J\,|_{Y_{u_{n_j}}}\right)'(u_{n_j}) \to 0 \ ,$$

koşulları sağlanıyorsa, o zaman (u_{n_j}) dizisine J enerji fonksiyonelinin bir $\left((PS)_c^*\right)$ dizisi denir [25, 60, 66].

Eğer $(PS)_c^*$ dizisi (güçlü) yakınsak bir alt diziye sahip ise o zaman J fonksiyoneli $\left((PS)_c^*\right)$ koşulunu sağlar denir. $\left((PS)_c^*\right)$ dizisi J fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır.

Teorem 3.4.17. **(Dual Fountain Teorem)** X bir Banach uzay, $J \in C^1(X\ ,\mathbb{R})$ bir çift fonksiyonel, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herbir $k \geq k_0$ için $k_0 > 0$ olacak şekilde k_0 var ve

i)

$$a_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| = \rho_k} J(u) \geq 0,$$

ii)

$$b_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = \gamma_k} J(u) < 0,$$

iii)

$$d_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} J(u) \to 0, \ k \to \infty$$

iv) Herbir $c \in [d_{k_0}, 0)$ için J fonksiyoneli $\left((PS)_c^*\right)$ koşulu

koşullarını sağlayacak şekilde $\rho_k > \gamma_k > 0$ sayıları da varsa, bu durumda J fonksiyoneli X uzayında 0'a yakınsayan bir negatif kritik noktalar dizisine sahip olur [65].

Fan (2005),

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda a_1(x) g_1(x,u) + \mu a_2(x) g_2(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemini ele almışlardır. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ açık sınırlı bir bölge, $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right), 1 < p^- \leq p^+ < N$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2$ ve $x \in \Omega$ için $a_i \in L^{r_i(x)}$, $a_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $g_i(x) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu ve Carathedory koşulu) sağlayan fonksiyon olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak, denklemin Superlineer ve Sublineer durumları birlikte incelenerek, denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir [26].

Zang (2008),

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemini ele almıştır. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu) sağlayan bir fonksiyon, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$ ve $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Cerami koşulu altında Fountain teoremi kullanılarak, denklemin Superlineer durumu incelenerek, denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir [62].

Yao (2006),

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + |u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u), & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu\, g(x,u), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Neumann sınır koşullarına sahip lineer olmayan denklemi ele almıştır. Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1$, $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, f ve g bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu ve Ambrosetti-Rabinovitz koşulu) sağlayan fonksiyonlar ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\left(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0\right)$ olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla denklemin Sublineer durumunu inceleyerek, Mountain Pass Geometrisini kullanarak denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu ve Fountain ile Dual Fountain teoremleriyle de denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir [61].

Dai ve Hao (2009),

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip Kirchoff problemini incelemişler. Denklemde; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$1 < p^- \leq p^+ < N$, $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu) sağlayan lineer olmayan bir fonksiyon ve $M(t)$ sürekli bir fonksiyon olarak alınmaktadır. Çalışmada, varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir [18].

Tanım 3.4.18. X bir Banach uzay ve φ_1, $\int h|\varphi_1|^p = 1$ şeklinde normlaştırılmış bir fonksiyon olsun. Ayrıca; V ve W

$$\begin{aligned} V &= span\{\varphi_1\} \neq 0 \text{ sonlu boyutlu bir uzay} \\ \text{ve } W &= \left\{ w \in X : \int h|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 w = 0 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı birer uzay ve X uzayıda $X = V \oplus W$ şeklinde V ve W alt uzayların toplamı olarak yazılabilen bir Banach uzay olsun. Bu durumda herhangi bir $u \in X$ fonksiyonu

$$\alpha = \int h|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 u \quad \text{ve} \quad \int h|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 w = 0$$

olmak üzere $u = \alpha\varphi_1 + w$ toplamı şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.19. (Saddle Point Theorem) X bir Banach uzayı, X, V ve W alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonel Palais-Smale koşulunu ($(PS)_c$) sağlıyor ve

i) $J|_{\partial D} \leq \alpha$ olacak şekilde V uzayında 0'ın sınırlı bir D komşuluğu ve bir α sabiti vardır,

ii) $J|_W \leq \beta$ olacak şekilde $\beta > \alpha$ sabiti vardır,

koşullarını da sağlıyorsa, o zaman J fonksiyoneli

$$\Gamma = \left\{ h \in C\left(\overline{D}, E\right) : \partial D \text{ 'da } \; h = I(\text{özdeşlik fonksiyonu}) \right\}$$

için

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{x\in\overline{D}} J(h(u)) \geq \beta$$

olacak şekilde bir kritik değere sahiptir [12].

Buenrostro ve Garza (2005),

$$-\Delta_p u(x) = \lambda_1 h(x)|u|^{p-2}u + a(x)g(u) + f(x), \quad u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

şeklindeki p-Laplace operatörünü içeren, Rezonans problemini ele almışlar. Denklemde; $2 < p < N, (N \geq 3)$, her $s \in \mathbb{R}$ için $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli sınırlı bir fonksiyon $(|g(s)| \leq M)$, $f \in L^{(p^*)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $\left(p^* = \frac{Np}{N-p}\right.$ ve $(p^*)'$ ise p^* ın dualidir), $h(x) = h(|x|)$ bir ağırlık fonksiyonu, $a \in L^{(p^*)'}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ ve λ_1, $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayında p-Laplace birinci özdeğeri olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Saddle Point Teoremi kullanılarak, problemin zayıf çözümünün varlığını gösterilmişler [12].

4. BÖLÜM

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARINDA $p(x)$- LAPLACE DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN NEHARİ MANİFOLD YAKLAŞIMI

Bu bölümde

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) = \lambda a(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u + b(x)\,|u|^{h(x)-2}\,u\ ; & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \quad ; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (E_\lambda)$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu, Dirichlet sınır koşullarına sahip bir elliptik denklemin Nehari manifoldu üzerinde en az iki tane pozitif çözümünün olduğunu göstereceğiz.

Denklemde; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$'de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $x \in \Omega$ için $q(x), p(x), h(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$1 < q(x) < p(x) < h(x) < p^*(x)$$

$$\text{Eğer } p(x) < N \text{ ise } p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - p(x)}, \text{eğer } N \leq p(x) \text{ ise } p^*(x) = \infty$$

$$1 < p^- := \inf_{x\in\Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ := \sup_{x\in\Omega} p(x) < \infty,$$

$$1 < q^- \leq q^+ < p^- \leq p^+ < h^- \leq h^+,$$

λ pozitif bir reel sayı ve $a, b \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ negatif olmayan ağırlık fonksiyonları olarak kabul edilecektir.

(E_λ) denkleminin en az iki tane pozitif çözümünün olduğunu göstermek için, öncelikle aşağıdaki teroremlerde (Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2) mevcut olan gömme ve eşitsizliklerin doğru olduğunu göstereceğiz.

4.1. Kompakt Gömmeler

Teorem 4.1.1. Ω' nın sınırı koni özelliğine sahip ve $x \in \Omega$ için $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. Ayrıca; $x \in \Omega$ için $b(x) \in L^{\beta(x)}(\Omega)$, $b(x) > 0$ ve $\beta(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ için $\beta_0^- \leq \beta_0(x) \leq \beta_0^+$, $\beta^- > 1$ $\left(\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta_0(x)} = 1\right)$ olarak kabul edelim. Eğer $h(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$1 < h(x) < \frac{\beta(x) - 1}{\beta(x)} p^*(x),\ \forall x \in \overline{\Omega} \qquad (4.1.1)$$

yada

$$1 < \beta(x) < \frac{Np(x)}{Np(x) - h(x)\,(N - p(x))}$$

ise, o zaman

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{h(x)}_{b(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi ve

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \le c_5 \left(\|u\|^{h^-}_{1,p(x)} + \|u\|^{h^+}_{1,p(x)} \right) \qquad (4.1.2)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c_5 > 0$ sabiti vardır.

İspat:

$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{h(x)}_{b(x)}(\Omega)$ kompakt gömmesinin ispatı yapılırken, Fan'nın (2005) çalışmasındaki kompakt gömmenin ıspatına benzer adımlar uygulanacaktır.

$u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $r(x) = \frac{\beta(x)}{\beta(x)-1}h(x) = \beta_0(x)h(x)$ olsun. Bu durumda, (4.1.1) eşitsizliğinden $r(x) < p^*(x)$ olur ve Teorem 2.11.3'den $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ gömmesi yazılır. Dolayısıyla, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ için $|u|^{h(x)} \in L^{\beta_0(x)}(\Omega)$ olur. Ayrıca,Teorem 2.10.15'den

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \le c_1\,|b|_{\beta(x)} \left| |u|^{h(x)} \right|_{\beta_0(x)} < \infty$$

elde edilirki bu $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{h(x)}_{b(x)}(\Omega)$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında $u_n \rightharpoonup 0$ olsun. Bu durumda, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ gömmesinden $L^{r(x)}(\Omega)$ uzayında $u_n \to 0$ olduğundan $\left| |u_n|^{h(x)} \right|_{\beta_0(x)} \to 0$ yazılabilir. O halde

$$\int_\Omega b(x)\,|u_n|^{h(x)}\,dx \le c_1\,|b|_{\beta(x)} \left| |u_n|^{h(x)} \right|_{\beta_0(x)} \to 0$$

olur ve Teorem 2.12.2'den $|u_n|_{h(x),b(x)} \to 0$ elde edilirki bu $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{h(x)}_{b(x)}(\Omega)$ olduğunu gösterir.

Şimdi (4.1.2) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. $h^- \le h(x) \le h^+$ olduğundan $|u|^{h(x)} \le |u|^{h^-} + |u|^{h^+}$ olur [39]. Bu eşitsizlikten,

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \le \int_\Omega b(x)\,|u|^{h^-}\,dx + \int_\Omega b(x)\,|u|^{h^+}\,dx \qquad (4.1.3)$$

eşitsizliği yazılır. (4.1.3) eşitsizliğinde, $p(x) < h^-\beta_0(x) \leq h^+\beta_0(x) < p^*(x)$ koşulu ile birlikte Teorem 2.10.15, 2.10.6, 2.11.3, 2.12.4 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_\Omega b(x)\,|u|^{h^-}\,dx &\leq c_2\,|b|_{\beta(x)}\left|\,|u|^{h^-}\right|_{\beta_0(x)} \\ &= c_2\,|b|_{\beta(x)}\,|u|^{h^-}_{h^-\beta_0(x)} \leq c_3\,\|u\|^{h^-}_{1,p(x)} \qquad (4.1.4)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h^+}\,dx \leq c_4\,\|u\|^{h^+}_{1,p(x)} \qquad (4.1.5)$$

eşitsizliği de yazılır. O halde; (4.1.3) eşitsizliğinde, (4.1.4) ve (4.1.5) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \leq c_5\left(\|u\|^{h^-}_{1,p(x)} + \|u\|^{h^+}_{1,p(x)}\right)$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 4.1.2. Ω' nın sınırı koni özelliğine sahip ve $x \in \Omega$ için $p(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. Ayrıca; $x \in \Omega$ için $a(x) \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, $a(x) > 0$ ve $\alpha(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ için $\alpha_0^- \leq \alpha_0(x) \leq \alpha_0^+$, $\alpha^- > 1$ $\left(\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha_0(x)} = 1\right)$ olarak kabul edelim. Eğer $q(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $p(x) < \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}q(x)$ ve

$$1 < q(x) < \frac{\alpha(x)-1}{\alpha(x)}p^*(x),\ \forall x \in \overline{\Omega} \qquad (4.1.6)$$

yada

$$\frac{Np(x)}{Np(x) - q(x)\,(N - p(x))} < \alpha(x) < \frac{p(x)}{p(x) - q(x)}$$

ise, o zaman

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}_{a(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi ve

$$\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)} \leq c_6\left(\|u\|^{q^-}_{1,p(x)} + \|u\|^{q^+}_{1,p(x)}\right) \qquad (4.1.7)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c_6 > 0$ sabiti vardır.

İspat:
Öncelikle, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}_{a(x)}(\Omega)$ gömmenin ıspatını gösterelim.

$u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $m(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}q(x) = \alpha_0(x)q(x)$ olsun. Bu durumda, (4.1.6) eşitsizliğinden $m(x) < p^*(x)$ olur ve Teorem 2.11.3'den $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ gömmesi yazılır. Dolayısıyla, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ için $|u|^{q(x)} \in L^{\alpha_0(x)}(\Omega)$ olur. Ayrıca, Teorem 2.10.15'den

$$\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \leq c_7\,|a|_{\alpha(x)}\left||u|^{q(x)}\right|_{\alpha_0(x)} < \infty$$

elde edilirki bu $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}_{a(x)}(\Omega)$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında $u_n \rightharpoonup 0$ olsun. Bu durumda, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ gömmesinden $L^{m(x)}(\Omega)$ uzayında $u_n \to 0$ olduğundan $\left||u_n|^{q(x)}\right|_{\alpha_0(x)} \to 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\int_\Omega a(x)\,|u_n|^{q(x)}\,dx \leq c_7\,|a|_{\alpha(x)}\left||u_n|^{q(x)}\right|_{\alpha_0(x)} \to 0$$

olur ve Teorem 2.12.2'den $|u_n|_{q(x),a(x)} \to 0$ elde edilirki bu $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}_{a(x)}(\Omega)$ olduğunu gösterir.

Şimdi (4.1.7) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Yukarıda elde edilen

$$\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \leq c_7\,|a|_{\alpha(x)}\left||u|^{q(x)}\right|_{\alpha_0(x)} < \infty$$

eşitsizlikle birlikte $p(x) < q^-\alpha_0(x) \leq q^+\alpha_0(x) < p^*(x)$ koşulu gözönüne alınarak ve Theorem 4.1.1'in ıspatına benzer işlemler yapılırsa

$$\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \leq c_6\left(\|u\|^{q^-}_{1,p(x)} + \|u\|^{q^+}_{1,p(x)}\right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.1.3. Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2'deki koşulların sağladığını kabul edelim. Bu durumda, herbir $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayacak pozitif $c_8, c_9, c_{10}, c_{11} > 0$ sabitleri vardır.

i)

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \leq \begin{cases} c_8\,\|u\|^{h^+}_{1,p(x)}, & \|u\|_{1,p(x)} > 1 \\ c_9\,\|u\|^{h^-}_{1,p(x)}, & \|u\|_{1,p(x)} < 1 \end{cases}$$

ii)

$$\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \leq \begin{cases} c_{10}\,\|u\|^{q^+}_{1,p(x)}, & \|u\|_{1,p(x)} > 1 \\ c_{11}\,\|u\|^{q^-}_{1,p(x)}, & \|u\|_{1,p(x)} < 1 \end{cases}$$

4.2. Temel Sonuçlar

Çalışmamızın bu kısmında; öncelikle (E_λ) problemine karşılık gelen enerji fonksiyonelini (J_λ) tanımlayacağız. Daha sonra, önceki kısımda ıspatladığımız kompakt gömmeler yardımıyla, enerji fonksiyonelinin Nehari manifoldu üzerinde alttan sınırlı ve coercive olduğunu göstereceğiz. Son olarak, tekrar kompakt gömmeler yardımıyla (E_λ) probleminin Nehari Manifoldu üzerinde en az iki tane pozitif çözümünün varlığını göstereceğiz.

(E_λ) problemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli (J_λ),

$$J_\lambda(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \lambda \int\limits_\Omega \frac{1}{q(x)} a(x) |u|^{q(x)} \, dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{h(x)} b(x) |u|^{h(x)} \, dx.$$

Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 ve Teorem 2.10.6'dan

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \frac{\lambda}{q^-} \int\limits_\Omega a(x) |u|^{q(x)} \, dx - \frac{1}{h^-} \int\limits_\Omega b(x) |u|^{h(x)} \, dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{q^-} c_7 (\|u\|^{q^-} + \|u\|^{q^+}) - \frac{1}{h^-} c_5 (\|u\|^{h^-} + \|u\|^{h^+}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $q^+ < p^- \leq p^+ < h^- \leq h^+$ koşulu kullandığında J_λ, $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde alttan sınırlı olmaz. Bu durumda J_λ, X üzerinde alttan sınırlı olmadığından dolayı Nehari manifold $M_\lambda\ (\Omega)$ üzerinde alttan sınırlı olup olmadığını araştıracağız. Nehari manifold'u,

$$M_\lambda\ (\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0 \right\}.$$

Manifoldun tanımından, J_λ 'nın tüm kritik noktalarının $M_\lambda\ (\Omega)$ üzerinde olması gerektiği ve $M_\lambda\ (\Omega)$ üzerindeki yerel minimizelerinin (yerel minumum) J_λ için doğal kritik nokta olacağı açıktır.

$M_\lambda\ (\Omega)$ tanımında,

$$I_\lambda(u) := \langle J'_\lambda(u), u \rangle =$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \lambda \int\limits_\Omega a(x) |u|^{q(x)} \, dx - \int\limits_\Omega b(x) |u|^{h(x)} \, dx = 0 \qquad (4.2.1)$$

yazılabilir.

Eğer $u \in M_\lambda\ (\Omega)$ ise

$$
\begin{aligned}
\langle I_\lambda'(u), u\rangle &= \int_\Omega p(x)\,|\nabla u|^{p(x)}\,dx - \lambda\int_\Omega q(x)a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \\
&\quad -\int_\Omega h(x)b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx \\
&\leq \left(p^+ - q^-\right)\lambda\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx + \left(p^+ - h^-\right)\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizlikte, $q^+ < p^- \leq p^+ < h^- \leq h^+$ koşulu düşünüldüğünde bu eşitsizlik için

$$M_\lambda^+ = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle I_\lambda'(u), u\rangle > 0\}$$

$$M_\lambda^- = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle I_\lambda'(u), u\rangle < 0\}$$

$$M_\lambda^0 = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle I_\lambda'(u), u\rangle = 0\}$$

şek-
linde üç farklı durum ortaya çıkar. Bu durumda, $M_\lambda(\Omega)$ üç ayrı bölgeye ayrılmış olur.

Teorem 4.2.1. u_0, $M_\lambda(\Omega)$ üzerinde $J_\lambda(\Omega)$ için local (yerel) maximum yada local minimum olduğunu varsayalım. Eğer $u_0 \notin M_\lambda^0(\Omega)$ ise u_0, J_λ'nın bir kritik noktasıdır.

İspat. Bu Teoremin ıspatı aşağıdaki iki Lemma'nın (özellikle Lemma 4.2.3) bir sonucudur.

Lemma 4.2.2. $J_\lambda(\Omega)$ fonksiyoneli, $M_\lambda(\Omega)$ üzerinde coercive ve alttan sınırlıdır.

İspat.
$u \in M_\lambda(\Omega)$ ve $\|u\| > 1$ olarak kabul edelim. (4.2.1) eşitliğinde, Teorem 4.1.3 'deki (ii) özelliği ve Teorem 2.10.6 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}a(x)|u|^{q(x)}\,dx - \int_\Omega \frac{1}{h(x)}b(x)|u|^{h(x)}\,dx \\
&\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega a(x)|u|^{q(x)}\,dx \\
&\quad -\frac{1}{h^-}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q(x)}\,dx\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx + \lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\int_\Omega a(x)|u|^{q(x)}\,dx \\
&\geq \left(\frac{h^- - p^+}{h^-p^+}\right)\|u\|^{p^-} - c_{10}\lambda\left(\frac{h^- - q^-}{h^-q^-}\right)\|u\|^{q^+}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, $p^- > q^+$ koşulu kullanıldığında $\|u\| \to \infty$ iken $J_\lambda\ (u) \to \infty$ olur. O halde; J_λ, $M_\lambda(\Omega)$ üzerinde coercive ve alttan sınırlıdır. $\square$

Lemma 4.2.3. Öyle bir $\lambda_1 > 0$ sayısı bulunabilir ki $0 < \lambda < \lambda_1$ için $M_\lambda^0(\Omega) = \varnothing$ olur.

İspat.

Aksine, her $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $M_\lambda^0(\Omega) \neq \varnothing$ olarak kabul edelim. Ayrıca, $\|u\| > 1$ olacak şekilde $u \in M_\lambda^0(\Omega)$ olsun. Bu durumda, (4.2.1) eşitliği ve $M_\lambda^0(\Omega)$'nın tanımı kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle I_\lambda'(u), u\rangle \\
&= \int_\Omega p(x)|\nabla u|^{p(x)} - \lambda\int_\Omega q(x)a(x)|u|^{q(x)} - \int_\Omega h(x)b(x)|u|^{h(x)} \\
&\geq p^-\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - q^+\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega b(x)|u|^{h(x)}\right) - h^+\int_\Omega b(x)|u|^{h(x)} \\
&\geq \left(p^- - q^+\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx + \left(q^+ - h^+\right)\int_\Omega b(x)|u|^{h(x)}\,dx
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte, Teorem 4.1.3'deki (i) özelliği ve Teorem 2.10.6 bir arada kullanılırsa

$$0 \geq \left(p^- - q^+\right)\|u\|^{p^-} + c_8\left(q^+ - h^+\right)\|u\|^{h^+}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikten

$$\|u\| \geq c_{12}\left(\frac{p^{-}-q^{+}}{h^{+}-q^{+}}\right)^{\frac{1}{h^{+}-p^{-}}} \tag{4.2.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.2.1) eşitliğini ve $M_{\lambda}^{0}(\Omega)$'nın tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle I_{\lambda}'(u), u\right\rangle \\
&\leq p^{+}\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\, dx \ -\lambda q^{-}\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{q(x)}\, dx - h^{-}\int_{\Omega} b(x)\,|u|^{h(x)}\, dx \\
&\leq p^{+}\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \ -\lambda q^{-}\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{q(x)} \ - h^{-}\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \ -\lambda\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{q(x)}\right) \\
&\leq \left(p^{+}-h^{-}\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \lambda\left(h^{-}-q^{-}\right)\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{q(x)}\, dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte, Teorem 4.1.3'deki (ii) özelliği ve Teorem 2.10.6 bir arada kullanılırsa

$$0 \leq \left(p^{+}-h^{-}\right)\|u\|^{p^{-}} + \lambda c_{10}\left(h^{-}-q^{-}\right)\|u\|^{q^{+}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\|u\| \leq c_{13}\left(\lambda\frac{h^{-}-q^{-}}{h^{-}-p^{+}}\right)^{\frac{1}{p^{-}-q^{+}}} \tag{4.2.3}$$

yazılır. Eğer λ yeterince küçük seçilirse ($\lambda = \left(\frac{h^{-}-p^{+}}{h^{-}-q^{-}}\right)\left(\frac{p^{-}-q^{+}}{h^{+}-q^{+}}\right)^{\frac{p^{-}-q^{+}}{h^{+}-p^{-}}}$), o zaman (4.2.2) ve (4.2.3) eşitsizliklerinden $\|u\| < 1$ olur. Bu son durum, $\|u\| > 1$ varsayımımızla çelişir. Sonuç olarak, $M_{\lambda}^{0}(\Omega) = \varnothing$ olur. □

$0 < \lambda < \lambda_1$ için Lemma 4.2.3'den $M_{\lambda}(\Omega) = M_{\lambda}^{+}(\Omega) \cup M_{\lambda}^{-}(\Omega)$ olur. Bu durumda

$$\alpha_{\lambda}^{+} = \inf_{u\in M_{\lambda}^{+}(\Omega)} J_{\lambda}(u) \quad \text{ve} \quad \alpha_{\lambda}^{-} = \inf_{u\in M_{\lambda}^{-}(\Omega)} J_{\lambda}(u)$$

yazılabilir.

Lemma 4.2.4. Eğer $0 < \lambda < \lambda_1$ ise $u \in M_{\lambda}^{+}(\Omega)$ için $J_{\lambda}(u) < 0$.

İspat.
$u \in M_{\lambda}^{+}(\Omega)$ olsun. $J_{\lambda}(u)$'nın tanımdan

$$J_{\lambda}(u) \leq \frac{1}{p^{-}}\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\, dx - \frac{\lambda}{q^{+}}\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{q(x)}\, dx - \frac{1}{h^{+}}\int_{\Omega} b(x)\,|u|^{h(x)}\, dx \tag{4.2.4}$$

ve $u \in M_\lambda^+(\Omega)$ olduğu için

$$p^+ \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \; dx - \lambda q^- \int_\Omega a(x) \, |u|^{q(x)} \, dx - h^- \int_\Omega b(x) \, |u|^{h(x)} \, dx > 0 \tag{4.2.5}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca, (4.2.1) eşitliğini $(-q^-)$ ile çarpıp ve (4.2.5) eşitsizliği ile toplanılırsa

$$\int_\Omega b(x) \, |u|^{h(x)} \, dx < \frac{p^+ - q^-}{h^- - q^-} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \; dx \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan; (4.2.4) eşitsizliğinde, (4.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$J_\lambda(u) \leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{q^+} \right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx + \left(\frac{1}{q^+} - \frac{1}{h^+} \right) \int_\Omega b(x) \, |u|^{h(x)} \, dx \tag{4.2.7}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak; (4.2.7) eşitsizliğinde, (4.2.6) eşitsizliği ve Teorem 2.10.6 kullanılırsa

$$J_\lambda(u) < -\frac{(p^- - q^+) \, (h^+ - p^-)}{h^+ p^- q^+} \, \|u\|^{p^-} < 0$$

olur. Böylece, $\alpha_\lambda^+ = \inf\limits_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) < 0$ sonucu elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.5. Eğer $0 < \lambda < \lambda_1$ ise o zaman $M_\lambda^+(\Omega)$ üzerinde $J_\lambda(\Omega)$'nın bir minimize dizisi vardır.

İspat.

J_λ, $M_\lambda(\Omega)$'nın üzerinde alttan sınırlı olduğu için $M_\lambda^+(\Omega)$ üzerinde de alttan sınırlıdır. Bu durumda,

$$\lim_{n \to \infty} J_\lambda(u_n^+) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda^+ < 0$$

olacak şekilde $(u_n^+) \subseteq M_\lambda^+(\Omega)$ bir minimize dizisi vardır.

J_λ coercive olduğu için (u_n^+) dizisi, X uzayında sınırlıdır. Bu durumda, X uzayında $u_n^+ \rightharpoonup u_0^+$ olur. Diğer taraftan, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 'deki kompakt gömmelerden

$$L_{a(x)}^{q(x)}(\Omega) \;\; \text{uzayında } u_n^+ \to u_0^+$$

ve

$$L_{b(x)}^{h(x)}(\Omega) \;\; \text{uzayında } u_n^+ \to u_0^+$$

yazabiliriz. yazılabilir. Şimdi X uzayında $u_n^+ \to u_0^+$ olduğunu gösterelim. Aksine, X uzayında $u_n^+ \nrightarrow u_0^+$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\int_\Omega \left|\nabla u_0^+\right|^{p(x)} dx < \lim_{n \to \infty} \inf \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)} dx$$

olur. Ayrıca, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 'deki kompakt gömmelerden

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)\left|u_0^+\right|^{q(x)}dx &= \lim_{n\to\infty}\inf\int_\Omega a(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}dx,\\ \int_\Omega b(x)\left|u_0^+\right|^{h(x)}dx &= \lim_{n\to\infty}\inf\int_\Omega b(x)\left|u_n^+\right|^{h(x)}dx\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\langle J'_\lambda(u_n^+), u_n^+\rangle = 0$ ve Teorem 4.1.2 'den

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_n^+) &\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}dx + \lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\int_\Omega a(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}dx\\ \lim_{n\to\infty}J_\lambda(u_n^+) &\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}dx\\ &\quad +\lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda^+ &= \inf_{u\in M_\lambda^+} J_\lambda(u)\\ &> \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\left\|u_0^+\right\|^{p^-} + c_6\lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\left(\left\|u_0^+\right\|^{q^-}+\left\|u_0^+\right\|^{q^+}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte, $p^- > q^+$ koşulu ile birlikte $\left\|u_0^+\right\| > 1$ durumu düşünüldüğünde

$$\alpha_\lambda^+ = \inf_{u\in M_\lambda^+} J_\lambda(u) > 0$$

elde edilirki bu Lemma 4.2.4. ile çelişir $\left(u \in M_\lambda^+(\Omega) \text{ için } J_\lambda(u) < 0\right)$. Dolayısıyla, X uzayında $u_n^+ \to u_0^+$ ve

$$J_\lambda(u_0^+) = \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n^+) = \inf_{u\in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

olur. Sonuç olarak; u_0^+ dizisi, $M_\lambda^+(\Omega)$ üzerinde J_λ 'nın bir minimize dizisi olur. □

Lemma 4.2.6. Eğer $0 < \lambda < \lambda_1$ ise $u \in M_\lambda^-(\Omega)$ için $J_\lambda(u) > 0$.

İspat.

$u \in M_\lambda(\Omega)$ olsun. $J_\lambda(u)$'nın tanımdan ve (4.2.1) eşitliğinden

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx - \frac{1}{h^-}\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx$$

ve

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{h(x)}\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \lambda\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx$$

ifadeleri yazılabilir. Yukarıdaki iki ifadeden

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \\ &\quad -\frac{1}{h^-}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx - \lambda\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx + \lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\int_\Omega a(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte; Teorem 4.1.3'deki (ii) özelliği, Teorem 2.10.6 ve $p^- > q^+$ koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\|u\|^{p^-} + c_{10}\lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\|u\|^{q+} \\ &\geq \left(\frac{h^- - p^+}{p^+h^-} + c_{10}\lambda\frac{q^- - h^-}{q^-h^-}\right)\|u\|^{p^-} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikte, $\lambda < \frac{q^-\left(h^- - p^+\right)}{c_{10}p^+\left(h^- - q^-\right)}$ olarak seçilirse $J_\lambda(u) > 0$ olur. Böylece, Lemma 4.2.3'ten $M_\lambda(\Omega) = M_\lambda^+(\Omega) \cup M_\lambda^-(\Omega)$ olarak yazıldığından $M_\lambda^+(\Omega) \cap M_\lambda^-(\Omega) = \varnothing$ olur ve Lemma 4.2.4 'ten $u \in M_\lambda^-(\Omega)$ sonucu çıkar. □

Teorem 4.2.7. Eğer $0 < \lambda < \lambda_1$ ise, o zaman $M_\lambda^-(\Omega)$ üzerinde $J_\lambda(\Omega)$'nın bir minimize dizisi vardır.

İspat.

J_λ, $M_\lambda(\Omega)$ üzerinde alttan sınırlı olduğu için $M_\lambda^-(\Omega)$ üzerinde de alttan sınırlıdır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n^-) = \inf_{u\in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda^- > 0$$

olacak şekilde $(u_n^-) \subseteq M_\lambda^-(\Omega)$ bir minimize dizisi vardır.

J_λ coercive olduğu için (u_n^-) dizisi, X uzayında sınırlıdır. Bu durumda, X uzayında $u_n^- \rightharpoonup u_0^-$ olur. Ayrıca, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 'deki kompakt gömmelerden

$$L_{a(x)}^{q(x)}(\Omega) \text{ uzayında } \quad u_n^- \to u_0^-$$

ve

$$L_{b(x)}^{h(x)}(\Omega) \text{ uzayında } \quad u_n^- \to u_0^-$$

yazılabilir. Eğer $u_0^- \in M_\lambda^-(\Omega)$ ise, o zaman $tu_0^- \in M_\lambda^-(\Omega)$ ve $J_\lambda(u_0^-) \geq J_\lambda(tu_0^-)$ olacak şekilde $t > 0$ sabiti vardır. O halde

$$I'_\lambda(u) = \int_\Omega p(x) |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega q(x)a(x) |u|^{q(x)} dx - \int_\Omega h(x)b(x) |u|^{h(x)} dx$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} I'_\lambda(tu_0^-) &= \int_\Omega p(x) \left|\nabla tu_0^-\right|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega q(x)a(x) \left|tu_0^-\right|^{q(x)} dx \\ &\quad - \int_\Omega h(x)b(x) \left|tu_0^-\right|^{h(x)} dx \\ &\leq t^{p^+} p^+ \int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)} dx - \lambda t^{q^-} q^- \int_\Omega a(x) \left|u_0^-\right|^{q(x)} dx \\ &\quad - t^{h^-} h^- \int_\Omega b(x) \left|u_0^-\right|^{h(x)} dx \end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlikte, $q^- < p^+ < h^-$ koşulu ve $a(x)$ ile $b(x)$ ağırlık fonksiyonların tanımları bir arada kullanılırsa $I'_\lambda(tu_0^-) < 0$ olur. Böylece, $M_\lambda^-(\Omega)$'nın tanımından $tu_0^- \in M_\lambda^-(\Omega)$ elde edilir.

Şimdi X uzayında $u_n^+ \to u_0^+$ olduğunu gösterelim. Aksine, X uzayında $u_n^+ \nrightarrow u_0^+$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)} dx < \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)} dx$$

olur. Bu eşitsizliğin yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(tu_0^-) &\leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)} dx - \lambda\frac{t^{q^-}}{q^+}\int_\Omega a(x)\left|u_0^-\right|^{q(x)} dx \\
&\quad -\frac{t^{h^-}}{h^+}\int_\Omega b(x)\left|u_0^-\right|^{h(x)} dx \\
&< \lim_{n\to\infty}\left[\begin{array}{c} \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)} dx - \lambda\frac{t^{q^-}}{q^+}\int_\Omega a(x)\left|u_n^-\right|^{q(x)} dx \\ -\frac{t^{h^-}}{h^+}\int_\Omega b(x)\left|u_n^-\right|^{h(x)} dx \end{array}\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} J_\lambda(tu_n^-) \leq \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n^-) = \inf_{u\in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda^-
\end{aligned}
$$

elde edilirki bu $J_\lambda(tu_0^-) < \inf_{u\in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda^-$ olduğunu gösterir. Bu durumda, bir çelişki elde edilir. Böylece, X uzayında $u_n^- \to u_0^-$ ve

$$
J_\lambda(u_0^-) = \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n^-) = \inf_{u\in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)
$$

olur. Sonuç olarak; u_0^- dizisi, $M_\lambda^-(\Omega)$ üzerinde J_λ 'nın bir minimize dizisidir. □

Sonuç 4.2.8. Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.7'den $J_\lambda(u_0^+) = \inf_{u\in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$ ve $J_\lambda(u_0^-) = \inf_{u\in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)$ olacak şekilde $u_0^+ \in M_\lambda^+(\Omega)$ ve $u_0^- \in M_\lambda^-(\Omega)$ dizileri vardır. Üstelik; $J_\lambda(u_0^\pm) = J_\lambda(\left|u_0^\pm\right|)$ ve $\left|u_0^\pm\right| \in M_\lambda^\pm(\Omega)$ olduğu için $u_0^\pm \geq 0$ kabul edilebilir. Teorem 4.2.1'den; $u_0^\pm$, X uzayında J_λ 'nın kritik noktasıdır ve aynı zamanda (E_λ)'nın zayıf çözümleridir. Sonuç olarak; Harnack eşitsizliğinden [58, 63], $u_0^\pm$ aynı zamanda (E_λ)'nın da pozitif çözümleridir. □

5. BÖLÜM

$p(x)-$LAPLACE TİPİNDEKİ DÜZGÜN OLMAYAN ELLİPTİK DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ÇOKLUĞU

Bu bölümde,

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = m(x)\,|u|^{r(x)-2}\,u + n(x)\,|u|^{s(x)-2}\,u,\quad x\in\Omega \qquad (P)$$

problemi için Mountain Pass ve Z_2-Simetrik Mountain Pass Teoremini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğunu $X = W_0^{1,p(x)}$ uzayında araştıracağız.

Denklemde; $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $\xi\in\mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x\in\Omega$ için $|a(x,\xi)|\leq c_0(h_0(x)+|\xi|^{p(x)-1})$, $h_0(x)\in L^{p\prime(x)}(\Omega)$ olacak şekilde ölçülebilir bir fonksiyon, $c_0>0$ reel bir sabit ve $r(x)$, $p(x)$, $s(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ için

$$1<r(x)<p(x)<s(x)<p^*(x)$$

$$1<p^- := ess\inf_{x\in\Omega} p(x)\leq p(x)\leq p^+ := ess\sup_{x\in\Omega} p(x)<\infty$$

$$1<r^-\leq r^+<p^-\leq p^+<s^-\leq s^+$$

ve $m,\ n\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ pozitif birer ağırlık fonksiyonları olarak kabul edilecektir.

$a(x,\xi):\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ dönüşümü, $A:\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $A=A(x,\xi)$ dönüşümün ξ'e göre türevi sürekli olan bir dönüşüm olarak kabul edilecektir. Yani;

$$a(x,\xi)=\nabla_\xi A(x,\xi).$$

$\operatorname{div}(a(x,\nabla u))$ operatörü $p(x)-$Laplace operatörünün daha genel bir durumudur.

Örneğin; $p(x)\geq 2$ için $A(x,\xi)=(1/p(x))\,|\xi|^{p(x)}$ seçilirse $a(x,\xi)=|\xi|^{p(x)-2}\,\xi$ olur. Bu durumda, $p(x)-$Laplace operatörü

$$\operatorname{div}(a(x,\nabla u))=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\right)=\triangle_{p(x)}u(x)$$

olur.

5.1. Giriş

Bu kısımda, çalışmamızı oluşturan teoremleri ıspatlamak için öncelikle gerekli olan koşulları ve (P) problemine karşılık gelen, $I(u)$ enerji foonksiyonelini vereceğiz. Daha sonra, bu koşullar yardımıyla gerekli olan Lemma'ları ıspatlayacağız.

$a(x,\xi)$ ve $A(x,\xi)$ dönüşümleri ile m ve n ağırlık fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edeceğiz.

(**A1**) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$|a(x,\xi)| \leq c_0(h_0(x) + |\xi|^{p(x)-1})$$

eşitsizliği sağlansın.

(**A2**) $A(x,\xi)$, $p(x)$-düzgün konveksdir: Her $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$A(x, \frac{\xi+\psi}{2}) \leq \frac{1}{2}A(x,\xi) + \frac{1}{2}A(x,\psi) - k_1 |\xi - \psi|^{p(x)}$$

eşitsizliğini sağlayacak $k_1 > 0$ sabiti vardır.

(**A3**) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$|\xi|^{p(x)} \leq a(x,\xi)\xi \leq p(x)A(x,\xi)$$

eşitsizliği sağlansın.

(**A4**) Her $x \in \Omega$ için $A(x,0) = 0$.

(**A5**) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için $A(x,-\xi) = A(x,\xi)$.

(**M**) Her $x \in \Omega$ için $\beta(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $m(x) \in L^{\beta(x)}(\Omega)$, $m(x) > 0$ olsun. Ayrıca; $\beta^- > 1$ ve $\beta_0^- \leq \beta_0(x) \leq \beta_0^+$ için $\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta_0(x)} = 1$ ve

$$\frac{Np(x)}{Np(x) - r(x)\,(N - p(x))} < \beta(x) < \frac{p(x)}{p(x) - r(x)} \ .$$

(**N**) Her $x \in \Omega$ için $\alpha(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $n(x) \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, $n(x) > 0$ olsun. Ayrıca; $\alpha^- > 1$ ve $\alpha_0^- \leq \alpha_0(x) \leq \alpha_0^+$ için $\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha_0(x)} = 1$ ve

$$\frac{p(x)}{p(x) - s(x)} < \alpha(x) < \frac{Np(x)}{Np(x) - s(x)\,(N - p(x))}.$$

(P) problemine karşılık gelen $I(u) : X \to \mathbb{R}$ enerji fonksiyoneli

$$I(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u)dx - \int_\Omega \frac{m(x)}{r(x)}\,|u|^{r(x)}\,dx - \int_\Omega \frac{n(x)}{s(x)}\,|u|^{s(x)}\,dx$$

olarak yazılır. Bu fonksiyoneli

$$\Lambda(u) = \int_{\Omega} A(x, \nabla u) dx$$

ve

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{m(x)}{r(x)} |u|^{r(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{n(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx$$

şeklinde iki ayrı fonksiyonel olarak yazdığımızda

$$I(u) = \Lambda(u) - J(u)$$

olur.

Herbir $u, v \in X$ için $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ ve

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} m(x) |u|^{r(x)-2} uv dx + \int_{\Omega} n(x) |u|^{s(x)-2} uv dx$$

yazabiliriz. Eğer, her $\varphi \in X$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} m(x) |u|^{r(x)-2} u\varphi dx - \int_{\Omega} n(x) |u|^{s(x)-2} u\varphi dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $u \in X$ fonksiyonu (P) probleminin zayıf çözümü olur.

Lemma 5.1.1

i) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için $A(x, \xi)$ dönüşümü,

$$|A(x, \xi)| \leq c_0(h_0(x) |\xi| + |\xi|^{p(x)})$$

büyüme koşulunu sağlar.

ii) Her $z \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve $x \in \Omega$ için $A(x, \xi)$ dönüşümü,

$$A(x, z\xi) \leq A(x, \xi) z^{p(x)}$$

eşitsizliğini sağlar. Yani, $A(x, \xi)$, $p(x)-$homojendir.

İspat:

i) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$A(x,\xi)=\int_0^1 \frac{d}{dt}A\left(x,t\xi\right)dt=\int_0^1 a\left(x,t\xi\right)\xi dt$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte, (**A1**) koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|A(x,\xi)| &\leq \int_0^1 |a\left(x,t\xi\right)| \ |\xi|\, dt \leq c_0\int_0^1 (h_0(x)+|\xi|^{p(x)-1}|t|^{p(x)-1})\,|\xi|\, dt \\
&\leq c_0\int_0^1 (h_0(x)\,|\xi|+|\xi|^{p(x)}|t|^{p(x)-1})\ dt \\
&\leq c_0(h_0(x)\,|\xi|+|\xi|^{p(x)})
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Özel olarak, $g\left(t\right)=A\left(x,t\xi\right)$ olarak alalım. Bu fonksiyon ve (**A3**) koşulu bir arada kullanılırsa

$$g'\left(t\right)=a\left(x,t\xi\right)\xi=\frac{1}{t}a\left(x,t\xi\right)t\xi\leq\frac{p(x)}{t}A\left(x,t\xi\right)=\frac{p(x)}{t}g\left(t\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikten,

$$\frac{g'\left(t\right)}{g\left(t\right)}\leq\frac{p(x)}{t}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $(1,z)$'e kadar integrali alınıp ve logaritma fonksiyonun özellikleri kullanılırsa

$$\log g\left(z\right)-\log g\left(1\right)\leq p(x)\log z$$

$$\frac{g\left(z\right)}{g\left(1\right)}\leq z^{p(x)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, $g\left(t\right)=A\left(x,t\xi\right)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$A\left(x,z\xi\right)\leq A(x,\xi)z^{p(x)}$$

sonucu elde edilir. □

Lemma 5.1. 2

i) Λ fonksiyoneli X uzayında iyi tanımlıdır.

ii) $\Lambda\in C^1(X,\mathbb{R})$ ve Λ 'nin türevi

$$\left\langle \Lambda'\left(u\right),\varphi\right\rangle=\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla\varphi dx,\quad \forall u,\varphi\in X$$

olur.

iii) Λ fonksiyoneli X uzayında alttan zayıf yarı süreklidir.

iv) Her $u, v \in X$ için

$$\Lambda(\frac{u+v}{2}) \leq \frac{1}{2}\Lambda(u) + \frac{1}{2}\Lambda(v) - k\|u-v\|^{p^-}$$

eşitsizliği sağlanır.

v) Her $u, v \in X$ için

$$\Lambda(u) - \Lambda(v) \geq \langle \Lambda'(v), u-v \rangle$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:
i) Teorem 2.10.15 ve Lemma 5.1.1'deki **i)** özelliğinden

$$\begin{aligned}\Lambda(u) &= \int_\Omega A(x,\nabla u)dx \leq c_0 \int_\Omega h_0(x)|\nabla u|\,dx + c_0 \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx \\ &\leq c_0 |h_0|_{p'(x)} |\nabla u|_{p(x)} + c_1 ||u||^{p^+} \\ &\leq c_2 ||u|| + c_1 ||u||^{p^+} < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilirki bu Λ fonksiyoneli X uzayında iyi tanımlı olduğunu gösterir.

ii) Herbir $x \in \Omega$ için $u, \varphi \in X$ ve $0 < |r| < 1$ olsun. O zaman Ortalama Değer Teoreminden aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde $v \in [0,1]$ vardır

$$\begin{aligned}&\left|\frac{A(x,\nabla u(x) + r\nabla\varphi(x)) - A(x,\nabla u(x))}{r}\right| \\ =&\left|\int_0^1 a(x,\nabla u(x) + vr\nabla\varphi(x))\nabla\varphi(x)dv\right|\end{aligned}$$

Bu eşitlikte, (**A1**) koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{A\left(x, \nabla u\left(x\right)+r \nabla \varphi\left(x\right)\right)-A\left(x, \nabla u\left(x\right)\right)}{r}\right| \\
\leq\ & \int_0^1 c_0 (h_0(x) + |\nabla u(x) + vr\nabla\varphi(x)|^{p(x)-1})\, |\nabla\varphi(x)|\, dv \\
\leq\ & c_0(h_0(x) + (|\nabla u(x)| + |\nabla\varphi(x)|)^{p(x)-1})\, |\nabla\varphi(x)| \\
\leq\ & c_0 h_0(x)\, |\nabla\varphi(x)| + c_0\, |\nabla\varphi(x)|\, (|\nabla u(x)| + |\nabla\varphi(x)|)^{p(x)-1} \\
\leq\ & c_0 h_0(x)\, |\nabla\varphi(x)| + c_0 2^{p^+-1}\, |\nabla\varphi(x)|\, (|\nabla u(x)|^{p(x)-1} + |\nabla\varphi(x)|^{p(x)-1}) \\
\leq\ & c_0 h_0(x)\, |\nabla\varphi(x)| + c_0 2^{p^+-1}\, |\nabla\varphi(x)|\, |\nabla u(x)|^{p(x)-1} + c_0 2^{p^+-1}\, |\nabla\varphi(x)|^{p(x)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte; $h_0(x)\, |\nabla\varphi(x)|$, $|\nabla\varphi(x)|\, |\nabla u(x)|^{p(x)-1}$ ve $|\nabla\varphi(x)|^{p(x)}$ kısımlarına Teorem 2.10.15 uygulanırsa, bu kısımlar Ω üzerinde integrallenebilir. O halde, eşitsizliğin sağ tarafı Ω üzerinde integrallenebilirdir. Bu durumda, Lebesgue Dominated Yakınsaklık Teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \Lambda'\left(u\right), \varphi\right\rangle &= \lim_{r\to 0} \int_\Omega \frac{A\left(x, \nabla u + r\nabla\varphi\right) - A(x, \nabla u)}{r} dx \\
&= \int_\Omega a\left(x, \nabla u\right) \nabla\varphi dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Λ' fonksiyonelinin X uzayında sürekli olduğunu göstereceğiz. X uzayında $u_n \to u$ olsun ve $\theta\left(x, u\right) = a\left(x, \nabla u\right)$ olarak tanımlayalım. (**A1**) koşulunun yardımıyla $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$ uzayında $\theta\left(x, u_n\right) \to \theta\left(x, u\right)$ olur $[25]$.Bu durumda, Teorem 2.10.15 kullanılırsa

$$\left|\left\langle \Lambda'(u_n) - \Lambda'\left(u\right), \varphi\right\rangle\right| \leq \left|\theta\left(x, u_n\right) - \theta\left(x, u\right)\right|_{p'(x)} \left|\nabla\varphi\right|_{p(x)}$$

olur. Bu eşitsizlikte, $n \to \infty$ alınırsa

$$\left\|\Lambda'(u_n) - \Lambda'\left(u\right)\right\| \leq \left|\theta\left(x, u_n\right) - \theta\left(x, u\right)\right|_{p'(x)} \to 0$$

elde edilir.

iii) Brezis III.8 (1992)'daki sonucundan Λ 'nin alttan yarı sürekli olduğunu göstermek yeterlidir [11]. Λ konveks olduğundan dolayı herhangi bir $\upsilon \in X$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\int_\Omega A\left(x, \nabla \upsilon\right) dx \geq \int_\Omega A(x, \nabla u) dx + \int_\Omega a\left(x, \nabla u\right)\left(\nabla \upsilon - \nabla u\right) dx.$$

Bu eşitsizlikte; (**A1**) koşulu, Teorem 2.10.15, Teorem 2.12.4 kullanıp ve her $\upsilon \in X$ için $||\upsilon - u|| < \delta = \dfrac{\epsilon}{c_5 + c_6}$ $(\epsilon > 0)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\left(x, \nabla \upsilon\right) dx \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - \int_\Omega \left|a\left(x, \nabla u\right)\right| \left|\nabla \upsilon - \nabla u\right| dx \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - c_0 \int_\Omega h_0\left(x\right) \left|\nabla(\upsilon - u)\right| dx - c_0 \int_\Omega \left|\nabla(\upsilon - u)\right| \left|\nabla u\right|^{p(x)-1} dx \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - c_3 \left|h_0\right|_{p'(x)} \left|\nabla(\upsilon - u)\right|_{p(x)} - c_4 \left|\nabla(\upsilon - u)\right|_{p(x)} \left|\left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\right|_{p'(x)} \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - c_5 \left|\left|\upsilon - u\right|\right| - c_4 \left|\left|\upsilon - u\right|\right| \left\|u\right\|^{p^+-1} \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - c_5 \left|\left|\upsilon - u\right|\right| - c_6 \left|\left|\upsilon - u\right|\right| \\
\geq\ & \int_\Omega A(x, \nabla u) dx - \epsilon
\end{aligned}$$

elde edelirki bu Λ fonksiyonelinin X uzayında alttan zayıf yarı sürekli olduğunu gösterir.

iv) Aşağıdaki eşitlikte; (**A2**) koşulu ve Teorem 2.10.6 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Lambda\left(\frac{u+\upsilon}{2}\right) &= \int_\Omega A\left(x, \frac{\nabla u + \nabla \upsilon}{2}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega A(x, \nabla u) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(x, \nabla \upsilon\right) dx - k_1 \int_\Omega \left|\nabla u - \nabla \upsilon\right|^{p(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{2}\Lambda\left(u\right) + \frac{1}{2}\Lambda(\upsilon) - k_1 \left\|u - \upsilon\right\|^{p^-}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) Λ konveks olduğunu için aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde $t \in (0, 1)$

vardır

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Lambda\left(\upsilon+t\left(u-\upsilon\right)\right)-\Lambda(\upsilon)}{t} \\
= \quad & \frac{\Lambda\left(\left(1-t\right)\upsilon+tu\right)-\Lambda(\upsilon)}{t} \\
\leq \quad & \frac{\left(1-t\right)\Lambda\left(\upsilon\right)+t\Lambda\left(u\right)-\Lambda(\upsilon)}{t} \\
= \quad & \Lambda\left(u\right)-\Lambda(\upsilon).
\end{aligned}
$$

Bu eşitsizlikte $t \longrightarrow 0$ alınırsa

$$
\lim_{t\to 0}\frac{\Lambda\left(\upsilon+t\left(u-\upsilon\right)\right)-\Lambda(\upsilon)}{t}
$$

$$
=\langle \Lambda'(\upsilon), u-\upsilon\rangle
$$

olur. Böylece

$$
\langle \Lambda'(\upsilon), u-\upsilon\rangle \leq \Lambda\left(u\right)-\Lambda(\upsilon)
$$

sonucu elde edilir. □

Lemma 5.1.3 Ω 'nın sınırı koni özelliğine sahip ve $x\in\Omega$ için $p(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. Ayrıca; $x\in\Omega$ için $n(x)\in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, $n(x)>0$ ve $\alpha(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ için $\alpha_0^- \leq \alpha_0(x)\leq \alpha_0^+$, $\alpha^- > 1$, $(\frac{1}{\alpha(x)}+\frac{1}{\alpha_0(x)}=1)$ olarak kabul edelim. Eğer $s(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$
1 < s(x) < \frac{\alpha(x)-1}{\alpha(x)}p^*(x),\ \forall x\in\overline{\Omega} \qquad (5.1.1)
$$

yada

$$
1<\alpha(x)<\frac{Np(x)}{Np(x)-s(x)\left(N-p(x)\right)}
$$

ise, o zaman

$$
W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{s(x)}_{n(x)}(\Omega)
$$

kompakt gömmesi ve

$$
\int\limits_{\Omega} n(x)\left|u\right|^{s(x)}dx \leq c_7\left(\left\|u\right\|^{s^-}+\left\|u\right\|^{s^+}\right) \qquad (5.1.2)
$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c_7>0$ sabiti vardır [38].

Lemma 5.1.4. Ω 'nın sınırı koni özelliğine sahip ve $x\in\Omega$ için $p(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. Ayrıca; $x\in\Omega$ için $m(x)\in L^{\beta(x)}$, $m(x)>0$ ve $\beta(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ için

$\beta_0^- \leq \beta_0(x) \leq \beta_0^+$, $\beta^- > 1$ $\left(\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta_0(x)} = 1\right)$ olarak kabul edelim. Eğer $r(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $p(x) < \frac{\beta(x)}{\beta(x)-1} r(x)$ ve

$$1 < r(x) < \frac{\beta(x)-1}{\beta(x)} p^*(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

yada

$$\frac{Np(x)}{Np(x) - r(x)\left(N - p(x)\right)} < \beta(x) < \frac{p(x)}{p(x) - r(x)}$$

ise, o zaman

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}_{m(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi ve

$$\int_\Omega m(x)\left|u\right|^{r(x)} dx \leq c_8(\|u\|^{r^-} + \|u\|^{r^+}) \tag{5.1.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c_8 > 0$ sabiti vardır [38].

5.2. Temel Sonuçlar

Lemma 5.2.1
i) $I : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli alttan zayıf yarı süreklidir.

ii) I fonksiyoneli X'de iyi tanımlıdır, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ ve herbir $u, \upsilon \in X$ için türevi

$$\left\langle I'\left(u\right), \upsilon\right\rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla \upsilon dx - \int_\Omega m(x)\left|u\right|^{r(x)-1} \upsilon dx - \int_\Omega n(x)\left|u\right|^{s(x)-1} \upsilon dx$$

olur.

iii) $I\left(0\right) = 0$.

iv) $\inf\left\{I\left(u\right) : u \in X, \ \|u\| = \rho\right\} > \alpha$ olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır.

v) $t > 0$ olmak üzere t'nin yeterince küçük değeri için $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ ve $I\left(t\varphi\right) < 0$ olacak şekilde $\varphi \in X$ fonksiyonu vardır.

vi) $I\left(u\right) \leq 0$ olacak şekilde $\|u\| > \rho$ koşulunu sağlayan bir $u \in X$ fonksiyonu vardır.

vii) $G = \left\{\varphi \in C\left(\left[0, 1\right], X\right) : \varphi\left(0\right) = 0, \varphi\left(1\right) = u\right\} \neq \varnothing$.

viii) I fonksiyoneli, X uzayında $(\mathbf{PS})_c$ koşulunu sağlar [20, 21].

İspat: i) X uzayında $u_n \rightharpoonup u$ olacak şekilde $(u_n) \subset X$ bir dizi olsun. Λ fonksiyoneli, X uzayında alttan zayıf yarı sürekli olduğundan dolayı

$$\Lambda(u) \leq \liminf \ \Lambda(u_n) \tag{5.2.1}$$

olur. Ayrıca,

$$(a) : X \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}_{m(x)}(\Omega) \quad \text{ve} \quad X \hookrightarrow\hookrightarrow L^{s(x)}_{n(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmelerden

$$(b) : L^{r(x)}_{m(x)}(\Omega)\text{' da } \ u_n \to u \quad \text{ve} \quad L^{s(x)}_{n(x)}(\Omega)\text{' da } u_n \to u$$

yazılabilir. Bu gömmeler ve (5.2.1) eşitsizliğinden

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece, I fonksiyonelinin alttan zayıf yarı sürekli olduğu sonucu elde edilir.

ii) J fonksiyonelinin özelliğinden ve Lemma 5.1.2'deki **i- ii** özelliklerinin bir sonucudur.

iii) I fonksiyonelinin tanımının bir sonucudur.

iv) I fonksiyonelinin tanımından

$$I(u) \geq \int_\Omega A(x, \nabla u)dx - \frac{1}{r^-}\int_\Omega m(x)\,|u|^{r(x)}\,dx - \frac{1}{s^-}\int_\Omega n(x)\,|u|^{s(x)}\,dx$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte, (**A3**) koşulu ile birlikte Lemma 5.1.3 ve Lemma 5.1.4 uygulanırsa

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx - \frac{c_8}{r^-}\left(||u||^{r^-} + ||u||^{r^+}\right) - \frac{c_7}{s^-}\left(||u||^{s^-} + ||u||^{s+}\right) \\ &\geq \frac{1}{p^+}\,||u||^{p^-} - \frac{c_8}{r^-}\left(||u||^{r^-} + ||u||^{r^+}\right) - \frac{c_7}{s^-}\left(||u||^{s^-} + ||u||^{s^+}\right) \end{aligned}$$

$$= (\frac{1}{p^+} - \frac{c_8}{r^-}\left(||u||^{r^- - p^-} + ||u||^{r^+ - p^-}\right) - \frac{c_7}{s^-}\left(||u||^{s^- - p^-} + ||u||^{s^+ - p^-}\right))\,||u|| \tag{5.2.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de $I(u) \geq 0$ olduğunu gösterebilmek için aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde $t_0 > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir

$$\frac{1}{p^+} - \frac{c_8}{r^-}\left(t_0^{r^- - p^-} + t_0^{r^+ - p^-}\right) - \frac{c_7}{s^-}\left(t_0^{s^- - p^-} + t_0^{s^+ - p^-}\right) > 0.$$

Bunun için

$$\phi(t_0) = \frac{c_8}{r^-}\left(t_0^{r^- - p^-} + t_0^{r^+ - p^-}\right) + \frac{c_7}{s^-}\left(t_0^{s^- - p^-} + t_0^{s^+ - p^-}\right)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu ϕ fonksiyonu için $\lim\limits_{t_0 \longrightarrow \infty} \phi(t_0) = \lim\limits_{t_0 \longrightarrow 0} \phi(t_0) = \infty$ olduğundan dolayı ϕ fonksiyonu pozitif bir minimuma sahiptir ve bu minimum noktası t_0 dır. Bu t_0 noktası, ϕ fonksiyonun minimumu olduğundan dolayı $\phi'(t_0) = 0$ olur. Yani;

$$\phi'(t_0) = \frac{c_8}{r^-}(\left(r^- - p^-\right) t_0^{r^- - p^- - 1} + \left(r^+ - p^-\right) t_0^{r^+ - p^- - 1})$$

$$+\frac{c_7}{s^-}\left(\left(s^- - p^-\right) t_0^{s^- - p^- - 1} + \left(s^+ - p^-\right) t_0^{s^+ - p^- - 1}\right) = 0$$

olur. Özel olarak; $r^- = r^+$ ve $s^- = s^+$ olarak seçilirse

$$t_0 = \left(\frac{\left(p^- - r^+\right) s^-}{\left(s^+ - p^-\right) r^-}\right)^{\frac{1}{s^+ - r^+}} > 0$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{r^-}\left(\frac{\left(p^- - r^+\right) s^-}{\left(s^+ - p^-\right) r^-}\right)^{\frac{r^+ - p^-}{s^+ - r^+}} + \frac{1}{s^-}\left(\frac{\left(p^- - r^+\right) s^-}{\left(s^+ - p^-\right) r^-}\right)^{\frac{s^+ - p^-}{s^+ - r^+}} < \frac{1}{p^+}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan da

$$I(u) \geq \alpha > 0$$

sonucu elde edilir.

v) $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ ve $t > 0$ yeterince küçük seçelim. Bu durumda, Lemma 5.1.1'deki **ii)** özelliğinden

$$I(t\varphi) = \int\limits_\Omega A(x, t\nabla\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \frac{m(x)}{r(x)} |t\varphi|^{r(x)}\, dx - \int\limits_\Omega \frac{n(x)}{s(x)} |t\varphi|^{s(x)}\, dx,$$

ve

$$I(t\varphi) \leq t^{p^+} \int\limits_\Omega A(x, \nabla\varphi)\, dx - \frac{t^{r^-}}{r^+} \int\limits_\Omega m(x) |\varphi|^{r(x)}\, dx - \frac{t^{s^-}}{s^+} \int\limits_\Omega n(x) |\varphi|^{s(x)}\, dx$$

yazılır. Bu son eşitsizlikte, $r^- < p^+ < s^-$ koşulu kullanılırsa $I(t\varphi) < 0$ olur.

vi) $t > 1$ olmak üzere t'nin yeterince büyük değeri için ve $r^- < p^+ < s^-$ koşulu kullanılırsa o zaman **v)** ifadesine benzer işlemler yapılırsa arzu edilen sonuc elde edilir.

vii) Eğer herbir $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = tu$ ve $\varphi \in C([0,1], X)$ olarak seçersek o zaman $\varphi \in G$ ve $G \neq \varnothing$ olur.

viii) Herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi ve $c > 0$ sabiti için

$$|I(u_n)| < c \quad \text{ve} \quad X^* \quad \text{uzayında} \quad n \to \infty \quad \text{için} \quad I'(u_n) \to 0, \qquad (5.2.3)$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim.

I fonksiyonelinin, X uzayında $(\mathbf{PS})_c$ koşulunu sağladığını göstermek için (5.2.3) koşullarını sağlayan $(u_n) \subset X$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu göstermek gerekir. Bunun için öncelikle, (u_n) dizisinin X uzayında sınırlı olduğunu göstereceğiz. Aksine, (u_n) dizisi X uzayında sınırlı olmasın. Yani; $n \to \infty$ iken $\|u_n\| \to \infty$ olsun. Bunun için, (5.2.3) ifadesini kullanıp ve yeterince büyük n için $\|u_n\| > 1$ olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned}
& 1 + c + ||u_n|| \\
\geq\ & I(u_n) - \frac{1}{s^-} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\
=\ & \int_\Omega A(x, \nabla u_n) dx - \int_\Omega \frac{m(x)}{r(x)} |u_n|^{r(x)} dx - \int_\Omega \frac{n(x)}{s(x)} |u_n|^{s(x)} dx \\
& - \frac{1}{s^-} \int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla u_n dx + \frac{1}{s^-} \int_\Omega m(x) |u_n|^{r(x)} dx + \frac{1}{s^-} \int_\Omega n(x) |u_n|^{s(x)} dx \\
\geq\ & \int_\Omega (A(x, \nabla u_n) - \frac{1}{s^-} a(x, \nabla u_n) \nabla u_n) dx + (\frac{1}{s^-} - \frac{1}{r^-}) \int_\Omega m(x) |u_n|^{r(x)} dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan, (**A3**) koşulunun yardımıyla

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla u_n dx \leq p^+ \int_\Omega A(x, \nabla u_n) dx$$

elde edilir. Bu durumda

$$1 + c + ||u_n|| \geq (1 - \frac{p^+}{s^-}) \int_\Omega A(x, \nabla u_n) dx + (\frac{1}{s^-} - \frac{1}{r^-}) \int_\Omega m(x) |u_n|^{r(x)} dx$$

$$\geq \frac{1}{p^+}(1-\frac{p^+}{s^-})\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\,dx + (\frac{1}{s^-}-\frac{1}{r^-})\int\limits_\Omega m(x)\,|u_n|^{r(x)}\,dx$$

olur. Bu eşitsizlikte, (5.1.3) ifadesi kullanılırsa

$$1+c+||u_n||+(\frac{1}{r^-}-\frac{1}{s^-})\,||u_n||^{r^+} \geq (\frac{1}{p^+}-\frac{1}{s^-})\,||u_n||^{p^-}$$

elde edilir. Eğer bu son eşitsizliği $||u_n||^{p^-}$ bölüp ve $n \to \infty$ için limiti alınırsa $s^- \leq p^+$elde edilir. Bu sonuç, $s^- > p^+$ koşulu ile çelişir. Böylece (u_n) dizisi X üzerinde sınırlı olur. Dolayısıyla, (u_n) dizisi X üzerinde sınırlı olduğu için X üzerinde $u_n \rightharpoonup u$ olacak şekilde bir $u \in X$ alt dizisi vardır. Şimdi (u_n) dizisinin X üzerinde $u_n \to u$ olacak şekilde bir $u \in X$ alt dizisinin olduğunu göstereceğiz. Lemma 5.2.1'deki **i)** özelliğin ıspatında yazılan (a) ve (b) ifadeleri ve (5.2.3) ifadesi kullanılırsa

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \langle I'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n), u_n - u\rangle &= \int\limits_\Omega a(x,\nabla u_n)\,(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \\ &\quad -\int\limits_\Omega m(x)\,|u_n|^{r(x)-2}\,u_n(u_n-u)dx \\ &\quad -\int\limits_\Omega n(x)\,|u_n|^{s(x)-2}\,u_n(u_n-u)dx\end{aligned}$$

yada

$$\int\limits_\Omega a(x,\nabla u_n)\,(\nabla u_n - \nabla u)\,dx = \langle I'(u_n), u_n - u\rangle$$

$$+\int\limits_\Omega m(x)\,|u_n|^{r(x)-2}\,u_n(u_n-u)dx + \int\limits_\Omega n(x)\,|u_n|^{s(x)-2}\,u_n(u_n-u)dx \qquad (5.2.4)$$

elde edilir. Ayrıca; (5.2.4) eşitliğinin

$$\int\limits_\Omega m(x)\,|u_n|^{r(x)-2}\,u_n(u_n-u)dx$$

kısmı için Teorem 2.10.16 $(\frac{1}{\beta(x)}+\frac{1}{\eta(x)}+\frac{1}{r(x)}=1)$, Teorem 2.11.3, Teorem 2.12.4 ve $L^{r(x)}_{m(x)}(\Omega)$ uzayında $u_n \to u$ yakınsaklığı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\Omega} m(x)\left|u_n\right|^{r(x)-2} u_n(u_n-u)dx\right| \\
\leq\ & c_9 \left|m\right|_{\beta(x)} \left|\left|u_n\right|^{r(x)-1}\right|_{\eta(x)} \left|u_n-u\right|_{m(x),r(x)} \\
\leq\ & c_{10} \left|\left|u_n\right|^{r(x)-1}\right|_{\beta_0(x)r(x)} \left|u_n-u\right|_{m(x),r(x)} \\
\leq\ & c_{11} \left|u_n\right|^{r^+-1}_{(r^+-1)\beta_0(x)r(x)} \left|u_n-u\right|_{m(x),r(x)} \\
\leq\ & c_{12} \left\|u_n\right\| \left|u_n-u\right|_{m(x),r(x)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.12.2'den $n \to \infty$ iken $\left|u_n-u\right|_{m(x),r(x)} \to 0$ olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} m(x)\left|u_n\right|^{r(x)-2} u_n(u_n-u)dx = 0$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} n(x)\left|u_n\right|^{s(x)-2} u_n(u_n-u)dx = 0$$

yazılabilir. Bütün bu bilgiler (5.2.4) eşitliğinde kullanılırsa

$$\int\limits_{\Omega} a(x,\nabla u_n)\left(\nabla u_n-\nabla u\right)dx = 0$$

eşitliği elde edilir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \Lambda'(u_n), u_n-u\right\rangle = 0$$

olur. Yukarıdaki son eşitlikte, Lemma 5.1.2'deki **v)** özelliği kullanılırsa

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left\langle \Lambda'(u_n), u-u_n\right\rangle \leq \lim_{n\to\infty}\left(\Lambda\left(u\right)-\Lambda(u_n)\right) = \Lambda\left(u\right) - \lim_{n\to\infty}\Lambda(u_n)$$

yada

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda(u_n) \leq \Lambda\left(u\right) \qquad (5.2.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 5.1.2'deki **iii)** özelliği ve (5.2.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(u_n) = \Lambda(u) \qquad (5.2.6)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi de X uzayında $u_n \to u$ olduğunu göstereceğiz. Aksine, X uzayında (u_n) dizisi (u)'ya güçlü yakınsak olmasın. O zaman, $\varepsilon_1 > 0$ için $\|u_{n_k} - u\| \geq \varepsilon_1$ olacak şekilde (u_n)'nin bir (u_{n_k}) alt dizisi vardır. Diğer taraftan, Lemma 5.1.2'deki **iv)** özelliğinden ve (5.2.6) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}\Lambda(u) + \frac{1}{2}\Lambda(u_{n_k}) - \Lambda(\frac{u_{n_k}+u}{2}) \geq k_1 \|u_{n_k} - u\|^{p^-} \geq k_1 \varepsilon_1^{p^-}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $k \to \infty$ alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda(\frac{u_{n_k}+u}{2}) \leq \Lambda(u) - k_1 \varepsilon_1^{p^-} \qquad (5.2.7)$$

elde edilir. Ayrıca, X uzayında $\{\frac{u_{n_k}+u}{2}\} \rightharpoonup u$ olur. Lemma 5.1.2'deki **iii)** özelliğinden

$$\Lambda(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(\frac{u_{n_k}+u}{2})$$

elde edilir ve bu ise (5.2.7) ile çelişir. Sonuç olarak; X uzayında $u_n \to u$ olur. $\square$

Teorem 5.2.2. Eğer $1 < r(x) < p(x) < s(x) < p^*(x)$ ve $(\mathbf{A1}) - (\mathbf{A4})$, $(\mathbf{M})$ ve $(\mathbf{N})$ koşulları sağlanıyorsa, o zaman (P) probleminin X'de sıfırdan farklı en az iki tane zayıf çözümü vardır.

İspat: Teorem 3.4.12 ve Lemma 5.2.1'den hareketle (P)'nin bir $u_1 \in X$ sıfırdan farklı bir zayıf çözümünün olduğunu elde ederiz. Şimdi $u_1 \neq u_2$ olacak şekilde ikinci bir $u_2 \in X$ zayıf çözümün varlığını göstereceğiz.

Lemma 5.2.1'den orjin merkezli ve ρ yarıçaplı bir $B_\rho(0) \subset X$ yuvarı için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} I > 0.$$

Diğer taraftan, Lemma 5.2.1'deki **v)** özelliğinden hareketle yeterince küçük tüm $t > 0$ değerleri için $I(t\varphi) < 0$ olacak şekilde bir $\varphi \in X$ elemanı vardır. Ayrıca, (5.2.2) özelliği tüm $u \in X$ fonksiyonları için sağlandığından, yani

$$I(u) \geq \frac{1}{p^+} ||u||^{p^-} - \frac{c_8}{r^-}\left(||u||^{r^-} + ||u||^{r^+}\right) - \frac{c_7}{s^-}\left(||u||^{s^-} + ||u||^{s^+}\right)$$

eşitsizlik sağlandığından

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} I < 0$$

olur. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç elde edilir

$$0 < \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} I - \inf_{B_\rho(0)} I.$$

$I : \overline{B_\rho\,(0)} \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli için Ekeland varyasyonel prensibi uygulanırsa

$$I(u_\varepsilon) < \inf_{\overline{B_\rho(0)}} I + \varepsilon$$

ve

$$I(u_\varepsilon) < I\,(u) + \varepsilon\,\|u - u_\varepsilon\|\,,\; u_\varepsilon \neq u$$

olacak şekilde bir $u_\varepsilon \in \overline{B_\rho\,(0)}$ bulunabilir. Bununla birlikte

$$I(u_\varepsilon) < \inf_{\overline{B_\rho(0)}} I + \varepsilon < \inf_{B_\rho(0)} I + \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} I$$

eşitsizliği hesaba katılırsa $u_\varepsilon \in B_\rho\,(0)$ olduğu elde edilir. Şimdi $\Phi\,(u) = I\,(u) + \varepsilon\,\|u - u_\varepsilon\|$ olacak şekilde bir $\Phi : \overline{B_\rho\,(0)} \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Açıktır ki u_ε noktası Φ için bir minimun noktasıdır ve bu yüzden, yeterince küçük $t > 0$ değeri ve herhangi $\upsilon \in B_\rho\,(0)$ için

$$\frac{\Phi(u_\varepsilon + t\upsilon) - \Phi(u_\varepsilon)}{t} \geq 0$$

olur.Yukarıdaki ifadeden

$$\frac{I(u_\varepsilon + t\upsilon) - I(u_\varepsilon)}{t} + \varepsilon\,\|\upsilon\| \geq 0$$

olduğu elde edilir. Şimdi $t \to 0$ alınırsa

$$\langle I'(u_\varepsilon), \upsilon\rangle + \varepsilon\,\|\upsilon\| > 0$$

eşitsizliği elde edilirki bu $\|I'(u_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$I(u_n) \to \underline{c} \quad \text{ve} \quad I'(u_n) \to 0$$

olacak şekilde bir $(u_n) \subset B_\rho\,(0)$ dizinin var olduğu anlaşılır.

I fonksiyonelinin X üzerinde Palais-Smale koşulunu sağlamasından hareketle (u_n) dizisinin bir $u_2 \in X$ elemanına güçlü yakınsadığı anlaşılır. Dolayısıyla, u_2 fonksiyonu (P) için bir zayıf çözümdür ve $0 > \underline{c} = I\,(u_2)$ olduğu da hesaba katılırsa u_2 nin sıfırdan farklı olduğu ortaya çıkar.

Bununla birlikte,

$$I(u_1) = \overline{c} > 0 > \underline{c} = I(u_2)$$

eşitsizlği hesaba katılırsa $u_1 \neq u_2$ olduğu açıkça ortaya çıkar. $\square$

Teorem 5.2.3. Eğer $1 < r(x) < p(x) < s(x) < p^*(x)$ ve $(\mathbf{A1}) - (\mathbf{A5})$, $(\mathbf{M})$ ve $(\mathbf{N})$ koşulları sağlanıyorsa, o zaman (P) probleminin X'de sıfırdan farklı sonsuz tane zayıf çözümü vardır.

İspat: (**A5**) koşulundan I fonksiyonelinin çift olduğunun sonucuna varabiliriz. Teorem 3.4.13 göstermek için Teorem 3.4.13'deki **ii)** özelliğini göstermek yeterlidir. Lemma 5.1.1'deki **i)** özelliğinden,

$$\Lambda(u) \leq \int_{\Omega} A(x,\nabla u)dx \leq c_2 \|u\| + c_1 \|u\|^{p^+}$$

olur. Bu durumda

$$I(u_n) \leq c_2 \|u_n\| + c_1 \|u_n\|^{p^+} - \frac{1}{s^+}\int_{\Omega} n(x) |u_n|^{s(x)} dx$$

eşitsizliği yazılabilir. O zaman

$$\begin{aligned} I(u_n) &\leq c_2 \|u_n\| + c_1 \|u_n\|^{p^+} - \frac{1}{s^+}\int_{\Omega/\{x\in\Omega:|u(x)|<1\}} n(x) |u_n|^{s(x)} dx \\ &\leq c_2 \|u_n\| + c_1 \|u_n\|^{p^+} - \frac{1}{s^+}\int_{\Omega/\{x\in\Omega:|u(x)|<1\}} n(x) |u_n|^{s^-} dx \\ &\leq c_2 \|u_n\| + c_1 \|u_n\|^{p^+} - \frac{1}{s^+}\int_{\Omega} n(x) |u_n|^{s^-} dx \\ &\quad + \frac{1}{s^+}\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|<1\}} n(x) |u_n|^{s^-} dx. \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|<1\}} n(x) |u_n|^{s^-} dx \leq c_{13}$$

eşitsizliğini sağlayacak $c_{13} > 0$ sabiti vardır. Bu durumda, her $u \in X$ için

$$I(u_n) \leq c_2 \|u_n\| + c_1 \|u_n\|^{p^+} - \frac{1}{s^+}\int_{\Omega} n(x) |u_n|^{s^-} dx + c_{13}$$

olur.

$|\cdot|_{n(x),s^-} : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini şeklinde tanımlarsak ve bu fonksiyonelin X uzayındaki normu

$$|u|_{n(x),s^-} = \left(\int_{\Omega} n(x) |u|^{s^-} dx\right)^{1/s^-}$$

olur. X_1 uzayı X uzayının sonlu buyutlu bir alt uzayı olduğu için $|\cdot|_{n(x),s^-}$ ve $\|\cdot\|$ normları denktir. Bu durumda

$$\|u\| \quad \leq \quad C\,|u|_{n(x),s^-}\,,\ \forall u \in X_1$$

olacak şekilde $C = C\,(X_1) > 0$ sabiti vardır. O zaman her $u \in X_1$ için

$$I(u_n) \quad \leq \quad c_2\,||u_n|| + c_1\,||u_n||^{p^+} - c_{14}\,\|u_n\|^{s^-} + c_{13},$$

eşitsizliğini sağlayacak $c_{14} > 0$ sabiti vardır. Dolayısıyla, $p^+ < s^-$ koşulundan $\{u \in X_1 : I\,(u) \geq 0\}$ sınırlı olduğu elde edilir. Sonuç olarak; I fonksiyoneli sınırsız olan bir kritik noktalar dizisine sahiptir. $\square$

6. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının özünü oluşturan dördüncü bölümde, standart olmayan büyüme koşullu Dirichlet sınır değer koşullarına sahip,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) = \lambda a(x) |u|^{q(x)-2} u + b(x) |u|^{h(x)-2} u \ ; \ x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ; \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (E_\lambda)$$

elliptik denkleminin varyasyonel yaklaşımla, Nehari Manifold metodu kullanılarak en az iki pozitif çözümünün olduğu gösterilmiştir.

İleri çalışma olarak, yukarıdaki (E_λ) denkleminin sonsuz bir çözüm dizisine sahip olduğu yine Nehari Manifold metodu kullanılarak gösterilebilir.

7. BÖLÜM

KAYNAKLAR

[1] Acerbi, E., Mingione, G. 2000. Regularity results for stationary electrorheological fluids. Arch. Ration. Mech. Anal. 164, 213-259 .

[2] Adams, R. A. 1975. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

[3] Adams, R. A. Fournier, J.J. 2003. Sobolev Space. Elsevier Science.

[4] Afrouzi, G. A., Mahdavi, S., Naghizadeh, Z. 2007. The Nehari Manifold for p-Laplacian Equation with Dirichlet Boundary Condition. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 12, No. 2, 143–155.

[5] Alves, C. O., Souto, M. A. S. 2005. Existence of Solutions for a Class of Problems involving the $p(x)$-Laplacian, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl., 66, 17–32.

[6] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H. 1973. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal.14, 349-381.

[7] Bocardo, L., Marcellini, P., Sbordone, C. 1990. L^{∞}-regularity for variational problems with sharp nonstandard growth conditions. Boll. Un. Math. Ital. A (7) 4 , 219-225.

[8] Boureanu, M. M. 2006. Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$-Laplacian operator. Electronic Journal of Differential Equations, 97, 1–10.

[9] Brown K. J., Wu, T-F. 2003. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. Journal of Differential Equations, 193, pp. 481–499.

[10] Brown, K. J., Zhang, Y. 2003. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. J. Diff. Equ., 193, pp. 481–499.

[11] Brezis, H. 1992. Analyse fonctionnelle: théorie et applications. Paris: Masson.

[12] Buenrostro, G. I., Garza, G. L. 2005. A resonance problem for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2005, No. 112, pp. 1-8.

[13] Buhrii, O. M., Mashiyev, R. A. 2009. Uniqueness of solutions of the parabolic variation inequality with variable exponent of nonlinearity. Nonlinear Analysis-Theory Methods& Appl.,(70) 2325-2331.

[14] Calotă, L. 2008. On some quasilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents and non-standard growth conditions. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 15, 249-256 .

[15] Çekiç, B. 2005. Degisken Üstlü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipli Esitsizlikler. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır. 95.

[16] Diening, L. 2002. Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids. Ph.D. thesis, University of Frieburg, Germany.

[17] Drabek, P., Kufner, A., Nicolosi, F. 1996. Nonlinear Elliptic equations. University of West Bohemia in Pilsen.

[18] Dai, G., Hao, R. 2009. Existence of solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation, J. Math. Anal. Appl. 359, 275–284

[19] Duc, D. M., Vu, N.T. 2005. Nonuniformly elliptic equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal. 61, 1483-1495.

[20] Duc, D. M. 1989. Nonlinear singular elliptic equations. J. London Math. Soc. (2) 40, 420-440.

[21] Edmunds, D., Răkosnik, J. 2000. Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Math. 143, 267-293.

[22] Fan, X. L., Shen, J. S., Zhao, D. 2001. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 262, 749–760 .

[23] Fan, X. L., Zhao, D. 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 263, 424–446.

[24] Fan, X. L., Zhang, Q. H. 2003. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal. 52,1843-1852 .

[25] Fan, X. L., Han, X. 2004. Existence and multiplicity of solutions for $p(x)-$Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. 59, 173–188.

[26] Fan, X. L. 2005. Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients. J. Math. Anal. Appl. 312, 464–477 .

[27] Fan, X. L., Zhang, Q., Zhao, D. 2005. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem. J. Math. Anal. Appl. 302, 306-317. MR2107835 (2005m:35213).

[28] Harjulehto, P., Hästö, P. 2008. Sobolev inequalities with variable exponent attaining the values 1 and n. Publ. Mat. 52, 347-363

[29] Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M., Varonen, S. 2006. The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values. Potential Anal. 25, no. 3, 205-222 .

[30] Hästö, P. 2007. The $p(x)$-Laplacian and applications, J. Anal. 15 , 53-62.

[31] Hudzik, H. 1976. A generalization of Sobolev spaces. II.. Funct. Approx. Comment. Math. 3, 77–85.

[32] Hudzik, H. 1977. On problem of density of $C_0^\infty(\Omega)$ in generalized Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\Omega)$ for every open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. comment. Math. 20, 65-78.

[33] Hudzik, H. 1979. Density of C_0^∞ $(\mathbb{R}^n)$ in generelized Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\mathbb{R}^n)$. Funct. Approx. comment. Math. 7, 15-21.

[34] Kami´nska, A.1982. Flat Orlicz–Musielak sequence spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. 30, no.7-8 347–352.

[35] Kovăčik, O., Răkosnik, J. 1991. On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Czechoslovak Math. J. 41 (116), 592–618 .

[36] Marcellini, P. 1989. Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non-standard growth conditions. Arch. Rational Mech Anal. 105, 267-284.

[37] Marcellini, P. 1991. Regularity and existence of solutions of elliptic equation with p, q −growth conditions. J. Differential Equations 50, no.1, 1–30.

[38] Mashiyev, R. A, Ogras, S., Yucedag, Z., Avci, M. 2010. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplacian equation. J. Korean Math. Soc. 47 , No. 4, 845-860.

[39] Mihăilescu, M., Rădulescu, V. 2006. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. Proceedings of the Royal Society A. 462, 2625-2641 .

[40] Mihăilescu, M. 2006. Elliptic problems in variable exponent spaces. Austral. Math. Soc. 74, 197-206 .

[41] Mihăilescu, M. Existence and multiplicity of solutions for an elliptic equation with $p(x)$-growth conditions, Glasgow Math. J. 48 (2006), 411-418.

[42] Mihăilescu, M., Rădulescu, V. 2007. On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent, Proceedings Amer. Math. Soc. 135, No. 9, 2929-2937 .

[43] Mihăilescu, M. 2008. On a class of nonlınear problems involving a -Laplace type operator. Czechoslovak Math. J., 58 (133), 155–172.

[44] Musayev , B., Alp, M. 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Şti., Kütahya

[45] Musielak, J. Orlicz, W. 1959. On modular spaces. Studia Math. 18, 49–65.

[46] Nakano, H. 1950. Modulared Semi-ordered Linear Spaces. Tokyo. Maruzen Co. Ltd.

[47] Nakano, H. 1951. Topology and Topological Linear Spaces. Maruzen Co., Ltd. Tokyo.

[48] Napoli, P. D., Mariani, M. C. 2003. Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type, Nonlinear Anal. 54, 1205-1219.

[49] Ogras, S., Mashiyev, R. A., Avci, M., Yucedag, Z. 2008. Existence of Solutions for a Class of Elliptic Systems in $\mathbb{R}^N$ Involving the $(p(x), q(x))$-Laplacian. J. Ineq. Appl. Vol. doi:10.1155/2008/612938, pp.16.

[50] Orlicz, W. 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math. 3, 200–212 .

[51] Papageorgiou, N. S., Kyritsi-Yiallourou S. T. 2009. Handbook of Applied Analysis. Springer Dordrecht Heidelberg, London.

[52] Rajagopal, K. L., Růžička, M. 2001. Mathematical modelling of electrorheological fluids. Continuum Mech. Thermdyn 13, 59-78.

[53] Růžička, M. 2000. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. Berlin. Springer-Verlag.

[54] Samko, S., Vakulov, B. 2005. Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, J. Math. Anal. Appl. 310, 229-246.

[55] Schechter, M. 2007. The use of cerami sequences in critical point theory. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Vol. 2007,,Article ID 58948, 28 p.

[56] Sharapudinov, I. I. 1978. On the topology of the space $L^{p(t)}([0;1])$. Math. Notes 26 (1979), no. 3–4, 796–806.[Translation of Mat. Zametki 26, no. 4, 613–632.]

[57] Toan, H. Q. , Ngô, Q. A. 2009. Multiplicity of weak solutions for a class of nonuniformly elliptic equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal. 70 (4), 1536-1546.

[58] Trudinger, N. S. 1967. On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations, Comm. Pure Applied Math. 20, 721-747.

[59] Tsenov, I. V. 1961. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s, (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 7, 25-37.

[60] Vu, N. T. 2005. Mountain pass theorem and nonuniformly elliptic equations, Vietnam J. of Math. 33:4, 391–408.

[61] Yao, J. 2006. Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)-$Laplacian operators. Nonlinear Anal. accepted 11 December 2006.

[62] Zang, A. 2008. $p(x)-$Laplacian equations satisfying Cerami condition, J. Math. Anal. Appl. 337, 547-555.

[63] Zhang, X., Liu, X. 2007. The local boundedness and Harnack inequality of $p(x)-$Laplacian equation. J. Math. Anal. Appl. 332, 209-219.

[64] Zhikov, V. V. 1986. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory (Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50, 675-710. MR0864171 (88a:49026).

[65] Wang, H. C. 2002. On the compactness and the minimization. Taiwanese J. Math. vol. 6, no. 4, pp. 441-464, December 2002.

[66] Willem, M. 1996. Minimax Theorems, Birkhauser, Boston.

[67] Winslow, W. M. 1949. Induced fibration of suspensions, J. Appl. Physics 20, 1137-1140.

[68] Wu, T. F. 2007. Multiplicity of Positive Solution of p-Laplacian problems with sign-changing weight functions, Int. J. Math. Anal. Vol. 1, No.12, 557 - 563.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Zehra YÜCEDAĞ
Doğum Tarih	: 14.09.1979 (Dicle)
Ünvanı	: Öğretim Görevlisi
Bölümü	: Dicle Üniversitesi MYO İktisadi ve İdari Proğramlar Muhasebe ve Vergi Uygulamaları Bölümü
Çalıştığı Kurumlar	: Milli Eğitim Bakanlığı Namık Kemal Lisesi 2001-2009 (Diyarbakır/Merkez)

EĞİTİMİ

İlkokul	: Ali Emiri İlkokulu
Ortaokul	: Ali Emiri Ortaokulu
Lise	: Ziya Gökalp Lisesi
Lisans	: Dicle Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2001)
Yüksek Lisans	: Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2006)
e-mail.	: zehra@dicle.edu.tr