

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ UYARLAMALI REGRESYON EĞRİLERİ
VE KONİK PROGRAMLAMA İLE ZAMAN SERİLERİNİN
MODELLENMESİ

Seçil TOPRAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran 2011

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bana bilimsel bakış açısı kazandıran danışman hocam Sayın Doç. Dr. Pakize TAYLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca beni yalnız bırakmayıp bana destek olan eşim Doç. Dr. Abdullah TOPRAK' a ve sevgili aileme ve yine kıymetli bilgilerinden faydalandığım Yrd. Doç. Dr. Ahmet KAYA'ya, sıkıntılı anlarımda bana manevi desteğini esirgemeyen arkadaşım Arife ATAY'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
ÇİZELGE LİSTESİ.....	VII
ŞEKİL LİSTESİ.....	VIII
EK LİSTESİ.....	IX
KISALTMA VE SİMGELER.....	X
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	3
3. MATERYAL ve METOT.....	5
3.1. Materyal.....	5
3.2. Metot.....	5
3.2.1. Zaman Serileri.....	5
3.2.1.1 Box-Jenkins (B.J.) Tahmin Modelleri.....	10
- AR (Autoregressive) Modeller.....	11
- MA (Moving Average) Modeller.....	12
- ARMA (Autoregressive Moving Average) Modeller.....	13
- ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) Modeller.....	14
3.2.1.2 Modelin Uygunluk Testi.....	15
3.2.1.3 Box-Jenkins Yönteminin Üstün ve Zayıf Yönleri.....	16
- Üstün Yönleri.....	16
- Zayıf Yönleri.....	16
3.2.1.4 Zaman Serilerinin Analizi.....	17
3.2.2 Doğrusal Regresyon ve En Küçük Kareler Yöntemi.....	18
3.2.2.1 Doğrusal Regresyon Yöntemi.....	18

- Otokorelasyonun Ölçümü ve Düzeltilmesi	18
3.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemi	20
3.2.3 Tikhonov Düzenlemesi	21
3.2.4 Çok Değişkenli Uyarlamalı Regresyon Eğrileri (MARS)	24
3.2.5 Konveks ve Konik Karesel Programlama (CQP)	27
3.2.5.1 Konik Karesel Programlama için Çözüm Metotları	30
3.2.5.2 Konik Karesel Programlamanın Kompleksliği	31
3.2.6 MARS Kullanılarak Zaman Serilerinin Doğrusal Olmayan Modellemesi	32
3.2.6.1 AR(1) Zaman Serileri Modelinin Simülasyonları	38
3.2.6.2 Doğrusal Olmayan Eşik Değerli Zaman Serileri Modelinin Simülasyonları	39
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	41
4.1 Zaman Serileri için Doğrusal Regresyon	41
4.1.1 Prais-Winsten Yaklaşımı Kullanılarak Otokorelasyonun Düzeltilmesi	42
4.1.2 En Küçük Kareler Metodu ile Zaman Serisi Parametrelerinin Tahmini	43
4.2 Zaman Serileri için Tikhonov Düzenlemesi ve Singüler Değer Ayrışımı	44
4.3 Zaman Serileri için Konik Karesel Programlama	45
4.4 Konik Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Ototregresyon (C-ASTAR)	48
4.4.1 Tikhonov Regresyon Metodu ile Düzenlenmiş ASTAR	48
4.4.2 Tikhonov Düzenlemesinin Uygulanması	56
4.4.3 Konik Karesel Programlama ile ASTAR için Oluşturulan Tikhonov Düzenlemesine Alternatif Bir Yaklaşım	57
4.4.3.1 Konik Karesel Programlama Probleminin Oluşturulması	57
4.4.3.2 Ceza Parametresi ve Üst Sınırların Seçimi	60
4.5 Sayısal Örnek	60
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	77
5.1 Uygulamada Kullanılan Veri Setlerinin Tanımlanması	77
5.2 Onaylama Yaklaşımı ve Karşılaştırma Ölçütleri	77
5.3 Modellerin Oluşturulması	80

5.3.1	Doğrusal Regresyon Modelinin Oluşturulması.....	80
5.3.2	ASTAR Modelinin Oluşturulması.....	81
5.3.3	C-ASTAR Modelinin Oluşturulması.....	81
5.4	Modellerin Karşılaştırılması.....	81
5.5	Sonuç.....	83
6.	KAYNAKLAR	85
	EKLER	91
	ÖZGEÇMİŞ	107

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ UYARLAMALI REGRESYON EĞRİLERİ VE KONİK PROGRAMLAMA İLE ZAMAN SERİLERİNİN MODELLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seçil TOPRAK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

Bu çalışmada Stevens' in (1991), Friedman (1991) tarafından geliştirilen çok değişkenli uyarlamalı regresyon eğrileri (MARS) algoritmasını kullanarak geliştirdiği uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon (ASTAR) modeli ve ikinci dereceden konik karesel programlama (CQP) kullanılarak elde ettiğimiz konik ASTAR (C-ASTAR) modeli ele alınmaktadır.

İstatistiksel öğrenmede modern bir yöntem olan MARS, hem sınıflandırma hem de regresyonda çok büyük bir öneme sahiptir. Çok boyutlu problemlerin çözümünde oldukça elverişli olan MARS, doğrusal olmayan çok değişkenli fonksiyonlara uygunluk bakımından da büyük bir olanak sağlamaktadır. MARS tekniği, bağımsız değişkenlerle bağımlı değişkenler arasında belirli bir ilişki biçimi öngörmez. Bir başka deyişle, bağımlı değişkeni tanımlamak için bağımsız değişkenlerin eklemeli ve etkileşimsel katkılarına yer vermektedir. Bu ise MARS' ın önemli bir avantajı olan, temel fonksiyonların katkısını tahmin etme yeteneğini ortaya koymaktadır.

MARS algoritmasında bağımsız değişkenlerin yerine zaman serisi sisteminin önceki değerleri yerleştirildiğinde Tong (1983) tarafından geliştirilen eşik değerli otoregresyon (TAR) modelinin bir uzantısı olan ASTAR modeli elde edilmektedir. Model fonksiyonunu tahmin etmek için ASTAR algoritması da MARS algoritması gibi, modelde yer alacak temel fonksiyonları belirleme ve en iyi modelin elde edilmesini sağlayan iki aşamalı bir algoritmadan oluşur.

Çalışmada ASTAR algoritmasının ikinci aşaması için Taylan ve ark. (2010) tarafından geliştirilen yeni bir yaklaşım uygulanmıştır. Bu yaklaşım ile Tikhonov düzenlemesi şeklini alan ASTAR modeli ikinci dereceden konik karesel programlama (CQP) problemine dönüştürülmüştür. Bu optimizasyon problemindeki sınırların çok amaçlı optimizasyon yaklaşımı kullanarak belirlenmesiyle çok sayıda seçenek çözüm elde edilebilmektedir. Böylece kullanıcının amacına en uygun çözüme ulaşması hedeflenmektedir.

Çalışmada ayrıca bağımsız değişken değerleri arasındaki iç ilişki giderilerek (People Emich 2010) zaman serisine doğrusal regresyon modeli uygulanmıştır.

Sonuç olarak, iki ayrı veri kümesine doğrusal regresyon modeli, ASTAR algoritması ve Konik ASTAR (C-ASTAR) algoritması uygulanarak, üç yaklaşımın başarımları çeşitli ölçüler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman serileri, Çok değişkenli uyarlamalı regresyon eğrileri (MARS), Uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon (ASTAR), Tikhonov düzenlemesi, Çok amaçlı optimizasyon, Konik karesel programlama (CQP)

ABSTRACT

TIME SERIES MODELLING USING MULTIVARIATE ADAPTIVE REGRESSION SPLINES AND CONIC QUADRATIC PROGRAMMING

MSc THESIS

Seçil TOPRAK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2011

This dissertation investigates the use of adaptive spline threshold autoregression (ASTAR), due to Stevens (1991), which was developed using multivariate adaptive regression splines (MARS), due to Friedman (1991), and use of conic ASTAR (C-ASTAR) which was obtained using conic quadratic programming (CQP).

MARS, a modern technology in statistical learning, has importance in regression and classification. MARS is very useful for high dimensional problems and shows a great promise for fitting nonlinear multivariate functions. MARS technique does not impose any particular class of relationship between the predictor variables and outcome variable of interest. In other words, a special advantage of MARS lies in its ability to estimate the contribution of the basis functions so that both the additive and interaction effects of the predictors are allowed to determine the response variable.

By letting the predictor variables in the MARS algorithm be lagged values of a time series system, one obtains a univariate ASTAR model for nonlinear autoregressive threshold modeling and analysis of time series, thereby extending the threshold autoregression (TAR) time series methodology developed by Tong. ASTAR consists of two complementary algorithms as MARS. To estimate the model function, as MARS algorithm, ASTAR has two stepwise algorithms which provide to determinate basis functions stand in the model and to get best appropriate model. Because the model obtained with forward stepwise algorithm used in the first step has very complex structure in the second step using backward stepwise algorithm basis functions remove in turn to reach optimum model.

In this study a new approach developed by Taylan ve ark. (2010) was applied for the second stepwise algorithm of ASTAR. With this approach ASTAR model turned to Tikhonov regularization problem was transformed to CQP problem. When bounds of this optimization problem are determined using multiobjective optimization approach, too many solutions can be obtained. Thus, it is aimed to attain optimum solution.

Moreover, in this study, regression model for time series is emphasized and is supplied to apply time series by deleting deficiencies of it (People Emich 2010).

In conclusion, regression model, ASTAR algorithm and C-ASTAR algorithm were applied to two different data sets and these three approaches performances were compared by using different measures.

Key Words: Time series, Multivariate adaptive regression splines (MARS), Adaptive splines threshold autoregression (ASTAR), Tikhonov regularization, Multiobjective optimization, Conic quadratic programming (CQP).

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Çizelge No</u>		<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.1.	CPCR verisi için performans ölçüm değerleri	82
Çizelge 5.2.	CPVR verisi için performans ölçüm değerleri	82

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1.	δ ye karşı gelen $\ \beta\ _2$ nin minimum değerlerinin eğrisi	22
Şekil 3.2.	$\ \beta\ _2$ ve $\ X\beta - y\ _2$ nin optimal değerlerinin eğrisi	22
Şekil 3.3.	Basit MARS Modeli	24
Şekil 3.4.	Bir MARS Modelde Değişken Etkileşimleri	24
Şekil 3.5.	Bir MARS Modeldeki Temel Fonksiyonlar	25
Şekil 4.1.	Bir ASTAR Modeldeki Temel Fonksiyonlar	48
Şekil 4.2.	X_{t-1} ve X_{t-3} değişkenleri arasındaki etkileşimin grafiksel gösterimi	61

EK LİSTESİ

<u>Ek No</u>		<u>Sayfa</u>
Ek 1.	CPCR ve CPVR Verisi	91
Ek 2.	Sayısal Örnekteki Hata Kareler Toplamı	93
Ek 3.	CPCR ve CPVR Verilerinin ASTAR ve C-ASTAR Denklemi için Grafiksel Gösterimler	103
Ek 4.	\sqrt{M} Değerleri	106

KISALTMA VE SİMGELER

Kısaltmalar

$Adj-R^2$: Düzeltilmiş belirlilik katsayısı
AR	: Autoregressive
$AR(p)$: p . dereceden AR model
$AR(p, d)$: d kez indirgenmiş p . dereceden AR model
ARIMA	: Autoregressive integrated moving average
$ARIMA(p, d, q)$: p terimli AR model ve q terimli MA modelinin d kez indirgenmiş bir kombinasyonu
ARMA	: Autoregressive moving average
$ARMA(p, q)$: p terimli AR ve q terimli MA modelinin bir kombinasyonu
ASTAR	: Uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon
B.J.	: Box-Jenkins
C-ASTAR	: Konik uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon
CQP	: İkinci dereceden konik karesel programlama
CPCR	: Chemical Process Concentration Readings
CV	: Cross validation
CPVR	: Chemical Process Viscosity Readings
D-L	: Durbin-Watson testi için alt sınır
D-U	: Durbin-Watson testi için üst sınır
DW	: Durbin-Watson testi
GCV	: Genelleştirilmiş çapraz doğrulama
GP	: Geometrik programlama
GSVD	: Genelleştirilmiş singüler değer ayrışımı
IPM	: İç nokta metotları
LP	: Doğrusal programlama
MA	: Moving average
$MA(q)$: q . dereceden MA modeli
$MA(d, q)$: d kez indirgenmiş q . dereceden MA model
MAE	: Ortalama mutlak hata
MAPE	: Ortalama mutlak yüzde hata
MARS	: Çok değişkenli uyarlamalı regresyon eğrileri
MATLAB	: MATLAB bilgisayar programı

MOSEK	: MOSEK bilgisayar programı
MSE	: Hata kareler ortalaması
PRESS	: Tahmini hata kareler toplamı
PRSS	: Cezalı hata kareler toplamı
R^2	: Belirlilik katsayısı
$R^2(pred)$: Tahmin edilmiş belirlilik katsayısı
RMSE	: Hata kareler ortalaması kökü
RSS	: Hata kareler toplamı
SDP	: Yarı tanımlı programlama
STATA	: STATA bilgisayar programı
SMSTAR	: Yarı çok değişkenli uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon
TAR	: Eşik değerli otoregresyon
YFBCP	: Yields From Batch Chemical Process

Mantık

=	: Eşittir
:=	: İki nokta eşitliği
\approx	: Hemen hemen eşittir
<	: Küçüktür
>	: Büyüktür
\leq	: Küçük veya eşittir
\geq	: Büyük veya eşittir
\ll	: Çok daha küçüktür
\gg	: Çok daha büyüktür

Kümeler

\subseteq	: Altkümesidir
\times	: Kartezyen çarpım
\cup	: Çoklu birleşim

Bazı Özel Kümeler

\mathbb{N}_0	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Gerçek sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	: n boyutlu gerçek sayılar kümesi
$int\Omega$: Ω 'nın içi

Matematiksel Semboller

Σ	: Toplam sembolü
Π	: Çarpım sembolü
$\ \cdot \ _2$: Öklit normu
Δ	: Fark işleci
∂	: Kısmi türev sembolü
\int	: İntegral sembolü
V^T	: V matrisinin transpozu
$(V)^{-1}$: V matrisinin tersi
H	: Şapka matrisi
argmin_x	: x 'in argümanlara göre minimumu
$\max(a, b)$: a ve b 'nin maksimumu
$\min(m, n)$: m ve n 'nin minimumu

İstatistiksel Semboller

B	: Geriye öteleme işleci
ε_t	: t -inci hata terimi
H_0	: Başlangıç hipotezi
H_1	: Karşıt hipotez
μ	: Kitle ortalaması
$N(0, \sigma_\varepsilon^2)$: 0 ortalamalı ve σ_ε^2 varyanslı normal dağılım
σ_ε^2	: Hata teriminin varyansı

1. GİRİŞ

Zamanın fonksiyonu olarak elde edilmiş verilerin oluşturduğu seriler olarak bilinen zaman serileri, geleceğe yönelik tahminler yapmanın en önemli yollarından biridir. Birçok araştırma ve uygulamada zaman serileri modelleri ve analizi doğrusal modellerle ilişkilendirilmektedir. Bu, doğrusal zaman serisi teorisinin yeterli olgunluğa ulaşmış ve birçok istatistiksel paketin doğrusal zaman serileri modelleri için oluşturulmuş olmasından kaynaklanmaktadır. Ancak genellikle, doğrusal olmayan zamana bağlı sistemler doğrusal modeller ile açıklanamadığından bu modeller tarafından ele alınamaz.

İstatistiksel öğrenme için modern bir metot olan çok değişkenli uyarlamalı regresyon eğrileri (MARS), sınıflandırma ve regresyonda çok önemli bir yere sahiptir. Temel fonksiyonların katkısını ve tahmin edicinin katkı ve etkileşim etkisini tahmin etme yetisi bakımından özel bir avantaja sahip olması MARS' ı çok boyutlu problemler için kullanışlı bir araç yapmaktadır. MARS algoritması iki aşamadan meydana gelmektedir (Friedman 1991). İlk aşamada uygunluğun eksikliği ölçütüne dayalı olarak kullanılan ileriye doğru adım algoritmasıyla elde edilen model istenilenden daha karmaşık bir yapıya sahip olduğundan dolayı ikinci aşamada geriye doğru adım algoritması ile hata karelerinin toplamına en az katkıda bulunan temel fonksiyonlar modelden çıkarılarak en iyi modele ulaşılmaktadır.

Bu çalışmamızda, sistematik otoregresif modelleme ve doğrusal olmayan tek değişkenli zaman serisi sistemleri için MARS kullanılarak elde edilen uyarlanabilir eğri eşik değerli otoregresyon (ASTAR) modeli kullanılmış ve ASTAR'ın ikinci aşamasını oluşturan geriye doğru eleme yöntemi yerine Taylan ve ark. (2008)'den faydalanılarak penaltı yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla bir Tikhonov düzenleme problemi olarak ASTAR için cezalandırılmış hata kareler toplamı oluşturulmuştur. Bu problem ele alınırken geriye doğru eleme yöntemine bir alternatif ve önemli bir tamamlayıcı teknik olarak düşünülen sürekli optimizasyon teknikleri (Nemirovski 2001) kullanılmıştır. Özellikle, iyi yapılandırılmış, doğrusal programlamaya benzeyen ve bundan dolayı da iç nokta yöntemlerini kullanmaya olanak sağlayan ikinci dereceden konik karesel programlama (CQP) kullanılmıştır (Nemirovski 2001). Bu optimizasyon problemindeki kısıtların çok amaçlı optimizasyon yaklaşımı kullanarak belirlenmesiyle çok sayıda

1. GİRİŞ

seçenek çözüm elde edilebilmektedir. Böylece kullanıcının amacına en uygun çözüme ulaşması hedeflenmektedir.

Çalışmada ayrıca doğrusal regresyon, ASTAR algoritması ve Konik ASTAR (C-ASTAR) algoritması iki ayrı veri setine uygulanarak, üç yaklaşımın başarımları çeşitli ölçüler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Aster ve ark. 2004 isimli kitapta; singüler değer ayrışımı ve Tikhonov düzenleme problemi hakkında bilgi verilmiştir.

Box ve Jenkins 1976 isimli kitapta; zaman serileri ele alınmıştır. Zaman serileri çeşitli başlıklar altına ayrılarak her bir başlığa uygun zaman serisi modeli tanıtılmıştır. Bu modellerin ne zaman ve nerde kullanılması gerektiğini belirtmek amacıyla gerekli açıklamalar yapılırken modelin tanımlanması ve tahminlenmesi için ayrıca bölümlere yer verilmiştir. Zaman serilerinin tahmin etme ve kontrol amacıyla nasıl kullanıldığı da kitabın ana teması olarak işlenmiştir.

Charles ve Ostram 1990 isimli kitapta; zaman serileri için regresyon teknikleri üzerinde durulmaktadır.

Friedman 1991 isimli makalede; çok değişkenli uyarlamalı regresyon eğrileri (MARS) ele alınmıştır. MARS'ın en ince ayrıntısına kadar incelendiği makalede MARS'ın her iki aşaması da ayrı ayrı açıklanmış ve örnekler üzerinde etkinlikleri göz önüne serilmiştir.

Hansen 1998 isimli kitapta; rank yetersizliği ve kesikli kötü koşullu problemler üzerinde durulmaktadır.

MATLAB isimli bilgisayar programında; çeşitli matematiksel formüllerin çözümü için kodlar yazılarak zamandan tasarruf edilmesi ve olası hataların önüne geçilmesi söz konusudur.

MOSEK isimli bilgisayar programında; konik karesel problemlerin çözümü için MATLAB ara yüzü yardımıyla kodlar yazılmaktadır.

Nemirovski 2005 isimli kitapta; ikinci dereceden konik karesel programlama (CQP) hakkında bilgi verilmiştir.

Nesterov 1993 isimli kitapta; konveks problemlerin çözümü için iç noktalar metodu anlatılmaktadır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Salford Systems isimli bilgisayar programında; eldeki veri setleri için MARS algoritması uygulanmakta ve ileriye doğru adım algoritması ile elde edilen temel fonksiyonlardan en az katkıya sahip olanlar geri adım algoritmasıyla elenerek optimum modele ulaşılmaktadır.

STATA isimli bilgisayar programında; zaman serileri için regresyon uygulamasında ardışık hatalar arasındaki otokorelasyonu düzeltmek için kullanılan Prais-Winsten regresyonu bulunmaktadır.

Stevens 1991 isimli tezde; sistematik otoregresif modelleme ve doğrusal olmayan tek değişkenli ve yarı-çok değişkenli zaman serisi sistemleri için MARS kullanılarak ASTAR ve SMASTAR modelleri oluşturulmuştur. Elde edilen yeni modeller için Fortran programı ile kodlar yazılarak çalıştırılmış ve veri setleri üzerinde denenerek bu yeni modellerin etkinlikleri diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır.

Taylan ve ark. 2010 isimli makalede; Tikhonov düzenlemesi ve sürekli optimizasyon teknikleri kullanılarak MARS algoritması yeniden düzenlenerek MARS modeline yeni bir katkı sağlanmıştır.

Yerlikaya 2008 isimli tezde; MARS'ın ikinci aşamasını oluşturan geriye doğru eleme yöntemi yerine penaltı yönteminin kullanılması önerilmektedir. Bu amaçla bir Tikhonov düzenleme problemi olarak MARS için cezalandırılmış hata kareler toplamı oluşturulmuştur. Bu problem ele alınırken geriye doğru eleme yöntemine bir alternatif ve önemli bir tamamlayıcı teknik olarak düşünülen sürekli optimizasyon teknikleri kullanılmıştır. Özellikle, iyi yapılandırılmış, doğrusal programlamaya benzeyen ve bundan dolayı da iç nokta yöntemlerini kullanmaya olanak sağlayan ikinci dereceden konik karesel programlama (CQP) kullanılmıştır.

Burada belirtilen makale, kitap, tezler ve bilgisayar programları dışında kaynaklar bölümünde yer alan *internet çıktıları, makaleler, kitaplar ve tezler* de bu çalışmada kullanılan metod ve denklemlerin incelenmesinde yol gösterici olmuştur.

3. MATERYAL VE METOT

3.1 Materyal

Bu Yüksek lisans Tez Çalışması, geleceğe yönelik öngörü yapmak için geçmişteki verileri kullanan ve istatistiksel bir seri olan zaman serilerinin, istatistiksel öğrenmenin veri uyumlu tekniklerinden MARS ve modern sürekli optimizasyon tekniklerinden CQP ile modellenmesi üzerine kurulmuştur. Zaman serilerinin tanım ve modelleri verilerek seçilen modele doğrusal regresyon uygulanacak ve sistematik otoregresif modelleme ve doğrusal olmayan zaman serisi sistemleri için MARS kullanılacaktır. Ayrıca oluşturulan bu yeni model istatistikte Ridge regresyonu olarak bilinen Tikhonov düzenlemesi problemi şeklinde yazılarak CQP ile çözüm elde edilecektir.

Materyal olarak kullandığımız “zaman serileri” kavramı ile ilgili olarak çeşitli kaynaklar araştırılmış, genel tanımların yanında zaman serilerine MARS uygulandığı görülmüştür. Ancak MARS uygulanmış zaman serilerine Tikhonov regresyonu ve CQP uygulandığına rastlanmamıştır.

Temelde ne olduğu hakkında fikir sahibi olduktan sonra elde ettiğimiz sonuçlar açık bir dille anlatılmıştır.

3.2 Metot

Zaman serilerinin MARS ve CQP ile modellenmesinin anlaşılabilmesi adına ön hazırlık olarak doğrusal regresyon ve en küçük kareler yöntemi, otokorelasyon, singüler değer ayrışımı, Tikhonov regresyonu ve CQP tanıtılmıştır.

Zaman serilerinin en bilinen tanımları ve bilinmesi gereken ana başlıkları anlatılarak MARS’a geçiş için temel oluşturulmuştur.

3.2.1 Zaman Serileri

Zamanın fonksiyonu olarak elde edilmiş verilerin oluşturduğu seriler *zaman serileri* olarak bilinir. Geleceğe dönük tahminler yapmanın en önemli yollarından biri olan zaman serilerinde birbirini izleyen gözlem değerlerinde zamana göre bağımlılık söz konusudur. Seriyeye uyum sağlayacak bir fonksiyon ile gelecek gözlemler tahmin

edilebilir. Zaman serileri uygulama alanları içerisinde ekonomik zaman serileri en başta gelen konular içerisinde yer almaktadır. Milli gelir, üretim, tüketim, satışlar, ihracat, ithalat ve bunların zamana göre değişiminin incelenmesi, gelecek için tahmin edilmesi; ayrıca meteorolojik, sosyolojik, demografik, sağlık ve kalite kontrolde zaman serisi analizlerinden oldukça yoğun bir şekilde yararlanılmaktadır.

İncelenen bir zaman serisi trend, konjonktürel dalgalanma, devresel hareketler ve rasgele etkiler gibi faktörler içerebilir. Faktörler arasında zaman dışındaki diğer etkiler için hesaplanan endeksler ile gözlemlerden söz konusu etkiler yok edilir. Bu işlem sonucunda zaman serisi analizleri uygulanabilir.

Uygulamada çeşitli türde zaman serileri vardır. Eğer bir zaman serisi kesin olarak tahmin edilebiliyorsa *deterministik zaman serisi* olarak isimlendirilir. Zaman serilerinde gözlemlerle elde edilen değerler olasılık kuralları içerisinde saptanabiliyorsa bu tip serilere *stokastik zaman serileri* denir.

İncelenen gözlemler belirli zaman aralıklarında elde ediliyorsa, bu tür serilere *kesikli zaman serileri* adı verilir. Bu tür seriler genellikle eşit zaman aralıkları ile elde edilen verilerden oluşur. Başka bir deyişle ele alınan gözlemler zaman içinde belirli periyotlara göre belirlenmiş ise bu tip serilere *kesikli zaman serileri* denir. Günlük, haftalık, aylık ve yıllık zaman dilimlerine göre elde edilen gözlemlerden oluşan seriler kesikli zaman serilerine örnek olarak verilebilir.

Zaman serisi analizinin yapılabilmesi için, parametre tahminlerinde yanlılığa sebep olan, bir başka deyişle ileri sürülen durağanlık gibi varsayımların göz önünde tutulmasına yol açan trend, konjonktürel dalgalanma, mevsimlik etki ve rasgele değişkenlerin kontrol edilmesi gerekmektedir. Burada zaman serilerinin durağan olması olarak ifade edilen şey, zaman içinde varyansın ve ortalamasının sabit olması ve gecikmeli iki zaman periodundaki değişkenlerin ko-varyansının değişkenler arasındaki gecikmeye bağlı olup zamana bağlı olmamasıdır (Gujarati 1995). Zaman serilerinin durağan olmaması durumunda, zaman serileri trend içerecektir.

Bir zaman serisinin uzun dönemde bir yöne doğru gösterdiği eğilime *trend* denir. Nispeten mantıksal ve basit fonksiyonlarla ifade edilen düzenlilikler güvenli bir biçimde uzatılabilir. Bu durum; nüfus artışı, göçler, üretim artışı gibi artışlarla ilgilidir.

Mal ve hizmetlerin üretim, satış, tüketim ve fiyatlarında iklime bağımlılıktan dolayı bazı değişimler söz konusu olabilir. Bu tip hareketler her yıl ortaya çıkar. Bu tür *mevsimsel etkinin* varlığı aylık periyotlarda da görülebilir.

Gerçek gözlemler etrafında 3-5 yılda ya da daha uzun zaman periyotlarında görülen değişimler *konjonktürel dalgalanmalar* olarak bilinir. Daha açık bir ifade ile üretim, satışlar, gelirler ve yatırımlar gibi iktisadi olaylarda bir süre artış görülebilir. Bu artışın maksimuma çıktığı anda bir ekonomik kriz başlar, bu düşüşten bir süre sonra faaliyetler tekrar canlanır ve aynı olaylar tekrarlanır. Bu safhalar ilgili zaman periyotları içinde tekrarlanır. Zamanın fonksiyonu olarak elde edilen değerlerin trendi artarken konjonktürün de artması değerlerin artışını hızlandırır. Aksine konjonktürün azalması artış eğilimini hafifletebilir.

Yukarıda açıklanan dalgalanmalar dışında ekonomik olaylara etki eden bazı hareketler söz konusu olabilir. Bunlar; savaş, deprem, grev, sel, don, dolu, siyasi karışıklıklar ve dış ticaret güçlükleri gibi ne zaman nasıl tekrarlanacağı belli olmayan hareketlerdir. Bu hareketler birçok ekonomik değeri büyük ölçüde etkileyebilir.

O halde belirli bir olay hakkında gözlemlerin kronolojik olarak sıralanmasından doğan bir zaman serisi kesin olmamakla birlikte dört ayrı temel faktör tarafından etkilenir. Bu faktörler; trend, mevsimlik değişimler, devresel değişimler ve sayılan üç etkiden kaynaklanmayan değişimlerden kaynaklanan ve hata değişimleri olarak bilinen değişimlerdir.

Zaman serileri başlıca; zaman serisini unsurlarına ayırmak, zaman serileri arasındaki ilişkiyi açıklamak, süreç kontrolü, geleceğe yönelik tahmin yapmak amacıyla analiz aracı olarak kullanılırlar.

Zaman serilerinin geleceğe yönelik tahmin yöntemleri iki grupta toplanabilir. Bunlar çok değişkenli ve tek değişkenli zaman serileri ile ilgili tahmin yöntemleridir.

Çok değişkenli zaman serileri iki veya daha fazla zaman serisi arasındaki sebep-sonuç ilişkisini tanımlayan ve daha sonra tahmin ve kontrol amacıyla kullanılan serilerdir. Üzerinde durulan değişken ile bu değişkeni açıklayan diğer değişkenler arasında mantıksal ilişkiler varsa ve bu değişkenlerin zaman aralıklarıyla aldığı sayısal değerler mevcut ise bir ilişki modeli kurulur.

Çok değişkenli zaman serileriyle ilgili modeller, tahmin sistemiyle ilgili her şeyin bilindiğini dikkate alır ve birbiriyle ilişkili olayların tahmin edilmesini sağlar. İlişki modellerine dayanarak yapılan tahminlerin hatası düşük olabilir. Ancak tahmin sistemiyle ilgili her şeyin bilinmesi çoğu zaman mümkün olmayabilir veya mümkün olsa bile analiz için uygun olmayabilir. Bu nedenlerden dolayı zaman serilerinin geleceğe yönelik tahmininde tek değişkenli zaman serileriyle ilgili tahmin yöntemleri yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Tek değişkenli zaman serileri ile ilgili tahmin yöntemleri, zamana bağlı tek bir değişkene ait verilerin mevcut olması durumunda kullanılan ve sadece geleceğe yönelik tahmin yapmaya olanak sağlayan istatistiksel yöntemlerdir. Bu yöntemler zaman serilerinin bu günkü ve geçmiş dönem gözlem değerlerini kullanarak, gelecek dönem tahmin değerlerinin elde edilmesini sağlar.

Bu grupta toplanan yöntemlerin dayandığı varsayımlar şunlardır:

- i) Bir zaman serisinde mevcut olan zaman serisi unsurlarının gelecek dönemde de aynı kalacağı kabul edilir. Bu varsayım nedeniyle geçmiş dönem gözlem değerlerine dayanarak gelecek dönem tahmin değerleri elde edilir.
- ii) Yöntemler, zaman serisini meydana getiren unsurları birbirlerinden ve tesadüfi unsurlardan ayırmak suretiyle serinin gelecekte alabileceği değeri tahmin etmeyi amaçlar.
- iii) Bu yöntemler, eşit zaman aralıklarıyla elde edilen gözlem değerlerinden meydana gelen kesikli zaman serilerine uygulanır.

Tek değişkenli zaman serileriyle ilgili temel analiz yöntemleri aşığıdaki şekildedir:

- (i) Trend analizi,
- (ii) Hareketli ortalamalar analizi,
- (iii) Üssel düzleme analizi,
- (iv) Uyarlayıcı arındırma analizi.

Geliştirilen analiz yöntemleri arasında en çok bilineni *trend analizi* yöntemidir. Hesaplanması ve anlaşılması kolay olan bu yöntem, günümüzde orta ve uzun dönem tahmin amacıyla yoğun bir şekilde kullanılan sayısal tahmin yöntemlerinden biridir. Trend analizinin esası, zamana bağlı herhangi bir olaya ait değerlerin serpilme

diyagramında göstermiş oldukları serpilmeğe uygun matematiksel bir fonksiyon belirlemek ve bu fonksiyonla ilgili olayın zamana göre nasıl bir eğilim gösterdiğini tespit etmektir. Trend analizi; biri açıklayıcı zaman, diğeri açıklanan iki değişken ile kurulan matematiksel eşitlik üzerinde yapılan bir analiz yöntemi olarak ifade edilir. Yöntemde sakınca olarak görülebilecek unsurlardan biri, tahmin işleminde sadece iki değişkenin dikkate alınmasıdır. Oysa bu oluşumun meydana gelmesinde etken olan çok sayıda faktör bulunur.

Hareketli ortalamalar analizinin esası, bir zaman serisindeki gözlem değerlerini belirli büyüklükteki kümeler halinde toplamak, her küme için aritmetik ortalama hesaplamak ve bu ortalamayı ait olduğu kümenin en yeni terimini izleyen terimin tahmin değeri olarak kabul etmektir. Hareketli ortalamalar tahmin yöntemi gözlem değerlerinin oluşumunda rasgeleliğin yüksek olduğu, buna karşılık birbirini izleyen gözlem değerleri arasındaki otokorelasyonun düşük olduğu zaman serilerinde uygulanır. Kısa dönem tahmin amacıyla kullanılabilen bu yöntemin uygulanabilmesi için çok sayıda gözlem değerine gereksinim vardır. Hareketli ortalamalar yöntemine yapılan en ciddi eleştiri, bu yöntemin sadece hareketli ortalama dönemindeki tarihi verilere eşit ağırlık vermesi, eski dönemleri bütünüyle görmezden gelmesidir.

Üssel düzleme yöntemi, mevsim ve trend unsuru içermeyen basit formdaki zaman serileri için uygulanır. Bu yöntemlerin her biri kendinden önce geliştirilmiş olan yöntemlerin dezavantajlarını avantaja dönüştürmeyi amaç edinmiştir. Bu nedenle üssel düzleme yöntemlerinin (Extrapolation of trend curves, Exponential smoothing, The Holt-Winters forecasting v.b.) bazıları diğelerine oranla daha çok yönlü, bazıları hesaplama açısından karmaşıktır. Bazılarının analizi için ise oldukça fazla bilgisayar zamanına ihtiyaç duyulur. Üssel düzleme yöntemleri, temel özellik olarak hareketli ortalama tahmin yöntemine benzemesine karşın, zaman serilerinin tüm gözlem değerlerini göz önünde bulundurdıkları ve seri değerlerine bugünkü dönemden uzaklıklarına göre azalarak ağırlık verdikleri için hareketli ortalama yönteminden ayrılırlar.

Uyarıcı arındırma yöntemi ise, zamana bağlı ilgili tahmin modeli belirlendikten sonra, bu olayı meydana getiren unsurlarda meydana gelebilecek değişiklikleri yeniden bir tahmin modeli belirlemeye gerek bırakmadan doğrudan tahmin değerlerine yansıtma

imkanı olan bir yöntemdir. Bu modeller tahmin işleminde de araştırmacının müdahalesini en az düzeye indirir. Uyarıcı arındırma tahmin yöntemine göre herhangi bir gelecek dönemin tahmin değeri, hareketli ortalamalar ve üssel düzleme yöntemlerinde olduğu gibi geçmiş dönem gözlem değerlerinin toplamı alınarak elde edilir. Uyarlayıcı arındırma yöntemi, hareketli ortalama ve üssel düzeltme yöntemleri gibi kısa dönem tahmin amacıyla kullanılır.

Yukarıda kısaca tanımlanan ve karşılaştırılan dört farklı analiz yöntemi, tek değişkenli zaman serilerinin tahminine yönelik olarak kullanılan değişik yöntemlerdir. Söz konusu yöntemler, zaman serisi gözlem değerlerinin karakteristiklerine bağlı olarak değişik üstünlük ve avantajlar sağlarlar. Bu yöntemler zaman serilerinin ardışık gözlem değerleri arasında var olan bağımlılığı dikkate almazlar.

3.2.1.1 Box-Jenkins (B.J.) Tahmin Modelleri

Yukarıda tanımlanan ve karşılaştırılan yöntemlerde bir zaman serisi için hesaplanan ortalama değer, zamanın deterministik bir fonksiyon olduğu varsayımına dayanılarak yapılır ve bu ortalamaya belirli bir dönemin hata terimi ilave edilerek o dönemin gözlem değerleri elde edilir. Oysa zaman serilerinin çoğunda ardışık gözlem değerleri birbirine bağlıdır. Bu durumda trend analizi, hareketli ortalama ve üssel düzleme yöntemleri uygun değildir, çünkü bu yöntemler bağımlılık avantajını kullanmazlar. Halbuki zaman serilerinde bağımlılık yapısını çok etkin bir şekilde kullanan B.J. tahmin modelleri (Box ve Jenkins 1976) olarak da bilinen *ARIMA* modeller bulunmaktadır.

B.J. tahmin modelleri tek değişkenli zaman serilerinin ileriye dönük tahminleri için kullanılan başarılı bir tahmin etme yöntemidir. B.J. grubu modeller, zamana bağlı olayların rasgele karakterde olması ve bu olaylarla ilgili zaman serilerinin stokastik süreç olduğu varsayımına dayanarak son 30-40 yılda geliştirilmişlerdir. Ayrıca bu modellerde rasgele değişkenin zaman içinde ardışık olarak aldığı değerler arasında mevcut olan otokorelasyon en etkili bir şekilde dikkate alınır. Bu nedenlerden dolayı söz konusu modellere *stokastik modeller* adı verilmektedir.

Bu modeller için yapılan en önemli varsayımlar gözlem değerlerinin eşit zaman aralıklarıyla elde edilmesi, bir başka deyişle kesikli ve durağan olmasıdır. Zaman serilerinde durağanlık; trend, mevsimsel dalgalanma ve benzeri etkilerin seriden

silinmesi veya tahmin değerlerini önemli derecede etkilemeyecek oranda kalması anlamına gelmektedir. Serinin durağanlığı üzerine konmuş varsayım çoğu zaman bozulmaktadır. Durağan olmayan zaman serilerinin ileriye dönük tahminlerinde B.J. yönteminin uygulanabilmesi için önce durağanlığı bozan söz konusu etkenlerin ortadan kaldırılması gerekir.

- AR (Autoregressive) Modeller

Bu modeller; bir zaman serisinin herhangi bir dönemdeki gözlem değerini, aynı serinin ondan önceki, belli sayıda geçmiş dönem gözlem değerine ve hata terimine bağlı olarak açıklayan modellerdir. AR modeller, içerdikleri geçmiş dönem gözlem değeri sayısına göre isimlendirilirler. Genel olarak, “ p . dereceden” AR model $AR(p)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekildedir:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3.2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ gözlem değerlerini, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ modelin parametrelerini ifade etmektedir. Burada hata terimlerinin 0 ortalamalı ve σ_ε^2 varyanslı normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmektedir. $AR(p)$ modeli için tahmin edilmesi gerekli parametre sayısı $(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$ ile $p + 2$ dir. Uygulamada sıkça kullanılan AR modelleri, birinci ve ikinci dereceden modellerdir ve bunlar $AR(1)$ ve $AR(2)$ biçiminde gösterilir. AR modelleri aşağıdaki gibi fark denklemi şeklinde de yazılabilir;

$$BX_t = X_{t-1}, B^2 X_t = X_{t-2}, \dots, B^p X_t = X_{t-p} . \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) denkleminde yararlanarak, p . dereceden AR modeli;

$$X_t = (\varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \dots + \varphi_p B^p) X_t + \varepsilon_t \quad (3.2.3)$$

veya,

$$\varepsilon_t = (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) X_t \quad (3.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada B geriye öteleme işlecidir (Backward Shift Operator). AR modellerde *durağanlık koşulu*, polinomun sıfıra eşitlenmesiyle bulunacak köklerin birim çemberin dışında kalmasıyla mümkündür. Eğer söz konusu kökler birim çemberin

dışında kalıyorsa, $AR(p)$ durağan zaman serileri için kullanılabilir (Box ve Jenkins 1976). Geriye doğru öteleme işleci kullanılarak $AR(1)$ modeli;

$$\varepsilon_t = (1 - \varphi_1 B)X_t \quad (3.2.5)$$

biçimindedir. Bu modelin durağan olması için,

$$|\varphi_1| < 1 \quad (3.2.6)$$

koşulunu sağlaması gerekir. Geriye doğru öteleme işleci kullanılarak $AR(2)$ modeli;

$$\varepsilon_t = (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)X_t \quad (3.2.7)$$

biçiminde ifade edilir. Bu modelin durağan olması için,

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &< 1, \\ \varphi_2 - \varphi_1 &< 1, \\ |\varphi_1| &< 1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

eşitsizliklerinin sağlanması gerekir.

- MA (Moving Average) Modeller

MA modelleri bir zaman serisinin herhangi bir dönemdeki gözlem değerini aynı dönemdeki hata terimi ve ondan önceki belirli sayıda dönemin hata terimine bağlı olarak açıklayan modellerdir. MA modelleri de içerdikleri geçmiş dönem hata terimi sayısına göre isimlendirilmektedir. q . dereceden $MA(q)$ modeli;

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.2.9)$$

biçimindedir. x_t , ($x_t = X_t - \mu$) işlemi ile elde edilmiş küçültülmüş değer, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ modelin parametreleridir. Bu parametreler, $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ değerleri arasındaki ilişkiyi gösteren katsayılardır. q ise MA modelinin derecesini gösterir. MA modelinde hesaplanması gerekli parametre sayısı ($\mu, \sigma_\varepsilon^2$) ile birlikte $q + 2$ dir. Uygulamada en çok kullanılan MA modelleri birinci ve ikinci dereceden modellerdir. Bu modeller sırasıyla $MA(1)$ ve $MA(2)$ şeklinde ifade edilir. $MA(1)$ modeli;

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3.2.10)$$

şeklinde. (3.2.10) eşitliğinden de anlaşılacağı gibi, $MA(1)$ modelinde bir zaman serisinin x_t gözlem değeri t ve $t - 1$ dönemlerine ilişkin hata terimlerinin doğrusal bir bileşimidir. $MA(2)$ modeli;

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (3.2.11)$$

gibidir. MA modelleri yukarıda gösterilen fark denklemi biçiminde yazılabileceği gibi, “geriye öteleme işleci” B kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q). \quad (3.2.12)$$

MA modeller için durağanlık koşulları yerine *çevrilebilirlik koşullarından* söz edilir. Çünkü $MA(1)$ modeli, sonsuz dereceden AR modeline eşittir. Bunun yanında hata terimine dayanarak bir zaman serisinin herhangi dönemine ilişkin gözlem değeri, sonsuz sayıda hata teriminin ağırlıklı toplamları alınarak açıklanabilir. Ancak uygulama imkansızlığı nedeniyle MA modellerinde zaman serilerinin herhangi bir dönemine ilişkin gözlem değeri, sonlu sayıda hata teriminin ağırlıklı toplamı alınarak açıklanmaya çalışılmaktadır. $MA(1)$ modeli için çevrilebilirlik koşulu,

$$|\theta_1| < 1 \quad (3.2.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması ile mümkündür. $MA(2)$ modeli için bu koşul,

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1, \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1, \\ |\theta_1| &< 1, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

eşitsizlikleri ile ifade edilir.

- ARMA (Autoregressive Moving Average) Modeller

$ARMA$ modelleri durağan zaman serilerinin modellenmesinde kullanılan AR ve MA modellerinin bir kombinasyonudur. Bu nedenle $ARMA$ modellere “karma modeller” denir. Bu modellerde bir zaman serisinin herhangi bir dönemine ait gözlem değeri, ondan önceki belirli sayıda gözlem değerinin ve hata teriminin doğrusal bir bileşimi olarak ifade edilir. Eğer $ARMA$ modeli, p terimli AR ve q terimli MA modelinin bir kombinasyonu ise, $p + q$ terim içerir ve $ARMA(p, q)$ şeklinde yazılır. $ARMA(p, q)$ modeli aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.2.15)$$

ARMA modeli için tahmin edilmesi gerekli parametre sayısı $p + q + 2$ ve bu parametreler $(\mu, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)$ dir. *ARMA* modellerinin durağanlık ve çevrilebilirlik koşulunu sağlayıp sağlamadığını belirlemek için bu modelleri “geriye doğru öteleme işleci” B ile yazmak gerekir. Bu durumda (3.2.15) modeli;

$$\varphi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (3.2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varphi(B)$ ve $\theta(B)$ sırasıyla p . ve q . dereceden polinomlardır. $\varphi(B)$ polinomunun kökleri olan $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ değerleri, birim çemberin dışında kalıyorsa modelin durağanlık koşulunu, $\theta(B)$ polinomunun kökleri olan $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ değerleri birim çemberin dışında kalıyorsa çevrilebilirlik koşulunu sağladığı söylenebilir (Box ve Jenkins 1976).

- **ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) Modeller**

Buraya kadar ele alınmış B.J. modeller sadece durağan zaman serileri analizinde kullanılan modellerdir. Ancak uygulamada karşılaşılan serilerin çoğu, özellikle ekonomik zaman serileri durağan değildir. Serilerin durağanlığı trend, mevsimsel, konjonktürel dalgalanma ve rasgele nedenler gibi etkenler tarafından bozular. Bu etkenlere rağmen zaman serilerinin çoğunda homojenlik görülmektedir (Box ve Jenkins 1976).

Durağan olmayan zaman serisini durağan hale getirmek için uygun derecede fark alma işlemi yapılır. Fark alma derecesi d ile gösterilir ve uygulamada genellikle $d = 1$, en çok 2 değerini alır. Fark alma derecesi $d = 0$ olduğunda, bir başka deyişle, seri orijinal değerler itibariyle durağan ise *ARIMA* model bir *ARMA* modele dönüşür.

ARIMA model,

$$w_t = \varphi_1 w_{t-1} + \dots + \varphi_p w_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.2.17)$$

şeklinde. Burada, $w_t = \Delta^d X_t$, farkı alınmış seri, Δ , fark işleci, d , fark alma derecesidir. Eğer birinci dereceden farklar seriyi durağan hale getiriyorsa,

$$\Delta X_t = w_t = X_t - X_{t-1} \quad (3.2.18)$$

farkı kullanılır.

$ARIMA(p, d, q)$ modelinde p veya q sıfır olabilir. Bu durumda model ya $AR(p, d)$ veya $MA(d, q)$ model türüne indirgenmiş olur. Uygulamada sık karşılaşılan $d = 1$ veya $d > 1$ koşulunu sağlayan $ARIMA(0, 1, 1)$, $ARIMA(0, 2, 2)$, $ARIMA(1, 1, 1)$ modelleri fark denklemi ve B operatörü kullanılarak yazılabilir (Box ve Jenkins 1976).

$ARIMA$ modellerde durağanlık ve çevrilebilirlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığını belirleme işlemi $ARMA$ modellerde olduğu gibidir.

3.2.1.2 Modelin Uygunluk Testi

Seçilen modelin ele alınan seri için uygun olup olmadığının araştırılması gerekir. Minimum parametrelili uygun modelin seçilmesinde kullanılan testlerde, tahmin hatalarının otokorelasyonlarına dayalı testler daha pratiktir. Bu testlerde hata otokorelasyonlarının her birinin standart hataları ile $1/\sqrt{n}$ değeri karşılaştırılır. Burada n , seçilen örneklemin büyüklüğünden fark derecesinin çıkarılması ile elde edilen değerdir. Ancak tahmin edilen otokorelasyonların standart hatasını bir ölçü olarak kullanmak, düşük derecelerdeki gecikmelerde hesaplanan otokorelasyonların sıfırdan farklılığının önemini açıkça ortaya koymaz (Kayım 1985). Bu nedenle otokorelasyonları tek tek incelemek yerine belirli sayıdaki otokorelasyonları bir arada incelemek daha başarılı sonuçlar vermektedir. Bu şekilde yapılan inceleme ile seçilen modelin uygunluğu daha açıkça ortaya çıkarılabilmektedir. Bu amaçla Box-Pierce tarafından geliştirilmiş olan *Box-Pierce İstatistiği* kullanılır (Ertek 1996). Bu istatistik,

$$Q = n \sum_{k=1}^K r_k^2(\varepsilon) \quad ; k = 1, 2, \dots, K \quad (3.2.19)$$

şeklinindedir. Burada n örneklem büyüklüğü, $r_k(\varepsilon)$ örneklem içi tahmin hatalarının çeşitli k gecikmelerdeki otokorelasyonlarıdır.

Box-Pierce İstatistiği Q , yaklaşık olarak $(K - p - q)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahiptir. K , hesaplanan otokorelasyon sayısı; p , otoregresif; q , hareketli ortalama modelindeki parametre sayılarıdır. Bu testlerde ki-kare dağılımı kullanıldığından, bu testler uygulamada *ki-kare testi* olarak bilinir. Bu test, “otokorelasyon ortalaması sıfırdan büyüktür” hipotezine dayalı olarak bazı otokorelasyonların anlamlı olarak sıfırdan farklı olup olmadıklarını ortaya koyar. Bu hipotezin reddi, hataların rasgele dağıldığını, uygulanan yöntemin ve seçilen modelin uygun olduğunu ifade eder.

3.2.1.3 Box-Jenkins Yönteminin Üstün ve Zayıf Yönleri

- Üstün Yönleri

- (i) B.J. yönteminde uygun modelin belirlenmesi genellikle eldeki verilerin yapısı ile belirlendiği için verilerin kendi kendine ilişkisi sağlanmış olur. Bu nedenle B.J. modellerine dayanarak yapılan kısa dönem tahminlerinin diğer yöntemlere dayanarak yapılan aynı döneme ait tahminlere oranla daha güvenilir olduğu söylenebilir.
- (ii) B.J. yönteminde ileriye dönük tahmin amacıyla analiz edilecek bir zaman serisi için uygun model belirlenirken izlenen her aşamada bu modelin analiz edilecek seriye uygunluğunu denetleme imkanı vardır.
- (iii) B.J. yöntemine göre belirlenecek uygun modelde önemli olan, parametre sayısını olabildiği kadar az tutmaktır.
- (iv) Zaman serilerinin çoğunda ardışık gözlem değerleri birbirine bağımlıdır. B.J.yöntemi zaman serilerinin bu önemli özelliğini en etkin biçimde kullanır (Özmen 1986).

- Zayıf Yönleri

- (i) B.J. yöntemine dayanarak yapılan tahminler çabuk elde edilemez. Çünkü B.J. yöntemi tümüyle otomatik değildir. Bu yöntemle dayanarak ileriye dönük tahmin yapmak amacıyla yazılacak bir bilgisayar programı yinelemeli bir programdır.
- (ii) B.J. yönteminin uygulanabilmesi için uzman ve deneyimli işgücüne gereksinim duyulur.
- (iii) B.J. yönteminin uygun model seçimi konusunda sağladığı özgürlük olanağı, tahmin yapan kişinin uygun olmayan model seçmesine neden olabilir.
- (iv) B.J. modelleriyle aynı seriyi analiz eden ve aynı seri için ileriye dönük tahmin yapan iki kişinin sayısal olarak birbirine benzer sonuçlar elde etmesi konusunda garanti yoktur.
- (v) Model belirlemek için çok sayıda gözlem değerine gereksinim vardır, bu sayı en az 50 olmalıdır.

B.J. yöntemleri, bu olumsuzluklara rağmen, bir zaman serisinin yapısını belirlediği, gözlem değerlerinin aralarındaki bağımlılığı en etkili bir şekilde kullandığı

ve model belirleme aşamalarında istatistiksel testlere yer verdiği için diğer tahmin yöntemlerine göre kısa dönem tahmin yapmada üstün yöntemlerdir (Özmen 1986).

3.2.1.4 Zaman Serilerinin Analizi

B.J. grubu modeller, durağan karakterde olup olmama durumlarına göre iki grupta incelenir. Durağan özelliğe sahip modeller, ARMA grubu modeller olarak bilinir ve $AR(1)$, $MA(1)$, $AR(2)$, $MA(2)$ ve $ARMA(1,1)$ modelleri bu tip özelliğe sahip modeller olarak tanımlanır. Durağan olmayan modeller grubunda ise $IAR(1,1,0)$, $IAR(2,1,0)$, $IAR(2,1,0)$, $IAR(2,2,0)$, $IMA(0,1,1)$, $IMA(0,1,2)$, $IMA(0,2,2)$ veya $ARIMA(1,1,1)$ modeller bulunur.

Zaman serileri için uygun modelin seçimi, B.J. tarafından aşağıda tanımlanan adımlar tarafından gerçekleştirilir.

- i) Gözlem değerlerini oluşturan seri incelenerek model grubu kararlaştırılır. Bu aşamada hangi model grubunun uygun olacağına karar verilir. Uygun modeli belirlemede yapılan ilk iş, serinin durağanlığının belirlenmesidir. Durağanlığın irdelenmesinde kullanılan araç otokorelasyon ve bu fonksiyonların korelogramıdır.
- ii) Kararlaştırılan model grubundan hangi model tipinin ilgili seri için uygun olacağı belirlenir. Durağan zaman serilerinin analizi ve tahmini aşamalarında üç tür modelden (AR , MA , $ARMA$) biri kullanılır. Model seçimi otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının kullanımı ile yapılır. Bu şekilde seçilen model için parametrenin derecesi de belirlenir.
- iii) Uygun olacağına karar verilen modelin parametreleri tahmin edilir. Parametrelerin tahminlenmesi aşaması son derece karmaşık ve zaman alıcı işlemlerin yapılmasını gerektirir. Bu işlemler her model türü için farklılıklar göstermekte ve istatistik paket programlarının kullanımı ile yapılmaktadır.
- iv) Modelin yeterliliği, Box-Pierce istatistiği ile test edilir. Model yeterli ise tahmin amacıyla kullanılır. Aksi durumda birinci adıma dönülür.

3.2.2 Doğrusal Regresyon ve En Küçük Kareler Yöntemi

3.2.2.1 Doğrusal Regresyon Yöntemi

Bazı durumlarda bir ilişkinin derecesinin bilinmesi yeterli olurken, bazen bir bağımlı değişken ve bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkinin modellenmesine ihtiyaç duyulur. Bu ilişki istatistikte yaygın olarak kullanılan çeşitli regresyon yöntemleri ile modellenir. Doğrusal regresyon bu yöntemlerden biridir.

Eğer değişkenler arasındaki ilişki doğrusalsa, yani biri arttığında diğeri de artıyorsa veya biri azaldığında diğeri de azalıyorsa, doğrusal regresyon modeli; aksi durumda doğrusal olmayan regresyon modeli oluşturulur. Doğrusal regresyon modeli,

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

denklemini veya matris gösterimi ile

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2.20)$$

şeklinde verilir. Burada $\mathbf{X} = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)^T$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$ olmak üzere $(n \times p)$ açıklayıcı veya bağımsız değişkenlerin tam ranklı matrisi, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $(n \times 1)$ yanıt veya gözlem vektörü, $\boldsymbol{\beta}$, $(p \times 1)$ bilinmeyen parametre vektörüdür. Gözlenemeyen rasgele hata vektörü $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ 'nin $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ ve $E(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{X}) = 0$ olduğu kabul edilir. Bununla birlikte bir zaman serisi verisi için genel olarak $E(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) \neq 0$ durumu söz konusudur (Department of Political Science and International Relations Posc/Uapp 816 2010) Lineer regresyon modelinde amaç, bağımsız değişken \mathbf{X}' e dayanarak bilinmeyen parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}$ nın $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahminini ve \mathbf{y} nin $\hat{\mathbf{y}}$ tahminini belirlemektir (Lind ve ark. 2004).

- Otokorelasyonun Ölçümü ve Düzeltilmesi

Otokorelasyon zaman içerisinde hatalar (residuals) arası korelasyondur. Eğer herhangi bir zaman dilimindeki hata diğer zaman dilimindeki bir hata ile ilişkili ise otokorelasyon mevcuttur. Otokorelasyon, hatanın rasgele ve bağımsız olduğu regresyon varsayımını ihlal etmektedir.

Ardışık iki hata arasındaki otokorelasyon,

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \quad (3.2.21)$$

denklemleriyle ifade edilir. Burada ρ korelasyon katsayısı, ε_{t-1} ve ε_t ardışık hatalar ve v_t denklemin hata parametresidir. Ancak zaman serisi verisinin regresyon vasıtası ile analizi için gözlem hatalarının bağımsız olması gerekir. Yani, hatalar arasında bir otokorelasyonun olmaması gerekir. Bu nedenle, öncelikle hatalar arasında bir otokorelasyonun teşhisi yapılır. Bunun için,

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N \hat{\varepsilon}_t^2}, 0 \leq DW \leq 4 \quad (3.2.22)$$

istatistiğine bağlı olarak Durbin-Watson (DW) testi kullanılır. Bu testte aşağıdaki hipotez test edilir:

H_0 : Hatalar arasında korelasyon yoktur,

H_1 : Hatalar arasında korelasyon vardır.

Eğer H_0 hipotezi doğru ise DW , 2'ye yakın bir değer olacaktır. $DW < 2$ değeri pozitif otokorelasyonu, $DW > 2$ değeri negatif otokorelasyonu gösterir.

Testin uygulanması aşamasında ilk olarak Durbin-Watson test değeri DW hesaplanır. Daha sonra Durbin-Watson tablosundan (Evans 2010) D-L ve D-U değerleri bulunur. Eğer $DW < D-L$ ise H_0 reddedilir, $DW > D-U$ ise H_0 kabul edilir, $D-L < DW < D-U$ ise karar verilemez (Evans 2010), (Hamit 2010).

Zaman içerisinde hatalar (residuals) arası korelasyon yani otokorelasyonun varlığı DW testi ile kanıtlanmışsa modelin regresyon yöntemiyle analizi için bu durumun düzeltilmesi gerekmektedir. Otokorelasyon düzeltilmesi için çeşitli metotlar bulunmaktadır. Bu metotlar modele uygulandığında var olan otokorelasyon ortadan kalkar ve model regresyon uygulanabilecek bir denklem haline gelir. Bu metotlar sırası ile, Kmenta (1986) tarafından geliştirilen Cochrane-Orcutt, Hidreth-Lu, Prais-Winsten ve ilk fark metodlarıdır. Biz bu metotlardan **Prais-Winsten** metodunu kullanacağız.

Prais-Winsten tahmin edicisi, ilk gözlem değerini de tahmin aşamasına dahil ettiğinden çok önemlidir (Kmenta 1986). Prais-Winsten yaklaşımı aşağıdaki adımları içerir:

(i) $y_t = a + bX_t + e_t$ denkleminin en küçük kareler tahmin değerleri elde edilir ve $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_T$ tahmini hata değerleri hesaplanır.

(ii) ρ nun $\hat{\rho}$ tahmini bir değerini elde etmek için,

$$\min_{\hat{\rho}} (1 - \hat{\rho}^2)\hat{e}_1^2 + \sum (\hat{e}_t - \hat{\rho}\hat{e}_{t-1})^2 \quad (3.2.23)$$

problemi çözülür.

(iii) $\hat{\rho}$ yerine $\hat{\rho}_{pw} = \sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} / \sum \hat{e}_{t-1}^2$ alınarak,

$$(y_t - \hat{\rho}_{pw}y_{t-1}) = a(1 - \hat{\rho}_{pw}) + b(X_t - \hat{\rho}_{pw}X_{t-1}) + v_t \quad (3.2.24)$$

denkleminin çözümü en küçük kareler yöntemi ile bulunur ve yakınsama sağlanıncaya kadar bu işleme ardışık olarak devam edilir (STATA 2011).

Prais-Winsten tahmin edicileri genellikle doğrusal olmayan en küçük kareler tahmin edicilerine bağlı olarak elde edilir (Kmenta 1986). Ayrıca Prais-Winsten yöntemi ilk iterasyondan sonra (*İki Adımlı Prais-Winsten*) durdurulabildiği gibi yakınsama sağlanıncaya kadar (*İteratif Prais-Winsten*) devam da edilebilir.

3.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi, regresyon doğrusunun belirlenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem kullanıldığında, elde edilen doğru, verilere uygun regresyon doğrusudur. Çünkü bu yöntem, gerçek y_i değerleri ile tahmin edilen \hat{y}_i değerleri arasındaki dikey sapmaların karelerinin toplamını,

$$RSS(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i\beta_i)^2 \quad (3.2.25)$$

en küçük yapan $\hat{\beta}$ değerini elde ederek regresyon doğrusunu belirler (Tekin 2006). (3.2.25) eşitliğinde de görülebileceği gibi, $RSS(\beta)$, parametrelerin bir karesel bir fonksiyonudur, bu nedenle, bu fonksiyonun minimumu her zaman bulunabilir, ancak bu çözüm tek olmayabilir. $RSS(\beta)$ matris gösterimi ile aşağıdaki şekilde yazılır:

$$RSS(\beta) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \quad (3.2.26)$$

elde edilir. Burada \mathbf{X} bağımsız değişkenleri içeren $(n \times p)$ boyutlu matris, \mathbf{y} bağımlı değişkenlerden oluşan n boyutlu vektördür. $RSS(\beta)$ denkleminin β' ya göre türevinin sıfıra eşitlenmesi ile

$$\mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (3.2.27)$$

denklemini elde edilir. Eğer $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ matrisi singüler değilse, $\boldsymbol{\beta}$ nın $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahmini

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.2.28)$$

olarak bulunur ve tektir.

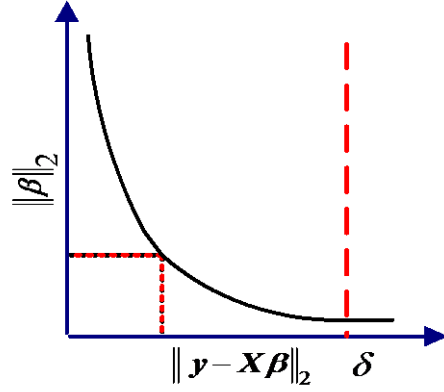
3.2.3 Tikhonov Düzenlemesi

Genel bir doğrusal en küçük kareler problemi için sonsuz çoklukta en küçük kareler çözümü olabilir. Eğer veri gürültü (*noise*) içeriyorsa, bu şekildeki veri tam olarak doğruya uydurulamaz ve bu da $\|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|_2$ yi yeterince küçük yapma anlamında veriyi uygun olarak doğruya uydurabilen çok sayıda çözümün olabileceğini gösterir.

Çözümleri bulunmayan, çözümleri tek ya da sabit olmayan problemler *kötü koşullu* problemler olarak adlandırılır (Aster ve ark. 2004). Bu şekildeki problemlerin çözümlerini düzenlemek için $\boldsymbol{\delta} = \|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|_2$ için uygun bir düzeyin bulunduğu varsayımına dayalı olarak farklılık (uymazlık) prensibi kullanılabilir. Tikhonov düzenlemesi kesikli kötü koşullu problemleri iyi koşullu (düzenli ya da sabit) hale getirmek için kullanılan en yaygın yöntemlerden birisidir. Tikhonov çözümü, göz önüne alınan doğrusal modeldeki katsayı matrisi \mathbf{X} in *Singular Değer Ayrışımı* (SVD) kullanılarak elde edilebilir. Uymazlık prensibi altında Tikhonov düzenlemesi problemi üç şekildeki minimizasyon problemi ile ifade edilir. Birincisinde, $\|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|_2 \leq \delta$ olan bütün çözümler göz önüne alınır ve bu çözümlerden, $\boldsymbol{\beta}$ nın boyunu en küçük yapan çözüm tercih edilir. Bu problem aşağıdaki optimizasyon problemi ile verilir:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{\beta}\|_2, \\ \|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|_2 \leq \delta. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Bu problemde, veriyi uydurmak için gerekli olan sıfırdan farklı bir model özelliği düzenlenen çözümde görünürken, gerekli olmayan model özellikleri düzenleme ile çözümden kaldırılacaktır. Burada δ artarken olurlu çözümlerin kümesi genişler ve $\|\boldsymbol{\beta}\|_2$ nin minimum değeri azalır. Böylece δ ye karşı gelen $\|\boldsymbol{\beta}\|_2$ nin minimum değerlerinin eğrisini çizeriz.



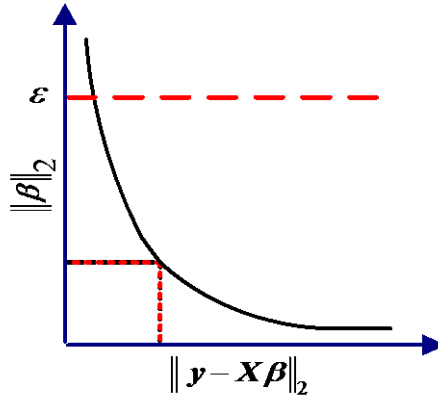
Şekil 3.1. δ ye karşı gelen $\|\beta\|_2$ nin minimum değerlerinin eğrisi

İkinci Tikhonov düzenlemesi problemi,

$$\min_{\beta} \|X\beta - y\|_2$$

$$\|\beta\|_2 \leq \epsilon \quad (3.2.30)$$

şeklindedir. Burada ϵ azalırken, olurlu çözümlerin kümesi küçülür ve $\|X\beta - y\|_2$ nin minimum değeri artar. Yine ϵ nın değerini belirlerken, $\|\beta\|_2$ ve $\|X\beta - y\|_2$ nin optimal değerlerinin eğrisini çizeriz.



Şekil 3.2. $\|\beta\|_2$ ve $\|X\beta - y\|_2$ nin optimal değerlerinin eğrisi

Tikhonov düzenlemesi probleminin üçüncü formu (3.2.29) problemine Lagrange çarpanları metodunun uygulanması ile oluşturulan indirgenmiş en küçük kareler problemidir ve bu problem,

$$\min_{\beta} \|\mathbf{X}\beta - \mathbf{y}\|_2^2 + \varphi^2 \|\beta\|_2^2 \quad (3.2.31)$$

şeklindedir. Burada $\lambda = \varphi^2$, $\|\mathbf{X}\beta - \mathbf{y}\|_2^2$ ve $\|\beta\|_2^2$ arasındaki koordinasyonu sağlayan koordinasyon parametresidir. Bu parametresinin (3.2.29) ve (3.2.30) problemlerindeki kısıtlar sağlanıncaya kadar ayarlanması ile (3.2.29) ve (3.2.30) problemlerin çözümleri de elde edilebildiği gibi $\delta, \epsilon, \varphi$ değerleri uygun bir şekilde seçildiğinde bu problemler aynı çözümleri verir. Ayrıca, koordinasyon parametresi $\lambda = \varphi^2$ nın değeri *L-eğrisi* kriteri olarak adlandırılan yöntem ile de seçilebilir. Bu yöntem göre, $\|\mathbf{X}\beta - \mathbf{y}\|_2^2$ ve $\|\beta\|_2^2$ nın değerlerinin iki kez logaritması alınarak yeniden ölçeklendirilir ve $\|\mathbf{X}\beta - \mathbf{y}\|_2^2$ ve $\|\beta\|_2^2$ optimal değerlerini bir L şeklindeki eğri üzerinde alır. Bu eğrinin köşe noktasına yakın çözümünü veren değer $\lambda = \varphi^2$ nın değeri olarak seçilir (Aster ve ark. 2004).

Eğer doğrusal en küçük kareler problemleri kötü koşullu ve/veya eksik ranklı ise, bu tür problemlerin çözüm yöntemlerinden birisi, singüler değer ayrışımından faydalanmaktır.

\mathbf{X} , $(m \times n)$ tipinde reel bir matris olsun. Bu taktirde;

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (3.2.32)$$

olacak şekilde $(m \times m)$ tipinde \mathbf{U} ve $(n \times n)$ tipinde \mathbf{V} ortogonal matrisleri vardır. Burada \mathbf{S} , köşegende olmayan bütün elemanları sıfır ve $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min(m,n)} \geq 0$ olan $(m \times n)$ tipinde bir matristir.

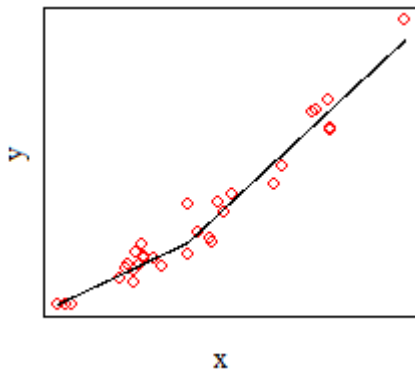
\mathbf{S} 'nin köşegen elemanları \mathbf{X} 'in *singüler değerleri*, \mathbf{U} 'nun sütunları \mathbf{X} 'in *sol singüler vektörleri*, \mathbf{V} 'nin sütunları \mathbf{X} 'in *sağ singüler vektörleri* olarak adlandırılır (Hill ve Kolman 1999).

Singüler değer ayrışımı matrisleri MATLAB'da `svd` komutuyla hesaplanabilmektedir.

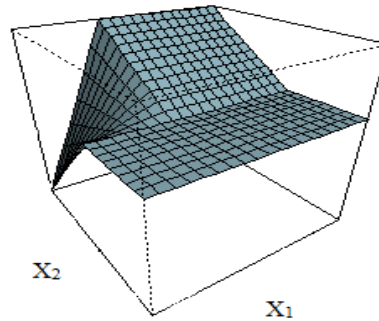
3.2.4 Çok Değişkenli Uyarlamalı Regresyon Eğrileri (MARS)

Regresyon modelleri, özellikle doğrusal modeller, uygulamalı alanlarda oldukça önemlidir. Bununla birlikte, çoğunlukla gerçek yaşamda karşılaşılan etkiler doğrusal olmayan bir trend gösterdiğinden doğrusal modeller bu etkileri iyi bir şekilde temsil etmeyerek başarısız olurlar. Bu etkileri karakterize etmek için *Parametrik Olmayan Regresyon* kullanılır (Fox 2002). Eğer oluşturulacak modelde kullanılacak bağımsız değişken sayısı büyük ise çoğu parametrik olmayan regresyon formları kullanışlı olmadığı gibi basit bir şekilde de yorumlanamaz.

Ancak, Friedman tarafından 1991’de geliştirilen çok değişkenli uyarlanabilir regresyon eğrileri (MARS), parametrik olmayan regresyon analizinin bir formudur. Bu metod bağımsız değişken sayısı büyük olan problemler için yukarıda ifade edilen dezavantajlara sahip olmadığı gibi doğrusal olmayan çok değişkenli fonksiyonların uyarlanmasında oldukça kullanışlıdır. Bu metod kullanılırken bağımlı değişken ve bağımsız değişken arasında bir fonksiyonel ilişkinin biçimine ilişkin bir varsayım yapılmaz. Model eldeki veriye dayalı olarak taban fonksiyonlarından ve bu tabanlarla ilişkilendirilen katsayılardan oluşturulur. Bu metod bağımsız değişken değerlerini bölgelere ayırarak, her bölgeyi bir regresyon eşitliği ile ilişkilendirir. Ayrıca bu metod, yanıt değişkeni belirlemek için hem açıklayıcı değişkenlerin üzerindeki hem de etkileşimlerine izin verilerek oluşturulan taban fonksiyonlarının katkılarını tahmin eden bir avantaja sahiptir.



Şekil 3.3. Basit MARS Modeli



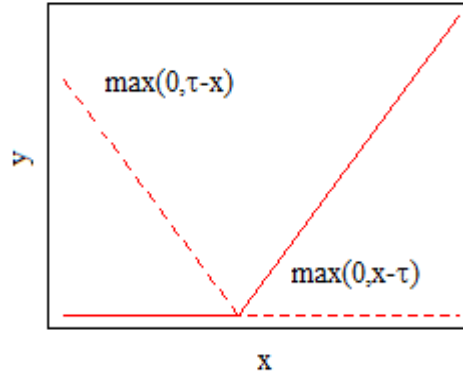
Şekil 3.4. Bir MARS Modelde Değişken Etkileşimleri

MARS algoritması ileri ve geri doğru olmak üzere iki adımdan oluşmaktadır (Friedman 1991). İlk aşamada kullanılan ileriye doğru adım algoritmasıyla elde edilen model istenilenden daha karmaşık bir yapıya sahip olduğundan dolayı ikinci aşamada geriye doğru adım algoritması ile modeldeki temel fonksiyonlar sırasıyla eklenerek optimum modele ulaşılmaktadır.

Mars modeli;

$$c^-(x, \tau) = [-(x - \tau)]_+ , \quad c^+(x, \tau) = [(x - \tau)]_+ , \quad [q]_+ := \max\{0, q\} \quad (3.2.33)$$

formundaki doğrusal temel fonksiyonları kullanır. Bu temel fonksiyonlar X_j açıklayıcı değişkenlerinin gözlenen değerlerini en uygun τ düğüm noktalarıyla aralıklara bölen parçalı doğrusal regresyon eğrileridir ve bunlar birbirinin yansıması (*Reflected*) olan çiftler olarak adlandırılır. MARS modeli oluşturulurken amaç her açıklayıcı değişken X_j için her $\bar{x}_{i,j}$ gözlem noktalarındaki düğüm noktalarında bu çifti bulmaktır.



Şekil 3.5. MARS modelindeki temel fonksiyonlar

Bu nedenle, temel fonksiyonların kümesi,

$$\mathcal{F} := \left\{ (X_j - \tau)_+ , (\tau - X_j)_+ \mid \tau \in \{ \bar{x}_{1,j}, \bar{x}_{2,j}, \dots, \bar{x}_{N,j} \}, j \in \{1, 2, \dots, p\} \right\} \quad (3.2.34)$$

şeklinedir. N kullanılan gözlem sayısını göstermek üzere, eğer bütün $\bar{x}_{i,j}$ değerleri birbirinden farklı ise kullanılacak toplam temel fonksiyon sayısı $2Np$ 'dir.

Genel parametrik olmayan regresyon modelini göz önüne alalım:

$$Y = f(\mathbf{X}) + \varepsilon, \quad (3.2.35)$$

burada Y yanıt değişken $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ açıklayıcı değişken vektörü, ε , sıfır ortalamalı sonlu varyanslı hata değişkenidir. İleri adım sonucu oluşturulan $f(\mathbf{X})$ ve sabit terimle birlikte (3.2.35) eşitliği

$$Y = \theta_0 + \sum_{m=1}^M \theta_m \psi_m(X) + \varepsilon \quad (3.2.36)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada M değeri veriye uygun olan maksimum temel fonksiyon sayısıdır. $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (i = 1, 2, \dots, N)$ ' gözlem değerlerine bağlı olarak oluşturulan MARS modelinin m . temel fonksiyonu

$$\psi_m(X) := \prod_{j=1}^{K_m} \left[s_{K_j^m} (x_{K_j^m} - \tau_{K_j^m}) \right]_+ \quad (3.2.37)$$

şeklinde dir. Burada K_m , m . temel fonksiyonda çarpılan doğrusal temel fonksiyon sayısını; s , $+1$ veya -1 'i; $x_{K_j^m}$, m . temel fonksiyondaki j . değişkeni göstermektedir. Bu temel fonksiyonlar ya tek değişkenli ya da çok değişkenli etkileşim terimlerinden oluşmaktadır.

İleri doğru adım algoritmasının her aşamasında kullanılacak en uygun düğüm noktası ve temel fonksiyon “uyumun eksikliği” kriterine göre belirlenir. Seçilebilecek mümkün olan bütün temel fonksiyonlar ve gözlem değerleri arasından bu kriteri en küçük yapan gözlem değeri ve temel fonksiyon seçilir. Kullanıcı tarafından en büyük temel fonksiyon sayısı (M_{max}) ulaşıldığına karar verildiğinde ileri doğru adım algoritması durdurularak geri adım algoritması başlar. Bu algoritmanın amacı, veriye uygunluğu azaltmadan modelin karmaşıklığı azaltarak en uygun modeli oluşturmaktır. Bu nedenle, geriye doğru adım algoritması her adımda hata kareleri toplamını en az artıran temel fonksiyonları modelden çıkarır. Dolayısıyla, her adımda modeldeki α terim sayısına göre tahmin edilen optimal \hat{f}_α modelini belirler. Burada α her adımda elde edilen modelin karmaşıklığı ifade eder. α 'nın optimal değeri, uyumun eksikliğini ifade eden *Genelleştirilmiş Çapraz Doğrulama* ($GCV(\alpha)$) kriteri kullanılarak belirlenir. Bu kriter aşığıdaki şekilde tanımlanır:

$$GCV(\alpha) := \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{f}_\alpha(x_i))^2}{(1 - M(\alpha)/N)^2}, \quad (3.2.38)$$

burada $M(\alpha) = u + dK$; N , örneklem genişliği; u , bağımsız temel fonksiyonların sayısı; K , seçilen düğüm sayısı; d , optimal temel fonksiyonları elde etmek için kullanılan bir ceza parametresidir. $GCV(\alpha)$ 'nin payı hata kareler toplamını, paydası ise modelin karmaşıklığını hesaplamaktadır. Geri doğru adım algoritması boyunca önemli bağımsız değişkenler ve bu değişkenlerin etkileşimleri belirlenerek $GCV(\alpha)$ yi en küçük yapan model seçilir.

3.2.5 Konveks ve Konik Karesel Programlama (CQP)

Konveks programlama bir konveks küme üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyonun minimize edilmesi ile ilgilenir. Bu şekildeki problemler çok sayıda değişik uygulama alanlarında karşımıza çıktığı gibi, güçlü dualite teorisi ve herhangi bir yerel minimum noktanın genel minimum nokta olması gibi önemli özelliklere de sahiptir. Bu programlama sayısal olmak yönünden kullanışlı olduğu kadar teorik olarak da yeterli çözüm yöntemlerine sahiptir. Konveks programlama, yarıtanımlı programlama (SDP), konik karesel programlama (CQP) ve geometrik programlama (GP) gibi çeşitli yapılardaki problemlerden oluşur (Nemirovski 2001). Biz çalışmamızda, kısıtları ikinci dereceden koniler olan konik karesel optimizasyon problemini kullanacağız. Bu nedenle bu programı daha detaylı olarak ele alacağız.

Geometrik olarak konveks bir program aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \quad (3.2.39)$$

Burada $\mathbf{c} \in R^n$ ve $\mathbf{A} \subseteq R^n$ bir konveks kümedir. Doğrusal programlama (LP), amaç ve $f_i, (i = 0, 1, \dots, m)$ kısıt fonksiyonları doğrusal olan en basit konveks programdır. Bu program

$$\begin{aligned} \min_{u \in R^n} f_0(u), \\ f_i(u) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

şeklinindedir. Böyle bir problem,

$$\begin{aligned} \min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \in \mathbf{K} := \mathbf{R}_+^n \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları doğrusal değilse, (3.2.40)'daki f_i fonksiyonlarındaki doğrusal olmama durumu göz önüne alınmalıdır. (3.2.40)'daki konveks program (3.2.41)'deki konik program şeklinde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \in \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Burada, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{R}^N$ kapalı, sivri (pointed), konveks ve içi boş olmayan bir koni ve $x \rightarrow \mathbf{Ax}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$ 'ye tanımlı bir lineer dönüşümdür.

Genel olarak, konveks programda üç tip \mathbf{K} konisi kullanılır, bunlar aşağıdaki şekildedir (ikinci tip konide Öklit normu kullanılır):

$$\begin{aligned} \text{Negatif olamayan orthant:} \quad \mathbf{R}_+^n &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}, \\ \text{Lorentz konilerinin direkt çarpımları:} \quad \mathbf{L}^n &= \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid \|x\|_2 \leq t\} \\ \text{Yarıtanımlı koni:} \quad \mathbf{S}_+^n &= \{X \in \mathbf{S}^n: X \succcurlyeq 0\} \end{aligned}$$

Bu üç tipe koniye bağlı olarak yazılan optimizasyon problemleri iç noktalar yöntemi ile çözülür.

n -boyutlu ikinci dereceden Lorentz konisi;

$$\mathbf{L}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2} \right\} \quad (n \geq 2)$$

olarak tanımlanır.

Bir konik karesel problem,

$$\begin{aligned} \min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \in \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

şeklinde tanımlanan bir konik problemdir. Burada \mathbf{K} kısıt konisi aşağıdaki gibi çok sayıda ikinci dereceden konilerin direkt çarpımıdır:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^{n_1} \times \mathbf{L}^{n_2} \times \dots \times \mathbf{L}^{n_k}$$

$$= \{y[1]^T \ y[2]^T \ \dots \ y[k]^T | y[i] \in L^{n_i} \ (i = 1, 2, \dots, k)\} \quad (3.2.44)$$

(3.2.44)'ten de görülebileceği gibi, bir konik karesel program amaç fonksiyonunun lineer kısıtları ise aşağıdaki gibi sonlu sayıda ikinci dereceden konileri olan bir optimizasyon problemidir.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \in L^{n_i} \ (i = 1, 2, \dots, k),$$

Burada,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = [[\mathbf{A}_1: \mathbf{b}_1]^T \ [\mathbf{A}_2: \mathbf{b}_2]^T \ \dots \ [\mathbf{A}_k: \mathbf{b}_k]^T]^T$$

(3.2.44) ifadesinde verilen y 'ye karşılık gelen $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrisinin parçalanmasıdır. Böylece, konik karesel problemi,

$$\min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \ \mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \in L^{n_i} \ (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.2.45)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \in L^{n_i}$ ifadesi kısaca $\mathbf{A}_i \mathbf{x} \succ_{L^{n_i}} \mathbf{b}_i$ olarak gösterilir [28].

Eğer $[\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i]$ veri matrisi

$$[\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{d}_i \\ \mathbf{p}_i^T & q_i \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanırsa, (3.2.45)'deki optimizasyon problemi, \mathbf{D}_i , $(n_i - 1) \times (\dim x)$ boyutlu bir matris, \mathbf{d}_i ve \mathbf{p}_i sırası ile $(n_i - 1)$ ve $(\dim x)$ boyutlu vektörler, q_i reel sayı olmak üzere,

$$\min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \ \|\mathbf{D}_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\|_2 \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i \ (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.2.46)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\|\cdot\|_2$ Öklit normunu göstermektedir. (3.2.46) ifadesi konik karesel optimizasyon probleminin en açık formudur. Bu optimizasyon probleminde kullanılan koninin duali \mathbf{K}_* olmak üzere $\mathbf{K}_* = \mathbf{K}$ dır [28].

Sonuç olarak, (3.2.43) problemi için dual problem,

$$\max_{\lambda} \mathbf{b}^T \lambda, \ \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{c}, \ \lambda \in \mathbf{K} \quad (3.2.47)$$

şeklindedir. Eğer λ , $\lambda := (\lambda_1^T, \lambda_2^T, \dots, \lambda_k^T)^T$ şeklinde m_i boyutlu λ_i blok vektörlere parçalanırsa, dual problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\max_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k} \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i^T \lambda_i, \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i^T \lambda_i = \mathbf{c}, \lambda_i \in \mathbf{L}^{n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.2.48)$$

Ayrıca $\lambda_i = (\boldsymbol{\kappa}_i^T, \nu_i)^T$, skaler bileşenli bir vektör şeklinde yazılarak, $\geq_{\mathbf{L}^{n_i}} 0$ 'ın tanımı göz önünde bulundurulursa, (3.2.46) optimizasyon problemi için dual problem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\max_{\boldsymbol{\kappa}_i, \nu_i} \sum_{i=1}^k [\boldsymbol{\kappa}_i^T \mathbf{d}_i + \nu_i q_i], \sum_{i=1}^k [\mathbf{D}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i + \nu_i \mathbf{p}_i] = \mathbf{c}, \|\boldsymbol{\kappa}_i\|_2 \leq \nu_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.2.49)$$

Burada $\boldsymbol{\kappa}_i$, $(n_i - 1)$ boyutlu bir vektör, ν_i bir reel sayıdır. (3.2.46) ve (3.2.49) konik karesel problemin ve dualinin standart formlarını oluşturur.

3.2.5.1 Konik Karesel Programlama için Çözüm Metotları

LP, SDP, GP ve CQP gibi konveks optimizasyon problemlerinin çözümü için klasik *polinomsal zaman algoritmaları* uygulanabilir (Nesterov ve ark. 1994). Ancak bu algoritmalar, amaç fonksiyonu ve kısıtlar için sınırlı bilgiyi kullandığından bazı dezavantajlara sahiptir. Bu nedenle, konik karesel program gibi “iyi tasarlanmış” konveks problemleri çözmek için, ilk olarak Karmakar tarafından 1984 yılında geliştirilen *iç nokta metotları* (IPM) kullanılır (Karmakar 1984). Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki şekilde verilen bir optimizasyon problemi göz öüne alalım:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (3.2.50)$$

Bu yöntem, kapalı ve konveks olduğu varsayılan olurlu küme $\boldsymbol{\Omega}$ nın iç noktalarını kullanır. Bu yöntemde, $\boldsymbol{\Omega}$ 'nın içinde iyi tanımlı (düzgün ve güçlü olarak konveks) bir $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ iç penaltı fonksiyonu (bariyer) seçilir. Bu fonksiyon dizisel olarak, iç noktalardan kenar noktalara yaklaşırken “*Patlar*”, yani,

$$\mathbf{x}_k \in \text{int}\boldsymbol{\Omega} \quad (k \in \mathbb{N}_0), \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \in \partial\boldsymbol{\Omega} \implies \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.2.51)$$

Bir iç penaltı fonksiyonu ve amaç fonksiyonu tarafından üretilen bir parametrelili,

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}) := t\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) : \text{int}\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının ailesini göz önüne alalım. Burada t penaltı parametresinin negatif olmadığı varsayılmaktadır. İlimli düzgünlük koşulları altında,

- Her $F_t(\cdot)$ fonksiyonu Ω 'nın iç noktalarında $\mathbf{x}_*(t)$ minimum değerine ulaşır, ve bu değer tektir;
- Merkezi $\mathbf{x}_*(t)$ yolu bir düzgün eğridir ve bu eğrinin her limit noktası ($t \rightarrow \infty$), yukarıdaki optimizasyon probleminin en uygun çözümünün kümesine aittir.

Bu algoritmalar problem yapısını çok iyi şekilde kullandıkları, çok iyi komplekslik sınırları belirledikleri için ve pratik performans açısından oldukça avantajlıdır (Chou ve ark. 2003).

3.2.5.2 Konik Karesel Programlamanın Kompleksliği

Bölüm 3.2.5'de ifade edildiği gibi standart bir CQP optimizasyon problemi aşağıdaki şekildedir:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad , \quad \|\mathbf{D}_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\|_2 \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i \quad (i = 1, \dots, r), \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq t.$$

Burada \mathbf{D}_i matrisleri $k_i \times k$ tipinde, $\mathbf{p}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ve $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ 'dir. (3.2.46)'da ifade edilen optimizasyon probleminin verisi (*veri*) ve boyutu (*boy*),

$$\text{veri}((3.2.46)) := [r; k; k_1; \dots; k_r; \mathbf{c}; \mathbf{D}_1; \mathbf{d}_1; \mathbf{p}_1; q_1; \dots; \mathbf{D}_k; \mathbf{d}_k; \mathbf{p}_k; q_k; t]$$

$$\text{boy}((3.2.46)) := \text{boy}(\text{veri}((3.2.46))) := (r + \sum_{i=1}^r k_i)(k + 1) + k + 3$$

şeklinindedir (Nemirovski 2001), (Taylan ve ark. 2007). ε -çözümünün aritmetik kompleksliği;

$$\text{komp}l((3.2.46), \varepsilon) := O(1)(r + k)^{1/2} k \left(k^2 + r + \sum_{i=1}^r k_i^2 \right) \text{basamak}((3.2.46), \varepsilon)$$

dir. Burada;

$$\text{basamak}((3.2.46), \varepsilon) := \ln((\text{boy}((3.2.46)) + \|\text{veri}((3.2.46))\|_1 \varepsilon^2) / \varepsilon),$$

şeklinde toplam (ya da l_1 norm)' ın kullanılması ile (3.2.46) için hesaplanan ε -çözümünün doğruluk basamaklarının sayısı olarak tanımlanır (Taylan ve ark. 2007). Burada kompleksliğin tanımı Arkadi Nemirovski (2001) tarafından verilmiştir.

3.2.6 MARS Kullanılarak Zaman Serilerinin Doğrusal Olmayan Modellemesi

Bölüm 3.2.2 de ifade edildiği gibi regresyon modeli, bir sistemin bağımlı ve bağımsız değişkenleri arasındaki ilişkinin istatistiksel bir modelini oluşturmak için kullanılır. Regresyon modelinin fonksiyonel bir formunu geliştirmek için kullanılan klasik yöntemler, sistem hakkındaki önceki bilgilere dayanır ve bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olarak gösterilen bağımlı değişkenlerin sürekliliği ve düzgünlüğü $(y_i, x_i)(i = 1, \dots, N)$ gözlem değerlerine bağlı olarak incelenir. Ancak zaman serisi gözlem değerleri arasında bir otokorelasyon mevcut olduğundan doğrusal regresyon doğrudan ilgilenemez. Bu nedenle bu otokorelasyon ortadan kaldırılarak doğrusal regresyon uygulanır (bkz. 3.2.2.1). Bununla birlikte, zaman serisi verisi geleceğe yönelik öngörü yapmak amacı ile kullanılır ve bu veriye uygulanacak model doğrusal olmayabilir. Yani veri doğrusal olmayan bir özellik gösterebilir. Bu doğrusal olmamayı gösteren parametrik olan ve parametrik olmayan yöntemler vardır.

$$y = f(x_1, \dots, x_p) + \varepsilon \quad (3.2.52)$$

modelini göz önüne alalım. Burada $\hat{f}(x)$ tahmin modelini belirlemek için kullanılan en yaygın parametrik olmayan regresyon yöntemleri, doğrusal düzleştirme ya da spline düzleştirme yaklaşımlarını kullanırlar (Thisted 1988).

Parametrik olmayan regresyon modelleme metotları ikiden fazla boyutlu problemlere uygulandığında yanlış tahminler gibi zorluklarla karşılaşılır. Ortaya çıkan bu tür zorluklara *boyutluluk laneti* (Curse of Dimensionality) adı verilir (Bellman 1961). Boyutluluk laneti, yüksek boyutlu tahmin edici değişkenler uzayları oluşturmak amacıyla p 'nin bir doğrusal artışı için örneklem büyüklüğü N 'deki üssel artış ihtiyacını tanımlar. Gerçekte boyutluluk laneti, bazı parametrik olmayan regresyon modelleme metotlarının daha az boyutlu problemlere uygulanmasını sınırlar.

Doğrusal düzleştirme (3.2.52)'den

$$\hat{f}(x) = \mathbf{S}y \quad (3.2.53)$$

ile $f(x)$ 'i tahmin eden parametrik olmayan regresyon modelinin bir formudur. Burada \mathbf{S} , $n \times n$ matristir. En küçük kareler regresyonundaki gibi, \mathbf{S} matrisi sadece \mathbf{X} matrisine bağlıdır. Ancak doğrusal düzleştirmedeki \mathbf{S} matrisi \mathbf{X} matrisinin doğrusal olmayan bir

formu olabilir (Thisted 1988). Genelde doğrusal düzleştiriciler x_i 'nin çevresindeki verilerin bazı komşuluklarını kullanarak, $f(x)$ 'in x_i 'deki tahminini hesaplarlar. Bazı yaygın doğrusal düzleştiriciler; sürekli ortalamalar, Kernel düzleştiricisi ve sürekli çizgiler yöntemlerini içerir (Cleveland 1979), (Altman 1987).

Spline düzleştirme yaklaşımları, parametrik olmayan regresyon modelleri gibi (3.2.53) doğrusal düzleştirmenin özel bir formudur. Çünkü bu yaklaşımlar, en küçük kareler ve maksimum olabilirlik yöntemleri ile ilişkili optimizasyon problemlerinin çözümü gibi ortaya çıkarlar (Thisted 1988). Spline düzleştirme yaklaşımları parametrik ve parametrik olmayan regresyon metotları arasında bir zincir gibidir (Silverman 1985).

Pürüzlü penaltı metotları ve regresyon eğrileri spline dönüştürmenin iki formudur. $f(x)$ 'i tahmin etmek için pürüzlü penaltı metotları kullanan spline düzleştirme yaklaşımları çok sağlam regresyon modelleme metotlarıdır. Ancak pürüzlü penaltı metotları, boyutluluk laneti ve büyük p değerleri için hesaplanması gereken katsayıların büyük çoğunluğu tarafından engellenir. Regresyon eğrileri, penaltı metotlarının pürüzlülüğü zorluğunu aşmak için regresyon modeli için spline düğümlerinin sayısını ve yerini seçebilecek bir metoda gereksinim duyar. MARS bu gereksinime yanıt veren ve açıklayıcı değişken sayısı $p > 2$ ve örneklen büyüklüğü N makul bir şekilde büyük olduğunda parametrik olmayan bir yöntemdir.

MARS, diğer basit uyum fonksiyonlarının yerine regresyon eğrilerini kullanan ve tekrarlı bölme stratejisinin genelleşmiş hali olarak düşünülebilir (Morgan 1963), (Breiman ve ark. 1984).

MARS hesapsal bir regresyon modeli olmasına rağmen, çoklu bölme ve açıklayıcı değişkenleriyle birlikte yüksek boyutlu veri için sürekli modeller üretebilen regresyon model oluşturulmasına sistematik (otomatik) bir yaklaşımı sağlar. Açıklayıcı değişkenlerin verilen bir kümesi için MARS, bir ileri ve geri tekrarlı bölme stratejisi sırasında seçilen açıklayıcı değişkenlerin, temel eğri üreten fonksiyonlarının bir uzantısı formundaki modeli oluşturur. MARS, $p \leq 2$ gibi düşük boyutlu açıklayıcı değişkenler için regresyon modellemesinde kullanılmasına rağmen, yüksek boyutlu açıklayıcı değişken durumunda birçok regresyon yönteminin sahip olduğu dezavantaja sahip değildir. Eğer veri, özel yapıya sahip olmayan $f(x)$ 'in oluşturulmasında kullanılırsa, boyutluluğun getireceği dezavantajın üstesinden gelinemez (Friedman 1991). Ancak

genelde bu durum MARS için söz konusu değildir, bu nedenle MARS, $f(x)$ 'in oluşturulmasında kullanılan verinin düşük boyutlu yapısından yararlanarak boyutluluğun dezavantajından kurtulmaya çalışır.

Literatüre göz attığımızda, zaman serilerine ilişkin modelleme ve analizlere yönelik araştırma ve uygulamalarda doğrusal model yaygın bir şekilde kullanılmıştır. Bu durum, doğrusal zaman serileri teorisinin yeterli olgunluğa ulaşmış olmasından ve çoğu çalışma ve istatistik paketlerinin doğrusal zaman serileri için üretilmiş olmasından kaynaklanmaktadır. Ancak doğrusal olmayan, zamana bağlı sistemler doğrusal modeller tarafından yeterli olarak ele alınmamıştır. Doğrusal olmayan sistemlerin analizinde doğrusal modellerin kullanılması sırasında hatalı ya da eksik sonuçlara neden olan geçersiz varsayımlar oluşabilir. Bu tür sistemler için eldeki doğrusal olmayan sisteme kolayca adapte edilebilecek genel bir doğrusal olmayan modeller sınıfının göz önüne alınması gerekir (Tong ve ark. 1985), (Priestley 1988).

Bir zaman serisi modelinde τ . değer olan $\{X_\tau\}$ yerine $X_{\tau-1}, X_{\tau-2}, \dots, X_{\tau-p}$ açıklayıcı değişkenleri kullanıldığında ve bu açıklayıcı değişkenler bir doğrusal fonksiyonun içine yerleştirildiğinde oldukça yaygın olarak bilinen AR(p) zaman serisi modeli elde edilir (Priestley 1988). $X_{\tau-1}, X_{\tau-2}, \dots, X_{\tau-p}$ 'nin X_τ üzerindeki etkisini modellemek için MARS metodu kullanılırsa otoregresif model elde edilir. Ancak bu modeller, gecikmeli tahmin edici değişkenlerin

$$\begin{aligned} T_{j,r_m}(x) &= [(t - x_v)_+]^{q=1} = (t - x_v)_+ \\ T_{j,r_{m+1}}(x) &= [(x_v - t)_+]^{q=1} = (x_v - t)_+ \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

biçiminde eşik terimleri içermesi durumunda, doğrusal olmayan modeller olabilirler ve diğer gecikmeli tahmin edici değişkenlerle oluşan doğrusal olmayan terimlerle etkileşim içerisinde bulunabilirler.

Eşik değerli zaman serisi modelleri (bölme noktalı modeller) fiziksel davranışın değişmesi sonucunda doğal olarak ortaya çıkan doğrusal olmayan modellerin bir sınıfıdır. Açıklayıcı değişkenlerin etki alanı içinde, açıklayıcı değişkenler ve karşıt değişkenler arasındaki ilişkinin değişkenliğini ortaya çıkarmak için farklı model oluşumları önemlidir. Eşik değerli modele basit bir örnek:

$$X_\tau = \begin{cases} p_1 X_{\tau-1} + \varepsilon_\tau ; X_{\tau-1} \leq 0 \text{ ise} \\ p_2 X_{\tau-1} + \varepsilon_\tau ; X_{\tau-1} > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2.55)$$

dir. Tong 1983'te bu tür davranışlar için bir eşik değerli model olan *Eşik Değerli Otoregresyon Metodu*'nu (TAR) geliştirmiştir. TAR model, $\{X_\tau\}$ zaman serilerinin D tanım kümesinin ayrık alt bölgeleri üzerinde doğrusal olmayan fonksiyonların doğrusal parçacıklarını tanımlar. Örneğin; tanım bölgesinin her bir ayrık alt bölgesi içindeki doğrusal modelleri tanımlar. Tong'un eşik değerli metodu birçok zaman serisinin modellenmesinde çok esnek ve güçlü bir yapıya sahiptir. Ancak bu metot, sürekli olması için zorlanmadıkça, alt bölge sınırlarında süreksiz olan ayrık alt bölge modelleri üretecektir.

MARS, Tong' un TAR modeline göre daha genel, sürekli, doğrusal olmayan eşik değerli modellerin genel bir sınıfı olarak kabul edilebilir. Doğrusal olmayan eşik değerli modellerin bu sınıfını geliştiren metot *Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Otoregresyon* (ASTAR) metodu olarak adlandırılır (Stevens 1991).

Sürekli doğrusal olmayan eşik değerli modellerin daha genel bir sınıfının elde edilişi basit bir örnekle gösterilebilir. X_τ ($\tau = 1, 2, \dots, N$) zaman serisini düşünelim. Bu seriyi ASTAR kullanarak modellemek için gecikmeli tahmin edici değişkenleri $p = 3$ için, $X_{\tau-1}$, $X_{\tau-2}$ ve $X_{\tau-3}$ şeklinde alalım. ASTAR algoritmasının her bir ileri adımı, modelin önceden seçilmiş terimleri tarafından belirtilmiş adaylardan sadece bir ve bir tek yeni terim kümesi seçer. Bizim örnek problemimizde gecikmeli tahmin edici değişkenlerin ayrı tanım kümelerindeki bazı t^* bölme noktaları (eşik değerler) için ASTAR algoritmasının başlangıçtaki ileri adımının adaylar kümesi,

$$\begin{aligned} &(X_{\tau-1} - t^*)_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-1})_+, \text{ ya da} \\ &(X_{\tau-2} - t^*)_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-2})_+, \text{ ya da} \\ &(X_{\tau-3} - t^*)_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-3})_+ \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

dir. Bu problem için ASTAR'ın $t^* = t_1$ eşik değerli $X_{\tau-2}$ gecikmeli açıklayıcı değişkenini seçtiğini varsayalım. Burada $(X_{\tau-2} - t_1)_+$ ve $(t_1 - X_{\tau-2})_+$ ASTAR modelde başlangıç terimleri olarak seçilebilir. İkinci ileri adım ASTAR algoritması (3.2.56)'daki tüm adayları ve

$$\begin{aligned} &(X_{\tau-1} - t^*)_+(X_{\tau-2} - t_1)_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-1})_+(X_{\tau-2} - t_1)_+, \text{ ya da} \\ &(X_{\tau-3} - t^*)_+(X_{\tau-2} - t_1)_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-3})_+(X_{\tau-2} - t_1)_+, \text{ ya da} \\ &(X_{\tau-1} - t^*)_+(t_1 - X_{\tau-2})_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-1})_+(t_1 - X_{\tau-2})_+, \text{ ya da} \end{aligned}$$

$$(X_{\tau-3} - t^*)_+(t_1 - X_{\tau-2})_+ \text{ ve } (t^* - X_{\tau-3})_+(t_1 - X_{\tau-2})_+ \quad (3.2.57)$$

şeklindeki adayların yeni kümesini içerir. Yani, $X_{\tau-2}$ gibi bir değişkenden $t^* \neq t_1$ bölme noktası için (3.2.56)'dan $(X_{\tau-2} - t^*)_+$ ve $(t^* - X_{\tau-2})_+$ gibi model terimlerinin bir kümesi seçilerek çoğul eşik değerler elde edilebilir. ASTAR algoritmasının sonraki her bir ileri adımı için adaylar kümesi sayısı azalan değildir ve modelin daha önce seçilen terimlerine bağlıdır. İleri adım algoritmasının ardından, S modeldeki terimlerin son sayısı ve $1 \leq S \leq M$ olmak üzere, modelden artık $M - S$ terimi silen geri adım algoritması gelir.

$K_m(x)$ temel üreten fonksiyonu, R_m alt bölgesi ile ilişkilendirilmiş ayrık eğrilerin sıralı dizisi olarak tanımlansın. Her temel üreten fonksiyonun ilk terimi $T_{0,r_1}(x) = 1$ 'dir ve bu terim R_1 ile ilişkilendirilir. Her ayrık eğri, bir kaynak bölgenin bir komşu alt bölgeye tekrarlı bölünmesini sunar. Örneğin, $T_{7,r_m}(x)$ 'i kullanarak R_m alt bölgesini üretmek için R_7 kaynak bölgesine bağlı sıralı ayrık eğri dizisinin $(1, 3, 7)$ olduğunu varsayalım. R_m -inci ($m > 7$) alt bölgesi ile ilişkilendirilmiş $K_m(x)$ temel üreten fonksiyonu,

$$K_m(x) = T_{0,r_1}(x) \times T_{1,r_3}(x) \times T_{3,r_7}(x) \times T_{7,r_m}(x) = K_7(x) \times T_{7,r_m}(x)$$

dir. $K_m(x)$ 'i x 'de değerlendirmek için, x 'de temel üreten fonksiyonunun içindeki her bir ayrık eğrinin değerlendirilmesi gerekir. Eğer x 'deki herhangi bir ayrık eğri değeri sıfırsa, x 'deki $K_m(x)$ de sıfırdır. Aksi takdirde x 'deki $K_m(x)$, x 'deki ayrık eğrilerin bir çarpımıdır. Örneğin, $R_5 \in \mathfrak{R}^3$ için sıralı ayrık eğrileri $(1, 2, 5)$ alalım. $r_2 = (2, 3)$ ve $r_5 = (-3, 1)$ olsun. R_5 ile ilişkilendirilmiş temel üreten fonksiyon;

$$\begin{aligned} K_5(x) &= T_{0,r_1}(x) \times T_{1,r_2}(x) \times T_{2,r_5}(x) \\ &= 1 \times (x_2 - 3)_+ \times (1 - x_3)_+ = \begin{cases} (x_2 - 3)(1 - x_3); & x_2 > 3 \text{ ve } x_3 < 1 \\ 0 & ; \text{ d. d.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$x = \{5,4,0.5\} \in R_5 \text{ ise } K_5(x) = 0.5 \text{ ve } x = \{4,3.5,6\} \notin R_5 \text{ ise } K_5(x) = 0$$

dir.

$X_{\tau-1}, X_{\tau-2}, \dots, X_{\tau-p}$ şeklindeki ve $\{X_{\tau-1}^p\}$ ile gösterilen $\{X_\tau\}$ zaman serilerindeki τ . terim için MARS'tan açıklayıcı değişken seçilirse,

$$\hat{f}(x) = c_j K_j(x)$$

olmak üzere, X_τ 'yu tahmin eden ASTAR modelin fonksiyonel formu;

$$\hat{X}_\tau = \sum_{j=1}^S c_j K_j(X_{\tau-1}^p) \quad (3.2.58)$$

şeklinindedir. Burada \hat{X}_τ , $\{R_j\}_{j=1}^S$ alt bölgeleriyle ilişkilendirilmiş $\{K_j(X_{\tau-1}^p)\}_{j=1}^S$ şeklinde eğri üreten temel fonksiyonların katkılı bir fonksiyondur. (3.2.58) gösterimi, ayrık eğri fonksiyonların sıralı serisidir ve her biri eğri üreten temel fonksiyonu tanımlayan (3.2.54) ve

$$K_m(x) = T_{0,r_1}(x) \times T_{1,r_3}(x) \times T_{3,r_7}(x) \times T_{7,r_m}(x) = K_7(x) \times T_{7,r_m}(x)$$

kullanılarak genişletilebilir. a ve b 'yi, $0 \leq a \leq b \leq j$ olmak üzere, $T_{a,r_b}(X_{\tau-1}^p)$ şeklindeki ayrık eğri fonksiyonların sıralı serilerini göstermek için kullanalım. Yukarıda sözü edilen genişleme kullanılarak zaman serilerinin τ . değeri $\{X_\tau\}$ için ASTAR modelinin fonksiyonel formu,

$$\hat{X}_\tau = \sum_{j=1}^S c_j \prod_{T_{a,r_b} \in K_j} [sgn_v(X_{\tau-v} - t)]_+ \quad (3.2.59)$$

şeklinde elde edilir. Burada $T_{a,r_b}(X_{\tau-1}^p)$ 'nin $X_{\tau-1}^p$ için ispatı ve $K_j(X_{\tau-1}^p)$ 'nin ispatı sadelik için atlanmıştır (Stevens 1991). Ayrıca (3.2.43)'deki $r_b = (\pm v, t)$ ve sgn_v ; $(-v)$ için sol, $(+v)$ için sağ ayrık eğri fonksiyonu tanımlayan v 'nin işaretini gösterir.

ASTAR kullanarak zaman serileri modellendiğinde Tong'un yaklaşımının bazı sınırlamalarının üstesinden gelinir. ASTAR metodu, açıklayıcı değişkenlerin tanım kümesinde sürekli olan eşik değerli zaman serileri modelleri üretmekte ve gecikmeli açıklayıcı değişkenler arasındaki etkileşime izin vermektedir. Ayrıca ASTAR zaman serileri modeli çoklu gecikmeli tahmin edici değişken eşik değerlerine sahiptir. Oysa Tong'un metodu, terimleri ASTAR algoritmasının adaylarının başlangıç kümelerini sınırlayan parçalı doğrusal modellerinden oluşan, eşik değerli modeller üretmektedir (Örneğimiz için (3.2.56)). Tong'un eşik değerli modelleri, gecikmeli açıklayıcı değişkenler arasındaki etkileşime izin vermekte ve genellikle, eşik değerlerin seçim aşamasının zorluğundan dolayı, tüm gecikmeli tahmin edici değişkenler arasından yalnız bir eşik değerle sınırlandırılmaktadır.

MARS'ın basit doğrusal ve doğrusal olmayan zaman serisi modellerini tanımlayıp tanımlamadığı veya modelleyip modellemediği soruları akla gelebilir. Eğer tanımlamıyorsa, bilinmeyen yapılarda gerçek veri için MARS'ın kullanılması yararlı olmayacaktır. (Stevens 1991)'de Stevens, simülasyon denemeleri kullanarak MARS'ın basit doğrusal ve doğrusal olmayan zaman serisi modellerini belirleme ve modellemedeki becerisini belirlemeye çalışmıştır.

Bilinmeyen katsayılı bir AR(1) modelinin simülasyonu, ASTAR modelinin basit zaman serilerinin belirlenmesi ve modellenmesindeki becerisini ölçmektedir. Her bir ayırık alt bölgedeki "AR(1)-gibi" modeli bir eşik değerli modelin simülasyonu, ASTAR'ın basit doğrusal olmayan eşik değerli zaman serilerinin belirlenmesi ve modellenmesindeki becerisini ölçmektedir. Bu simülasyonlara, doğru modelin ne kadar sıklıkta tanımlandığının ve eğer tanımlanıyorsa K ve ρ parametrelerinin ne kadar iyi tahmin edildiğinin belirlenmesi aşamasında ihtiyaç duyulmaktadır. Burada Stevens AR(1) modeli; $X_t = \rho X_{t-1} + K + \varepsilon_t$ olarak göstermekle birlikte; K , AR(1) modelinin (genellikle sıfır kabul edilen) sabiti, ρ , bir sabit çarpan ve $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 'dir.

3.2.6.1 AR(1) Zaman Serileri Modelinin Simülasyonları

(Stevens 1991)'de AR(1) zaman serisi modeli kullanılarak iki farklı deneme yapılmıştır.

İlk denemede, bir gecikmeli tahmin edici değişken X_{t-1} ve ileri adım ASTAR prosedüründeki alt bölge sayısının maksimum değeri $M = 3$ alınarak AR(1) zaman serisi modelinin simüle edilmiş verisinden bir zaman serisi modelinin parametrelerinin tanımlanması ve tahmini için ASTAR kullanılmıştır. İlk denemenin (AR(1) zaman serisi modellerine göre) alternatif modelleri, X_{t-1} terimini içermeyen (bir sabit model) ve $\min\{X_{t-1}\}_{t=1}^{N-1}$ 'den büyük bir t eşik değerli X_{t-1} terimini içeren modellerdir.

İkinci denemede, dört gecikmeli tahmin ediciye kadar değişken içeren $\{X_{t-i}\}_{i=1}^4$ ve ileri adım ASTAR prosedüründeki alt bölge sayısının maksimum değeri $M = 8$ alınarak AR(1) zaman serisi modelinin simüle edilmiş verisinden bir zaman serisi modelinin parametrelerinin tanımlanması ve tahmini için ASTAR kullanılmıştır. İkinci denemenin alternatif modelleri, sabit modeller, bir iç eşik değerli zaman serisi modelleri

ve $X_{\tau-1}$ dışındaki bir terimden oluşan herhangi bir zaman serisi modelini içeren modelidir.

Modellerin katsayılarının asıl değerleri ve tahmini değerleri karşılaştırıldığında N değeri arttıkça tahmin edilen değerlerin doğruya daha da yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca N değeri arttıkça 100 simüle edilen modelin doğru tanımlananlarının sayısı C de 100'e yaklaşmaktadır. N 'nin küçük değerleri için negatif yanlılığa sahip ρ 'nin ASTAR tahminleri, N arttıkça azalmaktadır. Otokorelasyonları tahmin etmek için veri kullanıldığında elde edilen $\hat{\rho}$ 'nin aşağı doğru yanlılığı (Kendall 1983)'de tanımlananla aynıdır.

3.2.6.2 Doğrusal Olmayan Eşik Değerli Zaman Serileri Modelinin Simülasyonları

ASTAR'ın doğrusal olmayan eşik değerli zaman serileri modelinin özelliklerini elde etmek için, iki alt bölgeli eşik değerli zaman serileri modelinin simülasyon denemelerinde

$$X_{\tau} = \begin{cases} \rho_1 X_{\tau-1} + \varepsilon_{\tau} ; X_{\tau-1} \leq 0 \text{ ise} \\ \rho_2 X_{\tau-1} + \varepsilon_{\tau} ; X_{\tau-1} > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2.60)$$

kullanılmıştır. Burada $\tau = 1, 2, \dots, N$ zaman serilerinin dizini, ρ_1 ve ρ_2 farklı denemeler için çeşitli değerler alan sabit çarpanlar ve $\varepsilon_{\tau} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ 'dir. Bu, ASTAR prosedürünün ilk değerlendirme ve onaylaması için uygun bir başlangıç noktası öneren ve sağlayan en basit eşik değerli modeldir. Doğrusal olmayan eşik değerli zaman serileri modeli (3.2.60) her bir alt bölgede, ε 'nin varyansı her bir bölgedeki sabit olarak varsayıldığından, X_{τ} 'nin iki alt bölgenin her birinde de farklı varyansa sahip olabileceğini belirten "AR(1)-gibi" modele sahiptir. Ayrıca $X_{\tau-1} = 0$ 'daki bir eşik değer için her bir alt bölgedeki örneklem değerlerinin beklenen sayıları sadece

$\rho_1 = -\rho_2$ olduğunda aynı olacaktır.

(Stevens 1991)'de doğrusal olmayan eşik değerli zaman serileri modeli kullanılarak iki farklı deneme yapılmıştır.

İlk denemede, bir gecikmeli tahmin edici değişken $X_{\tau-1}$ ve ileri adım ASTAR prosedüründeki alt bölge sayısının maksimum değeri $M = 3$ alınarak doğrusal olmayan eşik değerli zaman serileri modelinin simüle edilmiş verisinden bir zaman serisi

modelinin parametrelerinin tanımlanması ve tahmini için ASTAR kullanılmıştır. İlk denemenin alternatif modelleri, bir sabit model, AR(1) zaman serisi modelleri ve birden fazla iç eşik değere sahip doğrusal olmayan zaman serileri modelleri içeren modellerdir.

İkinci denemede, dört gecikmeli tahmin ediciye kadar değişken içeren $\{X_{\tau-i}\}_{i=1}^4$ ve ileri adım ASTAR prosedüründeki alt bölge sayısının maksimum değeri $M = 10$ alınarak doğrusal olmayan eşik değerli zaman serileri modelinin simüle edilmiş verisinden bir zaman serisi modelinin parametrelerinin tanımlanması ve tahmini için ASTAR kullanılmıştır. İkinci denemenin alternatif modelleri, sabit modelleri, $X_{\tau-1}$ dışındaki terimlerden oluşan doğrusal ve doğrusal olmayan zaman serisi modelleri ve $X_{\tau-1}$ 'de birden çok iç eşik değerli doğrusal olmayan zaman serisi modellerini içeren modelidir.

Bu denemelerde, N arttıkça doğru olarak tanımlanan modellerin sayısının arttığı görülmektedir. Ancak, N 'in artan değerleri için, model çarpanlarının tahmini değerleri için ortalama ve standart sapmada tutarlı bir ilerlemenin olduğu her zaman görülemez. Bu denemelerden esas olarak, N 'in artan değerleri için doğru tanımlanan modellerin sayısı da artar sonucuna ulaşılabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Zaman Serileri için Doğrusal Regresyon

Zaman serileri modellerinin (3.2.1) otoregresif $AR(p)$ modeli göz önüne alındığında $t = 2, \dots, n$ için;

$$AR(p) = \begin{cases} X_2 = \varphi_1 X_1 + e_2 \\ X_3 = \varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_1 + e_3 \\ \vdots \\ X_n = \varphi_1 X_{n-1} + \varphi_2 X_{n-2} + \dots + \varphi_{n-1} X_1 + e_n \end{cases} \quad (4.1.1)$$

olarak yazılabilir. Burada denklem $t = 1$ için tanımlanmamıştır. Çünkü X_0 mevcut değildir. (4.1.1) eşitliklerinin matris formu;

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ X_2 & X_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & X_1 & \vdots \\ X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{((n-1) \times 1)} = \mathbf{X}_{((n-1) \times (n-1))} \boldsymbol{\varphi}_{((n-1) \times 1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{((n-1) \times 1)}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.2)$$

şeklinde, burada $\mathbf{y} = (X_2, \dots, X_n)^T$ dir.

Doğrusal regresyon yönteminde, gözlem değerlerine bağlı olarak tahmin edilen $\boldsymbol{\varphi}$ katsayısı regresyon denklemindeki yerine yazılarak, gelecekle ilgili öngöründe bulunulabilir.

$AR(p)$ zaman serisi modeline bağlı olarak oluşturulan (4.1.2) denklemi standart doğrusal regresyon denklemine benzemektedir. Ancak bu denkleme regresyon yönteminin uygulanabilmesi için zaman serilerinde rastlanmayan $E(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) = 0$ varsayımının sağlanması gerekir (**bkz.** 3.2.2.1).

Bu nedenle, bu model için otokorelasyon ölçümüne yönelik DW testini (**bkz.** 3.2.2.1) uygulayacağız. Eğer, ardışık hatalar arasında otokorelasyon mevcut ise Prais-Winsten yaklaşımını kullanarak otokorelasyon düzeltmesi (**bkz.** 3.2.2.1) yapacağız. Bu yöntemde ardışık hatalar arası otokorelasyon aşamalı bir şekilde kaldırılır. Böylece doğrusal en küçük kareler tahmin yöntemi uygulanarak $\boldsymbol{\varphi}$ parametreleri tahmin edilebilir.

4.1.1 Prais-Winsten Yaklaşımı Kullanılarak Otokorelasyonun Düzeltilmesi

Şimdi

$$AR(1) \text{ Model : } X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t ; t = 2, \dots, n,$$

modelini göz önüne alarak, ardışık hatalar arasında bulunan otokorelasyonu Prais-Winsten yaklaşımı ile düzeltmeye çalışalım. Burada durağanlık koşulu $|p| < 1$ dir. Bu düzeltme için, ilk adımda, hata kareler toplamı RSS' in parametreye göre aşağıdaki gibi türevi sıfıra eşitlenir:

$$RSS = \sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1}]^2,$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \varphi_1} = \sum_{t=2}^n (-2) X_{t-1} [X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1}] = 0,$$

$$\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t - \hat{\varphi}_1 \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 = 0,$$

Yukarıdaki denklemin çözülmesi ile φ_1 in tahmini değeri $\hat{\varphi}_1$,

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}$$

olarak bulunur. Tahmin edilen $\hat{\varphi}_1$ nın denklemden kullanılması ile

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1},$$

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} X_{t-1} ; t = 2, \dots, n,$$

değerleri hesaplanır. Böylece t . ve $t - 1$. Hatalar arasındaki korelasyon katsayısı,

$$\hat{\rho}_{pw}^1 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2},$$

eşitliğinden hareketle,

$$\hat{\rho}_{pw}^1 = \frac{\sum \left[X_t - \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} X_{t-1} \right] \left[X_{t-1} - \frac{\sum_{t=3}^n X_{t-2} X_{t-1}}{\sum_{t=3}^n X_{t-2}^2} X_{t-2} \right]}{\sum \left[X_{t-1} - \frac{\sum_{t=3}^n X_{t-2} X_{t-1}}{\sum_{t=3}^n X_{t-2}^2} X_{t-2} \right]^2} ; t = 3, \dots, n$$

olarak hesaplanır. Bu değer, Prais-Winsten yaklaşımının 3. adımındaki denklemden yerine yazılırsa (**bkz.** 3.2.2.1)

$$(X_t - \hat{\rho}_{pw}^1 X_{t-1}) = b(X_{t-1} - \hat{\rho}_{pw}^1 X_{t-2}) + v_t ; t = 3, \dots, n$$

ifadesi elde edilir. İkinci adımda,

$$\begin{aligned} X_t^* &\rightarrow (X_t - \hat{\rho}_{pw}^1 X_{t-1}) \\ X_{t-1}^* &\rightarrow (X_{t-1} - \hat{\rho}_{pw}^1 X_{t-2}) \end{aligned}$$

alınarak,

$$X_t^* = bX_{t-1}^* + v_t \quad (4.1.3)$$

yeni denklemi oluşturulur ve birinci adıma geri dönülür. Bu şekilde,

$$\hat{\rho}_{pw}^i \rightarrow 0, (i = 1, \dots, \dots),$$

oluncaya kadar döngüye devam edilir. Otokorelasyonun görülmediği en son denklem yukarıda sözü edilen regresyon varsayımlarını sağlayacak ve regresyon yöntemlerinin uygulanmasına uygun duruma gelmiş olacaktır.

4.1.2 En Küçük Kareler Metodu ile Zaman Serisi Parametrelerinin Tahmini

Zaman serisi denklemimizin Prais-Winsten yaklaşımı ile doğrusal regresyon uygulanabilecek duruma geldiğini kabul edelim. $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_{n-1})^T$, $\boldsymbol{\varphi}$ nın en küçük kareler tahmin edicisi olmak üzere, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, en küçük kareler tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \min_{\boldsymbol{\varphi}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \\ &= \min_{\boldsymbol{\varphi}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi}\|^2 \\ &= \min_{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned}$$

denkleminin çözümünden elde edilir. Bu minimizasyon problemi, doğrusal regresyon için normal eşitliklerin;

$$\frac{\partial (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi})}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0 ; \boldsymbol{\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

çözümünden hareketle elde edilir ve bu da

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4.1.4)$$

şeklindedir. Eğer $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ singülerse, sistem tutarsızdır ve yukarıdaki çözüm elde edilemez. Bu durumda Tikhonov (Ridge Tahmin Edicisi) düzenlemesi kullanılarak problem SDA ile çözülebilir. Biz de modelimizde kullandığımız $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ 'in singüler olması olasılığına karşılık, problemimize Tikhonov düzenlemesi uygulayarak, SDA'yı uygulayacağız.

4.2 Zaman Serileri için Tikhonov Düzenlemesi ve Singüler Değer Ayrışımı

AR(p) modelinin,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

şeklinde matris formunu ele alalım. Bu model için aykırılık prensibi altında minimizasyon problemleri ile ifade edilen üç farklı şekilde Tikhonov düzenlemesi problemi yazılabilir (bkz. 3.2.3). Biz problemimiz için

$$\min_{\boldsymbol{\varphi}} \|\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}\|_2^2 + Q^2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 \quad (4.2.1)$$

şeklindeki düzenlemeyi kullanacağız. Burada $\lambda = Q^2$ birinci ve ikinci bölüm arasındaki koordinasyonu sağlayan ceza parametresidir (Aster ve ark. 2004). (4.2.1) denklemi, $\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{y}$ sisteminin geliştirilmesiyle elde edilen en küçük kareler problemi,

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} - \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (4.2.2)$$

ile eşdeğerdir. Burada α sıfır olmadıkça (4.2.2)'deki $\mathbf{X}^* = [\mathbf{X}^T \quad \alpha \mathbf{I}]^T$ genişletilmiş matrisinin son n satırı kesinlikle lineer bağımsızdır.

Bu nedenle (4.2.2) problemi,

$$[\mathbf{X}^T \quad \alpha \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} = [\mathbf{X}^T \quad \alpha \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

gibi normal denklemler ile çözülebilen tam ranklı en küçük kareler problemidir. Bu denklem

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha^2\mathbf{I})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X}^T\mathbf{y} \quad (4.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer \mathbf{X} 'in

$$\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T \quad (4.2.5)$$

şeklinde singüler değer ayrışımı (bkz. 3.2.3), (4.2.3) denkleminde kullanılırsa,

$$(\mathbf{VS}^T \mathbf{U}^T \mathbf{USV}^T + \alpha^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{VS}^T \mathbf{SV}^T + \alpha^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{VS}^T \mathbf{U}^T \mathbf{y} \quad (4.2.6)$$

denklemini elde edilir. Burada \mathbf{X} , $(n-1) \times n$ şeklinde bir matris, \mathbf{U} , $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu, sütunları \mathbb{R}^{n-1} veri uzayını geren birim vektörlerden oluşan ortogonal matris, \mathbf{V} , $n \times n$ boyutlu, sütunları \mathbb{R}^n model uzayını geren birim vektörlerden oluşan ortogonal matris, \mathbf{S} , $(n-1) \times n$ boyutlu, köşegen dışı bütün elemanları sıfır ve $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min(m,n)} \geq 0$ olan bir matristir. $(\mathbf{VS}^T \mathbf{U}^T \mathbf{USV}^T + \alpha^2 \mathbf{I})$ katsayılar matrisi singüler olmadığından (4.2.6) ile ifade edilen denklem sistemi tek bir çözüme sahiptir. Bu çözüm, tüm singüler değerleri içerir ve bu değerlerin ne kadar küçük olduğu önemli değildir. Bu nedenle $k = \min(m, n)$ olmak üzere, α ceza parametresine bağlı olarak tahmin edilen $\boldsymbol{\varphi}$,

$$\boldsymbol{\varphi}_\alpha = \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2} \frac{(\mathbf{U}_{\cdot,i})^T \mathbf{y}}{s_i} \mathbf{V}_{\cdot,i} \quad (4.2.7)$$

şeklindedir. Burada,

$$f_i = \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2} \quad (4.2.8)$$

değerine *filtre faktörü* denir. Burada, $s_i \gg \alpha$ için $f_i \approx 1$ ve $s_i \ll \alpha$ için $f_i \approx 0$ 'dır. Filtre faktörleri, küçük singüler değerlerin çözüme göreceli katkısını azaltmaya çalışır (Aster ve ark. 2004). Bu çözümler, MATLAB programı kullanılarak elde edilebilir.

4.3 Zaman Serileri için Konik Karesel Programlama

Yukarıda da ifade edildiği gibi Tikhonov düzenlemesi problemi, singüler değer ayrışımı kullanılarak çözülebilir. Biz bu probleme alternatif bir yöntem olarak (Taylan ve ark. 2010) konvex optimizasyonun önemli bir programı olan CQP'yı uygulayacağız. Bunun için (4.2.1) Tikhonov düzenlemesi problemini bir \bar{M} sınırının uygun seçimine bağlı olarak aşağıdaki optimizasyon problemi şeklinde yazabiliriz (Taylan ve ark. 2008):

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\varphi}} \|\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}\|_2^2, \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 \leq \bar{M} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Burada, \bar{M} 'nin seçimi model bağımsız veya model bağımlı metotların yardımıyla belirlenebilir (Yerlikaya 2008). (4.3.1) de görülebileceği gibi en küçük kareler amaç fonksiyonu $\|\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}\|_2^2$ dir ve problemin uygulanabilirliği için kısıt fonksiyonu $-\|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 + \bar{M}$ nin negatif olmaması gerekir. Burada amaç fonksiyonu doğrusal olmadığından bu amaç fonksiyonunu kısıtlar cümlesine taşıyabiliriz, yani problem,

$$\begin{aligned} \min_{t, \boldsymbol{\varphi}} t, \\ \|\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq t^2, t \geq 0, \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 \leq \bar{M} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

veya eşdeğer olarak,

$$\begin{aligned} \min_{t, \boldsymbol{\varphi}} t, \\ \|\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}\|_2 \leq t, t \geq 0, \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_2 \leq \sqrt{\bar{M}} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

şeklinde yazılabilir[39]. Bu problem,

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = (1, \mathbf{0}_{(nx1)}^T)^T, \mathbf{x} = (t, \boldsymbol{\varphi})^T, \mathbf{D}_1 = (\mathbf{0}_{((n-1) \times 1)}, \mathbf{X}), \mathbf{d}_1 = \mathbf{y}, \mathbf{p}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \\ q_1 = 0, \mathbf{D}_2 = (\mathbf{0}_{(nx1)}, \mathbf{I}), \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}_{(nx1)}, \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}_{(nx1)} \text{ ve } q_2 = -\sqrt{\bar{M}} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

değerleri ile konik karesel programın standart formu (Taylan ve ark. 2007),

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \|\mathbf{D}_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\| \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

ile aynı formdadır. Dolayısı ile Tikhonov düzenlemesi problemi, konvex optimizasyonun önemli problemlerinden olan CQP problemi şeklinde yazılmış olur. Bu problem için optimallık koşullarını yazabilmek için, (4.3.3) probleminin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenmesi gerekir (Taylan ve ark. 2008):

$$\begin{aligned}
& \min_{t, \varphi} t \\
& \boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((n-1) \times 1)} & \mathbf{X} \\ 1 & \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \boldsymbol{\eta} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ -\sqrt{M} \end{bmatrix} \\
& \boldsymbol{\chi} \in L^n, \boldsymbol{\eta} \in L^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Burada L^n ve L^{n+1} ,

$$L^{n+1} := \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right\} \quad (n \geq 1)$$

olarak tanımlanan (n) ve $(n + 1)$ boyutlu ikinci dereceden (Lorentz) konileridir. Bu optimizasyon problemi için dual problem,

$$\begin{aligned}
& \max(\mathbf{y}^T, 0) \boldsymbol{\omega}_1 + (\mathbf{0}_{(n \times 1)}^T, -\sqrt{M}) \boldsymbol{\omega}_2 \\
& \boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((n-1) \times 1)}^T & 1 \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0}_{(n \times 1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T & 0 \\ \mathbf{I}^T & \mathbf{0}_{(n \times 1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(n \times 1)} \end{bmatrix}, \\
& \boldsymbol{\omega}_1 \in L^n, \boldsymbol{\omega}_2 \in L^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

olarak yazılır. Bununla beraber, $(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ 'nin primal-dual en iyi çözüm olabilmesi için gerek ve yeter koşul:

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((n-1) \times 1)} & \mathbf{X} \\ 1 & \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
& \boldsymbol{\eta} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ -\sqrt{M} \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((n-1) \times 1)}^T & 1 \\ \mathbf{X} & \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)}^T & 0 \\ \mathbf{I}^T & \mathbf{0}_{(n \times 1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(n \times 1)} \end{bmatrix}, \\
& \boldsymbol{\omega}_1^T \boldsymbol{\chi} = 0, \boldsymbol{\omega}_2^T \boldsymbol{\eta} = 0,
\end{aligned}$$

$$\omega_1 \in L^n, \omega_2 \in L^{n+1},$$

$$\chi \in L^n, \eta \in L^{n+1},$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Taylan ve ark. 2008).

4.4 Konik Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Otoregresyon (C-ASTAR)

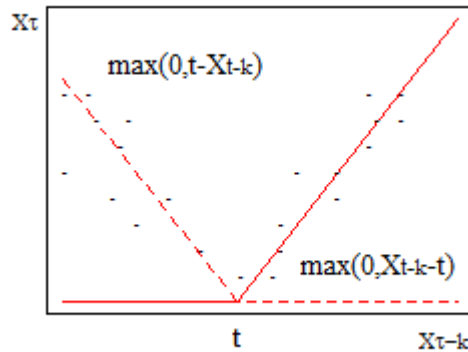
4.4.1 Tikhonov Regresyon Metodu ile Düzenlenmiş Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Otoregresyon (ASTAR)

Bu bölümde, zaman serileri için oluşturulan ve bölüm 3.2.5 ele alınan MARS modeline bağlı olarak oluşturulan, Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Otoregresyon (ASTAR) (Stevens 1991) modelini bir Tikhonov düzenlemesi problemi şeklinde yazarak bu problemin CQP ile çözümünü ele alacağız. Bu çözüm sonucu elde edeceğimiz modeli, *Konik Uyarlanabilir Eğri Eşik Değerli Otoregresyon (C-ASTAR)* olarak adlandıracağız. Buradaki “C” sadece konik (conic) anlamında değil aynı zamanda konveks (convex) ve sürekli (continuous) anlamlarındadır.

ASTAR modeli,

$$T_{j,r_m}(x) = (t - x_v)_+ \text{ ve } T_{j,r_{m+1}}(x) = (x_v - t)_+$$

şeklindeki parçalı doğrusal temel fonksiyonları ve bunların çarpımları şeklindeki genişlemelerinin kullanılması ile oluşturulan bir modeldir. Burada $(q)_+ := \max\{0, q\}$ ve t tek değişkenli bir düğüm noktasıdır. Her bir fonksiyon t düğüm noktalı parçalı doğrusal fonksiyondur ve *yansıyan eş* (Reflected Pair) olarak adlandırılır.



Şekil 4.1. Bir ASTAR Modeldeki Temel Fonksiyonlar

Şekil 4.1. deki noktalar p boyutlu $X_{\tau-k}$ açıklayıcı değişken ve karşılık gelen 1 boyutlu X_{τ} yanıt değişkeninin $(\bar{x}_{\tau-k}, \bar{x}_{\tau})$ ($k = 1, \dots, p$), ($\tau = 1, \dots, n$), ($\tau > k$) gözlem değerlerini göstermektedir.

Genel otoregresif zaman serisini ifade eden

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

denklemini ele alalım. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}$ sıfır ortalamalı ve sonlu varyanslı hata değişkenidir. Burada amaç, her $X_{\tau-k}$ açıklayıcı değişkeni için p boyutlu,

$$\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k} = (\bar{x}_{(\tau-k),1}, \bar{x}_{(\tau-k),2}, \dots, \bar{x}_{(\tau-k),p})^T, (k = 1, \dots, p), (\tau = 1, \dots, n), (\tau > k)$$

gözlem değerleri vektörünün yakınında ya da üzerindeki p boyutlu $t_i = (t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,p})^T$ düğüm noktalarında yansıyan çifti bulmaktır. $t_{i,k} = \bar{x}_{\tau-k}$ alınması, sonraki bölümde oluşturulacak optimizasyon problemlerinde diferansiyellenebilme durumunu engelleyebilir. Bu nedenle, $t_{i,k} \neq \bar{x}_{\tau-k}; \forall i, k \in \mathbb{Z}$, olduğunu kabul ediyoruz. Böylece yanıt değişkeni olarak göz önüne aldığımız X_{τ} 'yu temel fonksiyonlar ve c_0 katsayısı ile oluşturulan bir lineer bileşim şeklinde gösterebiliriz:

$$\hat{X}_{\tau} = c_0 + \sum_{j=1}^S c_j K_j(X_{\tau-1}^p) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4.1)$$

Burada K_j ($j = 1, 2, \dots, S$) temel fonksiyonlar cümlesi \emptyset den alınan temel fonksiyonlar veya bu şekildeki iki ya da daha fazla fonksiyonun çarpımıdır. K_j, S tane lineer bağımsız temel fonksiyon içeren bir kümeden alınan fonksiyon ve c_j, j . temel fonksiyon için ($j = 1, 2, \dots, S$) bilinmeyen katsayılar veya 1 sabiti için ($j = 0$)'dır. Etkileşen temel fonksiyonlar, mevcut temel fonksiyonla yeni bir değişken içeren ayrık doğrusal fonksiyonun çarpımıyla oluşturulurlar. Bu durumda, hem mevcut temel fonksiyon hem de yeni oluşturulan etkileşen temel fonksiyon ASTAR yaklaşımında kullanılır. $(\bar{x}_{\tau-k}, \bar{x}_{\tau}); (k = 1, \dots, p), (\tau = 1, \dots, n), (\tau > k)$ gözlem değerleri olmak üzere, ASTAR modelinin j . temel fonksiyonu

$$K_j(X_{\tau-1}^p) = \prod_{j=1}^{T_j} [s_{\tau_i^j} (x_{\tau_i^j} - t_{\tau_i^j})]_+ \quad (4.4.2)$$

olarak ifade edilir. Burada T_j , j . temel fonksiyonda çarpılan ayrık doğrusal fonksiyon sayısını, $x_{\tau_i^j}$, j . temel fonksiyondaki i . ayrık lineer fonksiyona karşılık gelen açıklayıcı değişkenin gözlem değerini, $t_{\tau_i^j}$, $x_{\tau_i^j}$ değişkenine karşılık gelen düğüm noktası değerini ve $s_{\tau_i^j}$, +1 ya da -1 şeklindeki seçilen işareti göstermektedir. Olası temel fonksiyonları karşılaştırmak için *uyumun eksikliği* ölçütü kullanılır. Yeni temel fonksiyon araştırılırken, maksimum etkileşimler sınırlanabilir. Örneğin; eğer iki faktöre kadar etkileşimlere izin verilirse, (4.4.1)'deki $T_j \leq 2$ ile sınırlanır. Tekrarlı bölme stratejilerinin en önemli kusuru modelin doğruluğunu etkileyen süreksizliktir. MARS, doğruluğu arttırarak bu tür zorlukların üstesinden gelen bir yöntemdir. ASTAR da MARS'ı kullanan bir yöntem olduğundan aynı şey ASTAR modeli içinde söylenebilir. ASTAR, MARS modeline bağlı olarak oluşturulan bir model olduğundan, ASTAR algoritması da MARS gibi ileri adım ve geri adım algoritmasını kullanır (**bkz.** 3.2.4).

Biz, ASTAR algoritmasının ikinci aşaması olan geriye doğru adım algoritması için Taylan ve Weber tarafından geliştirilen yeni yaklaşımı uygulayacağız (Taylan ve ark 2010). Bu yaklaşımda hata kareler toplamına (RSS) ceza parametresi eklenerek hem modelin doğruluğu (RSS) hem de karmaşıklığı kontrol altına alınmaya çalışılmaktadır. Buna göre RSS'ye ceza parametresi eklenerek elde edilen cezalı hata kareler toplamı (PRSS) aşağıdaki gibidir:

$$PRSS := \sum_{\substack{\tau=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p \\ \tau > k}} (x_{\tau} - f(\bar{x}_{\tau-k}))^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r,s \in V(j)}} \int c_j^2 [D_{r,s}^{\alpha} K_j(\mathbf{t}^j)]^2 d\mathbf{t}^j \quad (4.4.3)$$

Burada $V(j) = \{\tau_i^j | i = 1, 2, \dots, T_j\}$, j . temel fonksiyonda bulunan ilgili bağımsız değişkenler kümesi, $\mathbf{t}^j = (t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j\tau_{a,\tau_b}})^T$, j . temel fonksiyonu oluşturan bağımsız değişken vektörünü, ayrıca $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$ ve $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ olmak üzere

$$D_{r,s}^{\alpha} K_j(\mathbf{t}^j) = \frac{\partial^{\alpha} K_j}{\partial \alpha_1 t_r^j \partial \alpha_2 t_s^j}(\mathbf{t}^j) \quad (4.4.4)$$

ifadesi j . temel fonksiyonun, kapsadığı bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini göstermektedir. Burada $\alpha_i = 2$ olduğunda $D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)$ türevinin değeri sıfır olacaktır. Çünkü bu modelde hiçbir $K_j(\mathbf{t}^j)$ temel fonksiyonu $(x_{\tau_i^j} - t_{\tau_i^j})^2$ şeklinde bir ifade içermez. Bu nedenle, Schwarz Teoremini kullanarak [36] $r < s$ için ikinci kısmi türevler kullanılır. $|\alpha| = 1$ ve $T_j > 1$ durumunda, $r < s$ çiftine bağlı olarak elde edilen T_j tane integralden oluşan (4.4.3) ifadesini daha sade bir şekilde yazmak için (Taylan ve ark 2010) λ_j , λ_j/T_j olarak göz önüne alındı.

Oluşturulan PRSS ölçütü modelin doğruluğu ve karmaşıklığı arasındaki bir koordinasyona dayanmaktadır. Bu koordinasyon (4.4.3)'teki PRSS denkleminde kullanılan ceza parametresi λ_j ile sağlanmaktadır. (4.4.1), (4.4.2) ve (4.4.3) denklemleri birlikte düşünüldüğünde:

$$PRSS := \sum_{\substack{\tau=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p \\ \tau > k}} \left(\bar{x}_\tau - c_0 - \sum_{j=1}^s c_j K_j(\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j) \right)^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r < s} \int c_j^2 [D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)]^2 d\mathbf{t}^j \quad (4.4.5)$$

denklemini elde edilir. Burada $\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k} = (\bar{x}_{(\tau-k),1}, \bar{x}_{(\tau-k),2}, \dots, \bar{x}_{(\tau-k),p})^T$, $(\tau = 1, \dots, n)$ herhangi bir bağımsız değişken vektörünü, $\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j = (\bar{x}_{(\tau-k),T_1}, \bar{x}_{(\tau-k),T_2}, \dots, \bar{x}_{(\tau-k),T_j})^T$ de, $\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k}$ nın j . temel fonksiyonu oluşturan bağımsız değişkenler üzerine izdüşüm vektörünü göstermektedir.

j . temel fonksiyon için $\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j$ vektörlerinin matris gösterimi:

$$\left(\bar{\mathbf{x}}_{\tau-k, \tau_i^j}^j \right)_{i=1,2,\dots,T_j} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1-k, \tau_1^j}^j & \bar{x}_{1-k, \tau_2^j}^j & \dots & \bar{x}_{1-k, \tau_{T_j}^j}^j \\ \bar{x}_{2-k, \tau_1^j}^j & \bar{x}_{2-k, \tau_2^j}^j & \dots & \bar{x}_{2-k, \tau_{T_j}^j}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{n-k, \tau_1^j}^j & \bar{x}_{n-k, \tau_2^j}^j & \dots & \bar{x}_{n-k, \tau_{T_j}^j}^j \end{bmatrix}$$

şeklinde ve bu koordinatlar $V(j)$ kümesinden seçilmektedir. Buradan hareketle PRSS'yi yeniden düzenlersek:

$$PRSS = \sum_{\tau=1}^n \left(x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) \right)^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r < S} \int c_j^2 [D_{r,s}^{\alpha} K_j(\mathbf{t}^j)]^2 d\mathbf{t}^j \quad (4.4.6)$$

ifadesini elde ederiz.

Burada, $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) = \left(K_1(\bar{x}_{\tau-k}^1), \dots, K_S(\bar{x}_{\tau-k}^S), K_{S+1}(\bar{x}_{\tau-k}^{S+1}), \dots, K_{S_{max}}(\bar{x}_{\tau-k}^{S_{max}}) \right)^T$,

$\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k} := \left(\bar{x}_{\tau-k}^1, \bar{x}_{\tau-k}^2, \dots, \bar{x}_{\tau-k}^S, \bar{x}_{\tau-k}^{S+1}, \bar{x}_{\tau-k}^{S+2}, \dots, \bar{x}_{\tau-k}^{S_{max}} \right)^T$ noktasında temel fonksiyonlar vektörü ve $\mathbf{c} := (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{S_{max}})^T$ bilinmeyen parametre vektörüdür. $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k})$ fonksiyonlar vektörlerinin matris gösterimi [36]:

$$\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) = \begin{bmatrix} 1 & K_1(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}^1) & \dots & K_S(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}^S) & \dots & K_{S_{max}}(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}^{S_{max}}) \\ 1 & K_1(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}^1) & \dots & K_S(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}^S) & \dots & K_{S_{max}}(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}^{S_{max}}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & K_1(\bar{\mathbf{d}}_{n-k}^1) & \dots & K_S(\bar{\mathbf{d}}_{n-k}^S) & \dots & K_{S_{max}}(\bar{\mathbf{d}}_{n-k}^{S_{max}}) \end{bmatrix}$$

şeklinde. PRSS eşitliğindeki yüksek boyutlu integralin bazı fonksiyonlar için hesaplanması güç olduğundan dolayı bu integral kesikli hale getirilebilir, yani bu integralin yaklaşık değeri, verilen aralık üzerinden bir ayrıştırma işlemi kullanılarak bir toplamla belirlenebilir.

Ayrıştırma işlemi için $\bar{\mathbf{x}}_{l-k} \in \mathbb{R}^p$ olmak üzere $(\bar{\mathbf{x}}_{l-k}, \bar{x}_l)$, $(l = 1, \dots, n)$ veri noktamız verilmiş olsun. Bu şekildeki $\bar{\mathbf{x}}_{l-k} = (\bar{x}_{(l-k),1}, \bar{x}_{(l-k),2}, \dots, \bar{x}_{(l-k),p})^T$ bağımsız değişken verisi, \mathbb{R}^n 'in herhangi bir yeterli derecede geniş Q paralel yüzlüsünün alt bölümlerini oluşturur. Bütün verimizi kapsayan paralel yüzlüye Q dersek,

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p] = \prod_{i=1}^p Q_i$$

olacaktır. Burada $Q_i = [a_i, b_i]$, $a_i \leq \bar{x}_{(l-k),i} \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, n$) olarak alalım. Genelliği bozmadan, $a_i < \bar{x}_{(l-k),i} < b_i$ olduğunu varsayabiliriz. Tüm i 'ler için bağımsız değişken veri değerlerinin koordinatları, $(l-k)_{\sigma}^i = 1, 2, \dots, n$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n$)

($i = 1, 2, \dots, p$) için $\bar{x}_{(l-k)_1,i} \leq \bar{x}_{(l-k)_2,i} \leq \dots \leq \bar{x}_{(l-k)_n,i}$ şekline yeniden düzenlenebilir. Burada $\bar{x}_{(l-k)_\sigma,i}$, $(l-k)_\sigma$ -inci bağımsız değişken veri vektörü $\bar{\mathbf{x}}_{(l-k)_\sigma}^i$ nin düzenleme sonrası i -inci elemanıdır. Genelliği bozmaksızın, $\sigma \neq \varphi$ olmak üzere tüm $\sigma, \varphi = 1, 2, \dots, n$ 'ler için $\bar{x}_{(l-k)_\sigma,i} \neq \bar{x}_{(l-k)_\varphi,i}$ olduğunu kabul edebiliriz.. Örneğin, $\bar{x}_{(l-k)_1,i} < \bar{x}_{(l-k)_2,i} < \dots < \bar{x}_{(l-k)_n,i}$ ($i = 1, 2, \dots, p$) olduğu düşünülebilir. Bazı koordinatlar için “=” söz konusu olduğunda integral işleminde ve onun yaklaşımında daha düşük boyutlu alt paralel yüzlerini elde etmek gerekir. Şimdi,

$$\bar{x}_{(l-k)_0,i} = a_i, \quad (l-k)_0^i = 0; \quad \bar{x}_{(l-k)_{n+1},i} = b_i, \quad (l-k)_{n+1}^i = n + 1$$

olarak alalım. İleride kullanacağımız eşitlikleri biraz daha sadeleştirme anlamında, veri noktalarının aynı artan sıraya sahip p boyutlu veri noktaları üzerine, kanonik izdüşümlerini göz önüne alırız. Bu nedenle,

$$(l-k)_\sigma^i \equiv (l-k)_\sigma \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

alabiliriz. Aksi durumda, sadece $(l-k)_\sigma$ indisini i bağımlı indisle veya bu indislerle ifade edilen parametrelerle değiştirmiş oluruz. Bu yeni düzenlemeden sonra Q ,

$$Q = \bigcup_{\sigma^i=0}^n \prod_{i=1}^p \left[\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i,i}}, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i+1,i}} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşıma göre (4.4.6)'daki integral aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \int_Q f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \\ & \approx \sum_{(\sigma^i)_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \in \{0, 1, 2, \dots, n+1\}^p} f\left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i,1}}, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i,2}}, \dots, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i,p}}\right) \\ & \times \prod_{i=1}^p \left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i+1,i}} - \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^i,i}} \right) \end{aligned}$$

Alt bölüm ve yaklaşım işlemleri bütün $[D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)]^2$ fonksiyonları için uygulanmalıdır. Bunun için Q 'nun, \mathbf{t}^j 'nin özel koordinatlarıyla ilişkilendirilen \mathbb{R}^T üzerine izdüşümlerine

bakılır ve Q için elde edilen alt bölüme göre Q^j ye karşılık gelen alt bölümü alınır. Bu durumda her alt bölümdeki integral yaklaşık olarak,

$$\int_{Q_j} c_j^2 [D^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)]^2 dt^j \approx \sum_{(\sigma^{\tau_i})_{i \in \{1,2,\dots,T_j\}} \in \{0,1,2,\dots,n+1\}^{T_j}} c_j^2 \left[D_{r,s}^\alpha K_j \left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \dots, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right) \right]^2 \times \prod_{i=1}^{T_j} \left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} - \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right),$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade PRSS de kullanılırsa,

$$PRSS \approx \sum_{\tau=1}^N \left(X_\tau - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{a}}_{\tau-k}) \right)^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}^2 \sum_{|\alpha|=1} \sum_{r,s \in V(j)} \sum_{(\sigma^{\tau_i})} c_j^2 \left[D_{r,s}^\alpha K_j \left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \dots, \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right) \right]^2 \times \prod_{i=1}^{T_j} \left(\bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} - \bar{x}_{(l-k)_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right). \quad (4.4.7)$$

Burada $(\sigma^{\tau_i})_{i \in \{1,2,\dots,T_j\}} \in \{0,1,2, \dots, n+1\}^{T_j}$ 'dir. Eğer,

$$\hat{\mathbf{x}}_{\tau-1}^j = \left(\bar{x}_{l-1_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \bar{x}_{l-1_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}}, \dots, \bar{x}_{l-1_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right) \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\tau-1}^j = \prod_{i=1}^{T_j} \left(\bar{x}_{l-1_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} - \bar{x}_{l-1_{\sigma^{\tau_i}^j, \tau_i^j}} \right) \quad (4.4.8)$$

ifadeleri (4.4.8) şeklinde kısaltılırsa bu kısaltma yardımıyla PRSS,

$$\begin{aligned}
PRSS \approx & \sum_{\tau=1}^N (X_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}))^2 \\
& + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j c_j^2 \sum_{\tau-k=1}^{(n+1)^{Tj}} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r, s \in V(j)}} [D_{r,s}^{\alpha} K_j(\hat{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j)]^2 \right) \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

olarak yeniden düzenlenir. Buradan hareketle, $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}) = (\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_1), \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_2), \dots, \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_n))^T$,

$(n \times (S_{max} + 1))$ tipinde matris olmak üzere $PRSS$ ifadesi

$$PRSS \approx \|\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\tau-k=1}^{(n+1)^{Tj}} L_{(\tau-k)j}^2 c_j^2 \tag{4.4.10}$$

şeklinde daha kullanışlı bir forma indirgenebilir, burada $\|\cdot\|_2$, öklit normunu, $L_{(\tau-k)j}$,

$$L_{(\tau-k)j} = \left[\left(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r, s \in V(j)}} [D_{r,s}^{\alpha} K_j(\hat{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j)]^2 \right) \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\tau-k}^j \right]^{1/2}$$

şeklinde bu normun karekökünü göstermektedir.

(4.4.9) ve (4.4.10)'daki $PRSS$ denklemlerinin ilk bölümleri birbirine eşittir. Bu eşitlik aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\tau=1 \\ k < \tau < n}}^n (X_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}))^2 \\
& = (X_1 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}))^2 + (X_2 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}))^2 + \dots + (X_n - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{n-k}))^2 = \\
& [X_1 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}), X_2 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}), \dots, X_n - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{n-k})] \begin{bmatrix} X_1 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{1-k}) \\ X_2 - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{2-k}) \\ \vdots \\ X_n - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{n-k}) \end{bmatrix} \\
& = (\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k})\mathbf{c})^T (\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k})\mathbf{c}) = \|\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2
\end{aligned}$$

4.4.2 Tikhonov Düzleştirmesinin Uygulanması

PRSS'yi göz önüne alalım. Burada $\mathbf{X}_\tau = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}$ şeklindeki lineer denklem sistemleri ile ilgileneceğiz. Bu problem *kötü koşullu* (**bkz.** 3.2.3) olabilir. Bu nedenden dolayı, PRSS problemine bir Tikhonov düzleştirme problemi olarak yaklaşmak gerekir. Çünkü Tikhonov regresyonu kötü koşullu problemleri iyi konumlu problemlere dönüştüren ve yaygın olarak bu amaçla kullanılan bir yöntemdir. Bir Tikhonov çözümü, $\mathbf{X}_\tau = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}$ 'nin lineer denklem sistemlerindeki $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})$ katsayı matrisinin singüler değer ayrışımı yardımıyla kolayca ifade edilebilir (Aster ve ark. 2004).

Bu amaçla (4.4.10) denklemini yeniden düzenlendiğinde:

$$\begin{aligned}
 PRSS &\approx \|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\tau-k=1}^{(n+1)^{T_j}} L_{(\tau-k)j}^2 c_j^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \left[(L_{1j}c_j)^2 + (L_{2j}c_j)^2 + \dots + (L_{(n+1)^{T_j}j}c_j)^2 \right] \\
 &= \|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \|L_j c_j\|_2^2 \quad (4.4.11)
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\mathbf{L}_j := (L_{1j}, L_{2j}, \dots, L_{(n+1)^{T_j}j})^T$ ($j = 1, 2, \dots, S_{max}$) dir ve denklem $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{S_{max}})^T$ şeklinde ceza parametrelerinin sonlu bir dizisini içermektedir. Eğer bu denklemde her bir türev terimi için aynı λ ceza parametresi kullanılırsa, PRSS denklemini,

$$PRSS \approx \|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{c}\|_2^2 \quad (4.4.12)$$

olarak yazılabilir. Burada \mathbf{L} , ilk kolonu $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}_{(n+1)^{T_j}}$ ve diğer kolonları yukarıda tanımlanan \mathbf{L}_j vektörlerinden oluşan $(S_{max} + 1) \times (S_{max} + 1)$ boyutlu bir köşegen matristir. Ayrıca \mathbf{c} , veri noktaları yardımıyla tahmin edilen, $(S_{max} + 1) \times 1$ boyutlu bir parametre vektörüdür. Açık olarak \mathbf{L} aşağıdaki şekildedir (Taylan ve ark 2007):

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{S_{max}} \end{bmatrix}.$$

Eğer (3.2.31) denklemini göz önüne alırsak, PRSS probleminin, bazı $Q \in \mathbb{R}$ ve $Q > 0$ için (örneğin $\lambda = Q^2$) bir klasik Tikhonov düzleştirme problemi haline geldiği görülebilir. Tikhonov düzleştirme problemi $\|X_\tau - K(\bar{d})c\|_2^2$ ve $\|Lc\|_2^2$ 'nin bir lineer kombinasyonu vasıtası ile çoğul amaç fonksiyonlarına sahiptir. Bu durumda, ilk amaç fonksiyonu $\|X_\tau - K(\bar{d})c\|_2^2$ ni ve ikinci amaç fonksiyonu $\|Lc\|_2^2$ ni minimize edecek çözümünü seçmek gerekir. Bu nedenle, Tikhonov düzleştirme problemi *çok amaçlı optimizasyon* problemi olarak düşünülebilir. Aslında Tikhonov düzleştirme probleminin amacı, bu iki amaç fonksiyonunu birleştirerek tek bir fonksiyonel forma dönüştürmektedir. Bu birleşim, bir ağırlıklı lineer amaçlar toplamıdır. Buradaki ağırlık λ ceza parametresinden kaynaklanmaktadır. Çözümler verilen herhangi bir ağırlıklı toplama karşılık gelenler yardımıyla elde edilmektedir. Ancak, ağırlıkların anlamlı kombinasyonlarını ortaya çıkarmak zorlu olabilir. Bu nedenle biz bu problemin çözümü için 3.2.5'te ele alınan CQP'yi kullanacağız.

4.4.3 Konik Karesel Programlama ile ASTAR için oluşturulan Tikhonov Düzenlemesine Alternatif Bir Yaklaşım

4.4.3.1 Konik Karesel Programlama Probleminin Oluşturulması

Bu bölümde Tikhonov düzenlemesi probleminin üstesinden gelmek için sürekli bir optimizasyon programı olan CQP kullanacağız. Tikhonov düzenlemesi problemi kolaylıkla bir CQP problemi olarak yazılabilir. Gerçekten de, bir \bar{M} sınırının uygun seçimine dayanarak aşağıdaki optimizasyon problemini ifade edebiliriz (Taylan ve ark 2008):

$$\begin{aligned} \min & \|K(\bar{d})c - X_\tau\|_2^2 \\ & \|Lc\|_2^2 \leq \bar{M}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Buradaki , \bar{M} 'nin seçiminin modelden bağımsız veya modele bağlı metotların yardımı ile belirlenebilir (Yerlikaya 2008). (4.4.13)'te $\|K(\bar{d})c - X_\tau\|_2^2$ en küçük kareler amaç fonksiyonu ve problemin uygulanabilirliği için negatif olmaması gereken

$-\|Lc\|_2^2 + \bar{M}$ kısıt fonksiyonunu oluşturan eşitsizlik bulunmaktadır. Bu optimizasyon probleminin

$$\begin{aligned} & \min_{t,c} t \\ & \|K(\bar{d})c - X_\tau\|_2^2 \leq t^2, t \geq 0 \\ & \|Lc\|_2^2 \leq \bar{M} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

veya

$$\begin{aligned} & \min_{t,c} t \\ & \|K(\bar{d})c - X_\tau\|_2 \leq t, \\ & \|Lc\|_2 \leq \sqrt{\bar{M}} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

şeklinde yazılabileceğini daha önce belirtmiştik (Taylan ve ark 2008). Eğer tekrar CQP'nin standart formu (Taylan ve ark 2007),

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ & \|D_i x - d_i\| \leq p_i^T x - q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

göz önüne alınırsa, bu optimizasyon probleminin,

$$\begin{aligned} c &= (1, \mathbf{0}_{S_{max+1}}^T)^T, x = (t, c^T)^T, D_1 = (0_n, K(\bar{d})), d_1 = X_\tau, p_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, q_1 = 0, \\ D_2 &= (0_{S_{max+1}}, L), d_2 = 0_{S_{max+1}}, p_2 = 0_{S_{max+2}} \text{ ve } q_2 = -\sqrt{\bar{M}} \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

değerleri ile CQP olduğu görülebilir. Bu problem için optimal koşulları yazabilmek için (4.4.15) probleminin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenmesi gerekir (Taylan ve ark 2008):

$$\min_{t,c} t$$

$$\boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}) \\ 1 & \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1} & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1} \\ \sqrt{\bar{M}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{L}^{n+1}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}^{S_{max}+2} \quad (4.4.18)$$

Burada \mathbf{L}^{n+1} ve $\mathbf{L}^{S_{max}+2}$, $(n+1)$ ve $(S_{max}+2)$ boyutlu dondurma (ikinci dereceden, Lorentz) konisidir (bkz. 3.2.5). Bu problem için dual problem, (3.2.47) ve (3.2.48) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\max(\mathbf{X}_\tau^T, 0) \boldsymbol{\omega}_1 + (\mathbf{0}_{S_{max}+1}^T, -\sqrt{\bar{M}}) \boldsymbol{\omega}_2,$$

$$\boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n^T & 1 \\ \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})^T & \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T & 0 \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \in \mathbf{L}^{n+1}, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbf{L}^{S_{max}+2}$$

olarak elde edilir. Bu problemlerin çözümü ile elde edilen $(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ nın primal dual optimal çözümler olabilmesi için gerek ve yeter koşul:

$$\boldsymbol{\chi} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}) \\ 1 & \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_\tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1} & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1} \\ \sqrt{\bar{M}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((n-1) \times 1)}^T & 1 \\ \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})^T & \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S_{max}+1}^T & 0 \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{S_{max}+1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_1^T \boldsymbol{\chi} = 0, \boldsymbol{\omega}_2^T \boldsymbol{\eta} = 0,$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \in \mathbf{L}^{n+1}, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbf{L}^{S_{max}+2},$$

$$\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{L}^{n+1}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}^{S_{max}+2},$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Taylan ve ark 2008).

4.4.3.2 Ceza Parametresi ve Üst Sınırların Seçimi

PRSS'deki ceza parametrelerinin ve konik karesel problemin bir kısıtı içindeki parametrik üst sınırın seçimi tamamen belirli bir konu değildir. PRSS'yi minimize etmenin en kolay yolu, sadece bir tek ceza parametresini kapsayan ve integral terimlerinin ayrıklaştırabildiği Tikhonov düzleştirme yöntemini kullanmaktır. PRSS ve CQP yaklaşımlarında kullanılan λ ve \bar{M} parametreleri, çözüm ve parametre değerleri arasındaki bağımlılık ve uyuma (eşdeğerlik) bağlı olarak belirlenebilir. Bunun için yeterince büyük (sonlu) sayıdaki parametre değerlerine karşı gelen en uygun çözüm değerlerinin, yeterlilik eğrisi (Aster ve ark. 2004) kullanılır. Bu eğri genellikle L şeklindedir. Bu eğrinin köşe noktalarına yakın değerler en iyi çözümü verir.

4.5 Sayısal Örnek

Sayısal C-ASTAR örneğimiz için bir dizi kimyasal sürece ilişkin (*Yields From Batch Chemical Process (YFBCP)*) (Box ve Jenkins 1976) 70 gözlem değerinden oluşan veri kümesini kullanacağız. Bu veri kümesi için $X_{\tau-1}^5 = (X_{\tau-1}, X_{\tau-2}, X_{\tau-3}, X_{\tau-4}, X_{\tau-5})$ olmak üzere

$$AR(5): X_{\tau} = \varphi_1 X_{\tau-1} + \varphi_2 X_{\tau-2} + \varphi_3 X_{\tau-3} + \varphi_4 X_{\tau-4} + \varphi_5 X_{\tau-5} + \varepsilon_{\tau}$$

şeklindeki $AR(5)$ modelini göz önüne alacağız. Beş defa öteleme işleminin yapılması nedeni ile 5 gözlem değeri ortadan kalkacağından geriye kalan 65 gözlem değeri ile işlemler tamamlanacaktır. ASTAR modelini oluştururken maksimum temel fonksiyon sayısı $S_{max} = 5$ ve değişkenler arasındaki en çok etkileşim sayısı 2 olarak göz önüne alınacaktır. *Salford Sistemler* (Salford Systems 2011) tarafından geliştirilen 2. sürüm MARS algoritması ile elde ettiğimiz temel fonksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$K_1(X_{\tau-1}^5) = \max(0, X_{\tau-1} - 25.001)$$

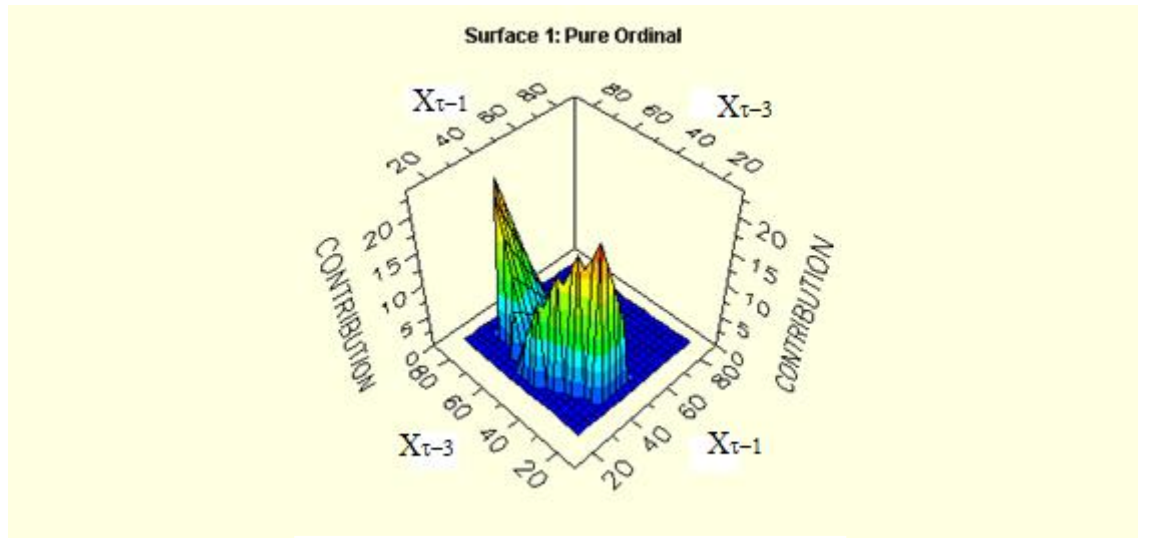
$$K_2(X_{\tau-1}^5) = \max(0, X_{\tau-1} - 60.001)$$

$$K_3(X_{\tau-1}^5) = \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$$

$$K_4(X_{\tau-1}^5) = \max(0, X_{\tau-3} - 59.001) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$$

$$K_5(X_{\tau-1}^5) = \max(0, 59.001 - X_{\tau-3}) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$$

Yukarıda da görüldüğü gibi K_2 ve K_3 temel fonksiyonları yansıyan çiftler şeklindeki temel fonksiyonlardır. K_4 temel fonksiyonu, $X_{\tau-1}$ ve $X_{\tau-3}$ değişkenleri arasındaki etkileşimi açıklamak için K_1 temel fonksiyonunu kullanırken, K_5 temel fonksiyonu, $X_{\tau-1}$ ve $X_{\tau-3}$ değişkenleri arasındaki etkileşimi açıklamak için K_2 temel fonksiyonunu kullanmaktadır (**bkz.** Şek.4.2).



Şekil 4.2. $X_{\tau-1}$ ve $X_{\tau-3}$ Değişkenleri Arasındaki Etkileşim.

Optimizasyon problemimizde diferansiyelleşememekten kaçınmak için düğüm değerlerini verideki gözlem değerlerine çok yakın seçtik. Seçtiğimiz bu düğüm değerleri,

K_1 için:

$$t_{25,\tau-1} = 25.001, \quad \bar{x}_{25,\tau-1} = 25 \Rightarrow t_{25,\tau-1} \neq \bar{x}_{25,\tau-1}$$

K_2 için:

$$t_{60,\tau-1} = 60.001, \quad \bar{x}_{60,\tau-1} = 60 \Rightarrow t_{60,\tau-1} \neq \bar{x}_{60,\tau-1}$$

K_3 için:

$$t_{60,\tau-1} = 60.001, \quad \bar{x}_{60,\tau-1} = 60 \Rightarrow t_{60,\tau-1} \neq \bar{x}_{60,\tau-1}$$

K_4 için:

$$t_{7,\tau-3} = 59.001, \quad \bar{x}_{7,\tau-3} = 59 \Rightarrow t_{7,\tau-3} \neq \bar{x}_{7,\tau-3}$$

$$t_{20,\tau-1} = 60.001, \quad \bar{x}_{20,\tau-1} = 60 \Rightarrow t_{20,\tau-1} \neq \bar{x}_{20,\tau-1}$$

K_5 için:

$$t_{7,\tau-3} = 59.001, \quad \bar{x}_{7,\tau-3} = 59 \Rightarrow t_{7,\tau-3} \neq \bar{x}_{7,\tau-3}$$

$$t_{20,\tau-1} = 60.001, \quad \bar{x}_{20,\tau-1} = 60 \Rightarrow t_{20,\tau-1} \neq \bar{x}_{20,\tau-1}$$

şeklindedir.

Sayısal örneğimiz için elde ettiğimiz için temel fonksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$K_1(t^1) = \prod_{j=1}^{T_1} [S_{\tau_1^1}(x_{\tau_1^1} - t_{\tau_1^1})]_+ = [S_{\tau_1^1}(x_{\tau_1^1} - t_{\tau_1^1})]_+,$$

$$K_1: T_1 = 1, x_{\tau_1^1} = X_{\tau-1}, t_{\tau_1^1} = 25.001, S_{\tau_1^1} = +1,$$

$$K_2(t^2) = \prod_{j=1}^{T_2} [S_{\tau_1^2}(x_{\tau_1^2} - t_{\tau_1^2})]_+ = [S_{\tau_1^2}(x_{\tau_1^2} - t_{\tau_1^2})]_+,$$

$$K_2: T_2 = 1, x_{\tau_1^2} = X_{\tau-1}, t_{\tau_1^2} = 60.001, S_{\tau_1^2} = +1,$$

$$K_3(t^3) = \prod_{j=1}^{T_3} [S_{\tau_1^3}(x_{\tau_1^3} - t_{\tau_1^3})]_+ = [S_{\tau_1^3}(x_{\tau_1^3} - t_{\tau_1^3})]_+,$$

$$K_3: T_3 = 1, x_{\tau_1^3} = X_{\tau-1}, t_{\tau_1^3} = 60.001, S_{\tau_1^3} = -1,$$

$$K_4(t^4) = \prod_{j=1}^{T_4} [S_{\tau_j^4}(x_{\tau_j^4} - t_{\tau_j^4})]_+ = [S_{\tau_1^4}(x_{\tau_1^4} - t_{\tau_1^4})]_+ [S_{\tau_2^4}(x_{\tau_2^4} - t_{\tau_2^4})]_+,$$

$$K_4: T_4 = 2, x_{\tau_1^4} = X_{\tau-3}, t_{\tau_1^4} = 59.001, S_{\tau_1^4} = +1,$$

$$x_{\tau_2^4} = X_{\tau-1}, t_{\tau_2^4} = 60.001, S_{\tau_2^4} = -1,$$

$$K_5(t^5) = \prod_{j=1}^{T_5} [S_{\tau_j^5} (x_{\tau_j^5} - t_{\tau_j^5})]_+ = [S_{\tau_1^5} (x_{\tau_1^5} - t_{\tau_1^5})]_+ [S_{\tau_2^5} (x_{\tau_2^5} - t_{\tau_2^5})]_+,$$

$$K_5: T_5 = 2, x_{\tau_1^5} = X_{\tau-3}, t_{\tau_1^5} = 59.001, S_{\tau_1^5} = -1,$$

$$x_{\tau_2^5} = X_{\tau-1}, t_{\tau_2^5} = 60.001, S_{\tau_2^5} = -1.$$

Yukarıda elde ettiğimiz temel fonksiyonlarda hareketle (4.4.1) de ifade edilen en geniş model:

$$\begin{aligned} \hat{X}_\tau &= c_0 + \sum_{j=1}^S c_j K_j(X_{\tau-1}^p) + \varepsilon \\ &= c_0 + c_1 K_1(X_{\tau-1}^5) + c_2 K_2(X_{\tau-1}^5) + c_3 K_3(X_{\tau-1}^5) + c_4 K_4(X_{\tau-1}^5) + \\ &\quad c_5 K_5(X_{\tau-1}^5) + \varepsilon \\ &= c_0 + c_1 \max(0, X_{\tau-1} - 25.001) + c_2 \max(0, X_{\tau-1} - 60.001) \\ &\quad + c_3 \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) \\ &\quad + c_4 \max(0, X_{\tau-3} - 59.001) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) \\ &\quad + c_5 \max(0, 59.001 - X_{\tau-3}) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) + \varepsilon \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu model için (4.4.3)'deki PRSS fonksiyonu

$$PRSS = \sum_{\substack{\tau=1, \dots, 65 \\ k=1, \dots, 5 \\ \tau > k}} (x_\tau - f(\bar{x}_{\tau-k}))^2 + \sum_{j=1}^2 \lambda_j \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}} \sum_{\substack{r < S \\ r, s \in V(j)}} \int c_j^2 [D_{r,s}^\alpha K_j(t^j)]^2 dt^j$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{\tau=1,\dots,65 \\ k=1,\dots,5 \\ \tau>k}} (x_\tau - f(\bar{x}_{\tau-k}))^2 + \lambda_1 \left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r<s} \int c_1^2 [D_{r,s}^\alpha K_1(\mathbf{t}^1)]^2 dt^1 \right) \\
 &+ \lambda_2 \left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r<s} \int c_2^2 [D_{r,s}^\alpha K_2(\mathbf{t}^2)]^2 dt^2 \right) + \lambda_3 \left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r<s} \int c_3^2 [D_{r,s}^\alpha K_3(\mathbf{t}^3)]^2 dt^3 \right) \\
 &+ \lambda_4 \left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r<s} \int c_4^2 [D_{r,s}^\alpha K_4(\mathbf{t}^4)]^2 dt^4 \right) + \lambda_5 \left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r<s} \int c_5^2 [D_{r,s}^\alpha K_5(\mathbf{t}^5)]^2 dt^5 \right)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. PRSS ifadesinde kullanılan $V(j)$ kümeleri ve \mathbf{t}^j vektörleri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

$$V(1) = \{\tau_i^1 | i = 1\} = \{\tau - 1\}, \mathbf{t}^1 = (t_1^1)^T = (X_{\tau-1})^T,$$

$$V(2) = \{\tau_i^2 | i = 1\} = \{\tau - 1\}, \mathbf{t}^2 = (t_1^2)^T = (X_{\tau-1})^T,$$

$$V(3) = \{\tau_i^3 | i = 1\} = \{\tau - 1\}, \mathbf{t}^3 = (t_1^3)^T = (X_{\tau-1})^T,$$

$$V(4) = \{\tau_i^4 | i = 1,2\} = \{\tau - 3, \tau - 1\}, \mathbf{t}^4 = (t_1^4, t_2^4)^T = (X_{\tau-3}, X_{\tau-1})^T,$$

$$V(5) = \{\tau_i^5 | i = 1,2\} = \{\tau - 3, \tau - 1\}, \mathbf{t}^5 = (t_1^5, t_2^5)^T = (X_{\tau-3}, X_{\tau-1})^T$$

Temel fonksiyonlara karşılık gelen $D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)$ ($j = 1,2, \dots, 5$) türevleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$K_1(t^1) = \max(0, X_{\tau-1} - 25.001)$ temel fonksiyonunda değişkenler arası etkileşim olmadığından $r = s = \tau - 1$ dir. Bu durumda K_1 temel fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin toplamı:

$|\alpha| = 1$ için

$$D_{\tau-1}^1 K_1(\mathbf{t}^1) := \frac{\partial K_1}{\partial t_1^1}(\mathbf{t}^1) = \frac{\partial K_1}{\partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = \begin{cases} 1 & ; X_{\tau-1} > 25.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \leq 25.001 \end{cases},$$

$|\alpha| = 2$ için

$$D_{\tau-1}^2 K_1(\mathbf{t}^1) := \frac{\partial^2 K_1}{\partial t_1^1 \partial t_1^1}(\mathbf{t}^1) = \frac{\partial^2 K_1}{\partial X_{\tau-1} \partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = 0; \quad \forall X_{\tau-1} \text{ için,}$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r, s \in V(1)}} [D_{r,s}^\alpha K_1(\mathbf{t}^1)]^2 dt^1$$

olarak elde edilir.

$K_2(t^2) = \max(0, X_{\tau-1} - 60.001)$ temel fonksiyonunda da $K_1(t^1)$ de olduğu gibi değişkenler arası etkileşim söz konusu değildir ve $r = s = \tau - 1$ dir. Dolayısı ile K_2 temel fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin toplamı:

$|\alpha| = 1$ için

$$D_{\tau-1}^1 K_2(\mathbf{t}^2) := \frac{\partial K_2}{\partial t_1^2}(\mathbf{t}^2) = \frac{\partial K_2}{\partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = \begin{cases} 1 & ; X_{\tau-1} > 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \leq 60.001 \end{cases},$$

$|\alpha| = 2$ için

$$D_{\tau-1}^2 K_2(\mathbf{t}^2) := \frac{\partial^2 K_2}{\partial t_1^2 \partial t_1^2}(\mathbf{t}^2) = \frac{\partial^2 K_2}{\partial X_{\tau-1} \partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = 0; \quad \forall X_{\tau-1} \text{ için,}$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r, s \in V(2)}} [D_{r,s}^\alpha K_2(\mathbf{t}^2)]^2 dt^2$$

olarak elde edilir.

$K_3(t^3) = \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$ temel fonksiyonunda da değişkenler arası etkileşim olmadığından $r = s = \tau - 1$ dir. K_3 temel fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin toplamı:

$|\alpha| = 1$ için

$$D_{\tau-1}^1 K_3(\mathbf{t}^3) := \frac{\partial K_3}{\partial t_1^3}(\mathbf{t}^3) = \frac{\partial K_3}{\partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = \begin{cases} -1 & ; X_{\tau-1} < 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \geq 60.001 \end{cases},$$

$|\alpha| = 2$ için

$$D_{\tau-1}^2 K_3(\mathbf{t}^3) := \frac{\partial^2 K_3}{\partial t_1^3 \partial t_1^3}(\mathbf{t}^3) = \frac{\partial^2 K_3}{\partial X_{\tau-1} \partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-1}) = 0; \quad \forall X_{\tau-1} \text{ için}$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r, s \in V(3)}} [D_{r,s}^\alpha K_3(\mathbf{t}^3)]^2 dt^3$$

olarak elde edilir.

$K_4(\mathbf{t}^4) = \max(0, X_{\tau-3} - 59.001) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$ temel fonksiyonunda $X_{\tau-3}$ ve $X_{\tau-1}$ değişkenleri arasında bir etkileşim söz konusu olduğundan $r < s \Rightarrow r = \tau - 3$ ve $s = \tau - 1$ 'dir. Bu nedenle, K_4 temel fonksiyonuna ilişkin birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin toplamı:

$|\alpha| = 1$ için

$$D_{\tau-1}^1 K_4(\mathbf{t}^4) := \frac{\partial K_4}{\partial t_1^4}(\mathbf{t}^4) = \frac{\partial K_4}{\partial X_{\tau-3}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1}) \\ = \begin{cases} \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) & ; X_{\tau-3} > 59.001 \\ 0 & ; X_{\tau-3} \leq 59.001 \end{cases},$$

$$D_{\tau-3, \tau-1}^1 K_4(\mathbf{t}^4) := \frac{\partial K_4}{\partial t_2^4}(\mathbf{t}^4) = \frac{\partial K_4}{\partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1}) \\ = \begin{cases} -\max(0, X_{\tau-3} - 59.001) & ; X_{\tau-1} < 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \geq 60.001 \end{cases},$$

$|\alpha| = 2$ için

$$D_{\tau-3,\tau-1}^2 K_4(\mathbf{t}^4) := \frac{\partial^2 K_4}{\partial t_1^4 \partial t_2^4}(\mathbf{t}^4) = \frac{\partial^2 K_4}{\partial X_{\tau-3} \partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1})$$

$$= \begin{cases} -1 & ; X_{\tau-1} < 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \geq 60.001 \end{cases},$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r,s \in V(4)}} [D_{r,s}^\alpha K_4(\mathbf{t}^4)]^2 d\mathbf{t}^4$$

şeklindedir.

$K_5(t^5) = \max(0, 59.001 - X_{\tau-3}) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1})$ temel fonksiyonunda $X_{\tau-3}$ ve $X_{\tau-1}$ değişkenleri arasında bir etkileşim olduğundan $r < s$ için $r = \tau - 3$ ve $s = \tau - 1$ 'dir. Bu durumda K_5 temel fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin toplamı:

$|\alpha| = 1$ için

$$D_{\tau-3,\tau-1}^1 K_5(\mathbf{t}^5) := \frac{\partial K_5}{\partial t_1^5}(\mathbf{t}^5) = \frac{\partial K_5}{\partial X_{\tau-3}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1})$$

$$= \begin{cases} -\max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) & ; X_{\tau-3} < 59.001 \\ 0 & ; X_{\tau-3} \geq 59.001 \end{cases},$$

$$D_{\tau-3,\tau-1}^1 K_5(\mathbf{t}^5) := \frac{\partial K_5}{\partial t_2^5}(\mathbf{t}^5) = \frac{\partial K_5}{\partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1})$$

$$= \begin{cases} -\max(0, 59.001 - X_{\tau-3}) & ; X_{\tau-1} < 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \geq 60.001 \end{cases},$$

$|\alpha| = 2$ için

$$D_{\tau-3,\tau-1}^2 K_5(\mathbf{t}^5) := \frac{\partial^2 K_5}{\partial t_1^5 \partial t_2^5}(\mathbf{t}^5) = \frac{\partial^2 K_5}{\partial X_{\tau-3} \partial X_{\tau-1}}(X_{\tau-3}, X_{\tau-1})$$

$$= \begin{cases} 1 & ; X_{\tau-1} < 60.001 \\ 0 & ; X_{\tau-1} \geq 60.001 \end{cases},$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r,s \in V(5)}} [D_{r,s}^\alpha K_5(\mathbf{t}^5)]^2 dt^5$$

olarak elde edilir. Temel fonksiyonların bu türevleri (4.4.6) ile verilen PRSS’de yerine yazılırsa, bu durumda PRSS,

$$PRSS = \underbrace{\sum_{\tau=1}^n (x_\tau - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}))^2}_{=: I(RSS)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r,s \in V(j)}} \int c_j^2 [D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)]^2 dt^j}_{=: II}$$

olur. Eğer yukardaki ifadede $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{S_{max}} = \lambda$ alınırsa PRSS amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi bir Tikhonov düzenlemesi problemi şekline dönüşür:

$$PRSS \approx \underbrace{\|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2}_{=: I} + \underbrace{\lambda \|\mathbf{Lc}\|_2^2}_{\approx II}$$

Yukarıda da görüldüğü gibi PRSS amaç fonksiyonunun ilk bölümü ile Tikhonov düzenleme probleminin ilk bölümü eşittir. İkinci bölümler ise yaklaşık olarak eşittir:

$$I: \sum_{\tau=1}^n (x_\tau - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}))^2 = \|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2$$

$$II: \sum_{j=1}^{S_{max}} \lambda_j \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{\substack{r < s \\ r,s \in V(j)}} \int c_j^2 [D_{r,s}^\alpha K_j(\mathbf{t}^j)]^2 dt^j \approx \lambda \|\mathbf{Lc}\|_2^2$$

Sayısal örneğimiz için PRSS’nin I. kısmını oluşturan RSS değerlerinin bir kısmı aşağıdaki şekildedir (**bkz.** Ek2):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\tau=1}^n \left(x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) \right)^2 \\
&= [64 - c_0 - \max(0, 38 - 25.001)c_1 \\
&\quad - \max(0, 38 - 60.001)c_2 - \max(0, 60.001 - 38)c_3 \\
&\quad - \max(0, 23 - 59.001) * \max(0, 60.001 - 38)c_4 \\
&\quad - \max(0, 59.001 - 23) * \max(0, 60.001 - 38)c_5]^2 \\
&\quad + [55 - c_0 - \max(0, 64 - 25.001)c_1 \\
&\quad - \max(0, 64 - 60.001)c_2 - \max(0, 60.001 - 64)c_3 \\
&\quad - \max(0, 71 - 59.001) * \max(0, 60.001 - 64)c_4 \\
&\quad - \max(0, 59.001 - 71) * \max(0, 60.001 - 64)c_5]^2 + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + [23 - c_0 - \max(0, 54 - 25.001)c_1 \\
&\quad - \max(0, 54 - 60.001)c_2 - \max(0, 60.001 - 54)c_3 \\
&\quad - \max(0, 40 - 59.001) * \max(0, 60.001 - 54)c_4 \\
&\quad - \max(0, 59.001 - 40) * \max(0, 60.001 - 54)c_5]^2
\end{aligned}$$

Eğer RSS deki $\max(\cdot)$ değerleri yerine yazılırsa, RSS:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\tau=1}^n \left(x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) \right)^2 \\
&= [64 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3]^2 \\
&\quad + [55 - c_0 - 38.999c_1 - 3.999c_2]^2 + \dots \\
&\quad + [23 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 114.025c_5]^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu toplam aşağıdaki şekilde vektör formunda yazılırsa;

$$\sum_{\tau=1}^n \left(x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}) \right)^2 = (\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c})^T (\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}) = \|\mathbf{X}_{\tau} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c}\|_2^2 \quad (4.5.1)$$

PRSS'nin I. bölümünün RSS'ye eşit olduğu görülür.

II'de: (4.4.6) eşitliğinin ikinci kısmındaki çok boyutlu integrali ayrıştırma yöntemiyle (4.4.9)'daki forma dönüştürmüştük. Ayrıştırılmış formu \mathbf{L} ile göstermiş ve

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

(4.4.12) denklemini elde etmiştik. Bu ayrıştırmaı uygulamak için ilk olarak sayısal örneğimizdeki veri setimizi sıraladık. Her ilk değişkenin girdi veri değerini birazcık azalttık ve her son değişkenin girdi veri değerini birazcık artırdık. Bu, iki yeni gözlem değeri ekleyerek yeni bir veri seti elde etmemiz anlamına geldi. Bu durumda,

$$x_{\tau-1} \text{ 'in ilk ve son ayrıklaştırma değeri } \bar{x}_{0,\tau-1} = 24, \bar{x}_{66,\tau-1} = 81$$

$$x_{\tau-2} \text{ 'nin ilk ve son ayrıklaştırma değeri } \bar{x}_{0,\tau-2} = 24, \bar{x}_{66,\tau-2} = 81$$

$$x_{\tau-3} \text{ 'in ilk ve son ayrıklaştırma değeri } \bar{x}_{0,\tau-3} = 22, \bar{x}_{66,\tau-3} = 81$$

$$x_{\tau-4} \text{ 'in ilk ve son ayrıklaştırma değeri } \bar{x}_{0,\tau-4} = 22, \bar{x}_{66,\tau-4} = 81$$

$$x_{\tau-5} \text{ 'in ilk ve son ayrıklaştırma değeri } \bar{x}_{0,\tau-5} = 22, \bar{x}_{66,\tau-5} = 81$$

olarak belirlendi.

Sayısal örneğimiz için elde ettiğimiz temel fonksiyona karşılık gelen $L_{(\tau-k)j}$ değerleri aşağıda verilmiştir:

$$\sum_{(\tau-k)=1}^{(66)^{T_1}} \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{r,s \in V(1)} [D_{r,s}^\alpha \{ \max(0, X_{\tau-1} - 25.001) \}]^2 \right)}_{=L_{(\tau-k)1}} \left(\bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1+1}^1, \tau_1^1} - \bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1}^1, \tau_1^1} \right) \right]^{1/2}$$

ile elde ettiğimiz L_1 değeri 60.3987' dir.

$$\sum_{(\tau-k)=1}^{(66)^{T_2}} \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{r,s \in V(2)} [D_{r,s}^\alpha \{ \max(0, X_{\tau-1} - 60.001) \}]^2 \right)}_{=L_{(\tau-k)2}} \left(\bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1+1}^2, \tau_1^2} - \bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1}^2, \tau_1^2} \right) \right]^{1/2}$$

ile elde ettiğimiz L_2 değeri 22.6495' dir.

$$\sum_{(\tau-k)=1}^{(66)^{T_3}} \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^T}}^2 \sum_{r,s \in V(3)} [D_{r,s}^\alpha \{ \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) \}]^2 \right)}_{=L_{(\tau-k)3}} \left(\bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1+1}^3, \tau_1^3} - \bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_1}^3, \tau_1^3} \right) \right]^{1/2}$$

ile elde ettiğimiz L_3 değeri 56.4978'dir.

$$\sum_{(\tau-k)=1}^{(66)^{T_4}} \left[\left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r,s \in V(4)} [D_{r,s}^\alpha K_4(\mathbf{t}^4)]^2 \right) \left(\bar{x}_{l-3, \sigma_{\tau_1+1}^4, \tau_1^4} - \bar{x}_{l-3, \sigma_{\tau_1}^4, \tau_1^4} \right) \left(\bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_2+1}^4, \tau_2^4} - \bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_2}^4, \tau_2^4} \right) \right]^{1/2}$$

$=L_{(\tau-k)4}$

ile elde ettiğimiz L_4 değeri 581.1363'dir.

Burada $K_4(\mathbf{t}^4) = \{ \max(0, X_{\tau-3} - 59.001) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) \}$ 'dir.

$$\sum_{(\tau-k)=1}^{(66)^{T_5}} \left[\left(\sum_{|\alpha|=1}^2 \sum_{r,s \in V(5)} [D_{r,s}^\alpha K_5(\mathbf{t}^5)]^2 \right) \left(\bar{x}_{l-3, \sigma_{\tau_1+1}^5, \tau_1^5} - \bar{x}_{l-3, \sigma_{\tau_1}^5, \tau_1^5} \right) \left(\bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_2+1}^5, \tau_2^5} - \bar{x}_{l-1, \sigma_{\tau_2}^5, \tau_2^5} \right) \right]^{1/2}$$

$=L_{(\tau-k)5}$

ile elde ettiğimiz L_5 değeri 1118.128'dir.

Burada $K_5(\mathbf{t}^5) = \{ \max(0, 59.001 - X_{\tau-3}) * \max(0, 60.001 - X_{\tau-1}) \}$ 'dir.

L matrisi (6×6) boyutlu bir köşegen matristir. Bu matrisin ilk köşegen elemanı sıfır diğer köşegen elemanları yukarıda tanımlanan L_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) değerlerinden oluşmaktadır. Buna göre sayısal örneğimiz için L matrisi:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60.3987 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22.6495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56.4978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 581.1363 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1118.128 \end{bmatrix}$$

ve (4.4.12)'deki $\|Lc\|_2^2$ karesel normu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Lc} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60.3987 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22.6495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56.4978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 581.1363 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1118.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ c_1(60.3987) \\ c_2(22.6495) \\ c_3(56.4978) \\ c_4(581.1363) \\ c_5(1118.128) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{Lc}\|_2^2 &= (c_1(60.3987))^2 + (c_2(22.6495))^2 + (c_3(56.4978))^2 \\
 &\quad + (c_4(581.1363))^2 + (c_5(1118.128))^2 \tag{4.5.2}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. PRSS'nin (4.4.12) belirtildiği gibi CQP ile çözebilmek için problem aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
 &\min_{t,c} t \\
 &\|\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c} - \mathbf{X}_\tau\|_2 \leq t \\
 &\|\mathbf{Lc}\|_2 \leq \sqrt{M}
 \end{aligned}$$

λ ve \sqrt{M} 'nin değerlerini biraz azaltılırsa, hem PRSS hem de CQP minimizasyon problemleri için $\|\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})\mathbf{c} - \mathbf{X}_\tau\|_2$ 'nin değeri artar. Problemin çözümünde, CQP için bir iç nokta metodu kullanılırken, PRSS, $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}})$ katsayı matrisinin genelleştirilmiş singüler değer ayrışımını (GSDA) kullanılır (Nemirovski 2001), (Aster ve ark. 2004).

Örneğimiz için CQP problemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 &\min_{t,c} t \\
 &64 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 792.058c_5 = c_6, \\
 &55 - c_0 - 38.999c_1 - 3.999c_2 = c_7, \\
 &41 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 105.026c_5 = c_8, \\
 &59 - c_0 - 15.999c_1 - 19.001c_3 - c_4 - 94.986c_4 = c_9, \\
 &48 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 4.005c_5 = c_{10},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
71 - c_0 - 22.999c_1 - 12.001c_3 - 216.03c_5 &= c_{11}, \\
35 - c_0 - 45.999c_1 - 10.999c_2 &= c_{12}, \\
57 - c_0 - 9.999c_1 - 25.001c_3 - 275.036c_5 &= c_{13}, \\
40 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 383.956c_4 &= c_{14}, \\
58 - c_0 - 14.999c_1 - 20.001c_3 - 480.044c_5 &= c_{15}, \\
44 - c_0 - 32.999c_1 - 2.001c_3 - 4.004c_5 &= c_{16}, \\
80 - c_0 - 18.999c_1 - 16.001c_3 - 304.035c_5 &= c_{17}, \\
55 - c_0 - 54.999c_1 - 19.999c_2 &= c_{18}, \\
37 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 75.020c_5 &= c_{19}, \\
74 - c_0 - 11.999c_1 - 23.001c_3 - 482.998c_4 &= c_{20}, \\
51 - c_0 - 48.999c_1 - 13.999c_2 &= c_{21}, \\
57 - c_0 - 25.999c_1 - 9.001c_3 - 198.031c_5 &= c_{22}, \\
50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 45.012c_4 &= c_{23}, \\
60 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 80.018c_5 &= c_{24}, \\
45 - c_0 - 39.999c_1 - 0.001c_3 - 0.002c_5 &= c_{25}, \\
57 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 135.024c_5 &= c_{26}, \\
50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 2.998c_4 &= c_{27}, \\
45 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 140.024c_5 &= c_{28}, \\
25 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 30.017c_5 &= c_{29}, \\
59 - c_0 - 35.001c_3 - 315.044c_5 &= c_{30}, \\
50 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 14.015c_5 &= c_{31}, \\
71 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 340.044c_5 &= c_{32}, \\
56 - c_0 - 45.999c_1 - 10.999c_2 &= c_{33}, \\
74 - c_0 - 30.999c_1 - 4.001c_3 - 36.013c_5 &= c_{34}, \\
50 - c_0 - 48.999c_1 - 13.999c_2 &= c_{35}, \\
58 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 30.013c_5 &= c_{36}, \\
45 - c_0 - 32.999c_1 - 2.001c_3 - 30.013c_4 &= c_{37}, \\
54 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 135.024c_5 &= c_{38}, \\
36 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 6.007c_5 &= c_{39}, \\
54 - c_0 - 10.999c_1 - 24.001c_3 - 336.038c_5 &= c_{40}, \\
48 - c_0 - 28,999c_1 - 6.001c_3 - 30.011c_5 &= c_{41}, \\
55 - c_0 - 22.999c_1 - 12.001c_3 - 276.035c_5 &= c_{42},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 25.001c_5 &= c_{43}, \\
 57 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 165.026c_5 &= c_{44}, \\
 50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 12.007c_5 &= c_{45}, \\
 62 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 140.024c_5 &= c_{46}, \\
 44 - c_0 - 36.999c_1 - 1.999c_2 &= c_{47}, \\
 64 - c_0 - 18.999c_1 - 16.001c_3 - 144.025c_5 &= c_{48}, \\
 43 - c_0 - 38.999c_1 - 3.999c_2 &= c_{49}, \\
 52 - c_0 - 17.999c_1 - 17.001c_3 - 255.032c_5 &= c_{50}, \\
 38 - c_0 - 26.999c_1 - 8.001c_3 - 39.997c_4 &= c_{51}, \\
 59 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 352.038c_5 &= c_{52}, \\
 55 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 7.008c_5 &= c_{53}, \\
 41 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 105.026c_5 &= c_{54}, \\
 53 - c_0 - 15.999c_1 - 19.001c_3 - 0.019c_5 &= c_{55}, \\
 49 - c_0 - 27.999c_1 - 7.001c_3 - 28.011c_5 &= c_{56}, \\
 34 - c_0 - 23.999c_1 - 11.001c_3 - 198.029c_5 &= c_{57}, \\
 35 - c_0 - 8.999c_1 - 26.001c_3 - 156.032c_5 &= c_{58}, \\
 54 - c_0 - 9.999c_1 - 25.001c_3 - 250.035c_5 &= c_{59}, \\
 45 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 150.031c_5 &= c_{60}, \\
 68 - c_0 - 19.001c_1 - 15.001c_3 - 360.039c_5 &= c_{61}, \\
 38 - c_0 - 42.999c_1 - 7.999c_2 &= c_{62}, \\
 50 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 308.036c_5 &= c_{63}, \\
 60 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 89.999c_4 &= c_{64}, \\
 39 - c_0 - 34.999c_1 - 0.001c_3 - 0.021c_5 &= c_{65}, \\
 59 - c_0 - 13.999c_1 - 21.001c_3 - 189.030c_5 &= c_{66}, \\
 40 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 &= c_{67}, \\
 57 - c_0 - 14.999c_1 - 20.001c_3 - 400.04c_5 &= c_{68}, \\
 54 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 0.003c_5 &= c_{69}, \\
 23 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 114.025c_5 &= c_{70},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c_6^2 + c_7^2 + c_8^2 + c_9^2 + c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{14}^2 + c_{15}^2 + c_{16}^2 + c_{17}^2 + c_{18}^2 + \\
 c_{19}^2 + c_{20}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 + c_{24}^2 + c_{25}^2 + c_{26}^2 + c_{27}^2 + c_{28}^2 + c_{29}^2 + c_{30}^2 + c_{31}^2 + \\
 c_{32}^2 + c_{33}^2 + c_{34}^2 + c_{35}^2 + c_{36}^2 + c_{37}^2 + c_{38}^2 + c_{39}^2 + c_{40}^2 + c_{41}^2 + c_{42}^2 + c_{43}^2 + c_{44}^2 +
 \end{aligned}$$

$$c_{45}^2 + c_{46}^2 + c_{47}^2 + c_{48}^2 + c_{49}^2 + c_{50}^2 + c_{51}^2 + c_{52}^2 + c_{53}^2 + c_{54}^2 + c_{55}^2 + c_{56}^2 + c_{57}^2 + c_{58}^2 + c_{59}^2 + c_{60}^2 + c_{61}^2 + c_{62}^2 + c_{62}^2 + c_{64}^2 + c_{65}^2 + c_{66}^2 + c_{67}^2 + c_{68}^2 + c_{69}^2 + c_{70}^2)^{1/2} \leq t,$$

$$(c_{71}^2 + c_{72}^2 + c_{73}^2 + c_{74}^2 + c_{75}^2 + c_{76}^2)^{1/2} \leq (\bar{M})^{1/2}$$

Bu problem 64 doğrusal denklem ve iki karesel koni içermektedir. Sayısal örneğimizi çözmek için, ikinci dereceden konik karesel programlamanın çözümünü içeren MOSEK (MOSEK 2011) paket programını kullandık. Bu nedenle, problemimiz için bu programın standart formunu elde etmek için, iki karesel koni içindeki doğrusal gösterimlere yeni bilinmeyen değişkenler ekledik. Bu yolla, konilerin içindeki gösterimleri basitleştirmiş ve sınırlı olarak yazmış olduk.

Optimizasyon problemimizdeki $\sqrt{\bar{M}}$ bir modelden bağımsız metot tarafından belirlenmektedir. Bizim C-ASTAR için oluşturduğumuz kodumuzda en iyi $\sqrt{\bar{M}}$ değerlerine ulaştığımızda C-ASTAR bize her biri beş temel fonksiyona dayanan birçok çözüm sağlayacaktır. Bu çözümleri 5. bölümde ele alacağız.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Önceki bölümde zaman serileri için doğrusal regresyonun uygulanışı, ASTAR ve C-ASTAR metotları sunulmuş ve ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Bu bölümde bu metotları karşılaştırmak için farklı veri setleri ile uygulama yapılacaktır. Zaman serileri için doğrusal regresyonun uygulanışı aşamasında STATA (STATA 2011) programından yararlanılmıştır. ASTAR uygulaması için Salford Systems (Salford Systems 2011) kullanılırken, C-ASTAR için MATLAB (MATLAB 2011) kullanılarak bir kod yazılmış ve C-ASTAR'daki CQP probleminin çözümü için MOSEK (MOSEK 2011) tercih edilmiştir.

5.1 Uygulamada Kullanılan Veri Setlerinin Tanımlanması

Uygulamamızda iki veri seti kullanılmıştır.

Veri Seti 1: İlk veri setimiz kimyasal bir işlemin iki saat aralıklarla ölçülmüş yoğunlaşma değerlerini belirten *Chemical Process Concentration Readings (CPCR)*'dir. Bu veri seti 197 gözlem değerinden oluşmaktadır. Veri setinin zamana bağlı serpmme grafiği EK1 de verilmiştir. CPCR verisiyle ilgili daha detaylı bilgi için Box-Jenkins (1976)'yı inceleyiniz.

Veri Seti 2: İkinci veri setimiz kimyasal bir işlemin saatlik akışkanlık değerlerini belirten *Chemical Process Viscosity Readings (CPVR)*'dir. Bu veri seti 310 gözlem değerinden oluşmaktadır. Veri setinin zamana bağlı serpmme grafiği EK1 de verilmiştir. CPVR verisiyle ilgili daha detaylı bilgi için Box-Jenkins (1976)'yı inceleyiniz.

5.2 Onaylama Yaklaşımı ve Karşılaştırma Ölçütleri

Regresyon, ASTAR ve C-ASTAR metotlarının performanslarını ölçmek için birçok ölçüm aracı kullanılabilir. Uygulamamızda kullandığımız performans ölçütleri ve bunların genel gösterimleri aşağıdaki gibidir:

Genel Gösterim

y_i , bağımlı değişkenin i -inci gözlemlenmiş değeri

\hat{y}_i , bağımlı değişkenin i -inci fit edilmiş değeri

\bar{y} , bağımlı değişkenin ortalaması

N , gözlem sayısı

p , modeldeki terim sayısı

$\bar{\hat{y}}$, fit edilmiş bağımlı değişkenin ortalaması

$s(y)^2$, gözlemlenmiş bağımlı değişken için örneklem varyansı

$s(\hat{y})^2$, fit edilmiş bağımlı değişken için örneklem varyansı

$e_i = y_i - \hat{y}_i$, i -inci hata

h_i , i -inci gözlem için Leverage değeri (\mathbf{H} şapka matrisinin i -inci köşegen elementi. Şapka matrisi, $\text{rank}(\mathbf{X}) = p$, ($p \leq N$) olan ($N \times p$) boyutlu \mathbf{X} matrisinden oluşan $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ şeklindeki matristir.

Düzeltilmiş Belirlilik Katsayısı (Adj- R^2)

Modeldeki tahmin edicilerin sayısının nedenini açıklar ve modelleri farklı sayılardaki tahmin edicilerle karşılaştırmada yararlıdır. Adj- R^2 ne kadar yüksekse model veriye o kadar uyuyor demektir. Formülü:

$$R_{Adj}^2 := 1 - \frac{MSE}{MST} = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \right) \left(\frac{N - 1}{N - p - 1} \right), (N - p - 1) \neq 0$$

Belirlilik Katsayısı (R^2)

Bu değer, bağımlı değişkendeki değişimin ne kadar olduğunu gösteren bir kararlılık katsayısıdır. R^2 ne kadar yüksekse model veriye o kadar uyuyor demektir. Formülü:

$$R^2 := 1 - \frac{RSS}{SST} = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \right)$$

Ortalama Mutlak Hata (MAE)

MAE hatanın ortalama büyüklüğünü ölçer. MAE ne kadar küçük olursa o kadar iyidir. Formülü:

$$MAE := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|$$

Ortalama Mutlak Yüzde Hata (MAPE)

MAPE bağımsız hata ölçeğini sunar. MAPE ne kadar küçük olursa o kadar iyidir. Formülü:

$$MAPE := \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

Hata Kareler Ortalaması (MSE)

MSE kabaca hatalı tahminleri vurgular. MSE ne kadar küçük olursa o kadar iyidir. Formülü:

$$MSE := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Hata Kareler Ortalaması Kökü (RMSE)

RMSE ağırlıklı olarak kabaca hatalı tahminler üzerinde olan büyüklüğü ölçer. RMSE ne kadar küçük olursa o kadar iyidir. Formülü:

$$RMSE := \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{N - p - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

Korelasyon Katsayısı

Bir korelasyon katsayısı gerçek ve tahmin edilmiş bağımlı değişkenler arasındaki lineer ilişkinin bir ölçütüdür. Formülü:

$$r := \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{s(y)^2 s(\hat{y})^2}}$$

Tahmini Hata Kareler Toplamı (PRESS)

PRESS modelin tahmin yeteneğini ölçer. PRESS, hata kareler toplamına benzer ve tahmini hatanın kareler toplamı olarak adlandırılabilir. Genelde, PRESS ne kadar küçük olursa modelin tahmin yeteneği o kadar iyidir. En küçük kareler regresyonunda PRESS aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$PRESS := \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{1 - h_i} \right)^2$$

Tahmin Edilmiş Belirlilik Katsayısı ($R^2(pred)$)

Tahmin edilmiş R^2 , yeni gözlemler için modelin bağımlı değişkenleri ne kadar iyi tahmin ettiğini gösterir. Tahmin edilmiş R^2 'nin daha büyük değerleri daha geniş tahmin yeteneğini öne sürer. $R^2(pred)$ ne kadar yüksekse o kadar iyidir. Formülü:

$$R^2(pred) := 1 - \frac{PRESS}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{1 - h_i} \right)^2}{1 - \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

5.3 Modellerin Oluşturulması

5.3.1 Doğrusal Regresyon Modelinin Oluşturulması

Regresyon modeli oluşturulurken öncelikle zaman serilerinin regresyon varsayımlarına uygun bir hale getirilmesi gerekmektedir. Önceden de belirtildiği gibi zaman serilerinde ardışık hatalar arasında otokorelasyon vardır ve bu durum bazı otokorelasyon düzeltme yöntemleriyle düzeltilebilmektedir. Biz burada Prais-Winsten yaklaşımını kullanarak otokorelasyonu ortadan kaldırdık (**bkz.** 3.2.2.1). STATA

(STATA 2011) programının istatistik yöntemleri içindeki “*Zaman Serileri*” seçeneğinde verimiz için zaman değişkeni tanımlanmış ve “*Prais-Winsten Regresyonu*” seçilerek uyumun sağlandığı p değeri için $AR(p)$ 'nin regresyon denklemi elde edilmiştir. İki veri setimiz için de Prais-Winsten regresyonu uygulanırken uyum $p = 2$ için sağlanmıştır. Bu yüzden iki verimizde de $AR(2)$ zaman serisi modeli kullanılmıştır.

5.3.2 ASTAR Modelinin Oluşturulması

ASTAR modelinin oluşturulmasında Salford Predictor Miner programının MARS aracı kullanılmıştır. $AR(p)$ 'nin maksimum temel fonksiyon sayısı ve etkileşim sayısı, programın en iyi belirlilik katsayısını (R^2) elde ettiği model bulunarak oluşturulmuştur. En iyi R^2 'yi veren temel fonksiyon sayısı ve etkileşim sayısına göre MARS aracı çalıştırılmış ve $AR(p)$ 'nin ASTAR denklemi elde edilmiştir. CPCR verisi için $AR(2)$ zaman serisi modeline ASTAR uyguladığımızda en iyi R^2 değeri 8 temel fonksiyon ve 1 etkileşim sayısı için elde edilmişken, CPVR verisi için 15 temel fonksiyon ve 1 etkileşim sayısı için elde edilmiştir (**bkz.** Ek3).

5.3.3 C-ASTAR Modelinin Oluşturulması

C-ASTAR modelinin oluşturulmasında MOSEK programının MATLAB aracı kullanılarak CQP probleminin çözümü için bir kod yazılmıştır. \sqrt{M} değeri için (**bkz.** Ek4) değerler tek tek denenmiş ve en iyi yakınsamanın sağlandığı \sqrt{M} değeri için $AR(p)$ 'nin C-ASTAR modeli oluşturulmuştur. Biz daha önce $p = 2$ aldığımızdan $AR(2)$ için C-ASTAR uygulanmıştır (**bkz.** Ek3).

5.4 Modellerin Karşılaştırılması

Zaman serileri için regresyon, ASTAR ve C-ASTAR metotlarının performanslarını ölçmek için kullandığımız performans ölçütleri için MATLAB [46] programında kodlar yazılmış ve her bir metot için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çizelge 5.1. CPCR verisi için performans ölçüm değerleri

	DOĞRUSAL REGRESYON	ASTAR	C-ASTAR
Adj- R^2	0.3607	0.3675	0.3695
R^2	0.3674	0.3741	0.3958
MAE	0.2422	0.2433	0.2403
MAPE	1.4175	1.4243	1.4061
MSE	0.1013	0.1002	0.0967
RMSE	0.3207	0.3190	0.3185
rho	0.6076	0.6117	0.6291
PRESS	20.0037	19.7588	19.7892
$R^2(pred)$	1.6692	1.6610	1.6620

Çizelge 5.2. CPVR verisi için performans ölçüm değerleri

	DOĞRUSAL REGRESYON	ASTAR	C-ASTAR
Adj- R^2	0.7284	0.7658	0.7625
R^2	0.7302	0.7673	0.7741
MAE	0.2432	0.2161	0.2121
MAPE	2.6937	2.3811	2.3384
MSE	0.0960	0.0828	0.0804
RMSE	0.3114	0.2892	0.2913
rho	0.8588	0.8760	0.8798
PRESS	30.0814	25.8703	26.8597
$R^2(pred)$	1.2769	1.2381	1.2472

Görüldüğü gibi genel olarak C-ASTAR metodu diğer metotlardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

I. veri kümesi için kullanılan 9 performans kriteri göz önüne alındığında, bu kriterlerin 8 inde C-ASTAR hem doğrusal regresyon modelinden hem de ASTAR modelinden daha iyi bir performans göstermiştir. C-ASTAR için elde edilen PRESS değerleri doğrusal regresyondan daha iyi olmakla beraber ASTAR için hesaplanan PRESS değerlerine yakındır.

II. veri kümesi için kullanılan 9 performans kriteri göz önüne alındığında, bu kriterlerin 6'sında C-ASTAR hem doğrusal regresyon modelinden hem de ASTAR modelinden daha iyi bir performans göstermiştir. C-ASTAR için elde edilen Adj- R^2 ,

RMSE ve PRESS değerleri doğrusal regresyondan daha iyi olmakla beraber ASTAR için hesaplanan değerlere yakındır.

5.5 Sonuç

Regresyon ve sınıflandırma üzerine yaptığımız bu çalışma, yıllardır birçok alanda kullanılan zaman serileri analizine yeni bir katkı sağlamaktadır. Zaman serileri için regresyon uygulamasında karşılaşılan ardışık hatalar arasındaki otokorelasyonun kaldırılması işleminde kullanılan yöntemlerle çoğu kez uyum sağlanamadığından ya başarıya ulaşılamamaktadır ya da modelin derecesinin değiştirilmesi zorunluluğuyla karşılaşılmaktadır. Modelin derecesinin değiştirilmesi ise her zaman istenilen bir durum olmayabilir. Böyle durumlarda yeni bir düzenleme yöntemine ihtiyaç duyulmaktadır.

Zaman serilerinde MARS metodu kullanılarak oluşturulan ASTAR algoritmasına yeni bir düzenleme uygulayarak zaman serileri için regresyon ve ASTAR metoduna ek, yeni bir alternatif model oluşturulması amaçlanmıştır. Bir Tikhonov düzenleme problemi şeklinde cezalı hata kareler toplamı (PRSS) oluşturularak ASTAR algoritması değiştirilmiştir. Bu problem sürekli optimizasyon kullanılarak (CQP) çözülmüştür. ASTAR'ın geriye doğru adım algoritmasında değişiklik yapılarak oluşturulan bu yeni modelleme tekniğinin adı C-ASTAR olarak belirlenmiştir.

C-ASTAR'ın etkinliğinin ölçülmesi için iki farklı veri seti kullanılarak zaman serileri için regresyon ve ASTAR metotlarıyla karşılaştırılmıştır. Metottan bağımsız performans ölçümlerine göre bu uygulama sonuçları, ASTAR ve C-ASTAR ölçümleri arasında önemli bir farkın olmadığını göstermiştir. Ancak C-ASTAR sonuçları biraz daha iyi sonuçlar vermiştir.

Veri setlerimizi verinin yapısına göre yorumlayacak olursak iki veri setimiz de bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiye engel olan sapan değer içermemektedir. Veri setlerimizin histogram grafikleri çizdirildiğinde çarpıklık ve sivrilik katsayılarının makul değerde ve dağılımın şekli normal dağılımın çan eğrisi şekline oldukça yakındır. Genelde ASTAR ve C-ASTAR çözümleri arasında metottan bağımsız ölçümler göz önüne alındığında dikkate değer bir fark bulunmamaktadır. C-ASTAR, temel fonksiyonların sayısına göre ASTAR'dan daha karmaşık modeller oluşturmaktadır. Çünkü C-ASTAR, ASTAR'ın ileriye doğru adım algoritmasından elde

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

ettiği tüm temel fonksiyonu kullanır. Hatta sıfıra yakın katsayıya sahip temel fonksiyonları bile silmez. CQP tarafından tayin edilen \sqrt{M} değerleri modelden bağımsız olarak seçilir. C-ASTAR'ın çözümlerinden en az biri ASTAR çözümine yakındır. Hatta bazen bu çözümler ASTAR çözümlerinden de iyidir.

C-ASTAR, çözümlerini CQP kullanarak oluşturur. Bu açıdan, Arkadi Nemirovski (2001) tarafından da belirtildiği gibi C-ASTAR hız ve karmaşıklık bakımından da avantajlara sahiptir.

6. KAYNAKLAR

Dergi

- Chou, S.M. , Lee, T.S. , Shao, Y.E. , Chen, I.F. 2003. Mining the Breat Cancer Pattern Using Artificial Neural Networks and Multivariate Adaptive Regression Splines. *Expert Systems with Applications*, 27: 133-142.
- Cleveland, W.S. 1979. Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots, *Journal of the American Statistical Association*, 74 (368): 829-836.
- Ertek, T. 1996. *Ekonometriye Giriş 2.b. Beta b.yay. ,İstanbul: 383-384.*
- Gujarati, D.N. 1995. *Basic Econometrics third edit, MC-Graw-Hill,Inc. USA: 712-713.*
- Karmakar, N. 1984. A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, 4: 373-395.
- Kayım, H. 1985. *İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri. Hacettepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayınları, 11.*
- Moisen, G. , Frescino, T. S. 2002. Comparing Five Modeling Techniques for Predicting Forest Characteristics. *Ecological Modeling*, 157 (2-3): 209-225.
- Morgan, J.A. 1963. Problems in the Analysis of Survey Data and a Proposal. *Journal of the American Statistical Association*, 58: 415-434.
- Silverman, B.W. 1985. Some Aspects of the Spline Smoothing Approach to Non-parametric Regression Curve Fitting. *Journal of the Royal Statistical Society (Ser B)*, 47 (1): 1-52
- Taylan, P. , Weber, G.W. , Beck, A. 2007. New Approaches to Regression by Generalized Additive Models and Continues Optimization for Modern Applications in Finance, Science and Technology. *Journal Optimization*, 56 (5-6): 675-698.
- Taylan, P. , Weber, G.W. , Özkurt, F.Y. 2010. A new approach to multivariate adaptive regression splines by using Tikhonov regularization and continuous optimization. *J. TOP*, 18-2: 377-395.

Tong, H. , Thanoon, B. , Gudmundsson, G. 1985. Threshold Time Series Modeling of Two Icelandic Riverflow Systems. Water Resources Bulletin, 42 (3): 651-660.

Friedman, J.H. 1991. Multivariate Adaptive Regression Splines. Annals of Statistics, 19 (1): 1-67.

Kitap

Aster, R. , Borchers, B. , Thurber, C. 2004. Parameter Estimation and Inverse Problems. Academic Press, 301, San Diego.

Bellman, R.E. 1961. Adaptive Control Processes. Princeton University Press, 94, New York.

Box, G.E.P. , Jenkins, G.M. 1976. Time series analysis forecasting and control. 574, California.

Breiman, L. , Friedman, J. , Olsen, R. , Stone, C. 1984. Classification and regression Trees. Chapman and Hall, 368, CA.

Charles W. , Ostram, Jr. 1990. Time Series Analysis: Regression Techniques, Sage Publications, 96, California.

Draper, N. , Smith, H. 1966. Applied Regresyon Analysis. Wiley, 736, New York.

Fox, J. 2002. Nonparametric Regression, Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression. SAGE, 312, CA.

Hansen, P.C. 1998. Rank-Deficient and Discrete III-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. SIAM, 263, Philadelphia.

Hastie, T. , Tibshirani, R. , Friedman, J. 2001. The Elements of Statistical Learning, Data Mining, Inference and Prediction. Springer, 552, New York.

Hill, D.R. , Kolman, B. (çeviri editörü: Akın, Ö.). 2002. Uygulamalı Lineer Cebir. Palme Yayıncılık, 172, Ankara.

Kendall, M. , Stuart, A. , Ord, J.K. 1983. The Advanced Theory of Statistics: Volume 3. Griffin, 700, London.

Kmenta, J. 1986. Elements of econometrics: Second Edition. Macmillan, 800, New York.

Lind, D. , Marchal, W. , Wathen, S. 2004. Statistical Techniques in Business and Economics. McGraw-Hill/Irwin, 928, New York.

Mendenhall, W. , Sincich, T. 2003. Regression Analysis: A Second Course in Statistics. Pearson Prentice Hall, 852, NJ.

Nemirovski, A. 2001. Lectures on Modern Convex Optimization. Society for Industrial Mathematics, 488, Philadelphia.

Nesterov, U.E. , Nemirovski, A.S. , Nesterov, Y. 1994. Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. SIAM, 405, Philadelphia.

Özmen, A. 1986. Zaman Serisi Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Banka Mevduat Tahmininde Uygulama Denemesi. Anadolu Üniversitesi, 110, Eskişehir.

Priestley, M.B. 1988. Non-Linear and Non-Stationary Time Series. Academic Press, 227, London.

Tekin, V.N. 2006. SPSS Uygulamalı İstatistik Teknikleri. Seçkin Yayıncılık, 274, Ankara.

Thisted, R.A. 1988. Elements of Statistical Computing: Numerical Computation. Chapman and Hall, 448, New York.

Tez

Altman, N.S. 1987. Smoothing Data with Correlated Errors. Doktora, Department of Statistics, Stanford University Report, CA, 280.

Stevens, J.G. 1991. An Investigation of Multivariate Adaptive Regression Splines for Modelling and Analysis of Univariate and Semi-Multivariate Time series Systems. Doktora, Naval Postgraduate School, California, 207.

Yerlikaya, F. 2008. A New Contribution to Nonlinear Robust Regression and Classification with MARS and Its Applications to Data Mining for Quality Control in Manufacturing. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 224.

Kongre-Sempozyum

Hildeman, R.J. , Hamilton, H.J. 2000. Applying Objective Interestingness Measures for Ranking Discovered Knowledge in: Zighed, D.A. , Komorowski, J. , Zytkow, J. (Eds.). Proceeding of the 4th European Symposium on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery (PKDD'00), Lyon, France, 432-439.

Hildeman, R.J. Hamilton, H.J. 2001. Evaluation of Interestingness Measures for Ranking Discovered Knowledge in: Cheung, G.J. , Williams, G.J. , Li, Q. (Eds.). Proceeding of the 5th Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD'01), Hong Kong, 247-259.

Taylan, P. , Weber, G.W. , Yerlikaya, F. 2008. Continuous Optimization Applied in MARS for Modern Applications in Finance. Science and Technology, in the ISI Proceedings of 20th Mini-Euro Conference Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies, Neringa, Lithuania, 317-322.

İnternet Belgesi

People Emich. 2010. Autocorrelation.

Erişim: [people.emich.edu/jthornton/text-files/Econ415_autocorrelation.doc],

Erişim tarihi: 13.03.2010.

Hamit, A. 2010. Korelasyon Analizi.

Erişim: [http://maden.karaelmas.edu.tr/hocalar/hamitaydin/Sunu_6ci_hafta.pdf],

Erişim tarihi: 18.05.2010.

Department of Political Science and International Relations Posc/Uapp 816. 2010. Time Series Regression.

Erişim: [<http://www.udel.edu/htr/Statistics/Notes816/class20.PDF>],

Erişim tarihi: 23.10.2010.

Avent, S.R. 2010. Time Series Analysis.

Erişim:

[<http://userwww.sfsu.edu/~efc/classes/biol710/timeseries/TimeSeriesAnalysis.html>]

Erişim tarihi: 23.10.2010.

Wikipedia. 2010.

Erişim: [www.wikipedia.org]

Erişim tarihi: 11.02.2010.

Evans, W. 2010. Durbin-Watson Significance Tables.

Erişim: [http://www.nd.edu/~wevans1/econ30331/Durbin_Watson_tables.pdf]

Erişim tarihi: 24.10.2010.

Bilgisayar Programı

MATLAB, <http://www.mathworks.com/products/matlab/tryit.html>

MOSEK, <http://www.mosek.com/index.php?id=99>

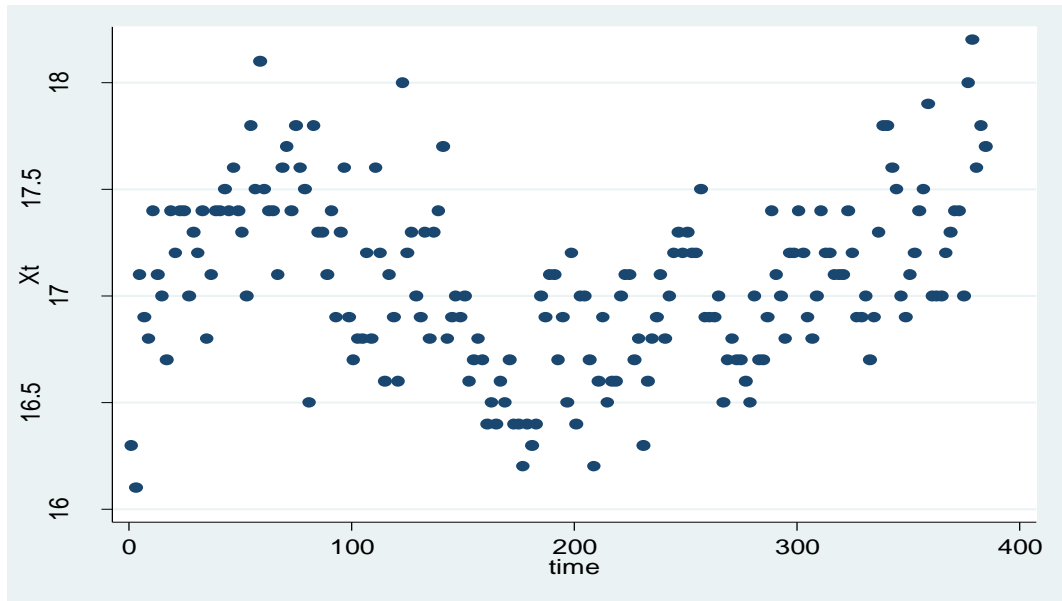
Salford Systems, <http://salford-systems.com/products/mars/overview.html>

STATA, <http://www.stata.com/>

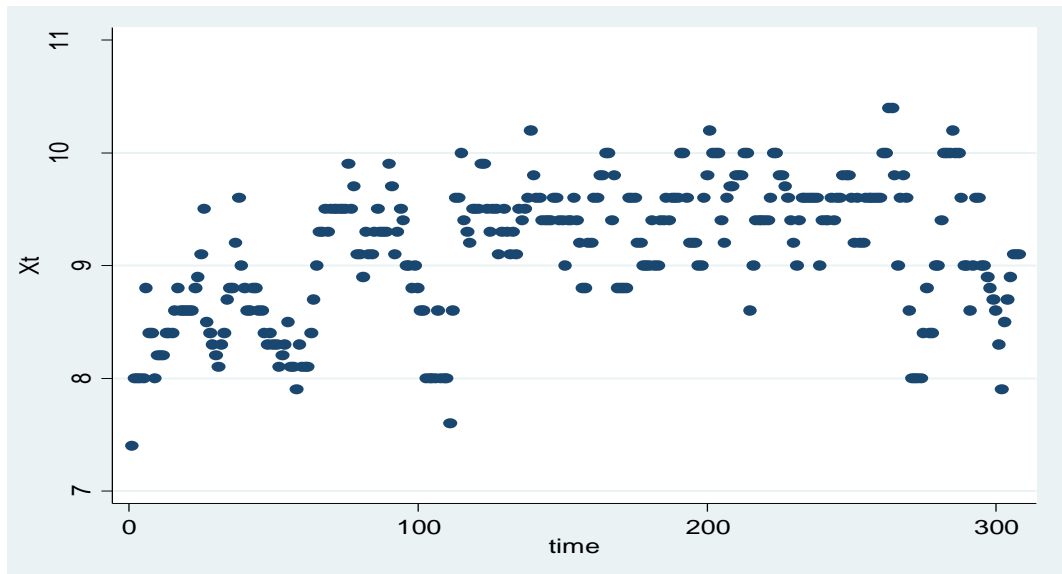
EKLER

EK 1:

CPCR Verisi:



CPVR Verisi:



EK 2:

Sayısal Örnekteki Hata Kareler Toplamı (RSS)

Aşağıdaki hata kareler toplamı (RSS) fonksiyonu bölüm 4.4'de bulunmaktadır.

Γ'de:

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=1}^n \left(x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{a}}_{\tau-k}) \right)^2 \\ &= [64 - c_0 - \max(0, 38 - 25.001)c_1 - \max(0, 38 - 60.001)c_2 \\ & \quad - \max(0, 60.001 - 38)c_3 - \max(0, 23 - 59.001) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_4 - \max(0, 59.001 - 23) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_5]^2 \\ &+ [55 - c_0 - \max(0, 64 - 25.001)c_1 - \max(0, 64 - 60.001)c_2 \\ & \quad - \max(0, 60.001 - 64)c_3 - \max(0, 71 - 59.001) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 64)c_4 - \max(0, 59.001 - 71) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 64)c_5]^2 \\ &+ [41 - c_0 - \max(0, 55 - 25.001)c_1 - \max(0, 55 - 60.001)c_2 \\ & \quad - \max(0, 60.001 - 55)c_3 - \max(0, 38 - 59.001) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_4 - \max(0, 59.001 - 38) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_5]^2 \\ &+ [59 - c_0 - \max(0, 41 - 25.001)c_1 - \max(0, 41 - 60.001)c_2 \\ & \quad - \max(0, 60.001 - 41)c_3 - \max(0, 64 - 59.001) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 41)c_4 - \max(0, 59.001 - 64) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 41)c_5]^2 \\ &+ [48 - c_0 - \max(0, 59 - 25.001)c_1 - \max(0, 59 - 60.001)c_2 \\ & \quad - \max(0, 60.001 - 59)c_3 - \max(0, 55 - 59.001) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_4 - \max(0, 59.001 - 55) \\ & \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_5]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[71 - c_0 - \max(0, 48 - 25.001)c_1 - \max(0, 48 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 48)c_3 - \max(0, 41 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 48)c_4 - \max(0, 59.001 - 41) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 48)c_5]^2 \\
& +[35 - c_0 - \max(0, 71 - 25.001)c_1 - \max(0, 71 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 71)c_3 - \max(0, 59 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 71)c_4 - \max(0, 59.001 - 59) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 71)c_5]^2 \\
& +[57 - c_0 - \max(0, 35 - 25.001)c_1 - \max(0, 35 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 35)c_3 - \max(0, 48 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 35)c_4 - \max(0, 59.001 - 48) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 35)c_5]^2 \\
& +[40 - c_0 - \max(0, 57 - 25.001)c_1 - \max(0, 57 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 57)c_3 - \max(0, 71 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_4 - \max(0, 59.001 - 71) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_5]^2 \\
& +[58 - c_0 - \max(0, 40 - 25.001)c_1 - \max(0, 40 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 40)c_3 - \max(0, 35 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 40)c_4 - \max(0, 59.001 - 35) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 40)c_5]^2 \\
& +[44 - c_0 - \max(0, 58 - 25.001)c_1 - \max(0, 58 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 58)c_3 - \max(0, 57 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 58)c_4 - \max(0, 59.001 - 57) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 58)c_5]^2 \\
& +[80 - c_0 - \max(0, 44 - 25.001)c_1 - \max(0, 44 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 44)c_3 - \max(0, 40 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 44)c_4 - \max(0, 59.001 - 40) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 44)c_5]^2 \\
& +[55 - c_0 - \max(0, 80 - 25.001)c_1 - \max(0, 80 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 80)c_3 - \max(0, 58 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 80)c_4 - \max(0, 59.001 - 58) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 80)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[37 - c_0 - \max(0, 55 - 25.001)c_1 - \max(0, 55 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 55)c_3 - \max(0, 44 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_4 - \max(0, 59.001 - 44) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_5]^2 \\
& +[74 - c_0 - \max(0, 37 - 25.001)c_1 - \max(0, 37 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 37)c_3 - \max(0, 80 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 37)c_4 - \max(0, 59.001 - 80) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 37)c_5]^2 \\
& +[51 - c_0 - \max(0, 74 - 25.001)c_1 - \max(0, 74 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 74)c_3 - \max(0, 55 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 74)c_4 - \max(0, 59.001 - 55) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 74)c_5]^2 \\
& +[57 - c_0 - \max(0, 51 - 25.001)c_1 - \max(0, 51 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 51)c_3 - \max(0, 37 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 51)c_4 - \max(0, 59.001 - 37) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 51)c_5]^2 \\
& +[50 - c_0 - \max(0, 57 - 25.001)c_1 - \max(0, 57 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 57)c_3 - \max(0, 74 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_4 - \max(0, 59.001 - 74) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_5]^2 \\
& +[60 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 51 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 51) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[45 - c_0 - \max(0, 60 - 25.001)c_1 - \max(0, 60 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 60)c_3 - \max(0, 57 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 60)c_4 - \max(0, 59.001 - 57) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 60)c_5]^2 \\
& +[57 - c_0 - \max(0, 45 - 25.001)c_1 - \max(0, 45 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 45)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[50 - c_0 - \max(0, 57 - 25.001)c_1 - \max(0, 57 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 57)c_3 - \max(0, 60 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_4 - \max(0, 59.001 - 60) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_5]^2 \\
& +[45 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 45 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 45) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[25 - c_0 - \max(0, 45 - 25.001)c_1 - \max(0, 45 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 45)c_3 - \max(0, 57 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_4 - \max(0, 59.001 - 57) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_5]^2 \\
& +[59 - c_0 - \max(0, 25 - 25.001)c_1 - \max(0, 25 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 25)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 25)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 25)c_5]^2 \\
& +[50 - c_0 - \max(0, 59 - 25.001)c_1 - \max(0, 59 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 59)c_3 - \max(0, 45 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_4 - \max(0, 59.001 - 45) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_5]^2 \\
& +[71 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 25 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 25) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[56 - c_0 - \max(0, 71 - 25.001)c_1 - \max(0, 71 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 71)c_3 - \max(0, 59 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 71)c_4 - \max(0, 59.001 - 59) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 71)c_5]^2 \\
& +[74 - c_0 - \max(0, 56 - 25.001)c_1 - \max(0, 56 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 56)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 56)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 56)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[50 - c_0 - \max(0, 74 - 25.001)c_1 - \max(0, 74 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 74)c_3 - \max(0, 71 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 74)c_4 - \max(0, 59.001 - 71) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 74)c_5]^2 \\
& +[58 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 56 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 56) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[45 - c_0 - \max(0, 58 - 25.001)c_1 - \max(0, 58 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 58)c_3 - \max(0, 74 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 58)c_4 - \max(0, 59.001 - 74) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 58)c_5]^2 \\
& +[54 - c_0 - \max(0, 45 - 25.001)c_1 - \max(0, 45 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 45)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_5]^2 \\
& +[36 - c_0 - \max(0, 54 - 25.001)c_1 - \max(0, 54 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 54)c_3 - \max(0, 58 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_4 - \max(0, 59.001 - 58) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_5]^2 \\
& +[54 - c_0 - \max(0, 36 - 25.001)c_1 - \max(0, 36 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 36)c_3 - \max(0, 45 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 36)c_4 - \max(0, 59.001 - 45) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 36)c_5]^2 \\
& +[48 - c_0 - \max(0, 54 - 25.001)c_1 - \max(0, 54 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 54)c_3 - \max(0, 54 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_4 - \max(0, 59.001 - 54) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_5]^2 \\
& +[55 - c_0 - \max(0, 48 - 25.001)c_1 - \max(0, 48 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 48)c_3 - \max(0, 36 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 48)c_4 - \max(0, 59.001 - 36) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 48)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[45 - c_0 - \max(0, 55 - 25.001)c_1 - \max(0, 55 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 55)c_3 - \max(0, 54 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_4 - \max(0, 59.001 - 54) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_5]^2 \\
& +[57 - c_0 - \max(0, 45 - 25.001)c_1 - \max(0, 45 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 45)c_3 - \max(0, 48 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_4 - \max(0, 59.001 - 48) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_5]^2 \\
& +[50 - c_0 - \max(0, 57 - 25.001)c_1 - \max(0, 57 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 57)c_3 - \max(0, 55 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_4 - \max(0, 59.001 - 55) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_5]^2 \\
& +[62 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 45 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 45) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[44 - c_0 - \max(0, 62 - 25.001)c_1 - \max(0, 62 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 62)c_3 - \max(0, 57 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 62)c_4 - \max(0, 59.001 - 57) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 62)c_5]^2 \\
& +[64 - c_0 - \max(0, 44 - 25.001)c_1 - \max(0, 44 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 44)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 44)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 44)c_5]^2 \\
& +[43 - c_0 - \max(0, 64 - 25.001)c_1 - \max(0, 64 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 64)c_3 - \max(0, 62 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 64)c_4 - \max(0, 59.001 - 62) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 64)c_5]^2 \\
& +[52 - c_0 - \max(0, 43 - 25.001)c_1 - \max(0, 43 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 43)c_3 - \max(0, 44 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 43)c_4 - \max(0, 59.001 - 44) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 43)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[38 - c_0 - \max(0, 52 - 25.001)c_1 - \max(0, 52 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 52)c_3 - \max(0, 64 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 52)c_4 - \max(0, 59.001 - 64) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 52)c_5]^2 \\
& +[59 - c_0 - \max(0, 38 - 25.001)c_1 - \max(0, 38 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 38)c_3 - \max(0, 43 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_4 - \max(0, 59.001 - 43) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_5]^2 \\
& +[55 - c_0 - \max(0, 59 - 25.001)c_1 - \max(0, 59 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 59)c_3 - \max(0, 52 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_4 - \max(0, 59.001 - 52) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_5]^2 \\
& +[41 - c_0 - \max(0, 55 - 25.001)c_1 - \max(0, 55 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 55)c_3 - \max(0, 38 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_4 - \max(0, 59.001 - 38) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 55)c_5]^2 \\
& +[53 - c_0 - \max(0, 41 - 25.001)c_1 - \max(0, 41 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 41)c_3 - \max(0, 59 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 41)c_4 - \max(0, 59.001 - 59) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 41)c_5]^2 \\
& +[49 - c_0 - \max(0, 53 - 25.001)c_1 - \max(0, 53 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 53)c_3 - \max(0, 55 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 53)c_4 - \max(0, 59.001 - 55) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 53)c_5]^2 \\
& +[34 - c_0 - \max(0, 49 - 25.001)c_1 - \max(0, 49 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 49)c_3 - \max(0, 41 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 49)c_4 - \max(0, 59.001 - 41) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 49)c_5]^2 \\
& +[35 - c_0 - \max(0, 34 - 25.001)c_1 - \max(0, 34 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 34)c_3 - \max(0, 53 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 34)c_4 - \max(0, 59.001 - 53) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 34)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[54 - c_0 - \max(0, 35 - 25.001)c_1 - \max(0, 35 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 35)c_3 - \max(0, 49 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 35)c_4 - \max(0, 59.001 - 49) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 35)c_5]^2 \\
& +[45 - c_0 - \max(0, 54 - 25.001)c_1 - \max(0, 54 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 54)c_3 - \max(0, 34 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_4 - \max(0, 59.001 - 34) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_5]^2 \\
& +[68 - c_0 - \max(0, 45 - 25.001)c_1 - \max(0, 45 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 45)c_3 - \max(0, 35 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_4 - \max(0, 59.001 - 35) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 45)c_5]^2 \\
& +[38 - c_0 - \max(0, 68 - 25.001)c_1 - \max(0, 68 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 68)c_3 - \max(0, 54 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 68)c_4 - \max(0, 59.001 - 54) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 68)c_5]^2 \\
& +[50 - c_0 - \max(0, 38 - 25.001)c_1 - \max(0, 38 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 38)c_3 - \max(0, 45 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_4 - \max(0, 59.001 - 45) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 38)c_5]^2 \\
& +[60 - c_0 - \max(0, 50 - 25.001)c_1 - \max(0, 50 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 50)c_3 - \max(0, 68 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_4 - \max(0, 59.001 - 68) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 50)c_5]^2 \\
& +[39 - c_0 - \max(0, 60 - 25.001)c_1 - \max(0, 60 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 60)c_3 - \max(0, 38 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 60)c_4 - \max(0, 59.001 - 38) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 60)c_5]^2 \\
& +[59 - c_0 - \max(0, 39 - 25.001)c_1 - \max(0, 39 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 39)c_3 - \max(0, 50 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 39)c_4 - \max(0, 59.001 - 50) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 39)c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[40 - c_0 - \max(0, 59 - 25.001)c_1 - \max(0, 59 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 59)c_3 - \max(0, 60 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_4 - \max(0, 59.001 - 60) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 59)c_5]^2 \\
& +[57 - c_0 - \max(0, 40 - 25.001)c_1 - \max(0, 40 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 40)c_3 - \max(0, 39 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 40)c_4 - \max(0, 59.001 - 39) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 40)c_5]^2 \\
& +[54 - c_0 - \max(0, 57 - 25.001)c_1 - \max(0, 57 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 57)c_3 - \max(0, 59 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_4 - \max(0, 59.001 - 59) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 57)c_5]^2 \\
& +[23 - c_0 - \max(0, 54 - 25.001)c_1 - \max(0, 54 - 60.001)c_2 \\
& \quad - \max(0, 60.001 - 54)c_3 - \max(0, 40 - 59.001) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_4 - \max(0, 59.001 - 40) \\
& \quad * \max(0, 60.001 - 54)c_5]^2
\end{aligned}$$

Maksimum fonksiyonları hesaplanırsa:

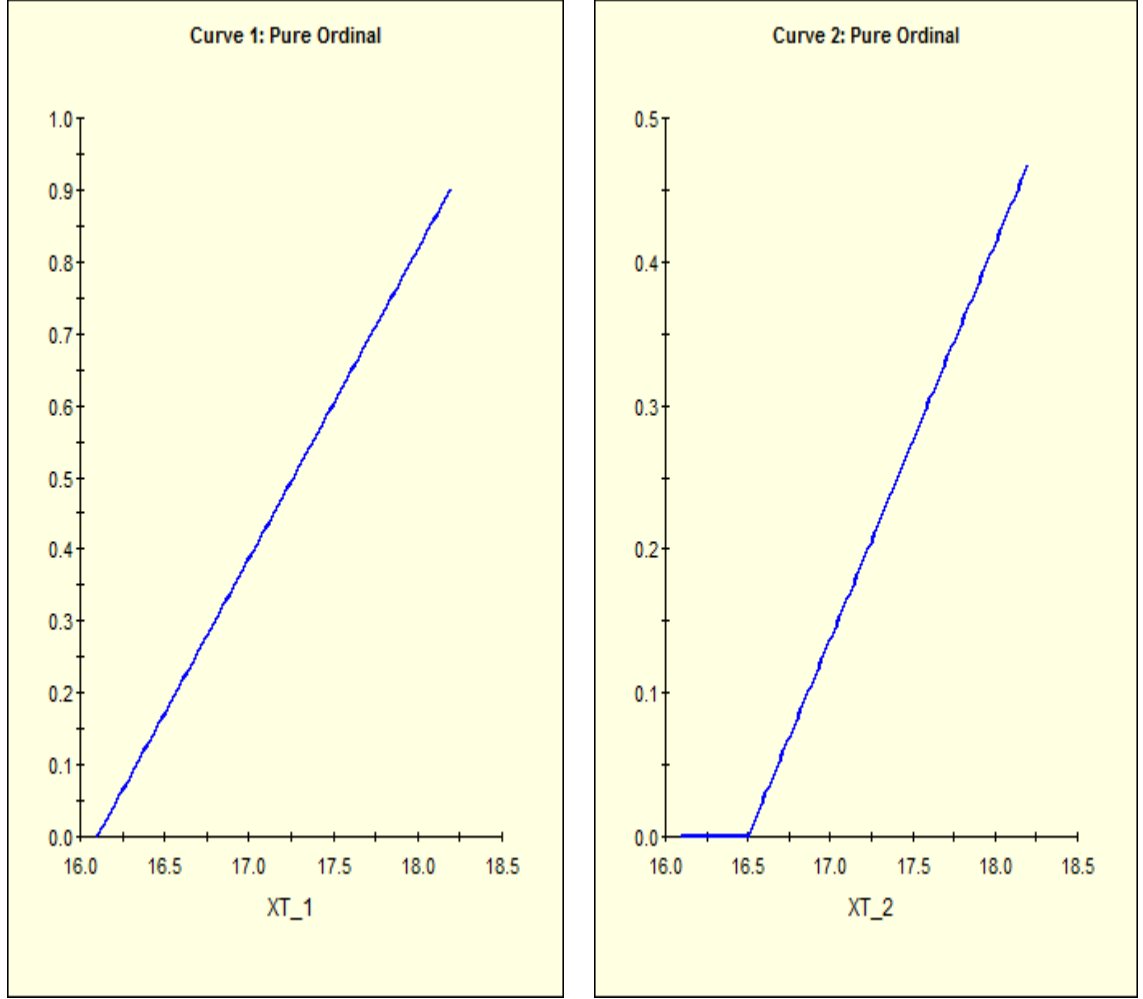
$$\begin{aligned}
& \sum_{\tau=1}^n (x_{\tau} - \mathbf{c}^T \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_{\tau-k}))^2 \\
& = [64 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 792.058c_5]^2 \\
& + [55 - c_0 - 38.999c_1 - 3.999c_2]^2 \\
& + [41 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 105.026c_5]^2 \\
& + [59 - c_0 - 15.999c_1 - 19.001c_3 - c_4 - 94.986c_4]^2 \\
& + [48 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 4.005c_5]^2 \\
& + [71 - c_0 - 22.999c_1 - 12.001c_3 - 216.03c_5]^2 \\
& + [35 - c_0 - 45.999c_1 - 10.999c_2]^2 \\
& + [57 - c_0 - 9.999c_1 - 25.001c_3 - 275.036c_5]^2 \\
& + [40 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 36.009c_4]^2 \\
& + [58 - c_0 - 14.999c_1 - 20.001c_3 - 480.044c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[44 - c_0 - 32.999c_1 - 2.001c_3 - 4.004c_5]^2 \\
&+[80 - c_0 - 18.999c_1 - 16.001c_3 - 304.035c_5]^2 \\
&+[55 - c_0 - 54.999c_1 - 19.999c_2]^2 \\
&+[37 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 75.020c_5]^2 \\
&+[74 - c_0 - 11.999c_1 - 23.001c_3 - 482.998c_4]^2 \\
&+[51 - c_0 - 48.999c_1 - 13.999c_2]^2 \\
&+[57 - c_0 - 25.999c_1 - 9.001c_3 - 198.031c_5]^2 \\
&+[50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 45.012c_4]^2 \\
&+[60 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 80.018c_5]^2 \\
&+[45 - c_0 - 39.999c_1 - 0.001c_3 - 0.002c_5]^2 \\
&+[57 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 135.024c_5]^2 \\
&+[50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 2.998c_4]^2 \\
&+[45 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 140.024c_5]^2 \\
&+[25 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 30.017c_5]^2 \\
&+[59 - c_0 - 35.001c_3 - 315.044c_5]^2 \\
&+[50 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 14.015c_5]^2 \\
&+[71 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 340.044c_5]^2 \\
&+[56 - c_0 - 45.999c_1 - 10.999c_2]^2 \\
&+[74 - c_0 - 30.999c_1 - 4.001c_3 - 36.013c_5]^2 \\
&+[50 - c_0 - 48.999c_1 - 13.999c_2]^2 \\
&+[58 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 30.013c_5]^2 \\
&+[45 - c_0 - 32.999c_1 - 2.001c_3 - 30.013c_4]^2 \\
&+[54 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 135.024c_5]^2 \\
&+[36 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 6.007c_5]^2 \\
&+[54 - c_0 - 10.999c_1 - 24.001c_3 - 336.038c_5]^2 \\
&+[48 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 30.011c_5]^2 \\
&+[55 - c_0 - 22.999c_1 - 12.001c_3 - 276.035c_5]^2 \\
&+[45 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 25.01c_5]^2 \\
&+[57 - c_0 - 19.999c_1 - 15.001c_3 - 165.026c_5]^2 \\
&+[50 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 12.007c_5]^2 \\
&+[62 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 140.024c_5]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[44 - c_0 - 36.999c_1 - 1.999c_2]^2 \\
&+[64 - c_0 - 18.999c_1 - 16.001c_3 - 144.025c_5]^2 \\
&+[43 - c_0 - 38.999c_1 - 3.999c_2]^2 \\
&+[52 - c_0 - 17.999c_1 - 17.001c_3 - 255.032c_5]^2 \\
&+[38 - c_0 - 26.999c_1 - 8.001c_3 - 39.997c_4]^2 \\
&+[59 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 352.038c_5]^2 \\
&+[55 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3 - 7.008c_5]^2 \\
&+[41 - c_0 - 29.999c_1 - 5.001c_3 - 105.026c_5]^2 \\
&+[53 - c_0 - 15.999c_1 - 19.001c_3 - 0.019c_5]^2 \\
&+[49 - c_0 - 27.999c_1 - 7.001c_3 - 28.011c_5]^2 \\
&+[34 - c_0 - 23.999c_1 - 11.001c_3 - 198.029c_5]^2 \\
&+[35 - c_0 - 8.999c_1 - 26.001c_3 - 156.032c_5]^2 \\
&+[54 - c_0 - 9.999c_1 - 25.001c_3 - 250.035c_5]^2 \\
&+[45 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 150.031c_5]^2 \\
&+[68 - c_0 - 19.001c_1 - 15.001c_3 - 360.039c_5]^2 \\
&+[38 - c_0 - 42.999c_1 - 7.999c_2]^2 \\
&+[50 - c_0 - 12.999c_1 - 22.001c_3 - 308.036c_5]^2 \\
&+[60 - c_0 - 24.999c_1 - 10.001c_3 - 89.999c_4]^2 \\
&+[39 - c_0 - 34.999c_1 - 0.001c_3 - 0.021c_5]^2 \\
&+[59 - c_0 - 13.999c_1 - 21.001c_3 - 189.030c_5]^2 \\
&+[40 - c_0 - 33.999c_1 - 1.001c_3]^2 \\
&+[57 - c_0 - 14.999c_1 - 20.001c_3 - 400.04c_5]^2 \\
&+[54 - c_0 - 31.999c_1 - 3.001c_3 - 0.003c_5]^2 \\
&+[23 - c_0 - 28.999c_1 - 6.001c_3 - 114.025c_5]^2
\end{aligned}$$

EK 3:

CPCR Verisinin ASTAR Denklemi için Grafiksel gösterimler:

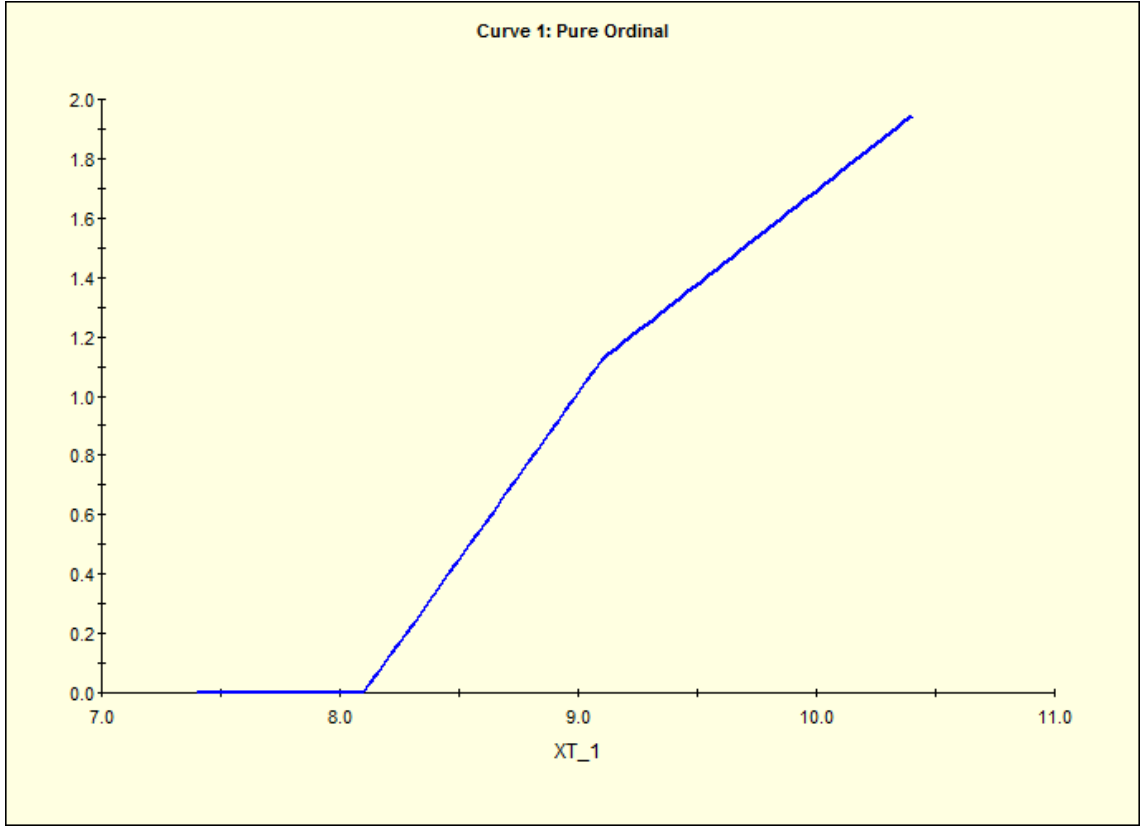


CPCR verisi için bağımlı değişken X_t ile bağımsız değişken X_{t-1} ve X_{t-2} arasındaki ilişki

X_{t-1}	X_{t-2}
100,00	48,77

CPCR verisi için değişkenlerin önemi

CPVR Verisinin ASTAR Denklemi için Grafiksel gösterimler:



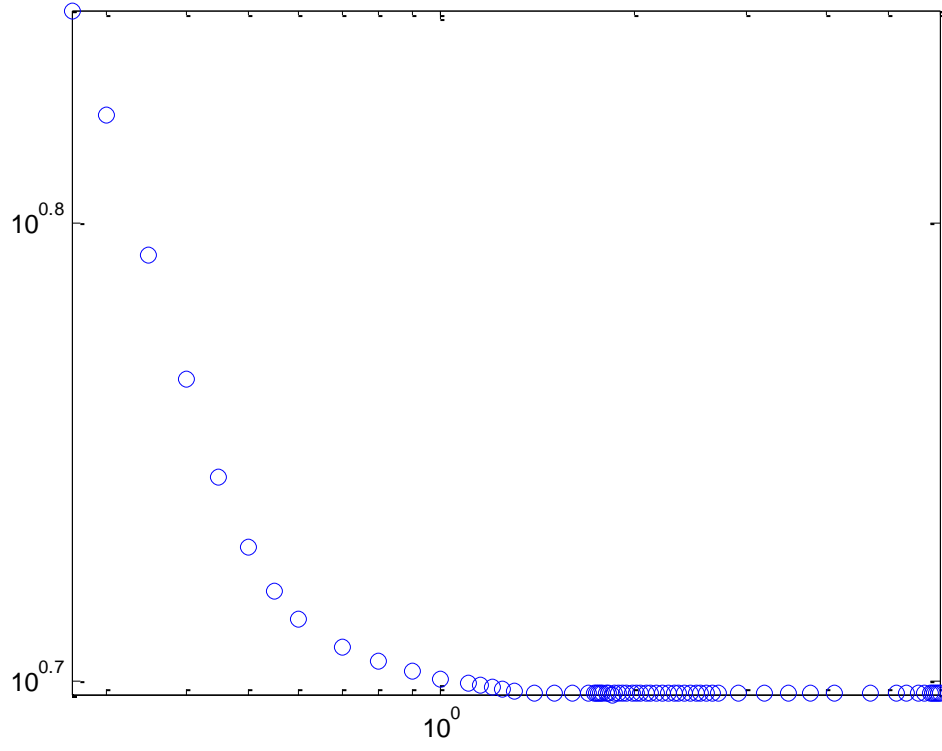
CPVR verisi için bağımlı değişken X_t ile bağımsız değişken X_{t-1} arasındaki ilişki

$$X_{t-1}$$

100,00 |||

CPVR verisi için değişken önemi

CPVR Verisinin C-ASTAR Denklemi için log-log Grafiği:



CPVR verisi için log-log grafiği

EK 4:

\sqrt{M} Değerleri:

	\sqrt{M}		\sqrt{M}		\sqrt{M}		\sqrt{M}
1.	0.265	8.	0.6	15.	1.25	22.	1.9
2.	0.3	9.	0.7	16.	1.3	23.	2
3.	0.35	10.	0.8	17.	1.4	24.	2.1
4.	0.4	11.	0.9	18.	1.5	25.	2.2
5.	0.45	12.	1	19.	1.6	26.	2.3
6.	0.5	13.	1.1	20.	1.7		
7.	0.55	14.	1.2	21.	1.8		

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Adana’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi normal okullarda, lise öğrenimimi Anadolu lisesinde tamamladım. 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandım ve 2006 yılında mezun oldum. 2006 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Orta Öğretim Fen-Matematik Alan Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans Programı’nı kazandım ve 1 dönem devam ettikten sonra kaydımı sildirerek 2007 yılında halen görev yapmakta olduğum Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. 2008 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans yapmaya hak kazandım.

Seçil TOPRAK