T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU ELİPTİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL YAKLAŞIM ALTINDA İNCELENMESİ

Mustafa AVCİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran–2011

DİYARBAKIR

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Mustafa AVCİ tarafından yapılan "STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU ELİPTİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL YAKLAŞIM ALTINDA İNCELENMESİ" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV (2.Danışman)

Üye : Prof. Dr. Ali YILMAZ

Üye : Prof. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 10/06/2011

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20...

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım Hocam Sayın **Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ**'a, doktora konusunda beni yetiştiren ve bu tezin oluşturulmasında bana en önemli desteği veren Hocam Sayın **Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV**'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen Hocam Sayın **Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ**'e teşekkür ederim.

Bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (DUAPK–2008–59–74) teşekkür ederim.

Canımdan çok sevdiğim çocuklarım DOĞU ve DARA'ya…

İÇİNDEKİLER

ÖZET

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU ELİPTİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL YAKLAŞIMLA ELDE EDİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa AVCİ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

İlk bölümde üzerinde çalışılan uzayın gelişimi ve literatür hakkında bilgi verilmiştir.
İkinci bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bilgi verilmiştir.
Üçüncü bölümde varyasyonel yaklaşım ve varyasyonel yaklaşımla ilgili temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, ayrıca varyasyonel yaklaşımın uygulandığı bazı problem türlerinden bahsedilmiştir.
Dördüncü bölümde eliptik bir denklem sistemi varyasyonel yaklaşımla incelenerek, sıfırdan farklı çözümler Mountain-Pass Teoremi ve Cerami koşulu kullanılarak elde edilmiştir.
Beşinci bölümde Kirchhoff problemi varyasyonel yaklaşımla incelenerek, sıfırdan farklı çözümler Krasnoselskii Genus Teoremi ve Palais-Smale koşulu yardımıyla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Lebesgue ve Sobolev Uzayları, Varyasyonel Yaklaşım, Standart Olmayan Büyüme Koşulu, Mountain-Pass Teoremi, Krasnoselskii Genus Teoremi, Cerami Koşulu, Palais-Smale Koşulu.

ABSTRACT

THE SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS INVOLVING NONSTANDARD GROWTH CONDITION VIA VARIATIONAL APPROACH

PhD THESIS

Mustafa AVCİ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2011

In the first chapter, the necessary knowledge about development of the space and literature are given.
In the second chapter, some basic definitions and theorems are given which are the necessary for properly understanding of the following chapters. Moreover, the Lebesgue and Sobolev space are mentioned.
In the third chapter, variational approach and the related basic concepts, definitions and theorems are given. Furthermore, applications of variational approach to the some problem types are given.
In the fourth chapter, in view of variational approach, by using Mountain Pass Theorem and Cerami condition the the existence of nontrivial solutions of an elliptic system are obtained.
In the fifth chapter, in view of variational approach, by using Krasnoselskii's Genus Theorem and Palais-Smale condition the the existence of nontrivial solutions of a Kirchhoff equation are obtained.

Key Words: Lebesgue and Sobolev Spaces, Variational Approach, Nonstandar Growth, Condition, Mountain-Pass Theorem, Krasnoselskii's Genus Theorem, Cerami Condition, Palais-Smale condition.

1. GİRİŞ

Birçok materyal ve problem klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları kullanılarak yeterli doğrulukla matematiksel olarak modellenebilir. Ancak bazı nonhomojen materyallerin altta yatan veya etkin enerjisinin (underlying energy) doğru şekilde ifade edilebilmesi için p üstünün *değişken* olması gerekir. Bu tür materyallere örnek olarak electrorheological akışkanlar (ER akışkanlar) verilebilir. ER akışkanlar teorisiyle ilgi ilk önemli çalışma Winslow (1949) tarafından yapılmıştır. ER akışkanların matematiksel modeli bazı yazarlar tarafından verilmiştir [(Růžička 2000), (Rajagopal ve Růžička 2001)]. Elektromanyetik alanlar ile hareketli akışkanlar arasındaki hassas etkileşimi hesaba katan bu model aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} S\left(u\right) + \left(u \cdot \nabla\right) u + \nabla \pi = f \tag{1.1}$$

burada $u : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$, akışkanın hızını veren fonksiyonu; $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ gradient operatörünü; $\pi : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$ basınç fonksiyonunu; $f : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$, harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonunu gösterir. $S : W^{1,1}_{loc} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ fonksiyonu ekstra stres tensörü olup, bu tensör

$$S\left(u\right)\left(x\right) = (1 + \left|Du\left(x\right)\right|^2)^{(p(x)-2)/2} Du\left(x\right) \tag{1.2}$$

şeklinde verilir, burada $Du = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right)$, u fonksiyonunun gradientinin simetrik kısmı ve μ bir ağırlık fonksiyonudur. Dikkat edilirse yukarıda verilen stres tensöründe p üstü, fonksiyon (değişken) olarak alınmıştır. Eğer (1.2)'de $p\left(x\right) = 2$ alınırsa, (1.1) denklemi boyutlandırılmamış Navier-Stokes denklemine dönüşür. Bununla birlikte, (1.1) denklemi bilinen Laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türeve sahip terim için, $\lambda = 1$ seçildiğinde elde edilen

$$\operatorname{div}((\lambda + \left|Du\left(x\right)\right|^2)^{(p(x)-2)/2} Du\left(x\right)) \tag{1.3}$$

ifadesi $p\left(x\right)-$Laplace denklemine oldukça benzerdir. Gerçekten, dejenere durumda yani $\lambda = 0$ iken (1.3), aşağıda (1.6)'da tanımlanan $p\left(x\right)-$Laplace denklemine dünüşür.

ER akışkanlar, harici bir elektromanyetik alanın etkisiyle mekanik özellikleri şiddetli bir şekilde değiştirebilme (katı-sıvı hale geçiş) özelliğine sahip akışkanlardır. Bu tür akışkanlarda viscosity (akmazlık) ölçüsü çok büyük sayılara kadar çıkabilmektedir. Bu durumda; Du, u hız alanının gradientinin simetrik kısmını ve p elektrik alanına bağlı materyal fonksiyonunu göstermek üzere, etkin enerji $\int_\Omega \left|Du\left(x\right)\right|^{p(x)} dx$ ile verilir. (1.1) ile verilen model denklemde p sabit iken etkin enerji $\int_\Omega \left|Du\left(x\right)\right|^p dx$ ile ifade edilir. Bu durumda yukarıdaki stres tensöründe her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p üstünün alacağı değerler eşit kabul edilir.

Bu tür model denklemler klasik Lebesgue (L^p) ve Sobolev uzayları ($W^{m,p}$) kullanılarak yeterli doğrulukla oluşturulabilmektedir. Ancak; p üstü ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon olarak seçildiğinde, o zaman etkin enerji $\int_\Omega |Du(x)|^{p(x)}\,dx$ ile ifade edilerek, stres tensöründe herbir $x \in \mathbb{R}^N$ için p üstünün alacağı değerler farklı olur ki bu nonhomojen materyallerin doğal yapısıyla uyumlu bir durum teşkil eder. Bu durumda klasik Lebesgue-Sobolev uzayları yeterli olmaz. Dolaysıyla değişken üstlü Lebesgue-Sobolev uzaylarına ($L^{p(x)}(\Omega)$ ve $W^{m,p(x)}(\Omega)$) ihtiyaç duyulur. Bu uzaylara ait detaylı bilgi sonraki bölümlerde verilecektir.

Değişken üstlü uzaya geçişin gerekliliği, diğer önemli bir uygulama alanı olan imaj iyileştirme işleminin matematiksel modellemesinde de ortaya çıkmaktadır. Buradaki temel yaklaşım şudur; I düzlemdeki bir diktörgensel Ω bölgesi üzerinde tanımlanan, gerçek görüntüden oluşan ancak istenmeyen noktacıklar (noise) tarafından bozulmuş, gri (bulanık) alanları temsil eden ve $I = T + \eta$ (T=orjinal görüntü, η=noise) şeklinde toplamsal olan bir fonksiyonel olarak tanımlansın. Buna göre, görüntüdeki bozulmaları ortadan kaldırmak için *veri girişi düzgünleştirme işlemi* denen bir işlem uygulanır. Bu işlem

$$\min\left\{J_{\mathbf{2}}(u) = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 + |u(x) - I(x)|^2)dx\right\}$$

fonksiyoneli minimize edilerek gerçekleştirilir. Burada $\int_\Omega |\nabla u(x)|\,dx$ terimi görüntüdeki iyileştirmeyi-düzgünleştirmeyi sağlayan terimdir. Ne yazık ki bu işlem görüntüdeki detaylara zarar verdiğinden kullanışlı bir yöntem olarak kabul edilmez. İmaj iyileştirmede diğer bir yaklaşım *toplam varyasyon düzgünleştirme işlemidir.* Toplam varyasyon düzgünleştirme işlemi

$$\min\left\{J_{\mathbf{1}}(u) = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^1 + |u(x) - I(x)|^2)dx\right\}$$

fonksiyoneli minimize edilerek gerçekleştirilir. Bu yöntem görüntüdeki kenarların-hatların korunması-dağılmaması açısından çok kullanışlı bir yöntemdir; ancak bu yöntem uygulandığında orjinal görüntüde daha önce olmayan yeni kenarlar oluşur. Dolaysıyla bu yöntemin de pek faydalı olduğu söylenemez.

Chen ve ark. (2006) tarafından yukarıdaki iki yöntemin zayıf ve güçlü yanları birlikte değerlendirilerek, standart olmayan büyüme koşuluna dayalı ve çok daha kullanışlı olan yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem

$$\min\left\{J(u) = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x) - I(x)|^2)dx\right\}$$

şeklindeki fonksiyonelin minimize edilmesine dayanır. Burada p, 1 ile 2 arasında değişen bir fonksiyon olmak üzere, eğer görüntüde kenarlar oluşuyorsa p fonksiyonunun değeri 1 sayısına, kenarlar oluşmuyorsa 2 sayısına yaklaşır. Bununla birlikte, oluşması muhtemel kenarların yaklaşık yerini tespit edebilmek için de veri girişi düzgünleştirilerek gradientin nerede büyük olduğuna bakılır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $F \in C^1\left(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ olmak üzere,

$$\int_\Omega F\left(x, \nabla u\left(x\right)\right) dx$$

integralinde F fonksiyonu; $p : \Omega \to (1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \leq F\left(x, t\right) \leq c\left(|t|^{p(x)} + 1\right) \tag{1.4}$$

olacak şekilde seçilirse, F fonksiyonu *standart olmayan büyüme koşuluna* veya kısaca $p\left(x\right)-$*büyüme koşuluna* sahiptir denir. Standart olmayan büyüme koşuluna sahip fonksiyonları içeren denklemlere de *standart olmayan büyüme koşullu denklemler* denir. Eğer F fonksiyonu; $p, q : \Omega \to (1, \infty)$, $1 < p\left(x\right) < q\left(x\right)$ özelliğindeki ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \leq F\left(x, t\right) \leq c\left(|t|^{q(x)} + 1\right) \tag{1.5}$$

olacak şekilde seçilirse, F fonksiyonu $\left(p\left(x\right), q\left(x\right)\right)-$*büyüme koşuluna* sahiptir denir (Marcellini 1991). (1.5) eşitsizliği (1.4) eşitsizliğine göre daha esnek bir koşuldur.

$|t|^{p(x)-2}\, t = |t|^{p(x)-1}\mathrm{sgn}t$ ve $p\left(x\right) > 1$ olmak üzere, $p\left(x\right)-$*Laplace operatörü*

$$\Delta_{p(x)} u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_n}\right)^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}\right)$$

şeklinde veya $\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right| = \langle \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \rangle = (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x)}{\partial x_i})^2)^{1/2}$ alınarak

$$\Delta_{p(x)} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2} \frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}\right) = \mathrm{div}(\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p(x)-2} \nabla u\left(x\right))$$

biçiminde tanımlanır.

$\int_\Omega F\left(x, \nabla u\left(x\right)\right) dx$ enerji integrali $p\left(x\right)-$büyüme koşuluna sahip iken, örneğin $\int_\Omega \left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p(x)} dx$ olarak seçildiğinde

$$\frac{\partial F\left(x, \nabla u\left(x\right)\right)}{\partial u\left(x\right)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F\left(x, \nabla u\left(x\right)\right)}{\partial\left(\nabla u\left(x\right)\right)}\right) = 0$$

şeklindeki Euler-Lagrange denklemine göre düzenlenirse

$$\Delta_{p(x)} u = \mathrm{div}(\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p(x)-2} \nabla u\left(x\right)) = 0 \tag{1.6}$$

biçiminde tanımlanan ve $p(x)-$*Laplace denklemi* olarak adlandırılan denklem elde edilir. Dikkat edilirse $\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} dx$ integralinde $p(x) = p =$*sabit* olarak seçilirse

$$\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) = 0 \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanan ve $p-$*Laplace denklemi* olarak adlandırılan denklem elde edilir.

Ve yine $\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} dx$ integralinde $p(x) = 2$ olarak seçilirse

$$\Delta u = \text{div}(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0 \tag{1.8}$$

şeklindeki $2-$*boyutlu Laplace denklemi* elde edilir.

Belirtmekte yarar vardır ki (1.6), (1.7) ve (1.8) denklemleri arasında önemli bazı yapısal farklılıklar mevcuttur. Laplace denklemi lineerdir, yani eğer u ve v fonksiyonları (1.8) denklemi için bir çözümü ise o zaman, λ ve μ sabit olmak üzere, $\lambda u + \mu v$ da bir çözümdür. $p-$Laplace denklemi ise $p \neq 2$ durumunda lineer değildir; ancak *scalable*'dir, yani genel olarak $u + v$, (1.7) için bir çözüm değilken $\lambda u + \mu$ bir çözüm olabilmektedir. $p(x)-$Laplace denklemi için lineer olmama durumu $p-$Laplace denklemine göre çok daha güçlüdür, dolaysıyla (1.7) için bir çözüm olan $\lambda u + \mu$ nin (1.6) için bir çözüm olabilmesi için öncelikle $\lambda = \pm 1$ olması gerekmektedir. Bununla birlikte $p-$Laplace operatörü $(p-1)-$homojendir, yani her $\lambda > 0$ sayısı için $\Delta_p(\lambda u) = \lambda^{p-1}\Delta_p u$ dur; ancak $p(x) \neq$ *sabit* iken $p(x)-$Laplace operatörü homojen değildir. Bu durum bazı önemli sonuçlar/zorluklar doğurur, örneğin Lagrange Çarpanlar teorisi $p(x)-$Laplace operatörünü içeren denklemlere uygulanamaz.

Değişken üstlü Lebesgue ($L^{p(x)}$) ve Sobolev ($W^{m,p(x)}$)($p(x)$ ölçülebilir pozitif reel-değerli bir fonksiyon, m pozitif bir tam sayı) uzayları literatürde ilk defa, Orlicz (1931) tarafından ele alınmıştır. Orlicz bu çalışmasında sonra kendi ismi ile anılan Orlicz fonksiyon uzayları teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Orlicz uzayları u, Ω bölgesinde ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon olmak üzere en az bir $\lambda > 0$ ve koşulları bilinen bir ϕ fonksiyonu için $\rho(\lambda u) = \int_\Omega \phi(\lambda |u(x)|) dx < \infty$ olacak şekildeki fonksiyonlardan oluşur (Hudzik 1883). Ek olarak, eğer ρ fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da modüler uzay adı verilir. Bu uzaylar ilk defa sistematik olarak Nakano (1950,1951) tarafından çalışılmış ve değişken üstlü Lebesgue uzayı daha genel uzayların bir örneği olarak göz önüne alınmıştır. Daha sonra, özellikle Musielak (1983) tarafından modüler uzaylar incelenmiştir. Eğer yukarıdaki ϕ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda genelleştirilmiş Orlicz uzayları veya Musielak Orlicz uzayları adı verilen daha genel uzaylar elde edilir. Reel aralıkta değişken üstlü Lebesgue uzayları, bağımsız olarak Rus araştırmacılar özellikle de Tsenov (1961) ve Sharapudinov (1979) tarafından geliştirilmiştir. Sharapudinov u sabit bir fonksiyon; p, Ω bölgesinde ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon ve $v, L^{p(x)}([a,b])$'nin sonlu boyutlu alt uzayında değişmek üzere, $\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)} dx$ integralinin minimize problemiyle uğraşmıştır.

80'li yılların ortasında Zhikov (1987) tarafından değişken üstlü uzaylarla yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu $\int_{\Omega}(1+|\nabla u(x)|^2)^{p(x)}dx$ varyasyonel integralleri göz önüne alınarak araştırmalar için yeni bir çizgi oluşturmuştur.

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki büyük adım 90'lı yılların başlarında Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından atılmıştır. Bu makalede $\mathbb{R}^N$'de değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özelliği ortaya konmuş ve yazarlar değerlerini $[1,\infty]$ aralığında alan p fonksiyonu için değişken üstlü Lebesgue uzayının tanımını genişletmişlerdir. Son yıllarda çeşitli gelişmeler, değişken üstlü uzayların sistematik ve yoğun biçimde incelenmesine yol açmıştır. Bu doğrultuda ilk önce değişken üstlü uzaylarla nonstandart büyüme koşuluna ve coercive'lik özelliğine sahip varyasyonel integraller arasınada ilişki kurulmuş daha sonra da bu varyasyonel problemlerle ER akışkanların matematiksel modellemesi arasındaki ilişki tespit edilmiştir. Daha sonra lineer olmayan esneklik teorisi (nonlinear elasticity theory), gözenekli ortamlarda akış (flow in porous media) gibi farklı fiziksel durumlarla da bağlantı kurulmuştur [(Zhikov (1987), (Antonsev ve Shmarev 2005)].

Son yıllarda standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili çok yoğun ve yaygın çalışmalar yapılmaktadır öyle ki sadece son on yıl içersinde 100 den fazla araştırmacı tarafından 300 den fazla çalışma yayımlanmıştır (Harjulehto ve ark. 2010). Bu alanda şu ana kadar yayımlanmış olan bazı önemli çalışmalara aşağıda yer verilmiştir.

Zang (2008) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınmış, varyasyonel bir yaklaşımla, denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Mihăilescu (2006) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ silindirik simetriye sahip sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $g(x,u)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = g(x,u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, $g(x,u) = h(x)|u(x)|^{q(x)-2}u$ ve $g(x,u) = h(x)|u(x)|^{q(x)-2}u + f(x,u)$ özel durumları için varyasyonel bir yaklaşımla denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu gösterilmiştir.

Fan (2005) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı açık bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = \lambda a_1(x)\, g_1(x,u) + \mu a_2(x)\, g_2(x,u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Boureanu (2006) tarafından, $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N \geq 3)$ Lipschitz-sürekli fonksiyon ve $\forall x \in \mathbb{R}^N$ için $p(x) \geq 2$, $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + |u|^{p(x)-2} u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Calota (2008) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip açık sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $q(x) > 1$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda$ bir sabit, $1 < p < N$ ve $p^* = Np/(N-p)$ Sobolev kritik kuvveti olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = \lambda |u|^{q(x)-2} u + |u|^{p^*-2} u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Ogras ve ark. (2008) tarafından, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ için $1 < p(x), q(x) < N$ $(N \geq 2)$, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ ve $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u,v), & x \in \mathbb{R}^N \\ \\ -\Delta_{q(x)} v = \dfrac{\partial F}{\partial v}(x,u,v), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklem sistemi ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla sistemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Alves ve Souto (2005) tarafından, $p, q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bazı büyüme koşullarını sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $0 < \lambda$ bir parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, u \neq 0, \quad u \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Mashiyev ve ark. (2010) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $1 < q(x) < p(x) < h(x) < p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ ve $q, p, h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $a, b \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ fonksiyonları negatif olmayan ve Ω'da kompakt desteğe sahip ağırlık fonksiyonları olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda a(x) |u|^{q(x)-2} u + b(x) |u|^{h(x)-2} u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınarak, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin Nehari manifold'u üzerinde, sıfırdan farklı en az iki çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Mashiyev ve ark. (2011) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $1 < p(x) < N$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ve $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı büyüme koşullarını sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x, u), \ x \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)$ −Laplace Dirichlet denklemi ($p(x)$ −Kirchhoff denklemi) incelenerek, varyasyonel yaklaşım ve Krasnoselskii Genus teorisi yardımıyla bu denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu elde edilmiştir.

Fan ve ark. (2005) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge; $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = \lambda |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemin özdeğerleri incelenerek, $N = 1$ ve $N > 1$ durumları için denklemin birinci özdeğerinin sıfırdan farklı olmasını sağlayan gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Fan (2010) tarafından, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlı iki fonksiyonel, a sıfır noktasında singülerliğe sahip olabilen bir fonksiyon ve $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(u)\Delta_{p(x)}u = \mathcal{B}(u)\, f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)$ −Laplace Dirichlet denkleminin varyasyonel olmayan formu ve

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = b\left(\int_\Omega F(x,u)dx\right) f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$ −Kirchhoff denkleminin varyasyonel formu incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölüm, bu tez kapsamında bilinmesi gerekli olan bazı temel kavram, tanım ve teoremlerle birlikte üzerinde çalışılan Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkındaki bilgileri içermektedir.

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı

Tanım 2.1.1. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona *fonksiyonel* denir. Bir fonksiyonel,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\,;\ x_1, x_2 \in X \text{ ve } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

koşulu altında bir lineer dönüşüm olur.

Tanım 2.1.2. X, bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
özellikleri sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. Bu durumda elde edilen $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine (veya kısaca X'e) *normlu uzay*, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ *elemanının normu* denir.

Her $\|\cdot\|$ normu, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Bununla birlikte, bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanan norm altında vektör uzayı belirtir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\|\cdot\|_X$ ile X normlu uzayında tanımlanan norm kastedilecektir.

Tanım 2.1.3. X bir normlu uzay, $x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir *açık yuvar*,

$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir *kapalı yuvar* olarak tanımlanır. $A \subset X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $B_r(x) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A'ya *açık küme* denir.

Tanım 2.1.4. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, yani $n, m \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\|_X \to 0$ oluyorsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.5. Bir X normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X'in bir elemanına yakınıyorsa, X'e *tam uzay* veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.6. X normlu uzayında tanımlı tüm sürekli ve lineer fonksiyonellerin kümesine X normlu uzayının *duali* denir ve X' veya X^* ile gösterilir. X^* uzayı,

$$\|u\|_{X^*} = \sup_{x\neq 0, x\in X} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{X^*}$ normu ile bir Banach uzayı oluşturur.

Tanım 2.1.7. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *norma göre yakınsak* veya *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8. X normlu uzayında tanımlı farklı iki norm $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|\cdot\|_{X,2}$ olmak üzere, her $x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_{X,2} \leq \|x\|_{X,1} \leq c_2 \|x\|_{X,2}$$

olacak şekilde pozitif c_1, c_2 reel sayıları varsa o zaman $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|\cdot\|_{X,2}$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir. Dolaysıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|\cdot\|_{X,1}(\|\cdot\|_{X,2})$ normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy ise, $\|\cdot\|_{X,2}(\|\cdot\|_{X,1})$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy'dir.

Tanım 2.1.9. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$$

özelliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir L operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına *izometrik olarak izomorfizma* ve L operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında *izometrik izomorfizma* denir.

Bu özelliğe sahip uzaylar aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu durum $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.10. X normlu uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer $\overline{A} = X$ oluyorsa, A *kümesi* X *uzayında yoğundur* denir. Bununla birlikte A ve B, X normlu uzayının iki alt kümesi olmak üzere, eğer her bir $x \in B$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|x - y\|_X < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı varsa A kümesi B'de yoğundur denir.

Tanım 2.1.11. X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X normlu uzayına *ayrılabilir uzay* denir.

Tanım 2.1.12. X normlu uzay olmak üzere, $(X^*)^* = X^{**}$ şeklinde tanımlanan lineer vektör uzayına X'in *ikinci duali* denir.

Sabit bir $x \in X$ ve $f \in X^*$ için

$$\varphi_x(u) = f(x)$$

şeklinde bir φ_x fonksiyoneli tanımlansın. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden

$$C: \underset{x \longmapsto \varphi_x}{X \to X^{**}}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme *kanonik dönüşüm* denir. Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, o zaman X uzayına *yansımalı* (refleksif) uzay denir. X uzayı yansımalı ise $X = X^{**}$ olur.

Tanım 2.1.13. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to K$ şeklinde tanımlanan dönüşüm için, her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ olmak üzere,

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($K = \mathbb{C}$ iken $c, \overline{c}$'nin komplex eşleniği, $K = \mathbb{R}$ iken $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ dir),

iii) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$,

özellikleri sağlanıyorsa bu fonksiyona bir *iç çarpım* denir. Bu durumda $(X, \|\cdot\|_X)$ ikilisi, her $x \in X$ için

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan norm altında bir *iç çarpım uzayı* olur.

Tanım 2.1.14. Bir X iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi yine bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa X uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.1.15. N-boyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayındaki $x = (x_1, ..., x_N)$, $y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^N$ elemanlarının iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

şeklindedir. Bir $x \in \mathbb{R}^N$ elemanının normu ise

$$|x| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^{1/2}$$

ile tanımlanır. $\mathbb{R}^N$ uzayı, '$\cdot$' iç çarpımı altında bir Hilbert uzayı olur.

Tanım 2.1.16. X normlu uzayı üzerindeki *zayıf topoloji* (weak topology), X üzerindeki en zayıf topolojidir, öyle ki X^* dual uzayındaki her fonksiyon altında süreklilik korunur. X sonlu boyutlu olmadıkça X üzerindeki zayıf topoloji, norm topolojiden daha zayıftır.

Tanım 2.1.17. (x_n), X normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere, her $f \in X^*$ için $n \to \infty$ iken

$$f(x_n) \to f(x)$$

oluyorsa o zaman (x_n) dizisine, X normlu uzayında *zayıf yakınsak dizi* denir ve bu yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde gösterilir.

Not 2.1.18. (x_n), X normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere,

i) Eğer $x_n \to x$ ise, $x_n \rightharpoonup x$ dir (uzay sonlu boyutlu olmadıkça bu önermenin tersi genel olarak doğru değildir),

ii) Eğer $x_n \rightharpoonup x$ ise, $(\|x_n\|_X)$ dizisi sınırlıdır.

Eğer X normlu uzayı sonlu boyutlu ise, zayıf yakınsaklık ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır.

Tanım 2.1.19. A, X normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere, A'daki elemanlardan oluşan herhangi bir dizi, X'de yakınsak olan (A'daki bir elemana yakınsayan) bir alt diziye sahipse A'ya bir *dizisel kompakt küme* denir. Eğer A kümesinin kapanışı $\overline{A}$, X'de kompakt ise A'ya X'de *önkompakt küme* denir. A'daki elemanlardan oluşan herhangi bir dizi, X'de zayıf yakınsak olan (A'daki bir elemana yakınsayan) bir alt diziye sahipse A'ya *zayıf dizisel kompakt küme* denir.

Teorem 2.1.20. Bir X Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul X'deki bir $\overline{B_1}(0) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ kapalı yuvarının zayıf dizisel kompakt olmasıdır (Adams 1975).

Teorem 2.1.21. X normlu uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda verilen bir $\overline{B_1}(0) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ kapalı yuvarının kompakt olmasıdır (Musayev ve Alp 2000).

2.2. Operatörler

Tanım 2.2.1. X ve Y normlu uzayları verilsin. $L : D_L \subset X \to Y$ dönüşümü her bir $x \in D_L$ elemanını

$$L(x) = Lx = y$$

olacak şekilde Y uzayındaki bir tek y elemanıyla eşliyorsa, L'ye X üzerinde tanımlanmış bir *operatör* veya *dönüşüm*, D_L'ye ise L operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 2.2.2. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere; $L : X \to Y$ operatörü, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x \in X$ elemanı verilsin. n'nin yeterince büyük değerlerinde ($n \to \infty$ iken)

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \text{ iken } \|Lx_n - Lx\|_Y \to 0$$

oluyorsa L operatörü x *noktasında süreklidir* denir. Eğer L, X'deki her noktada sürekli ise L'ye *sürekli operatör* denir.

Tanım 2.2.3. X ve Y normlu uzayları ve $L : X \to Y$ operatörü verilsin. $A \subset X$ alt kümesi sınırlı iken $L(A)$, Y'de sınırlı ise L operatörüne *sınırlı operatör* denir. Bir başka ifadeyle, her $x \in X$ için

$$\|Lx\|_Y \leq c\,\|x\|_X \tag{2.2.1}$$

olacak şekilde pozitif bir c reel sayısı varsa L'ye sınırlı operatör denir. Bununla birlikte, (2.2.1) eşitsizliğini sağlayan c'lerin infimumuna L *operatörünün normu* denir ve bu norm

$$\|L\| := \sup_{x\neq 0, x\in X} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.4. X ve Y normlu uzayları, $L : X \to Y$ operatörü ve $A \subset X$ sınırlı alt kümesi verilsin. Eğer $L(A)$, Y'de önkompakt ise L operatörüne *kompakt operatör* denir. Eğer L operatörü sürekli ve kompakt ise o zaman L operatörüne *tamamen sürekli operatör* denir.

Tanım 2.2.5. $L : X \to Y$ operatörü, her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

şartını sağlıyorsa L'ye *lineer operatör* denir.

Her kompakt operatör sınırlı, her sınırlı lineer operatör sürekli olduğundan her kompakt lineer operatör tamamen sürekli olur.

Tanım 2.2.6. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer,

i) X, Y'nin alt uzayı,

ii) Her $x \in X$ için X'ten Y'ye $Ix = x$ şeklinde tanımlanan I birim operatörü (gömme operatörü) sürekli ise, X uzayı Y uzayına *gömülür* ve bu gömülme $X \to Y$ veya $X \hookrightarrow Y$ biçiminde gösterilir. I birim operatörü lineer olduğundan (ii) koşulu, her $x \in X$ için

$$\|Ix\|_Y \leq c\,\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığına denktir. Bununla birlikte, eğer I birim operatörü kompakt ise, yani I sürekli ve X uzayındaki sınırlı her (x_n) dizisi Y uzayında yakınsak olan bir altdiziye sahipse X uzayı Y uzayına *kompakt gömülür.*

2.3. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.3.1. Ω, $\mathbb{R}^N$'nin açık bir bölgesi olmak üzere,

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^N;\ f \text{ fonksiyonu sürekli}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye *sürekli fonksiyonlar uzayı* denir. Bu uzay; $|\cdot|$, $\mathbb{R}^N$'de tanımlanan norm olmak üzere,

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.2. f, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in \Omega$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

olacak şekilde negatif olmayan bir $L = L(f)$ sabiti varsa, f fonksiyonu *Lipschitz koşulunu sağlar* veya *Lipschitz-süreklidir* denir. Lipschitz-sürekli fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı $C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ ile gösterilir.

2.4. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.4.1. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_i'lerin $n-$bileşenlisi olmak üzere, α'ya *çoklu-indis* denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ olarak tanımlanır, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ olur. Buna göre $1 \leq i \leq n$ için $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere $D^\alpha = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \cdots D^{\alpha_n}$ olup, $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, ifadesi $|\alpha|$.mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir.

Tanım 2.4.2. Bir $G \subset \mathbb{R}^N$ kümesinin kapanışı $\overline{G}$ ve Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge olmak üzere, $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^N$'in kompakt bir alt kümesi ise bu durum $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. f, G'de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, *f fonksiyonunun desteği* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$ ise, f fonksiyonu Ω'da *kompakt desteğe sahiptir* denir.

Tanım 2.4.3. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi m tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olmak üzere, $C_0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki tüm fonksiyonlardan oluşur. $C^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu veya düzgün (smooth) fonksiyon denir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının Ω bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonlarından oluşan uzay ise $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4. Ω, $\mathbb{R}^N$'de açık bir bölge olduğunda, $C^m(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlar Ω bölgesinde sürekli olmayabilir. Dolaysıyla,

$$C_B^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) : \text{ her } x \in \Omega \text{ için } D^\alpha f \text{ kısmi türevleri } \Omega\text{'da sınırlı, } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

fonksiyon uzayı tanımlanırsa, elde edilen bu yeni uzay

$$\|f\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \tag{2.4.1}$$

normu altında bir Banach uzayı olur. $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı, Ω bölgesinde $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $D^\alpha f$ kısmi türevleri sınırlı ve düzgün sürekli olan $f \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşur.

Bununla birlikte; $C^m(\overline{\Omega})$, $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı da (2.4.1)'de verilen norma göre bir Banach uzayı oluşturur.

Tanım 2.4.5. (Gâteaux Türevi) X ve Y Banach uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her $h \in X$ için

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = Lh$$

olacak şekilde bir L sınırlı lineer operatörü varsa f'ye $x \in X$ noktasında ve h yönünde Gâteaux diferansiyellenebilirdir denir. Bu durumda L operatörüne f fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki *Gâteaux türevi* denir ve $f'(x) = L$ şeklinde gösterilir. Eğer bu durum her $x \in X$ için doğruysa f fonksiyonu *Gâteaux diferansiyellenebilirdir* denir.

Teorem 2.4.6. (Ortalama Değer Teoremi) X bir Banach uzayı ve $x, h \in X$ olmak üzere, eğer $\varphi : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x+th)\,h$$

olacak şekilde bir $0 < t < 1$ sayısı vardır (Siddiqi 2004).

Tanım 2.4.7. (Fréchet Türevi) X ve Y Banach uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir L sınırlı lineer operatörü varsa f'ye $x \in X$ noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir denir. Bu durumda L operatörüne f fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki *Fréchet türevi* denir ve $f'(x) = L$ şeklinde gösterilir. Eğer bu durum her $x \in X$ için doğruysa f fonksiyonu *Fréchet diferansiyellenebilirdir* denir.

Bununla birlikte,

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ şeklinde tanımlandığında f fonksiyonunun x_0 noktasındaki Fréchet türevi

$$f'(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x=x_0})$$

şeklindeki Jacobian matrisi olarak;

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlandığında ise f fonksiyonunun x_0 noktasındaki Fréchet türevi

$$f'(x_0)\,h = \nabla f(x_0) \cdot h$$

şeklindeki gradient vektörü olarak gösterilir. Burada '$\cdot$', $\mathbb{R}^N$'deki iç çarpımdır.

Yukarıdaki tanımdan kolayca görüleceği üzere, eğer f fonksiyonu Fréchet diferansiyellenebilir ise o zaman her $h \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X$$

olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı, $\|h\|_X \leq \delta$ olmak üzere, bulunabilir.

Teorem 2.4.8. X ve Y Banach uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fonksiyonu $x \in X$ noktasında Fréchet diferansiyellenebilirse, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir.

Yukarıdaki teorem Gâteaux diferansiyellenebilir fonksiyonlar için (genel olarak) geçerli değildir (Siddiqi 2004).

Teorem 2.4.9. Bir fonksiyonun bir noktada Fréchet türevi varsa o noktada Gâteaux türevi de vardır ve bu iki türev eşttir (Siddiqi 2004).

Tanım 2.4.10. X ve Y Banach uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fonksiyonu $x \in X$ noktasında Fréchet diferansiyellenebilir ve f' Fréchet türevi $x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli Fréchet diferansiyellenebilirdir denir. Eğer bu durum X'deki her eleman için gerçekleşiyorsa, bu durumda f fonksiyonu *sürekli Fréchet diferansiyellenebilirdir* denir ve $f \in C^1(X, Y)$ şeklinde gösterilir ($Y = \mathbb{R}$ iken sadece $f \in C^1(X)$ şeklinde de gösterilebilir).

2.5. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyon

Tanım 2.5.1. $\mathcal{A}$, $\mathbb{R}^N$'nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

i) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A}$ ise $A^c \in \mathcal{A}$ (A^c, A'nın tümleyen kümesi),

iii) $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, ...$, iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{A}$ sınıfına bir σ-*cebir* adı verilir.

Tanım 2.5.2. $\mathcal{A}$ σ-cebiri üzerinde tanımlanan $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \forall A_i \cap A_k = \varnothing, i \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde bir *ölçüm* denir.

Tanım 2.5.3. $\mathbb{R}^N$'nin altkümelerinin aşağıda verilen özelliklere sahip σ-cebiri olan bir $\mathcal{A}$ sınıfının ve bu $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir;

i) $\mathbb{R}^N$'deki her açık küme $\mathcal{A}$'ya aittir,

ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \mathcal{A}$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(A) = 0$ dir,

iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., N\}$ ise, $A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$ dir,

iv) $x \in \mathbb{R}^N$ ve $A \in \mathcal{A}$ iken

$$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \mathcal{A} \quad \text{ve} \quad \mu(x + A) = \mu(A)$$

olur, yani μ ölçümü öteleme altında değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir $\mathcal{A}$ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^N$'nin Lebesgue ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$'de *Lebesgue ölçümü* ve $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A)$ gösterimine ise A kümesinin *ölçümü* denir. Bu tez çalışmasında, bir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesinin Lebesgue ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.5.4. Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^N$ ve $|B| = 0$ ise, $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her (h.h.h.) yerde geçerli bir özellik olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.5. A ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

Tanım 2.5.6. Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, o zaman f fonksiyonu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max\{f, 0\}$ ve $f^- = -\min\{f, 0\}$ fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılabilir. Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlanan $\int_\Omega f^+(x)\,dx$ ve $\int_\Omega f^-(x)\,dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere,

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f^+(x)\,dx - \int_\Omega f^-(x)\,dx$$

olarak alınsın.

Eğer iki integral de sonlu ise f fonksiyonuna Ω bölgesinde *Lebesgue integrallenebilir* denir. Ω bölgesinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

2.6. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 2.6.1. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \mid u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir fonksiyon; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına *Lebesgue uzayı* adı verilir.

$1 \le p < \infty$ iken $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := |u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{2.6.1}$$

normu altında bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.6.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için h.h.h. yerde $|u(x)| \le M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa, u fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Bu şekilde tanımlanan M sabitlerinin en büyük alt sınırına $|u|$'nun Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir ve $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L^\infty(\Omega)$ olup, bu uzay

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := |u|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu altında bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.6.3. $1 < p < \infty$ olmak üzere, $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ veya $p' = \frac{p}{p-1}$ olacak şekilde elde edilen p' sayısına p'nin *eşleniği* (conjugate) denir. Buna göre, $1 < p < \infty$ ve $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ alınırsa bu durumda her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$\varphi(u) = \int_\Omega u(x)\, \upsilon(x)\, dx$$

olacak şekilde bir $\upsilon \in L^{p'}(\Omega)$ bulunabilir. Bununla birlikte,

$$|\upsilon|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}$$

şeklinde normlararası bir ilişki de mevcut olacağından, $L^{p'}(\Omega) \cong (L^p(\Omega))'$ elde edilir, yani bu iki uzay izomorfiktir. Dolaysıyla elemanları çok farklı olmasına rağmen, Banach uzayı olmaları açısından bu iki uzay aynı kabul edilebilir.

Teorem 2.6.4. (Hölder Eşitsizliği) Eğer $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^{p'}(\Omega)$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq |u|_p\, |v|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Adams 1975).

Teorem 2.6.5. $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ise, bu durumda $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$|u|_p \leq |\Omega|^{(1/p)-(1/q)}\, |u|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolaysıyla,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Adams 1975).

Tanım 2.6.6. $L^p(\Omega)$ uzayında $p = 2$ alınarak elde edilen $L^2(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x) \cdot \overline{v(x)} dx \tag{2.6.2}$$

iç çarpımı altında Hilbert uzayı olur ('$\cdot$', $\mathbb{R}^N$'de tanımlanan iç çarpımdır).

Teorem 2.6.7. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise herhangi bir Ω bölgesi için $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ (Adams 1975).

Teorem 2.6.8. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur (Adams 1975).

Teorem 2.6.9. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur. Bununla birlikte; $L^p(\Omega)$ uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul $1 < p < \infty$ olmasıdır (Adams 1975).

2.7. Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 2.7.1. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p.kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterilen *lokal integrallenebilir fonksiyonlar* sınıfını gösterir.

Tanım 2.7.2. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indislisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun *α.zayıf türevi* (distributional derivative) denir. Bununla birlikte υ fonksiyonu, u fonksiyonunun *genelleştirilmiş türevi* olarak da adlandırılır ve $\upsilon = D^{\alpha}u$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.7.3. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge, m pozitif bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &: = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|_p^p\right)^{1/p} &&;\ 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &: = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|_{\infty} &&;\ p = \infty \end{aligned}$$

tanımlanan normlar altında bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.7.4. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge, m pozitif bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\|\cdot\|_{m,p}$ normu ile aşağıda verilen vektör uzayları tanımlanabilir;

i) $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ kümesinin tamlanışı (completion), $H^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olarak tanımlanır,

ii) $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$'deki kapanışı, $W_0^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olarak tanımlanır.

Belirtmekte yarar vardırki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olup, $1 \leq p < \infty$ iken $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Bununla birlikte, bu uzaylar arasında herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi de mevcuttur (Adams 1975).

Teorem 2.7.5. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir. Ayrıca, $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve dolaysıyla yansımalı olur (Adams 1996).

Teorem 2.7.6. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise herhangi bir Ω bölgesi için

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$$

olur (Adams 1975).

Teorem 2.7.7. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(N, m, p)$ sabiti vardır (Adams 1975). Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-mp} & N > mp \\ +\infty & N \leq mp \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan p^* sayısına *Sobolev kritik kuvveti* denir.

Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesinde tanımlanan Sobolev uzaylarının özelliklerinin çoğu ve özellikle bu uzaylarda verilen gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne (regularity) bağlıdır. Bu tür özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik ya da analitik koşullar türünden ifade edilir. Aşağıda bu geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

Tanım 2.7.8. $\mathbb{R}^N$'de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine tepe noktası x olan bir *sonlu koni* adı verilir. Ω, $\mathbb{R}^N$'de açık bir bölge olmak üzere, eğer Ω'nın her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω bölgesi *koni özelliğini sağlar* denir.

Teorem 2.7.9. (Sobolev Gömme Teoremi) Ω, $\mathbb{R}^N$'de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $1 \leq m$ ve $0 \leq j$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

gömmesi elde edilir.

ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

gömmesi elde edilir. Üstelik $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir (Adams 2003).

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömmesi elde edilir.

Yukarıdaki gömmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömmeler yine geçerli olur.

Teorem 2.7.10. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur (Adams 1975).

Teorem 2.7.11. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur (Adams 1975).

Teorem 2.7.12. (Rellich-Kondrachov Teoremi) Ω, $\mathbb{R}^N$'de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $\Omega_0 \subset \Omega$ sınırlı bir alt küme, $1 \leq m$ ve $0 \leq j$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q < q^*$$

ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

gömmeleri kompakttır.

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise, yukarıdaki teoremde $\Omega_0 = \Omega$ alınabilir ve Ω bölgesi $\mathbb{R}^N$'de keyfi bir bölge ise $W^{j+m,p}(\Omega)$ yerine $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ konulması koşuluyla yukarıdaki gömmeler kompakt olur (Adams 2003).

2.8. Modüler Uzay, Orlicz Uzayı

Tanım 2.8.1. X bir reel vektör uzayı olmak üzere, $\rho : X \to [0,\infty]$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için

i) $\rho(x) = 0 \iff x = 0$,

ii) $\rho(x) = \rho(-x)$,

iii) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir *modüler* denir. Eğer (iii) özelliği yerine $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$$

özelliği sağlanırsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir *konveks modüler* denir.

Tanım 2.8.2. X bir reel vektör uzayı ve ρ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *modüler uzay* denir. X_ρ uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.8.3. X bir reel vektör uzayı ve ρ fonksiyoneli X üzerinde bir konveks modüler ise, bu durumda ρ fonksiyoneli X_ρ üzerinde *Luxemburg normu* adı verilen

$$|u|_\rho = \inf \{ \lambda > 0 : \rho(u/\lambda) \leq 1 \}$$

biçiminde bir norm tanımlar.

Tanım 2.8.4. Ω, $\mathbb{R}^N$ üzerinde ölçülebilir bir bölge olmak üzere, $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) Her $t \in \Omega$ için $\varphi(t, u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\varphi(t, 0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t, u) > 0$ ve $\lim_{u \to \infty} \varphi(t, u) = \infty$,

iii) Her $u \geq 0$ için $\varphi(t, u)$ ölçülebilir fonksiyon

özelliklerine sahipse φ fonksiyonuna Φ *sınıfına aittir* denir.

Tanım 2.8.5. X bir reel vektör uzayı ve φ fonksiynu Φ sınıfına aitse, her $x \in X$ için $\varphi(t, |x(t)|)$ fonksiyonu ölçülebilir olur ve

$$\rho(x) = \int_\Omega \varphi(t, |x(t)|)\, dt \tag{2.8.1}$$

ifadesi X'de bir modüler tanımlar. Bununla birlikte, $\varphi(t, u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u'nun bir konveks fonksiyonu ise, (2.8.1) ifadesi X'de bir konveks modüler olur.

Buna göre, elde edilen

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0^+} \int_\Omega \varphi(t, \lambda |x(t)|)\, dt = 0 \right\}$$

modüler uzayına *genelleştirilmiş Orlicz uzayı* veya *Orlicz-Musielak uzayı* denir ve L^φ ile gösterilir. Ayrıca,

$$L_0^\varphi = \left\{ x \in X : \int_\Omega \varphi(t, |x(t)|)\, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan L_0^φ kümesine, *genelleştirilmiş Orlicz sınıfı* denir. L_0^φ, L^φ uzayının bir konveks alt uzayı, L^φ uzayı ise X'in L_0^φ uzayını kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır. Bununla birlikte, eğer $\varphi(t, u) = \varphi(u)$ ise (φ, t'den bağımsız ise) L^φ ve L_0^φ uzaylarına sırasıyla *Orlicz uzayı* ve *Orlicz sınıfı* denir.

2.9. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı ($L^{p(x)}(\Omega)$)

Ω, $\mathbb{R}^N$'de $|\Omega| > 0$ olacak şekilde ölçülebilir bir bölge ve $p : \Omega \to [1, \infty)$ fonksiyonu $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty$ olacak şekilde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Buna göre, Ω'daki

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \tag{2.9.1}$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının oluşturduğu fonksiyon sınıfına *değişken üstlü Lebesgue uzayı* veya *genelleştirilmiş Lebesgue uzayı* denir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ biçiminde gösterilir.

$L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm

$$|u|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega} \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} \tag{2.9.2}$$

şeklinde tanımlanır. Açıktır ki $p^- > 1$ iken $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bu norm altında bir Banach uzayı olur. $p(x) \equiv p$ sabit bir fonksiyon olduğunda (2.9.2) normu ile L^p-normu ((2.6.1)'de verilen norm) çakışır.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $p : \Omega \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için

$$p^- := \operatorname*{essinf}_{x\in\Omega} p(x) \text{ ve } p^+ := \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} p(x)$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.9.1. $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$, $n = 1, 2, ...$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)];

i) $|u|_{p(x)} < 1\, (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) < 1\, (= 1; > 1)$,

ii) $\min\left\{|u|_{p(x)}^{p^-}, |u|_{p(x)}^{p^+}\right\} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \max\left\{|u|_{p(x)}^{p^-}, |u|_{p(x)}^{p^+}\right\}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{p(x)} \to \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) \to \infty$.

Teorem 2.9.2. $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$, $n = 1, 2, ...$ olmak üzere, aşağıdakiler eşdeğerdir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)];

i) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - u|_{p(x)} = 0$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0$,

iii) Ω'daki ölçüme göre $u_n \to u$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = \rho_{p(x)}(u)$.

Teorem 2.9.3. Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı-ölçülebilir fonksiyonların kümesi, $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ uzayında yoğundur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.9.4. Eğer $p^+ < \infty$ ise $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ uzayı ayrılabilirdir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.9.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge ise, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ uzayında yoğundur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.9.6. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve dolaysıyla yansımalı uzayı olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.9.7.

i) Her $\upsilon \in L^{p'(x)}(\Omega)$ ve $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için,

$$\varphi(u) = \int_\Omega u(x)\,\upsilon(x)\,dx \tag{2.9.3}$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyoneli, $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir,

ii) $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde (2.9.3) ile tanımlanan her sürekli φ fonksiyoneli için tek bir $\upsilon \in L^{p'(x)}(\Omega)$ elemanı vardır [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.9.8. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayının $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayı olması için gerek ve yeter koşul $p \in L^\infty(\Omega)$ olmasıdır (Kováčik ve Rákosník 1991).

Teorem 2.9.9. Her $\upsilon \in L^{p'(x)}(\Omega)$ ve $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için olmak üzere,

$$\int_\Omega |u\upsilon|\,dx \le \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'}\right) |u|_{p(x)} |\upsilon|_{p'(x)}$$

olur (Kováčik ve Rákosník 1991).

Tanım 2.9.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge, A kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve χ_A, A'nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\lim_{|A|\to 0} |u(x)\,\chi_A|_{p(x)} = 0$$

oluyorsa, u fonksiyonu $|\cdot|_{p(x)}$ normuna göre *mutlak süreklidir* denir.

Teorem 2.9.11. Her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$'de tanımlanan $|\cdot|_{p(x)}$ normuna göre mutlak süreklidir (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.9.12. Ω, $\mathbb{R}^N$'de $0 < |\Omega| < \infty$ olacak şekilde bir bölge ve $p, q : \Omega \to [1, \infty]$ ölçülebilir fonksiyonları verilsin. Bu durumda $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \le q(x)$ olmasıdır. Bu durumda

$$|u|_{p(x)} \le c\,(1 + |\Omega|)\,|u|_{q(x)}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır (Kováčik ve Rákosník 1991).

Teorem 2.9.13. $p(x)$, $q(x)$ fonksiyonları ölçülebilir, $p(x) \in L^\infty(\Omega)$, h.h.h. $x \in \Omega$ için $1 \le p(x)q(x) \le \infty$ ve $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \ne 0$ olsun. Bu durumda

$$|u|_{p(x)q(x)} \le 1 \Longrightarrow |u|^{p^+}_{p(x)q(x)} \le \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \le |u|^{p^-}_{p(x)q(x)}$$

$$|u|_{p(x)q(x)} \ge 1 \Longrightarrow |u|^{p^-}_{p(x)q(x)} \le \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \le |u|^{p^+}_{p(x)q(x)}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Özel olarak $p(x) = p = sabit$ ise o zaman

$$\left||u|^{p}\right|_{q(x)} = |u|_{pq(x)}^{p}$$

olur (Edmunds ve Rákosník 2000).

2.10. Değişken Üstlü Sobolev Uzayı $(W^{m,p(x)}(\Omega))$

Tanım 2.10.1. Ω, $\mathbb{R}^N$'de bir bölge, m pozitif bir tam sayı, α çoklu indis ve $p : \Omega \to [1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$W^{m,p(x)}(\Omega) := \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \ D^{\alpha}u \in L^{p(x)}(\Omega), \ |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye *değişken üstlü Sobolev uzayı* veya *genelleştirilmiş Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} := \|u\|_{m,p(x)} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|_{p(x)} \tag{2.10.1}$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturur. (2.10.1) normuna göre $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı, $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olan $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.10.2. $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayları Banach uzaylardır. Eğer $p \in L^{\infty}(\Omega)$ ise, $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayları yansımalı olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kovǎčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 2.10.3. Ω, $\mathbb{R}^N$'de sınırlı bir bölge ve $p, q \in L_+^{\infty}(\Omega) = \{p \in L^{\infty}(\Omega) : p$ ölçülebilir, her $x \in \Omega$ için $\operatorname{essinf} p(x) > 1\}$ olsun. Eğer $p(x) \leq q(x)$ ise,

$$W^{m,q(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.10.4. Ω, $\mathbb{R}^N$'de koni özelliğine sahip açık bir bölge olsun. m, $mp < N$ özelliğindeki pozitif bir sayı, p fonksiyonu $\overline{\Omega}$ bölgesinde $1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m}$ olacak şekilde Lipschitz-sürekli bir fonksiyon ve $q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu h.h.h. $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) \leq q(x) \leq p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-mp(x)}$ özelliğine sahip olsun. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan ve ark. 2001).

Teorem 2.10.5. Ω, $\mathbb{R}^N$'de koni özelliğine sahip açık bir bölge olsun. m, $mp < N$ özelliğindeki pozitif bir sayı, p fonksiyonu $\overline{\Omega}$ bölgesinde $1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m}$ olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon ve Ω bölgesinde tanımlı q fonksiyonu h.h.h. $x \in \overline{\Omega}$ için

$p(x) \leq q(x)$ ve

$$\underset{x\in\overline{\Omega}}{\text{essinf}}(p^*(x) - q(x)) > 0$$

olsun. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan ve ark. 2001).

Not 2.10.6. Bundan sonra $\text{essinf}_{x\in\overline{\Omega}}(p^*(x) - q(x)) > 0$ yerine $q(x) \ll p(x)$ gösterimi kullanılacaktır.

Teorem 2.10.7. Ω, $\mathbb{R}^N$'de koni özelliğine sahip sınırlı bir bölge, $1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m}$ olmak üzere, $p \in C(\overline{\Omega})$ ve q fonksiyonu Teorem 2.10.5 deki gibi olsun. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli kompakt gömmesi vardır (Fan ve ark. 2001).

Teorem 2.10.8. Ω, $\mathbb{R}^N$'de sınırlı bir bölge; $p, q \in C(\overline{\Omega}) \cap L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Eğer her $x \in \overline{\Omega}$ için $mp(x) < N$ ve $q(x) < p^*(x)$ koşulları sağlanıyor ise,

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli ve kompakt gömmesi vardır (Fan ve ark. 2001).

Tanım 2.10.9. $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında özel olarak $m = 1$ alındığında

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega);\ \ |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

uzayı elde edilir. $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)},\quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$$

olarak verilir. Ayrıca, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı olur. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki bir u elemanının normunu $\|u\|_{p(x)}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.10.10. (Poincaré Eşitsizliği) Ω, $\mathbb{R}^N$'de sınırlı ve düzgün bir bölge olmak üzere, her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$|u|_{p(x)} \leq C|\nabla u|_{p(x)},$$

olacak şekilde bir C pozitif sayısı vardır (Fan ve Zhang 2003).

Yukarıda verilen Poincaré eşitsizliğinden hareketle $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde $|\cdot|_{p(x)}$ ve $\|\cdot\|_{p(x)}$ normları denk normlar olur. Dolaysıyla her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(x)} = |\nabla u|_{p(x)}$$

olarak alınabilir.

Teorem 2.10.11. Eğer Ω, $\mathbb{R}^N$'de sınırlı bir bölge ise; $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $1 < p(x) < N$ iken her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < q\left(x\right) < p^*\left(x\right)$ koşulunu sağlayan her $q \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ fonksiyonu için

$$W^{1,p(x)}\left(\Omega\right) \hookrightarrow L^{q(x)}\left(\Omega\right)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.10.12. Eğer $\Omega = \mathbb{R}^N$ ise; $p \in L_+^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $p^+ < N$ ve $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün sürekli iken $q \in L_+^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^N$ için

$$p\left(x\right) \leq q\left(x\right) \ll p^*\left(x\right)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda

$$W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

gömmesi süreklidir (Fan ve ark. 2001).

3. STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU DENKLEMLER İÇİN VARYASYONEL YAKLAŞIM

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. X bir Banach uzayı ve $J : X \to \mathbb{R}$, C^1 sınıfından bir fonksiyonel olmak üzere; $\forall \upsilon \in X$ için

$$\langle J'(u), \upsilon \rangle = 0 \tag{3.1.1}$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in X$ elemanına J fonksiyonelinin bir *kritik noktası* denir. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Hilbert uzayındaki iç çarpımdır.

Tanım 3.1.2. X Banach uzayı ve $A : X \to X^*$ operatörü verilsin. Eğer

$$A(\cdot) = J'(\cdot)$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli varsa A operatörüne *varyasyonel* denir.

A bir varyasyonel olmak üzere, bir problem

$$A(\cdot) = 0$$

şeklinde bir fonksiyonel denklem biçiminde yazılabiliyorsa bu probleme *varyasyonel problem* denir.

Tanım 3.1.3. X bir Banach uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)\, ds$ olmak üzere;

$$-\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = f(x, u) \tag{$\mathbf{E}$}$$

şeklinde verilen kısmi diferansiyel denklemini düşünürsek; bu durumda, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$J(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}\, dx}{p(x)} - \int_\Omega F(x, u)$$

ifadesine ($\mathbf{E}$) denklemine karşılık gelen *Euler-Lagrange fonksiyoneli* veya *enerji fonksiyoneli* denir.

$J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonelinin türevi her $u, \upsilon \in X$ için

$$\langle J'(u), \upsilon \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \upsilon dx - \int_\Omega f(x, u)\, \upsilon dx$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre, her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonu için,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x, u)\, \varphi dx = 0 \tag{3.1.2}$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ fonsiyonuna $(\mathbf{E})$ denkleminin bir *zayıf çözümü* (*weak solution*) veya *genelleştirilmiş çözümü* denir.

Sonuç 3.1.4. Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.3 birlikte değerlendirildiğinde kolayca anlaşılcağı üzere bir fonksiyonelin kritik noktaları ile bu fonksiyonele karşılık gelen denklemin zayıf çözümleri çakışmaktadır.

Not 3.1.5. Bir kısmi diferansiyel denklemde görülen tüm kısmi sürekli türevlere sahip çözüme, *klasik çözüm* denir. Bununla birlikte; bir zayıf çözüm, denklemdeki bazı kısmi sürekli türevlere sahip olmayabilir.

Tanım 3.1.6. X Banach uzayı ve $J : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$|J(u)| \leq M$$

olacak şekilde bir pozitif $M \in \mathbb{R}$ değeri varsa J fonksiyoneli *sınırlıdır* veya *iyi tanımlıdır* denir.

Tanım 3.1.7. X Banach uzayı ve $J : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$J(u^*) \leq J(u)$$

olacak şekilde bir $u^* \in X$ varsa u^* fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir *minimumu* veya *minimize edicisi* denir ve

$$\inf_X J(u) = J(u^*)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.8. X Banach uzayı ve $J : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$\inf_X J(u) = -\infty, \quad \sup_X J(u) = +\infty$$

oluyorsa J fonksiyoneli *iyi tanımlı değildir* (sınırsızdır) denir.

Tanım 3.1.9. X Banach uzayı, $J : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli ve $(u_n) \subset X$ dizisi verilsin.

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{u\in X} J(u)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine J fonksiyonelinin bir *minimize* (*edici*) *dizisi* denir.

Tanım 3.1.10. Daha önce $p(x)-$Laplace operatorü

$$-\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u)$$

şeklinde tanımlanmıştı. Buna göre $p(x)-$Laplace operatorüne karşılık gelen $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli

$$J(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx$$

şeklinde; bu fonksiyonelin türevi de, $L = J' : X \to X^*$ olmak üzere,

$$\langle L(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre L için aşağıdaki önermeler denktir (Fan ve Zhang 2003):

i) $L : X \to X^*$ operatörü sürekli, sınırlı ve kesin monotondur;

ii) $L : X \to X^*$ operatörü (S_+) koşulunu sağlar, yani, eğer $(u_n) \subset X$ dizisi için X'de $u_n \rightharpoonup u$ iken

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle L(u_n) - L(u), u_n - u\rangle \leq 0$$

oluyor ise o zaman X'de

$$u_n \to u$$

olur;

iii) $L : X \to X^*$ operatörü bir homeomorfizmdir.

Tanım 3.1.11. X bir Banach uzayı olmak üzere; bir $(u_n) \subset X$ dizisi

i) $|J(u_n)| \leq c,\ c \in \mathbb{R}$

ii) $J'(u_n) \to 0,\ J' : X \to X^*$

özelliklerini sağlıyorsa o zaman (u_n) dizisine $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonelinin *Palais-Smale* ((**PS**)) *dizisi* denir.

Not 3.1.12. $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonelinin (**PS**) dizisi bu fonksiyonelin bir minimize dizisidir. Bu diziler eğer yakınsak bir alt diziye sahipse J için kritik nokta (lar) üretirler.

Not 3.1.13. Eğer $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli alttan sınırlı değilse bu durumda J fonksiyoneli için bir (**PS**) dizisinin varlığı hakkında kesin bir şey söylenemez; ancak alttan sınırlı ise J fonksiyoneli için bir (**PS**) dizisi daima elde edilebilir.

Tanım 3.1.14. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere; J'nin her (**PS**) dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa J fonksiyoneli (**PS**) *koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.15. Eğer bir J fonksiyoneli alttan sınırlı ve (**PS**) koşulunu sağlıyorsa, tanımlı olduğu bölgede bir minimuma sahip olur.

Tanım 3.1.16. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = c,\ c \in \mathbb{R}$

ii) $J'(u_n) \to 0,\ J' : X \to X^*$

koşullarını sağlayan bir $(u_n) \subset X$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse J fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ seviyesinde $(\mathbf{PS})_c$ *koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.17. Eğer J fonksiyoneli (**PS**) koşulunu sağlarsa her $c \in \mathbb{R}$ için $(\mathbf{PS})_c$ koşulunu da sağlar.

Tanım 3.1.18. $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere; bir $(u_n) \subset X$ dizisi

i) $|J(u_n)| \leq c,\ c \in \mathbb{R}$

ii) $(1 + \|u_n\|_X)\,|J'(u_n)| \to 0,\ J' : X \to X^*$

özelliklerini sağlıyorsa o zaman (u_n) dizisine $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonelinin *Cerami dizisi* denir. Ek olarak, eğer bu (u_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse J fonksiyoneli *Cerami koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.19. Cerami koşulu, (**PS**) koşulundan daha zayıf bir koşuldur. Bu iki koşul arasındaki temel fark uygulamada ortaya çıkar şöyleki; sınırsız bir bölge üzerinde çalışılırken (**PS**) koşulunun sağlanmadığı durumlarda Cerami koşulu sağlanabilir. Bununla birlikte, eğer ilgili $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli alttan sınırlı ise bu iki koşul çakışır.

Tanım 3.1.20. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)\, ds$ olmak üzere;

$$0 < \theta F(x, u) \leq f(x, u)\, u, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olacak şekilde bir $\theta > p$ $(p \geq 2)$ pozitif sayısı varsa f fonksiyonu *Ambrosetti-Rabinowitz koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.21. Ambrosetti-Rabinowitz koşulu, ilgili $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonelinin (**PS**) dizisinin sınırlılığını elde etmek için kullanılan çok önemli bir koşuldur.

Tanım 3.1.22. $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\|u\|_X \to \infty \ \text{ iken } \ J(u) \to +\infty$$

oluyorsa J fonksiyoneline *coercive fonksiyonel* denir.

Tanım 3.1.23. X bir Banach uzayı, $J : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli ve $x_n \to x$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Buna göre; bir $x \in X$ elemanı için

$$J(x) \leq \lim_{n \to \infty} \inf J(x_n) \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, J fonksiyoneline $x \in X$ noktasında *alttan yarı-süreklidir* (*lower semi-continuous*) denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $x_n \rightharpoonup x$ dizisi için gerçekleşiyorsa, J fonksiyoneline $x \in X$ noktasında *alttan zayıf yarı-süreklidir* (*weakly lower semi-continuous*) denir.

Tanım 3.1.24. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık bir küme ve $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olmak üzere;

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için $\xi \to f(x, \xi)$ eşlemesi sürekli

ii) her $\xi \in \mathbb{R}^N$ için $x \to f(x, \xi)$ eşlemesi ölçülebilir

oluyorsa f fonksiyonu *Carathéodory koşulunu sağlar* denir.

Tanım 3.1.25. X bir Banach uzayı ve $\mathfrak{U}$ sınıfı, $\mathfrak{U} :=\{K \subset X\backslash\{0\}$: K kapalı ve orjine göre simetrik, yani $u \in K$ iken $-u \in K\}$ şeklinde tanımlansın.

$K \in \mathfrak{U}$ olma üzere, K kümesinin *Genusu* $\gamma(K)$ ile gösterilir ve

$$\gamma(K) = \min\{k \geq 1;\ \phi : K \to \mathbb{R}^k\backslash\{0\} \text{ sürekli ve tek olan bir eşleme}\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $k > 0$ değeri için böyle bir eşleme yoksa $\gamma(K) = \infty$ olur. Ve ayrıca tanımdan açıktır ki $\gamma(\varnothing) = 0$ ve eğer K sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa $\gamma(K) = 1$ dir.

Not 3.1.26. A ve $B \in \mathfrak{U}$ olmak üzere, eğer A ile B homeomorfik iseler o zaman $\gamma(A) = \gamma(B)$ dir.

3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Varyasyonel yaklaşım, özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde kullanılan çok etkili bir araçtır. Bu yaklaşım u bilinmeyen bir fonksiyon ve $F(\cdot)$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere,

$$F(u) = 0 \tag{3.2.1}$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için, fonksiyonel analiz tekniklerinin kullanıldığı bazı varyasyonel hesaplamalara (calculus of variations) dayanır. Halihazırda, (3.2.1) tipindeki denklemlerin çözümünü veren genel bir teorinin mevcut olmaması, varyasyonel yaklaşımın önemini daha iyi ortaya koymaktadır.

Varyasyonel yaklaşım, bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine bu denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmayı amaçlayan bir yaklaşımdır. Varyasyonel yaklaşımda iki temel yöntem kullanılır.

Birincisi *klasik metot* olarak adlandırılır. Bu metoda göre, (3.2.1) denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli J olmak üzere

$$F(u) = J'(u) \tag{3.2.2}$$

eşitliği yazılabildiğinde (3.2.1) denklemi

$$J'(u) = 0 \tag{3.2.3}$$

haline dönüşür. Bu gösterim sayesinde kolayca görüleceği üzere, (3.2.1) denklemini sağlayan u_0 bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemi, (3.2.3) denklemini sağlayan u_0 bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemine dönüşecek ve dolaysıyla $J(u)$ enerji fonksiyonelinin kritik noktaları, (3.2.1) denkleminin (zayıf) çözümlerine karşılık gelecektir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse, X bir Banach uzayı, $J : X \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $F \in C^1\left(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ olmak üzere,

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

olarak verilen enerji fonksiyonelinin bir düzgün (smooth) minimumu olan u_0 fonksiyonu

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla u)}\right) = 0 \tag{3.2.5}$$

şeklinde tanımlanan ve (3.2.2)'ye karşılık gelen Euler-Lagrange kısmi diferansiyel denkleminin bir (zayıf) çözümü olacaktır.

İkinci metod *direkt metod* olarak adlandırılır. Bu metoda göre, X bir Banach uzayı ve (3.2.1) denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $J : X \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$J(u_n) \to \inf\{J(u) : u \in X\}$$

olacak şekilde bir $(u_n) \subset X$ dizisi hesaba katılırak

$$u_{n_k} \to u_0 \in X \quad \text{ve } J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

olacak şekilde bir (u_{n_k}) alt dizisinin varlığı gösterilir. Bu durumda (u_n) dizisi J fonksiyonelini minimize eder ve (u_{n_k}) alt dizisinin yakınsadığı u_0 değeri de J fonksiyonelinin bir minimumu (kritik değeri) ve dolaysıyla (3.2.3) denkleminin bir (zayıf) çözümü olur.

Belirtmekte yarar vardır ki yukarıda bahsedilen yakınsamanın gerçekleşebilmesi için bir başka deyişle yakınsak bir alt dizinin varlığından emin olmak için bazı kompaktlık koşulları ((**PS**) koşulu, Cerami koşulu) ve nispeten daha zayıf topolojiler (Dual uzay üzerinde tanımlı topolojik yapılar) kullanma zarureti doğabilir.

3.3. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Temel Yöntemler

3.3.1. Kritik Nokta Yöntemi

Modern fiziğin tipik özelliklerinden birisi, fenomenleri varyasyonel ilkelere dayanarak kategorize etmektir. Dolaysıyla birçok problem, uygun bir J enerji fonksiyonelinin minimize edilmesi problemi olarak görülebilir. Bu kavrayış, doğal olarak, J fonksiyonelinin kritik noktalarının araştırılmasını gerektirir. Bununla birlikte liner olmayan problemlerin analizinde kullanılan varyasyonel metotlar da kritik nokta teorisine dayanır. Daha önce varyasyonel yaklaşımın temel amacının ilgili fonksiyoneli minimize etmek olduğu belirtilmişti; ancak çoğu problemde söz konusu fonksiyonel ne alttan ne de üstten sınırlıdır, yani fonksiyonel iyi tanımlı değildir. Dolaysıyla bu fonksiyonelin global minimumundan bahsetmek mümkün olmayacaktır. İşte kritik nokta yöntemi bu durumda devreye girer ve Minimax teorisinden (Minimax teorisinin dayandığı birçok farklı yöntem ve argüman mevcuttur; ancak bu tez çalışmasının konusu dışına çıkmamak adına bu çalışmada bunlardan biri olan Mountain-Pass Teoremi kullanılacaktır) faydalanarak fonksiyonelin global minimumunları yerine lokal minimumunlarının veya eyer noktalarının elde edilerek söz konusu problemin çözülebileceğini öngörür.

3.3.2. Lagrange Çarpanı Yöntemi

X bir Banach uzayı, $J, \Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ ve $M = \{x \in X : \Phi(x) = 0\}$ olsun. Farzedelim ki J, $u \in M$'de bir minimuma sahip olsun. Eğer $\Phi'(u) \neq 0$ ise o zaman

$$J'(u) = \lambda \Phi'(u) \tag{3.3.1}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda (3.3.1) eşitlini sağlayan $\lambda \in \mathbb{R}$ değerine *Lagrange çarpanı* denir.

Bazı problemlerde ilgili J fonksiyonelini minimize eden u extremum fonksiyonunun bazı koşullar/kısıtlamalar altında bulunması söz konusu olabilir. Bu durumda çözümün elde edilebilmesi için verilen koşullar/kısıtlamalar fonksiyonelle birlikte değerlendirilerek yeni bir fonksiyonel oluşturulması gerekir. Yani, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$$

fonksiyoneli hesaba katılır ve bu fonksiyonelin extremum fonksiyonu

$$\int_\Omega G(x, u, \nabla u)\, dx = k, \ \ k \in \mathbb{R}$$

koşulu altında istenirse bu durumda yeni fonksiyonel, $\lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$I(u) = \int_\Omega (F + \lambda G)\, dx$$

olur. Bu durumda I fonksiyonelinin minimumu elde edilerek, istenen extremum fonksiyonu, yani J fonksiyonelini minimize eden fonksiyon bulunmuş olur.

3.3.3. Nehari Manifold Yöntemi

X bir Banach uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, ilgili denkleme karşılık gelen fonksiyonel olmak üzere, çoğu problemde J fonksiyoneli X Banach uzayının tamamında değil, ancak X'in bir alt kümesinde alttan sınırlı olabilir. Bu durumda J fonksiyoneli minimumunu (eğer varsa) bu alt küme üzerinde alır. Bu açıdan değerlendirildiğinde ihtiyaç duyulan bu alt kümeyi

$$M_\lambda(\Omega) = \{u \in X \backslash \{0\} : \langle J'(u), u \rangle = 0\}$$

biçiminde tanımlanan ve *Nehari manifold*'u denilen küme olarak seçmek isabetli olur. Tanımdan açıkça görüleceği üzere, J fonksiyonelinin kritik noktaları $M_\lambda(\Omega)$ üzerindedir ve haliyle J minimumunu yine $M_\lambda(\Omega)$ üzerinde alacaktır.

3.3.4. Fibrering Eşleme Yöntemi

X bir Banach uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olmak üzere, $\Phi_u(t) = J(tu)$ $(t > 0)$ şeklinde tanımlanan ve *Fibering eşlemesi* olarak adlandırılan dönüşümün (fonksiyonelin) davranışları ile $M_\lambda(\Omega)$ Nehari manifoldu arasında çok yakın bir ilişki mevcuttur. Gerçekten de tanımlardan kolaylıkla görüleceği üzere $u \in M_\lambda(\Omega)$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\Phi'_u(1) = 0$ olmasıdır. Daha genel olarak ifade etmek gerekirse, $\Phi'_u(t) = 0$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $tu \in M_\lambda(\Omega)$ olmasıdır. Buna göre $M_\lambda(\Omega)$ kümesinin elemanları, Φ_u fibrering eşlemesinin durgun/kararlı noktalarına (stationary points) veya birbaşka ifadeyle J fonksiyonelinin kritik noktalarına karşılık gelir. Dolaysıyla $M_\lambda(\Omega)$ Nehari manifoldunu

$$M_\lambda^+ = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \Phi''_u(t) > 0\}$$

$$M_\lambda^- = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \Phi''_u(t) < 0\}$$

$$M_\lambda^0 = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \Phi''_u(t) = 0\}$$

olacak şekilde sırasıyla (M_λ^+) lokal minimum, (M_λ^-) lokal maximum ve (M_λ^0) dönüm noktalarının kümesi olmak üzere üç farklı alt kümeye ayırmak mümkündür. Bu durumda aşikardır ki eğer u, J için bir lokal minimize edici extremum fonksiyonu ise o zaman Φ_u, $t = 1$ noktasında bir lokal minimuma sahip olacaktır. Sonuç olarak, eğer $\Phi''_u(t) = 0$ ise o zaman $t = t(u)$, J için bir kritik nokta olacaktır.

3.4. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Temel Teoremler

Teorem 3.4.1. (Genelleştirilmiş Mountain-Pass Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (**PS**) koşulunu sağlasın ve $J(0) = 0$ olsun. Farzedelimki

i) $\|u\|_X > \rho$, $J(u) \leq J(0) = 0$,

ii) $\alpha = \inf\{J(u) : u \in X, \|u\|_X = \rho\} > 0$, olacak şekilde bir ρ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun.

Ayrıca $G \neq \varnothing$ olacak şekilde

$G = \{\varphi \in C([0,1], X) : \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v\}$ ve $\beta = \inf\{\max J(\varphi([0,1])) : \varphi \in G\}$ kümeleri verilsin. Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ olmak üzere; β, J için bir kritik değer olur (Willem 1996).

Teorem 3.4.2. (Mountain-Pass Geometrisi) $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (**PS**) koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlasın. Farzedelimki J aşağıdaki geometrik koşulları sağlasın:

i) $\|u\|_X = \rho$ olmak üzere her $u \in X$ için $J(u) \geq \alpha > 0$ olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır,

ii) $J(v) < 0$ (veya $t \to +\infty$ iken $J(tv) < -\infty$) olacak şekilde $\|v\|_X > \rho$ koşulunu sağlayan bir $v \in X$ fonksiyonu vardır.

Bu durumda J fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır (Willem 1996).

Teorem 3.4.3. ($\mathbb{Z}_2$-Simetrik Mountain-Pass Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı; $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, (**PS**) koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlayan bir çift fonksiyonel olsun. Farzedelimki J aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $\|u\|_X = \rho$ olmak üzere her $u \in X$ için $J(u) \geq \alpha > 0$ olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır,

ii) X 'in herbir sonlu X_1 alt uzayı için oluşturulan $\{u \in X_1 : J(u) \geq 0\}$ kümesi sınırlıdır.

Bu durumda J fonksiyoneli sınırsız olan bir kritik değerler dizisine, yani sonsuz çözüme sahiptir (Willem 1996).

Yardımcı Teorem 3.4.4. $(X, \|\cdot\|_X)$ refleksif ve ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Bu durumda

$X = \overline{Span\{e_j | j \in \mathbb{N}^*\}}$, $X^* = \overline{Span\{f_j | j \in \mathbb{N}^*\}}$ ve

$\langle f_j, e_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} i = j; \ 1 \\ i \neq j; \ 0 \end{cases}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$ olacak şekilde $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}^*} \subseteq X$ ve $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}^*} \subseteq X^*$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$, vardır.

Bu durumda $X_k = Span\{e_k\}$, $Y_k = Span\{e_1, e_2, e_3, ..., e_k\} = \oplus_{j=1}^{k} X_j$ ve $Z_k = \overline{\oplus_{j=k}^{\infty} X_j}$ olmak üzere X uzayı, $X = Y_k \oplus Z_k$ olacak şekilde iki uzayın toplamı biçiminde yazılabilir (Fan ve Han 2004).

Teorem 3.4.5. (Fountain Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ refleksif ve ayrılabilir bir Banach uzayı, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir çift fonksiyonel, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığı gibi olsun. Eğer herbir $k \in \mathbb{N}^*$ değeri için

i) $\inf\limits_{u \in Z_k, \|u\|_X = r_k} J(u) \to +\infty$, $k \to +\infty$,

ii) $\max\limits_{u \in Y_k, \|u\|_X = \rho_k} J(u) \leq 0$,

iii) Her $c > 0$ için J fonksiyoneli $(\mathbf{PS})_c$ koşulunu sağlayacak şekilde $\rho_k > r_k > 0$ pozitif sayıları bulunabiliyorsa J fonksiyoneli $+\infty$'a yakınsayan bir kritik değerler dizisine sahiptir (Fan ve Han 2004).

Tanım 3.4.6. $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığı gibi olsun. $(u_{n_j}) \subset X$ ve $u_{n_j} \in Y_{n_j}$ olmak üzere,

$$J(u_{n_j}) \to c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$(J\,|_{Y_{n_j}})'(u_{n_j}) \to 0, \; X^*\text{'de}$$

koşullarını sağlayan her (u_{n_j}) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse J fonksiyoneli $(\mathbf{PS})_c^*$ *koşulunu sağlar* denir.

Not 3.4.7. Eğer J fonksiyoneli $(\mathbf{PS})_c^*$ koşulunu sağlarsa her $c \in \mathbb{R}$ için $(\mathbf{PS})_c$ koşulunu da sağlar.

Teorem 3.4.8. (Dual Fountain Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ refleksif ve ayrılabilir bir Banach uzayı, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir çift fonksiyonel, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığı gibi olsun. $k_0 > 0$ olmak üzere, herbir $k \geq k_0$ değeri için

i) $\inf\limits_{u \in Z_k, \|u\|_X = \rho_k} J(u) \geq 0$,

ii) $b_k := \max\limits_{u \in Y_k, \|u\|_X = r_k} J(u) < 0$,

iii) $d_k := \inf\limits_{u \in Z_k, \|u\|_X \leq \rho_k} J(u) \to 0$, $k \to +\infty$,

iv) Her $c \in [d_{k_0}, 0)$ için J fonksiyoneli $(\mathbf{PS})_c^*$ koşulunu sağlayacak şekilde $\rho_k > r_k > 0$ pozitif sayıları bulunabiliyorsa J fonksiyoneli sıfıra yakınsayan bir negatif kritik değerler dizisine sahiptir (Fan ve Han 2004).

Teorem 3.4.9. (Brezis-Nirenberg Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayı, $X = X_1 \oplus X_2$ ve $\dim X_2 < \infty$ olacak şekilde X_1 ve X_2 alt uzaylarının direkt toplamı şeklinde yazılabilen bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $(\mathbf{PS})$ koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyonel olsun. Farzedelimki J aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) R bir pozitif sayı ve $\|u\|_X \leq R$ olmak üzere, her $u \in X_1$ için $J(u) \geq 0$ dır,

ii) R bir pozitif sayı ve $\|u\|_X \leq R$ olmak üzere, her $u \in X_2$ için $J(u) \leq 0$ dır,

iii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı ve $\inf\limits_X J < 0$ dır.

Bu durumda J fonksiyoneli sıfırdan farklı en az iki kritik noktaya sahiptir (Boureanu ve Mihailescu 2008).

Teorem 3.4.10. (Saddle Point Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayı, $X = X_1 \oplus X_2$ ve $\dim X_1 < \infty$ olacak şekilde X_1 ve X_2 alt uzaylarının direkt toplamı şeklinde yazılabilen bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $(\mathbf{PS})$ koşulunu sağlayan bir fonksiyonel olsun. Eğer

$\|u_1\|_X = \rho$ olmak üzere, her $u_1 \in X_1$ için

$$J(u_1) < \inf_{u_2 \in X_2} J(u_2)$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ sayısı varsa J fonksiyoneli X üzerinde en az bir kritik noktaya sahiptir (Willem 1996).

Teorem 3.4.11. (Ricceri Kritik Nokta Teoremi) $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı; $\Phi : X \to \mathbb{R}$, sürekli-Gateaux türevlenebilir ve Gateaux türevinin tersi X^* üzerinde sürekli olan, dizisel alttan zayıf yarı-sürekli bir fonksiyonel; $\Psi : X \to \mathbb{R}$, sürekli-Gateaux türevlenebilir ve Gateaux türevi kompakt olan bir fonksiyonel olmak üzere, farz edelimki aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) Her $\lambda > 0$ için $\lim_{\|u\|_X \to \infty} (\Phi(u) + \lambda \Psi(u)) = \infty$,

ii) $\Phi(u_0) < r < \Phi(u_1)$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ ve $u_0, u_1 \in X$ vardır,

iii) $\inf_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r])} \Psi(u) > \frac{(\Phi(u_1) - r)\Psi(u_0) + (r - \Phi(u_0))\Psi(u_1)}{\Phi(u_1) - \Phi(u_0)}$ dir.

Bu durumda öyle bir $\Lambda \subset (0, \infty)$ açık aralığı ve pozitif bir ρ sayısı vardır ki herbir $\lambda \in \Lambda$ için

$$\Phi'(u) + \lambda \Psi'(u) = 0$$

denkleminin X üzerinde, normları ρ dan küçük olan, en az üç çözümü vardır (Mihailescu 2007).

Teorem 3.4.12. (Ekeland Varyasyonel Prensibi) X bir Banach uzayı ve $J : X \to (-\infty, \infty]$ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlıdır,

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı-süreklidir.

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u_\varepsilon) < \inf_{u \in X} J(u) + \varepsilon$$

$$J(u_\varepsilon) < J(u) + \varepsilon d(u_\varepsilon, u), \ u_\varepsilon \neq u$$

olacak şekilde bir $u_\varepsilon \in X$ vardır (Ekeland 1974).

Ekeland Varyasyonel Prensibi'nin başka bir versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.4.13. $(X, \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli alttan sınırlı olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ değeri için

$$J(u) \leq \inf_X J + \epsilon \quad ve \quad \|J'(u)\|_{X^*} \leq \epsilon$$

olacak şekilde bir $u \in X$ vardır (Ekeland 1974).

Teorem 3.4.14. X bir Banach uzayı; $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, (**PS**) koşulunu sağlayan bir çift fonksiyonel ve $\mathfrak{U}$ ile $\gamma(\cdot)$ Tanım 3.1.25'te verildiği gibi olsun. Farzedelimki J aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlıdır,

ii) $\gamma(K) = k$ ve $\sup\limits_{x \in K} J(x) < J(0)$ olacak şekilde bir $K \in \mathfrak{U}$ kompakt kümesi vardır.

Bu durumda J fonksiyoneli, kritik değerleri $J(0)$ dan küçük ve birbirinden farklı olan en az k tane kritik noktaya sahiptir (Clarke 1972).

Teorem 3.4.15. (Ljusternik-Schnirelmann Teorisi) $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli C^1 sınıfından olsun. Bu durumda $\nabla J = J'$ nin S^{n-1} küresi üzerinde en az $2n$ tane farklı özfonksiyonu vardır (Clarke 1972).

Not 3.4.16. Extremum problemleri içersinde en ilgi çekenlerden biri, verilen bir operatörün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının nasıl bulunacağı problemidir. Bu açıdan bakıldığında ve Ljusternik-Schnirelmann teorisi'nin çıkış noktası olan, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ ve $A = (a_{ij})$, N-boyutlu bir simetrik matrix olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \tag{3.4.1}$$

şeklindeki özdeğer problemi gözönünde tutulduğunda, varyasyonel yöntemlerin potansiyel operatörlerle ilgili çalışmalardaki önemi ortaya çıkmaktadır. Çünkü (3.4.1) probleminin çözümünü elde etmek için uygun bir fonksiyonelin extremumlarının incelenmesi gerekmektedir.

Teorem 3.4.17. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ olsun. Farzedelimki J aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) J fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlıdır,

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı-süreklidir,

iii) J fonksiyoneli X üzerinde coercive'dir.

Bu durumda $J(u_0) = \inf\limits_{u \in X} J(u)$ olacak şekilde bir $u_0 \in X$ minimize edici fonksiyonu vardır (Willem 1996).

3.5. Varyasyonel Yaklaşımın Uygulandığı Bazı Önemli Problemler

Bu kısımda varyasyonel yaklaşımın uygulandığı başlıca eliptik denklem tipleri ve problemleri, tez konusu ekseninde, kısaca incelenecektir.

3.5.1. Standart Olmayan Büyüme Koşullu Eliptik Denklemlerin Sınıflandırılması

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathbf{P}^*)$$

şeklindeki denklemler, $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$ olmak üzere, lineer olmayan kısmı oluşturan $F(x,u)$ fonksiyonunun sağladığı standart olmayan büyüme koşullarına göre fiziksel açıdan farklı durumlara karşılık geldiklerinden farklı isimlerle adlandırılırlar. Şöyle ki, $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$ ve $c > 0$ tamsayı olmak üzere, $F(x,u)$ fonksiyonunun sağladığı standart olmayan $p(x)$-büyüme koşulu, her $x \in \Omega$ için $r(x) > 1$, $r \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere

$$|F(x,u)| \le c\left(1 + |u|^{r(x)}\right)$$

şeklinde verilsin.

Buna göre, $(\mathbf{P}^*)$ denklemi

i) $p(x) > r(x)$ ise Sublineer problemi

ii) $p(x) < r(x)$ ise Superlineer problemi

iii) $p(x) = r(x)$ ise Rezonans problemi

olarak adlandırılır.

Bununla birlikte $r(x)$ ile $p^*(x)$, $1 < p(x) < N$, arasındaki ilişkiye göre de $(\mathbf{P}^*)$ denklemi farklı adlarla verilebilir.

Buna göre, $(\mathbf{P}^*)$ denklemi

i) $r(x) < p^*(x) - 1$ ise Subcritical problemi

ii) $r(x) = p^*(x) - 1$ ise Crtical problemi

iii) $r(x) > p^*(x) - 1$ ise Rezonans problemi

olarak adlandırılır.

Not 3.5.2. Eğer $p(x) \ge N$ olursa o zaman $(\mathbf{P}^*)$ denklemi daima bir Subcritical problem belirtir.

3.5.2. Dirichlet ve Neumann Sınır Değer Problemleri

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathéodory koşulu) sağlayan, lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere, Dirichlet sınır koşuluna sahip standart olmayan büyüme koşullu eliptik denklemler için model teşkil edebilecek denklemlerden biri

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklinde verilir. Dirichlet sınır koşuluna sahip bu tip denklemlerle ilgili önemli çalışmalara referans olarak [(Fan ve Zhang 2003), (Fan 2005)] çalışmaları verilebilir.

Benzer şekilde, Neumann sınır koşuluna sahip standart olmayan büyüme koşullu eliptik denklemler için; η, $\partial\Omega$ üzerindeki birim vektör olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

model denklemi verilebilir. Neumann sınır koşuluna sahip bu tip denklemlerle ilgili önemli çalışmalara referans olarak [(Boureanu ve Mihailescu 2008), (Mihailescu 2007)] çalışmaları verilebilir.

3.5.3. Özdeğer Problemi

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $p(x) > 1$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5.1}$$

biçiminde tanımlanan denklem bir lineer olmayan özdeğer problemidir (Mihailescu 2009). Eğer (u, λ) ikilisi (3.5.1) denkleminin bir çözümü ve $u \neq 0$ ise bu durumda

$$\lambda = \lambda(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx} \tag{3.5.2}$$

ve dolaysıyla $\lambda > 0$ olur.

Bununla birlikte, (3.5.1) denkleminin tüm özdeğerlerinden oluşan ve

$$\Lambda = \Lambda_{p(x)} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda,\ (3.5.7)\ \text{denklemi için bir özdeğer}\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye *Spectrum kümesi* denir. Eğer $p(x)$ fonksiyonu sabit ve $p > 1$ ise (3.5.1) denklemi $\sup \Lambda = +\infty$ ve $\inf \Lambda = \lambda_1 = \lambda_{1,p} > 0$ olacak şekilde bir özdeğerler dizisine sahiptir. Burada $\lambda_{1,p}$, $(-\Delta_p)$ operatörünün $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayındaki birinci özdeğeri olup

$$\lambda_{1,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx}{\int_\Omega |u|^p\, dx} \tag{3.5.3}$$

biçiminde tanımlanır. (3.5.3) oranında daima $\inf \Lambda > 0$ iken (3.5.2) için bu durum genel olarak gerçekleşmez, yani çoğu kez $\inf \Lambda = 0$ olmaktadır.

$$\lambda^* = \lambda^*_{p(x)} = \inf \Lambda$$

olmak üzere, Fan ve ark. (2005) tarafından, $N = 1$ iken $\lambda^* > 0$ olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $p(x)$'in monoton olması olduğu gösterilmiş, ayrıca $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ olacak şekilde bir açık küme ve her $x \in \partial U$ için $p(x_0) < p(x)$ (veya $p(x_0) > p(x)$)

olacak şekilde bir $x_0 \in U$ elemanı varsa o zaman keyfi N boyutları için $\lambda^* = 0$ olduğu gösterilmiştir.

3.5.4. Rezonans Problemi

Rezonans problemini, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$ ve $g(x,s) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathéodory koşulu) sağlayan, lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + g(x,u) + f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5.4}$$

model denklemi gözönünde tutulabilir. Buna göre; $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\Delta_p$'nin bir özdeğeri, g sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{|u| \to \pm\infty} \frac{\lambda |u|^{p-2} u + g(x,u)}{|u|^{p-2} u} = \lim_{|u| \to \pm\infty} \frac{g(x,u)}{|u|^{p-2} u} + \lambda = \lambda \qquad ((3.5.5))$$

oluyorsa o zaman (3.5.4) ile verilen denklem (sonsuzda) bir rezonans problemi olur. (3.5.4) denklemi için

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için $|g(x,s)| \leq c$,

ii) h.h.h. $x \in \Omega$ için $\lim\limits_{s \to -\infty} g(x,s) = g_{-\infty}(x)$ ve $\lim\limits_{s \to +\infty} g(x,s) = g^{+\infty}(x)$ limitleri sonlu,

iii) Landesman-Lazer koşulu:
$\int_\Omega g^{+\infty}(x)\,\phi(x)\,dx < \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx < \int_\Omega g_{-\infty}(x)\,\phi(x)\,dx$; ϕ, λ'ya karşılık gelen özfonksiyon,

koşullarının varlığı kabul edilirse, o zaman rezonans probleminin en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir (Landesman ve Lazer 1970).

3.5.5. Kirchhoff Problemi

Kirchhoff problemi (lokal olmayan $p(x)-$Laplace Dirichlet problemi) için**,** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathéodory koşulu) sağlayan, lineer olmayan bir fonksiyon ve $M(t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5.6}$$

model denklemi gözönünde tutulabilir. (3.5.6) problemi, Kirchhoff (1883) tarafından; ρ, P_0, h, E ve L sabitler olmak üzere

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{3.5.7}$$

biçiminde ifade edilen denklemin bir modelidir. Aslında (3.5.7) denklemi, D'Alambert'in dalga denkleminin genelleştirilmiş halidir. Fiziksel olarak, (3.5.6) ile verilen Kirchhoff denklemindeki diverjansın lokal olmayan $M(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx)$ katsayısı, kinetik enerjinin ortalama değerine bağlı bir fonksiyondur. Bununla birlikte, (3.5.7) denkleminin durgun (stationary) hali

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u = f\left(x,u\right), \quad x \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

olarak Lions (1978) tarafından verilmiştir.

4. ELİPTİK BİR DENKLEM SİSTEMİ İÇİN VARYASYONEL ÇÖZÜM

Bu bölümde, her $x \in \mathbb{R}^N$ için $1 < p(x), q(x) < N$ $(N \geq 2)$ ve $F \in C^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \dfrac{\partial F}{\partial u}(x, u, \upsilon), \; x \in \mathbb{R}^N \\ \\ -\Delta_{q(x)} \upsilon = \dfrac{\partial F}{\partial \upsilon}(x, u, \upsilon), \; x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \qquad (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

şeklinde verilen $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ eliptik denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı varyasyonel yaklaşımla incelenerek, aşağıda ifade edilen temel sonuç (Teorem 4.1) Mountain-Pass Teoremi ve Cerami Koşulu kullanılarak elde edilecektir (Oğraş ve ark. 2008).

Teorem 4.1. $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir (zayıf) çözümü vardır.

Bundan sonra

$$W_{p(x),q(x)} := W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \times W_0^{1,q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

şeklinde tanımlanan çarpım uzayı ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|(u, \upsilon)\|_{p(x),q(x)} := \max\{\, \|u\|_{p(x)} + \|\upsilon\|_{q(x)} \,\}, \; \forall\,(u, \upsilon) \in W_{p(x),q(x)}$$

olarak alınacaktır. Burada $\|u\|_{p(x)}$ $(\|u\|_{q(x)})$, $W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $(W_0^{1,q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right))$ uzayındaki normdur. Ayrıca $W^*_{p(x),q(x)}$ uzayı $W_{p(x),q(x)}$ uzayının duali olup, bu uzay $\|\cdot\|_{*,p(x),q(x)}$ normu ile verilecektir.

Bu durumda $W^{-1,p'(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $(W^{-1,q'(x)}\left(\mathbb{R}^N\right))$ uzayı $W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $(W_0^{1,q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right))$ uzayının duali ve $\|\cdot\|_{*,p(x)}$ $(\|\cdot\|_{*,q(x)})$ ise $W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $(W_0^{1,q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right))$ uzayının normu olmak üzere

$$\|J'(u, \upsilon)\|_{*,p(x),q(x)} = \|D_1 J(u, \upsilon)\|_{*,\; p(x)} + \|D_2 J(u, \upsilon)\|_{*,\; q(x)}$$

olarak alınacaktır.

Her (u, υ), $(\varphi, \psi) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$\mathcal{F}(u, \upsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, u(x), \upsilon(x)\right) dx$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$\mathcal{F}'(u, \upsilon)(\varphi, \psi) = D_1 \mathcal{F}(u, \upsilon)(\varphi) + D_2 \mathcal{F}(u, \upsilon)(\psi)$$

olur ki burada

$$D_1\mathcal{F}(u,\upsilon)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\,\varphi dx$$

ve

$$D_2\mathcal{F}(u,\upsilon)(\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)\,\psi dx$$

dir.

$(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ denklem sistemine karşılık gelen Euler-Lagrange fonksiyoneli $J : W_{p(x),q(x)} \to \mathbb{R}$,

$$J(u,\upsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla \upsilon|^{q(x)}}{q(x)}dx - \mathcal{F}(u,\upsilon)$$

olur. Standart argümanlardan $J \in C^1\left(W_{p(x),q(x)},\mathbb{R}\right)$ ve her $(u,\upsilon),(\varphi,\psi) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$J'(u,\upsilon)(\varphi,\psi) = D_1J(u,\upsilon)(\varphi) + D_2J(u,\upsilon)(\psi)$$

dir. Dolaysıyla J fonksiyonelinin kritik noktaları, $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ denklem sisteminnin zayıf çözümleri olur. Burada

$$D_1J(u,\upsilon)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi dx - D_1\mathcal{F}(u,\upsilon)(\varphi)$$

ve

$$D_2J(u,\upsilon)(\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \upsilon|^{q(x)-2}\nabla \upsilon \nabla\psi dx - D_2\mathcal{F}(u,\upsilon)(\psi)$$

dir.

Her $(\varphi,\psi) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \upsilon|^{q(x)-2}\nabla \upsilon\nabla\psi dx \\ = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\,\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)\,\psi dx \end{aligned}$$

oluyorsa o zaman $(u,\upsilon) \in W_{p(x),q(x)}$ ikilisi $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ denklem sisteminin bir zayıf çözümü olur.

Yukarıda ifade edilen $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ denklem sistemi aşağıdaki koşullar altında incelenecektir:

$(F1)$: $F \in C^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ ve $F(x,0,0) = 0$.

$(F2)$: Her $(u,\upsilon) \in \mathbb{R}^2$ ve h.h.h $x \in \mathbb{R}^N$ için

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\right| \leq a_1(x)\left|(u,\upsilon)\right|^{p^- -1} + a_2(x)\left|(u,\upsilon)\right|^{p^+ -1}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)\right| \leq b_1(x)\left|(u,\upsilon)\right|^{q^- -1} + b_2(x)\left|(u,\upsilon)\right|^{q^+ -1}$$

burada

$$1 < p^-,\ q^- \leq p^+,\ q^+ < (p^*)^-, (q^*)^-$$

$$a_i \in L^{\delta(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\beta(x)}\left(\mathbb{R}^N\right),\ b_i \in L^{\gamma(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\beta(x)}\left(\mathbb{R}^N\right),\ i = 1,2.$$

$$\delta(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1},\ \gamma(x) = \frac{q(x)}{q(x)-1},\ \widetilde{p}(x) = \frac{p^*(x)p(x)}{p^*(x)-p(x)},\ \widetilde{q}(x) = \frac{q^*(x)q(x)}{q^*(x)-q(x)}$$

$$\beta(x) = \frac{p^*(x)q^*(x)}{p^*(x)q^*(x) - (p^*(x)+q^*(x))}$$

dir.

$(F3)$: $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial \upsilon})$ olmak üzere, her $(x,u,\upsilon) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ için

$$(u,\upsilon)\cdot \nabla F(x,u,\upsilon) - F(x,u,\upsilon) \leq 0.$$

$(F4)$:

$$\lim_{|(u,\upsilon)|\to 0} \sup \frac{p(x)q(x)\left|F(x,u,\upsilon)\right|}{q(x)a(x)\left|u\right|^{p(x)} + p(x)b(x)\left|\upsilon\right|^{q(x)}} < \lambda_1$$
$$< \lim_{|(u,\upsilon)|\to +\infty} \inf \frac{p(x)q(x)\left|F(x,u,\upsilon)\right|}{q(x)a(x)\left|u\right|^{p(x)} + p(x)b(x)\left|\upsilon\right|^{q(x)}}$$

olacak şekilde $a \in L^{N/p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ ve $b \in L^{N/q(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ pozitif-sınırlı fonksiyonları vardır.

λ_1, $\mathbb{R}^N$'de

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda a(x)\left|u\right|^{p(x)-2}\ u, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_{q(x)}\upsilon = \lambda b(x)\left|\upsilon\right|^{q(x)-2}\ \upsilon, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

şeklinde tanımlı lineer olmayan problemin bir özdeğeri olsun. Ayrıca λ_1

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|\nabla \upsilon|^{q(x)}}{q(x)})dx}{\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{a(x)|u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{b(x)|\upsilon|^{q(x)}}{q(x)})dx} : (u,\upsilon) \in W_{p(x),q(x)} \backslash \{\,(0,0)\,\} \right\}$$

şeklinde karekterize edilsin (Fan ve ark. 2005). Bundan sonraki işlemlerde her $(u,\upsilon) \in W_{p(x),q(x)} \backslash \{(0,0)\}$ için λ_1'in pozitif bir reel sayı olduğu kabul edilecektir.

Yardımcı Teorem 4.2. $C_+^{0,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\mathbb{R}^N$ üzerinde tanımlı Lipschitz-sürekli fonksiyon uzayını göstermek üzere, $p \in C_+^{0,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$ ve her $u \in W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ için

$$|u|_{p^*(x)} \leq c\,\|u\|_{p(x)}$$

olacak şekilde bir c pozitif sayısı vardır [(Diening 2004), (Edmunds ve Rákosník 2000)].

Temel sonucun elde edilebilmesi için öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremler gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 4.3. $(F1)$ ve $(F2)$ koşulları altında $\mathcal{F}$ fonksiyoneli iyi tanımlı ve $W_{p(x),q(x)}$ üzerinde C^1 sınıfından olur ve türevi her $(u,\upsilon), (\omega,z) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$\mathcal{F}'(u,\upsilon)(\omega,z) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\omega dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon) z dx$$

şeklindedir.

İspat. $(F1)$ ve $(F2)$ koşulları altında her $(u,\upsilon) \in W_{p(x),q(x)}$ ikilisi için

$$\begin{aligned} F(x,u,\upsilon) &= \int_0^u \frac{\partial F}{\partial s}(x,s,\upsilon)ds + F(x,0,\upsilon) \\ &= \int_0^u \frac{\partial F}{\partial s}(x,s,\upsilon)ds + \int_0^\upsilon \frac{\partial F}{\partial s}(x,0,s)ds + F(x,0,0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(x,u,\upsilon) \leq\; & c_1[a_1(x)\left(|u|^{p^-} + |\upsilon|^{p^- -1}|u|\right) + a_2(x)\left(|u|^{p^+} + |\upsilon|^{p^+ -1}|u|\right) \\ & + b_1(x)|\upsilon|^{q^-} + b_2(x)|\upsilon|^{q^+}] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Dolaysıyla

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,\upsilon)dx \leq\; & c_2[\int_{\mathbb{R}^N} a_1(x)|u|^{p^-}dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_1(x)|\upsilon|^{p^- -1}|u|dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_2(x)|u|^{p^+}dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} a_2(x)|\upsilon|^{p^+ -1}|u|dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_1(x)|\upsilon|^{q^-}dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|\upsilon|^{q^+}dx] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda, $p^- > 1$ olmak üzere eğer

$$W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{p^- p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \Longrightarrow \left||u|^{p^-}\right|_{p(x)} = |u|^{p^-}_{p^- p(x)} \leq c\,\|u\|^{p^-}_{p(x)}$$

gömmeleri, Teorem 2.9.9, Teorem 2.9.13, Teorem 4.2 ve $a_i \in L^{\delta(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\beta(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $b_i \in L^{\gamma(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ olduğu hesaba katılırsa

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,\upsilon)\,dx \le c_1(|a_1|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^-} \right|_{p(x)} + |a_1|_{\beta(x)} \left| |\upsilon|^{p^- -1} \right|_{q^*(x)} |u|_{p^*(x)} + |a_2|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^+} \right|_{p(x)}$$

$$+ |a_2|_{\beta(x)} \left| |\upsilon|^{p^+ -1} \right|_{q^*(x)} |u|_{p^*(x)} + |b_1|_{\gamma(x)} \left| |\upsilon|^{q^-} \right|_{q(x)} + |b_2|_{\gamma(x)} \left| |\upsilon|^{q^+} \right|_{q(x)})$$

$$= c_1(|a_1|_{\delta(x)} |u|^{p^-}_{p^- p(x)} + |a_1|_{\beta(x)} |\upsilon|^{p^- -1}_{(p^- -1)q^*(x)} |u|_{p^*(x)} + |a_2|_{\delta(x)} |u|^{p^+}_{p^+ p(x)}$$

$$+ |a_2|_{\beta(x)} |\upsilon|^{p^+ -1}_{(p^+ -1)q^*(x)} |u|_{p^*(x)} + |b_1|_{\gamma(x)} |\upsilon|^{q^-}_{q^- q(x)} + |b_2|_{\gamma(x)} |\upsilon|^{q^+}_{q^+ q(x)})$$

$$\le c_3(|a_1|_{\delta(x)} \|u\|^{p^-}_{p(x)} + |a_1|_{\beta(x)} \|\upsilon\|^{p^- -1}_{q(x)} \|u\|_{p(x)} + |a_2|_{\delta(x)} \|u\|^{p^+}_{p(x)}$$

$$+ |a_2|_{\beta(x)} \|\upsilon\|^{p^+ -1}_{q(x)} \|u\|_{p(x)} + |b_1|_{\gamma(x)} \|\upsilon\|^{q^-}_{q(x)} + |b_2|_{\gamma(x)} \|\upsilon\|^{q^+}_{q(x)}) < \infty$$

sonucu elde edilir ki bu $\mathcal{F}$'nin iyi tanımlı olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\mathcal{F}'$'nin de $W_{p(x),q(x)}$ uzayında iyi tanımlı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten $(F2)$ kullanılırsa, her $(\omega,z) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(u,\upsilon)(\omega,z) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\,\omega dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)\,z dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} (a_1(x)\,|(u,\upsilon)|^{p^- -1} + a_2(x)\,|(u,\upsilon)|^{p^+ -1})\,|\omega|\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (b_1(x)\,|(u,\upsilon)|^{q^- -1} + b_2(x)\,|(u,\upsilon)|^{q^+ -1})\,|z|\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} a_1(x)\,|u|^{p^- -1}\,|\omega|\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_1(x)\,|\upsilon|^{p^- -1}\,|\omega|\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} a_2(x)\,|u|^{p^+ -1}\,|\omega|\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_2(x)\,|\upsilon|^{p^+ -1}\,|\omega|\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} b_1(x)\,|u|^{q^- -1}\,|z|\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_1(x)\,|\upsilon|^{q^- -1}\,|z|\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)\,|u|^{q^+ -1}\,|z|\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)\,|\upsilon|^{q^+ -1}\,|z|\,dx
\end{aligned}$$

olur. Teorem 2.9.9, Teorem 2.9.13, Teorem 4.2 ve $\widetilde{p}(x) > p(x)$, $\widetilde{q}(x) > q(x)$ koşulları hesaba katılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)\omega dx &\le |a_1|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^- -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_1|_{\beta(x)} \left| |v|^{p^- -1} \right|_{q^*(x)} |\omega|_{p^*(x)} \\
&+ \ |a_2|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^+ -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_2|_{\beta(x)} \left| |v|^{p^+ -1} \right|_{q^*(x)} |\omega|_{p^*(x)} \\
&\le |a_1|_{\delta(x)} |u|^{p^- -1}_{(p^- -1)p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_1|_{\beta(x)} |v|^{p^- -1}_{(p^- -1)q^*(x)} |\omega|_{p^*(x)} \\
&+ \ |a_2|_{\delta(x)} |u|^{p^+ -1}_{(p^+ -1)p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_2|_{\beta(x)} |v|^{p^+ -1}_{(p^+ -1)q^*(x)} |\omega|_{p^*(x)} \\
\le c_4(|a_1|_{\delta(x)} \|u\|^{p^- -1}_{p(x)} &+ |a_1|_{\beta(x)} \|v\|^{p^- -1}_{q(x)} + |a_2|_{\delta(x)} \|u\|^{p^+ -1}_{p(x)} + |a_2|_{\beta} \|v\|^{p^+ -1}_{q(x)}) \|\omega\|_{p(x)} < \infty
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) z dx \\
\le \ & c_5(|b_1|_{\beta(x)} \|u\|^{q^- -1}_{p(x)} + |b_1|_{\gamma(x)} \|v\|^{q^- -1}_{q(x)} + |b_2|_{\beta(x)} \|u\|^{q^+ -1}_{p(x)} + |b_2|_{\gamma(x)} \|v\|^{q^+ -1}_{q(x)}) \|z\|_{q(x)} \\
< \ & \infty
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir, yani $\mathcal{F}'$ iyi tanımlıdır.

$\mathcal{F}$'nin Fréchet anlamında türevlenebilir olduğunu ispatlamak için sabit bir $(u,v) \in W_{p(x),q(x)}$ ikilisi, herhangi bir $\varepsilon > 0$ değeri ve $(\|\omega\|_{p(x)} + \|z\|_{q(x)}) \le \delta$ özelliğini sağlayan her $(\omega, z) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$
|\mathcal{F}(u+\omega, v+z) - \mathcal{F}(u,v) - \mathcal{F}'(u,v)(\omega,z)| \le \varepsilon(\|\omega\|_{p(x)} + \|z\|_{q(x)}),
$$

olacak şekilde bir $\delta = (\varepsilon, u, v) > 0$ sayısının varlığının gösterilmesi gerekir.

B_r, merkezi $\mathbb{R}^N$'nin orjininde ve yarıçapı r olan bir açık yuvar, B_r' ise $B_r' = \mathbb{R}^N - B_r$ olarak tanımlansın. Ayrıca, $\mathcal{F}_r$ fonksiyoneli $W_0^{1,p(x)}(B_r) \times W_0^{1,q(x)}(B_r)$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın

$$
\mathcal{F}_r(u,v) = \int_{B_r'} F(x, u(x), v(x))\, dx.
$$

Buna göre $(F1)$ ve $(F2)$ koşulları hesaba katılırsa $\mathcal{F}_r \in C^1(W_0^{1,p(x)}(B_r) \times W_0^{1,q(x)}(B_r))$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ek olarak her $(\omega, z) \in W_0^{1,p(x)}(B_r) \times W_0^{1,q(x)}(B_r)$ için

$$
\mathcal{F}_r'(u,v)(\omega,z) = \int_{B_r} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)\omega dx + \int_{B_r} \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) z dx
$$

olduğu da açıktır.

Bunula birlikte, $\mathcal{F}_r' : W_{p(x),q(x)} \to W^*_{p(x),q(x)}$ eşlemesi kompakt olduğundan [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)] her $(u,v), (\omega,z) \in W_{p(x),q(x)}$ için

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{F}(u+\omega, \upsilon+z) - \mathcal{F}(u,\upsilon) - \mathcal{F}'(u,\upsilon)(\omega,z)| \\
\leq\ & |\mathcal{F}_r(u+\omega, \upsilon+z) - \mathcal{F}_r(u,\upsilon) - \mathcal{F}_r'(u,\upsilon)(\omega,z)| \\
& + \left| \int_{B_r'} (F(x,u+\omega,\upsilon+z) - F(x,u,\upsilon) - \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\omega - \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)z) dx \right|
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılabilir. Ortalama değer teoreminden

$$
F(x,u+\omega,\upsilon+z) - F(x,u,\upsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u+\zeta_1\omega,\upsilon)\omega + \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon+\zeta_2 z)z
$$

olacak şekilde $\zeta_1, \zeta_2 \in (0,1)$ sayıları vardır. Dolaysıyla $(F2)$ koşulu hesaba katılırsa

$$
\left| \int_{B_r'} (\frac{\partial F}{\partial u}(x,u+\zeta_1\omega,\upsilon)\omega + \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon+\zeta_2 z)z - \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\omega - \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)z) dx \right|
$$

$$
\leq \left| \int_{B_r'} (a_1(x)(|u+\zeta_1\omega|^{p^- -1} - |u|^{p^- -1}) + a_2(x)(|u+\zeta_1\omega|^{p^+ -1} - |u|^{p^+ -1}))\,|\omega|\,dx \right.
$$

$$
\left. + \int_{B_r'} (b_1(x)(|\upsilon+\zeta_2 z|^{q^- -1} - |\upsilon|^{q^- -1}) + b_2(x)(|\upsilon+\zeta_2 z|^{q^+ -1} - |\upsilon|^{q^+ -1}))\,|z|\,dx \right|
$$

elde edilir. $|a+b|^s \leq 2^{s-1}(|a|^s + |b|^s)$ eşitsizliğinin yardımıyla her $a,b \in \mathbb{R}^N$ için

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left(2^{p^- -1} - 1\right) \int_{B_r'} a_1(x)\,|u|^{p^- -1}\,|\omega|\,dx + (\zeta_1 2)^{p^- -1} \int_{B_r'} a_1(x)\,|\omega|^{p^- -1}\,|\omega|\,dx \\
& + \left(2^{p^+ -1} - 1\right) \int_{B_r'} a_2(x)\,|u|^{p^+ -1}\,|\omega|\,dx + (\zeta_1 2)^{p^+ -1} \int_{B_r'} a_2(x)\,|\omega|^{p^+ -1}\,|\omega|\,dx \\
& + \left(2^{q^- -1} - 1\right) \int_{B_r'} b_1(x)\,|\upsilon|^{q^- -1}\,|z|\,dx + (\zeta_2 2)^{q^- -1} \int_{B_r'} b_1(x)\,|z|^{q^- -1}\,|z|\,dx \\
& + \left(2^{q^+ -1} - 1\right) \int_{B_r'} b_2(x)\,|\upsilon|^{q^+ -1}\,|z|\,dx + (\zeta_2 2)^{q^+ -1} \int_{B_r'} b_2(x)\,|z|^{q^+ -1}\,|z|\,dx
\end{aligned}
$$

olur. Teorem 2.9.9, Teorem 2.9.13 ve Teorem 4.2 uygulanırsa

$$
\leq c_6(|a_1|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^- -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_1|_{\delta(x)} \left| \ |\omega|^{p^- -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)}
$$

$$
+ |a_2|_{\delta(x)} \left| |u|^{p^+ -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)} + |a_2|_{\delta(x)} \left| |\omega|^{p^+ -1} \right|_{p^*(x)} |\omega|_{\widetilde{p}(x)}
$$

$$+\left|b_1\right|_{\gamma(x)}\left|\left|\upsilon\right|^{q^--1}\right|_{q^*(x)}\left|z\right|_{\widetilde{q}(x)}+\left|b_1\right|_{\gamma(x)}\left|\left|z\right|^{q^--1}\right|_{q^*(x)}\left|z\right|_{\widetilde{q}(x)}$$

$$+\left|b_2\right|_{\gamma(x)}\left|\left|\upsilon\right|^{q^+-1}\right|_{q^*(x)}\left|z\right|_{\widetilde{q}(x)}+\left|b_2\right|_{\gamma(x)}\left|\left|z\right|^{q^+-1}\right|_{q^*(x)}\left|z\right|_{\widetilde{q}(x)})$$

$$\leq c_7((\left|a_1\right|_{\delta(x)}\left\|u\right\|_{p(x)}^{p^--1}+\left|a_1\right|_{\delta(x)}\left\|\omega\right\|_{p(x)}^{p^--1})+(\left|a_2\right|_{\delta(x)}\left\|u\right\|_{p(x)}^{p^+-1}+\left|a_2\right|_{\delta(x)}\left\|\omega\right\|_{p(x)}^{p^+-1}))\left\|\omega\right\|_{p(x)}$$

$$+((\left|b_1\right|_{\gamma(x)}\left\|\upsilon\right\|_{q(x)}^{q^--1}+\left|b_1\right|_{\gamma(x)}\left\|z\right\|_{q(x)}^{q^--1})+(\left|b_2\right|_{\gamma(x)}\left\|\upsilon\right\|_{q(x)}^{q^+-1}+\left|b_2\right|_{\gamma(x)}\left\|z\right\|_{q(x)}^{q^+-1}))\left\|z\right\|_{q(x)}$$

olur. $r\to\infty$ iken r'nin yeterince büyük değerleri için, $i=1,2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|a_i\right|_{L^{\delta(x)}(B_r')} &\to 0 \\ \left|b_i\right|_{L^{\gamma(x)}(B_r')} &\to 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

olacağından

$$\begin{aligned}&\left|\int_{B_r'}(F(x,u+\omega,\upsilon+z)-F(x,u,\upsilon)-\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\upsilon)\omega-\frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x,u,\upsilon)z)dx\right| \\ \leq\ &\varepsilon(\left\|\omega\right\|_{p(x)}+\left\|z\right\|_{q(x)})\end{aligned}$$

sonucu elde edilirki bu $\mathcal{F}$'nin Fréchet anlamında türevlenebilir olduğunu gösterir. Son olarak $\mathcal{F}'$'nin $W_{p(x),q(x)}$ üzerinde sürekli olduğunu gösterebilmek için $(u_n,\upsilon_n)\to(u,\upsilon)$ olacak şekilde $(u_n,\upsilon_n),(u,\upsilon)\in W_{p(x),q(x)}$ alınsın. Buna göre, her $(\omega,z)\in W_{p(x),q(x)}$ için yazılır ve $(F2)$ koşulu kullanılırsa

$$\int_{B_r'}a_1(x)(\left|u_n\right|^{p^--1}+\left|u\right|^{p^--1}+\left|\upsilon_n\right|^{p^--1}+\left|\upsilon\right|^{p^--1})\left|\omega\right|dx$$

$$+\int_{B_r'}a_2(x)(\left|u_n\right|^{p^+-1}+\left|u\right|^{p^+-1}+\left|\upsilon_n\right|^{p^+-1}+\left|\upsilon\right|^{p^+-1})\left|\omega\right|dx\quad(I_1)$$

$$+\int_{B_r'}b_1(x)(\left|u_n\right|^{q^--1}+\left|u\right|^{q^--1}+\left|\upsilon_n\right|^{q^--1}+\left|\upsilon\right|^{q^--1})\left|z\right|dx$$

$$+\int_{B_r'}b_2(x)(\left|u_n\right|^{q^+-1}+\left|u\right|^{q^+-1}+\left|\upsilon_n\right|^{q^+-1}+\left|\upsilon\right|^{q^+-1})\left|z\right|dx\quad(I_2)$$

elde edilir. Doaysıyla,

$$
\begin{aligned}
I_1 \leq & \int_{B_r'} a_1(x)\,|u_n|^{p^- - 1}\,|\omega|\,dx + \int_{B_r'} a_1(x)\,|u|^{p^- - 1}\,|\omega|\,dx \\
& + \int_{B_r'} a_1(x)\,|\upsilon_n|^{p^- - 1}\,|\omega|\,dx + \int_{B_r'} a_1(x)\,|\upsilon|^{p^- - 1}\,|\omega|\,dx \\
& + \int_{B_r'} a_2(x)\,|u_n|^{p^+ - 1}\,|\omega|\,dx + \int_{B_r'} a_2(x)\,|u|^{p^+ - 1}\,|\omega|\,dx \\
& + \int_{B_r'} a_2(x)\,|\upsilon_n|^{p^+ - 1}\,|\omega|\,dx + \int_{B_r'} a_2(x)\,|\upsilon|^{p^+ - 1}\,|\omega|\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\leq c_9(|a_1|_{\delta(x)}\,\|u_n\|_{p(x)}^{p^- - 1} + |a_1|_{\delta(x)}\,\|u\|_{p(x)}^{p^- - 1} + |a_1|_{\beta(x)}\,\|\upsilon_n\|_{q(x)}^{p^- - 1} + |a_1|_{\beta(x)}\,\|\upsilon\|_{q(x)}^{p^- - 1}
$$

$$
+ |a_2|_{\delta(x)}\,\|u_n\|_{p(x)}^{p^+ - 1} + |a_2|_{\delta(x)}\,\|u\|_{p(x)}^{p^+ - 1} + |a_2|_{\beta(x)}\,\|\upsilon_n\|_{q(x)}^{p^+ - 1} + |a_2|_{\beta(x)}\,\|\upsilon\|_{q(x)}^{p^+ - 1})\,\|\omega\|_{p(x)}
$$

ve benzer olarak

$$
I_2 \leq c_{10}(|b_1|_{\beta(x)}\,\|u_n\|_{p(x)}^{q^- - 1} + |b_1|_{\beta(x)}\,\|u\|_{p(x)}^{q^- - 1} + |b_1|_{\gamma_{(x)}}\,\|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^- - 1} + |b_1|_{\gamma_{(x)}}\,\|\upsilon\|_{q(x)}^{q^- - 1}
$$

$$
+ |b_2|_{\beta(x)}\,\|u_n\|_{p(x)}^{q^+ - 1} + |b_2|_{\beta(x)}\,\|u\|_{p(x)}^{q^+ - 1} + |b_2|_{\gamma(x)}\,\|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^+ - 1} + |b_2|_{\gamma(x)}\,\|\upsilon\|_{q(x)}^{q^+ - 1})\,\|z\|_{q(x)}
$$

olur. $\mathcal{F}_r'$, $W_0^{1,p(x)}(B_r) \times W_0^{1,q(x)}(B_r)$ üzerinde sürekli olduğundan $n \to \infty$ iken

$$
|\mathcal{F}_r'(u_n, \upsilon_n)(\omega, z) - \mathcal{F}_r'(u, \upsilon)(\omega, z)| \to 0
$$

olur. Ayrıca, (4.1) ifadesi kullanılıp r yeterince büyük alınırsa I_1 ve I_2 ifadeleri de sıfır olur. Dolaysıyla $(u_n, \upsilon_n) \to (u, \upsilon)$ iken

$$
|\mathcal{F}'(u_n, \upsilon_n)(\omega, z) - \mathcal{F}'(u, \upsilon)(\omega, z)| \to 0
$$

elde edilir ki bu $\mathcal{F}'$ nin, $W_{p(x),q(x)}$ üzerinde sürekli olduğunu gösterir. □

Yardımcı Teorem 4.4. $(F1)$ ve $(F2)$ koşulları altında $\mathcal{F}'$ fonksiyoneli $W_{p(x),q(x)}$'den $W_{p(x),q(x)}^*$'ye kompakttır.

İspat. (u_n, υ_n), $W_{p(x),q(x)}$ uzayında sınırlı bir dizisi olsun. $W_{p(x),q(x)}$ refleksif uzay olduğundan (u_n, υ_n) dizisi $W_{p(x),q(x)}$'de zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur (kolaylık açısından bu alt dizi de (u_n, υ_n) olarak gösterilecektir). Bu durumda, yukarıdaki işlemlerle benzer adımlar takip edilirse

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathcal{F}'\left(u_n, \upsilon_n\right)(\omega, z)-\mathcal{F}'(u, \upsilon)(\omega, z)\right| \\
& \leq\left|\mathcal{F}_r'\left(u_n, \upsilon_n\right)(\omega, z)-\mathcal{F}_r'(u, \upsilon)(\omega, z)\right| \\
& +\left|\int_{B_r'}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, \upsilon_n)-\frac{\partial F}{\partial u}(x, u, \upsilon)\right) \omega dx\right| \\
& +\left|\int_{B_r'}\left(\frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x, u_n, \upsilon_n)-\frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x, u, \upsilon)\right) z dx\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kısıtlama operatörü sürekli olacağından $W_0^{1,p(x)}(B_r) \times W_0^{1,q(x)}(B_r)$'de $(u_n, \upsilon_n) \rightharpoonup (u, \upsilon)$ olur. $\mathcal{F}_r'$'nin kompakt olduğu gözönünde tutulur ve $n \to \infty$ alınırsa, eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra gider. Ve yine r'nin yeterince büyük değerleri için I_1 ve I_2 ifadelerinin de sıfır olduğu görülür. Bu durumda $\mathcal{F}'$ fonksiyonelinin $W_{p(x),q(x)}$'den $W^*_{p(x),q(x)}$'ye kompaktlığı elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.5. Eğer $(F1)$, $(F2)$ ve $(F3)$ koşulları sağlanırsa o zaman J fonksiyoneli Cerami koşulunu (kısaca (C) koşulu) sağlar, yani

i) $|J(u_n, \upsilon_n)| \leq c$,

ii) $n \to +\infty$ iken $(1 + \|u_n\|_{p(x)} + \|\upsilon_n\|_{q(x)}) \|J'(u_n, \upsilon_n)\|_{*,p(x),q(x)} \to 0$,

koşullarını sağalyan her $(u_n, \upsilon_n) \in W_{p(x),q(x)}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

İspat. (ii) koşulundan, her $(\omega, z) \in W_{p(x),q(x)}$ için $n \to \infty$ iken $J'(u_n, \upsilon_n)(\omega, z) \leq \xi_n \to 0$ olduğu açıktır. Şimdi $(\omega, z) = (u_n, \upsilon_n)$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
\xi_n & \geq J'(u_n, \upsilon_n)(u_n, \upsilon_n) \\
& \geq \|u_n\|_{p(x)}^{p^-} + \|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^-} - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, \upsilon_n) u_n + \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x, u_n, \upsilon_n) \upsilon_n\right) dx
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bununla birlikte, (i) koşulundan

$$
c \geq -J(u_n, \upsilon_n) \geq -\frac{1}{p^+} \|u_n\|_{p(x)}^{p^-} - \frac{1}{q^+} \|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^-} + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, \upsilon_n) dx
$$

elde edilir. $(F3)$ koşulu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\xi_n + c &\geq J'(u_n, \upsilon_n)(u_n, \upsilon_n) - J(u_n, \upsilon_n) \\
&\geq (1 - \frac{1}{p^+}) \|u_n\|_{p(x)}^{p^-} + (1 - \frac{1}{q^+}) \|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^-} + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, \upsilon_n) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, \upsilon_n) u_n + \frac{\partial F}{\partial \upsilon}(x, u_n, \upsilon_n) \upsilon_n) dx \\
&\geq (1 - \frac{1}{p^+}) \|u_n\|_{p(x)}^{p^-} + (1 - \frac{1}{q^+}) \|\upsilon_n\|_{q(x)}^{q^-}
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir ki bu (u_n, υ_n) dizisinin $W_{p(x),q(x)}$'de sınırlı olduğunu gösterir. Dolaysıyla, (u_n, υ_n) dizisi $W_{p(x),q(x)}$'de zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur (kolaylık açısından bu alt dizi de (u_n, υ_n) olarak gösterilecektir). Şimdi (u_n, υ_n) dizisinin bir Cauchy alt dizisine sahip olduğunun gösterilmesi gerekir.

Buna göre, '$\cdot$', $\mathbb{R}^N$'deki standart iç çarpım ve $a, b \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere

$$
2^{2-p} |a - b|^p \leq \left(a |a|^{p-2} - b |b|^{p-2}\right) \cdot (a - b)\,;\; p \geq 2 \text{ ise} \tag{4.2}
$$

$$
(p - 1) |a - b|^2 (|a| + |b|)^{p-2} \leq \left(a |a|^{p-2} - b |b|^{p-2}\right) \cdot (a - b)\,;\; 1 < p < 2 \text{ ise} \tag{4.3}
$$

eşitsizlikleri kullanılacaktır. Bununla birlikte, U_p ve U_q kümeleri

$$
\mathsf{U}_p = \{x \in \mathbb{R}^N : p(x) \geq 2\},\; \mathsf{V}_p = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 < p(x) < 2\}
$$

$$
\mathsf{U}_q = \{x \in \mathbb{R}^N : q(x) \geq 2\},\; \mathsf{V}_q = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 < q(x) < 2\}
$$

olarak, $\Phi_{n,k}$ ve $\Phi_{n,k}$ ise

$$
\Phi_{n,k} = (|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot (\nabla u_n - \nabla u_k),
$$

$$
\Phi_{n,k} = (|\nabla u_n| + |\nabla u_k|)^{2-p(x)}
$$

şeklinde alınacaktır. Buna göre,

$p(x) \geq 2$ iken; (4.2) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 2^{2-p^+}\int_{\mathsf{U}_p} |\nabla u_n - \nabla u_k|^{p(x)}\,dx \\
\leq\ & \int_{\mathsf{U}_p} ((|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k)\cdot(\nabla u_n - \nabla u_k))dx \\
\leq\ & \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{n,k}dx := \mathsf{T}_{n,k} \\
=\ & (D_1J(u_n,\upsilon_n) - D_1J(u_k,\upsilon_k) + D_1\mathcal{F}(u_n,\upsilon_n) - D_1\mathcal{F}(u_k,\upsilon_k))\,(u_n - u_k) \\
\leq\ & (\|D_1J(u_n,\upsilon_n)\|_{*,p(x),q(x)} + \|D_1J(u_k,\upsilon_k)\|_{*,p(x),q(x)})\,\|u_n-u_k\|_{p(x)} \\
& + \|D_1\mathcal{F}(u_n,\upsilon_n) - D_1\mathcal{F}(u_k,\upsilon_k)\|_{*,p(x),q(x)}\,\|u_n-u_k\|_{p(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$1 < p(x) < 2$ iken; (4.3) eşitsizliği ve Teorem 2.9.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathsf{V}_p} |\nabla u_n - \nabla u_k|^{p(x)}\,dx \\
\leq\ & \int_{\mathsf{V}_p} |\nabla u_n - \nabla u_k|^{p(x)}\,(|\nabla u_n| + |\nabla u_k|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}}\,(|\nabla u_n| + |\nabla u_k|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}\,dx \\
\leq\ & 2\left|\,|\nabla u_n - \nabla u_k|^{p(x)}\,\Psi_{n,k}^{-\frac{p(x)}{2}}\right|_{\frac{2}{p(x)}} \times \left|\Psi_{n,k}^{\frac{p(x)}{2}}\right|_{\frac{2}{2-p(x)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & 2\max\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2\,\Psi_{n,k}^{-1}dx\right)^{\frac{p^-}{2}}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2\,\Psi_{n,k}^{-1}dx\right)^{\frac{p^+}{2}}\right\} \\
& \times\max\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_{n,k}^{\frac{p(x)}{2-p(x)}}dx\right)^{\frac{2-p^-}{2}}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_{n,k}^{\frac{p(x)}{2-p(x)}}dx\right)^{\frac{2-p^+}{2}}\right\} \\
\leq\ & 2\max\left\{(p^- - 1)^{-\frac{p^-}{2}}\,T_{n,k}^{\frac{p^-}{2}}, (p^- - 1)^{-\frac{p^+}{2}}\,T_{n,k}^{\frac{p^+}{2}}\right\} \\
& \times\max\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_{n,k}^{\frac{p(x)}{2-p(x)}}dx\right)^{\frac{2-p^-}{2}}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_{n,k}^{\frac{p(x)}{2-p(x)}}dx\right)^{\frac{2-p^+}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $T_{n,k}$'nın, n ve k'ya göre $W_0^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$'de düzgün sınırlı olduğu, $m \to +\infty$ iken $\|J'(u_m,\upsilon_m)\|_{*,p(x),q(x)} \to 0$ olduğu, $\mathcal{F}'$'nin kompaktlığı ve Teorem 2.9.2 gözönünde tutulursa

$$\lim_{n,k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_k|^{p(x)}\,dx = 0$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n,k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla \upsilon_n-\nabla \upsilon_k|^{q(x)}\,dx=0$$

olacak şekilde bir (u_n,υ_n) alt dizisi bulunabilir. Dolaysıyla, uygun bir alt dizi için, Teorem 2.9.1'den

$$\lim_{n,k\to+\infty}\|(u_n,\upsilon_n)-(u_k,\upsilon_k)\|_{*,p(x),q(x)}=0$$

olur. Bu durumda; (u_n,υ_n) dizisinin bir Cauchy alt dizisine sahip olduğu ve dolaysıyla $W_{p(x),q(x)}$'de güçlü yakınsak bir alt diziye sahip olduğu anlaşılır. □

Yardımcı Teorem 4.6. $(F_1)-(F_4)$ koşulları altında J fonksiyoneli aşağıdaki önermeleri sağlar:

i) $\|u\|_{p(x)}+\|\upsilon\|_{q(x)}=\rho$ olmak üzere her $(u,\upsilon)\in W_{p(x),q(x)}$ için $J(u,\upsilon)\geq\sigma>0$ olacak şekilde ρ ve σ pozitif sayıları vardır.

ii) $\|E\|_{p(x),q(x)}>\rho$ ve $J(E)<0$ olacak şekilde bir $E\in W_{p(x),q(x)}$ vardır.

İspat. $(F4)$ koşulundan $\|u\|_{p(x)}+\|\upsilon\|_{q(x)}=\rho$ olacak şekilde bir $\rho>0$ sayısı bulunabilir. Dolaysıyla

$$F(x,u,\upsilon)<\lambda_1\left(\frac{a(x)|u|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{b(x)|\upsilon|^{q(x)}}{q(x)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\upsilon)<\lambda_1\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{a(x)|u|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{b(x)|\upsilon|^{q(x)}}{q(x)}\right)dx$$

yazılabilir. λ_1'in tanımından

$$\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\upsilon)<\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{|\nabla \upsilon|^{q(x)}}{q(x)}\right)dx$$

$$0<\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{|\nabla \upsilon|^{q(x)}}{q(x)}\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\upsilon)=J(u,\upsilon)$$

olduğu elde edilir. Dolaysıyla $J\geq\sigma>0$ olacak şekilde bir $\sigma>0$ sayısı vardır.

$(F4)$ koşulundan öyle bir pozitif ϵ sayısı bulunabilir ki budurumda t'nin yeterince büyük değerleri için, $(\tau,\theta)\in W_{p(x),q(x)}$ olmak üzere

$$F\left(x,t^{1/p(x)}\tau,t^{1/q(x)}\theta\right)\geq t(\lambda_1+\epsilon)\left(\frac{a(x)|\tau|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{b(x)|\theta|^{q(x)}}{q(x)}\right)$$

olur. Dolaysıyla

$$
\begin{aligned}
& J\left(t^{1/p(x)}\tau, t^{1/q(x)}\theta\right) \\
= \;& t\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|\nabla\tau|^{p(x)}}{p\left(x\right)}+\frac{|\nabla\theta|^{q(x)}}{q\left(x\right)}\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F\left(x,t^{1/p(x)}\tau,t^{1/q(x)}\theta\right)dx \\
\leq \;& t\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{|\nabla\tau|^{p(x)}}{p\left(x\right)}+\frac{|\nabla\theta|^{q(x)}}{q\left(x\right)})dx-t\left(\lambda_1+\epsilon\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a\left(x\right)|\tau|^{p(x)}}{p\left(x\right)}dx+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b\left(x\right)|\theta|^{q(x)}}{q\left(x\right)}dx\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki buradan

$$
J\left(t^{1/p(x)}\tau, t^{1/q(x)}\theta\right)\leq-\epsilon t(\left(\frac{1}{p^+}\int_{\mathbb{R}^N}a\left(x\right)|\tau|^{p(x)}dx+\frac{1}{q^+}\int_{\mathbb{R}^N}b\left(x\right)|\theta|^{q(x)}dx\right)
$$

olduğu çıkar. Bu son ifadeden $\lim\limits_{t\to+\infty}J\left(t^{1/p(x)}\tau, t^{1/q(x)}\theta\right)=-\infty$ ve sonuç olarak t'nin yeterince büyük değerleri için $J\left(t^{1/p(x)}\tau, t^{1/q(x)}\theta\right)\leq 0$ olduğuğ elde edilir. İspat biter.
□

Temel Sonuç 4.7. (Teorem 4.1'in ispatı)

Yardımcı Teorem 4.5 ve Yardımcı Teorem 4.6'dan hareketle (Mountain-Pass Geometrisi) J fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır. Dolaysıyla, $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözümü vardır. Teorem 4.1'in ispatı tamamlanmış olur.
□

5. KIRCHHOFF DENKLEMİ İÇİN VARYASYONEL ÇÖZÜM

Doktora çalışmasının bu son bölümünde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün ve sınırlı bir bölge ve $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $1 < p\left(x\right) < N$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f\left(x,u\right),\ x \in \Omega \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathbf{P})$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)-$Laplace Dirichlet problemi ($p(x)-$Kirchhoff problemi) incelenerek, varyasyonel yaklaşım ve Krasnoselskii Genus teorisi yardımıyla bu denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu $W_0^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ uzayında elde edilecektir (Mashiyev ve ark. 2011).

($\mathbf{P}$) denklemine karşılık gelen Euler-Lagrange fonksiyoneli $J : W_0^{1,p(x)} \to \mathbb{R}$,

$$I\left(u\right) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega F\left(x,u\right)dx,$$

olur. Burada $\widehat{M}\left(t\right) = \int_0^t M\left(s\right)ds$ ve $F\left(x,u\right) = \int_0^u f\left(x,t\right)dt$ dir. Standart argümanlardan $I \in C^1(W_0^{1,p(x)}\left(\Omega\right),\mathbb{R})$ dir ve her $u,\upsilon \in W_0^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ için I fonksiyonelinin türevi

$$\left\langle I'\left(u\right),\upsilon\right\rangle = M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\upsilon dx - \int_\Omega f\left(x,u\right)\upsilon dx,$$

olur.

($\mathbf{P}$) Probleminin çözümü için aşağıdaki varsayımlar kabul edilecektir:

(M_1) $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu süreklidir ve her $t > 0$ reel sayısı için aşağıdaki büyüme koşulunu sağlar

$$m_1 t^{\beta-1} \le M(t) \le m_2 t^{\alpha-1},$$

Burada m_1, m_2 reel sayıları için $0 < m_1 \le m_2$ olup, $\alpha \ge \beta > 1$ dir.

(f_1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \ge 0$ reel sayısı ve $x \in \overline{\Omega}$ için süreklidir ve aşağıdaki büyüme koşulunu sağlar

$$C_1\left|t\right|^{s(x)-1} \le f\left(x,t\right) \le C_2\left|t\right|^{q(x)-1}.$$

Burada C_1, C_2 pozitif tam sayılar ve $s,q \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$, $1 < s\left(x\right) < q\left(x\right) < p^*\left(x\right)$ dir.

(f_2) f fonksiyonu her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in \overline{\Omega}$ için t'ye göre tektir, yani

$$f\left(x,t\right) = -f\left(x,-t\right).$$

(**P**) Problemiyle ilgili temel sonuçlarımız aşağıda verilen teoremlerdir:

Teorem 5.1. Farzedelim ki (M_1), (f_1) ve (f_2) koşulları sağlansın. Eğer her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) < q(x) < p^*(x)$ ve $q^+ < \beta p^-$ oluyorsa (**P**) denklemi sonsuz çözüme sahiptir.

Teorem 5.2. Farzedelim ki (M_1), (f_1) ve (f_2) koşulları sağlansın. Eğer her $x \in \overline{\Omega}$ için $q(x) < p(x) < p^*(x)$ oluyorsa (**P**) denklemi $I(\pm u_k) < 0$ olacak şelilde sonsuz bir $(\pm u_k)_{k=1}^{\infty}$ çözüm dizisine sahiptir.

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'nin sağlandığını göstermek için Yardımcı Teorem 5.6 ve Yardımcı Teorem 5.7 ispatlanarak**,** aşağıdaki ((Clarke 1972)'de verilen) yardımcı teoremlerin sonuçlardan faydalanılacaktır.

Yardımcı Teorem 5.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, açık sınırlı simetrik bir küme ve $\partial\Omega$ bu kümenin sınırı olmak üzere, $\gamma(\partial\Omega) = N$ dir.

Yardımcı Teorem 5.4. S^{N-1}, $N-1$ boyutlu bir küre olmak üzere $\gamma\left(S^{N-1}\right) = N$ dir.

Yardımcı Teorem 5.5. X bir Banach uzayı; $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, (**PS**) koşulunu sağlayan bir fonksiyonel ve $\mathfrak{U}$ ile $\gamma(\cdot)$ Tanım 3.1.25'te verildiği gibi olsun. Farzedelim ki I aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) I fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlıdır ve çifttir,

ii) $\gamma(K) = k$ ve $\sup\limits_{x\in K} I(x) < I(0)$ olacak şekilde bir $K \in \mathfrak{U}$ kompakt kümesi vardır.

Bu durumda I fonksiyoneli, kritik değerleri $I(0)$'dan küçük ve birbirinden farklı olan en az k tane kritik noktaya sahiptir.

Yardımcı Teorem 5.6. Eğer (M_1), (f_1) ve $q^+ < \beta p^-$ koşulları sağlanıyorsa I fonksiyoneli alttan sınırlıdır.

İspat. (M_1) ve (f_1) koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} I(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\ &\geq m_1 \int_0^{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx} \xi^{\beta-1} d\xi - \frac{C_2}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}\,dx \\ &= \frac{m_1}{\beta}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right)^\beta - \frac{C_2}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}\,dx. \end{aligned}$$

çıkar.

Teorem 2.9.1 ve Teorem 2.10.7 yardımıyla, $\|u\|$'nin yeterince büyük değerleri için

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{m_1}{\beta\left(p^+\right)^\beta}\|u\|^{\beta p^-} - \frac{C_2}{q^-}\max\left\{|u|_{q(x)}^{q^-}, |u|_{q(x)}^{q^+}\right\} \\ &\geq \frac{m_1}{\beta\left(p^+\right)^\beta}\|u\|^{\beta p^-} - \frac{C_2}{q^-}\max\left\{C^{q^-}\|u\|^{q^-}, C^{q^+}\|u\|^{q^+}\right\} \\ &\geq \frac{m_1}{\beta\left(p^+\right)^\beta}\|u\|^{\beta p^-} - \frac{C_2 C^{q^+}}{q^-}\|u\|^{q^+}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. Dolaysıyla I fonksiyoneli alttan sınırlı olur. □

Yardımcı Teorem 5.7. Eğer (M_1), (f_1) ve $q^+ < \beta p^-$ koşulları sağlanıyorsa I fonksiyoneli (**PS**) koşulunu sağlar.

İspat. Farzedelim ki $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 'da

$$I(u_n) \to c \text{ ve } I'(u_n) \to 0 \tag{5.2}$$

koşullarını sağlayan bir (u_n) dizisi verilsin (yani (u_n) bir (**PS**) dizisi olsun). (5.2)'den $|I(u_n)| \leq C_4$ olduğu açıktır. Ek olarak (5.1) de gözönünde bulundurulursa, $\|u_n\| > 1$ için

$$C_4 \geq I(u_n) \geq \frac{m_1}{\alpha\left(p^+\right)^\alpha}\|u_n\|^{\beta p^-} - \frac{C_3}{q^-}\|u_n\|^{q^+} \geq C_5,$$

olur. $q^+ < \beta p^-$ olduğundan $(\|u_n\|)$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olur. Dolaysıyla (u_n)'in zayıf bir yakınsak alt dizisi

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{'de } u_n \rightharpoonup u,$$

olacak şekilde vardır. Teorem 2.10.7'den

$$\begin{aligned} L^{q(x)}(\Omega) \text{'de } u_n &\rightharpoonup u, \\ \Omega\text{'da } u_n &\rightharpoonup u, \end{aligned}$$

yazılabilir. (5.2)'den, $\langle I'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$ dir. Buna göre,

$$\langle I'(u_n), u_n - u\rangle = M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\,dx$$

$$-\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)\,dx \to 0$$

olur. (f_1) ve Teorem 2.9.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\,dx\right| &\leq C_2\left|\int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\,dx\right| \\ &\leq C_6\left||u_n|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)}|u_n-u|_{q(x)}\end{aligned}$$

elde edilir. (u_n) dizisi $L^{q(x)}(\Omega)$'deki bir u elemanına güçlü yakınsadığından

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\,dx \to 0$$

olur. Dolaysıyla

$$M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)\,dx \to 0$$

olur. (M_1) koşulundan

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)\,dx \to 0$$

çıkar. Sonuç olarak, (S_+) koşulundan hareketle, $\{u_n\}$ dizisi $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$'deki bir u elemanına güçlü yakınsar. İspat biter. $\square$

Temel Sonuç 5.8. (Teorem 5.1'in ispatı)

$\mathfrak{U}$ sınıfı, Tanım 3.1.25'te verildiği gibi olsun. Buna göre

$$\mathfrak{U}_k = \{E \subset \mathfrak{U} : \gamma(E) \geq k\}$$

$$c_k = \inf_{E\in\mathfrak{V}_k}\sup_{u\in E} I(u),\ k = 1,2,...$$

olarak yazılsın. Bu durumda

$$-\infty < c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_k \leq c_{k+1} \leq ...$$

olur. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $c_k < 0$ olduğunun gösterilmesi gerekir. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı refleksif ve ayrılabilir bir Banach uzayı olduğundan, herhangi $k \in \mathbb{N}$ elemanı için $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$'nin $X_k \subset C_0^\infty(\Omega)$ olacak şekilde bir k-boyutlu lineer X_k alt uzayı seçilebilir. X_k uzayında tanımlanan normlar denk olacağından, bir $u \in X_k$ elemanı için $\|u\| \leq r_k$ ve $|u|_{L^\infty} \leq \delta$ olacak şekilde $r_k \in (0,1)$ sayıları bulunabilir.

Buna göre, $S_{r_k}^{(k)} = \{u \in X_k : \|u\| = r_k\}$ kompakt kümesi oluşturulsun. $S_{r_k}^{(k)}$'nın kompaktlığı ve (f_1) koşulu gözönünde bulundurulursa, her $u \in S_{r_k}^{(k)}$ elemanı için

$$\int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{C_1}{s^+}\int_\Omega |u|^{s(x)}\,dx \geq \eta_k \tag{5.3}$$

olacak şekilde $\eta_k > 0$ sayıları bulunabilir.

$u \in S_{r_k}^{(k)}$ ve $t \in (0,1)$ için (M_1) ve (f_1) koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I(tu) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla tu|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega F(x,tu)dx \\
&\le m_2\left(\int_\Omega \frac{|\nabla tu|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)^\alpha - \frac{C_1}{s^+}\int_\Omega |tu|^{s(x)}dx \\
&\le \frac{m_2}{\alpha(p^-)^\alpha}t^{\alpha p^-}r_k^{\alpha p^-} - t^{s^+}\eta_k \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

olur. $s^+ < q^- \le q^+ < \beta p^- \le \alpha p^-$ olduğundan, her $u \in S_{r_k}^{(k)}$ elemanı için

$$I(t_k u) \le -\varepsilon_k < 0$$

olacak şekilde $t_k \in (0,1)$ ve $\varepsilon_k > 0$ sayıları bulunabilir.

Bu son ifade, her $u \in S_{t_k r_k}^{(k)}$ elemanı için

$$I(u) \le -\varepsilon_k < 0$$

anlamına gelir. Buradan açıktır ki $\gamma(S_{t_k r_k}^{(k)}) = k$ ve dolaysıyla $c_k \le -\varepsilon_k < 0$. Buna göre, Yardımcı Teorem 5.6 ve Yardımcı Teorem 5.7'nin sonuçlarından hareketle Yardımcı Teorem 5.5 uygulanırsa I fonksiyonelinin en az k tane farklı kritik noktası olduğu anlaşılır. Bununla birlikte k keyfi seçildiğinden, I fonksiyonelinin sonsuz tane farklı kritik noktaya sahip olur. İspat biter.

Temel Sonuç 5.9. (Teorem 5.2'nin ispatı)

İlk olarak, I fonksiyonelinin coercive olduğunun gösterilmesi gerekir. Yardımcı Teorem 5.6'daki benzer adımlar takip edilir ve $q^+ < p^-$ koşulu dikkate alınırsa I'nın coercive'liği kolaylıkla çıkar. Bununla birlikte I fonksiyoneli alttan zayıf yarı-sürekli olduğundan, I minimumu değerini $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında alır, yani $(\mathbf{P})$ denklemi bir çözüme sahiptir. Ayrıca I coercive olduğundan, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde $(\mathbf{PS})$ koşulunu sağlar. (f_2) koşulundan, I fonksiyoneli çifttir. İspatın kalan kısmında Teorem 5.1'dekine benzer işlemler uygulanacağından, ayrıntılara yer verilmeden devam edilecektir. Buna göre, (5.3) ve (5.4)'deki adımlar takip edilir ve $s^+ < q^- \le q^+ < p^- < \alpha p^-$ koşulu göz önünde bulundurulursa, her $u \in S_{t_k r_k}^{(k)}$ elemanı için

$$I(u) \le -\varepsilon_k < 0$$

olacak şekilde $t_k \in (0,1)$ ve $\varepsilon_k > 0$ sayıları bulunabilir. Açıktır ki, $\gamma(S_{t_k r_k}^{(k)}) = k$ ve dolaysıyla $c_k \le -\varepsilon_k < 0$. Sonuç olarak, Krasnoselskii genus teoremi'nden hareketle herbir c_k, I fonksiyoneli için bir kritik nokta olur. Dolaysıyla I fonksiyoneli, $I(\pm u_k) < 0$ olacak şelilde sonsuz bir $(\pm u_k)_{k=1}^\infty$ çözüm dizisine sahiptir. □

6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının özünü oluşturan son iki bölümde standart olmayan büyüme koşullarına sahip lineer olmayan bir elliptik denklem ve Kirchhoff denklemi ele alınmış ve bazı koşullar altında bu denklemlerin çözümlerinin varlığı varyasyonel yöntemler kullanılarak gösterilmiştir. Bu doktora çalışmasının dördüncü bölümünde incelenen $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ eliptik denklem sistemi bir özdeğer problemi olup, bu problem türü halihazırda kesin sonuçlar elde edilememiş bir problemdir. Bunun temel sebebi

$$\lambda = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx}$$

oranın varlığı ve karakterizasyonu hakkındaki belirsizlikten, yani bu oranın genel olarak sıfır olmasından kaynaklanmaktadır. Dolaysıyla, $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ denklem sisteminde tanımlanan λ_1 özdeğeri için $\lambda_1 \neq 0$ koşulunun kabul edilmesiyle λ_1 hakkındaki belirsizlik ortadan kaldırılmıştır. Bu açıdan değerlendirildiğinde $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ denklem sisteminin $\lambda_1 \neq 0$ koşulu olmaksızın incelenmesiyle elde edilecek sonuçların ilgili literatüre önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte beşinci bölümde incelenen problemler, M ve f sürekli fonksiyonlarının sağladığı farklı, nisbeten daha az sınırlayıcı koşullar altında veya farklı metotlarla tekrar ele alınabilir.

7. KAYNAKLAR

Adams D. R., Hedberg L. I. 1996. Function Spaces and Potential Theory. Springer-Verlag. Berlin.

Adams R. A. Sobolev Space. 1975. Academic Press. New York.

Adams R. A. Fournier J. J. 2003. Sobolev Space. Elsevier Science.

Alves C. O., Souto M. A. S. 2005. Existence of Solutions for a Class of Problems involving the $p(x)$-Laplacian. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl. 66:17–32.

Antonsev S., Shmarev S. A. 2005. A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions. Nonlinear Anal. 60:515-545.

Boureanu M. M., Mihailescu M. 2008. Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving variable exponent growth conditions. Glasgow Math. J. 50:565-574.

Boureanu M. M. 2006. Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$-Laplace operator. Electronic Journal of Differential Equations. 97:1–10.

Calota L. 2008. On some quasilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents and non-standard growth conditions. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 15:249–256.

Chen Y., Levine S., Rao M. 2006. Variable exponent linear growth functionals in image restoration. SIAM J. Appl. Math. 66:1383-1406.

Clarke D. C. 1972. A variant of the Lusternik Schnirelman theory. Indiana Univ. Math. J. 22: 65-74.

Diening L. 2004. Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$. Math. Nachr. 268(1):31-43.

D. E. Edmunds and J. Rákosník. 2000. Sobolev embedding with variable exponent. Studia Math. 143:267-293.

Ekeland I. 1974. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47:324-353.

Fan X. L., Zhao D. 2001. On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 263:424-446.

Fan X. L., Shen J., Zhao D. 2001. Sobolev Embedding Theorems for $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749-760.

Fan X. L., Zhao Y. Z., Zhao D. 2001. Compact Imbedding Theorems with Symmetry of Strauss-Lions type for the Space $W^{1,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 255:333-348.

Fan X. L., Zhang Q. 2003. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal. 52:1843-1852.

Fan X. L., Zhang Q., Zhao D. 2005. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem. J. Math. Anal. Appl. 302:306–317.

Fan X. L. 2005. Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients. J. Math. Anal. Appl. 312:464–477.

Fan X. L., Han X. 2004. Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal. 59:173-188.

Fan X. L. 2010. On nonlocal $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal. 72:3314-3323.

Harjulehto P., Hästö P., Lê Út. V., Nuortio M. 2010. Overview of differential equations with non-standard growth. Nonlinear Anal. 72:551 4574.

Hudzik H. 1976. On generalized Orlicz-Sobolev space. Funct. Approx. Comment. Math. 4:37-51.

Kirchhoff G. 1883. Mechanik. Teubner. Leipzig.

Kovăčik O., Rákosník J. 1991. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 41(116):592–618.

Landesman E. M., Lazer A.C. 1970. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. J. Math. Mech. 19:609–623.

Lions J. L. 1978. On some equations in boundary value problems of mathematical physics. in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat. Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), in: North-Holland Math. Stud. 30:284–346.

Marcellini P. 1991. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with (p, q)-growth conditions. J. Differential Equations. 90(1):1–30.

Mashiyev R. A., Ogras S., Yucedag Z., Avci M. 2010. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplacian equation. J. Korean Math. Soc. 47(4):845–860.

Mashiyev R. A., Cekic B., Avci M. 2011. Existence and multiplicity of the solutions of the $p(x)$-Kirchhoff type equation via genus theory. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Accepted manuscript.

Mihăilescu M. 2007. Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$-Laplace operator. Nonlinear Anal. 67:1419-1425.

Mihăilescu M. 2006. Elliptic problems in variable exponent spaces. Bull. Austral. Math. Soc. 74:197-206.

Mihailescu M. 2009. Ph. D. Research Proposal Some Eigenvalue Problems for Partial Differential Elliptic Operators. Department of Mathematics and its Applications Central European University. Budapest, Hungary.

Musayev B., Alp M. 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları Tic. Ltd. Şti. Kütahya.

Musielak J. 1983. Orlicz Spaces and Moduler Spaces. Springer-Verlag. Berlin.

Nakano H. 1950. Modulared Semi-ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd. Tokyo.

Nakano H. 1951. Topology and Topological Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd.Tokyo.

Ogras S., Mashiyev R. A., Avci M., Yucedag Z. 2008. Existence of solutions for a class of elliptic systems in involving the $(p(x), q(x))$-Laplacian. J. Inequal. Appl. Article ID 612938.16 pp.

Orlicz W. 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math. 3:200-212.

Rajagopal K. R., Růžička M. 2001. Mathematical modelling of electrorheological fluids. Continuum Mech. Thermdyn. 13:59-78.

Růžička M. 2000. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin.

Sharapudinov I. I. 1979. On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. Math. Notes. 26.No. 3-4. 796-806.

Siddiqi A. H. 2004. Applied Functional Analysis. Marcel Dekker Inc. New York.

Tsenov I. V. 1961. Generalization of tha problem of best approximation of a function in the space L^s (Russian). Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 7:25-37.

Willem M. 1996. Minimax Theorems. Birkhauser. Basel.

Winslow W. M. 1949. Induced fibration of suspensions. J. Applied Physics. 20:1137-1140.

Zang A. 2008. $p(x)$-Laplacian equations satisfying Cerami condition. J. Math. Anal. Appl. 337:547–555.

Zhikov V. V. 1987. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. Math. USSR-Izv. 29.(1):33-66.

ÖZGEÇMİŞ

1976 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2001 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans, 2007 yılında yükseklisans öğrenimimi tamamladım. 2001-2010 tarihleri arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı farklı okullarda öğretmenlik yaptım. 2010 yılından beri Dicle Üniversitesi Diyarbakır Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim iki çocuğum var.