

BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ❖ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE UÇ KÜTLE EKLENTİLİ
KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ**



DOKTORA TEZİ

HİLAL DOĞANAY KATI

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

MAYIS 2018

BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ❖ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE UÇ KÜTLE EKLENTİLİ
KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ**

DOKTORA TEZİ

**HİLAL DOĞANAY KATI
(142080201)**

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. HAKAN GÖKDAĞ

MAYIS 2018

BTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142080201 numaralı Doktora Öğrencisi Hilal DOĞANAY KATI, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE UÇ KÜTLE EKLENTİLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Hakan GÖKDAĞ**
Bursa Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Osman KOPMAZ**
Uludağ Üniversitesi

Prof. Dr. Bahattin KANBER
Bursa Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Selçuk KARAGÖZ
Bursa Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Sevda TELLİ ÇETİN
Uludağ Üniversitesi

Savunma Tarihi : 24 Mayıs 2018

FBE Müdürü : **Doç. Dr. Murat ERTAŞ**
Bursa Teknik Üniversitesi/...../.....

İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Öğrencinin Adı Soyadı: Hilal DOĞANAY KATI

İmzası :

X X X X



Eşime ve aileme,

ÖNSÖZ

Doktora başladığım andan itibaren bana yol gösteren, değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana çözüm üreten danışmanım Sayın Doç. Dr. Hakan GÖKDAĞ'a teşekkür ederim.

Doktora sürecimin başlamasıyla birlikte yeni bir şehire alışma aşamasında beni ve eşimi yalnız bırakmayan, Bursadaki ailemiz olan çok değerli FAKI ailesine teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu şehirle birlikte hayatıma giren, beni bir an olsun yalnız bırakmayan ve bu süreçte desteklerini hep hissettiğim, bana neşe veren çok değerli dostlarım Duygu Gazioğlu RÜZGAR, Gözde GEÇİM ve Mehtap ÖZEKMEKÇİ'ye çok teşekkür etmek istiyorum. Doktora tezimin en zorlu sürecinde hep yanımda olan, bir an olsun desteğini esirgemeyen arkadaşım Deniz BİRLİK KAYI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Tabi ki teşekkürlerin en büyüğü bizleri büyüten, eğitim hayatımız boyunca sürekli destekleyen ve bizimle gurur duyan annem Gülhanım DOĞANAY'a aittir. Yine bu süreçte beni yalnız bırakmayan aileme, kardeşlerime, özellikle ablam Songül DOĞANAY'a ayrıca çok teşekkür ederim. Aynı şehirde olamasak bile manevi desteğini yanımda her an hissettiğim manevi ablam Hülya TOPRAK'a çok teşekkür ederim. Son olarak, hayatımın son 10 yılında bir an olsun beni yalnız bırakmayan, benimle birlikte stresli bir hayatı yaşayan, yeri geldiğinde benimle saatlerce okulda kalan ama bir an olsun şikayet etmeyen biricik eşim Sefa KATI'ya ne kadar teşekkür etsem azdır.

Mayıs 2018

Hilal DOĞANAY KATI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR	viii
SEMBOLLER	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ŞEKİL LİSTESİ	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Araştırması	2
1.1.1 Uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri	2
1.1.2 Değişken kesitli kiriş-uç kütle sistemleri	7
1.1.3 Diferansiyel ve multi-step diferansiyel transform metodunun titreşim problemlerine uygulanması	7
1.2 Tez Çalışmasının İçeriği	9
2. MATEMATİKSEL MODELLEME	11
2.1 Hareket Denklemlerinin Çıkarılması.....	11
2.2 EB Kiriş Modeli için Hareket Denklemlerinin Çıkarılması.....	15
2.3 Timoshenko Kiriş Modeli için Hareket Denklemlerinin Çıkarılması.....	20
3. ANALİTİK ÇÖZÜM	24
3.1 EB Kiriş Modelinin Analitik Çözümü	24
3.2 Timoshenko Kiriş Modelinin Analitik Çözümü.....	26
4. SAYISAL ÇÖZÜM	36
4.1 Diferansiyel Transform Metodu (DTM)	36
4.1.1 EB kiriş modelinin DTM çözümü.....	38
4.1.2 Timoshenko kiriş modelinin DTM çözümü.....	41
4.2 Multi-step Diferansiyel Transform Metodu (MDTM)	43
4.2.1 EB kiriş modelinin MDTM çözümü	44
4.2.2 Timoshenko kiriş modelinin MDTM çözümü	50
5. SE MODELİ	57
6. DENEYSEL MODAL ANALİZ	61
6.1 Frekans Cevap Fonksiyonu Ölçümü	61
6.1.1 Tepe tutma metodu.....	62
6.2 Ölçüm Sisteminin Elemanları	63
6.3 Yazılım Ayarları.....	66
6.4 Deney Düzeneği	67
6.4.1 Analitik çözüm sonuçlarının karşılaştırılması için deneysel model.....	67
6.4.2 DTM sonuçlarını karşılaştırmak için deneysel model	70
6.4.3 Değişken kesitli kiriş modeli.....	73
7. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	79

7.1 Analitik Sonuçların ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması	79
7.1.1 Doğal frekanslar	79
7.1.2 Mod şekilleri	80
7.2 DTM Sonuçlarının ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması	87
7.2.1 Doğal frekanslar	88
7.2.2 Mod şekilleri	88
7.3 MDTM Sonuçlarının ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması.....	92
7.3.1 EB kiriş modeli	92
7.3.1.1 Doğal frekanslar	92
7.3.1.2 Mod Şekilleri.....	97
7.3.2 Timoshenko kiriş modeli	102
7.3.2.1 Doğal frekanslar	102
7.3.2.2 Mod Şekilleri.....	103
7.4 Değerlendirme	108
KAYNAKLAR	110
EKLER	119
ÖZGEÇMİŞ.....	129

KISALTMALAR

A	: Ankastre
DTM	: Diferansiyel Transform Metodu
FCF	: Frekans Cevap Fonksiyonu
FEM	: Finite Element Method
MDTM	: Multi-step Diferansiyel Transform Metodu
S	: Serbest
SE	: Sonlu Eleman
3B	: Üç boyutlu



SEMBOLLER

E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
ρ	: Yoğunluk
v,w	: Eğilme fonksiyonları
θ	: Burulma fonksiyonu
I_1, I_2	: Kiriş alan atalet momentleri
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	: Uç kütlelerin atalet momenti bileşenleri
I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}	: Uç kütlelerin çarpım atalet momenti bileşenleri
I_p	: Birim boydaki kütle eylemsizlik momenti
ν	: Poisson oranı
t	: Zaman
x	: Konum
ω	: Doğal frekans
A	: Kesit alanı
L	: Uzunluk
M	: Uç kütle
J	: Burulma sabiti
κ	: Kayma düzeltme faktörü

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Önemli bazı DTM dönüşüm kuralları.	37
Çizelge 4.2 : Sınır şartları için DTM dönüşüm kuralları.	37
Çizelge 6.1 : Titreşim ölçüm elemanlarının teknik özellikleri.	65
Çizelge 6.2 : Uniform kesitli kiriş sisteminde uç kütle geometri özellikleri.	68
Çizelge 6.3 : A sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar (L=0.5m).	71
Çizelge 6.4 : Kiriş geometri ve malzeme özellikleri.	73
Çizelge 6.5 : Değişken kesitli kiriş sisteminde uç kütle geometri özellikleri.	73
Çizelge 6.6 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar (L=0.5m).	76
Çizelge 6.7 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar (L=0.5m).	77
Çizelge 7.1 : Farklı metodlarla elde edilen kiriş-uç kütle sisteminin A ve S sınır şartlarında doğal frekanslarının (Hz) karşılaştırılması.	79
Çizelge 7.2 : Timoshenko kiriş modeli için A ve S sınır şartlarında doğal frekansların (Hz) karşılaştırılması.	88
Çizelge 7.3 : A ve S sınır şartları altında MDTM ve ANSYS doğal frekanslarının karşılaştırılması.	93
Çizelge 7.4 : A sınır şartı için kiriş uzunluğunun doğal frekanslar (Hz) üzerindeki etkisi.	93
Çizelge 7.5 : Uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1 m).	95
Çizelge 7.6 : Uç kütle boyutlarının doğal frekans üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve z sabit).	96
Çizelge 7.7 : Uç kütle boyutlarının doğal frekans üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve y sabit).	96
Çizelge 7.8 : Kesit daralma oranının (c_h) doğal frekanslar üzerindeki etkisi.	97
Çizelge 7.9 : Terim sayısı ile doğal frekansların (Hz) yakınsaması.	102
Çizelge 7.10 : A ve S sınır şartına göre Y ve Z eksenlerindeki ilk üç doğal frekansın (Hz) karşılaştırılması.	103
Çizelge A.1 : Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri.	119
Çizelge A.2 : Literatürdeki bazı non-uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri.	127

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Kiriş-uç kütle probleminin çözümü için akış şeması	10
Şekil 2.1 : Kiriş-uç kütle sisteminin şematik çizimi	12
Şekil 2.2 : Koordinat sistemlerinin birbirine göre konumları.....	13
Şekil 5.1 : (a) Sabit ve (b) değişken kesitli 0.5m boyundaki kiriş-uç kütle sistemlerinin ANSYS ortamındaki mesh görüntüleri.	57
Şekil 5.2 : Üç boyutlu SOLID187 eleman geometrisi (Lengvarsk ve diğ., 2013)	58
Şekil 5.3 : Kiriş üzerinde path tanımlaması.....	58
Şekil 5.4 : Değişken kesitli A kiriş modeli için Z eksenindeki ilk üç mod şekli: (a) 1. mod (72.813 Hz) (b) 2. mod (444.090 Hz) (c) 3. mod (851.980 Hz)	59
Şekil 5.5 : Değişken kesitli A kiriş için Y eksenindeki ilk üç mod şekli (a) 1. mod (82.630 Hz) (b) 2. mod (439.320 Hz) (c) 3. mod (1146.800 Hz)	60
Şekil 6.1 : Tepe tutma (<i>Peak-picking</i>) yöntemi (He ve Fu, 2001).....	63
Şekil 6.2 : Sarsıcı kullanılması halinde ölçüm sisteminin elemanları (He ve Fu, 2001)	64
Şekil 6.3 : Modal çekiç uç seçenekleri ve bunların özellikleri (https://endevco.com)	64
Şekil 6.4 : Deney setinin şematik çizimi	65
Şekil 6.5 : Darbe çekici, ivmeölçer ve altlığı	66
Şekil 6.6 : Uniform kesitli kiriş-uç kütle sisteminin geometrik özellikleri	68
Şekil 6.7 : Deney Düzenegi	68
Şekil 6.8 : A kiriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca	69
Şekil 6.9 : S kiriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca.....	70
Şekil 6.10 : Kiriş boyu $L=0.5m$ olması durumunda A kiriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca	71
Şekil 6.11 : A sınır şartı durumunda Z eksenini boyunca ivme ölçerin (a) 16 ve (b) 14 nolu ölçüm noktalarına bağlanması durumunda FCF eğrileri	72
Şekil 6.12 : Uç eklentili değişken kesitli kiriş	73
Şekil 6.13 : Değişken kesitli kiriş için deney düzenegi: (a) A sınır şartı (b) S sınır şartı.....	74
Şekil 6.14 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki FCF eğrileri: (a) Frekans aralığı 0-1 kHz (b) Frekans aralığı 0- 2.5 kHz.....	75
Şekil 6.15 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki FCF eğrileri .	76
Şekil 6.16 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartında Z eksenindeki (a) FCF eğrileri ve (b) bunların sanal kısımları	77
Şekil 6.17 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartında Y eksenindeki FCF eğrileri .	78
Şekil 7.1 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 1. modun düzeltilmiş hali	81
Şekil 7.2 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 2. mod (b) 3. mod.....	82

Şekil 7.3 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod.....	83
Şekil 7.4 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 3. mod (b) 3. modun düzeltilmiş hali	84
Şekil 7.5 : Uniform kesitli kiriş için S sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	85
Şekil 7.6 : Uniform kesitli kiriş için S sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	86
Şekil 7.7 : Uniform kesitli S kiriş durumunda Y eksenindeki deney için kuvvet ve ivme sinyallerinin otospektrumu.....	87
Şekil 7.8 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için A sınır şartında Z eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	89
Şekil 7.9 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için A sınır şartında Y eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	90
Şekil 7.10 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için S sınır şartında Z eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	91
Şekil 7.11 : Değişken kesitli EB kirişi için A sınır şartında Y-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	98
Şekil 7.12 : Değişken kesitli EB kirişi için A sınır şartında Z-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	99
Şekil 7.13 : Değişken kesitli EB kirişi için S sınır şartında Y-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod.....	100
Şekil 7.14 : Değişken kesitli EB kirişi için S sınır şartında Z-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod	101
Şekil 7.15 : A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	104
Şekil 7.16 : A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	105
Şekil 7.17 : S sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	106
Şekil 7.18 : S sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod	107

DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE UÇ KÜTLE EKLENTİLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Kiriş-uç kütle sistemlerinin dinamik analizi robot kolları ve manipulatörler gibi mekanik sistemlerin başarılı bir şekilde tasarlanması açısından oldukça önemlidir. Literatürdeki birçok çalışmada bu sistemlerin serbest titreşimini analitik olarak çözmek için az sayıda değişken kesitli giriş modeli dikkate alınmış, çoğunlukla sabit kesitli giriş modeli kullanılmıştır. Ayrıca, birçok çalışmada uç kütle noktasal, giriş ve uç kütle koordinat merkezlerinin de çakışık olduğu kabul edilmiştir. Bu çalışmada burulmaya ve iki farklı düzlemde eğilmeye maruz, giriş ve uç kütle merkezlerinin çakışık olmadığı ve uç kütle üç boyutlu (3B) olarak kabul edildiği bir sistem ele alınmıştır. Matematiksel modelleme yapılırken Euler-Bernoulli (EB) ve Timoshenko giriş teorileri kullanılmıştır. Ayrıca girişin malzeme ve geometri özelliklerinin değişken, girişin sol ucunun ankastre (A) veya serbest (S) olabileceği dikkate alınmıştır. Enerji yaklaşımını temel alan Hamilton prensibi ile sistemin hareket denklemleri ve muhtemel tüm sınır şartları elde edilmiştir. Hareket denklemleri öncelikle sabit kesitli giriş için analitik olarak çözülmüştür. Aynı girişin sonlu elemanlar (SE) yöntemi ve deneysel modal analiz ile elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Hareket denklemleri yüksek mertebeden diferansiyel denklemler içerdiğinden bunların analitik olarak çözümlenmesi özellikle değişken kesitli giriş için oldukça zordur. Bu sebeple bu çalışmada son yıllarda ilgi çeken Diferansiyel Transform Metodu (DTM) uygulanmıştır. Timoshenko giriş teorisine göre elde edilen sonuçlar yine SE ve deneysel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Son olarak, değişken kesitli giriş modelinin serbest titreşim analizi için DTM'nin yetersiz olmasından dolayı diğer bir yarı-nümerik yöntem olan Multi-Step Diferansiyel Transform Metodu (MDTM) uygulanmıştır. Timoshenko giriş teorisine göre MDTM ile elde edilen sonuçlar SE ve deney verileriyle doğrulanmıştır. Fakat EB giriş teorisine göre elde edilen sonuçlar, bu teoriye uygun boyuttaki değişken kesitli numunenin hazırlanmasının zorluğundan dolayı, sadece SE yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, giriş uzunluğu, uç kütle boyutları, kesit daralma oranı (taper ratio) gibi parametrelerin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sonuç olarak DTM ve MDTM ile elde edilen sonuçların SE ve deneysel modal analiz yöntemleriyle uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Euler-Bernoulli, Timoshenko, Diferansiyel Transform Metodu, Modal Analiz, ANSYS, Doğal frekans ve mod şekli

VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS WITH TIP MASS USING DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

SUMMARY

Dynamic analysis of beam-tip mass systems is very important for the successful design of mechanical systems such as robot arms and manipulators. In the relevant literature, uniform beams have been mostly considered for the free vibration analysis of these systems whereas the number of studies using nonuniform beam is limited. Furthermore, center of tip mass is in general coincided with the attachment point of the beam and the tip mass is assumed to be a point mass. In this study, beam with a three dimensional (3D) rigid mass whose center of gravity is not coincided with the attachment point of the beam and subject to both torsional and flexural deformations in two orthogonal planes is considered. Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models have been used for the mathematical modelling of the system. In addition, it is assumed that the material and geometry properties of the beam is variable along the beam and the left side of the beam is taken account to be clamped or free. Using Hamilton's principle based on energy approach, the equations of motion of the system with the possible boundary conditions are derived. First, equations of motion were solved analytically for the uniform beam. The natural frequencies and mode shapes of the uniform beam-tip mass systems were obtained and compared with those by finite element method (FEM) and experimental modal analysis. The analytical solution of the beam-tip mass systems is not easy, especially for the non-uniform systems, because the governing equations consist of high-order differential equations. For this reason, the Differential Transform Method (DTM) has been applied. DTM results obtained according to the Timoshenko beam theory were compared with both FEM and experimental results. Finally, another new and semi-numerical method called Multi-Step Differential Transform Method (MDTM) is used for free vibration analysis of non-uniform beam-tip mass system due to the deficiency of DTM for this system. The MDTM results of Timoshenko beam theory were verified by the FEM and experimental results. However, the results obtained accordingly EB beam theory were only compared with the FEM results because of the difficulty of preparing the non-uniform test sample at the appropriate length for this theory. Furthermore, the effects of the tip mass dimensions, beam length and taper ratio on the natural frequencies are examined for the EB beam theory. Consequently, it is observed that the results obtained by DTM and MDTM are compatible with FEM and experimental results.

Keywords: Euler-Bernoulli, Timoshenko, Differential Transform Method, Modal Analysis, ANSYS, Natural frequencies and mode shapes.

1. GİRİŞ

Uç kütle eklentili kiriş sistemlerinin eğilme ve burulma titreşimleri birçok mühendislik uygulamasında (robot kolları, trafik ışıkları, manipulatörler, türbin kanatları vb.) görülmektedir. Bazı kirişlerde eğilme ve burulma hareketi bağlantılıdır. Bunun sebebi kiriş kesitinin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakışık olmamasıdır. Başka bir ifadeyle kiriş tek simetri eksenine sahip ya da kiriş malzemesi anizotropik ise bu iki eksen farklı olabilir. Bu durum burulma ekseninin elastik ekseninden farklı olmasına yol açar. Böylece eğilme titreşimi ile birlikte burulma titreşimi de ortaya çıkar. Bu yapıların güvenli bir şekilde çalışması için tasarım aşamasında dinamik karakteristiklerinin (doğal frekansları ve mod şekillerinin) dikkate alınması ve bunların doğru bir şekilde belirlenmesi çok önemlidir. Bu amaçla, diferansiyel denklemlerin sayısal veya analitik çözümü esasına dayalı birçok yöntem uygulanmış ve uygulanmaya devam etmektedir. Sonlu Farklar Metodu (SFM) ve SE Metodu gibi sayısal teknikler de sıkça kullanılan araçlardır. Arka planında bu tür yöntemleri kullanan paket programlar (ANSYS, ABACUS vs) ile çok serbestlik dereceli modeller oluşturmak ve güvenilir sonuçlar elde etmek mümkündür.

Teknolojinin ilerlemesiyle hızlı işlem yapabilen bilgisayarlar gelişmiş ve buna bağlı olarak karmaşık mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerin geliştirilmesinde de bir hareketlilik olmuştur. Daha basit algoritmalarla daha hızlı ve daha az hata oranı ile kabul edilebilir doğru sonuçlara ulaşmak için son yıllarda sıklıkla kullanılan nümerik/yarı-analitik olan DTM ve MDTM geliştirilen yöntemlerden bazılarıdır. Metod genel olarak Taylor serisi açılımına dayanmakta, diferansiyel denklemlerin seriye açılmasıyla polinomlar şeklinde çözüm önermekte ve böylece diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmektedir.

Kirişler tek boyutlu olarak modellenen yapısal elemanlardır. Gerçekte bütün yapılar üç boyutlu olup bu yapıdaki her bir nokta -eğer sınırlandırılmamış ise- karşılıklı ortogonal üç eksen boyunca hareket eder. EB ve Timoshenko kiriş teorileri problemlere basit ve kabul edilebilir mühendislik yaklaşımları sağladığından en çok kullanılan teorilerdir. Fakat EB kiriş teorisi yüksek modlardaki doğal frekanslar ve

ince olmayan kirişlerin doğal frekansları için doğru tahminler vermeyebilir. Timoshenko kiriş teorisi ise hem dönme hem de kaymanın etkisini içermekte, yüksek modlarda ve kalın kirişlerde daha iyi sonuçlar vermektedir.

1.1 Literatür Araştırması

Kirişlerin titreşimi problemi makine, inşaat mühendisliği ve havacılıkta robot sistemleri, helikopter ve türbin kanatları, uzay araçları ve mekanizmaları, binalar ve yüksek kuleler, manipulatörler, anten yapıları, trafik ışıkları gibi uygulama alanları bakımından geniş çapta çalışılmıştır. Bu tür sistemlerin titreşim analizi yapılırken asıl taşıyıcı yapı olan kiriş sabit ya da değişken kesitli olarak modellenmekte ve bunun için genellikle EB ya da Timoshenko kiriş teorileri kullanılmaktadır. Konuyla ilgili çalışmalarda kirişlere uç kütle, kütle-yay sistemi ya da sönüm elemanı eklenerek gerçek hayattaki titreşim problemlerine çözümler üretilmiştir. Birçok araştırmacı uç kütle eklentili kiriş sistemlerinde uç kütleinin doğal frekanslar ve dinamik davranışları üzerindeki etkisini incelemiştir. Ayrıca helikopter rotorlarının frekansını ayarlamak, helikopter ya da türbin kanatlarının hareketinin esnekliğini arttırmak gibi amaçlarla uç kütle eklentileri dikkate alınmıştır (Kuo ve diğ., 1992). Literatürde uç kütleli kirişler üzerine yapılan fazla sayıda çalışma olup tüm çalışmalara değinilmemiş, bir fikir vermek amacıyla Ek A'da bu çalışmalarda dikkate alınan modellerin şematik çizimleri verilmiştir. Ele alınan çalışmalar iki kısma ayrılarak incelenmiştir: uniform kesitli ve değişken kesitli kiriş-uç kütle sistemleri. Ek olarak, titreşim problemlerinin DTM ile çözülmesi üzerine ayrı bir literatür araştırması verilmiştir.

1.1.1 Uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Bu konudaki ilk çalışmalardan birinde (Boyce ve Handelman, 1961) uç kütleli sabit hızla dönen bir EB kirişinin enine serbest titreşimi incelenmiştir. Craig (1963) çalışmasında Boyce ve Handelman'a (1961) ait çalışmadaki kirişi ön gerilmeli (*initially stressed*) olarak ele alıp, modifiye edilmiş Reissner varyasyon teoremi ile ön gerilmeleri hesaplamış ve doğal frekans ve mod şekillerini belirlemiştir. Daha sonraki çalışmaların bazılarında uç kütleinin yanı sıra sisteme sönüm elemanı, yay ya da kütle-yay gibi elemanlar eklenerek matematiksel modellemeler yapılmış ve bu komplike sistemlerin dinamik davranışları incelenmiştir. Lee (1976) kirişe uç kütleinin yanı sıra

dönel yay eklemiş, farklı katılık oranı, atalet momenti ve kütle durumlarında öz frekansları belirlemiştir. Laura ve diğ. (1974) mekanik kablo sistemini sabit hızla aksenal hareket eden kiriş-uç kütle sistemi olarak modellemiştir. Benzer bir çalışmada (Bhat ve Wagner, 1976) sistemde kirişin ince ve eklenti kütle kütle merkezinin kiriş eksenini üzerinde olduğu kabul edilip pertürbasyon yöntemi ile sistemin frekansları elde edilmiştir. Hoa (1979) tarafından yapılan çalışmada uç kütle eklentili dönen kiriş problemi incelenirken kütle merkezi ve kiriş uç noktasının çakışık olmadığı ele alınmış, SE modeli kullanılarak ayar açısı ve kök yarıçapının doğal frekanslara etkisi incelenmiştir.

Kiriş-uç kütle sistemleri üzerine yapılan çalışmalardan bazılarında sisteme tahrik uygulanarak (random, sinusoidal veya harmonik) titreşim analizi yapılmıştır. Konuyla ilgili ilk çalışmalardan birinde (To, 1982) EB kiriş modeli kullanılarak sisteme zeminden çeşitli tahrikler uygulanmış, eklenti kütle kütle merkezinin kiriş bağlantı noktasıyla aynı olmadığı varsayılmış, sistemin doğal frekans ve mod şekilleri elde edilmiştir. Storch ve Gates (1985) yaptığı çalışmada diğerlerinden farklı olarak uç kütle iki durumda (eş merkezli ve eksantrik) ele almış ve aksenal sabit ivmeli A kirişin enine ve burulma titreşimini incelemiştir. İlk üç frekans için analitik sonuçlar Rayleigh-Ritz metodu ile karşılaştırılmıştır. Bhat (1986) aynı metodu kullanarak uç kütle eklentili dönen bir kirişin karakteristik özelliklerini elde etmiş ve sonuçları Myklestad, genişletilmiş (*extended*) Galerkin ve SE yöntemleriyle karşılaştırmıştır. Başka bir çalışmada (Gürgöze, 1986) kirişe uç kütle kütle yanısıra dönmeye ve ötelemeye direnç gösteren (*translational*) yay ekleyerek doğal frekansları Dunkerly ve Southwell yöntemlerini birlikte kullanarak bulmuştur. Bruch ve Mitchell (1987) kiriş-uç kütle sistemini esnek robot kollarını modellemek için dikkate almış ve Timoshenko kiriş teorisini kullanarak kesme kuvveti ve dönme ataletinin hareket üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Abramowitch ve Hamburger (1991) ilk çalışmalarında Bruch ve Mitchell (1987) tarafından incelenen problemdeki uç kütle eksantrik olarak ele almış, daha sonraki çalışmalarında (Abramowitch ve Hamburger, 1992) ise bu çalışmadaki kiriş sistemine ek olarak dönmeye ve ötelemeye direnç gösteren yaylar ekleyerek titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir.

Chang (1993) kiriş-uç kütle sisteminin serbest titreşimi yerine zorlanmış titreşimiyle ilgilenmiştir. Modelde ağır uç kütle kütle yanısıra kiriş üzerine ayrıca kütle eklenmiş, histeritik sönüm uygulanmış ve kirişin sol ucuna dönmeye ve ötelemeye direnç

gösteren yaylar eklenmiştir. Yazar yine farklı olarak sistemin deterministik ve random titreşim cevabını ölçmek için modal analiz yöntemini uygulamıştır.

Günümüzde kompozit malzemeler bir çok mühendislik uygulamalarında özellikle daha hafif yapı ve mekanizmaların tasarlanmasında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu malzemeler kullanılarak yapılan ilk çalışmalardan birinde (Chandrashekara ve Bangera, 1993) uç kütle eklentili, simetrik kademeli A kompozit kirişin serbest titreşimi kayma deformasyonu, dönme ataleti ve Poisson etkileri bakımından araştırılmıştır. Ayrıca uç kütle ve malzeme özelliklerinin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Gürgöze ve diğ. (1995) kiriş üzerinde herhangi bir noktadan mesnetle destekleme yaparak uç kütleli A kiriş sisteminin titreşim analizini incelemiştir. Öncelikle analitik frekans denklemi sınır değer formülasyonu ile oluşturulmuş daha sonra yaklaşık frekans denklemi Lagrange çarpanı (*Lagrange's multiplier*) yöntemi ile çözülmüştür. Bunun yanısıra, sistemin temel frekanslarının belirlenmesi için yaklaşık bir formül Dunkerley yöntemi ile çıkarılmıştır. Bu çalışmada frekanslar çeşitli mesnet uzaklıkları ve kütle parametreleri bakımından incelenmiştir. Gürgöze (1996a, 1996b) bu çalışmaya benzer olarak kiriş sistemlerine uç kütle yanı sıra yay-kütle sistemlerini eklemiş ve yay-kütle sistemindeki küçük yer değiştirmelerin doğal frekanslar üzerindeki etkisini incelemiştir. Daha sonra Gürgöze (1998a), bu çalışmayı (Gürgöze, 1996b) sistemin aksel titreşimlerini incelemek amacıyla genişletmiştir. Başka bir çalışmada Gürgöze (1998b) kiriş-uç kütle sistemine viskoz sönüm elemanı eklemiş, doğal frekansların hassasiyetini araştırmıştır. Ayrıca diğer bir çalışmada A EB kiriş modeline viskoz sönüm elemanın eklenmesinin yanısıra kiriş basit mesnetle herhangi bir noktadan mesnetlenmiş ve harmonik olarak değişen bir kuvvete maruz bırakılmıştır (Gürgöze ve Erol, 2002).

Diğer çalışmalardan farklı olarak Cuvalci ve Ertas (1996) uç kütle titreşim sönüm elemanı görevi gören sarkaç sistemi eklemiş, tüm sistemin sinuzoidal uyarılara karşı dinamik davranışını hem teorik hem de deneysel olarak incelemiştir. Zhou (1997) çalışmada uç kütle dönmeye ve ötelemeye direnç gösteren yaylar ekleyerek sistemin matematiksel modelini elde etmiştir. Uç kısmında kütle taşıyan ve zeminden harmonik olarak uyarılan kütleli bir A kirişin periyodik davranışının incelenmesi Esmailzadeh ve Nakhaire-Jazar (1998) tarafından ele alınmıştır. Benzer bir çalışmada Esmailzadeh ve Jalili (1998) taşıyıcı yapıyı kalın bir kiriş olarak düşünüp Timoshenko

teorisini uygulamış, harmonik uyarının, uç kütle ve uç kütle-kiriş oranının ilk doğal frekans üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Birçok araştırmacının EB yada Timoshenko kiriş teorisini dikkate almasına karşın Fung ve diğ. (1998) dört farklı (Timoshenko, EB, basit-esnek (*simple-flexible*) ve rijit-cisim (*rigid-body*)) kiriş teorisini kullanarak kiriş-uç kütle sisteminin aksel hareketini incelemişlerdir. Sistemin hareket denklemleri Hamilton prensibi ile çıkarılmıştır. Kirişin bir kısmı rijit bir duvar içine yerleştirilmiş gibi, diğer kısmı ise duvar dışında serbest titreşim yapacak şekilde düşünülmüştür. Ayrıca kirişin aksel hareketine paralel bir zorlayıcı kuvvet kirişin esnek kısmına uygulanmıştır. Uç-kütle kiriş sistemlerinin diğer bir uygulama alanı açık deniz yapılarının modellenmesi olup bu konudaki ilk çalışmalardan birini Uscilowska ve Kolodziej (1998) yapmışlardır. Bu yapılar kısmen sıvıya daldırılmış, uç kısmında eksantrik kütle taşıyan EB kolonu formunda modellenmiştir. Öz (2003) tarafından yapılan benzer bir çalışmada EB teorisi kullanılarak kısmen suya gömülü ve uç kütle taşıyan sistemin enine titreşimi ele alınmış, analitik ve SE metodu ile doğal frekanslar elde edilmiştir. Su yüksekliğinin, uç kütle ve su yoğunluğunun etkileri araştırılmış, doğal frekans sonuçları Uscilowska ve Kolodziej (1998) tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Son yıllarda rastgele (random) titreşimlerin mühendislikteki uygulamalarında sürekli bir artış gözlenmektedir. Bu problemlere artan önemin sebeplerinden bazıları uzay endüstrisindeki ve roket tahrik sistemlerindeki gelişmeler ve yapıların rastgele rüzgar yükünden dolayı hasara uğramasıdır. Bu nedenle Cuvalci ve Ertas (1996) tarafından ele alınan model Cicek ve Ertas (2002) tarafından rastgele uyarılara maruz titreşim sönümleyici veya trafik işaret yapılarının modellenmesinde yeniden ele alınmış ve sistemin deneysel modal analizi yapılmıştır.

Andrew ve Shillor (2002) inceledikleri kiriş-uç kütle sisteminde uç kütle sönüm elemanı olarak ele almış ve sistemin titreşim modelini oluşturmuşlardır. Bu çalışmada uç kütle içi boş olarak düşünülmüş ve içine kum gibi tanecikli malzemenin doldurulması ile sönümleme özelliği kazandırılmıştır.

Yapılan çalışmalarda genellikle uç kütle kütle merkezi ile kiriş uç noktası çakışıktır. 2003 yılında Oguamanam eksantrik uç kütle eklentili EB kirişinin titreşimlerini incelemiştir (Oguamanam 2003). Bu çalışmada uç kütle merkezi ile kiriş uç noktası

arasında üç boyutlu bir kaçıklık olduğu kabul edilmiş ve uç kütle 3B bir cisim gibi modellenmiştir. Dolayısıyla eklentinin kütlesi yanında kütle atalet momenti bileşenlerinin de sınır şartlarında ortaya çıktığı görülmüştür. Sınır şartlarındaki bu durum kirişin eğilme ve burulma hareketleri arasında bir bağlantıya (*coupling*) sebep olmuştur. Yani normalde bu iki hareket bağımsız iken sınır şartları üzerinden bağımlı hale gelmiştir. Gökdağ ve Kopmaz (2005) ilgili sistemdeki kirişi tek simetri eksenli bir kirişle değiştirerek benzer çalışmalar yapmışlardır. Bu halde kirişin kendisi de bizatihi eğilme ve burulmanın kuplajlı (*coupled*) olduğu bir kiriştir. Yani bu iki hareket arasındaki bağlantı sadece sınır şartı üzerinden değildir. Oguamanam ve Arshad (2005) hem iki yönde eğilmenin hem de burulmanın etkisinde olan uç kütle eklentili EB kirişinin frekanslarını analitik yöntem ile elde etmişlerdir. Uç kütle kaçık merkezli düşünülmüş olmasına rağmen yapılan parametrik çalışmada sadece kiriş eksenli doğrultusundaki kaçıklık dikkate alınmıştır. Daha sonra Salarieh ve Ghorashi (2006), Oguamanam (2003) tarafından ortaya konulan modeli Timoshenko kiriş teorisini kullanarak güncellemişlerdir. Literatürde bu çalışmalara atıf yapılan başka çalışmalar (Vakil ve diğ., 2013; Ansari ve diğ., 2009, 2011) da mevcuttur, fakat hiçbirinde uç kütlelerin önceki çalışmalardaki gibi modellenmediği görülmektedir.

Son on yıl içerisindeki çalışmalara bakıldığında zaman uç-kütle eklentili kiriş problemlerinin mühendislik uygulamalarında (özellikle robot kolları, manipulatörler ve anten yapıları) kullanımının arttığı görülmektedir. Yaman (2007) çalışmasında farklı yönelim açılara (*orientation*) sahip uç eklentili kiriş sisteminin analitik çözümünü Adomian Decomposition Metodu ile yapmış, doğal frekans ve mod şekillerini elde etmiş ve SE metodu (ANSYS) ile kıyaslama yapmıştır. Dönen kirişler üzerine yapılan çalışmalarda genellikle kirişin sönümsüz olduğu kabul edilmiş, bu yüzden Gürgöze ve Zeren (2009) içten sönümlü sistemler üzerine çalışmaların eksikliğini gidermek amacıyla uç kütle eklentili, visko-elastik (Kelvin-Voight model) dönen kirişlerin düzlem dışı titreşimlerini incelemişlerdir. Farklı dönme hızları, uç kütle ve içten sönümlenme parametrelerine karşılık elde edilen sonuçlar SE modeli ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Gürgöze ve Zeren (2011) aynı problem üzerinde kütle atalet momentinin ve uç kütlelerin eksantrik olmasını dikkate alarak sistemin titreşim analizini yapmışlardır. Başka bir çalışmada (Pratiher ve Dwivedy, 2009) manyetik alanın A kiriş uç kütle sisteminin enine titreşimleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. D'Alembert prensibi ve genelleştirilmiş Galerkin metodu ile hareket denklemleri çıkarılmış,

sistemin frekans cevap eğrileri ve kararlı bölgesi *multiple scales* metodu ile belirlenmiştir. Ayrıca frekans cevapları üzerinde sönüm, uç kütle, manyetik alan gücünün genliği, kirişin geçirgenliği gibi parametrelerin etkisi araştırılmıştır. Diğer bir çalışmalarında ise manyetik alanın statik ve dinamik durumu dikkate alınıp söz konusu parametrelerin etkisi incelenmiştir (Pratiher ve Dwivedy, 2010).

1.1.2 Değişken kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Literatürde değişken kesitli kiriş modeli üzerine fazla sayıda çalışma olmayıp, bu konuyla ilgili ilk çalışmalardan birinde konik kesitli kiriş modeli dikkate alınmıştır (Mabie ve Rogers, 1964). Başka bir çalışmada (Kuo ve diğ., 1992) değişken kesitli, uç kütleli, dönen bir kirişin titreşim analizi yapılmıştır. Benzer makalelerde uç kütleli eksantrik olması ve dönme ataleti göz önüne alınarak üniform olmayan kirişin (Auciello, 1996), iki parçalı değişken parametrelere sahip konik kesit halindeki uç eklentili kirişin (Auciello ve Nole, 1998), kontrollü bir şekilde kesme deformasyonuna maruz kalan konik kesitli uç kütleli kirişin (Auciello, 2000), doğal frekanslar üzerine etki eden parametrelerin (suyun yüksekliği, toprak sertlik oranı, vb.) incelendiği suya gömülmüş üniform olmayan uç eklentili kirişin (Wu ve Chen., 2005) ve Bessel fonksiyonları kullanılarak üniform kesitli kirişin (Boiangiu ve diğ., 2014) titreşimleri ele alınmıştır. Yang (1990) değişken kesitli, uç kütleli kiriş sistemine öteleme ve dönmeye direnç gösteren yaylar ekleyerek sistemin dinamik davranışını incelemiştir. Başka bir çalışmada uç kütleli karbon nano tüplerin titreşim analizi Timoshenko kiriş teorisi ile gerçekleştirilmiştir (Tang ve diğ., 2014). Literatürdeki değişken kesitli kirişler üzerine yapılan son çalışmalardan biri Malaek ve Moeenfard (2016) tarafından yapılmış olup yazarlar uç kütleli iki farklı doğrultuda eksantrik olduğu kabul edilen üniform olmayan A kiriş-uç kütle sisteminin matematiksel modellemesini gerçekleştirmiştir. Sistemin lineer olmayan titreşimine ait hareket denklemleri ve ilgili sınır şartları Hamilton prensibi uygulanarak elde edilmiştir.

1.1.3 Diferansiyel ve multi-step diferansiyel transform metodunun titreşim problemlerine uygulanması

Literatürde bahsi geçen uç eklentili kiriş problemlerindeki hareket denklemleri çıkarılırken daha çok Hamilton Prensibi, Lagrange metodu gibi yöntemler kullanılmış olup hareket denklemlerinin çözümünde genellikle Rayleigh-Ritz Metodu, Bessel Fonksiyonları, Dunkerly, Southwell, Muller ve Bolotin Metodları, SE Yöntemi ve

Newton-Raphson Metodu gibi yaklaşık çözüm metodları kullanılmıştır (Boyce ve Handelman, 1961; Craig, 1963; Gürgöze ve diğ., 1995; Gürgöze, 1996a; Mabie ve Rogers, 1964; Kuo ve diğ., 1992; Auciello, 1996; Auciello ve Nole 1998; Wu ve Chen, 2005; Boiangiu ve diğ., 2014; Yang, 1990; Tang ve diğ., 2014; Hoa, 1979; Oguamanam, 2003; Gökdağ ve Kopmaz, 2005; Oguamanam ve Arshad, 2005; Salarieh ve Ghorashi, 2006; Vakıl ve diğ., 2013; Ansari ve diğ., 2011). Son yıllarda bu yöntemlere alternatif olarak yarı analitik bir çözüm metodu olan DTM ve bunun kademeli uygulanması esasına dayalı MDTM kullanılmaya başlanmıştır. İlk olarak Pukhov (1981; 1982) tarafından elektrik devre analizlerinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya atılan ve daha sonra Zhou (1986) tarafından geliştirilen DTM'nin avantajlarından birisi sade ve basit bir dönüşümle adi ve kısmi diferansiyel denklemin cebirsel bir denkleme dönüştürülmesidir. Ayrıca, bu yöntem kullanılarak integro-diferansiyel denklemler, özdeğer problemleri, başlangıç ve sınır değer problemleri, ısı iletim ve titreşim problemleri gibi birçok farklı alandaki problemler çözülebilmektedir (Yesilce, 2013; Yesilce, 2015; Rajasekaran, 2013b; Rashidi ve diğ., 2011; Liu ve diğ., 2015).

Chen ve Ho (1999) aksenal yük taşıyan dönen bir Timoshenko kirişinin enine titreşim problemini, Çatal (2006; 2008) elastik zemin üzerinde ve her iki ucu basit mesnetli ve bir ucu sabit diğer ucu basit mesnetli kirişin serbest titreşim analizini, Ozgumus ve Kaya (2006) konikleştirilmiş dönen kirişin doğal frekansları üzerinde dönme hızının, konikleştirme oranının ve göbek (*hub*) yarıçapının etkilerini DTM ile incelemiştir. Attarnejad ve Shahba (2008) DTM'yi kiriş kesiti ve atalet momenti değişken ve dönen EB kirişinin serbest titreşim analizi için uygulamışlardır. Mei (2008) dönen A EB kirişin doğal frekanslarını ve mod şekillerini DTM ile elde etmiştir. Yesilce (2010; 2013) EB ve Timoshenko kiriş teorilerini kullanarak hareketli bir kirişin serbest titreşim analizini yapmıştır. Başka bir çalışmada (Ozgumus ve Kaya, 2010) lineer bir şekilde konikleştirilmiş A ve dönen kirişin Timoshenko teorisine göre yanıl (*flapwise*) titreşimleri incelenmiştir. Demirdağ ve Yesilce (2011) uç kütle eklentili ve bir ucundan elastik yayla desteklenen Timoshenko kolonunun doğal frekanslarını bu yöntem ile elde etmişlerdir. Değişken kesitli ve malzeme özellikleri kiriş boyunca değişen (*functionally graded*), dönen EB ve Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimi DTM ve diferansiyel quadrature metodu ile Rajasekaran (2013a; 2013b) tarafından araştırılmıştır. Ayrıca DTM ve MDTM yöntemleri bir çok araştırmacı tarafından

yapıların titreşim analizini incelemek için son zamanlarda sıklıkla uygulanmıştır (Yesilce, 2015; Yesilce ve Çatal, 2009; Ghafarian ve Ariaei, 2016; Ebrahimi ve Salari, 2015a; Ebrahimi ve Salari, 2015b; Bozyigit ve diğ., 2017; Ebrahimi ve Mokhtari, 2015; Arvin, 2017; Hatami ve Ganji, 2014; Nourifar ve diğ., 2017; Beg ve diğ., 2013; Liu ve diğ., 2013; El-Zahar, 2015; Rashidi ve diğ., 2011).

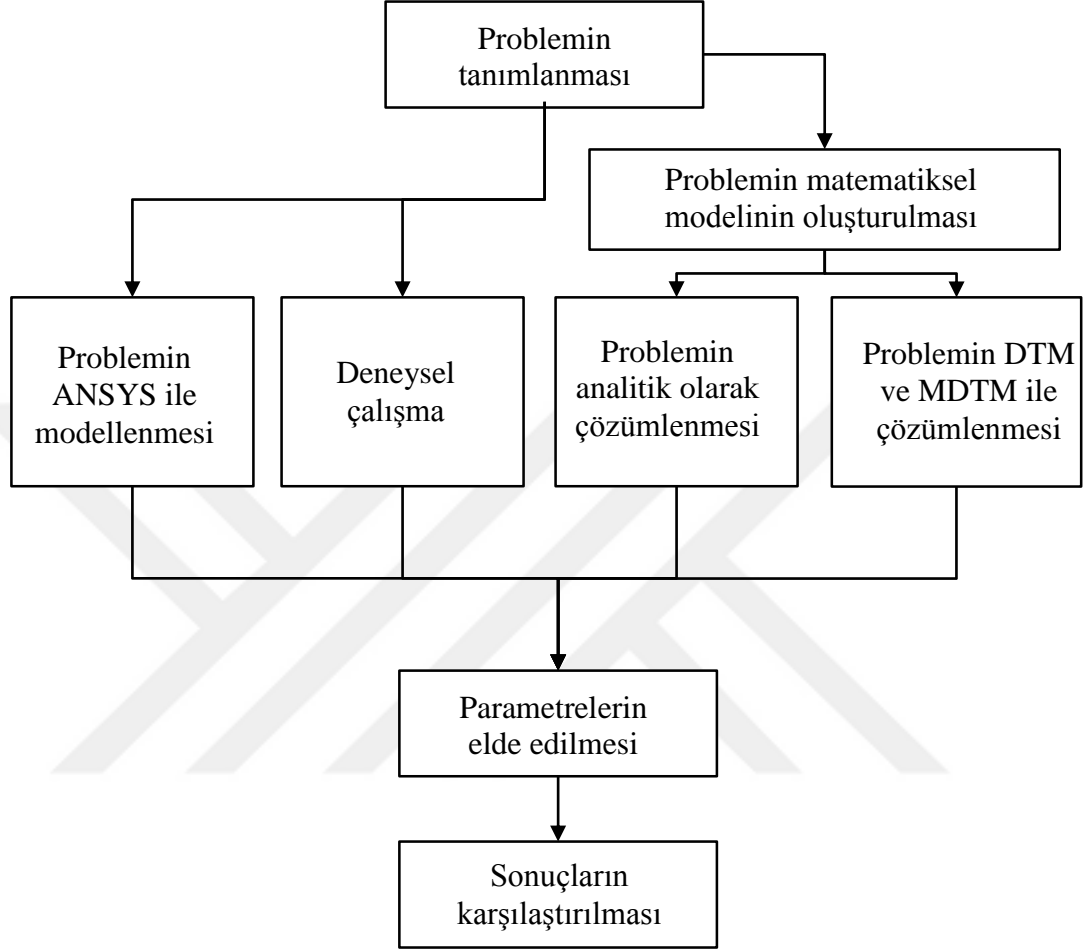
1.2 Tez Çalışmasının İçeriği

Eksantrik uç kütleli kiriş titreşimi ile ilgili az sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir. Uç kütleli 3B cisim gibi modellendiği çalışmalar ise daha da azdır. Üstelik bu çalışmalarda kirişin sabit kesitli ve malzemece homojen olduğu, kirişin çoğunlukla tek düzlemde eğildiği kabul edilmiştir. Mevcut çalışmada öncelikle Oguamanam ve Arshad' ın (2005) önerdiği model değişken kesitli ve malzemece homojen olmayan EB kirişi için yeniden ele alınmıştır. Bu amaçla, çalışmanın ikinci bölümünde ilk olarak Hamilton prensibi ile EB kiriş teorisine göre sistemin hareket denklemleri ve muhtemel bütün sınır şartları elde edilmiştir. Daha sonra Timoshenko kiriş teorisi için aynı metodla hareket denklemleri ve sınır şartları çıkartılmıştır. Üçüncü bölümde, elde edilen hareket denklemleri sabit kesitli kiriş için analitik olarak çözümlenmiş, daha sonra dördüncü bölümde DTM ve MDTM çözümleri verilmiştir. Teorik çalışmanın yanı sıra hem SE metoduyla hem de deneysel olarak modal analiz yapılmış, bunlara ait detaylar çalışmanın beşinci ve altıncı bölümlerinde anlatılmıştır. Çalışma kapsamında sayısal verilerin üretilmesinde Matlab (R2013a) ve ANSYS (v.16 ve v.18) programlarından yararlanılmıştır. Titreşim modlarının deneysel ölçümü ise OROS38/Endevco/Dytran markalı ölçüm setlerinde yapılmış ve ölçülen veriden frekans cevap fonksiyonu (FCF) elde etmek için NVGate (Version 8.00.002) yazılımı kullanılmıştır. Elde edilen tüm sonuçların karşılaştırılması yedinci bölümde aşağıdaki gibi verilmiştir.

- Timoshenko ve EB kiriş teorisine göre sabit kesitli kiriş için analitik sonuçların deney ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması
- Timoshenko kiriş teorisine göre sabit kesitli kiriş için DTM sonuçlarının ANSYS ve deney sonuçlarıyla karşılaştırılması
- Timoshenko kiriş teorisine göre değişken kesitli kiriş için MDTM sonuçlarının deney ve ANSYS sonuçlarıyla karşılaştırılması

- EB giriş teorisine göre değişken kesitli giriş için MDTM sonuçlarının ANSYS ile karşılaştırılması

Şekil 1.1' de problemin çözümü için takip edilen akış şeması gösterilmektedir.



Şekil 1.1 : Giriş-uç kütle probleminin çözümü için akış şeması

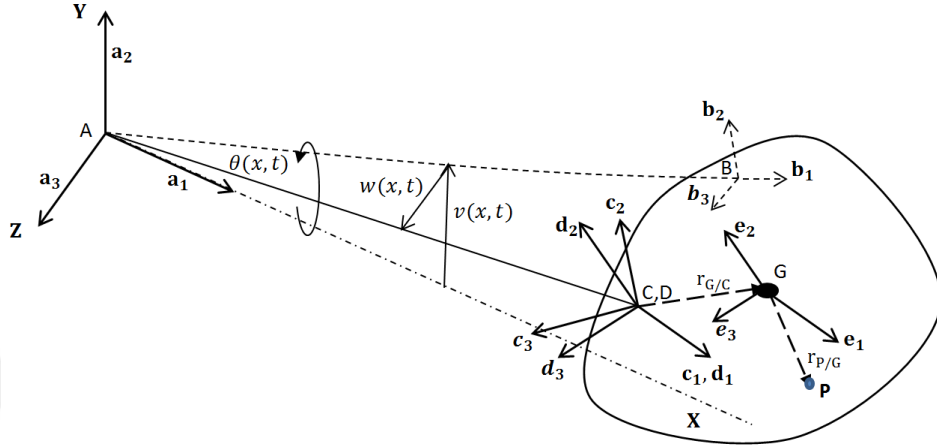
2. MATEMATİKSEL MODELLEME

Bu bölümde Şekil 2.1' de şematik olarak verilen, burulmaya ve aynı zamanda iki ortogonal düzlemde eğilen, eksantrik 3B uç kütleli kirişin matematiksel modeli elde edilecektir. Sistemin hareket denklemleri ve sınır şartları EB ve Timoshenko kiriş modelleri için Hamilton prensibi uygulanarak çıkarılacaktır.

2.1 Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Şekil 2.1'de verilen kiriş-uç kütle sisteminde X eksenini kirişin eğilmeden önceki eksenini göstermektedir. $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla kirişin XY ve YZ düzlemlerindeki eğilmelerini ve $\theta(x,t)$ ise kirişin X-ekseni boyunca burulmasını ifade etmektedir. Uç kütlelerin ilk konumundan itibaren 3B hareketini tanımlamak için beş farklı Kartezyen koordinat takımı (F_a , F_b , F_c , F_d ve F_e) tanımlanmış ve bunların eğilme ve burulmadan dolayı birbirlerine göre hareketleri ifade edilmiştir. F_a kirişin A noktasına yerleştirilmiş referans eksen takımını göstermekte olup X, Y ve Z eksenleri \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 ve \mathbf{a}_3 birim vektörleri ile ifade edilmiştir. \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 birim vektörleri ile ifade edilen F_b kirişin B noktasına yerleştirilmiş olup \mathbf{b}_3 birim vektörünün \mathbf{a}_3 birim vektörüne paralel olduğu kabul edilmiştir. Deformasyon sırasında F_b koordinat takımı \mathbf{a}_2 birim vektörü boyunca $v(L,t)$ kadar ötelenmektedir. F_c koordinat takımı (\mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 , \mathbf{c}_3 birim vektörleri) başlangıçta F_b ile çakışmakta olup deformasyon sırasında \mathbf{a}_3 birim vektörü doğrultusunda $w(L,t)$ kadar ötelenmektedir. Bu sırada \mathbf{b}_2 ve \mathbf{c}_2 birim vektörlerinin daima birbirine paralel kaldığı kabul edilmiştir. \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 birim vektörlerine sahip F_d koordinat takımının başlangıçta F_c ile çakışık olduğu, deformasyon sırasında bu iki koordinat takımının orijinleri çakışık kalmak şartıyla F_d nin \mathbf{c}_1 birim vektörü etrafında $\theta(L,t)$ burulma açısıyla döndüğü kabul edilmiştir. Son olarak F_e ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) koordinat takımı uç kütlelerin kütle merkezine (G) yerleştirilmiş olup birim vektörlerin eksenleri F_d koordinat takımının eksenleri ile hareket süresince

paralel kabul edilmiştir. Timoshenko kiriş modeli için yukarıda ifade edilen kabullere ek olarak $\varphi_1(L,t)$ ve $\varphi_2(L,t)$ eğilmeden oluşan kesit eğimlerini göstermek üzere F_b koordinat takımının \mathbf{b}_3 birim vektörü etrafında $\varphi_1(L,t)$ ve benzer şekilde F_c 'nin \mathbf{b}_2 etrafında $\varphi_2(L,t)$ eğim açılarıyla döndüğü kabul edilmiştir.



Şekil 2.1 : Kiriş-uç kütle sisteminin şematik çizimi

Uç kütle kinetik enerjisini belirlemek üzere uç kütle üzerinde alınan bir diferansiyel elemanın \vec{r}_p konum vektörü aşağıdaki gibidir.

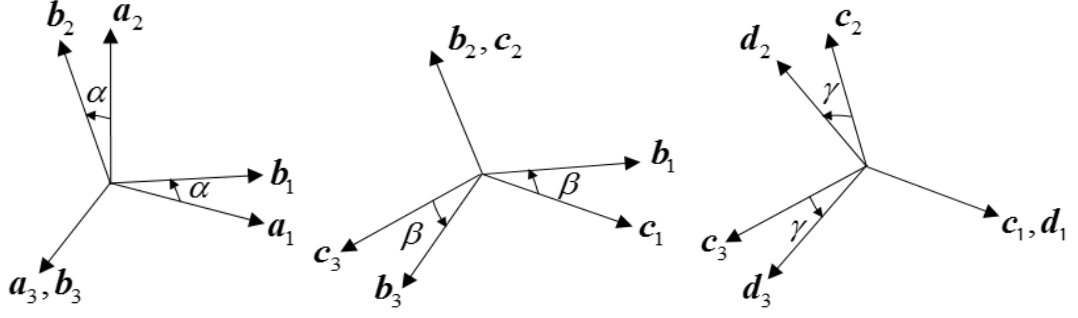
$$\vec{r}_p = L\mathbf{a}_1 + v(L,t)\mathbf{a}_2 + w(L,t)\mathbf{a}_3 + \vec{r}_{G/C} + \vec{r}_{P/G} \quad (2.1)$$

Burada L kiriş uzunluğunu, $\vec{r}_{P/G}$ diferansiyel elemanın uç kütle kütle merkezine göre konumunu ve $\vec{r}_{G/C}$ ise uç kütle merkezinin (G) kirişin uç noktasına (C) göre konumunu belirtmektedir:

$$\vec{r}_{G/C} = \bar{x}\mathbf{d}_1 + \bar{y}\mathbf{d}_2 + \bar{z}\mathbf{d}_3 \quad (2.2)$$

$$\vec{r}_{P/G} = x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2 + z\mathbf{d}_3 \quad (2.3)$$

Burada \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} uç kütle kütle merkezinin kirişin uç noktasına göre koordinatlarıdır. x , y , z ise diferansiyel elemanın uç kütle kütle merkezine göre koordinatlarını göstermektedir.



Şekil 2.2 : Koordinat sistemlerinin birbirine göre konumları

$$\alpha = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = v_x(L, t) \quad (2.4)$$

$$\beta = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=L} = w_x(L, t) \quad (2.5)$$

$$\gamma = \theta(L, t) \quad (2.6)$$

α ve β sırasıyla kirişin $x=L$ ucunda Y ve Z etrafındaki eğim açılarını, γ ise F_c takımının F_d takımına göre dönme açısını göstermektedir. Birim vektörlerin birbirlerine göre yönelimleri (Şekil 2.2) dikkate alındığında bunlar arasındaki dönüşümler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} = [T_3] \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Denklem 2.7 kullanılarak denklem 2.8 yeniden düzenlenirse;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} = [T_2][T_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde denklem 2.9 yeniden düzenlenirse;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix} = [T_3][T_2][T_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

olur. Küçük açılar için $\cos \alpha \cong \cos \beta \cong \cos \gamma \cong 1$, $\sin \alpha \cong \alpha$, $\sin \beta \cong \beta$ ve $\sin \gamma \cong \gamma$ olduğundan;

$$[T_3][T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

olarak yazılır. Denklem 2.13'de elde edilen ifade denklem 2.1'e yerleştirilir ve belirlenen konum vektörünün zamana göre türetilmiş hali denklem 2.14'deki gibi ifade edilir. Denklem 2.15'te ise uç kütlelerin kinetik enerjisi yazılırken kullanılacak hız vektörünün karesinin alınmış hali verilmiştir.

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}(\bar{y} + y) - \dot{\beta}(\bar{z} + z) \\ \dot{v}_L + \dot{\alpha}(\bar{x} + x) - \dot{\gamma}(\bar{z} + z) \\ \dot{w}_L + \dot{\beta}(\bar{x} + x) + \dot{\gamma}(\bar{y} + y) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_p^2 &= \dot{\alpha}^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \dot{\alpha}^2(x^2 + y^2) + \dot{\beta}^2(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) + \dot{\beta}^2(x^2 + z^2) + \dot{\gamma}^2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \\ &+ \dot{\gamma}^2(y^2 + z^2) + x(2\dot{\alpha}^2\bar{x} + 2\dot{v}_L\dot{\alpha} - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\bar{z} + 2\dot{\beta}^2\bar{x} + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\bar{y} + 2\dot{w}_L\dot{\beta}) \\ &+ y(2\dot{\alpha}^2\bar{y} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\bar{z} + 2\dot{\gamma}^2\bar{y} + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\bar{x} + 2\dot{w}_L\dot{\gamma}) \\ &+ z(2\dot{\beta}^2\bar{z} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\bar{y} + 2\dot{\gamma}^2\bar{z} - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\bar{x} - 2\dot{v}_L\dot{\gamma}) \\ &+ 2\dot{\alpha}\dot{\beta}(\bar{y}\bar{z} + yz) + 2\dot{v}_L(\dot{\alpha}\bar{x} - \dot{\gamma}\bar{z}) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}(\bar{x}\bar{z} + xz) \\ &+ 2\dot{w}_L(\dot{\beta}\bar{x} + \dot{\gamma}\bar{y}) + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}(\bar{x}\bar{y} + xy) + \dot{v}_L^2 + \dot{w}_L^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 EB Kiriş Modeli için Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

EB kiriş hipotezine göre şekil değiştirme sırasında kayma şekil değişimlerinin etkisi dikkate alınmaz. Yani, şekil değiştirmeden önce tarafsız düzleme dik kesit, şekil değişiminden sonra da düzleme dik kalır (Bodur, 2014). EB modeli ince ve uzun kirişler için uygundur. Hamilton prensibine göre (denklem 2.16) hareket denklemleri ve sınır şartları elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V + W) dt = 0 \quad (2.16)$$

Burada L Lagrangian olup, T toplam kinetik enerji, V potansiyel enerji ve W dış kuvvetlerin yaptığı işi ifade eder. Bu çalışmada sistemin serbest titreşimi incelendiğinde W sifıra eşit olur. Bu durumda Lagrange formülasyonuna göre sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi;

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L I_p(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(C)} \dot{i}_p^2 dM \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_0^L E(x) I_1(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E(x) I_2(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L G(x) J(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

elde edilir. Denklem 2.17'de $\rho(x)$, $A(x)$ ve $I_p(x)$, sırasıyla yoğunluk, kesit alanı ve birim boydaki kütle eylemsizlik momentidir. $I_p(x) = \rho J(x)$ olup J burulma sabitidir. Uniform kesitli kiriş için ANSYS programında hesaplanmış, değişken kesitli kiriş için ise herhangi bir kesit için $J = bh^3 \left[1/3 - 0.21h/b \left(1 - 1/12(h/b)^4 \right) \right]$ (<https://en.wikipedia.org>) olarak hesaplanmıştır. Kinetik enerji denkleminde verilen ilk iki integral kirişin iki farklı düzlemde eğilmesinden, üçüncü integral burulmasından kaynaklı enerji ifadeleri olup dördüncü integral ise uç kütlelerin kinetik enerjisini göstermektedir. Denklem 2.18'de ise $E(x)I_1(x)$, $E(x)I_2(x)$ kirişin Y ve Z

eksenlerindeki eğilme katılığı ve $G(x)J(x)$ ise burulma katılığı olup $G(x) = E(x)/2(1+\nu)$ dir. Sistemin yukarıda belirtilen tüm enerji ifadeleri Hamilton Prensibinde (Denklem 2.16) yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_P(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{zz} \dot{\alpha} \delta(\dot{\alpha}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yy} \dot{\beta} \delta(\dot{\beta}) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xx} \dot{\gamma} \delta(\dot{\gamma}) dt + \int_{t_1}^{t_2} M \dot{v}_L \delta(\dot{v}_L) dt + \int_{t_1}^{t_2} M \dot{w}_L \delta(\dot{w}_L) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} M \delta(\dot{v}_L) (\dot{\alpha} \bar{x} - \dot{\gamma} \bar{z}) dt + \int_{t_1}^{t_2} M \dot{v}_L (\delta(\dot{\alpha}) \bar{x} - \delta(\dot{\gamma}) \bar{z}) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} M \delta(\dot{w}_L) (\dot{\beta} \bar{x} + \dot{\gamma} \bar{y}) dt + \int_{t_1}^{t_2} M \dot{w}_L (\delta(\dot{\beta}) \bar{x} + \delta(\dot{\gamma}) \bar{y}) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xy} (\delta(\dot{\beta}) \dot{\gamma} + \delta(\dot{\gamma}) \dot{\beta}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xz} (\dot{\alpha} \delta(\dot{\gamma}) + \dot{\gamma} \delta(\dot{\alpha})) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yz} (\dot{\beta} \delta(\dot{\alpha}) + \delta(\dot{\beta}) \dot{\alpha}) dt - \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_1(x) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta(v|_{x=L}) dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_1(x) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta(v|_{x=0}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L E(x) I_1(x) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta(v) dx dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_2(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta(w|_{x=L}) dt - \int_{t_1}^{t_2} E(x) I_2(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta(w|_{x=0}) dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L E(x) I_2(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta(w) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L G(x) J(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \delta(\theta) dx dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} G(x) J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta(\theta|_{x=L}) dt + \int_{t_1}^{t_2} G(x) J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta(\theta|_{x=0}) dt = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Denklem 2.19’da kinetik enerji ifadelerindeki her bir terimin ayrı ayrı varyasyonu aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dx dt \tag{2.20}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \quad (2.21)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_P(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_P(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \theta dx dt \quad (2.22)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{zz} \dot{\alpha} \delta(\dot{\alpha}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{zz} \ddot{\alpha} \delta \alpha dt \quad (2.23)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yy} \dot{\beta} \delta(\dot{\beta}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yy} \ddot{\beta} \delta \beta dt \quad (2.24)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xx} \dot{\gamma} \delta(\dot{\gamma}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xx} \ddot{\gamma} \delta \gamma dt \quad (2.25)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \dot{v}_L \delta(\dot{v}_L) dt = - \int_{t_1}^{t_2} M \ddot{v}_L \delta v_L dt \quad (2.26)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \dot{w}_L \delta(\dot{w}_L) dt = - \int_{t_1}^{t_2} M \ddot{w}_L \delta w_L dt \quad (2.27)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \dot{v}_L (\delta(\dot{\alpha}) \bar{x} - \delta(\dot{\gamma}) \bar{z}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} M \bar{x} \ddot{v}_L \delta \alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} M \bar{z} \ddot{v}_L \delta \gamma dt \quad (2.28)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \delta(\dot{v}_L) (\dot{\alpha} \bar{x} - \dot{\gamma} \bar{z}) dt = \int_{t_1}^{t_2} M (\dot{\gamma} \bar{z} - \dot{\alpha} \bar{x}) \delta v_L dt \quad (2.29)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \delta(\dot{w}_L) (\dot{\beta} \bar{x} + \dot{\gamma} \bar{y}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} M (\ddot{\beta} \bar{x} + \ddot{\gamma} \bar{y}) \delta w_L dt \quad (2.30)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M \dot{w}_L (\delta(\dot{\beta}) \bar{x} + \delta(\dot{\gamma}) \bar{y}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} M \bar{x} \ddot{w}_L \delta \beta dt - \int_{t_1}^{t_2} M \bar{y} \ddot{w}_L \delta \gamma dt \quad (2.31)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xy} (\delta(\dot{\beta}) \dot{\gamma} + \delta(\dot{\gamma}) \dot{\beta}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xy} \ddot{\beta} \delta \gamma dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xy} \ddot{\gamma} \delta \beta dt \quad (2.32)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xz} (\dot{\alpha} \delta(\dot{\gamma}) + \dot{\gamma} \delta(\dot{\alpha})) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xz} \ddot{\alpha} \delta \gamma dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{xz} \ddot{\gamma} \delta \alpha dt \quad (2.33)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yz} (\dot{\beta} \delta(\dot{\alpha}) + \delta(\dot{\beta}) \dot{\alpha}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yz} \ddot{\alpha} \delta \beta dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{I}_{yz} \ddot{\beta} \delta \alpha dt \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(-\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - E(x)I_1(x) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \delta(v) \right. \\ & \left. + \left(-\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - E(x)I_2(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \delta(w) \right. \\ & \left. + \left(-I_P(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + G(x)J(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \delta(\theta) \right] dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{zz} \ddot{\alpha} - M\bar{x}\ddot{v}_L + \bar{I}_{xz} \ddot{\gamma} - \bar{I}_{yz} \ddot{\beta} - E(x)I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta \alpha dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{yy} \ddot{\beta} - M\bar{x}\ddot{w}_L - \bar{I}_{xy} \ddot{\gamma} - \bar{I}_{yz} \ddot{\alpha} - E(x)I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \beta dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{xx} \ddot{\gamma} + M\bar{z}\ddot{v}_L - M\bar{y}\ddot{w}_L - \bar{I}_{xy} \ddot{\beta} + \bar{I}_{xz} \ddot{\alpha} - G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta \gamma dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(-M\ddot{v}_L + M\ddot{\gamma}\bar{z} - M\ddot{\alpha}\bar{x} + E(x)I_1(x) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \delta v_L dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(-M\ddot{w}_L - M\ddot{\beta}\bar{x} - M\ddot{\gamma}\bar{y} + E(x)I_2(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_L dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_1(x) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta(v|_{x=0}) dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_2(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta(w|_{x=0}) dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta(\theta|_{x=0}) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Denklem 2.35’de integrallerdeki varyasyon ifadeleri (örneğin $\delta v, \delta w, \delta \theta, \delta \alpha, \delta \beta$) sıfır olamayacağından parantez içerisindeki ifadeler sıfır olmalıdır. Böylece, denklem 2.35’deki çift katlı ve tek katlı integraller sırasıyla sistemin hareket denklemlerini ve sınır şartlarını vermektedir. Sonuç olarak kiriş-uç kütle sisteminin EB teorisine göre elde edilen hareket denklemleri 2.36-38’deki gibidir.

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.36)$$

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I_2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.37)$$

$$-I_P(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(G(x)J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.38)$$

$x=0$ 'daki sınır şartları kirişin hem A hem de S sınır durumu için denklem 2.39-43'deki gibidir. $x=L$ 'deki sınır şartları ise denklem 2.44-48'de verilmiştir.

$x=0$

Ankastre

Serbest

$$v|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_1(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad E(x)I_1(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.40)$$

$$w|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad E(x)I_2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.42)$$

$$\theta|_{x=0} = 0 \quad G(x)J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.43)$$

Görüldüğü üzere A mesnetlenmiş kirişin uç kısmında ($x=0$) hem Y hem de Z doğrultularındaki yer değiştirme ve eğim sıfırdır. Ayrıca yine bu kısımda burulma sıfırdır. S sınır şartlarında ise kesme kuvvetleri ile her iki düzlemdeki eğilme ve burulma momentleri sıfırdır.

$x=L$

$$\bar{I}_{zz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + E(x)I_1(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.44)$$

$$\bar{I}_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{xy} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + E(x)I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.45)$$

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.46)$$

$$M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{xx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} \\ & + G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen terimler: $\bar{I}_{xx} = I_{xx} + M(\bar{z}^2 + \bar{y}^2)$, $\bar{I}_{yy} = I_{yy} + M(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$, $\bar{I}_{zz} = I_{zz} + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$, $\bar{I}_{xy} = I_{xy} + M\bar{x}\bar{y}$, $\bar{I}_{xz} = I_{xz} + M\bar{x}\bar{z}$, $\bar{I}_{yz} = I_{yz} + M\bar{y}\bar{z}$. M uç kütleli I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{yz} , I_{xz} ise uç kütleli kütle atalet momenti bileşenlerini göstermektedir. Uç kütleli bulunduğu uçtaki ($x = L$) sınır şartları hem eğilme hem de burulma ifadelerini aynı anda buldurmakta ve böylece hareket denklemlerini sınır şartları üzerinden birbirine bağlamaktadır.

2.3 Timoshenko Kiriş Modeli için Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Timoshenko kiriş teorisinde şekil değiştirmelerde eğilme gerilmelerinin yanı sıra kayma gerilmelerinin etkisi de göz önüne alınıp kesme kuvveti de hesaplama katılmaktadır. Bu teoriye göre deplasmandan önce kiriş eksenine dik olan düzlemsel bir kesit, şekil değiştirmeden sonra da düzlemselliğini korur, ama kiriş eksenine dikliğini kaybeder. Ayrıca bu teoriye göre kayma birim uzamalarının ve yanal kayma gerilmelerinin kesit boyunca sabit olduğu kabul edilmektedir. Bu kiriş modeli özellikle kısa ve kalın kirişler için EB teorisine göre daha doğru sonuçlar vermektedir. Sistemin kinetik ve potansiyel enerji denklemleri Timoshenko kiriş modeli kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L I_p(x) \dot{\theta}^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L f_1(x) \dot{\varphi}_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L f_2(x) \dot{\varphi}_2^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(c)} \dot{r}_p^2 dM
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_1(x) (\varphi_1')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_2(x) (\varphi_2')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G(x) J(x) \theta'^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \kappa G(x) A(x) (v' - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa G(x) A(x) (w' - \varphi_2)^2
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Burada $f_1(x) = I_1(x) \rho(x)$ ve $f_2(x) = I_2(x) \rho(x)$ dir.

Kinetik ve potansiyel enerji denklemlerinin varyasyonları EB kiriş teorisine benzer

şekilde alınıp Hamilton prensibinde, $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0$, yerine yerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned}
&\left(-\rho(x) A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \right) \delta(v) \\
&+ \left(-\rho(x) A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \right] \right) \delta(w) \\
&+ \left(-f_1(x) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + E(x) I_1(x) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right) \delta(\varphi_1) \\
&+ \left(-f_2(x) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + E(x) I_2(x) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \right) \delta(\varphi_2) \\
&+ \left(-I_p(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + G(x) J(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \delta(\theta)
\end{aligned} \right\} dx dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{zz} \ddot{\alpha} - M \bar{x} \ddot{v}_L + \bar{I}_{xz} \ddot{\gamma} - \bar{I}_{yz} \ddot{\beta} - E(x) I_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \delta \alpha dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{yy} \ddot{\beta} - M \bar{x} \ddot{w}_L - \bar{I}_{xy} \ddot{\gamma} - \bar{I}_{yz} \ddot{\alpha} - E(x) I_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \delta \beta dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left(-\bar{I}_{xx} \ddot{\gamma} + M \bar{z} \ddot{v}_L - M \bar{y} \ddot{w}_L - \bar{I}_{xy} \ddot{\beta} + \bar{I}_{xz} \ddot{\alpha} - G(x) J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta \gamma dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left(-M \ddot{v}_L + M \ddot{\gamma} \bar{z} - M \ddot{\alpha} \bar{x} - \kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right) \delta v_L dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left(-M \ddot{w}_L - M \ddot{\beta} \bar{x} - M \ddot{\gamma} \bar{y} - \kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \right) \delta w_L dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \delta(\varphi_1|_{x=0}) dt + \int_{t_1}^{t_2} E(x)I_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \delta(\varphi_2|_{x=0}) dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \delta(v|_{x=0}) dt + \int_{t_1}^{t_2} G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta(\theta|_{x=0}) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \delta(w|_{x=0}) dt = 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Kiriş-uç kütle sisteminde Timoshenko kiriş modeli dikkate alındığında hareket denklemleri ise 2.52-56'daki gibi olur.

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right)) = 0 \tag{2.52}$$

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right)) = 0 \tag{2.53}$$

$$f_1(x) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) = 0 \tag{2.54}$$

$$f_2(x) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) - \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) = 0 \tag{2.55}$$

$$I_p(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \tag{2.56}$$

$\kappa = 10(1+\nu)/(12+11\nu)$ olarak hesaplanmış olup kayma düzeltme faktörünü ifade eder (Leissa ve Qatu, 201, Bölüm 4). Bu durumda sistemin sınır şartları;

$$x = 0$$

Ankastre

Serbest

$$v|_{x=0} = 0 \qquad \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \Big|_{x=0} = 0 \tag{2.57}$$

$$w|_{x=0} = 0 \qquad \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \Big|_{x=0} = 0 \tag{2.58}$$

$$\varphi_1|_{x=0} = 0 \quad E(x)I_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.59)$$

$$\varphi_2|_{x=0} = 0 \quad E(x)I_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.60)$$

$$\theta|_{x=0} = 0 \quad G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.61)$$

$x = L$

$$\bar{I}_{zz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + E(x)I_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.62)$$

$$\bar{I}_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{xy} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + E(x)I_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{xx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} \\ & + G(x)J(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_1 \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.65)$$

$$M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + \kappa G(x)A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_2 \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.66)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi hareket denklemleri yine kütlelerin bulunduğu uçtaki sınır şartları üzerinden birbirine bağlıdır.

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

Bu bölümde uniform kesitli kiriş için hareket denklemlerinin analitik çözümü yapılmış, elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri diğer sonuçlarla beraber çalışmanın yedinci bölümünde karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

3.1 EB Kiriş Modelinin Analitik Çözümü

2.36-48'deki denklemlere değişkenlerine ayırıştırma metodu ($v(x,t)=V(x)T(t)$, $w(x,t)=W(x)T(t)$, $\theta(x,t)=\Theta(x)T(t)$) uygulandığında hareket denklemleri;

$$(EI_1V''')'' - \rho A\omega^2V = 0 \Rightarrow V'''' - \lambda_1^4V = 0 \quad (3.1)$$

$$(EI_2W''')'' - \rho A\omega^2W = 0 \Rightarrow W'''' - \lambda_2^4W = 0 \quad (3.2)$$

$$(GJ\Theta')' + I_p\omega^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta'' + \lambda_3^2\Theta = 0 \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda_1 = \left(\frac{\rho A\omega^2}{EI_1}\right)^{1/4}$, $\lambda_2 = \left(\frac{\rho A\omega^2}{EI_2}\right)^{1/4}$ ve $\lambda_3 = \left(\frac{I_p\omega^2}{GJ}\right)^{1/2}$ olup

$$\cdot = \frac{d}{dx} \text{ ve } \frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2T \text{ olarak tanımlıdır.}$$

Sınır şartları da;

$$x = 0$$

$$\begin{array}{cc} \text{Ankastre} & \text{Serbest} \end{array} \quad (3.4)$$

$$V(0) = 0 \quad (EI_1)'(0)V''(0) + EI_1(0)V''''(0) = 0 \quad (3.5)$$

$$V'(0) = 0 \quad EI_1(0)V''(0) = 0 \quad (3.6)$$

$$W(0) = 0 \quad (EI_2)'(0)W''(0) + EI_2(0)W''''(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$W'(0) = 0 \quad EI_2(0)W''(0) = 0 \quad (3.8)$$

$$\Theta(0) = 0 \quad GJ(0)\Theta'(0) = 0 \quad (3.9)$$

$x = L$

$$\bar{I}_{zz}\omega^2V'(L) + M\bar{x}\omega^2V(L) - \bar{I}_{xz}\omega^2\Theta(L) + \bar{I}_{yz}\omega^2W'(L) - EI_1(L)V''(L) = 0 \quad (3.10)$$

$$\bar{I}_{yy}\omega^2W'(L) + M\bar{x}\omega^2W(L) + \bar{I}_{xy}\omega^2\Theta(L) + \bar{I}_{yz}\omega^2V'(L) - EI_2(L)W''(L) = 0 \quad (3.11)$$

$$M\omega^2V(L) - M\bar{z}\omega^2\Theta(L) + M\bar{x}\omega^2V'(L) + (EI_1)'(L)V''(L) + EI_1(L)V'''(L) = 0 \quad (3.12)$$

$$M\omega^2W(L) + M\bar{y}\omega^2\Theta(L) + M\bar{x}\omega^2W'(L) + (EI_2)'(L)W''(L) + EI_2(L)W'''(L) = 0 \quad (3.13)$$

$$\bar{I}_{xx}\omega^2\Theta(L) - M\bar{z}\omega^2V(L) + M\bar{y}\omega^2W(L) + \bar{I}_{xy}\omega^2W'(L) - \bar{I}_{xz}\omega^2V'(L) - GJ(L)\Theta'(L) = 0 \quad (3.14)$$

Bu hareket denklemlerinin genel çözümü denklem 3.15-17'deki gibidir.

$$V(x) = c_1 \cos(\lambda_1 x) + c_2 \sin(\lambda_1 x) + c_3 \cosh(\lambda_1 x) + c_4 \sinh(\lambda_1 x) \quad (3.15)$$

$$W(x) = c_5 \cos(\lambda_2 x) + c_6 \sin(\lambda_2 x) + c_7 \cosh(\lambda_2 x) + c_8 \sinh(\lambda_2 x) \quad (3.16)$$

$$\Theta(x) = c_9 \cos(\lambda_3 x) + c_{10} \sin(\lambda_3 x) \quad (3.17)$$

Burada c_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ belirsiz katsayılarıdır. Bu denklemler yukarıdaki sınır şartlarına uygulanarak denklem 3.18'deki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} A_1(\omega) & \cdots & A_{10}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{10_1}(\omega) & \cdots & A_{10_{10}}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Bu homojen sistemin boş olmayan çözümleri için katsayılar matrisinin determinantı sifra eşitlenir ve böylece doğal frekanslar (ω) hesaplanır.

$$\begin{vmatrix} A_{1_1}(\omega) & \cdots & A_{1_{10}}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1_{10_1}}(\omega) & \cdots & A_{1_{10_0}}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

Bulunan doğal frekansların denklem 3.18'de yerine yerleştirilmesiyle mod şekilleri için c_i katsayıları hesaplanır.

3.2 Timoshenko Kiriş Modelinin Analitik Çözümü

Benzer şekilde 2.52-66 denklemlerine değişkenlerine ayrıştırma metodu uygulanır.

$v(x,t) = V(x)T(t)$, $w(x,t) = W(x)T(t)$, $\theta(x,t) = \Theta(x)T(t)$, $\varphi_1(x,t) = \Psi_1(x)T(t)$, $\varphi_2(x,t) = \Psi_2(x)T(t)$ olarak kabul edilirse hareket denklemleri denklem 3.20-24'deki gibi, sınır şartları da denklem 3.25-35'deki gibi bulunur.

$$V''''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)V''(x) + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)V(x) = 0 \quad (3.20)$$

$$\Psi_1''''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_1''(x) + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)\Psi_1(x) = 0 \quad (3.21)$$

$$W''''(x) + (\lambda_1 + \lambda_4)W''(x) + \lambda_1(\lambda_4 - \lambda_5)W(x) = 0 \quad (3.22)$$

$$\Psi_2''''(x) + (\lambda_1 + \lambda_4)\Psi_2''(x) + \lambda_1(\lambda_4 - \lambda_5)\Psi_2(x) = 0 \quad (3.23)$$

$$\Theta''(x) + \lambda_6^2\Theta(x) = 0 \quad (3.24)$$

Burada $\lambda_1 = \frac{\rho\omega^2}{kG}$, $\lambda_2 = \frac{f_1\omega^2}{EI_1}$, $\lambda_3 = \frac{\kappa GA}{EI_1}$, $\lambda_4 = \frac{f_2\omega^2}{EI_2}$, $\lambda_5 = \frac{\kappa GA}{EI_2}$, $\lambda_6 = \left(\frac{I_p W^2}{GJ}\right)^{1/2}$ dir.

Sınır şartları;

$x = 0$

$$\begin{array}{ll} \text{Ankastre} & \text{Serbest} \end{array} \quad (3.25)$$

$$\begin{array}{ll} V(0) = 0 & \kappa GA(0)(V'(0) - \Psi_1(0)) = 0 \end{array} \quad (3.26)$$

$$W(0)=0 \quad \kappa GA(0)(W'(0)-\Psi_2(0))=0 \quad (3.27)$$

$$\Psi_1(0)=0 \quad EI_1(0)\Psi_1'(0)=0 \quad (3.28)$$

$$\Psi_2(0)=0 \quad EI_2(0)\Psi_2'(0)=0 \quad (3.29)$$

$$\Theta(0)=0 \quad GJ(0)\Theta'(0)=0 \quad (3.30)$$

$x = L$

$$\bar{I}_{zz}\omega^2\Psi_1(L)+M\bar{x}\omega^2V(L)-\bar{I}_{xz}\omega^2\Theta(L)+\bar{I}_{yz}\omega^2\Psi_2(L)-EI_1(x)\Psi_1'(L)=0 \quad (3.31)$$

$$\bar{I}_{yy}\omega^2\Psi_2(L)+M\bar{x}\omega^2W(L)+\bar{I}_{xy}\omega^2\Theta(L)+\bar{I}_{yz}\omega^2\Psi_1(L)-EI_2(x)\Psi_2'(L)=0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{xx}\omega^2\Theta(L)-M\bar{z}\omega^2V(L)+M\bar{y}\omega^2W(L)+\bar{I}_{xy}\omega^2\Psi_2(L)-\bar{I}_{xz}\omega^2\Psi_1(L) \\ -GJ\Theta'(L)=0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$M\omega^2V(L)-M\bar{z}\omega^2\Theta(L)+\left(M\bar{x}\omega^2+\kappa GA(x)\right)\Psi_1(L)-\kappa GA(x)V'(L)=0 \quad (3.34)$$

$$M\omega^2W(L)+M\bar{y}\omega^2\Theta(L)+\left(M\bar{x}\omega^2+\kappa GA(x)\right)\Psi_2(L)-\kappa GA(x)W'(L)=0 \quad (3.35)$$

Hareket denklemlerinden 3.20 ve 3.21 diferansiyel denklemleri XY düzlemindeki eğilme deformasyonlarını ifade etmekte olup bu iki denklemin karakteristik denklemleri özdeştir. Aynı şekilde denklem 3.22 ve 3.23 YZ düzlemindeki eğilme deformasyonlarını göstermekte ve XY düzlemindeki deformasyonlar gibi karakteristik denklemleri özdeştir. Bu yüzden karakteristik denklemler denklem 3.20-21 ve denklem 3.22-23 için ayrı ayrı çözülmüştür.

$$r_1^4+(\lambda_1+\lambda_2)r_1^2+\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)=0 \quad (3.36)$$

ve çözüm

$$\tilde{\alpha}_1^2=\frac{-(\lambda_1+\lambda_2)-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4\lambda_1\lambda_3}}{2} \quad (3.37)$$

$$\tilde{\beta}_1^2 = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_3}}{2} \quad (3.38)$$

Denklem 3.37 ve 3.38'den görüldüğü üzere $\tilde{\beta}_1^2$ 'nin işareti ya pozitif ya da negatif olabilir fakat $\tilde{\alpha}_1^2$ 'nin işareti daima negatiftir. $\tilde{\beta}_1^2$ 'nin işaretinin belirlenmesi için koşul

$$\frac{A}{f_1} \geq \frac{\omega^2}{\kappa G} \text{ veya } \frac{A}{f_1} < \frac{\omega^2}{\kappa G} \quad (3.39)$$

olarak belirlenir. Böylece muhtemel çözüm için üç farklı durum yazılabilir.

Durum 1: Eğer $\frac{A}{f_1} > \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_1^2 > 0$;

Bu durumda çözüm;

$$V(x) = \tilde{C}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_3 \sinh(\tilde{\beta}_1 x) + \tilde{C}_4 \cosh(\tilde{\beta}_1 x) \quad (3.40)$$

$$\Psi_1(x) = \tilde{B}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_3 \sinh(\tilde{\beta}_1 x) + \tilde{B}_4 \cosh(\tilde{\beta}_1 x) \quad (3.41)$$

Durum 2: Eğer $\frac{A}{f_1} = \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_1^2 = 0$

Bu halde çözüm;

$$V(x) = \tilde{C}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4 \quad (3.42)$$

$$\Psi_1(x) = \tilde{B}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_3(x) + \tilde{B}_4 \quad (3.43)$$

şeklinde ifade edilir. Son olarak

Durum 3: Eğer $\frac{A}{f_1} < \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_1^2 < 0$ olup çözüm;

$$V(x) = \tilde{C}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_3 \sin(\tilde{\beta}_1 x) + \tilde{C}_4 \cos(\tilde{\beta}_1 x) \quad (3.44)$$

$$\Psi_1(x) = \tilde{B}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_2 \cos(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{B}_3 \sin(\tilde{\beta}_1 x) + \tilde{B}_4 \cos(\tilde{\beta}_1 x) \quad (3.45)$$

olarak yazılır.

Denklem 3.31-35'de verilen A sınır şartları kullanılarak üç farklı durum için de;

$$\tilde{C}_2 = -\tilde{C}_4 \text{ ve } \tilde{B}_2 = -\tilde{B}_4 \quad (3.46)$$

bulunur. Yukarıda ifade edilen üç durum için katsayılar arasındaki ilişki ayrı ayrı yazılırsa;

Durum 1 için;

$$\tilde{B}_1 = -\tilde{C}_2 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.47)$$

$$\tilde{B}_2 = \tilde{C}_1 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.48)$$

$$\tilde{B}_3 = \tilde{C}_4 \frac{\tilde{\beta}_1^2 + \lambda_1}{\tilde{\beta}_1} \quad (3.49)$$

$$\tilde{B}_4 = \tilde{C}_3 \frac{\tilde{\beta}_1^2 + \lambda_1}{\tilde{\beta}_1} \quad (3.50)$$

$$\tilde{B}_2 = -\tilde{B}_4 \Rightarrow \tilde{C}_3 = -\tilde{C}_1 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_1^2 + \lambda_1} \quad (3.51)$$

Durum 2 için;

$$\tilde{B}_1 = -\tilde{C}_2 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.52)$$

$$\tilde{B}_2 = \tilde{C}_1 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.53)$$

$$\tilde{B}_3 = \lambda_1 \tilde{C}_4 \quad (3.54)$$

$$\tilde{B}_4 = -\tilde{B}_2 = -\tilde{C}_1 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.55)$$

$$\tilde{C}_3 = 0 \quad (3.56)$$

Son olarak Durum 3 için;

$$\tilde{B}_1 = -\tilde{C}_2 \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.57)$$

$$\tilde{B}_2 = \tilde{C}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \quad (3.58)$$

$$\tilde{B}_3 = -\tilde{C}_1 \frac{(\tilde{\beta}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\beta}_1} \quad (3.59)$$

$$\tilde{B}_4 = \tilde{C}_3 \frac{(\tilde{\beta}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\beta}_1} \quad (3.60)$$

$$\tilde{C}_3 = -\tilde{C}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \frac{\tilde{\beta}_1}{(\tilde{\beta}_1^2 - \lambda_1)} \quad (3.61)$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde denklem 3.22 ve 3.23'ün karakteristik denklemi yazılır.

$$r_2^4 + (\lambda_1 + \lambda_4)r_2^2 + \lambda_1(\lambda_4 - \lambda_5) = 0 \quad (3.62)$$

Bu karakteristik denklemin muhtemel çözümü ise denklem 3.63 ve 3.64'de gösterilmiştir.

$$\tilde{\alpha}_2^2 = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_4) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_4)^2 + 4\lambda_1\lambda_5}}{2} \quad (3.63)$$

$$\tilde{\beta}_2^2 = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_4) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_4)^2 + 4\lambda_1\lambda_5}}{2} \quad (3.64)$$

XY düzlemindeki eğilmeyi gösteren denklemlere benzer olarak $\tilde{\beta}_2^2$ 'nin işaretinin belirlenmesi için gerekli koşul denklem 3.65'deki gibidir.

$$\frac{A}{f_2} \geq \frac{\omega^2}{\kappa G} \text{ veya } \frac{A}{f_2} < \frac{\omega^2}{\kappa G} \quad (3.65)$$

Bu koşula göre $\tilde{\beta}_2^2$ 'nin pozitif, negatif ya da sıfır olması aşağıda belirtilen üç duruma bağlıdır. İlk karakteristik denklemin çözümüne benzer şekilde üç durum için ayrı ayrı çözümler önerilir. Yani;

Durum 1: Eğer $\frac{A}{f_2} > \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_2^2 > 0$, bu durumda çözüm;

$$W(x) = \tilde{D}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_3 \sinh(\tilde{\beta}_2 x) + \tilde{D}_4 \cosh(\tilde{\beta}_2 x) \quad (3.66)$$

$$\psi_2(x) = \tilde{E}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_3 \sinh(\tilde{\beta}_2 x) + \tilde{E}_4 \cosh(\tilde{\beta}_2 x) \quad (3.67)$$

Durum 2: Eğer $\frac{A}{f_2} = \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_2^2 = 0$, önerilecek çözüm;

$$W(x) = \tilde{D}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_3(x) + \tilde{D}_4 \quad (3.68)$$

$$\psi_2(x) = \tilde{E}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_3(x) + \tilde{E}_4 \quad (3.69)$$

Durum 3: Eğer $\frac{A}{f_2} < \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise $\tilde{\beta}_2^2 < 0$ olup son durum için çözüm;

$$W(x) = \tilde{D}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_3 \sin(\tilde{\beta}_2 x) + \tilde{D}_4 \cos(\tilde{\beta}_2 x) \quad (3.70)$$

$$\psi_2(x) = \tilde{E}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_2 \cos(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{E}_3 \sin(\tilde{\beta}_2 x) + \tilde{E}_4 \cos(\tilde{\beta}_2 x) \quad (3.71)$$

şeklinde yazılır. Yine denklem 3.25-30'da verilen A sınırları kullanılarak üç farklı durum için de;

$$\tilde{D}_2 = -\tilde{D}_4 \text{ ve } \tilde{E}_2 = -\tilde{E}_4 \quad (3.72)$$

bulunur. Her üç durum için çözüm yapıldığında katsayılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunur.

Durum 1 için;

$$\tilde{E}_1 = -\tilde{D}_2 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.73)$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.74)$$

$$\tilde{E}_3 = \tilde{D}_4 \frac{(\tilde{\beta}_2^2 + \lambda_1)}{\tilde{\beta}_2} \quad (3.75)$$

$$\tilde{E}_4 = \tilde{D}_3 \frac{(\tilde{\beta}_2^2 + \lambda_1)}{\tilde{\beta}_2} \quad (3.76)$$

$$\tilde{E}_2 = -\tilde{E}_4 \text{ ve } \Rightarrow \tilde{D}_3 = -\tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \frac{\tilde{\beta}_2}{(\tilde{\beta}_2^2 + \lambda_1)} \quad (3.77)$$

Benzer şekilde Durum 2 için;

$$\tilde{E}_1 = \tilde{D}_2 \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_2^2)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.78)$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.79)$$

$$\tilde{E}_3 = \lambda_1 \tilde{D}_4 \quad (3.80)$$

$$\tilde{E}_4 = -\tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.81)$$

$$\tilde{D}_3 = 0 \quad (3.82)$$

Son olarak Durum 3 için katsayılar arasındaki ilişki;

$$\tilde{E}_1 = \tilde{D}_2 \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_2^2)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.83)$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \quad (3.84)$$

$$\tilde{E}_3 = \tilde{D}_4 \frac{(\lambda_1 - \tilde{\beta}_2^2)}{\tilde{\beta}_2} \quad (3.85)$$

$$\tilde{E}_4 = -\tilde{D}_3 \frac{(\lambda_1 - \tilde{\beta}_2^2)}{\tilde{\beta}_2} \quad (3.86)$$

$$\tilde{D}_3 = -\tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \frac{\tilde{\beta}_2}{(\tilde{\beta}_2^2 - \lambda_1)} \quad (3.87)$$

elde edilir. En genel halde bütün sistemin hareket denklemlerinin çözümü üç farklı durum için aşağıdaki formda yazılabilir.

Eğer $\frac{A}{f_1} > \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ve $\frac{A}{f_2} > \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise genel çözüm;

$$\begin{aligned} V(x) = & \tilde{C}_1 \left\{ \sin(\tilde{\alpha}_1 x) - \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_1^2 + \lambda_1} \sinh(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \\ & + \tilde{C}_2 \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - \cosh(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} W(x) = & \tilde{D}_1 \left\{ \sin(\tilde{\alpha}_2 x) - \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \frac{\tilde{\beta}_2}{(\tilde{\beta}_2^2 + \lambda_1)} \sinh(\tilde{\beta}_2 x) \right\} \\ & + \tilde{D}_2 \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - \cosh(\tilde{\beta}_2 x) \right\} \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = & \tilde{C}_1 \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - \cosh(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \\ & + \tilde{C}_2 \left\{ -\frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1}{\tilde{\alpha}_1} \sin(\tilde{\alpha}_1 x) - \frac{\tilde{\beta}_1^2 + \lambda_1}{\tilde{\beta}_1} \sinh(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - \cosh(\tilde{\beta}_2 x) \right\} \\ &+ \tilde{D}_2 \left\{ -\frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \sin(\tilde{\alpha}_2 x) - \frac{(\tilde{\beta}_2^2 + \lambda_1)}{\tilde{\beta}_2} \sinh(\tilde{\beta}_2 x) \right\}\end{aligned}\quad (3.91)$$

$$\Theta(x) = \tilde{F}_1 \cos(\lambda_6 x) + \tilde{F}_2 \sin(\lambda_6 x) \quad (3.92)$$

Eğer $\frac{A}{f_1} = \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ve $\frac{A}{f_2} = \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise genel çözüm;

$$V(x) = \tilde{C}_1 \sin(\tilde{\alpha}_1 x) + \tilde{C}_2 \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - 1 \right\} \quad (3.93)$$

$$W(x) = \tilde{D}_1 \sin(\tilde{\alpha}_2 x) + \tilde{D}_2 \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - 1 \right\} \quad (3.94)$$

$$\psi_1(x) = \tilde{C}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - 1 \right\} + \tilde{C}_2 \left\{ \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_1^2)}{\tilde{\alpha}_1} \sin(\tilde{\alpha}_1 x) - \lambda_1 x \right\} \quad (3.95)$$

$$\psi_2(x) = \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - 1 \right\} + \tilde{D}_2 \left\{ \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_2^2)}{\tilde{\alpha}_2} \sin(\tilde{\alpha}_2 x) - \lambda_1 x \right\} \quad (3.96)$$

$$\Theta(x) = \tilde{F}_1 \cos(\lambda_6 x) + \tilde{F}_2 \sin(\lambda_6 x) \quad (3.97)$$

dir. Son olarak;

Eğer $\frac{A}{f_1} < \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ve $\frac{A}{f_2} < \frac{\omega^2}{\kappa G}$ ise genel çözüm;

$$\begin{aligned}V(x) &= \tilde{C}_1 \left\{ \sin(\tilde{\alpha}_1 x) - \frac{\tilde{\beta}_1}{(\tilde{\beta}_1^2 - \lambda_1)} \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \sin(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \\ &+ \tilde{C}_2 \left\{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - \cos(\tilde{\beta}_1 x) \right\}\end{aligned}\quad (3.98)$$

$$W(x) = \tilde{D}_1 \left\{ \sin(\tilde{\alpha}_2 x) - \frac{\tilde{\beta}_2}{(\tilde{\beta}_2^2 - \lambda_1)} \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \sin(\tilde{\beta}_1 x) \right\} + \tilde{D}_2 \{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - \cos(\tilde{\beta}_2 x) \} \quad (3.99)$$

$$\psi_1(x) = \tilde{C}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_1} \{ \cos(\tilde{\alpha}_1 x) - \cos(\tilde{\beta}_1 x) \} + \tilde{C}_2 \left\{ \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_1^2)}{\tilde{\alpha}_1} \sin(\tilde{\alpha}_1 x) - \frac{(\lambda_1 - \tilde{\beta}_1^2)}{\tilde{\beta}_1} \sin(\tilde{\beta}_1 x) \right\} \quad (3.100)$$

$$\psi_2(x) = \tilde{D}_1 \frac{(\tilde{\alpha}_2^2 - \lambda_1)}{\tilde{\alpha}_2} \{ \cos(\tilde{\alpha}_2 x) - \cos(\tilde{\beta}_2 x) \} + \tilde{D}_2 \left\{ \frac{(\lambda_1 - \tilde{\alpha}_2^2)}{\tilde{\alpha}_2} \sin(\tilde{\alpha}_2 x) - \frac{(\lambda_1 - \tilde{\beta}_2^2)}{\tilde{\beta}_2} \sin(\tilde{\beta}_2 x) \right\} \quad (3.101)$$

$$\Theta(x) = \tilde{F}_1 \cos(\lambda_6 x) + \tilde{F}_2 \sin(\lambda_6 x) \quad (3.102)$$

şeklinde ifade edilir.

A/f_1 ve A/f_2 'nin pratikteki değerleri dikkate alındığında denklem 3.88-92'de verilen çözüm seçilmiş ve sistemin $x=L$ 'deki sınır şartlarına uygulanmıştır. Böylece elde edilen denklemler 3.103'deki gibi matris formunda yazılabilir.

$$A(\omega)_{6 \times 6} c_{6 \times 1} = 0 \quad (3.103)$$

Burada $c = [\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{D}_1 \tilde{D}_2 \tilde{F}_1 \tilde{F}_2]^T$ belirsiz katsayılar vektörüdür. Denklem 3.103'de $\det([A])=0$ olması durumunda sistemin doğal frekansları elde edilir. Sistemin titreşim modları ise elde edilen frekansların denklem 3.103'de yerine yazılması ile bulunur.

4. SAYISAL ÇÖZÜM

Bu bölümde ilk olarak DTM'nin ve MDTM'nin uygulanışı ve genel dönüşüm özellikleri verilmiştir. Sabit kesitli giriş dikkate alınıp her iki giriş teorisi için DTM uygulanmıştır. Daha sonra değişken kesitli giriş için DTM'nin yetersiz kalmasından dolayı MDTM uygulanmıştır. DTM ve MDTM ile elde edilen sonuçlar yine diğer yöntemlerle karşılaştırmalı olarak çalışmanın sonuçlar kısmında verilmiştir.

4.1 Diferansiyel Transform Metodu (DTM)

DTM Taylor serisi açılımına dayanan, adi veya kısmi diferansiyel denklemlere polinomlar şeklinde çözüm öneren yarı analitik/nümerik bir yöntemdir. Taylor serisi çözümleri çok fazla sayıda sembolik işlem gerektirmesine rağmen DTM'de türevler sembolik olarak değerlendirilmediği için çok daha basit hesaplamalarla hızlı bir şekilde doğru sonuçlar elde edilmektedir (Bozyiğit ve diğ., 2017).

$f(x)$ orijinal fonksiyon ve $F[k]$ diferansiyel dönüşümü alınmış fonksiyon olmak üzere;

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.1)$$

ve $F[k]$ nin ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F[k](x-x_0)^k \quad (4.2)$$

olarak tanımlıdır. Denklem 4.1, denklem 4.2'de yerine yazılarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.3)$$

elde edilir.

Bu eşitliğe göre $f(x)$ fonksiyonu sonlu sayıda bir kuvvet serisi olarak aşağıdaki gibi kabul edilmektedir. $x_0 = 0$ alınırsa;

$$f(x) = \sum_{k=0}^N F[k]x^k, \quad F[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (4.4)$$

Yukarıdaki eşitliklerde küçük harf ile gösterilen fonksiyon ($f(x)$) orijinal fonksiyonu ve büyük harf ile gösterilen fonksiyon ise diferansiyel dönüşümü alınmış fonksiyonu göstermektedir. Diferansiyel denklemlerin dönüştürülmesinde tek boyutlu DTM teoremleri sıklıkla kullanılmaktadır. Çizelge 4.1 ve 4.2’de problemlerde kullanılan bazı dönüşüm kuralları verilmiştir.

Çizelge 4.1 : Önemli bazı DTM dönüşüm kuralları.

Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F[k] = G[k] \pm H[k]$
$f(x) = cg(x)$	$F[k] = cG[k]$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F[k] = \sum_{k_1=0}^k G[k_1]H[k-k_1]$
$f(x) = x^n$	$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

Çizelge 4.2 : Sınır şartları için DTM dönüşüm kuralları.

$x = 0$		$x = L$	
Sınır şartı	Dönüşümü alınmış hali	Sınır şartı	Dönüşümü alınmış hali
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$	$f(L) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} L^k F[k] = 0$
$\frac{df(0)}{dx} = 0$	$F[1] = 0$	$\frac{df(L)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kL^{k-1} F[k] = 0$
$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 0$	$F[2] = 0$	$\frac{d^2 f(L)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)L^{k-2} F[k] = 0$
$\frac{d^3 f(0)}{dx^3} = 0$	$F[3] = 0$	$\frac{d^3 f(L)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)L^{k-3} F[k] = 0$

4.1.1 EB giriş modelinin DTM çözümü

Denklem 3.1-3’de verilen hareket denklemleri Çizelge 4.1’deki teoremler kullanılarak aşağıdaki gibi dönüştürülmüştür. Bu çalışmada üzeri çizgi ile ifade edilen fonksiyonlar dönüşümü alınmış fonksiyonları ifade etmektedir.

$$\frac{(k+4)!}{k!}\bar{V}[k+4]-\lambda_1^4\bar{V}[k]=0 \Rightarrow \bar{V}[k+4]=\lambda_1^4\frac{k!}{(k+4)!}\bar{V}[k] \quad (4.5)$$

$$\frac{(k+4)!}{k!}\bar{W}[k+4]-\lambda_2^4\bar{W}[k]=0 \Rightarrow \bar{W}[k+4]=\lambda_2^4\frac{k!}{(k+4)!}\bar{W}[k] \quad (4.6)$$

$$\frac{(k+2)!}{k!}\bar{\Theta}[k+2]+\lambda_3^2\bar{\Theta}[k]=0 \Rightarrow \bar{\Theta}[k+2]=-\lambda_3^2\frac{k!}{(k+2)!}\bar{\Theta}[k] \quad (4.7)$$

Denklem 4.5-7’deki eşitlikler DTM’deki tekrarlı bağıntılarını göstermektedir. Burada $k=0,1,2,\dots,N$ ve N serideki terim sayısıdır.

Denklem 3.4-9 ve denklem 3.10-14’de verilen sınır şartlarına Çizelge 4.2’deki sınır şartları dönüşüm kuralları uygulandığında denklem 4.8-17’deki dönüşümü alınmış sınır şartları elde edilir.

$x=0$

Ankastre

Serbest

$$\bar{V}[0]=0 \quad \bar{V}[2]+\bar{V}[3]=0 \quad (4.8)$$

$$\bar{V}[1]=0 \quad \bar{V}[2]=0 \quad (4.9)$$

$$\bar{W}[0]=0 \quad \bar{W}[2]+\bar{W}[3]=0 \quad (4.10)$$

$$\bar{W}[1]=0 \quad \bar{W}[2]=0 \quad (4.11)$$

$$\bar{\Theta}[0]=0 \quad \bar{\Theta}[1]=0 \quad (4.12)$$

$x=L$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{zz}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{V}[k] + M\bar{x}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{V}[k] - \bar{I}_{xz}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{\Theta}[k] \\ & + \bar{I}_{yz}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{W}[k] - EI_1 \sum_{k=2}^N k(k-1)L^{k-2}\bar{V}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{yy}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{W}[k] + M\bar{x}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{W}[k] + \bar{I}_{xy}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{\Theta}[k] \\ & + \bar{I}_{yz}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{V}[k] - EI_2 \sum_{k=2}^N k(k-1)L^{k-2}\bar{W}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & M\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{V}[k] - M\bar{z}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{\Theta}[k] + M\bar{x}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{V}[k] \\ & + EI_1 \sum_{k=3}^N k(k-1)(k-2)L^{k-3}\bar{V}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & M\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{W}[k] + M\bar{y}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{\Theta}[k] + M\bar{x}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{W}[k] \\ & + EI_2 \sum_{k=3}^N k(k-1)(k-2)L^{k-3}\bar{W}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{xx}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{\Theta}[k] - M\bar{z}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{V}[k] + M\bar{y}\omega^2 \sum_{k=0}^N L^k\bar{W}[k] \\ & + \bar{I}_{xy}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{W}[k] - \bar{I}_{xz}\omega^2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{V}[k] - GJ \sum_{k=1}^N kL^{k-1}\bar{\Theta}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Hareket denklemlerinde tekrarlama bağıntıları serinin N tane terimi için şğıdaki gibi açık bir şekilde yazıldığında birinci hareket denklemindeki yüksek mertebeden terimlerin $\bar{V}[0]$, $\bar{V}[1]$, $\bar{V}[2]$ ve $\bar{V}[3]$ terimlerine, aynı şekilde ikinci hareket denklemindekilerin $\bar{W}[0]$, $\bar{W}[1]$, $\bar{W}[2]$ ve $\bar{W}[3]$ terimlerine ve üçüncü hareket denklemindekilerin ise $\bar{\Theta}[0]$ ve $\bar{\Theta}[1]$ terimlerine bağılı olduğu görölmektedir.

$$\begin{aligned} k = 0 & \Rightarrow \bar{V}[4] = \lambda_1^4 \frac{1}{4!} \bar{V}[0] \\ k = 1 & \Rightarrow \bar{V}[5] = \lambda_1^4 \frac{1}{5!} \bar{V}[1] \\ k = 2 & \Rightarrow \bar{V}[6] = \lambda_1^4 \frac{2!}{6!} \bar{V}[2] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
k=3 &\Rightarrow \bar{V}[7] = \lambda_1^4 \frac{3!}{7!} \bar{V}[3] \\
k=4 &\Rightarrow \bar{V}[8] = \lambda_1^4 \frac{4!}{8!} \bar{V}[4] = \lambda_1^8 \frac{1!}{8!} \bar{V}[0] \\
&\vdots \\
k=N-4 &\Rightarrow \bar{V}[N] = \lambda_1^4 \frac{(N-4)!}{N!} \bar{V}[N-4]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
k=0 &\Rightarrow \bar{W}[4] = \lambda_2^4 \frac{1}{4!} \bar{W}[0] \\
k=1 &\Rightarrow \bar{W}[5] = \lambda_2^4 \frac{1}{5!} \bar{W}[1] \\
k=2 &\Rightarrow \bar{W}[6] = \lambda_2^4 \frac{2!}{6!} \bar{W}[2] \\
k=3 &\Rightarrow \bar{W}[7] = \lambda_2^4 \frac{2!}{6!} \bar{W}[3] \\
k=4 &\Rightarrow \bar{W}[8] = \lambda_2^4 \frac{2!}{6!} \bar{W}[4] = \lambda_1^8 \frac{1!}{8!} \bar{W}[0] \\
&\vdots \\
k=N-4 &\Rightarrow \bar{W}[N] = \lambda_2^4 \frac{(N-4)!}{N!} \bar{W}[N-4]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
k=0 &\Rightarrow \bar{\Theta}[2] = -\lambda_3^2 \frac{0!}{2!} \bar{\Theta}[0] \\
k=1 &\Rightarrow \bar{\Theta}[3] = -\lambda_3^2 \frac{1}{5!} \bar{\Theta}[1] \\
k=2 &\Rightarrow \bar{\Theta}[4] = -\lambda_3^2 \frac{2!}{6!} \bar{\Theta}[2] = \lambda_3^4 \frac{1}{6!} \bar{\Theta}[0] \\
&\vdots \\
k=N-2 &\Rightarrow \bar{\Theta}[N] = -\lambda_3^2 \frac{(N-2)!}{N!} \bar{\Theta}[N-2]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A kiriş için sınır şartlarından $\bar{V}[0] = \bar{V}[1] = \bar{W}[0] = \bar{W}[1] = \bar{\Theta}[0] = 0$ olup $\bar{V}[2] = c_1$, $\bar{V}[3] = c_2$, $\bar{W}[2] = c_3$, $\bar{W}[3] = c_4$ ve $\bar{\Theta}[1] = c_5$ kabulü yapılır. S kiriş için ise sınır şartlarından $\bar{V}[2] = \bar{V}[3] = \bar{W}[2] = \bar{W}[3] = \bar{\Theta}[1] = 0$ olup $\bar{V}[0] = c_1$, $\bar{V}[1] = c_2$, $\bar{W}[0] = c_3$, $\bar{W}[1] = c_4$ ve $\bar{\Theta}[0] = c_5$ kabulü yapılarak denklem 4.13-17'deki eşitlikler her iki sınır şartı için matris formunda ayrı ayrı yazılır. Matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle sabit kesitli EB kiriş modelinin doğal frekansları elde edilir. Bulunan doğal frekanslar denklem 4.21'de yerine yazılarak mod şekilleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

4.1.2 Timoshenko kiriş modelinin DTM çözümü

Bu durumda denklem 2.52-56'daki hareket denklemlerine DTM uygulanarak

$$\bar{V}[k+2] = \frac{k!}{(k+2)!} \left\{ \frac{(k+1)!}{k!} \bar{\Psi}_1[k+1] - \lambda_1 \bar{V}[k] \right\} \quad (4.22)$$

$$\bar{\Psi}_1[k+2] = \frac{k!}{(k+2)!} \left\{ (\lambda_3 - \lambda_2) \bar{\Psi}_1[k] - \frac{(k+1)!}{k!} \lambda_3 \bar{V}[k+1] \right\} \quad (4.23)$$

$$\bar{W}[k+2] = \frac{k!}{(k+2)!} \left\{ \frac{(k+1)!}{k!} \bar{\Psi}_2[k+1] - \bar{\lambda}_1 \bar{W}[k] \right\} \quad (4.24)$$

$$\bar{\Psi}_2[k+2] = \frac{k!}{(k+2)!} \left\{ (\lambda_5 - \lambda_4) \bar{\Psi}_2[k] - \frac{(k+1)!}{k!} \lambda_5 \bar{W}[k+1] \right\} \quad (4.25)$$

$$\bar{\Theta}[k+2] = -\frac{k!}{(k+2)!} \lambda_6^2 \bar{\Theta}[k] \quad (4.26)$$

elde edilir.

Timoshenko kiriş modelinde hareket denklemlerinde hem eğilme hem de eğilmeden oluşan kesit eğim fonksiyonları birbirine bağlı olup analitik çözüm yapılırken bu fonksiyonlar ayrıştırılmıştır. Fakat DTM'de bu işleme gerek olmadan hareket denklemleri dönüştürülmüş ve çözüm yapılmıştır. Kirişin sol ucunun A veya S olması durumunda dönüştürülmüş sınır şartları denklem 4.27-31'deki gibi elde edilir.

$x = 0$

Ankastre

Serbest

$$\bar{V}[0] = 0$$

$$\bar{V}[1] - \bar{\Psi}_1[0] = 0$$

$$(4.27)$$

$$\bar{W}[0] = 0 \quad \bar{W}[1] - \bar{\Psi}_2[0] = 0 \quad (4.28)$$

$$\bar{\Psi}_1[0] = 0 \quad \bar{\Psi}_1[1] = 0 \quad (4.29)$$

$$\bar{\Psi}_2[0] = 0 \quad \bar{\Psi}_2[1] = 0 \quad (4.30)$$

$$\bar{\Theta}[0] = 0 \quad \bar{\Theta}[1] = 0 \quad (4.31)$$

Uç kütlelerin olduğu taraftaki sınır şartları ise denklem 4.32-36'daki gibi dönüştürülmüştür:

$$x = L$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{zz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1[k] + M\bar{x} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}[k] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}[k] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2[k] \\ & - EI_1 \sum_{k=1}^N kL^{k-1} \bar{\Psi}_1[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{yy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2[k] + M\bar{x} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}[k] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}[k] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1[k] \\ & - EI_2 \sum_{k=1}^N kL^{k-1} \bar{\Psi}_2[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{xx} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}[k] - M\bar{z} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}[k] - M\bar{y} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}[k] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2[k] \\ & - \bar{I}_{xz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1[k] - GJ \sum_{k=1}^N kL^{k-1} \bar{\Theta}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & M \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}[k] - M\bar{z} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}[k] + (M\bar{x} \omega^2 + \kappa GA) \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1[k] \\ & - \kappa GA \sum_{k=1}^N kL^{k-1} \bar{V}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & M \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}[k] - M\bar{y} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}[k] + (M\bar{x} \omega^2 + \kappa GA) \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2[k] \\ & - \kappa GA \sum_{k=1}^N kL^{k-1} \bar{W}[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Burada \bar{V} , \bar{W} , $\bar{\Psi}_1$, $\bar{\Psi}_2$ ve $\bar{\Theta}$ dönüşümü alınmış fonksiyonları ve V , W , Ψ_1 , Ψ_2 , Θ orijinal fonksiyonları göstermektedir. EB modeline benzer olarak $x=0$ noktasında A sınır şartlarında $\bar{V}[0] = \bar{\Psi}_1[0] = \bar{W}[0] = \bar{\Psi}_2[0] = \bar{\Theta}[0] = 0$ olup $\bar{V}[1] = c_1$, $\bar{\Psi}_1[1] = c_2$, $\bar{W}[1] = c_3$, $\bar{\Psi}_2[1] = c_4$ ve $\bar{\Theta}[1] = c_5$ kabul edilir. S sınır şartı durumunda ise $\bar{V}[0] = c_1$

, $\bar{\Psi}_1[0] = \bar{V}[1] = c_2$, $\bar{\Psi}_2[0] = \bar{W}[1] = c_3$, $\bar{W}[0] = c_4$ ve $\bar{\Theta}[0] = c_5$ kabul edilip $x=L$ 'deki eşitliklere uygulanır ve böylece aşağıdaki homojen denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Denklem 4.37'deki katsayılar matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle sabit kesitli ve uç kütleli Timoshenko kirişinin doğal frekansları hesaplanır.

4.2 Multi-step Diferansiyel Transform Metodu (MDTM)

Bu yöntem DTM'deki yakınsama problemini gidermek için geliştirilmiş olup bunu izah etmek için denklem 4.38'de verilen lineer olmayan başlangıç değer problemini ele alalım (Ertürk ve diğ., 2012).

$$f(t, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0 \quad (4.38)$$

Problemin başlangıç şartları $y^{(k)}(0) = c_k$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ şeklinde olsun. DTM yöntemine göre bu problemin $[0, T]$ aralığında seri çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a^n t^n, \quad t \in [0, T] \quad (4.39)$$

MDTM ise yaklaşık çözüm için yeni bir fikir öne sürmektedir. Buna göre $[0, T]$ aralığının M tane $[t_{m-1}, t_m]$, $m = 1, 2, \dots, M$ alt aralığa $h = T/M$ olacak şekilde eşit adımlarla bölüldüğü kabul edilip ilk önce $[0, t_1]$ aralığında DTM uygulanmakta ve $y_1^{(k)} = c_k$ başlangıç şartları ile denklem 4.40'daki yaklaşık çözüm elde edilmektedir.

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^N a_{1k} t^k, \quad t \in [0, t_1] \quad (4.40)$$

Benzer şekilde $m \geq 2$ için her alt aralıkta ($[t_{m-1}, t_m]$) başlangıç şartları $y_m^{(k)}(t_{m-1}) = y_{m-1}^{(k)}(t_{m-1})$ ile DTM uygulanarak her aralık için bir $y_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, M$ yaklaşık çözümü elde edilir.

$$y_m(t) = \sum_{n=0}^K a_{mn} (t - t_{m-1})^n, \quad t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (4.41)$$

Yani MDTM ile çözüm aşağıdaki gibi parçalı olarak bulunur:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & t \in [0, t_1] \\ y_2(t) & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ y_M(t) & t \in [t_{M-1}, t_M] \end{cases} \quad (4.42)$$

Adım genişliği $h = T$ olduğunda MDTM klasik DTM'ye dönüşür.

4.2.1 EB kiriş modelinin MDTM çözümü

Multi-step DTM uç eklentili değişken kesitli kiriş modeline uygulanırken kirişin eşit parçalara bölüldüğü kabul edilip her bir parça için DTM prosedürü uygulanıp tekrarlama bağıntıları elde edilir. Ayrıca her bir parça arasında uygunluk şartları yazılıp DTM'nin dezavantajı olan yakınsama problemi ortadan kaldırılarak bütün doğal frekanslar ve mod şekilleri doğru bir şekilde elde edilir. Bu çalışmada hareket denklemleri dördüncü mertebeden olup eşitliklerde çok fazla değişken mevcuttur. Yöntemi uygularken kolaylık olması açısından aşağıdaki gibi bazı değişken tanımlamaları yapılarak türevlerin mertebesi düşürülmüştür. Böylece tekrarlama bağıntılarının yazılması ve bilgisayarda kodlanması daha kolaydır. Değişken kesitli EB kirişinin hareket denklemleri (denklem 3.1-3) $B_1 = \rho(x)A(x)$, $B_2 = I_p(x)$, $B_3 = E(x)I_1(x)$, $B_4 = E(x)I_2(x)$ ve $B_5 = G(x)J(x)$ olacak şekilde aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$(B_3 V'')'' - B_1 \omega^2 V = 0 \quad (4.43)$$

$$(B_4 W'')'' - B_1 \omega^2 W = 0 \quad (4.44)$$

$$(B_5\Theta)' + B_2\omega^2\Theta = 0 \quad (4.45)$$

bulunur. Burada $V' = \phi$, $W' = \xi$ olarak tanımlanırsa;

$$V'' = \phi' \quad (4.46)$$

$$W'' = \xi' \quad (4.47)$$

olur. Y ve Z eksenlerindeki eğilme momentleri denklem 4.48-49 ve burulma momenti ise denklem 4.50'deki gibi düzenlenir.

$$B_3V'' = B_3\phi' = M_y \quad (4.48)$$

$$B_4W'' = B_4\xi' = M_z \quad (4.49)$$

$$M_t = B_5\Theta' \quad (4.50)$$

Şu halde bu düzlemlerdeki kesme kuvvetleri sırasıyla denklem 4.51 ve 4.52'deki gibi yazılabilir.

$$Y = (B_3V'')' = M_y' \quad (4.51)$$

$$Z = (B_4W'')' = M_z' \quad (4.52)$$

Son durumda ilgili denklemler aşağıdaki gibi birinci mertebe denklemlere dönüşmüş olur.

$$Y' - B_1\omega^2V = 0 \quad (4.53)$$

$$Z' - B_1\omega^2W = 0 \quad (4.54)$$

$$M_t' + B_2\omega^2\Theta = 0 \quad (4.55)$$

Çizelge 4.1'de verilen kurallar denklem 4.53-55'de verilen hareket denklemlerine uygulanarak tekrarlılama bağıntıları elde edilmiştir. $V' = \phi$ eşitliğinin dönüşümü alınmış fonsiyonu denklem 4.56'deki gibidir. Bilgisayar ortamında kodlamanın daha kolay

olması bakımından denklem 4.57'de gösterildiği gibi u_1 fonksiyonu ϕ' fonksiyonunu tanımlamak için kullanılmış ve dönüşümü alınmıştır.

$$(k+1)\bar{V}[k+1] = \bar{\phi}[k] \Rightarrow \bar{V}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\bar{\phi}[k] \quad (4.56)$$

$$u_1 = \phi' \Rightarrow \bar{U}_1[k] = (k+1)\bar{\phi}[k+1] \quad (4.57)$$

$$\bar{M}_y[k] = \sum_{l=0}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l] = \bar{B}_3[0]\bar{U}_1[k] + \sum_{l=1}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l] \quad (4.58)$$

$$\bar{U}_1[k] = \frac{\bar{M}_y[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l]}{\bar{B}_3[0]}, \quad k \geq 1 \quad (4.59)$$

Denklem 4.58'de eğilme momenti fonksiyonunun dönüşümü alınmış, denklem 4.59'da ise $\bar{U}_1[k]$ fonksiyonu ve dönüşümü alınmış eğilme momenti fonksiyonu ($\bar{M}_y[k]$) arasındaki ilişki belirtilmiştir. Ayrıca kesme kuvvetinin (Y) dönüşümü alınmış fonksiyonu denklem 4.60'daki gibidir.

$$\bar{Y}[k] = (k+1)\bar{M}_y[k+1] \quad (4.60)$$

Dolayısıyla denklem 4.53'den ilk tekrarlar bağıntısı;

$$\bar{Y}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1[l]\bar{V}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (4.61)$$

olarak bulunur. İlk tekrarlar bağıntısının elde edilmesinde uygulanan işlem basamakları benzer şekilde 2. ve 3. tekrarlar bağıntılarını elde etmek için aşağıdaki gibi uygulanır.

$$(k+1)\bar{W}[k+1] = \bar{\xi}[k] \Rightarrow \bar{W}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\bar{\xi}[k] \quad (4.62)$$

$$u_2 = \xi' \Rightarrow \bar{U}_2[k] = (k+1)\bar{\xi}[k+1] \quad (4.63)$$

$$\bar{M}_z[k] = \sum_{l=0}^k \bar{B}_4[l] \bar{U}_2[k-l] = \bar{B}_4[0] \bar{U}_2[k] + \sum_{l=1}^k \bar{B}_4[l] \bar{U}_2[k-l] \quad (4.64)$$

$$\bar{U}_2[k] = \frac{\bar{M}_z[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_4[l] \bar{U}_2[k-l]}{\bar{B}_4[0]}, \quad k \geq 1 \quad (4.65)$$

$$\bar{M}_z[k+1] = \frac{\bar{Z}[k]}{k+1} \quad (4.66)$$

2. tekrarlama bağıntısı;

$$\bar{Z}[k+1] = \frac{1}{(k+1)} \omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1[l] \bar{W}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (4.67)$$

Denklem 4.54-55'den;

$$(k+1) \bar{W}[k+1] = \bar{\xi}[k] \Rightarrow \bar{W}[k+1] = \frac{1}{(k+1)} \bar{\xi}[k] \quad (4.68)$$

$$u_3 = \Theta' \Rightarrow \bar{U}_3[k] = (k+1) \bar{\Theta}[k+1] \quad (4.69)$$

$$\bar{M}_t[k] = \sum_{l=0}^k \bar{B}_5[l] \bar{U}_3[k-l] = \bar{B}_5[0] \bar{U}_3[k] + \sum_{l=1}^k \bar{B}_5[l] \bar{U}_3[k-l] \quad (4.70)$$

$$\bar{U}_3[k] = \frac{\bar{M}_t[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_5[l] \bar{U}_3[k-l]}{\bar{B}_5[0]}, \quad k \geq 1 \quad (4.71)$$

bağıntıları yazılır. Denklem 4.55'in diferansiyel dönüşümü alınarak 3. tekrarlama bağıntısı;

$$\bar{M}_t[k+1] = -\frac{1}{(k+1)} \omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_2[l] \bar{\Theta}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (4.72)$$

şeklinde elde edilir.

Çalışmada giriş boyunun $[0, L]$ üç eşit parçaya bölündüğü kabul edilmiş olup her bir parça için denklemler formül 4.73 ve 4.74'deki gibi ifade edilmiştir.

$$\Delta^i(x) = \sum_{k=0}^K \bar{\Delta}^i[k](x - x_i)^k \quad (4.73)$$

$$\Delta(x) \equiv \begin{cases} \bar{\Delta}^1[k] & x \in [0, x_1] \\ \bar{\Delta}^2[k] & x \in [x_1, x_2] \\ \bar{\Delta}^3[k] & x \in [x_2, x_3] \end{cases} \quad (4.74)$$

Bu eşitliklerde $x_1 = L/3$, $x_2 = 2L/3$ and $x_3 = L$ dir. Ayrıca Δ eğilme (V , W) ve burulma (Θ) fonksiyonlarını temsil etmektedir. Her bir parça arasındaki uygunluk şartları ise denklem 4.75-84'deki gibidir.

$$\bar{V}_{i+1}[k] = \bar{V}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.75)$$

$$\bar{W}_{i+1}[k] = \bar{W}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.76)$$

$$\bar{\Theta}_{i+1}[k] = \bar{\Theta}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.77)$$

$$\bar{\phi}_{i+1}[k] = \bar{\phi}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.78)$$

$$\bar{\xi}_{i+1}[k] = \bar{\xi}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.79)$$

$$\bar{M}_{y_{i+1}}[k] = \bar{M}_{y_i}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.80)$$

$$\bar{Y}_{i+1}[k] = \bar{Y}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.81)$$

$$\bar{Z}_{i+1}[k] = \bar{Z}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.82)$$

$$\bar{M}_{z_{i+1}}[k] = \bar{M}_{z_i}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.83)$$

$$\bar{M}_{t_{i+1}}[k] = \bar{M}_{t_i}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.84)$$

$i = 1, 2$ ve $k = 0, 1, 2, \dots, K$ 'dir. Orijinal sınır şartlarına (denklem 2.39-48) Çizelge 4.2'deki dönüşüm kuralları uygulandığında A ve S kiriş için aşağıdaki denklemler elde edilir.

Soldaki sınır şartları ($x = 0$);

Ankastre

Serbest

$$\bar{V}[0] = 0 \quad \bar{M}_y[0] = 0 \quad (4.85)$$

$$\bar{W}[0] = 0 \quad \bar{M}_z[0] = 0 \quad (4.86)$$

$$\bar{\Theta}[0] = 0 \quad \bar{M}_t[0] = 0 \quad (4.87)$$

$$\bar{\phi}[0] = 0 \quad \bar{Y}[0] = 0 \quad (4.88)$$

$$\bar{\xi}[0] = 0 \quad \bar{Z}[0] = 0 \quad (4.89)$$

Sağdaki sınır şartları ($x = L$);

$$\bar{I}_{zz} \omega^2 \bar{\phi}[L] + M\bar{x} \omega^2 \bar{V}[L] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \bar{\xi}[L] - \bar{M}_y[L] = 0 \quad (4.90)$$

$$\bar{I}_{yy} \omega^2 \bar{\xi}[L] + M\bar{x} \omega^2 \bar{W}[L] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \bar{\phi}[L] - \bar{M}_z[L] = 0 \quad (4.91)$$

$$\bar{I}_{xx} \omega^2 \bar{\Theta}[L] - M\bar{z} \omega^2 \bar{V}[L] + M\bar{y} \omega^2 \bar{W}[L] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \bar{\xi}[L] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \bar{\phi}[L] - \bar{M}_t[L] = 0 \quad (4.92)$$

$$M \omega^2 \bar{V}[L] - M\bar{z} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + M\bar{x} \omega^2 \bar{\phi}[L] + \bar{Y}[L] = 0 \quad (4.93)$$

$$M \omega^2 \bar{W}[L] + M\bar{y} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + M\bar{x} \omega^2 \bar{\xi}[L] + \bar{Z}[L] = 0 \quad (4.94)$$

Kirişin sol ucunun A veya S olması durumunda sırasıyla denklem 4.95 ve 4.96'daki kabuller yapıлып denklem 4.90-94 matris formunda denklem 4.97'deki gibi yazılır.

$$\bar{M}_y[0] = c_1, \bar{Y}[0] = c_2, \bar{M}_z[0] = c_3, \bar{Z}[0] = c_4, \bar{M}_t[0] = c_5 \quad (4.95)$$

$$\bar{V}[0] = c_1, \bar{W}[0] = c_2, \bar{\Theta}[0] = c_3, \bar{\phi}[0] = c_4, \bar{\xi}[0] = c_5 \quad (4.96)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

Burada $A_{ij}(\omega)$, ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$), frekans parametresine bağlı olarak hesaplanan katsayılardır. Sistemin doğal frekansları denklem 4.98'deki gibi katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek, mod şekilleri ise elde edilen doğal frekansların denklem 4.97'de yerine yazılmasıyla elde edilir.

$$\begin{vmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.98)$$

4.2.2 Timoshenko kiriş modelinin MDTM çözümü

Bu kısımda MDTM değişken kesitli Timoshenko kiriş modeline göre elde edilen hareket denklemlerinin çözümü için uygulanmıştır. Bunun için sistemin hareket denklemleri ve sınır şartları aşağıdaki gibi yeniden düzenlenmiştir.

$$(B_6 V')' - (B_6 \Psi_1)' + B_1 \omega^2 V = 0 \quad (4.99)$$

$$(B_6 W')' - (B_6 \Psi_2)' + B_1 \omega^2 W = 0 \quad (4.100)$$

$$(B_3 \Psi_1')' + B_6 V' - B_6 \Psi_1 + f_1 \omega^2 \Psi_1 = 0 \quad (4.101)$$

$$(B_4 \Psi_2')' + B_6 W' - B_6 \Psi_2 + f_2 \omega^2 \Psi_2 = 0 \quad (4.102)$$

$$(B_5 \Theta')' + B_2 \omega^2 \Theta = 0 \quad (4.103)$$

Burada $B_1 = \rho(x)A(x)$, $B_2 = I_p(x)$, $B_3 = E(x)I_1(x)$, $B_4 = E(x)I_2(x)$, $B_5 = G(x)J(x)$, $B_6 = \kappa G(x)A(x)$ dir.

Sınır şartları;

$x = 0$

Ankastre

Serbest

$$V(0)=0 \quad B_6(0)(V'(0)-\Psi_1(0))=0 \quad (4.104)$$

$$W(0)=0 \quad B_6(0)(W'(0)-\Psi_2(0))=0 \quad (4.105)$$

$$\Psi_1(0)=0 \quad B_3(0)\Psi_1'(0)=0 \quad (4.106)$$

$$\Psi_2(0)=0 \quad B_4(0)\Psi_2'(0)=0 \quad (4.107)$$

$$\Theta(0)=0 \quad B_5(0)\Theta'(0)=0 \quad (4.108)$$

$x = L$

$$\bar{I}_{zz}\omega^2\Psi_1(L)+M\bar{x}\omega^2V(L)-\bar{I}_{xz}\omega^2\Theta(L)+\bar{I}_{yz}\omega^2\Psi_2(L)-B_3(L)\Psi_1'(L)=0 \quad (4.109)$$

$$\bar{I}_{yy}\omega^2\Psi_2(L)+M\bar{x}\omega^2W(L)+\bar{I}_{xy}\omega^2\Theta(L)+\bar{I}_{yz}\omega^2\Psi_1(L)-B_4(L)\Psi_2'(L)=0 \quad (4.110)$$

$$\bar{I}_{xx}\omega^2\Theta(L)-M\bar{z}\omega^2V(L)+M\bar{y}\omega^2W(L)+\bar{I}_{xy}\omega^2\Psi_2(L)-\bar{I}_{xz}\omega^2\Psi_1(L)-B_5(L)\Theta'(L)=0 \quad (4.111)$$

$$M\omega^2V(L)+(M\bar{x}\omega^2+B_6(L))\Psi_1(L)-M\bar{z}\omega^2\Theta(L)-B_6(L)V'(L)=0 \quad (4.112)$$

$$M\omega^2W(L)+(M\bar{x}\omega^2+B_6(L))\Psi_2(L)+M\bar{y}\omega^2\Theta(L)-B_6(L)W'(L)=0 \quad (4.113)$$

Daha sonra denklem 4.114-126'daki gibi tanımlamalar yapılmıştır.

$$U_1^1 = B_6' \Rightarrow \bar{U}_1^1[k] = (k+1)\bar{B}_6^1[k+1] \quad (4.114)$$

$$U_2^1 = B_5' \Rightarrow \bar{U}_2^1[k] = (k+1)\bar{B}_5^1[k+1] \quad (4.115)$$

$$U_3^1 = B_3' \Rightarrow \bar{U}_3^1[k] = (k+1)\bar{B}_3^1[k+1] \quad (4.116)$$

$$U_4^1 = B_4' \Rightarrow \bar{U}_4^1[k] = (k+1)\bar{B}_4^1[k+1] \quad (4.117)$$

$$V_1^1 = V' \Rightarrow \bar{V}_1^1[k] = (k+1)\bar{V}^1[k+1] \quad (4.118)$$

$$V_2^1 = V^{1'''} \Rightarrow \bar{V}_2^1[k] = (k+2)(k+1)\bar{V}^1[k+2] \quad (4.119)$$

$$P_1^1 = \Psi_1^{1'} \Rightarrow \bar{P}_1^1[k] = (k+1)\bar{\Psi}_1^1[k+1] \quad (4.120)$$

$$W_1^1 = W^{1'} \Rightarrow \bar{W}_1^1[k] = (k+1)\bar{W}^1[k+1] \quad (4.121)$$

$$W_2^1 = W^{1''} \Rightarrow \bar{W}_2^1[k] = (k+2)(k+1)\bar{W}^1[k+2] \quad (4.122)$$

$$S_1^1 = \Psi_2^{1'} \Rightarrow \bar{S}_1^1[k] = (k+1)\bar{\Psi}_2^1[k+1] \quad (4.123)$$

$$S_2^1 = \Psi_2^{1''} \Rightarrow \bar{S}_2^1[k] = (k+2)(k+1)\bar{\Psi}_2^1[k+2] \quad (4.124)$$

$$\Theta_1^1 = \Theta^{1'} \Rightarrow \bar{\Theta}_1^1[k] = (k+1)\bar{\Theta}^1[k+1] \quad (4.125)$$

$$\Theta_2^1 = \Theta^{1''} \Rightarrow \bar{\Theta}_2^1[k] = (k+2)(k+1)\bar{\Theta}^1[k+2] \quad (4.126)$$

İlk hareket denkleminde dönüşüm kuralları uygulandığında

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^k \bar{B}_6^1[l] \bar{V}_2^1[k-l] + \sum_{l=0}^k \bar{U}_1^1[l] \bar{V}_1^1[k-l] - \sum_{l=0}^k \bar{B}_6^1[l] \bar{P}_1^1[k-l] \\ & - \sum_{l=0}^k \bar{U}_1^1[l] \bar{P}^1[k-l] + \omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1^1[l] \bar{V}^1[k-l] = 0 \end{aligned} \quad (4.127)$$

bulunur. Burada

$$F_1^1 = \sum_{l=0}^k \bar{B}_6^1[l] \bar{V}_2^1[k-l] \quad (4.128)$$

$$F_2^1 = \sum_{l=0}^k \bar{U}_1^1[l] \bar{V}_1^1[k-l] \quad (4.129)$$

$$F_3^1 = \sum_{l=0}^k \bar{B}_6^1[l] \bar{P}_1^1[k-l] \quad (4.130)$$

$$F_4^1 = \sum_{l=0}^k \bar{U}_1^1[l] \bar{P}^1[k-l] \quad (4.131)$$

$$F_5^1 = \omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1^1[l] \bar{V}^1[k-l] \quad (4.132)$$

olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki eşitlikteki ilk terim olan F_1^1 düzenlenirse:

$$F_1^1 = \bar{B}_6^1[0] \bar{V}_2^1[k] + F_6^1 \quad (4.133)$$

burada

$$F_6^1 = \sum_{l=1}^k \bar{B}_6^1[l] \bar{V}_2^1[k-l] \quad (4.134)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra denklem 4.133 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$\bar{B}_6^1[0] \bar{V}_2^1[k] = F_1^1 - F_6^1 = F_3^1 + F_4^1 - (F_2^1 + F_5^1 + F_6^1) \quad (4.135)$$

$\bar{V}_2^1[k] = (k+2)(k+1) \bar{V}^1[k+2]$ olup, denklem 4.135'den Y yönündeki eğilme için tekrarlama bağıntısı elde edilir.

$$\bar{V}^1[k+2] = \frac{F_1^1 - F_6^1}{\bar{B}_6^1[0](k+2)(k+1)} \quad (4.136)$$

Benzer şekilde diğer hareket denklemlerine (4.100-103) yukarıdaki prosedür uygulanır ve tekrarlama bağıntıları yazılır.

$$\bar{W}^1[k+2] = \frac{S_1^1 - S_6^1}{\bar{B}_6^1[0](k+2)(k+1)} \quad (4.137)$$

$$\bar{\Theta}^1[k+2] = \frac{T_1^1 - T_4^1}{\bar{B}_5^1[0](k+2)(k+1)} \quad (4.138)$$

$$\bar{\Psi}_1^1[k+2] = \frac{Y_1^1 - Y_6^1}{\bar{B}_3^1[0](k+2)(k+1)} \quad (4.139)$$

$$\bar{\Psi}_2^1[k+2] = \frac{Z_1^1 - Z_6^1}{\bar{B}_4^1[0](k+2)(k+1)} \quad (4.140)$$

Yine giriş uzunluğu $[0, L]$ üç eşit parçaya bölünmüş ve her bir parça için fonksiyonlar $V^i(x)$, $W^i(x)$, $\Psi_1^i(x)$, $\Psi_2^i(x)$ ve $\Theta^i(x)$ ($i=1, 2, 3$) olarak belirlenmiştir. Ters diferansiyel dönüşüme göre sistemin DTM seri çözümü aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\Delta^i(x) = \sum_{k=0}^K \bar{\Delta}^i[k](x-x_i)^k \quad (4.141)$$

Δ ; \bar{V}^i , \bar{W}^i , $\bar{\Psi}_1^i$, $\bar{\Psi}_2^i$ ve $\bar{\Theta}^i$ dönüşümü alınmış fonksiyonları ve V^i , W^i , Ψ_1^i , Ψ_2^i , Θ^i orijinal fonksiyonları göstermektedir. MDTM'ye göre sistemin seri çözümü denklem 4.142'deki gibidir.

$$\Delta(x) \equiv \begin{cases} \bar{\Delta}^1[k] & x \in [0, x_1] \\ \bar{\Delta}^2[k] & x \in [x_1, x_2] \\ \bar{\Delta}^3[k] & x \in [x_2, x_3] \end{cases} \quad (4.142)$$

burada $x_1 = L/3$, $x_2 = 2L/3$ ve $x_3 = L$ dir. Orijinal sınır şartlarına DTM uygulanarak dönüşmüş sınır şartları A ve S giriş için elde edilmiştir.

$x = 0$ 'daki dönüşümü alınmış sınır şartları;

Ankastre

Serbest

$$\bar{V}^1[0] = 0 \quad \bar{V}^1[1] - \bar{\Psi}_1^1[0] = 0 \quad (4.143)$$

$$\bar{W}^1[0] = 0 \quad \bar{W}^1[1] - \bar{\Psi}_2^1[0] = 0 \quad (4.144)$$

$$\bar{\Psi}_1^1[0] = 0 \quad \bar{\Psi}_1^1[1] = 0 \quad (4.145)$$

$$\bar{\Psi}_2^1[0] = 0 \quad \bar{\Psi}_2^1[1] = 0 \quad (4.146)$$

$$\bar{\Theta}^1[0] = 0 \quad \bar{\Theta}^1[1] = 0 \quad (4.147)$$

$x = L$ 'deki dönüşümü alınmış sınır şartları;

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{zz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1^3[k] + M\bar{x} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}^3[k] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}^3[k] \\ & + \bar{I}_{yz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2^3[k] - B_3(L) \sum_{k=1}^N k L^{k-1} \bar{\Psi}_1^3[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{yy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2^3[k] + M\bar{x} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}^3[k] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}^3[k] \\ & + \bar{I}_{yz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1^3[k] - B_4(L) \sum_{k=1}^N k L^{k-1} \bar{\Psi}_2^3[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{xx} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}^3[k] - M\bar{z} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}^3[k] - M\bar{y} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}^3[k] \\ & + \bar{I}_{xy} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2^3[k] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1^3[k] - B_5(L) \sum_{k=1}^N k L^{k-1} \bar{\Theta}^3[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.150)$$

$$\begin{aligned} & M \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{V}^3[k] - M\bar{z} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}^3[k] + (M\bar{x} \omega^2 + B_6(L)) \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_1^3[k] \\ & - B_6(L) \sum_{k=1}^N k L^{k-1} \bar{V}^3[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

$$\begin{aligned} & M \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{W}^3[k] - M\bar{y} \omega^2 \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Theta}^3[k] + (M\bar{x} \omega^2 + B_6(L)) \sum_{k=0}^N L^k \bar{\Psi}_2^3[k] \\ & - B_6(L) \sum_{k=1}^N k L^{k-1} \bar{W}^3[k] = 0 \end{aligned} \quad (4.152)$$

olur.

Her bir giriş parçası arasındaki uygunluk şartları;

$$\bar{V}^i[k] = \bar{V}^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.153)$$

$$\bar{W}^i[k] = \bar{W}^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.154)$$

$$\bar{\Psi}_1^i[k] = \bar{\Psi}_1^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.155)$$

$$\bar{\Psi}_2^i[k] = \bar{\Psi}_2^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.156)$$

$$\bar{\Psi}_2^i[k] = \bar{\Psi}_2^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.157)$$

$$\bar{\Theta}^i[k] = \bar{\Theta}^{i-1}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (4.158)$$

$i = 2, 3$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$ dir.

Bu durumda, A kiriş için $\bar{V}^1[1] = c_1$, $\bar{W}^1[1] = c_2$, $\bar{\Psi}_1^1[1] = c_3$, $\bar{\Psi}_2^1[1] = c_4$ ve $\bar{\Theta}^1[1] = c_5$ ve S kiriş için $\bar{V}^1[1] = \bar{\Psi}_1^1[0] = c_1$, $\bar{W}^1[1] = \bar{\Psi}_2^1[0] = c_2$, $\bar{V}^1[0] = c_3$, $\bar{W}^1[0] = c_4$, $\bar{\Theta}^1[0] = c_5$ olarak kabul edilir ve denklem 4.148-152 matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.159)$$

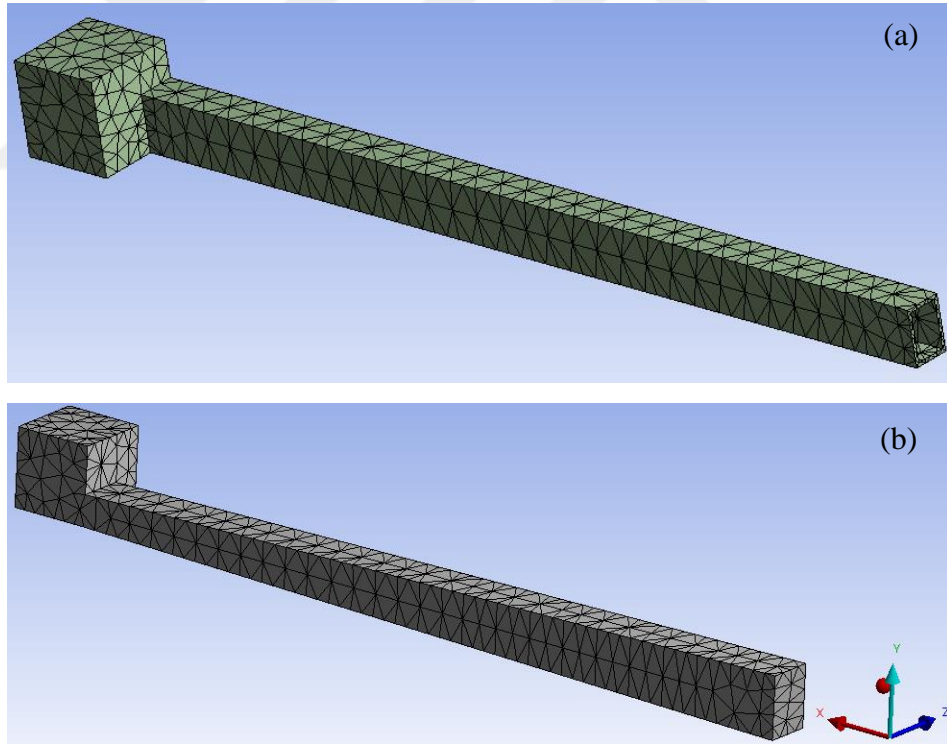
$A_{ij}(\omega)$, (i,j=1,2,3,4,5), frekans parametresine bağlı katsayılar olup, bu katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek sistemin doğal frekansları elde edilir.

$$\begin{vmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & A_{13}(\omega) & A_{14}(\omega) & A_{15}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & A_{23}(\omega) & A_{24}(\omega) & A_{25}(\omega) \\ A_{31}(\omega) & A_{32}(\omega) & A_{33}(\omega) & A_{34}(\omega) & A_{35}(\omega) \\ A_{41}(\omega) & A_{42}(\omega) & A_{43}(\omega) & A_{44}(\omega) & A_{45}(\omega) \\ A_{51}(\omega) & A_{52}(\omega) & A_{53}(\omega) & A_{54}(\omega) & A_{55}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.160)$$

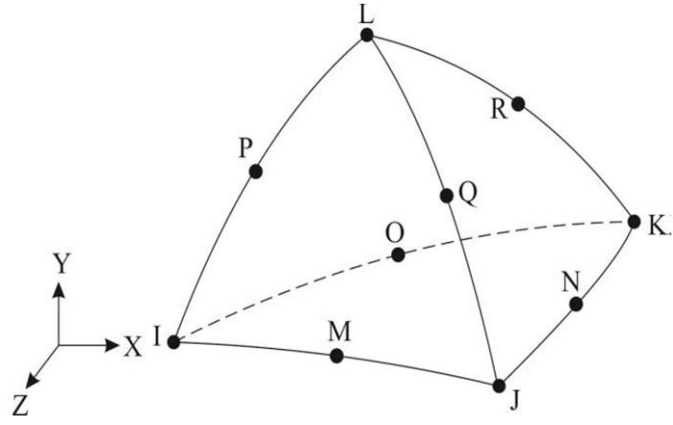
Titreşim modları ise bulunan doğal frekansların denklem 4.159'da yerine yazılmasıyla elde edilir.

5. SE MODELİ

Matematiksel modelin analitik ve sayısal çözümü ile elde edilen sonuçları ve deneysel sonuçları doğrulamak amacıyla uniform ve değişken kesitli kiriş-uç kütle sistemi SE analiz programı olarak yaygın bir şekilde kullanılan ANSYS ortamında modellenmiştir. Sisteme otomatik mesh uygulanarak 2779 elemana bölünmüş ve görüntüleri Şekil 5.1’de verilmiştir. Modal analiz için *Block Lancos* yöntemi uygulanmıştır. SE modelinde modal analiz yapılırken SOLID187 elemanı program tarafından otomatik olarak kullanılmıştır. Bu eleman 10 nodlu olup her bir nod üç serbestlik derecesine sahiptir. Ayrıca SOLID187 elemanı ikinci dereceden kayma davranışına sahiptir ve düzensiz ağ örme için uygundur (Lengvarsk ve diğ., 2013) (Şekil 5.2).

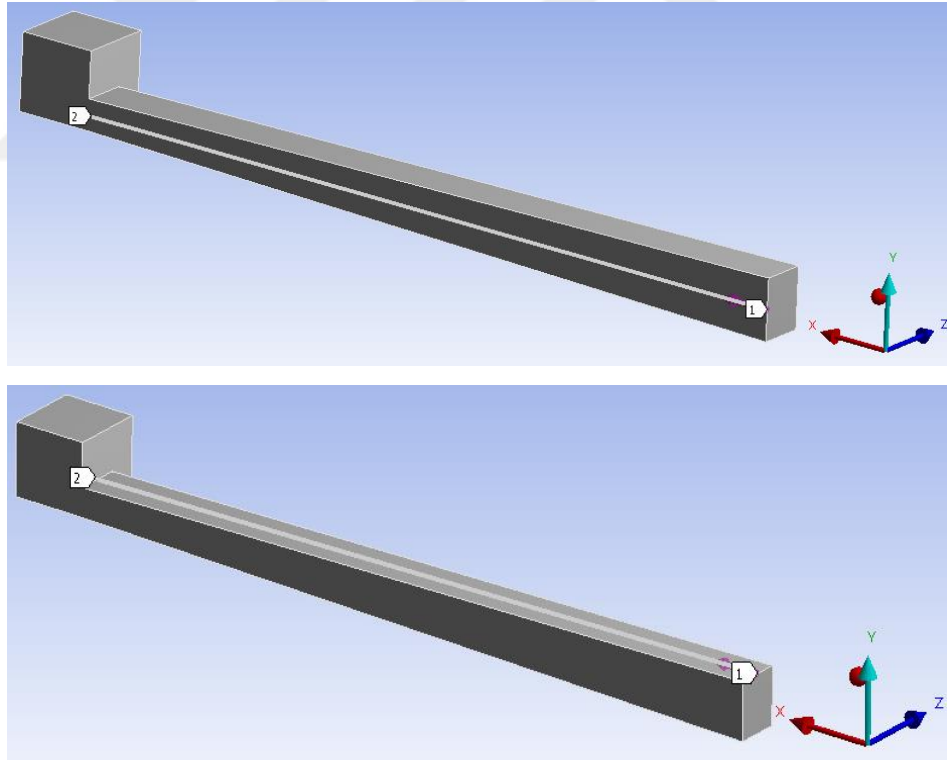


Şekil 5.1 : (a) Sabit ve (b) değişken kesitli 0.5m boyundaki kiriş-uç kütle sistemlerinin ANSYS ortamındaki mesh görüntüleri.



Şekil 5.2 : Üç boyutlu SOLID187 eleman geometrisi (Lengvarsk ve diğ., 2013)

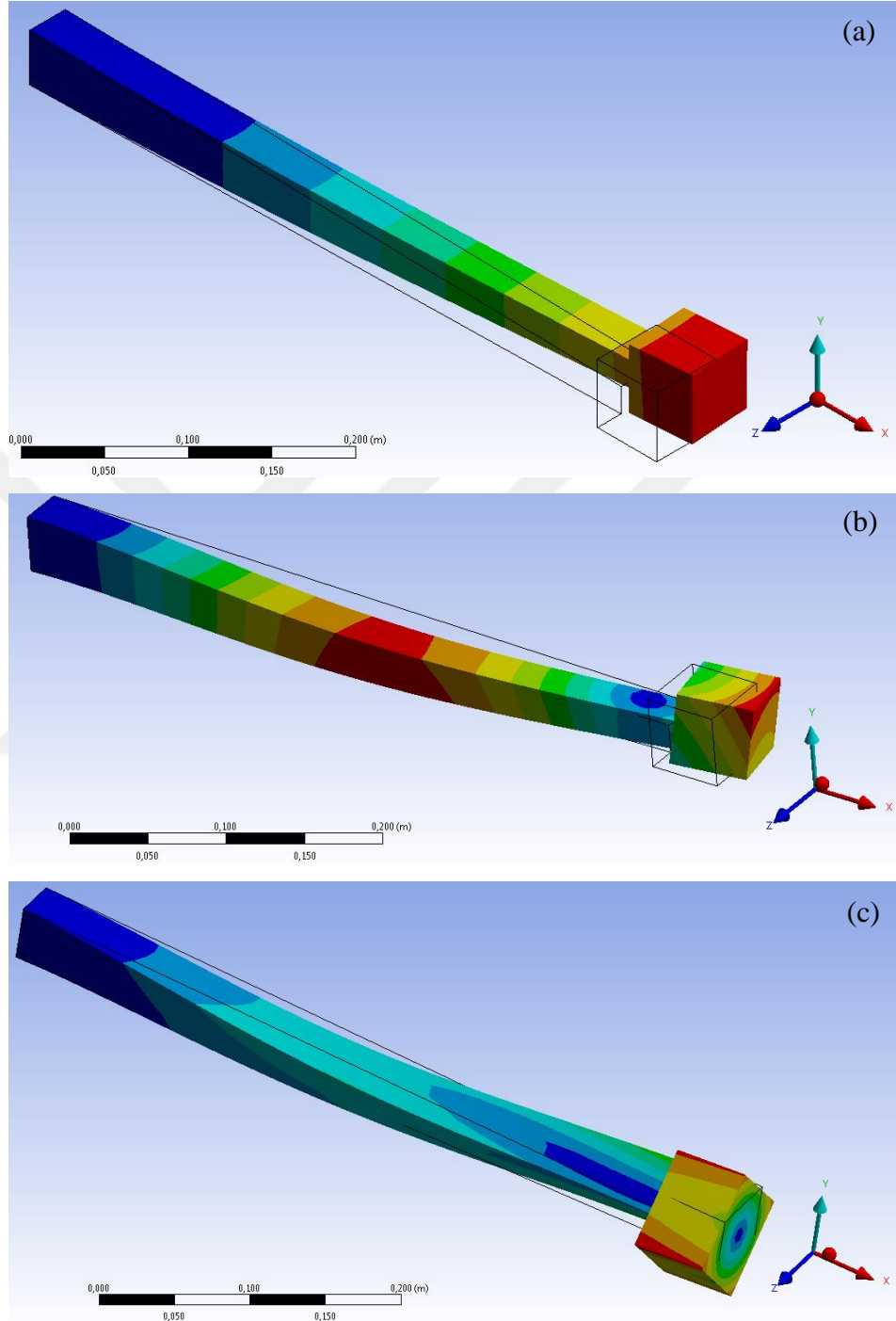
Sistemin farklı eksenlerdeki mod şekillerini çizdirmek için ANSYS ortamında “path” tanımlaması yapılmıştır. Z eksenindeki mod şekillerini elde etmek için kirişin Z yönünde tam orta noktasından geçecek şekilde path çizilmiştir (Şekil 5.3) ve bu path üzerinden o eksendeki mod şekilleri çizdirilmiştir. Aynı işlem kirişin Y eksenini boyunca da tekrarlanmıştır.



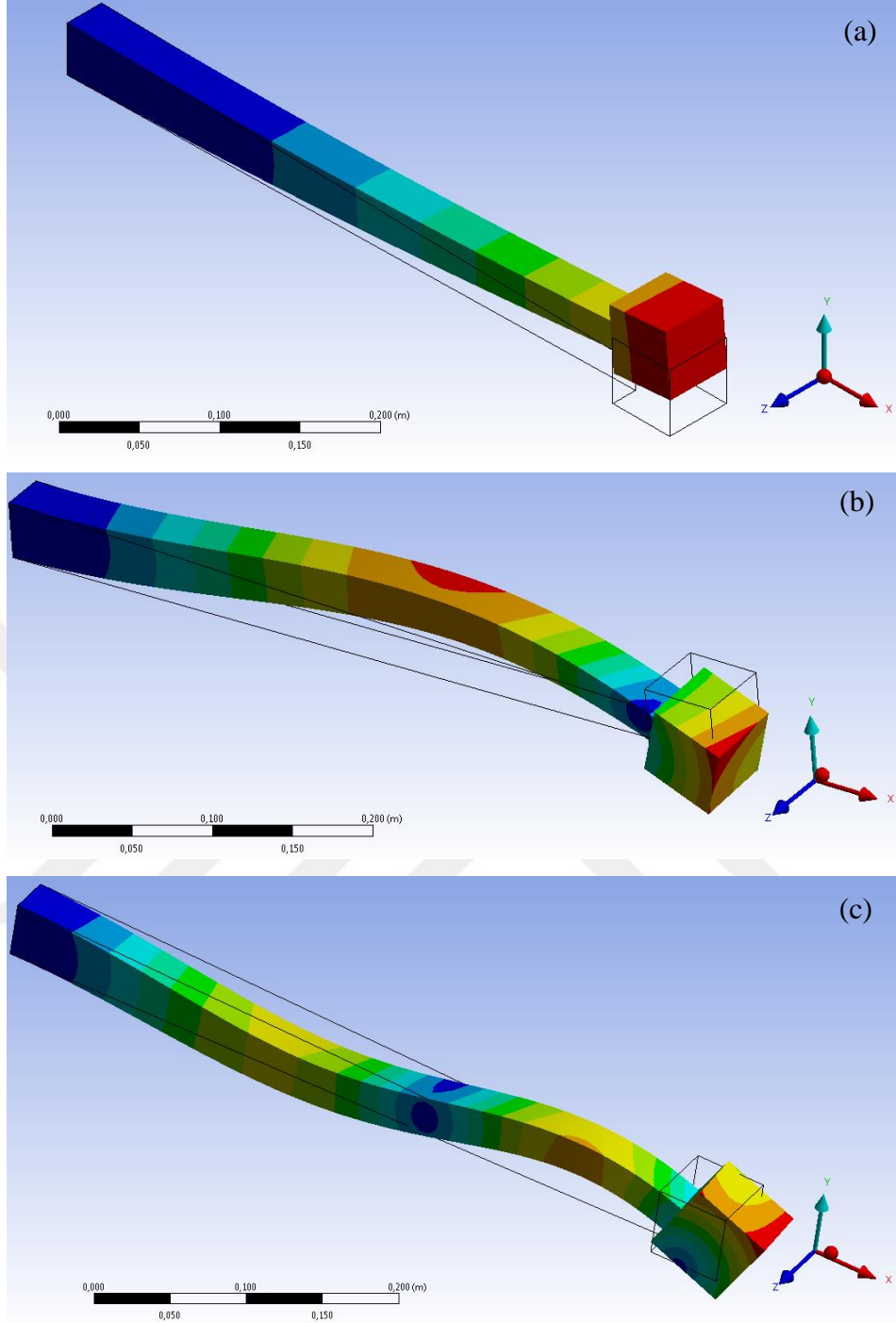
Şekil 5.3 : Kiriş üzerinde path tanımlaması

Bu şekilde elde edilen mod şekilleri sonuçlar kısmında diğer yöntemlerle karşılaştırılmalı olarak farklı kiriş boyları ve kesitleri için verilmiştir. Bu bölümde Çizelge 6.4 ve 6.5’de verilen fiziksel özelliklere sahip değişken kesitli kiriş-uç kütle

sisteminin A sınır şartında Z ve Y eksenlerindeki genel deformasyonları örnek olması bakımından Şekil 5.4 ve 5.5’de verilmiştir. Şekil 5.4(c)’de kirişin deformasyonunda burulmanın etkisinin önemli derecede olduğu görülmektedir.



Şekil 5.4 : Değişken kesitli A kiriş modeli için Z eksenindeki ilk üç mod şekli: (a) 1. mod (72.813 Hz) (b) 2. mod (444.090 Hz) (c) 3. mod (851.980 Hz)



Şekil 5.5 : Değişken kesitli A kiriş için Y eksenindeki ilk üç mod şekli (a) 1. mod (82.630 Hz) (b) 2. mod (439.320 Hz) (c) 3. mod (1146.800 Hz)

6. DENEYSSEL MODAL ANALİZ

Deneysel modal analiz ile mekanik sistemlerin doğal frekansları, mod şekilleri ve sönüm oranları gibi tasarım açısından oldukça önemli olan dinamik karakteristikleri belirlenebilir. Sistemlerin teorik analizinde kabul edilen geometri ve malzeme özellikleri ile sınır şartlarının gerçekte sağlanıp sağlanmadığının tespitinde ve teorik olarak belirlenemeyen dinamik karakteristiklerin belirlenebilmesinde deneysel modal analize gereksinim duyulur (Şekerçi, 2013).

6.1 Frekans Cevap Fonksiyonu Ölçümü

Deneysel model, yapı üzerinde belirlenen noktalardan belirli bir zaman aralığında alınan ölçümlerle yapının titreşim davranışını gösteren modeldir. Zaman aralığında alınan ölçümler frekans aralığına dönüştürülüp işlenerek yapının belirli sınır şartları altında frekans cevap fonksiyonları (FCF) elde edilir. FCF, uygulanan kuvvet ve ölçülen tepki arasındaki transfer fonksiyonu yani çıkış ve giriş arasındaki oran hesaplanarak elde edilir (Gürbüzer, 2005).

Hareket denklemi $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ şeklinde olan tek serbestlik dereceli, viskoz sönümlü kütle yay sisteminin sönümsüz halde doğal frekansı $\omega_0^2 = k/m$ ve sönüm oranı $\xi = c/(2\sqrt{km})$ dir. Uygulanan kuvvetin $f(t) = Fe^{i\omega t}$ biçiminde olduğu kabul edilirse çözüm $x(t) = Xe^{i\omega t}$ olur. Bu durumda sistemin reseptans biçiminde FCF' si denklem 6.1 ve 6.2' deki gibi yazılır (Ewins, 2000).

$$H(\omega) = \alpha(\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} \quad (6.1)$$

$$|\alpha(\omega)| = \frac{|X(\omega)|}{|F(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (6.2)$$

Denklem 6.1 başka bir şekilde;

$$\alpha(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1/k}{(1-\omega/\bar{\omega}_0)^2 + 2i\xi(\omega/\bar{\omega}_0)}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (6.3)$$

denklem 6.3'deki gibi yazılabilir. Burada $X(\omega)$ ve $F(\omega)$ sırasıyla yer değiştirme ve kuvvet fonksiyonlarının Fourier dönüşümüdür. N serbestlik dereceli bir yapıda Reseptans matrisinin bir elemanı

$$\alpha_{jn}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_n(\omega)} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{nr}/k_r}{(1-\omega/\bar{\omega}_r)^2 + 2i\xi_r(\omega/\bar{\omega}_r)} \quad (6.4)$$

biçiminde yazılabilir. Burada r titreşim modlarının sayısını gösteren indis olup, $\alpha_{jn}(\omega)$ sayısı yapının n. serbestlik noktasına uygulanan birim kuvvete karşılık j. serbestliğinin yer değiştirmesini ifade eder. Ayrıca ϕ_{jr} r. modda j. serbestliğin hareket miktarı, ξ_r r. modal sönüm oranı, k_r r. modal katılık ve $\bar{\omega}_r$ r. doğal frekanstır. $\phi_{jr}\phi_{nr}$ ($A_r = \phi_{jr}\phi_{nr}$) ise r. titreşim modunun n. ve j. elemanlarının çarpımıdır ve modal sabit olarak adlandırılır. Yapının titreşim modları elde edilirken FCF matrisinin tek bir sütununu yada satırını ölçmek yeterlidir. Çünkü elemanları α_{jn} olan FCF matrisi simetriktir (He ve Fu, 2001). FCF' den mod şekillerinin belirlenmesi için Tepe tutma (*Peak-picking*), Çember uydurma (*Circle fit*), Ters FCF (*Inverse FRF*), En küçük kareler (*Least-squares method*), Dobson yöntemi gibi farklı yöntemler mevcut olup bu çalışmada uygulama basitliği, incelenen sistemlerin hafif sönümlü ve modlarının yeterince ayrık olması sebebiyle tepe tutma yöntemi uygulanmıştır.

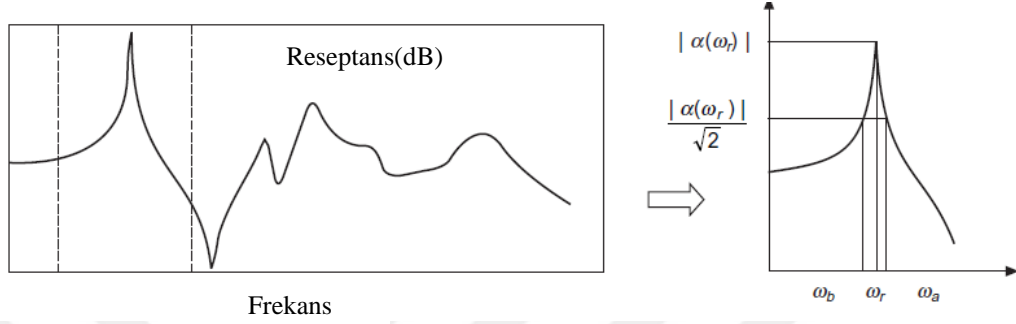
6.1.1 Tepe tutma metodu

Deneysel modal analizde sıkça kullanılan bu yöntem yarım güç (*half-power*) metodu olarak da adlandırılır. Bu yöntemde göre öncelikle FCF eğrisinin r. pik noktasına karşılık gelen doğal frekans ($\omega_r = \omega_{\text{peak}}$) belirlenir. Daha sonra sinyal enerjisinin yarıya düştüğü (yani FCF genliğinin $1/\sqrt{2}$ katına eşit olduğu) noktalar (bunlara yarım güç noktaları denir) belirlenir. Şekil 6.1' de gösterildiği gibi bunlar ω_a ve ω_b noktalarıdır. Buradan sönüm kayıp faktörü (η_r) ve sönüm oranı (ζ_r) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\eta_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{2\omega_r^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_r} \quad (6.5)$$

$$\xi_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{4\omega_r^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r} \quad (6.6)$$

Modal sabitin (A_r) tahmini değeri ise pik noktasındaki FCF genliği ile $A_r = \alpha_{\max} \eta_r \omega_r^2$ şeklinde hesaplanır. Vizkoz sönüm halinde $A_r = 2\alpha_{\max} \xi_r \omega_r^2$ dir.

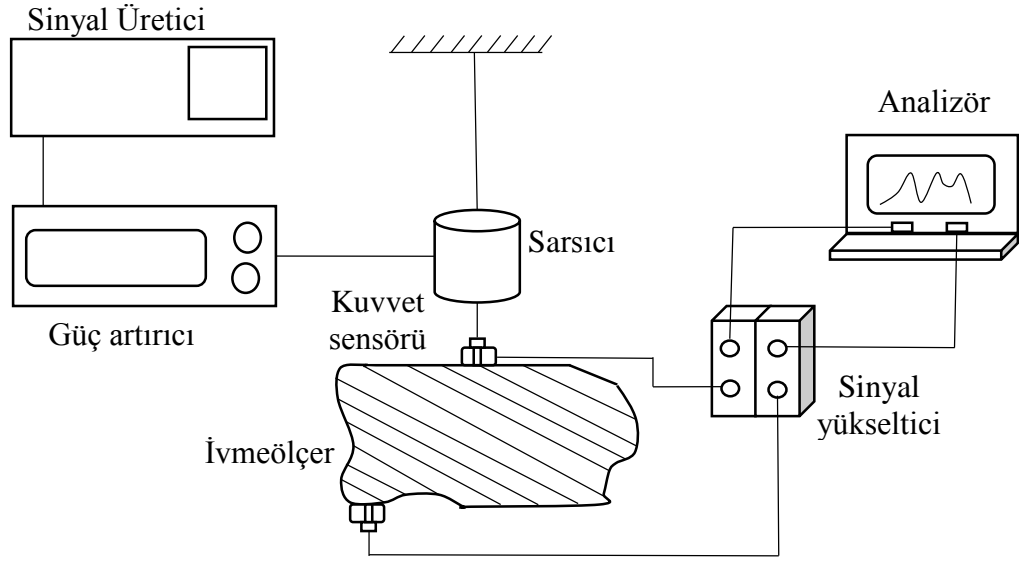


Şekil 6.1 : Tepe tutma (*Peak-picking*) yöntemi (He ve Fu, 2001)

Bu yöntem basit olmasından dolayı analiz sonuçlarının hızlı bir şekilde elde edilmesi mümkündür. Fakat mod şekillerinin elde edilmesinde hata oranı da yüksektir. Modları yeterince ayırık olan bir yapıdan ölçülen yüksek çözünürlükteki FCF verisi için uygun bir methodur. Sönüm, rezonans civarındaki pikleri belirlemede hataya neden olacak şekilde ne çok az, ne de diğer modların incelenen rezonans pikine katkısının çok olmasına yol açacak kadar fazla olmalıdır.

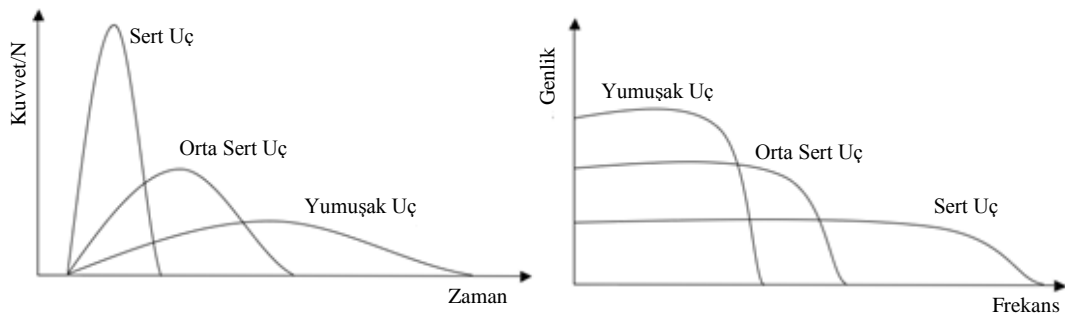
6.2 Ölçüm Sisteminin Elemanları

FCF'lerin hassas olarak belirlenmesi için göz önüne alınması gereken etmenlerden biri sisteme kuvvet uygulama biçimidir. Sisteme kuvvet uygulamak için iki yaygın yöntem (elektrodinamik sarsıcı (*shaker*) ve modal çekiç) mevcuttur. Elektrodinamik sarsıcı (Şekil 6.2) modal testlerde kullanılan önemli bir hareket kaynağı olup bir mıknatıs, hareketli blok ve mıknatıs içinde bir çekirdekten oluşur. Sinyal üretici farklı özelliklerdeki titreşim sinyallerini (random, sinuzoidal, pseudo random, periyodik vs) üretir ve bunlar bir sinyal yükselteciden geçirilip sarsıcıya gönderilir. Sarsıcı bu sinyallere göre yapıyı sarsar. Sarsıcının uyguladığı kuvvet ve yapının titreşim cevabı ilgili sensörlerle ölçülüp şartlandırılır ve analizöre gönderilir. Analizörde filtreleme ve FCF hesaplama işlemleri gerçekleştirilir.



Şekil 6.2 : Sarsıcı kullanılması halinde ölçüm sisteminin elemanları (He ve Fu, 2001)

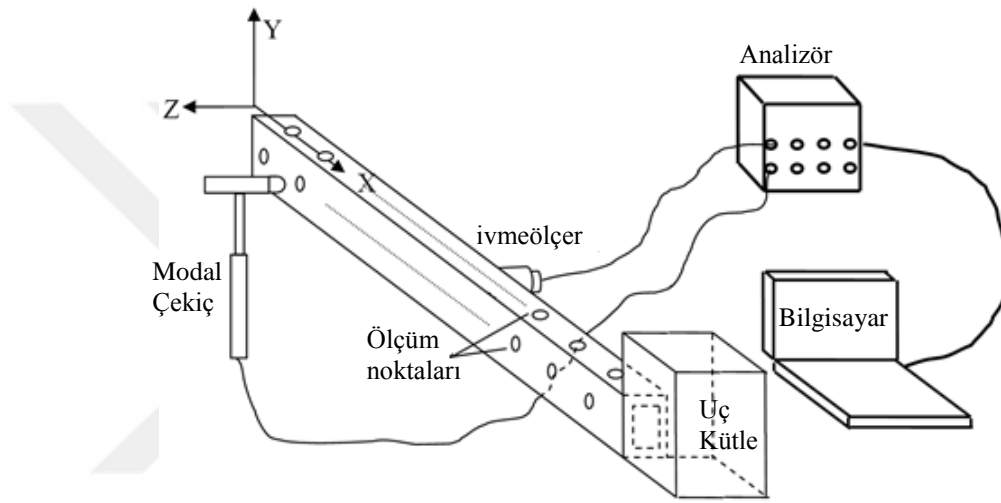
Yapıyı sarsmada kullanılan ikinci metot modal çekiçle darbe uygulamaktır. Modal çekiç testi sarsıcı testine göre uygulaması daha kolay olup testte yapıya belirli bir noktadan bir defa darbe şeklinde tahrik uygulanarak kayıt süresi boyunca veri toplanır. Bu testte çekiğin yapıya bağlantısının yapılması gerekmediğinden yapının dinamik özelliklerini değiştirme riski yoktur. Öte yandan sarsıcı testiyle karşılaştırıldığında sinyalin frekans içeriği kontrol edilememekte olup bu sinyalin kalitesini ve sinyal gürültü oranını etkilemektedir. Diğer bir dezavantajı ise uygulanan kuvvetin ayarlanamaması durumunda nonlineer etkiye neden olacak şekilde kuvvet uygulanma ihtimalidir (He ve Fu, 2001). Modal çekiç testinde çekiç ucu ölçülecek frekans aralığına göre seçilir. Yapının doğal frekansı yüksek ise ucun sert olması gerekir. Endevco-2302-10 nolu çekiç için üç farklı uç seçeneği mevcut olup, Şekil 6.3'de bunların spektrum özellikleri verilmiştir.



Şekil 6.3 : Modal çekiç uç seçenekleri ve bunların özellikleri (<https://endevco.com>)

Yapısal cevabın ölçülmesinde en çok kullanılan elemanlardan birisi ivmeölçerdir. Ölçümün kalitesi ivmeölçerin yapı ile bağlantısından etkilenir. Bunun için bağlantı

yeterince rijit olmalıdır. İvmeölçer yapıya yapışkanlı (*adhesive*), manyetik (*magnetic*) veya izole (*isolated*) altlıklar ile bağlanabilir. İvmeölçer yapının kütlesini değiştirmeyecek kadar küçük kütleli, spektrumu uniform genlikli olmalı ve faz kaymasına yol açmamalıdır. Bu çalışma kapsamında OROS NVGate Version 8.00.002 markalı sinyal toplama cihazı (analizör) kullanılmıştır. Sisteme kuvvet uygulamak için ucuz ve uygulama kolaylığı nedeniyle modal çekiç tercih edilmiştir. İvme ölçer altlığı yapıya Japon yapıştırıcısı ile sağlam bir şekilde bağlanmıştır. Şekil 6.4’de deneyde kullanılan cihazların genel şematik resmi ve Çizelge 6.1’de ise teknik özellikleri verilmiştir.



Şekil 6.4 : Deney setinin şematik çizimi

Çizelge 6.1 : Titreşim ölçüm elemanlarının teknik özellikleri.

No	Adı	Özellikler
1	Analizör	OROS NVGate Version 8.00.002
2	Modal Çekiç	Tip numarası Endevco-2302-10, kuvvet transdüzerinin duyarlılığı 2.27 mV/N, ölçüm aralığı $\pm 5V$ için 500N-2200N, çekiç baş kısmı çelik ve ağırlığı 100gr, rezonans frekansı 50kHz.
3	Çekiç Ucu	Alüminyum, plastik ve kauçuk olmak üzere toplam 3 adet çekiç ucu vardır.
4	İvme ölçer	Tip numarası Dytran-3097A2T, frekans aralığı 0.3-5000Hz ($\pm 5\%$), hassasiyeti 100mV/g, kütlesi 4.3 gr ve titanyum.
5	İvmeölçer altlığı	Dytran 6262, kalınlık 0.711 cm, dış çapı 2.222 cm, malzemesi eloksallı alimünyum.
6	Bağlantı kablosu	İvmeölçer-analizör ve modal çekiç-analizör arasındaki bağlantıları sağlar.



Şekil 6.5 : Darbe çekici, ivmeölçer ve altlığı

6.3 Yazılım Ayarları

Ölçüm ekipmanının numuneye bağlanmasından sonra, deneyde ölçülen verilerin bilgisayar ortamında NVGate programı kullanılarak işlenmesiyle ilgili çeşitli ayarlar yapılır. Öncelikle sisteme girişler Modal çekiç ve ivmeölçer olarak tanıtılır. Daha sonra ölçümün başlangıç ve bitişini belirleyen bir tetikleme tanımlanır. Yani ölçümün yapılması için kuvvete bir başlangıç değerinin belirlenmesidir. Bu çalışmada kuvvetin eşik değeri 4N olarak belirlenmiş ve kuvvet artarken ölçüm yapılması tanımlanmıştır. Daha sonra ivme ve kuvvet sinyallerine pencereleme uygulanmıştır. İvme için response, kuvvet için uniform pencereleme seçilmiştir. Fourier dönüşümünde analiz edilen sinyal periyodik olduğu aralık yerine başka bir aralıkta örneklenirse frekans spektrumunda baskın frekans etrafında yan pikler oluşur. Yani sinyal enerjisinin bir kısmı yan bantlara sızar ve sızıntı (*leakage*) adı verilen durum meydana gelir. Bu durum FCF'lerin hatalı ölçülmesine yol açar. Sızıntı problemini çözmek için giriş ve çıkış sinyalleri bir pencere fonksiyonuyla çarpılır (Ewins, 2000; Gökdağ, 2010). Sızıntıyı önlemenin diğer bir yolu ise kayıt süresini arttırmaktır. Kayıt süresi arttıkça sinyale karışan parazit miktarı da artacağından daha fazla ortalama alarak FCF eğrisini düzgülendirmek (*smoothing*) gerekir. Diğer bir yandan, kayıt süresinin artması ile frekans çözünürlüğü de artacak ve bu durumda analizörün kapasitesi yetersiz olabilecektir (Gökdağ, 2010).

Yazılımla ilgili diğer bir ayarlama olarak frekans aralığı ve çözünürlüğü belirlenir. Frekans aralığı, ölçülmek istenilen modları içine alacak kadar geniş olmalıdır. Frekans çözünürlüğü sızıntı kayıplarını azaltmada önemli olup ölçümlerin yüksek çözünürlükte yapılması tercih edilir (Gökdağ, 2010). Bu çalışmada 0-1 kHz frekans aralığında ölçüm yapılırken çözünürlük 0.625Hz (1600 frekans çizgisi), 0-2 kHz ve 0-2.5 kHz frekans aralıklarında ise 0.313 Hz (3200 frekans çizgisi) olarak belirlenmiştir.

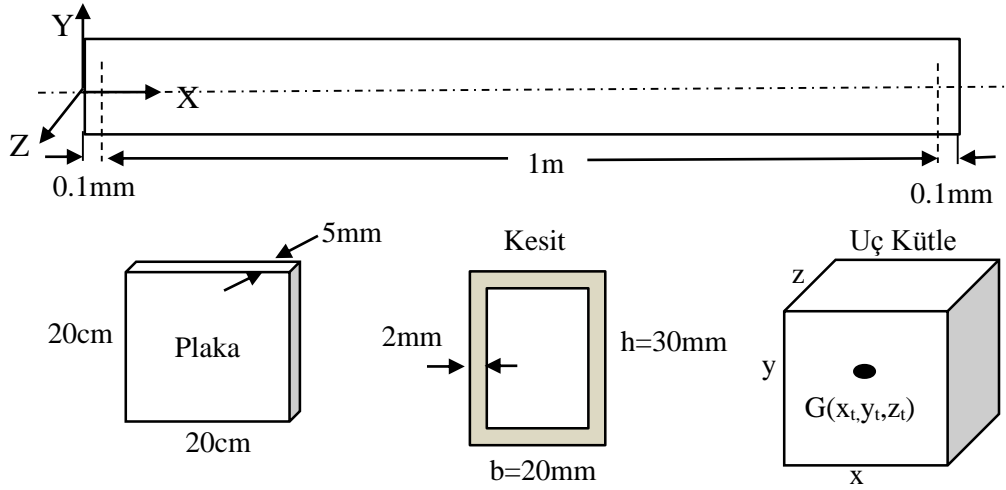
Diğer bir yazılım ayarı ise ölçüme karışan parazitleri azaltmak ve düzgün FCF eğrileri elde etmek için bir noktadan bir kaç defa veri ölçülmesini sağlamaktır. Bunun için bir noktadan 3 ölçüm yapıp ortalaması alınmıştır.

6.4 Deney Düzeneği

Matematiksel modellemede sistemin hareket denklemleri A ve S sınır şartları için çıkarılmış, frekans değerleri ve mod şekilleri bu iki sınır şartı için elde edilmiştir. Modal analiz yöntemi, uniform kirişlerin (EB ve Timoshenko modeli) analitik ve DTM sonuçlarının (Timoshenko modeli için), değişken kesitli Timoshenko kiriş modelinde ise MDTM sonuçlarının karşılaştırılması için uygulanmıştır. Bu nedenle üç farklı numune kullanılarak A ve S sınır şartlarını sağlayacak şekilde deney düzeneği oluşturulmuştur (Şekil 6.6).

6.4.1 Analitik çözüm sonuçlarının karşılaştırılması için deneysel model

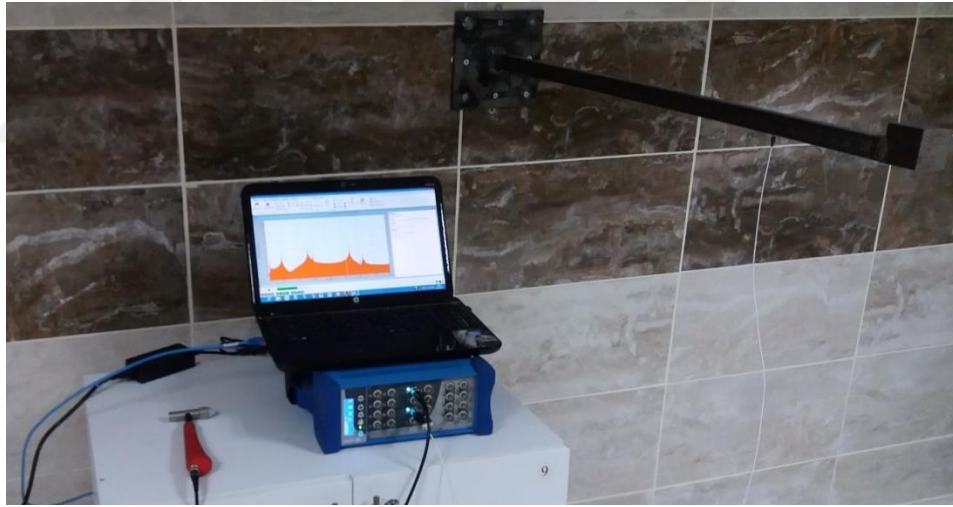
İlk deney düzeneğinde 1.02 m uzunluğunda dikdörtgen kesitli içi boş bir kiriş numunesi hazırlanmıştır. Kesit yüksekliği 30 mm, genişliği 20 mm ve et kalınlığı 2 mm dir. 50 mm boyutlarında küp şeklinde bir kütle kirişin ucuna kaynakla bağlanmıştır. Kiriş ve uç kütle malzemesi çelik olup $E=200\text{Gpa}$, $\rho=7850\text{kg/m}^3$ ve $\nu=0.3$ alınmıştır. A sınır şartı için Şekil 6.6'da gösterildiği gibi 5 mm kalınlık ve $20 \times 20 \text{ cm}^2$ boyutlarındaki bir plaka kirişin diğer ucuna kaynak ettirilmiş ve plaka duvara civatalarla sabitlenmiştir. Uç kütleli geometri özellikleri Çizelge 6.2'de verilmiştir. S sınır şartı ise kiriş-uç kütle sisteminin misina ile uygun yerlerden asılmasıyla sağlanmıştır. Deneysel olarak kiriş üzerinde açısal yer değiştirmelerin ölçülmesi zordur. Fakat lineer yer değiştirmeler modal ivmeölçerler yardımıyla kolaylıkla ölçülebilir. Bu yüzden sistemin A ve S sınır şartı durumunda Y ve Z doğrultularındaki eğilme (V_i ve W_i) titreşim modları ölçülmüştür. Bunun için toplam 39 adet ölçüm noktası belirlenmiş olup ardışık ölçüm noktaları arası mesafe yaklaşık 2.5 cm'dir. İvmeölçer 14 ve 16 nolu ölçüm noktalarına bağlanmıştır. Kayıt süresi 1.6 saniye, frekans aralığı 0-1 kHz, frekans çözünürlüğü 0.625 Hz olarak ayarlanmıştır. Modal çekice sert plastik uç takılmış ve belirlenen bir noktaya bir kez darbe uygulanarak ilk FCF ölçülmüştür. Bir sonraki vuruş için yapının titreşimi sönümlenmiş, kararlı durum şartı için bir süre beklenmiştir. Sistem üzerinde belirlenen her noktadan üç kere ölçüm yapıp ortalaması alınmıştır.



Şekil 6.6 : Uniform kesitli kiriş-uç kütle sisteminin geometrik özellikleri

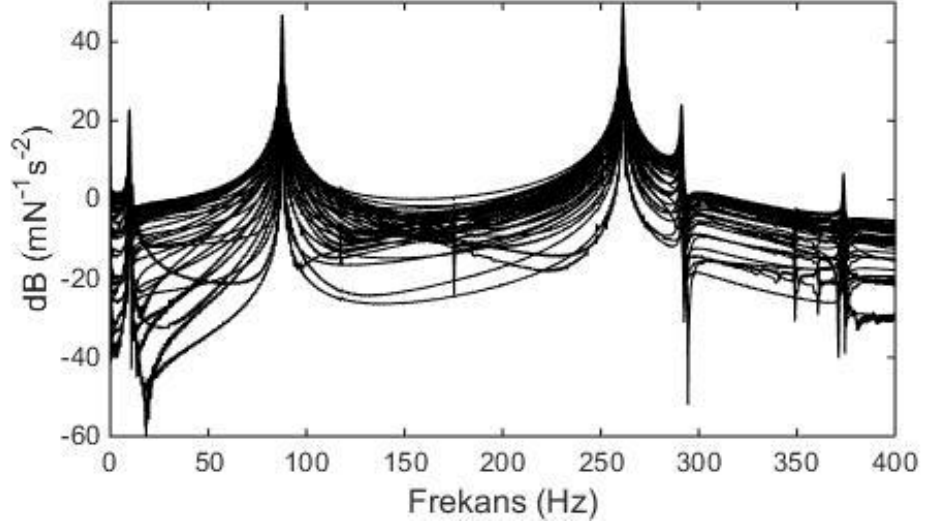
Çizelge 6.2 : Uniform kesitli kiriş sisteminde uç kütle geometri özellikleri.

x (mm)	y (mm)	z (mm)	x_t (mm)	y_t (mm)	z_t (mm)
50	50	50	25	10	-15

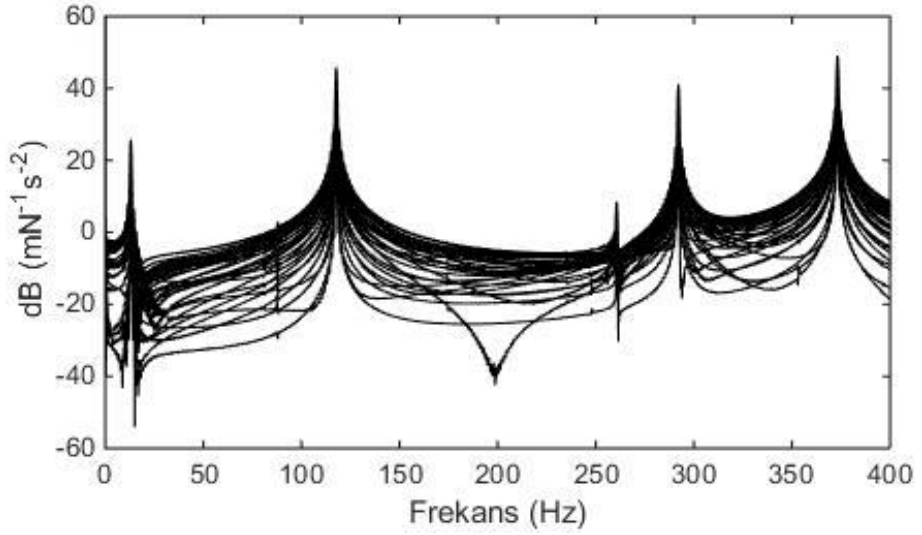


Şekil 6.7 : Deney Düzenegi

A kiriş için ölçülen 39 adet akselaras formundaki FCF'ler Şekil 6.8'de gösterilmiştir. Sistemin Z yönündeki ilk üç doğal frekansı sırasıyla 9.7 Hz, 87.7 Hz, 261.3 Hz ve Y yönündeki frekansları ise 13.0 Hz, 117.7 Hz ve 292.2 Hz'dir.



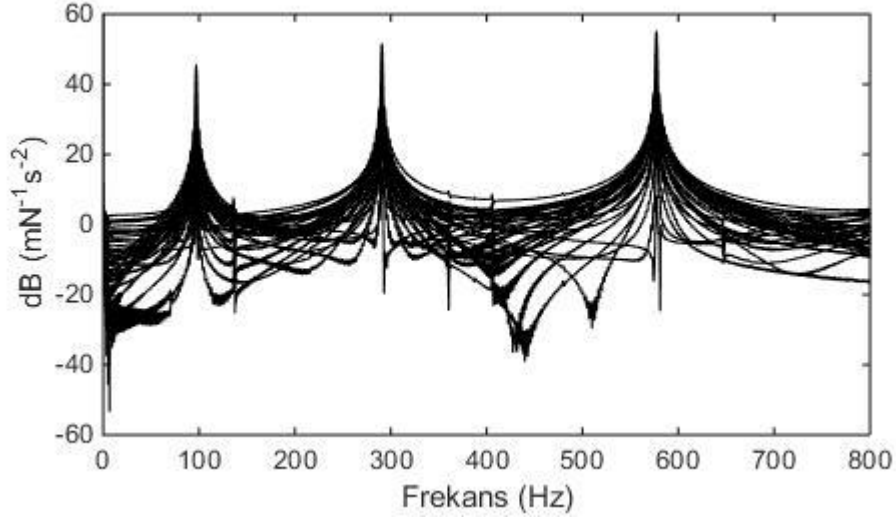
(a)



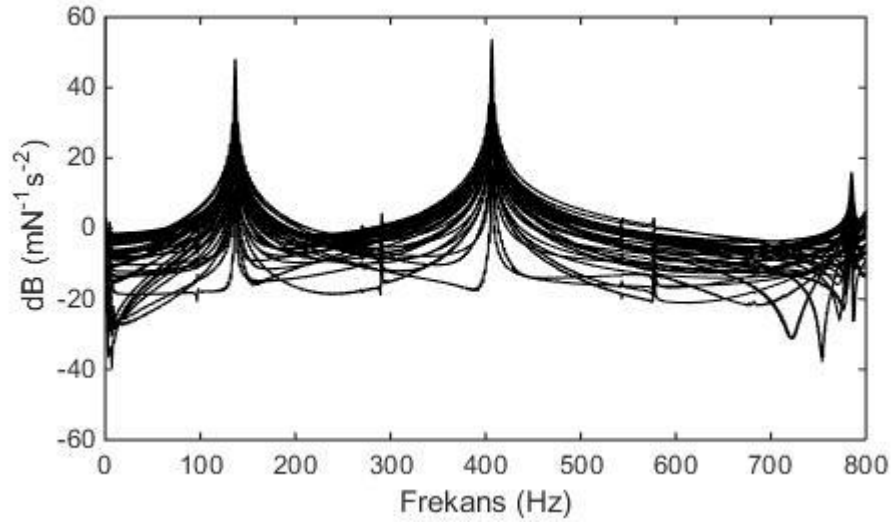
(b)

Şekil 6.8 : A giriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca

S sınır şartı deneyinde misina ile askılama girişin uç noktalarından 0.1 mm içerden yapılmıştır. Ölçülen 39 adet akselerans formundaki FCF Şekil 6.9’da gösterilmiş olup tepe noktaları doğal frekanslara karşılık gelmektedir. Bu sınır şartına göre sistemin Z eksenindeki doğal frekansları sırasıyla 97 Hz, 290 Hz, 577 Hz ve Y eksenini boyunca sınır şartları ise 136.5 Hz, 406.5 Hz ve 785 Hz’dir.



(a)

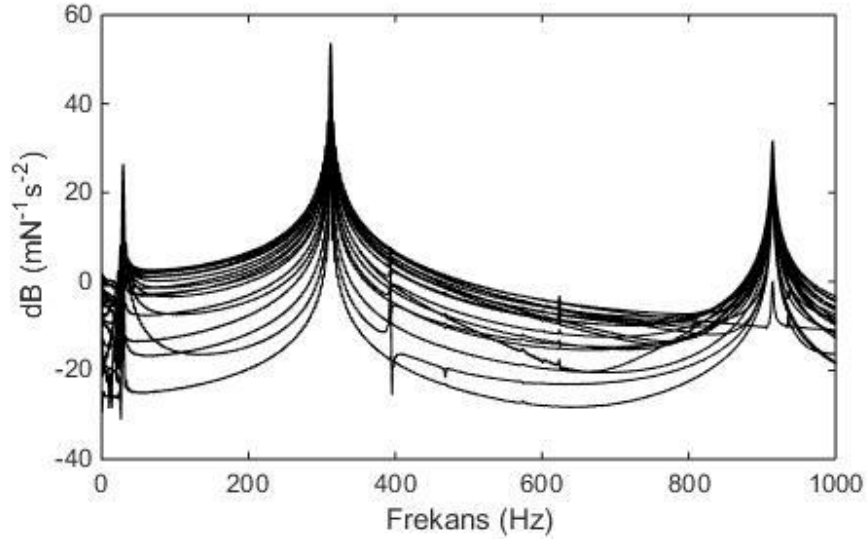


(b)

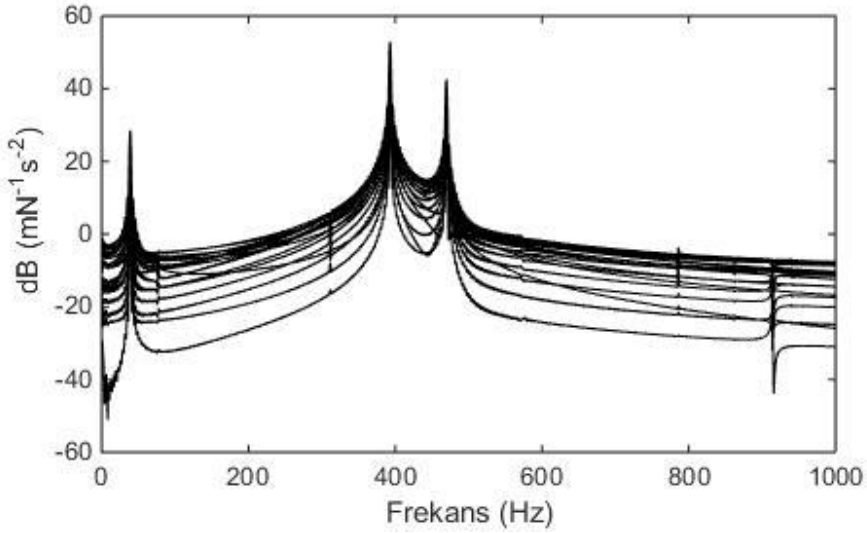
Şekil 6.9 : S kiriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca Sistemin mod şekilleri sonuçlar kısmında karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

6.4.2 DTM sonuçlarını karşılaştırmak için deneysel model

Kiriş boyu 0.5 m olarak değiştirilip sistemin diğer özellikleri (kiriş kesiti ve uç kütle boyutları vb.) ilk deney şartındaki gibi ele alınmıştır. Kiriş üzerinde ardışık iki ölçüm noktası arasındaki uzaklık yaklaşık 2.5 cm olacak şekilde yirmi nokta belirlenmiştir. Modal çekiç ucu çelik uç olarak değiştirilmiş, her bir noktadan üç defa FCF ölçülüp ortalaması alınmıştır. Dolayısıyla her bir düzlem için (Y ve Z) yirmi tane FCF eğrisi elde edilmiştir (Şekil 6.10).



(a)



(b)

Şekil 6.10 : Kiriş boyu $L=0.5\text{m}$ olması durumunda A kiriş FCF eğrileri: (a) Z ve (b) Y eksenini boyunca

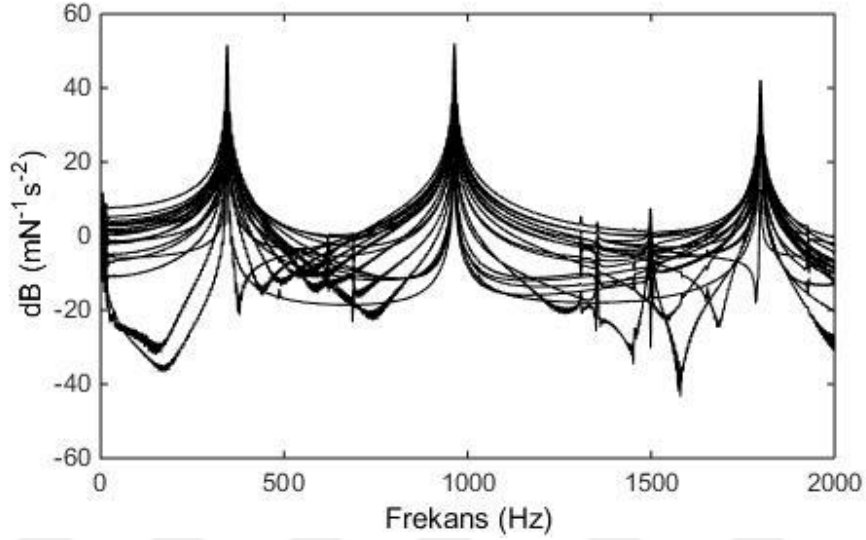
Çizelge 6.3’de A sınır şartı için elde edilen deneysel doğal frekanslar gösterilmektedir.

Çizelge 6.3 : A sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar ($L=0.5\text{m}$).

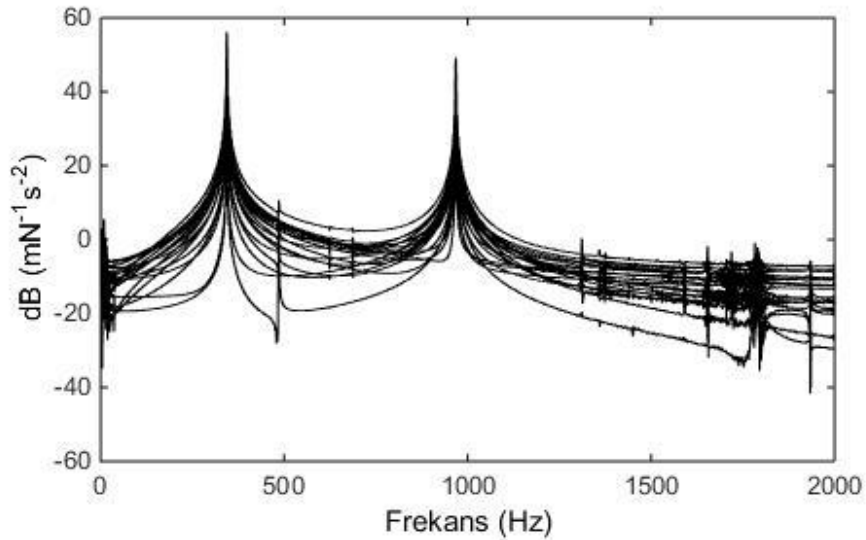
Eksen	ω_1	ω_2	ω_3
Z	29.41	311.88	914.37
Y	38.75	392.69	469.59

S kiriş için deney sadece Z yönündeki doğal frekanslar ve mod şekillerini elde etmek için yapılmış olup Y yönündeki mod şekilleri düzgün bir şekilde elde edilememiştir. Deney düzeneğinin yetersiz olması bunun bir nedeni olarak düşünülmektedir.

Deneyde ivmeölçer öncelikle 16 nolu noktaya bağlanmış, elde edilen veri ile 1. ve 3. mod elde edilmesine rağmen 2. mod hatalı ölçülmüştür. Dolayısıyla ivmeölçerin yeri değiştirilerek (14 nolu nokta) deney tekrarlanmış ve 2. mod düzgün bir şekilde elde edilmiştir. Şekil 6.11 her iki durum içinde elde edilen FCF eğrilerini göstermektedir. Buna göre Z yönündeki ilk üç doğal frekans 345.0 Hz, 967.5 Hz ve 1798.5 Hz olarak ölçülmüştür.



(a) 16 nolu nokta

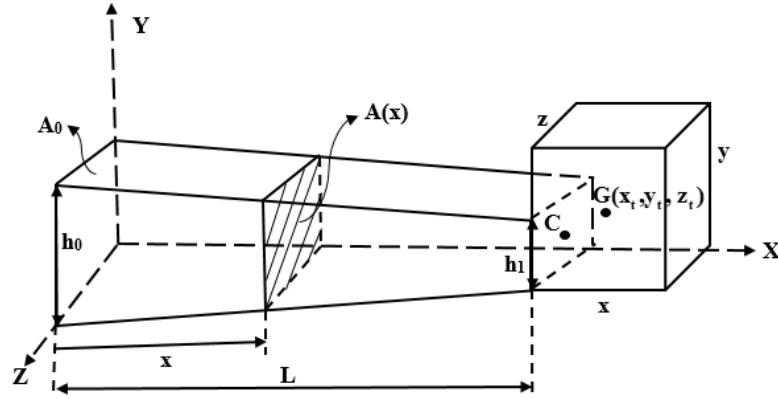


(b) 14 nolu nokta

Şekil 6.11 : A sınır şartı durumunda Z eksenı boyunca ivme ölçerın (a) 16 ve (b) 14 nolu ölçüm noktalarına bağlanması durumunda FCF eğrileri

6.4.3 Değişken kesitli kiriş modeli

Bu deney değişken kesitli kirişlerin MDTM uygulanarak yarı analitik çözümlenmesini doğrulamak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Dikdörtgen kesitli Timoshenko kiriş modelinde kiriş genişliği ve uzunluğu sabit tutulup sadece Y yönünde lineer olarak bir kesit daralması göz önüne alınmıştır (Şekil 6.12). Kiriş boyunca kesit alanı ve alan atalet momentlerinin değişimi Eş. 6.7-6.9'u sağlayacak şekilde ele alınmıştır.



Şekil 6.12 : Uç eklentili değişken kesitli kiriş

$$A(x) = A_0 (1 - c_h x / L) \quad (6.7)$$

$$I_1(x) = I_{01} (1 - c_h x / L) \quad (6.8)$$

$$I_2(x) = I_{02} (1 - c_h x / L) \quad (6.9)$$

Burada $c_h = 1 - h_1/h_0$ olup kesit daralma oranını göstermektedir.

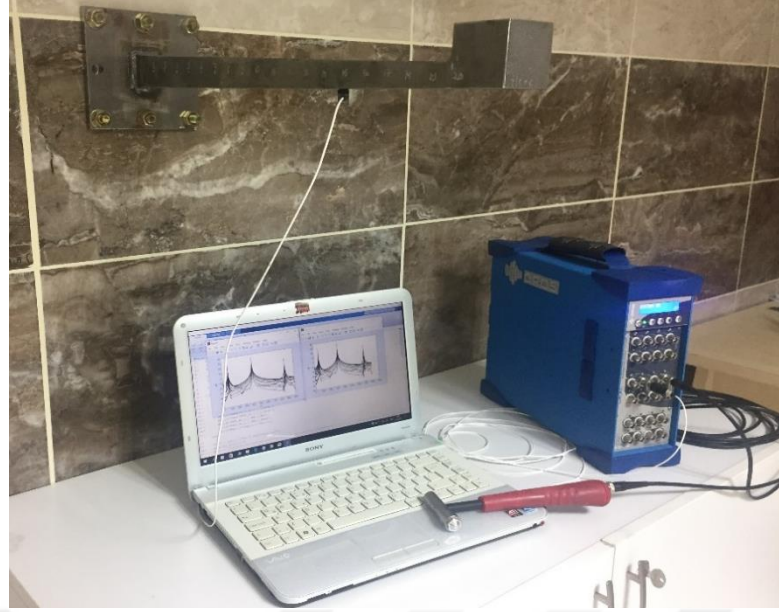
Kiriş ve uç kütle malzemesi çelik seçilmiş olup Çizelge 6.4 ve Çizelge 6.5'te bunların fiziksel özellikleri verilmiştir.

Çizelge 6.4 : Kiriş geometri ve malzeme özellikleri.

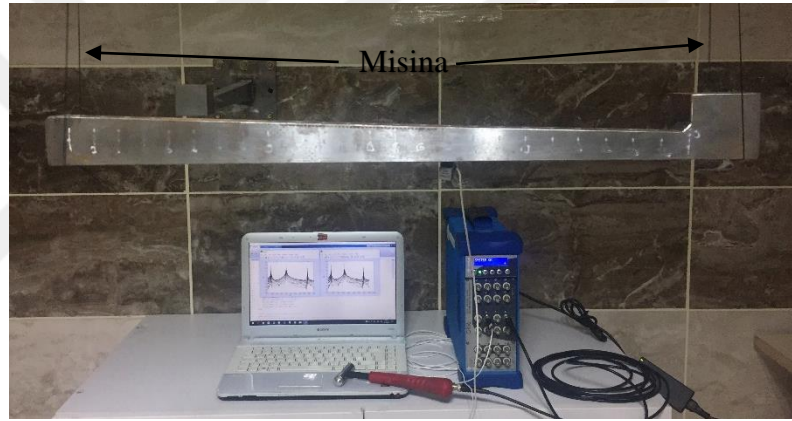
Elastisite Modülü (E)	Yoğunluk (ρ)	Poisson Oranı (ν)	Uzunluk (L)	İlk Yükseklik (h_0)	Son Yükseklik (h_1)	Genişlik (b_0, b_1)
200 Gpa	7850 kg/m ³	0.3	0.5 m	40 mm	20 mm	30 mm

Çizelge 6.5 : Değişken kesitli kiriş sisteminde uç kütle geometri özellikleri.

E	ρ	ν	x	y	z	x_t	y_t	z_t
200 Gpa	7850kg/m ³	0.3	50 mm	50 mm	50 mm	25 mm	15 mm	10 mm



(a)

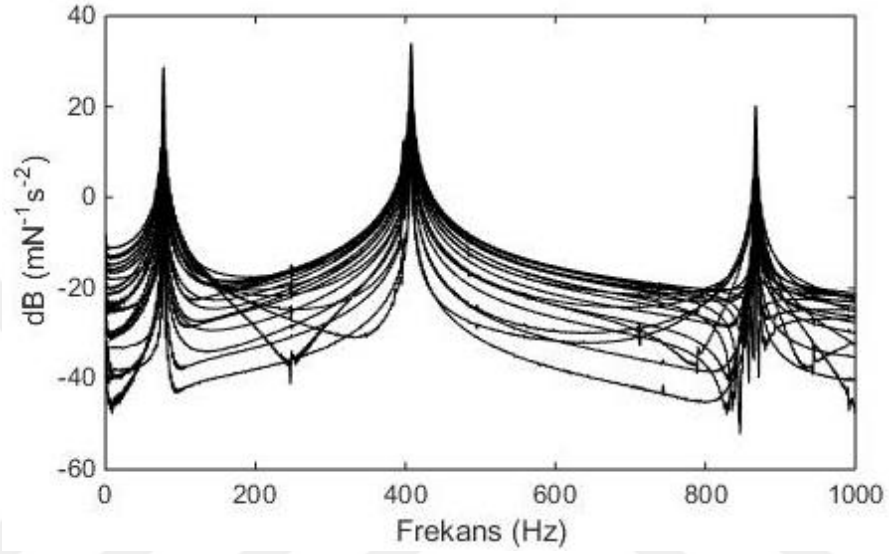


(b)

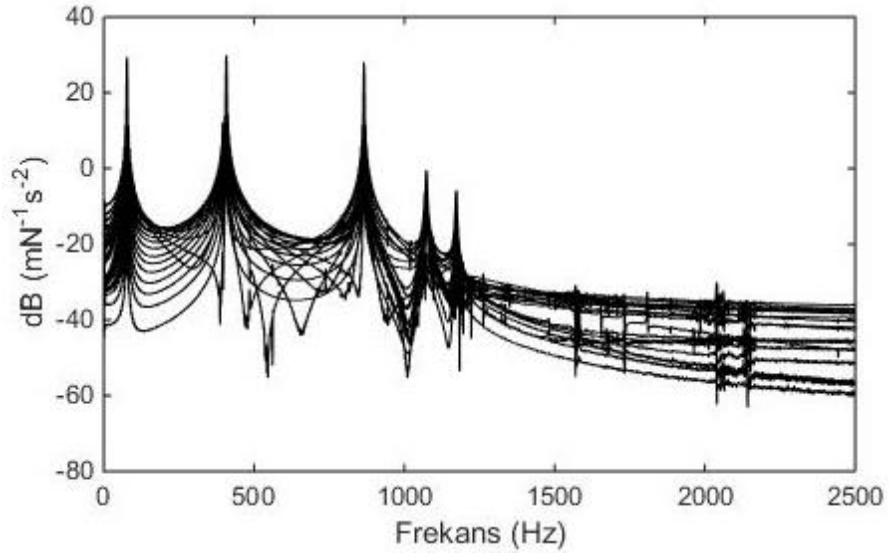
Şekil 6.13 : Değişken kesitli kiriş için deney düzeneği: (a) A sınır şartı (b) S sınır şartı

A kiriş için bir önceki deneyde olduğu gibi ardışık iki nokta arasındaki mesafe 2.5 cm olacak şekilde kiriş üzerinde Y ve Z doğrultularında yirmi nokta belirlenip çekiç darbe testi uygulanmıştır. Bu deneyde kiriş dolu kesitli olduğu için ağırlığı diğer kiriş modellerine göre daha fazladır. Bu nedenle A şartının daha iyi sağlanabilmesi için daha kalın bir plaka (16 mm) kirişin uç kısmına kaynak ettirilmiş ve metrik 12 vidalarla duvara monte edilmiştir (Şekil 6.13(a)). Deney öncelikle ivmeölçerin kirişin Y ekseninde belirlenen noktalardan 14 nolu ölçüm noktasına bağlanması ile gerçekleştirilmiş fakat 2. mod şeklinde 13. noktada bir hata gözlemlenmiştir. Bunun nedeni 14 nolu ölçüm noktasının bu mod şekli için düğüm noktası olması ihtimalidir. İvmeölçer 16 nolu ölçüm noktasına bağlanarak deney tekrar edilmiş ve 2. mod şekli düzgün bir şekilde elde edilmiştir. Ayrıca Y ekseninden elde edilen frekanslar MDTM

ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırıldığında 3. mod şeklinin uyumlu olmadığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle sinyalin frekans aralığı 0-1 kHz'den 0-2.5 kHz'e çıkarılmış ve ivmeölçerin 16. noktaya bağlı olduğu durum için deney tekrarlanmıştır. Frekans çözünürlüğünün artırılması kayıt süresinin artmasına, dolayısıyla deney süresinin uzamasına neden olmuştur. Yapılan son deneyde bütün mod şekilleri düzgün bir şekilde diğer yöntemlerle uyumlu elde edilmiştir. Şekil 6.14 frekans aralığı 0-1 kHz ve 0-2.5 kHz olması durumunda ölçülen FCF eğrilerini göstermektedir.



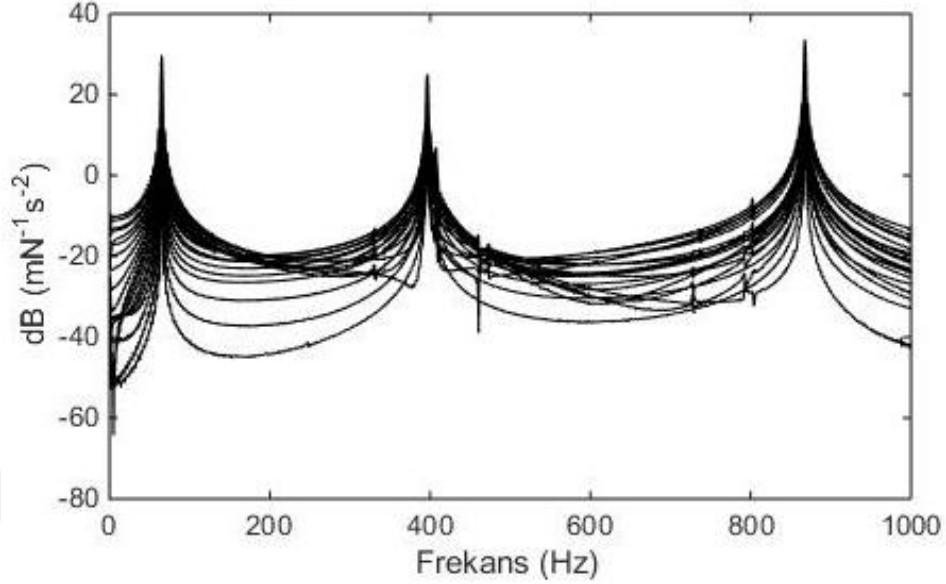
(a) Frekans aralığı 0-1 kHz



(b) Frekans aralığı 0-2.5 kHz

Şekil 6.14 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki FCF eğrileri: (a) Frekans aralığı 0-1 kHz (b) Frekans aralığı 0- 2.5 kHz

Bu deneyde ivmeölçer kirişin Z ekseninde belirlenen noktalardan 16 nolu ölçüm noktasına bağlanmış ve sinyalin frekans aralığı 0-1 kHz olması durumunda eğriler Şekil 6.15'deki gibi düzgün bir şekilde ölçülmüştür.



Şekil 6.15 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki FCF eğrileri

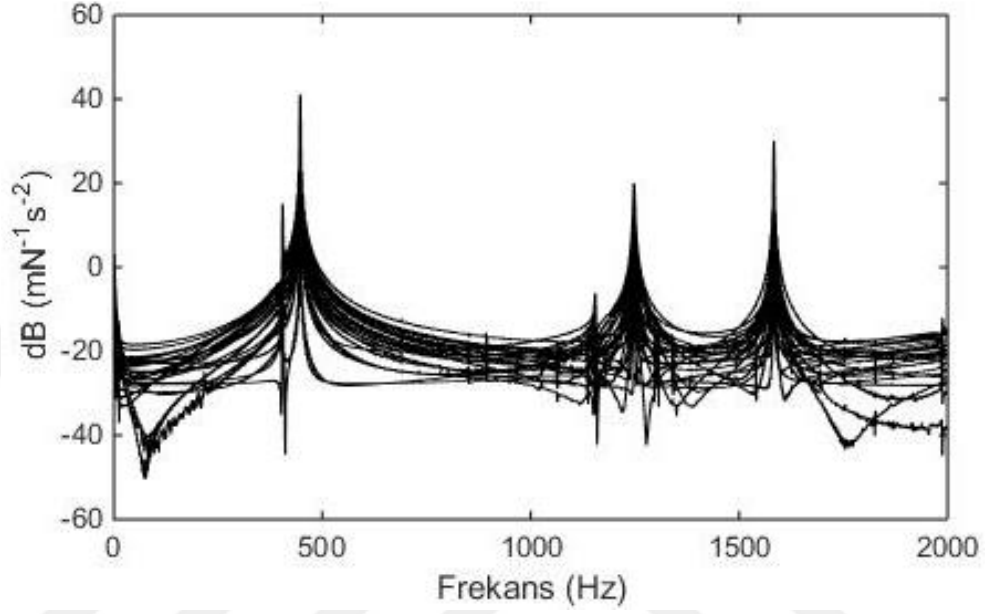
Kiriş üzerinde ne kadar çok noktadan veri toplanırsa sonuçların güvenilirliği o kadar çok arttığından S kiriş sınır şartındaki deney düzeneğinde kiriş üzerinde iki nokta arasındaki mesafe 2 cm olarak değiştirilmiş ve yirmibeş noktadan ölçüm yapılmıştır. Bu deneyde öncelikle ivmeölçer her iki eksen içinde 16 nolu ölçüm noktasına bağlanmış ve ölçüm yapılmıştır. A kiriş deneyinde olduğu gibi Y yönündeki 1. ve 2. mod şekli elde edilmesine rağmen 3. mod şekli hatalı ölçülmüştür. Yine bu noktanın 3. mod şekli için düğüm noktası olduğu düşünülmüş ve deney ivmeölçerin 20 nolu noktaya bağlanmasıyla tekrar edilmiştir. Yapılan 2. deneyde söz konusu moddaki hata giderilmiş ve diğer yöntemlerle uyumlu bir şekilde elde edilmiştir. Şekil 6.16 ve 6.17'de S kiriş durumu için elde edilen FCF eğrileri ve Z eksenindeki FCF eğrilerin sanal kısımları verilmiştir. Çizelge 6.6 ve 6.7 değişken kesitli deney sonucunda elde edilen A ve S sınır şartlarındaki doğal frekansları göstermektedir.

Çizelge 6.6 : Değişken kesitli kiriş için A sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar (L=0.5m).

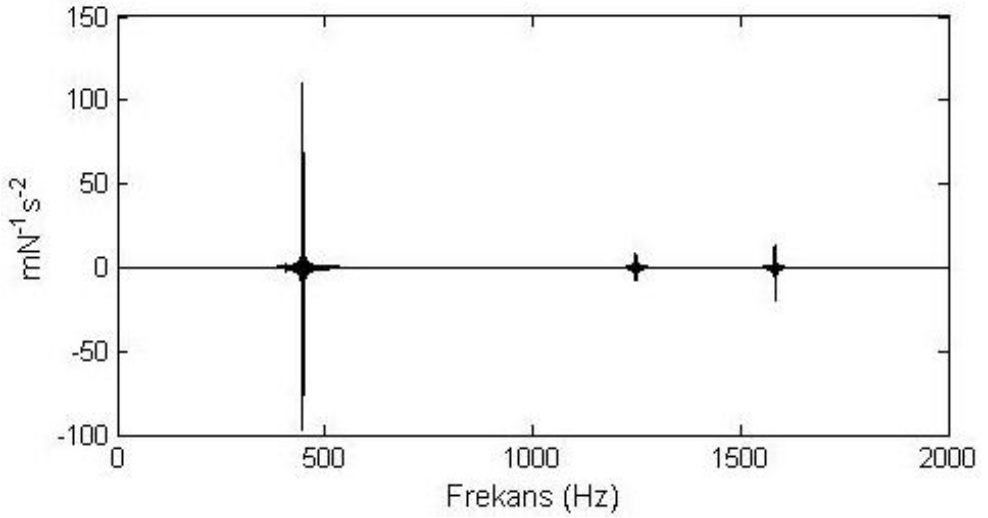
Eksen	ω_1	ω_2	ω_3
Z	65.000	395.688	867.875
Y	77.500	407.600	1073.400

Çizelge 6.7 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartı durumunda deneysel doğal frekanslar (L=0.5m).

Eksen	ω_1	ω_2	ω_3
Z	446.200	1247.500	1583.700
Y	405.000	1156.800	2199.000

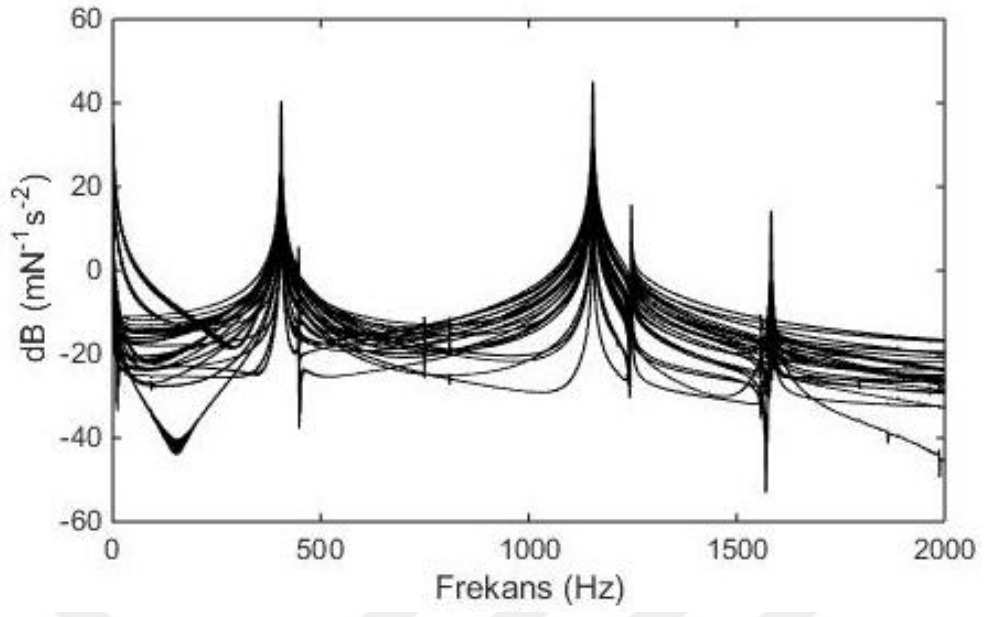


(a)



(b)

Şekil 6.16 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartında Z eksenindeki (a) FCF eğrileri ve (b) bunların sanal kısımları



Şekil 6.17 : Değişken kesitli kiriş için S sınır şartında Y eksenindeki FCF eğrileri

7. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu bölümde, öncelikle, ele alınan kiriş-uç kütle sisteminin analitik çözümünden elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri deney ve SE modeli (ANSYS) ile elde edilenlerle karşılaştırılacak ve matematiksel modelin doğrulaması yapılacaktır. Daha sonra sistemin hareket denklemlerinin DTM ve MDTM çözümleri ile bulunan sonuçlar yine deney ve SE sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

7.1 Analitik Sonuçların ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması

Kiriş kesit ölçüleri Şekil 6.6 ve uç kütle geometrik özellikleri Çizelge 6.2’de verilen sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri EB ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılarak elde edilmiştir.

7.1.1 Doğal frekanslar

Modal analiz yönteminde sistemin Y ve Z eksenlerine ivmeölçer bağlanarak her iki doğrultudaki doğal frekansları elde edilmiş ve bu sonuçlara göre analitik ve ANSYS sonuçları Çizelge 7.1’deki gibi gruplandırılmıştır. Çizelgeden açıkça görülmektedir ki elde edilen analitik sonuçlar deneysel verilerden çok az farklı olup ANSYS sonuçları ile oldukça uyumludur. Yöntemler arasındaki farklılıklara rağmen söz konusu kiriş modellerinin yeteri kadar doğru sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 7.1 : Farklı metodlarla elde edilen kiriş-uç kütle sisteminin A ve S sınır şartlarında doğal frekanslarının (Hz) karşılaştırılması.

Sınır şartı	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	
A	Z eksenli	Analitik (EB)	10.800	94.300	254.200
		Analitik (T)	10.600	92.800	250.000
		Deney	9.700	87.700	261.300
		ANSYS	10.700	93.900	275.800
	Y eksenli	Analitik (EB)	15.000	129.900	308.000
		Analitik (T)	14.800	127.500	302.100
		Deney	13.000	117.700	292.200
		ANSYS	14.800	130.100	302.000

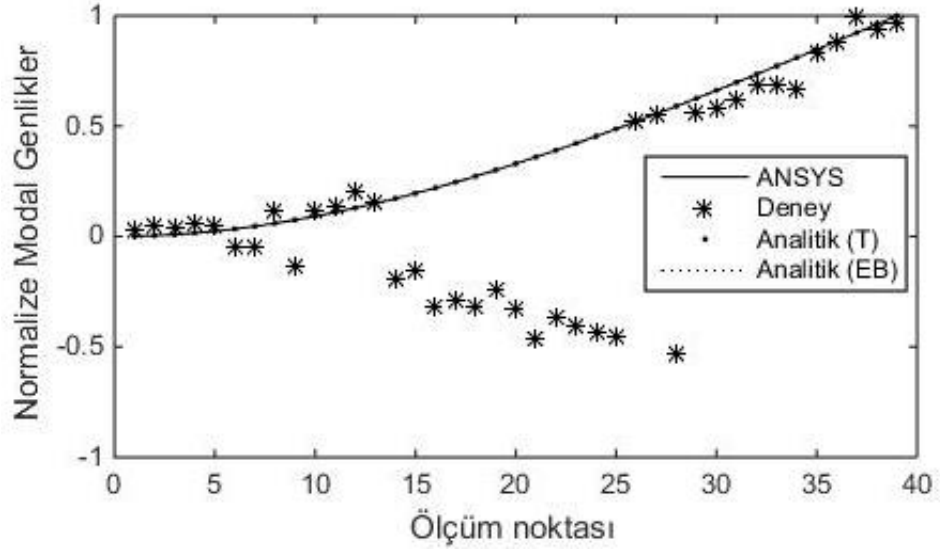
Çizelge 7.1 (devam) : Farklı metodlarla elde edilen giriş-uç kütle sisteminin A ve S sınır şartlarında doğal frekanslarının (Hz) karşılaştırılması.

Sınır şartı	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	
S	Z eksenli	Analitik (EB)	99.700	290.600	570.700
		Analitik (T)	99.500	288.700	563.800
		Deney	97.000	290.000	577.000
		ANSYS	95.800	286.200	570.900
	Yeksenli	Analitik (EB)	141.200	406.600	786.400
		Analitik (T)	140.700	401.600	770.000
		Deney	136.500	406.500	785.000
		ANSYS	134.900	399.600	776.600

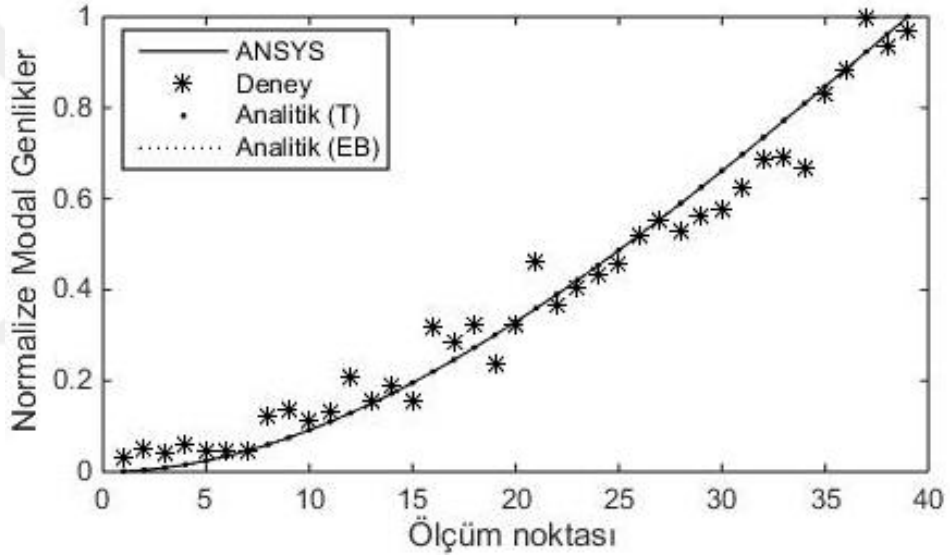
EB; EB giriş teorisi; T: Timoshenko giriş teorisi

7.1.2 Mod şekilleri

İlgili giriş-uç kütle sisteminin mod şekilleri farklı sınır şartları için analitik (EB ve Timoshenko giriş modelleri için), ANSYS ve deneysel yöntemlerle elde edilmiştir. A sınır şartı durumunda Şekil 7.1 ve 7.2’de Z eksenli boyunca, Şekil 7.3 ve 7.4’te ise Y eksenli boyunca ölçülen mod şekilleri karşılaştırılmıştır. Şekil 7.1 (a)’ya bakıldığında zaman deneysel olarak ölçülen 1. mod şeklinin önemli derecede hatalı olduğu görülüyor. Teorik olarak bütün modal genliklerin ANSYS ve analitik şekillerle karşılaştırıldığında ölçüm noktalarında aynı işarete sahip olması beklenmektedir. Fakat şekilden görüldüğü gibi bazı deneysel modal genliklerin işareti beklentinin zıttıdır. Bu durum ölçüm hatasından kaynaklanmaktadır. Rezonans bölgesinde FCF eğrisinin sanal genlikleri birbirine çok yakın ve işaretleri aniden değiştiği için Tepe tutma yönteminde modal genliğin işaretinin ilgili frekansta sanal genliğin işareti olarak algılanmasına neden oluyor. Yani dikkate alınan genliğin işareti yerine hemen komşu pikteki genliğin işareti dikkate alınsaydı bu ölçüm hatası oluşmazdı. Çözüm olarak deneysel mod vektörünün i . genliği onun işareti ile çarpılabilir. Örneğin $e(i) := e(i) * \text{sign}(e(i))$, $i=1,2,\dots,39$, e : deneysel mod vektörü. Bu yöntemle deneysel 1. mod şekli Şekil 7.1 (b)’deki gibi düzeltilmiş, elde edilen yeni şeklin analitik sonuçlarla daha uyumlu olduğu görülmüştür. Buna rağmen, deneysel 1. mod şekli yeteri kadar doğru ölçülememiştir.



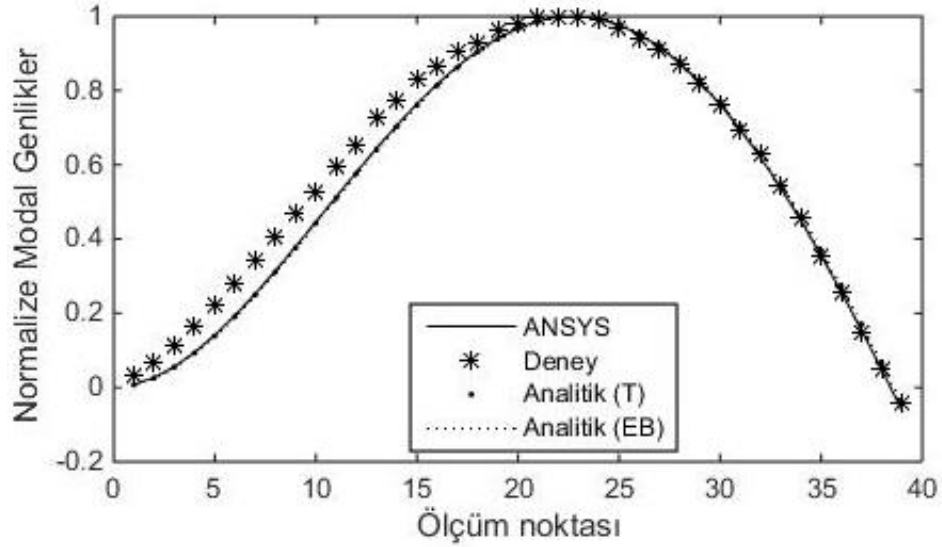
(a)



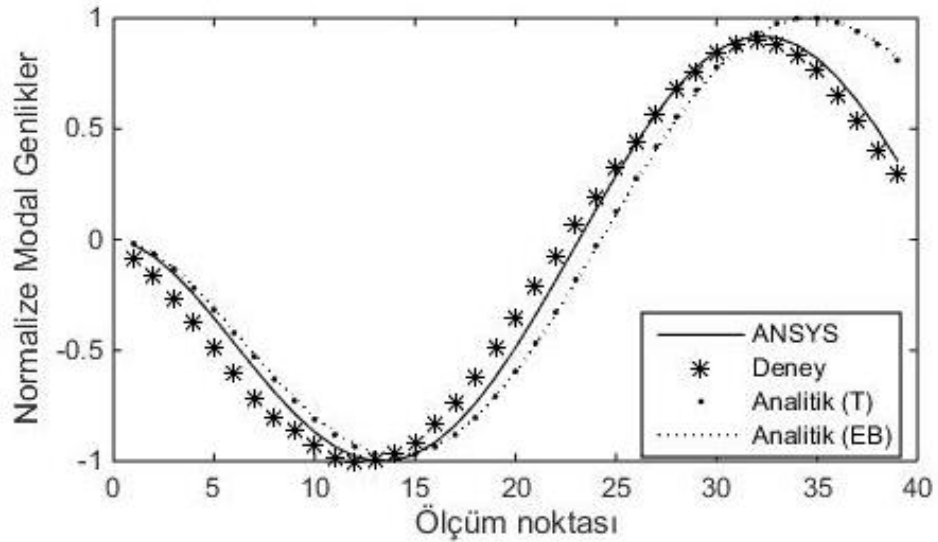
(b)

Şekil 7.1 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 1. modun düzeltilmiş hali

A kiriş için Z yönündeki 2. ve 3. mod şekilleri oldukça uyumlu elde edilmiştir. Şekil 7.2 (a) ve (b)'den analitik sonuçların SE eleman modeli ile birebir örtüştüğü, deneysel mod şekli ile farklılığın çok az olduğu açıkça görülmektedir. Fakat 3. modda analitik modun deney ve SE modelinden uzaklaştığı görülmektedir.



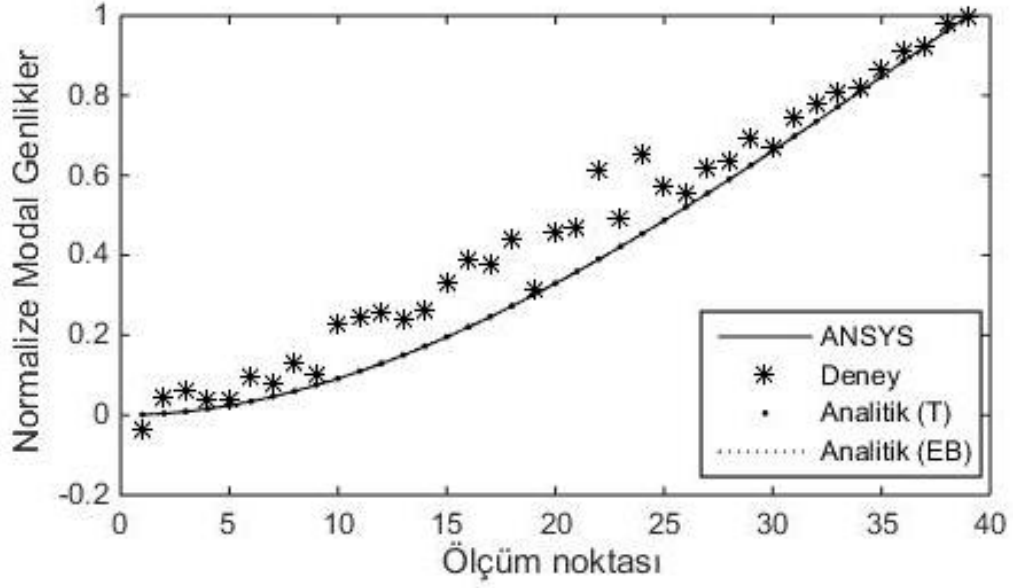
(a)



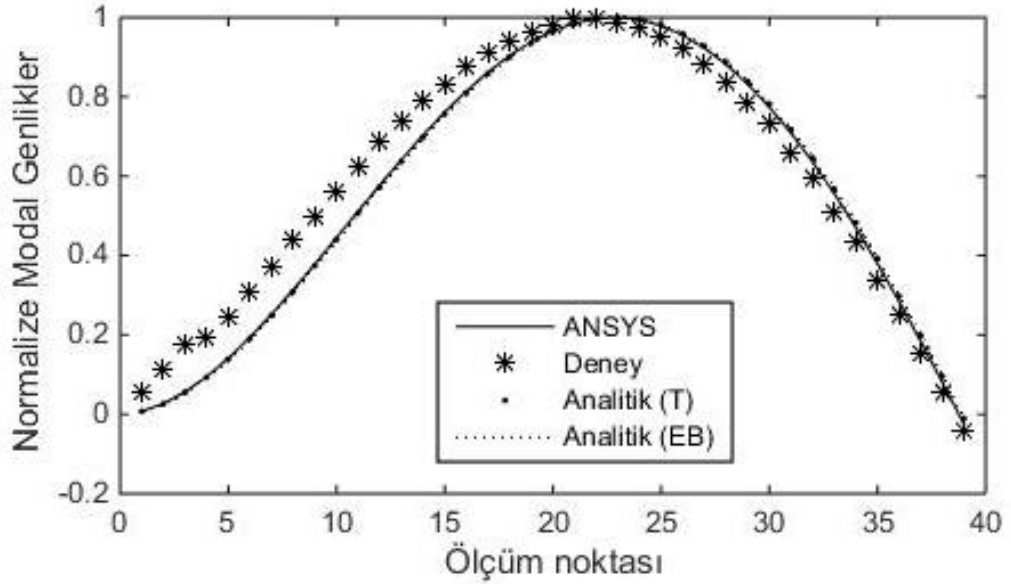
(b)

Şekil 7.2 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 2. mod (b) 3. Mod

Y eksenindeki 1. deneysel mod şekli yine düzgün bir şekilde elde edilememiş (Şekil 7.3(a)) ve Z ekseninde karşılaşılan ölçüm hatasına benzer bir durum Y eksenindeki 3. deneysel modun ölçülmesinde (Şekil 7.4'deki eliptik bölgeye bkz.) ortaya çıkmıştır. Bu mod şeklinde 25. ve 27. ölçüm noktalarında modal genliklerin işaretleri yanlış hesaplanmıştır. Z eksenindeki 1. mod şeklin düzeltilmesine benzer bir yaklaşımla 3. deneysel mod şekli Şekil 7.4 (b)'deki gibi düzeltilmiştir. Bu mod şekillerinde de SE modeli ve analitik sonuçlar arasındaki uyum deneysel sonuçlardan daha fazladır.



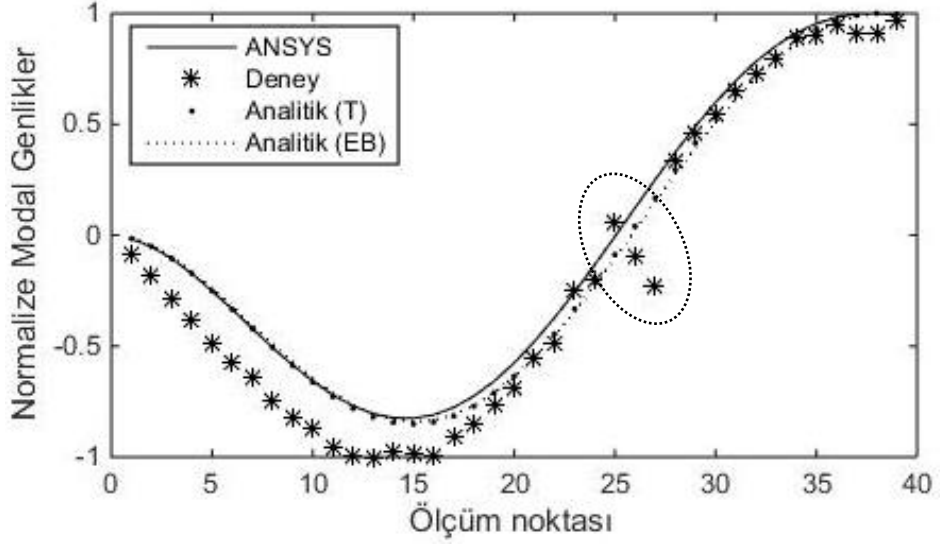
(a)



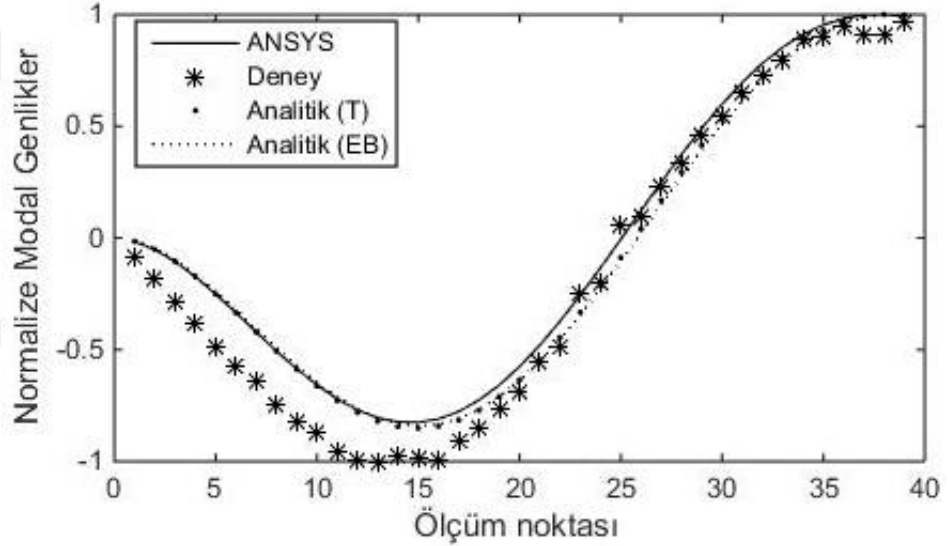
(b)

Şekil 7.3 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod

A sınır şartındaki sonuçlarda bütün farklılıklara rağmen analitik, deneysel ve SE model sonuçlarının genel olarak uyumlu olduğu açıktır. Bu ise analitik modelin doğru sonuçlar verdiğini göstermektedir.



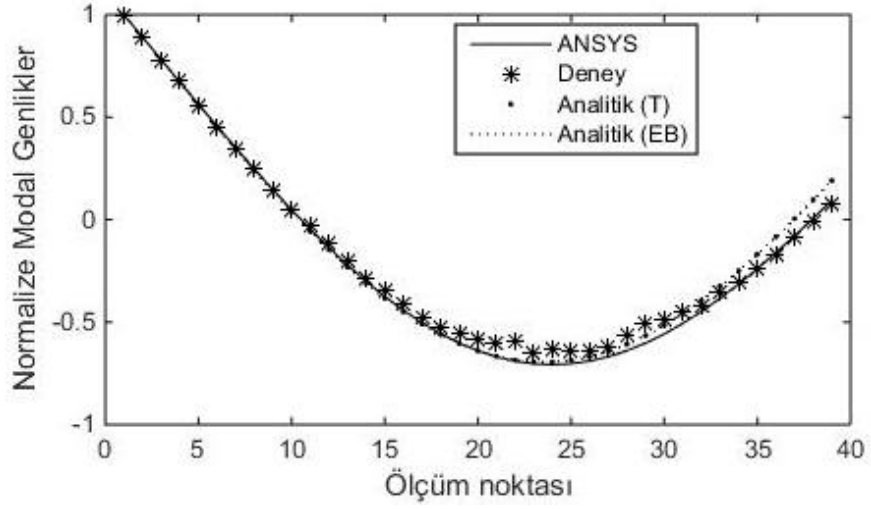
(a)



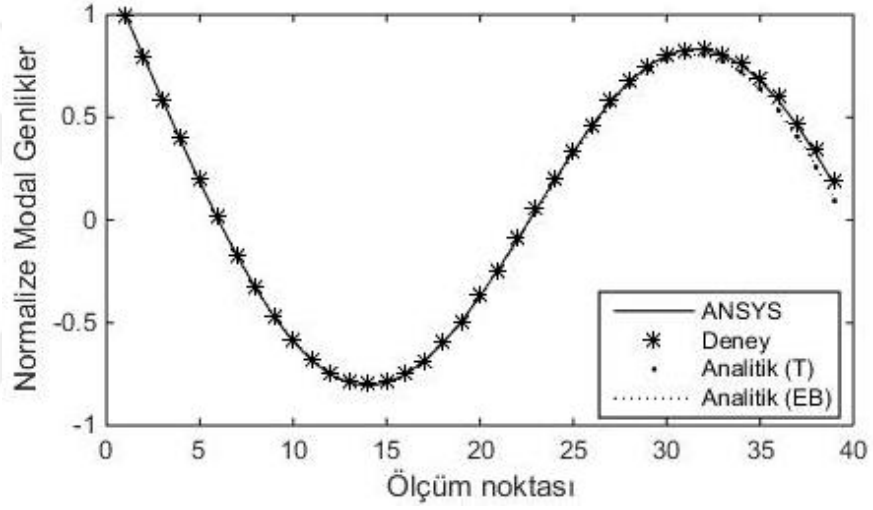
(b)

Şekil 7.4 : Uniform kesitli kiriş için A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 3. mod (b) 3. modun düzeltilmiş hali

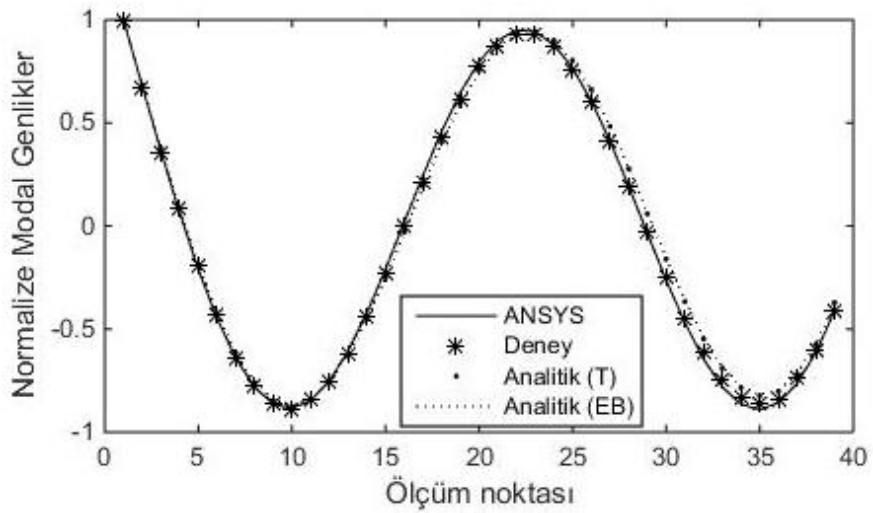
S sınır şartı için mod şekillerinin karşılaştırılması Şekil 7.5 ve 7.6'da gösterilmektedir. Bu durumda mod şekli sonuçları A kiriş ile kıyaslandığında çok daha uyumlu elde edilmiştir. A sınır şartında gerçekleştirilen deneyde sınır şartının yeterince sağlanmamış olma ihtimalinden ötürü deneysel sonuçlarla analitik ve nümerik sonuçlar farklı olabilir. Deney sırasında S sınır şartının sağlanması daha kolay olmasına rağmen, Y eksenindeki 3. deneysel mod şekli (800 Hz'e karşılık gelen) plastik çekiç ucun aralığının dışında kalmasından dolayı elde edilememiştir (Şekil 7.6(c)).



(a)

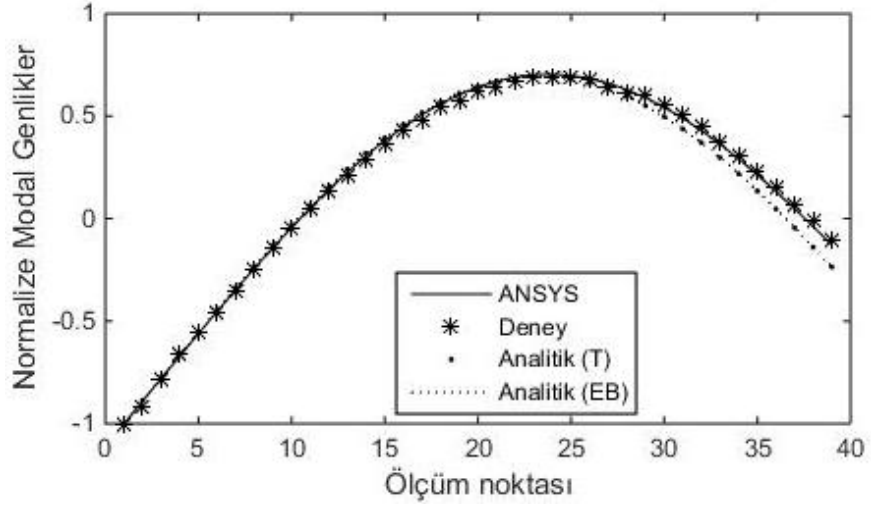


(b)

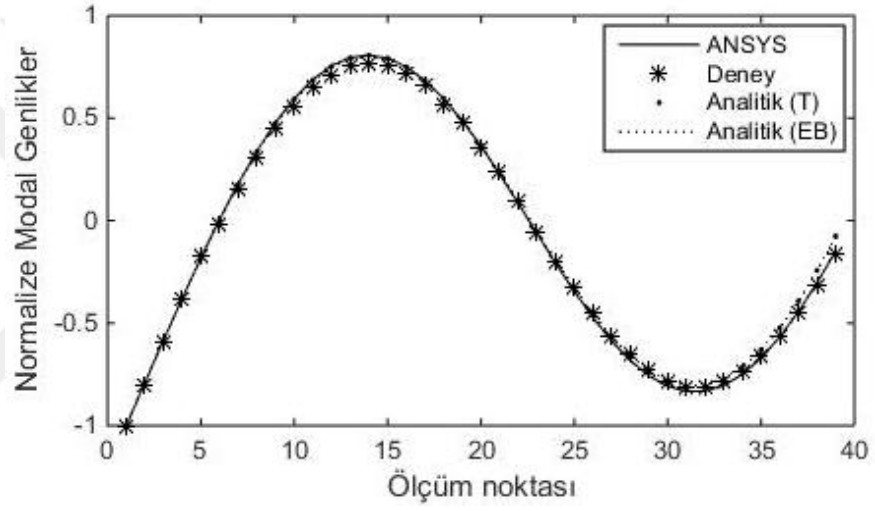


(c)

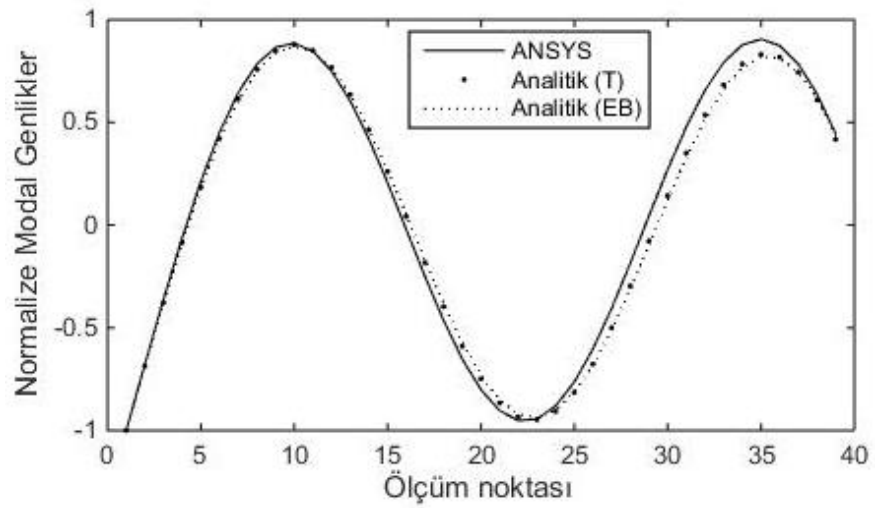
Şekil 7.5 : Uniform kesitli kiriş için S sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)

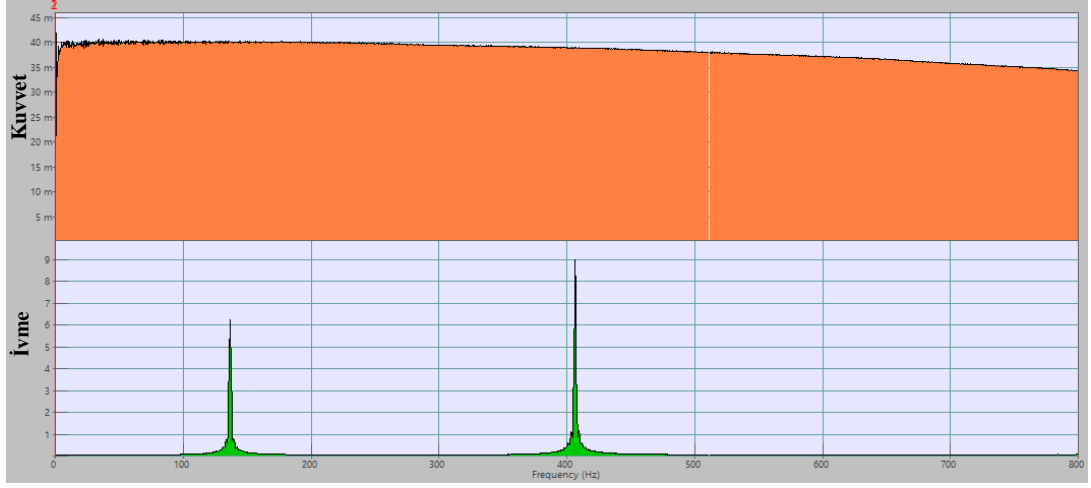


(b)



(c)

Şekil 7.6 : Uniform kesitli kiriş için S sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



Şekil 7.7 : Uniform kesitli S kiriş durumunda Y eksenindeki deney için kuvvet ve ivme sinyallerinin otospektrumu

Deney sırasında ölçülen sinyallerin kuvvet cevap otospektrumunun düz bir çizgi halinde olması beklendiği halde Şekil 7.7’de görüldüğü gibi bu frekansta hızlı bir şekilde azalmaktadır. Yani bu frekans değeri çekiç testi sırasında kullanılan plastik ucun frekans aralığı dışındadır ve modal çekiç testi bu mod şeklini ölçmek için yetersizdir.

Sonuç olarak bu kısımda EB ve Timoshenko kiriş modellerinin analitik olarak çözümlenmesinden elde edilen doğal frekans değerleri SE model ve modal analiz sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Deney sonuçlarının genel olarak nümerik sonuçlarla uyumlu olduğu, ancak bazı frekans değerlerinde ve mod şekillerinde farklılıkların bulunduğu gözlenmiştir. Bu hataların çekiç darbe testinin yetersizliği, ankastre sınır şartının sağlanmasındaki güçlük vb olumsuzluklardan kaynaklandığı düşünülmektedir.

7.2 DTM Sonuçlarının ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması

Bu bölümde ilgili kiriş-uç kütle sisteminin DTM çözümüyle bulunan sonuçları SE model ve deney sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sistemin fiziksel ve malzeme özellikleri analitik çözümde belirtildiği gibi seçilmiş, fakat özellikle Timoshenko kiriş teorisinin geçerliliğini araştırmak amacıyla üniform kiriş boyu kısaltılmış ($L=0.5m$ ve $E=205\text{ GPa}$) ve sonuçların karşılaştırılması bu teoriye göre verilmiştir.

7.2.1 Doğal frekanslar

DTM ile elde edilen tekrarlı bağıntıları (denklem 4.22-26) ve sınır şartları (denklem 4.27-36) bilgisayar ortamında kodlanarak doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilmiştir. Hesaplamalarda serideki ilk otuz terim ($N=30$) dikkate alınmıştır. Çünkü daha fazla terim sayısının kullanılması durumunda sonuçlarda herhangi bir farklılık görülmemiştir.

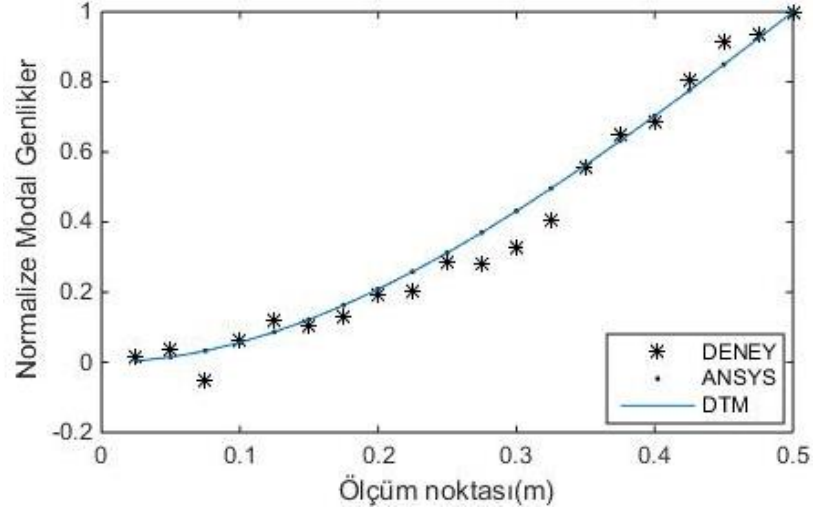
Çizelge 7.2 : Timoshenko kiriş modeli için A ve S sınır şartlarında doğal frekansların (Hz) karşılaştırılması.

Sınır şartı	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	
A	Z eksenli	DTM	32.458	341.199	979.441
		Analitik	32.458	341.199	979.441
		Deney	29.410	311.880	914.370
		ANSYS	32.490	339.620	920.830
	Y eksenli	DTM	45.067	423.114	512.433
		Analitik	45.067	423.114	512.433
		Deney	38.750	392.690	469.590
		ANSYS	45.500	427.690	514.380
S	Z eksenli	DTM	351.800	986.600	1801.500
		Analitik	351.790	986.042	1801.500
		Deney	345.000	967.500	1798.500
		ANSYS	354.600	999.800	1851.200
	Yeksenli	DTM	496.700	1390.700	1711.700
		Analitik	496.690	1390.700	1711.700
		ANSYS	497.900	1394.900	1518.000

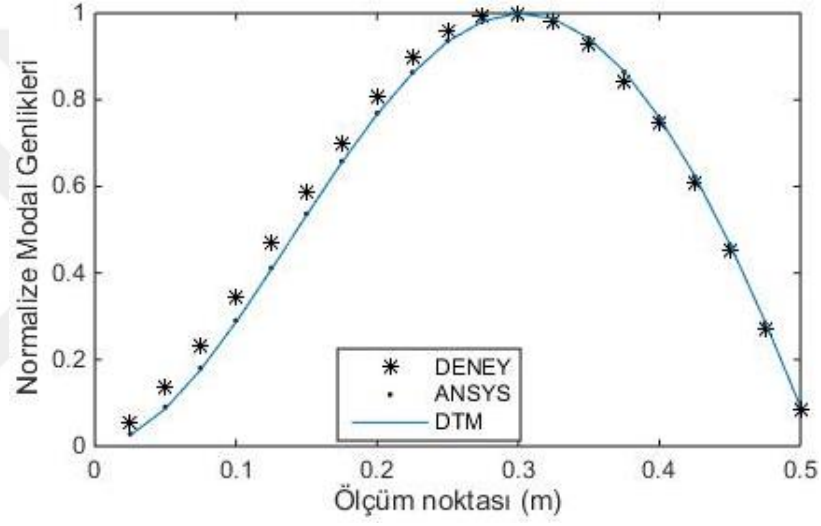
Çizelge 7.2 sistemin dört farklı metotla A ve S sınır şartlarındaki doğal frekanslarını göstermektedir. Tablodan açıkça görülmektedir ki DTM ve analitik sonuçlar aynı olup diğer yöntemlerle oldukça yakındır. A sınır şartındaki deneysel sonuçların diğer sonuçlardan biraz farklı olmasının nedeni laboratuvar ortamında A sınır şartının yeterince sağlanamamasındandır.

7.2.2 Mod şekilleri

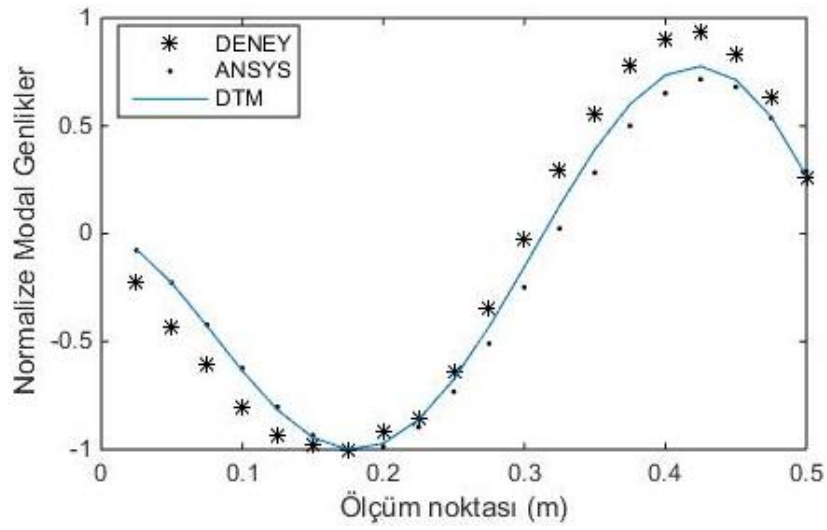
Şekil 7.8 ve 7.9 A kiriş için Z ve Y eksenleri boyunca ölçülen ilk üç mod şeklinin karşılaştırılmasını göstermektedir. Bu şekillerden deneysel ve nümerik mod şekillerinin uyum içinde olduğu görülmektedir. Eğer yalın bir kiriş kullanılsaydı sonuçlar daha uyumlu olabilirdi. Fakat, uç kütleli karmaşık etkisi sonuçlar arasında farklılıklara yol açmaktadır.



(a)

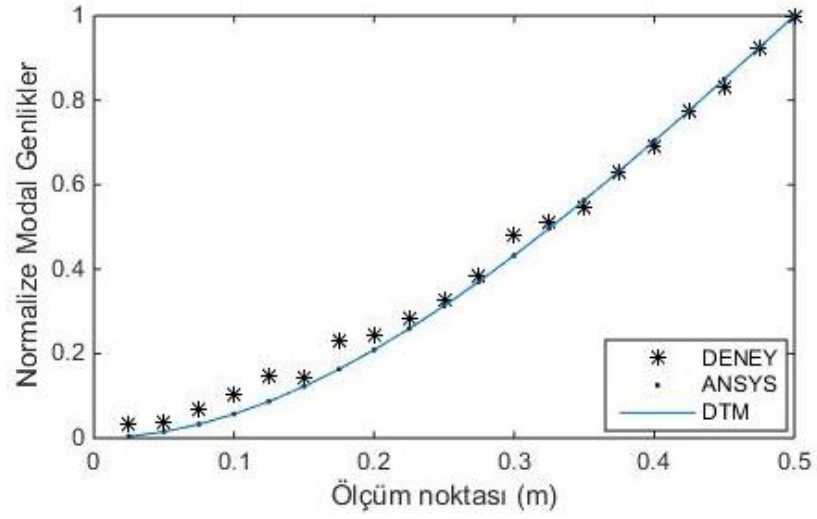


(b)

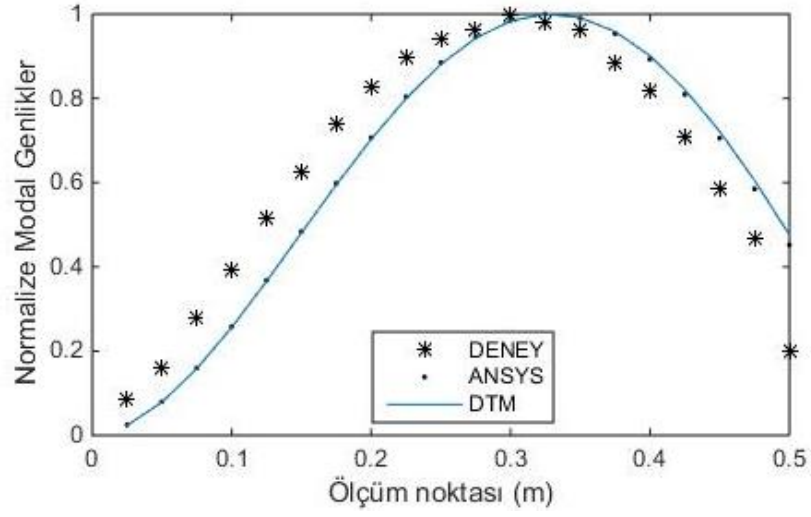


(c)

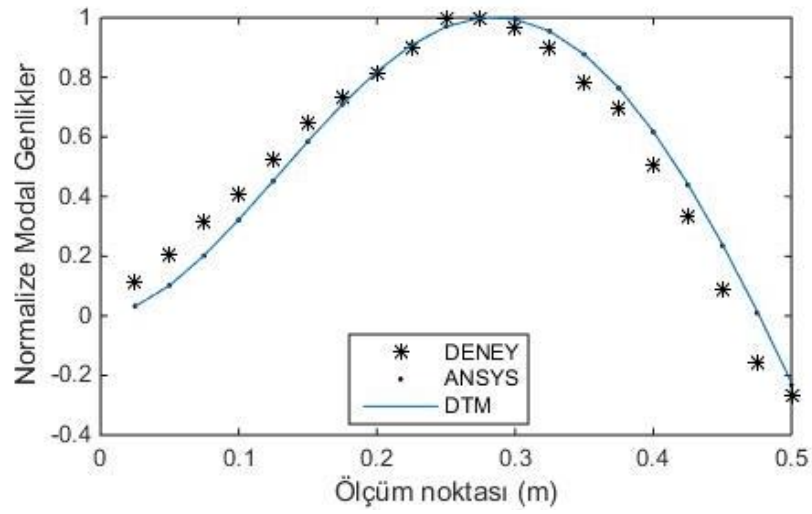
Şekil 7.8 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için A sınır şartında Z eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)

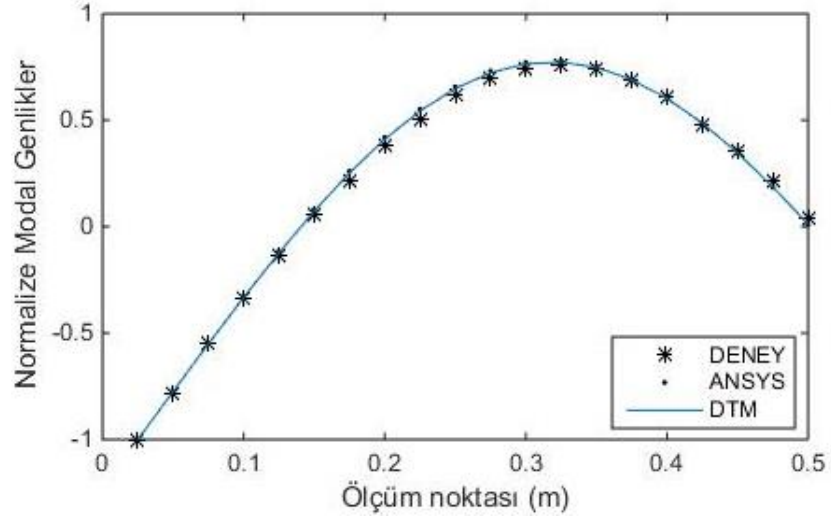


(b)

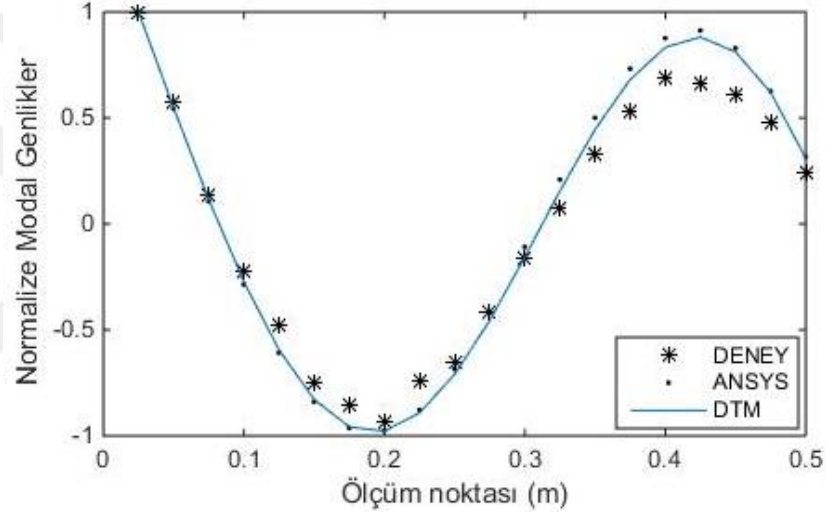


(c)

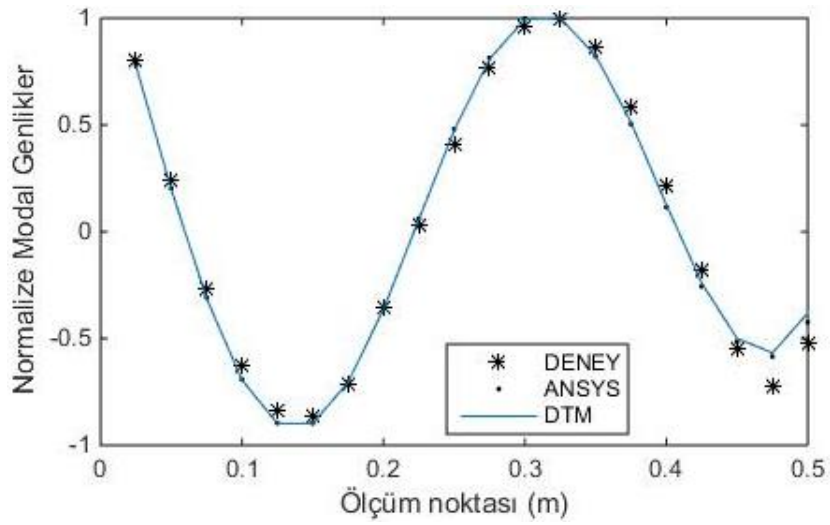
Şekil 7.9 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için A sınır şartında Y eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)



(b)



(c)

Şekil 7.10 : Uniform kesitli Timoshenko kirişi için S sınır şartında Z eksenindeki ilk üç mod şeklinin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod

S sınır şartı deneyinde, yine Y eksenindeki mod şekilleri daha önce belirtilen nedenlerden dolayı doğru bir şekilde ölçülemedi. Z eksenindeki ilk üç mod Şekil 7.10'da verilmiş, deney sırasında S sınır şartının daha iyi sağlanmasından dolayı deneysel sonuçların nümerik sonuçlarla daha uyumlu olduğu görülmüştür.

Özetle, $L=0.5\text{m}$ boyundaki uniform kiriş modelinde özellikle yüksek frekanslarda SE modeli ve teorik sonuçlar arasındaki farkın açıldığı görülmektedir. Bunun muhtemel sebebi, teorik hesaplamalardaki kiriş hipotezi ile SE modelinde kullanılan elemanların farklı oluşudur. Yani, SE modelinde kullanılan SOLID187 elemanı üç boyutlu ve 10 düğüm noktalı, her düğümde 3 serbestlik derecesine sahip bir elemandır. Halbuki teorideki kiriş elemanları daha az sayıda serbestlik derecesine sahiptir. Ayrıca, uç kütlelerin karmaşık etkileri de deneysel ve nümerik sonuçlar arasında farklılığa yol açabilmektedir. Buna ek olarak yine çekiç testinin yetersiz kalması sonuçlardaki farklılığın muhtemel sebeplerinden biridir.

7.3 MDTM Sonuçlarının ANSYS ve Modal Analiz ile Karşılaştırılması

Bu kısımda değişken kesitli kiriş-uç kütle modelinin çözümü için önerilen MDTM sonuçları Timoshenko kiriş modeli için ANSYS ve deneysel sonuçlarla, EB kiriş modelinde ise sadece SE modeli ile karşılaştırılma yapılmıştır.

7.3.1 EB kiriş modeli

Dikdörtgen kesitli EB kiriş modelinde kiriş genişliği ve uzunluğu sabit tutulup sadece Y yönünde lineer olarak bir kesit daralması göz önüne alınmıştır. Kiriş boyunca kesit alanı ve alan atalet momentlerinin değişimi denklem 6.7-9'daki gibi olup kiriş uzunluğu $L=1\text{ m}$ olarak değiştirilmiş, sistemin diğer fiziksel özellikleri Çizelge 6.4 ve 6.5'deki gibi dikkate alınmıştır.

7.3.1.1 Doğal frekanslar

DTM ile değişken kesitli A kiriş uç kütle sistemi çözüldüğünde yeterli terim sayısı ($N=50$) kullanılmasına rağmen elde edilen ilk iki doğal frekanslar Z-ekseni boyunca 21.221 Hz, 169.535 Hz ve Y eksenini boyunca 25.364 Hz, 194.15 Hz olup her iki doğrultudaki üçüncü frekanslar elde edilememiştir. Bu nedenle, bu kısımda iki farklı sınır koşuluna sahip sistem için MDTM sonucu elde edilen doğal frekanslar ve mod şekilleri belirlenmiş, aynı sistemin SE programı (ANSYS) ortamında modellenmesi

ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca farklı kesit daralma oranları, kiriş uzunluğu ve uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Çizelge 7.3’de A ve S sınır şartlarındaki EB kiriş-uç kütle sisteminin Y ve Z eksenleri boyunca ilk üç doğal frekansları gösterilmektedir. Tablodan görüldüğü gibi söz konusu yarı analitik yöntem ile SE sonuçları oldukça uyumludur.

Çizelge 7.3 : A ve S sınır şartları altında MDTM ve ANSYS doğal frekanslarının karşılaştırılması.

Sınır Şartı	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
A	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
S	MDTM	117.337	335.830	702.108	124.186	353.498	666.825
	ANSYS	115.790	331.550	690.810	124.760	352.330	655.540

Çizelge 7.4 : A sınır şartı için kiriş uzunluğunun doğal frekanslar (Hz) üzerindeki etkisi.

L (m)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.5	MDTM	72.800	443.000	1225.800	82.600	450.600	871.300
	ANSYS	72.814	439.360	1146.700	82.632	444.080	852.450
0.6	MDTM	53.889	323.249	898.878	61.487	326.230	750.345
	ANSYS	53.940	321.490	856.210	61.505	323.230	738.750
0.7	MDTM	41.586	246.165	685.968	47.624	247.352	628.157
	ANSYS	41.639	245.270	661.700	47.647	245.850	624.500
0.8	MDTM	33.100	193.652	539.390	38.019	194.325	510.681
	ANSYS	33.140	193.060	526.370	38.040	193.580	509.170
0.9	MDTM	27.000	156.259	434.713	31.079	156.989	416.700
	ANSYS	27.036	155.980	428.640	31.102	156.670	416.110
1	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
1.1	MDTM	18.967	108.016	299.300	21.918	108.875	289.872
	ANSYS	18.982	107.790	296.210	21.926	108.670	288.530
1.2	MDTM	16.243	91.936	254.258	18.798	92.805	246.833
	ANSYS	16.256	91.784	252.170	18.805	92.665	245.850

Çizelge 7.4 (devam) : A sınır şartı için kiriş uzunluğunun doğal frekanslar (Hz) üzerindeki etkisi.

L (m)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1.3	MDTM	14.070	79.227	218.694	16.304	80.081	212.684
	ANSYS	14.081	79.124	217.230	16.310	79.981	211.950
1.4	MDTM	12.307	69.006	190.130	14.277	69.830	185.163
	ANSYS	12.317	68.934	189.080	14.283	69.757	184.600
1.5	MDTM	10.858	60.658	166.842	12.609	61.448	162.671
	ANSYS	10.866	60.609	166.070	12.614	61.394	162.240

Diğer bir parametrik çalışma olarak kiriş uzunluğunun doğal frekanslar üzerindeki etkisi A sınır şartı için incelenmiş, uç kütle ve kirişin geometrik özellikleri (kiriş boyu hariç L=1m) Çizelge 6.4 ve 6.5'deki gibi dikkate alınmıştır. Çizelge 7.4'den açıkça görülmektedir ki kiriş boyu kısaldıkça sistemin doğal frekansları artmaktadır. SE yönteminin kullandığı kiriş modeli ve EB kiriş hipotezi arasındaki fark nedeniyle frekans arttıkça iki yöntemin sonuçları arasındaki fark da (özellikle kısa kirişlerde) belirginleşmektedir.

Çizelge 7.5, 7.6 ve 7.7 uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisini göstermektedir. Oguamanam ve Arshad (2005) yaptıkları çalışmada uç kütle etkisini incelerken, uç kütle ile kiriş kütle merkezlerinin sadece tek bir eksende çakışık olmadığı durumu dikkate almışlardır. Bu çalışmada diğer doğrultudaki kaçıklıkların da etkisi incelenmiştir. Çizelge 7.5 uç kütle boyutlarının eşit oranlarda artırılması durumunda sistemin doğal frekanslarındaki değişimi göstermektedir. Bu durumda sistemin doğal frekansları, uç kütle artması ile ters orantılıdır. Ayrıca MDTM ve SE model sonuçlarının yeterince yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 7.5 : Uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1m)

Uç kütle boyutları (x,y,z)(mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50x50x50	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
60x60x60	MDTM	19.398	119.733	337.612	22.172	120.261	316.747
	ANSYS	19.428	119.770	331.910	22.190	119.980	320.180
70x70x70	MDTM	16.611	112.470	316.653	18.835	112.972	263.101
	ANSYS	16.635	112.440	306.790	18.852	112.830	274.380
80x80x80	MDTM	14.219	105.940	306.790	16.017	107.101	201.830
	ANSYS	14.240	105.910	293.619	16.024	107.020	213.350
90x90x90	MDTM	12.228	99.765	279.670	13.702	101.173	156.225
	ANSYS	12.245	99.246	268.477	13.718	101.410	165.970
100x100x100	MDTM	10.588	92.639	242.916	11.812	94.958	124.489
	ANSYS	10.603	91.931	222.630	11.829	95.240	132.640

Diğer bir parametrik çalışma olarak uç kütle boyutlarının eğilme eksenleri doğrultularındaki değişimi ele alınmış, bunun doğal frekanslara etkisi incelenmiştir (Çizelge 7.6 ve 7.7). Beklenildiği gibi, ilgili çizelgeler, uç kütle boyutları arttıkça doğal frekansların azaldığını göstermektedir. Ayrıca MDTM ve SE model sonuçları diğer çizelgelerde olduğu gibi oldukça uyumludur, fakat uç kütle büyüdükçe yüksek frekanslarda (Y ve Z eksenli boyunca 3. frekans) hata oranı artmaktadır. Bunun da sebebi, yukarıda ifade edildiği gibi, yüksek frekanslarda EB hipotezinin yeterli olmamasıdır.

Çizelge 7.6 : Uç kütle boyutlarının doğal frekans üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve z sabit)

y (mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
60	MDTM	21.503	126.000	351.764	24.738	126.645	336.146
	ANSYS	21.520	125.620	343.770	24.746	126.310	335.210
70	MDTM	20.665	123.618	346.232	23.717	124.139	324.158
	ANSYS	20.681	123.160	334.020	23.724	123.740	323.130
80	MDTM	19.914	121.474	340.499	22.806	121.916	306.750
	ANSYS	19.929	120.920	324.780	22.814	121.420	303.070
90	MDTM	19.237	119.462	334.261	21.987	119.876	284.093
	ANSYS	19.250	118.770	315.150	21.987	119.230	277.940
100	MDTM	18.622	117.487	327.285	21.246	117.950	259.808
	ANSYS	18.632	116.630	304.430	21.257	117.090	252.760

Çizelge 7.7 : Uç kütle boyutlarının doğal frekans üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve y sabit)

z (mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
60	MDTM	21.504	126.033	350.391	24.738	126.657	337.653
	ANSYS	21.520	125.700	347.150	24.748	126.430	335.020
70	MDTM	20.667	123.650	341.999	23.718	124.158	327.767
	ANSYS	20.681	123.550	342.000	23.727	124.020	323.640
80	MDTM	19.917	121.481	332.689	22.809	121.938	311.349
	ANSYS	19.931	121.260	336.780	22.818	121.890	306.430
90	MDTM	19.240	119.410	323.359	21.993	119.891	287.523
	ANSYS	19.254	119.310	331.080	22.001	119.930	283.460
100	MDTM	18.625	117.352	313.589	21.254	117.926	261.563
	ANSYS	18.638	117.410	324.540	21.261	118.080	258.710

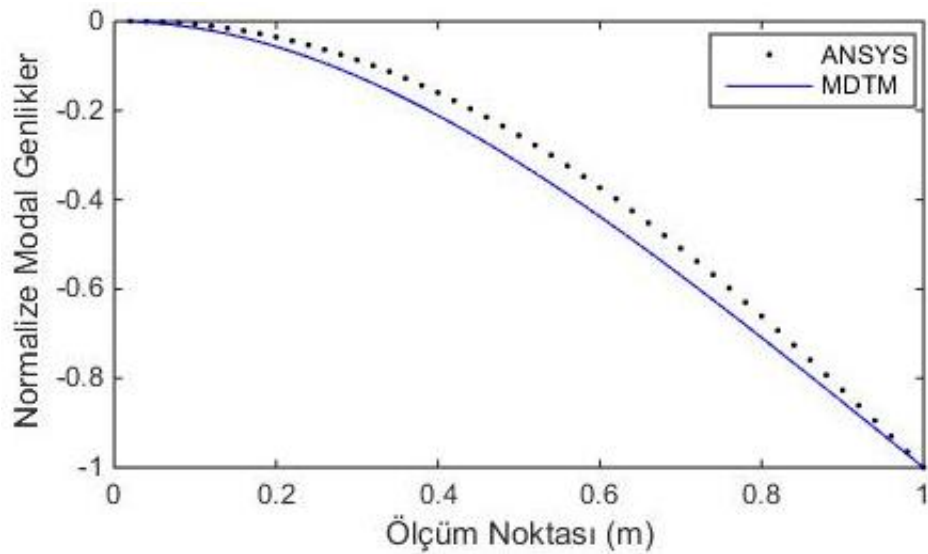
Son olarak, uniform olmayan kirişin kesit daralma oranının doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çizelge 7.8’de görüldüğü gibi artan kesit daralma oranıyla doğal frekanslar da artmaktadır. Çünkü kiriş kesit alanı artmakta, bu da eğilme mukavemetini arttırmaktadır. Yine iki yöntem de birbiriyle gayet uyumludur.

Çizelge 7.8 : Kesit daralma oranının (c_h) doğal frekanslar üzerindeki etkisi

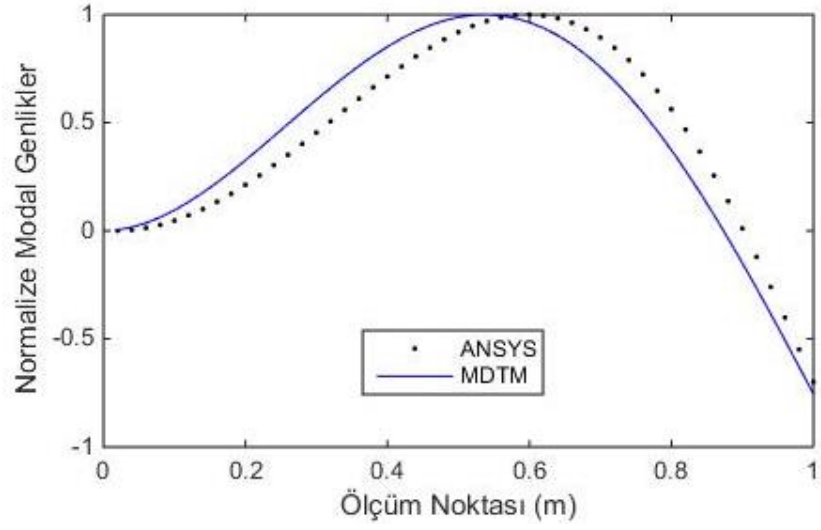
c_h	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.5	MDTM	22.447	128.774	357.480	25.896	129.592	344.939
	ANSYS	22.480	128.620	354.170	25.915	129.410	344.370
0.6	MDTM	24.205	131.499	397.249	33.480	152.647	360.170
	ANSYS	24.244	131.340	394.500	33.490	152.210	357.020
0.75	MDTM	28.193	137.739	543.944	57.799	219.189	366.783
	ANSYS	28.263	137.680	531.030	57.743	217.410	363.930

7.3.1.2 Mod Şekilleri

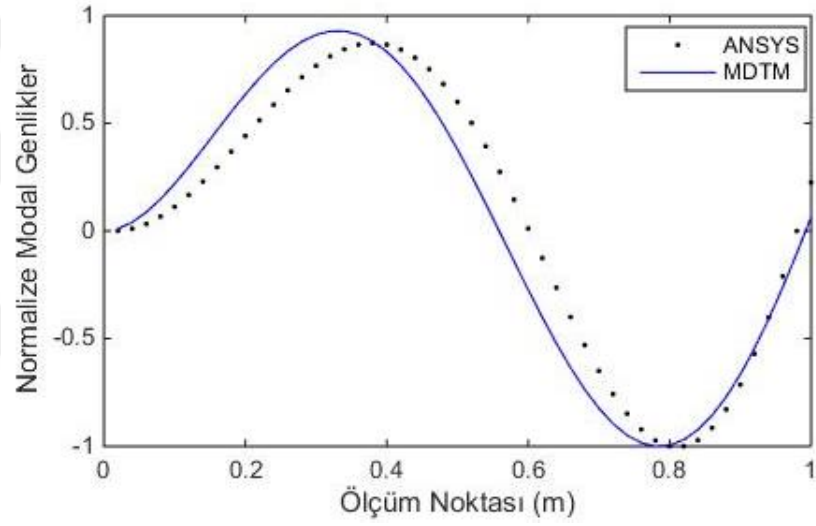
Şekil 7.11-12 ve Şekil 7.13-14 sırasıyla A ve S sınır şartları için, $L=1m$ ve diğer özellikleri Çizelge 6.4 ve 6.5’de verilen kiriş ve uç kütle özelliklerine sahip sistemin mod şekillerini göstermektedir. MDTM ile bulunan mod şekilleri SE modelinde elde edilen mod şekillerine yeterince benzemektedir.



(a)

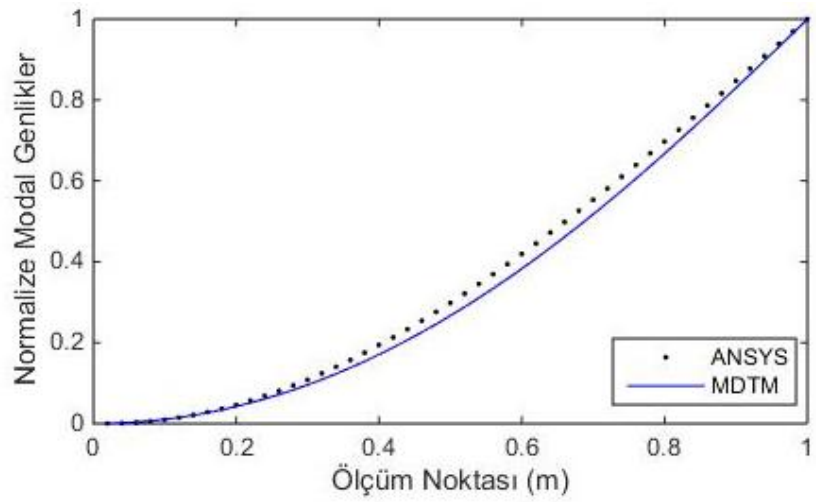


(b)

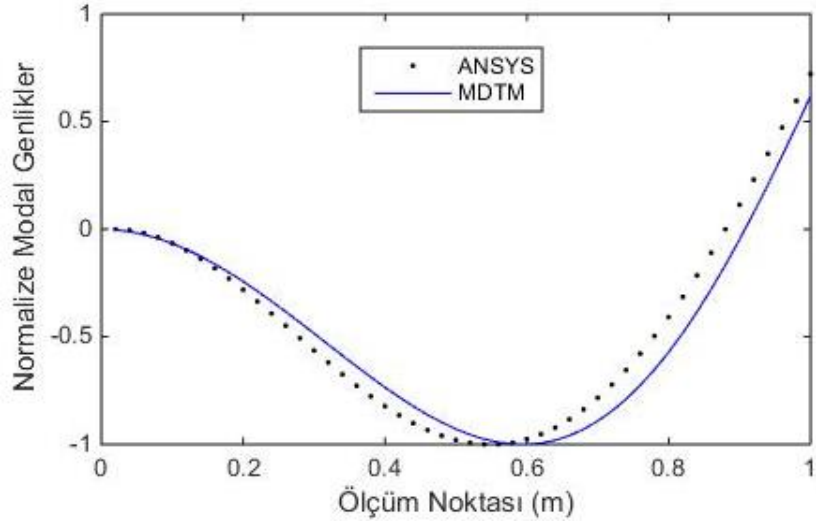


(c)

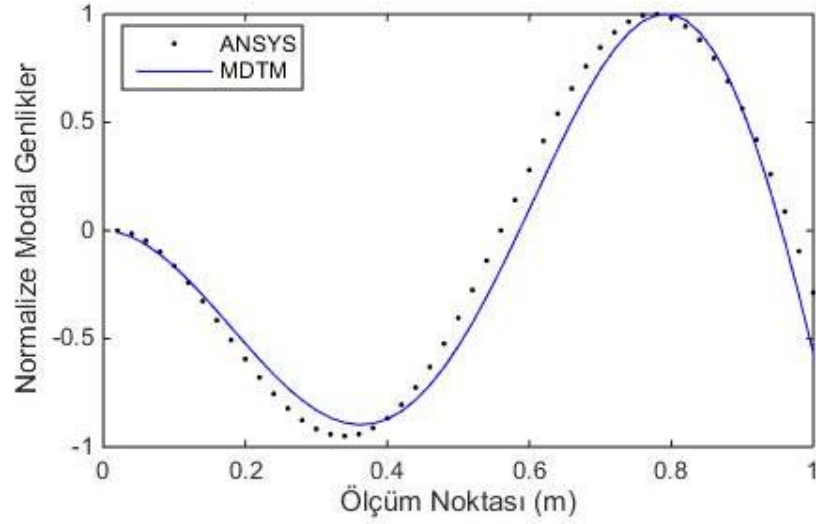
Şekil 7.11 : Değişken kesitli EB kirişi için A sınır şartında Y-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)

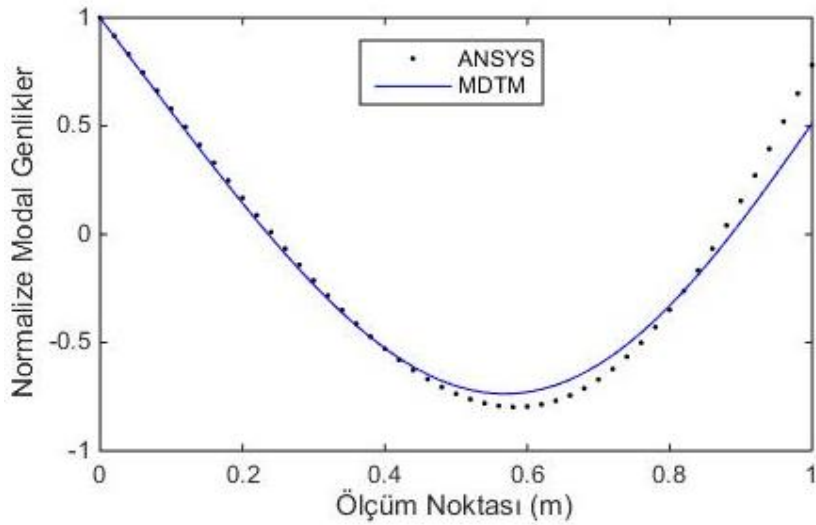


(b)

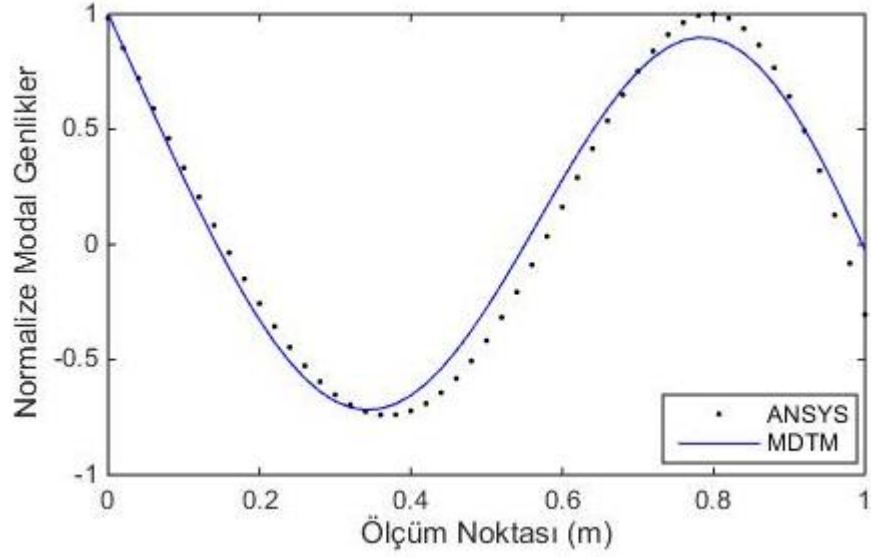


(c)

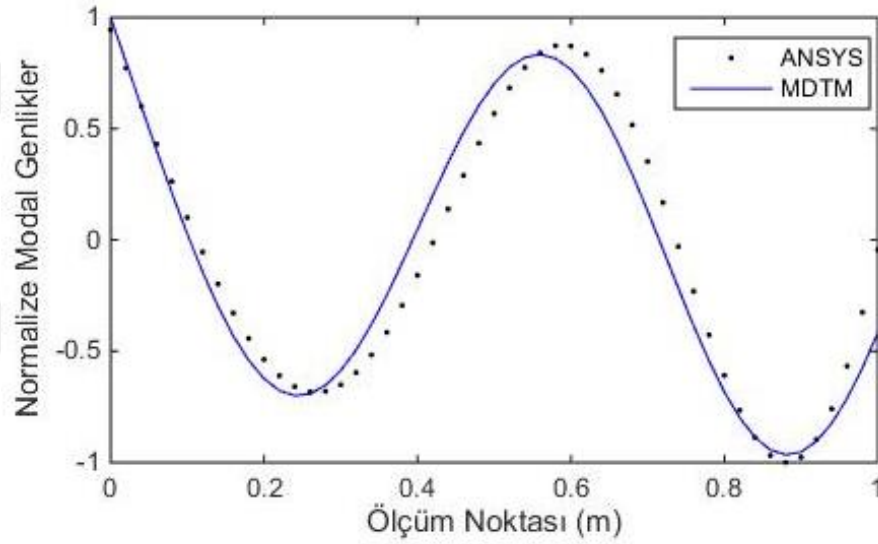
Şekil 7.12 : Değişken kesitli EB kirişi için A sınır şartında Z-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)



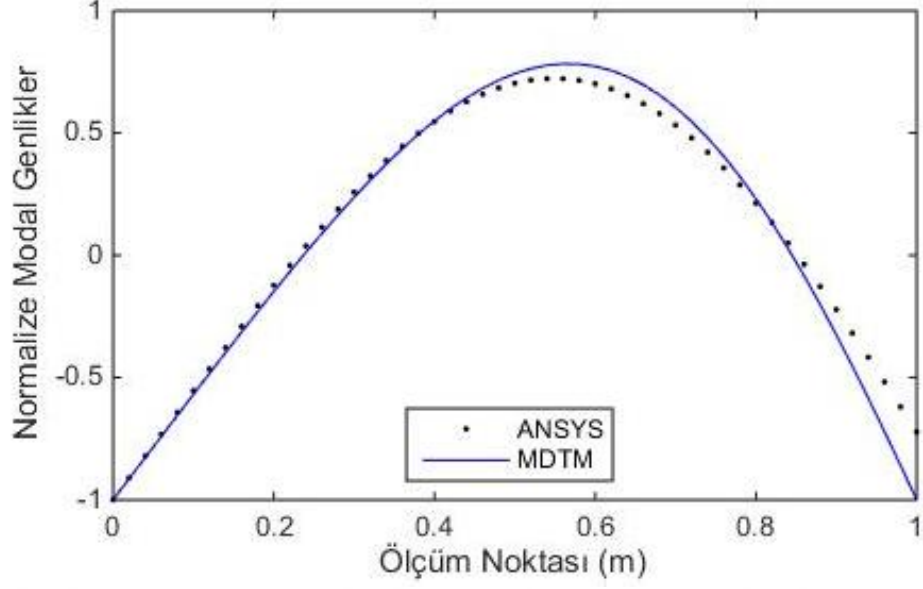
(b)



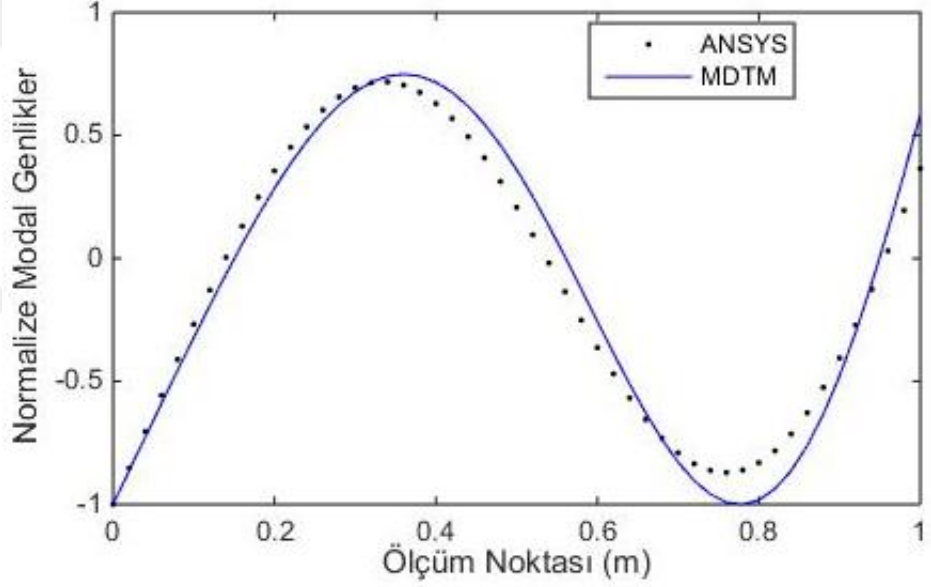
(c)

Şekil 7.13 : Değişken kesitli EB kirişi için S sınır şartında Y-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod

S sınır şartı için Z-eksenindeki 3. mod çok hatalı olarak elde edilmiş, dolayısıyla Şekil 7.14'e eklenmemiştir. Bu moda ait doğal frekanstaki hata yaklaşık %2 civarında iken mod şekillerinin oldukça farklı çıkmasının muhtemel bir sebebi bu modda burulma genliklerinin de önemli derecede etkili olmasıdır. Yani burulma hareketi de baskın olduğu için ANSYS ile hesaplanan mod şekli daha farklı olabilir. Halbuki MDTM'de sadece eğilme hareketine ait mod şekilleri çizdirilmiştir. Bir diğer muhtemel sebep EB kiriş modelinin yüksek frekanslarda yetersiz kalmasıdır.



(a)



(b)

Şekil 7.14 : Değişken kesitli EB kirişi için S sınır şartında Z-ekseni boyunca mod şekilleri (a) 1. mod (b) 2. mod

Parametrik çalışmalara göre, sistemin doğal frekansları kiriş ve uç kütle boyutlarıyla ters orantılı, kesit daralma oranı ile doğru orantılıdır. Ayrıca MDTM ve SE model sonuçlarının genel olarak birbirine yakın olduğu, aralarındaki farkın kısa kiriş boylarında ve yüksek frekanslarda daha belirgin olduğu gözlenmiştir. Bunun asıl sebebi EB hipotezinin kiriş boyunun kısa olması durumunda ve yüksek frekanslarda yetersiz kalmasıdır. Öte yandan ANSYS’de SOLID187 elemanı kullanılmış olup bu eleman üç eksen de deforme olabilmekte, dolayısıyla daha gerçekçidir. Bu durum mod şekilleri arasında da sapmalara sebep olabilir. Sapmanın önemli bir sebebi de

kirişin burulma deformasyonudur. MDTM yöntemi ile elde edilen mod şekilleri sadece eğilme hareketlerine ait iken ANSYS eğilme ve burulma kombine deformasyonuna ait sonuçları vermektedir. Bu durum da her iki yöntem arasında bir miktar farka sebep olabilir. Tüm bu farklılıklara rağmen, özellikle ilk birkaç frekansta MDTM'nin de kabul edilebilir sonuçlar verdiği görülmüştür.

7.3.2 Timoshenko kiriş modeli

Bu kısımda Timoshenko kiriş teorisine göre elde edilen hareket denklemlerinin MDTM ile çözümünden bulunan doğal frekans ve mod şekilleri deney ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Her üç yöntem içinde değişken kesitli kiriş ve uç kütle özellikleri Çizelge 6.4 ve 6.5'deki gibi ele alınmıştır.

7.3.2.1 Doğal frekanslar

MDTM ile çözümde her bir kiriş parçası için ($M=3$) yeterli yakınsamanın sağlandığı $K=30$ olup toplamda $N=90$ ($N=KM$) terim dikkate alınmıştır. Çizelge 7.9 terim sayısına bağlı olarak sistemin doğal frekanslarının yakınsamasını göstermektedir. MDTM sonucu elde edilen doğal frekansların diğer iki yöntem sonuçlarıyla karşılaştırılması ise Çizelge 7.10'da verilmiştir. Bu tabloda MDTM ve SE model sonuçlarının birbirine yakın olmasına rağmen A deneysel sonuçların bu sonuçlardan saptığı görülmektedir. Deneysel ortamda A sınır şartının yeterince iyi sağlanamamasına rağmen, genel olarak bu üç metodun sonuçlarının kabul edilebilir derecede yakın olduğu sonucu tablodan anlaşılmaktadır.

Çizelge 7.9 : Terim sayısı ile doğal frekansların (Hz) yakınsaması

Sınır şartı	K	Z eksenine boyunca			Y eksenine boyunca		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
A	2	93.954	-	-	180.371	634.838	-
	4	95.934	663.820	924.961	142.692	545.573	-
	6	69.000	424.200	794.100	92.700	324.000	1131.100
	8	72.618	446.827	863.225	83.479	436.656	-
	10	72.600	444.300	867.000	82.500	438.400	1180.800
	12	72.600	444.600	868.500	82.400	438.300	1184.900
	14	72.600	444.600	868.800	82.400	438.300	1184.900
	16	72.600	444.600	868.900	82.400	438.300	1184.900
	18	72.600	444.600	868.900	82.400	438.300	1184.900
	20	72.600	444.600	868.900	82.400	438.300	1184.900
	30	72.600	444.600	868.900	82.400	438.300	1184.900

Çizelge 7.9 (devam) : Terim sayısı ile doğal frekansların (Hz) yakınsaması

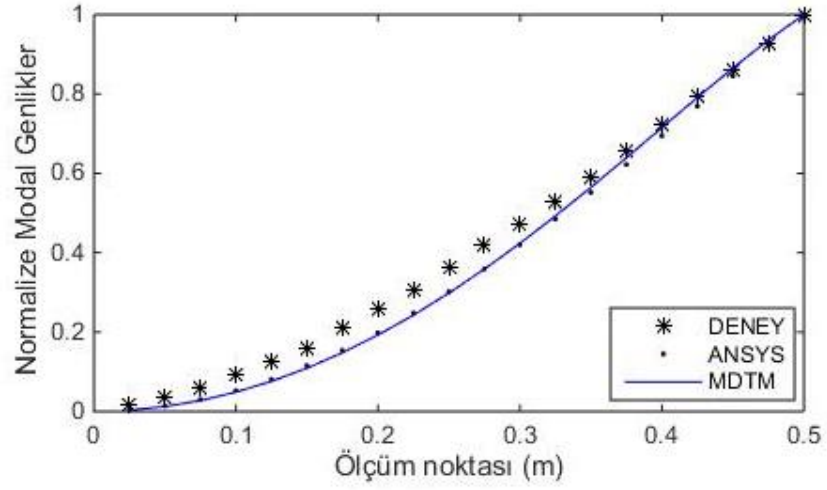
Sınır şartı	K	Z eksenı boyunca			Y eksenı boyunca		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
	2	-	-	-	-	-	-
	4	582.814	1588.800	1802.600	489.639	1395.100	-
	6	807.400	1259.400	1637.000	352.600	1072.800	-
	8	435.700	1472.400	1699.800	393.600	1219.900	-
	10	430.700	1206.200	1556.700	397.000	1133.800	2157.900
S	12	430.800	1217.500	1558.000	397.200	1131.200	2186.800
	14	430.800	1216.600	1558.500	397.200	1131.300	2197.400
	16	430.800	1216.600	1558.600	397.200	1131.300	2196.500
	18	430.800	1216.600	1558.600	397.200	1131.300	2196.400
	20	430.800	1216.600	1558.600	397.200	1131.300	2196.400
	30	430.800	1216.600	1558.600	397.200	1131.300	2196.400

Çizelge 7.10 : A ve S sınır şartına göre Y ve Z eksenlerindeki ilk üç doğal frekansın (Hz) karşılaştırılması

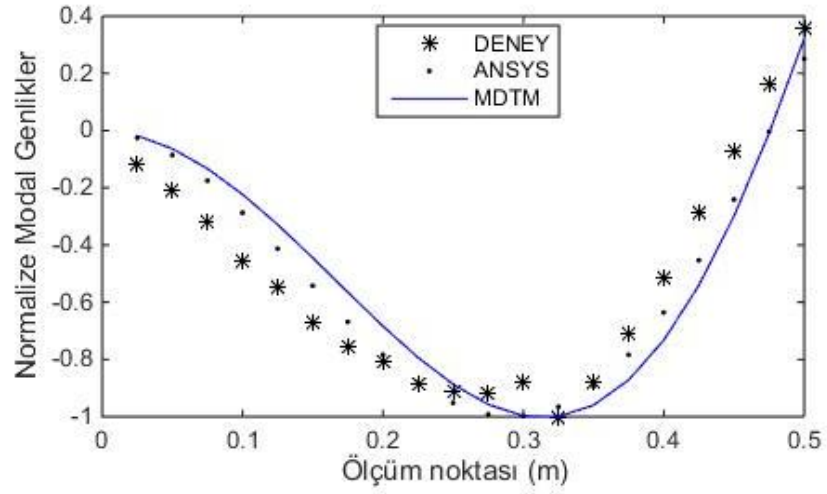
Sınır şartı	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	
A	Z eksenı boyunca	MDTM	72.600	444.600	868.900
		ANSYS	72.814	444.080	852.450
		DENEY	65.000	395.688	867.875
	Y eksenı boyunca	MDTM	82.400	438.300	1184.900
		ANSYS	82.600	439.400	1146.700
		DENEY	77.500	407.600	1073.400
S	Z eksenı boyunca	MDTM	430.800	1216.600	1558.600
		ANSYS	435.700	1218.200	1519.200
		DENEY	446.200	1247.500	1583.700
	Y eksenı boyunca	MDTM	397.200	1131.300	2196.400
		ANSYS	390.700	1111.400	2102.300
		DENEY	405.000	1156.800	2199.000

7.3.2.2 Mod Şekilleri

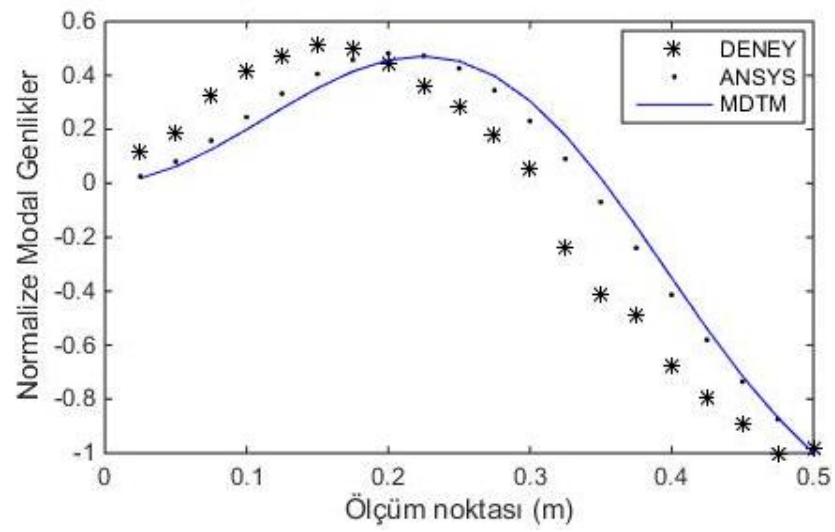
Şekil 7.15-18 A ve S sınır şartlarında sistemin Y ve Z eksenlerindeki ilk üç normalize mod şekillerini göstermektedir. MDTM ile elde edilen mod şekillerinin hem SE modeli hem de deney sonuçları ile yakın olduğu şekillerden gözlenmiştir. A kirişte MDTM ve deneysel mod şekilleri arasındaki farklılık yüksek frekanslarda artmaktadır. Bunun muhtemel nedeni diğer sonuçlarda olduğu gibi sınır şartıdır. Çünkü S kirişte daha iyi uyumun olduğu Şekil 7.17 ve 18'den aşıkardır. Diğer yandan, özellikle S kirişte MDTM ve SE modeli arasındaki farklılık yüksek frekanslar için dikkate değerdir. Matematiksel modelde kiriş tek boyutlu olarak varsayılmış, bu varsayımın yüksek frekanslar için geçerli olmaması bu farklılığın sebeplerinden biri olabilir. Diğer bir sebep ise yüksek frekanslarda burulma deformasyonlarının daha baskın olabilmesidir.



(a)

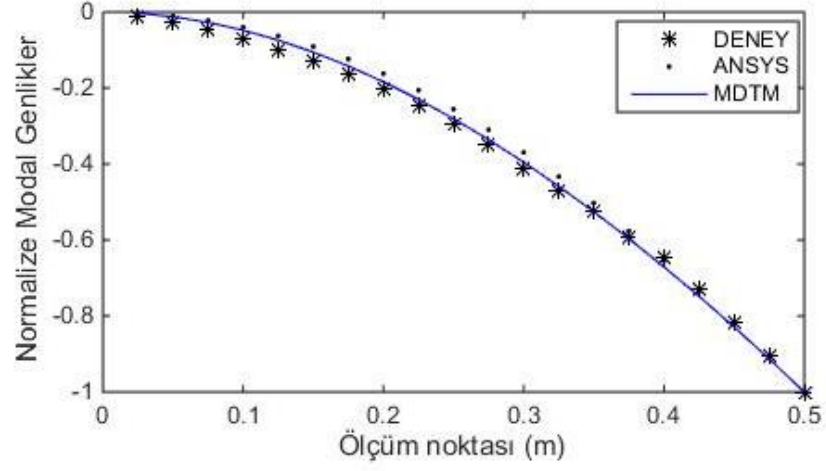


(b)

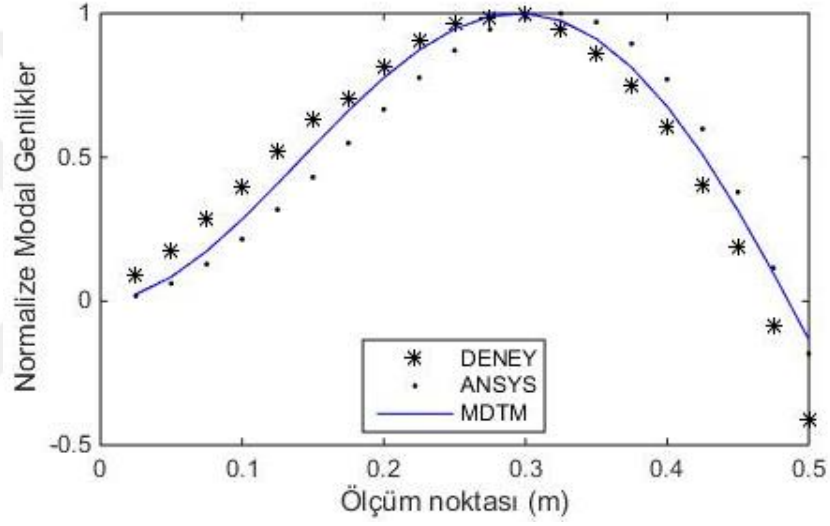


(c)

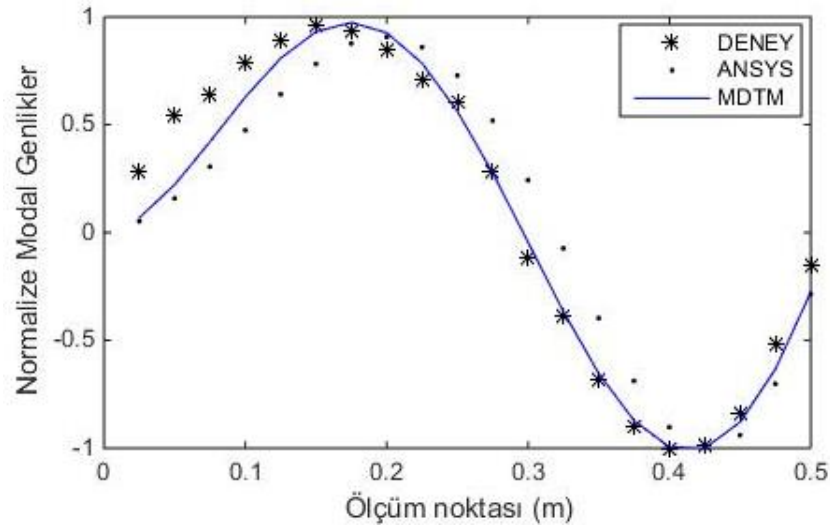
Şekil 7.15 : A sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)

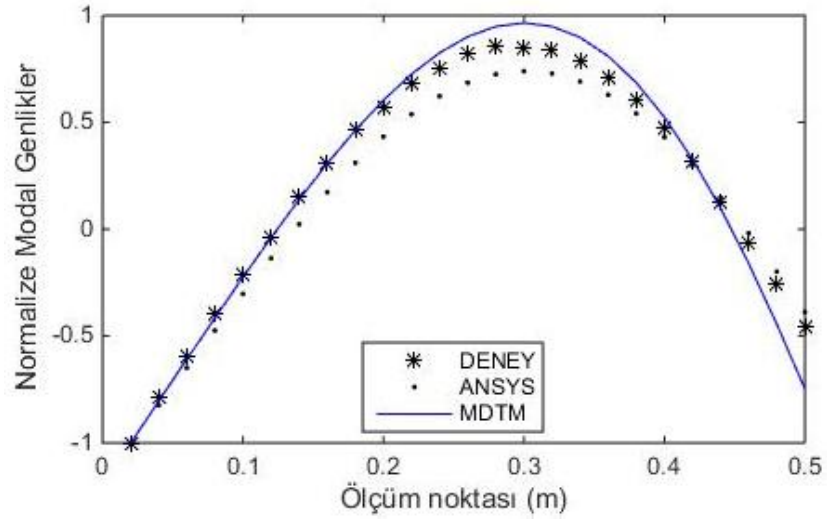


(b)

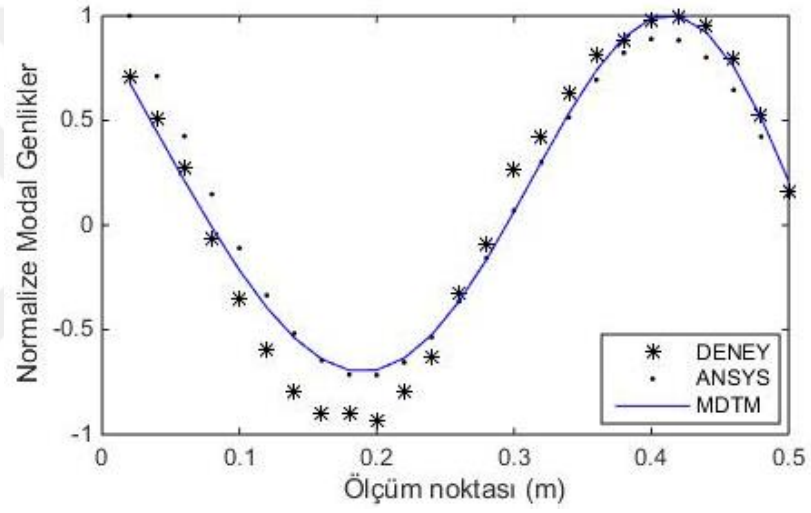


(c)

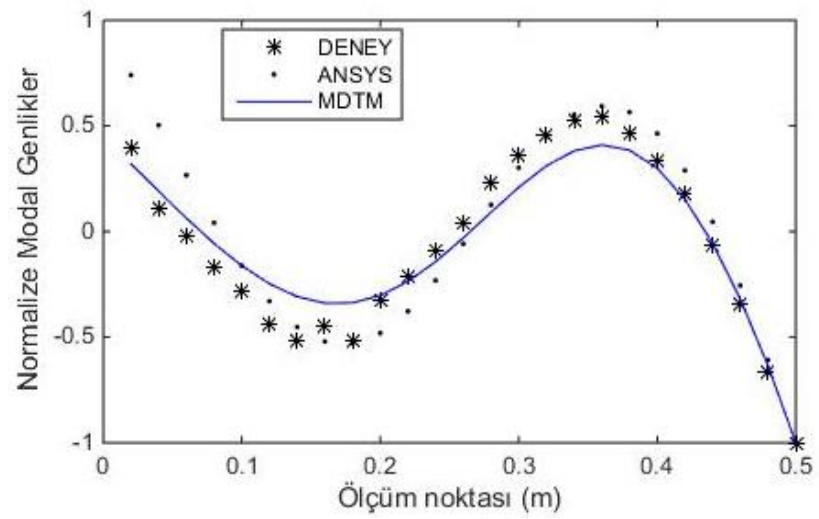
Şekil 7.16 : A sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)

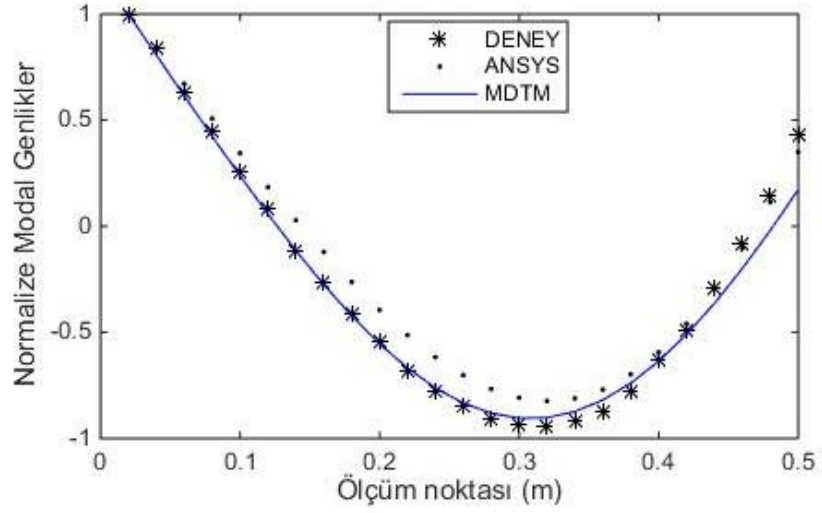


(b)

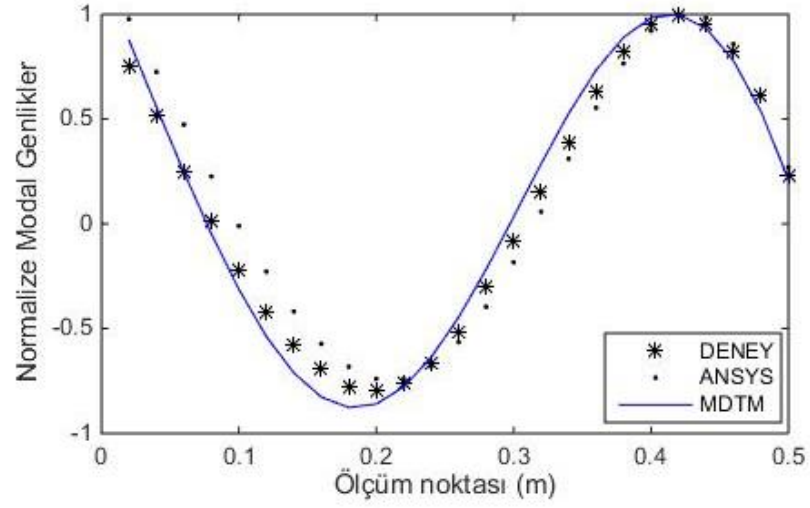


(c)

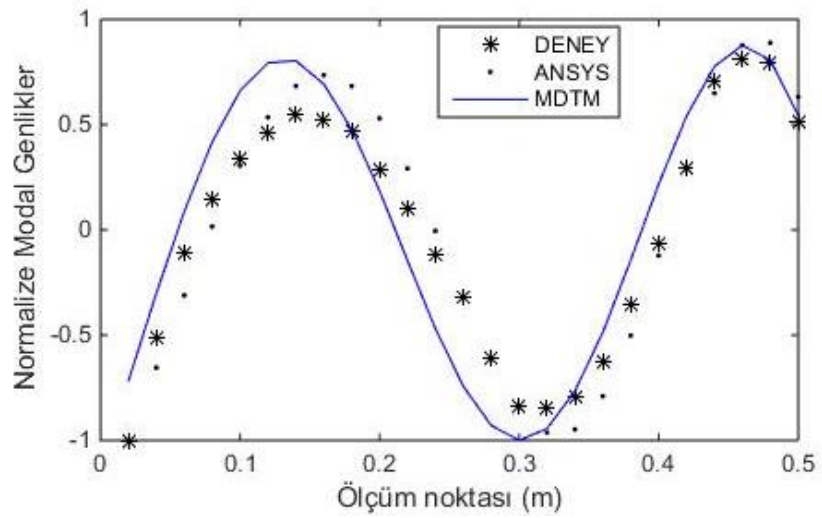
Şekil 7.17 : S sınır şartında Z eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod



(a)



(b)



(c)

Şekil 7.18 : S sınır şartında Y eksenindeki mod şekillerin karşılaştırılması (a) 1. mod (b) 2. mod (c) 3. mod

7.4 Değerlendirme

Bu çalışmada iki farklı yönde eğilen ve burulan değişken kesitli, eksantrik uç kütleli kiriş-uç kütle sisteminin doğal frekans ve titreşim modlarının DTM ve MDTM ile elde edilmesi üzerine çalışılmıştır. Çalışma kapsamında EB ve Timoshenko kiriş teorileri dikkate alınmış ve ilk defa Timoshenko kiriş teorisi için ilgili kiriş-uç kütle sisteminin hareket denklemleri ve sınır şartları çıkarılmıştır. EB kiriş teorisi için ise literatürde bulunan denklemler kirişin hem malzeme hem de geometrik özelliklerinin değişken olmasına göre güncellenmiştir. Elde edilen hareket denklemleri uniform kesitli kiriş için analitik olarak çözülmüş, SE ve modal analiz yöntemleriyle sonuçların doğruluğu gösterilmiştir. Daha sonra, ilgili sistemin matematik modeli yine ilk kez bu çalışmada DTM ile çözülmüş, elde edilen sonuçlar analitik ve diğer yöntemlerle (SE ve deneysel sonuçlarla) karşılaştırılmıştır. Kirişin değişken kesitli olması durumunda DTM'nin yakınsama problemi ortaya çıkmış, bunu aşmak için DTM'nin farklı bir versiyonu olan MDTM yine ilk defa bu çalışmada böyle bir probleme uygulanmış ve elde edilen sonuçlar SE ve deneysel sonuçlarla doğrulanmıştır. Parametrik çalışma gerçekleştirilerek uç kütle boyutlarının, kesit daralma oranının ve kiriş uzunluğunun sistemin doğal frekansları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda DTM ve MDTM'nin genel olarak diğer yöntemlerle uyumlu olduğu görülmüştür. Kiriş boyu kısaldıkça sistemin doğal frekanslarının arttığı ve yüksek frekanslarda elde edilen sonuçların SE ve deneysel verilerden biraz farklı olduğu gözlenmiştir. Yani kısa kirişlerde EB hipotezinin kullanılması durumunda bu teorinin yetersiz kaldığı ve hata oranının arttığı görülmüştür. Deneysel sonuçların bazı durumlarda diğerlerinden biraz farklı olmasının nedenleri arasında sınır şartlarının (özellikle ankastre mesnet halinde) yeteri kadar sağlanamamış olması, çekiç darbe testinin yetersizliği, deney sırasında ölçümlere karışan hatalar ilk akla gelen unsurlardır. Ayrıca, SE sonuçlarıyla gözlenen farklılıkların sebebi ise ANSYS'de modellenen kiriş-uç kütle sisteminin serbestlik derecesinin daha fazla olması ve gerçek modele daha yakın bir model sunmasıdır. Bunun yanısıra, özellikle mod şekillerinde sayısal çözümde sadece eğilmeden kaynaklı mod şekillerinin çizdirilmesi söz konusu iken, ANSYS'de elde edilenler eğilme ve burulma kombine deformasyonuna ait sonuçlardır. Yani burulma deformasyonu mod şekilleri arasında sapmaya neden olmaktadır. Ek olarak, SE modelinde mod şekilleri elde edilirken deneyle uyumlu olması için path tanımlaması Y ve Z düzlemleri boyunca kirişin dış yüzeylerinde

yapılmıştır. Bu ise DTM ve MDTM ile elde edilen sonuçlarla SE modelindeki sonuçların farklı olmasının bir sebebi olabilir. Bu sonuçlar dikkate alındığında, DTM ve MDTM'nin kiriş-uç kütle sistemlerinin serbest titreşim analizinde özellikle ilk birkaç frekansta etkili ve doğru sonuçlar veren yöntemler olduğu görülmüştür. Ayrıca literatürde bu tarz problemlerin sadece analitik veya yaklaşık çözümü yapılmış olup deneysel yöntemlerle sonuçların karşılaştırıldığı çalışma yok denecek kadar azdır. Yapılan çalışma literatürdeki bu boşluğu gidermek anlamında ciddi bir katkı sunmaktadır. Bununla birlikte, gerçekleştirilen çalışmalar bu alanda son noktayı koymamakta, aşağıdaki hususların da dikkate alındığı daha farklı araştırmalar ilerideki muhtemel çalışmaların konusu olabilecek niteliktedir:

- ✓ Taşıyıcı yapı olan kiriş kademeli değişken kesitli bir yapı gibi modellenebilir. Hatta malzeme özelliklerinin de değişken alınıp (literatürdeki adıyla fonksiyonel derecelendirilmiş (*functionally graded*)) modelin genelleştirilmesi ve bu durumda DTM ve/veya MDTM çözümlerinin değerlendirilmesi üzerine çalışılabilir.
- ✓ Ele alınan kiriş-uç kütle sisteminin sabit bir eksen etrafında dönmesi halinde matematiksel modelinin çıkarılması ve bu modelin farklı çözüm teknikleriyle incelenmesi ve parametrik incelemeler yapılması yine bir başka araştırmanın konusu olabilecek niteliktedir.
- ✓ Çekiç testi yerine elektrodinamik sarsıcı kullanarak daha kontrollü bir frekans içeriğiyle yapının sarsılması ve çok noktadan cevap ölçülmesiyle deneysel verilerin kalitesinin artırılması, farklı modal parametre tahmin yöntemlerinin böyle bir yapı için karşılaştırılması da incelemeye değer başka bir husustur.

KAYNAKLAR

- Abramovich, H. & Hamburger, O.** (1991). Vibration of a cantilever timoshenko beam with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 148(1): 162-170.
- Abramovich, H. & Hamburger, O.** (1992). Vibration of a uniform cantilever Timoshenko beam with translational and rotational springs and with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 154(1): 67-80.
- Alvarez, S. I., Ficcadenti De Iglesias, G. M., Laura, P. A.** (1988). Vibrations of an elastically restrained, non-uniform beam with translational and rotational springs, and with a tip mass", *Journal of Sound and Vibration*, 120(3), 465-471.
- Andrews, K. T. & Shillor, M.** (2002). Vibrations of a beam with a damping tip body, *Mathematical and Computer Modelling*, 35(9-10), 1033-1042.
- Ansari, M., Esmailzadeh E., Jalili N.** (2009) Coupled vibration and parameter sensitivity analysis of rocking-mass vibrating gyroscopes, *Journal of Sound and Vibration*, 327, 564-583.
- Ansari, M., Esmailzadeh, E., Jalili, N.** (2011). Exact frequency analysis of a rotating cantilever beam with tip mass subjected to torsional bending vibrations, *Journal of Vibration and Acoustics*, 133(4), 0410031.
- Arvin, H.** (2017). Free vibration analysis of micro rotating beams based on the strain gradient theory using the differential transform method: Timoshenko versus Euler Bernoulli beam models, *European Journal of Mechanics / A Solids*, 65, 336-348.
- Attarnejad, R. & Shahba, A.** (2008) Application of differential transform method in free vibration analysis of rotating non-prismatic beams, *World Applied Sciences Journal*. 5, 441-448.
- Auciello, N. M.** (1996). Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with tip mass of rotatory inertia and eccentricity, *Journal of Sound and Vibration*, 194(1), 25-34.
- Auciello, N. M. & Nole, G.** (1998). Vibrations of a cantilever tapered beam with varying section properties and carrying a mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, 214(1), 105-119.
- Auciello, N. M.** (2000). Free vibration of a restrained shear deformable tapered beam with a tip mass at its free end, *Journal of Sound and Vibration*, 237(3), 542-549.
- Beg, O. A., Keimanesh, M., Rashidi, M. M., Davoodi, M.** (2013). Multi-Step DTM simulation of magneto-peristaltic flow of a conducting williamson viscoelastic fluid, *Int. J. of Appl. Math and Mech*, 9, 22-40.
- Bhat, B. R. & Wagner, H.** (1976). Natural frequencies of a uniform cantilever with a tip mass slender in the axial direction, *Journal of Sound and Vibration*, 45(2), 304-307.

- Bhat, R. B.** (1986). Transverse vibrations of rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, 105(2), 199-210.
- Bodur, S.** (2014). *Elastik zemine oturan kiriş modellerinin diferansiyel dönüşüm metodu ve bilgisayar destekli analizi*. (Yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Boiangiu, M., Ceausu, V., Untariou, C. D.** (2014). A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler Bernoulli Beams with variable cross section, *Journal of Vibration of Control*, 22(11), 2591-2602.
- Boyce, W. E. & Handelman, G. H.** (1961). Vibration of rotating beams with tip mass, *Journal of Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 12(5), 369-392.
- Bozyigit, B., Yesilce, Y., Catal, S.** (2017). Differential transform method and Adomian decomposition method for free vibration analysis of fluid conveying Timoshenko pipeline, *Structural Engineering and Mechanics*, 62, 65-77.
- Bruch, JR, J. C & Mitchell, T. P.** (1987). Vibrations of a mass-loaded clamped-free Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, 114(2), 341-345.
- Cai, G. P., Hong, J. Z., Yang, S. X.** (2005). Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with a tip mass, *Mechanics Research Communications*, 32, 173-190.
- Chang, T. P.** (1993). Forced vibration of a mass-loaded beam with a heavy tip body, *Journal of Sound and Vibration*, 164(3), 471-484.
- Chandrashekhara, K. & Bangera, K. M.** (1993). Vibration of symmetrically laminated clamped-free beam with a mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, 160(1), 93-101.
- Chen, C. K. & Ho, S. H.** (1999). Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beam under axial loading using differential transform, *Journal of Mechanical Science*, 41, 1339-1356.
- Cicek, I. & Ertas, A.** (2002). Experimental investigation of beam-tip mass and pendulum system under random excitation, *Mechanical System and Signal Processing*, 16(6), 1059-1072.
- Craig, R. R.** (1963). Rotating beam with tip mass analyzed by a variational method, *Journal of the Acoustical Society of America*, 35(7), 990-993.
- Cuvalci, O & Ertas, A.** (1996). Pendulum as vibration absorber for flexible structure: experiments and theory, *Journal of Vibration and Acoustics*, 118, 558-566.
- Çatal, S.** (2006). Analysis of free vibration of beam on elastic soil using differential transform method, *Structural Engineering and Mechanics*, 24, 51-62.
- Çatal, S.** (2008). Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method, *Applied Mathematical Modelling*, 32, 1744-1757.
- De Rosa, M. A., Lippiello, M., Maurizi, M. J., Martin, H. D.,** (2010). Free vibration of elastically restrained cantilever tapered beams with concentrated viscous damping and mass, *Mechanics Research Communications*, 37, 261-264.
- Demirdağ, O. & Yesilce, Y.** (2011). Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method, *Advances in Engineering Software*, 42, 860-867.

- Ebrahimi, F. & Salari, E.** (2015a). Size-dependent free flexural vibrational behavior of functionally graded nanobeams using semi-analytical differential transform method, *Composites Part B*, 79, 156-169.
- Ebrahimi, F. & Salari, E.** (2015b). Thermo-mechanical vibration analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on higher-order shear deformation beam theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29, 3797-3803.
- Ebrahimi, F. & Mokhtari, M.** (2015) Vibration analysis of spinning exponentially functionally graded Timoshenko beams based on differential transform method. *Journal of Aerospace Engineering*. 229, 2559-2571.
- Eftekhari, M., Mahzoon, M., Ziaei-rad, S.** (2012). Effect of added tip mass on the nonlinear flapwise and chordwise vibration of cantilever composite beam under base excitation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 12(2), 285-310.
- Emam, S.A.** (2009). Dynamics of a flexible-hub geometrically nonlinear beam with a tip mass, *Journal of Vibration and Control*, 16(3), 1989-2010.
- El-Zahar, E. R.** (2015) Applications of adaptive multi step differential transform method to singular perturbation problems arising in science and engineering, *Appl. Math. Inf. Sci.* 9, 223-232.
- Ertürk V. S., Odibat Z. M., Momani S.** (2012). The Multi-Step differential transform method and its application to determine the solutions of non-linear oscillators, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 4(4), 422-438.
- Esmailzadeh, E. & Nakhaie. Jazar, G.** (1998). Periodic behavior of a cantilever beam with end mass subjected to harmonic base excitation, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 33(4), 567-577.
- Esmailzadeh, E. & Jalili, N.** (1998) .Parametric response of cantilever Timoshenko beams with tip mass under harmonic support motion, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 33(5), 765-781.
- Ewins, D. J.,** (2000). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. USA. Research Studies Press.
- Friswell, M., Faruque Ali, S., Bilgen, O., Adhikari, S., Lees, A. W., Litak, G.** (2012). Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 23(13), 1505-1521.
- Fung, R. F., Lu, P. Y., Tseng, C. C.** (1998). Non-linearly dynamic modeling of an axially moving beam with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 218(4), 559-571.
- Ghafarian, M. & Ariaei, A.** (2016). Free vibration analysis of a system of elastically interconnected rotating tapered Timoshenko beams using differential transform method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 107, 93-109.
- Gökdağ, H.** (2010). *Yapısal hasar teşhisinde dalgacık dönüşümüne dayalı bir yöntem geliştirilmesi* (Doktora tezi). Uludağ Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Gökdağ, H & Kopmaz, O.** (2005). Coupled bending and torsional vibration of a beam with inspan and tip attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 287, 591-610.

- Gürbüz, G.** (2005). *Sayısal titreşim modellerinin deneysel verilerle güncellenmesi.* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Gürgöze, M.** (1986). On the approximate determination of the fundamental frequency of a restrained cantilever beam carrying a tip heavy body, *Journal of Sound and Vibration*, 105(3), 443-449.
- Gürgöze, M., Özgür, K., Erol, H.** (1995). On the frequencies of a cantilevered beam with a tip mass and in-span support, *Computers&Structure*, 56(1), 85-92.
- Gürgöze, M.** (1996a). On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring mass system, *Journal of Sound and Vibration*, 190(2), 149-162.
- Gürgöze, M.** (1996b). On the eigenfrequencies of a cantilevered beam carrying a tip mass and spring-mass in-span, *Int. J. Mech. Sci.*, 38(12), 1295-1306.
- Gürgöze, M.** (1998a). On the eigenfrequencies of longitudinally vibrating rods carrying a tip mass and spring-mass in-span, *Journal of Sound and Vibration*, 216(2), 295-308.
- Gürgöze, M.** (1998b). On the sensitivities of the eigenvalues of a viscously damped cantilever carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 216(2), 215-225.
- Gürgöze, M. & Mermertas V.** (1998). On the eigenvalues of a damped cantilever carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 216(2), 309-314.
- Gürgöze, M. & Erol, H.** (2002). On the frequency response function of a damped cantilever simply supported in-span and carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 255(3), 489-500.
- Gürgöze, M. & Zeren, S.** (2006). On the eigencharacteristics of an axially vibrating visco-elastic rod carrying a tip mass and its representation by a spring-damper-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, 294, 388-396.
- Gürgöze, M., Doğruoğlu, A. N., Zeren, S.** (2007). On the eigencharacteristics of a cantilevered visco-elastic beam carrying a tip mass and its representation by a spring-damper-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, 301, 420-426.
- Gürgöze, M., Zeren, S., Bıçak, M. M. A.** (2008). On the consideration of the masses of helical springs in damped combined systems consisting of two continua, *Structural Engineering and Mechanics*, 28(2), 167-188.
- Gürgöze, M. & Zeren, S.** (2009). On the eigencharacteristics of a centrifugally stiffened, visco-elastic beam, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 223, 1767-1775.
- Gürgöze, M. & Zeren, S.** (2011). The influence of both offset and mass moment of inertia of a tip mass on the dynamics of a centrifugally stiffened visco-elastic beam. *Meccanica*, 46, 1401-1412.
- Hatami, M. & Ganji, D. D.** (2014). Motion of a spherical particle on a rotating parabola using Lagrangian and high accuracy Multi-step Differential Transformation Method, *Powder Technology*, 25894-98.
- He, J., Fu, Z. –F.,** (2001). *Modal Analysis.* Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.
- Hijmissen, J. W. & Horssen, W. T.** (2008). On the weakly damped vibrations of a vertical beam with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 310, 740-754.

- Hoa, S. V.** (1979). Vibration of a rotating beam with tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 67(3): 369-381.
- Hongjin, W., Qingfeng, M., Wuwei, F.** (2014). Discussion of the improved methods for analyzing a cantilever beam carrying a tip-mass under base excitation, *Shock and Vibration*, 2014, 1-15.
- https://endevco.com/news/newsletters/2016_02/f_ate.html#.WkODr1VI-Uk. 13.04.2018 tarihinde erişildi.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_constant. 13.04.2018 tarihinde erişildi.
- Joshi, A.** (1995). Constant frequency solutions of a uniform cantilever beam with variable tip mass and corrector spring, *Journal of Sound and Vibration*, 179(1), 165-169.
- Kim, I. K. & Lee, S. I.** (2013). Theoretical investigation of nonlinear resonances in a carbon nanotube cantilever with a tip-mass under electrostatic excitation, *Journal of Applied Physics*, 114, 104303-1-10.
- Kuo, Y. H., Wu, T. H., Lee, S. Y.** (1992). Bending vibrations of a rotating non-uniform beam with tip mass and an elastically restrained root, *Journal of Computer and Structures*, 42(2), 229-236.
- Leissa, A. W. & Qatu M. S.** (2011). *Vibration of Continuous Systems*. McGraw-Hill.
- Laura, P. A. A., Reyes, J. A., Rossi, R. E.** (1974). Analysis of a cable-like system suddenly stopped at one end, *Journal of Sound and Vibration*, 37(2), 195-204.
- Laura, P. A. A. & Gutierrez, R. H.** (1986). Vibrations of an elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length, *Journal of Sound and Vibration*, 108(1), 123-131.
- Lee, T. W.** (1976). Transverse vibrations of a tapered beam carrying a concentrated mass, *Applied Mechanics*, 366.
- Lee, S. Y. & Lin, S. M.** (1992). Exact vibration solutions for nonuniform timoshenko beams with attachments, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 30(12), 2930-2934.
- Lee, H. P.** (1995). Stability of a cantilever beam with tip mass subject to axial sinusoidal excitations, *Journal of Sound and Vibration*, 183(1), 91-98.
- Lee, S. Y., Lin, S. M., Wu, C. T.** (2004). Free vibration of a rotating non-uniform beam with arbitrary pretwist, an elastically restrained root and a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 273, 477-492.
- Lengvarsky, P., Bocko, J., Hagara, M.** (2013). Modal analysis of titan cantilever beam using ANSYS and Solidworks, *American Journal of Engineering*, 1, 271-275.
- Li, X. F., Tang, A. Y., Xi, L. Y.** (2013). Vibration of a Rayleigh cantilever beam with axial force and tip mass, *Journal of Constructional Steel Research*, 80, 15-22.
- Lim, H. S. & Yoo, H. H.** (2006). Dynamic impact analysis of a rotating beam having a tip mass, *Key Engineering Materials*, 321-323, 1649-1653.
- Liu, Z., Yin, Y., Wang, F., Zhao, Y., Cai, L.** (2013). Study on modified differential transform method for free vibration analysis of uniform Euler Bernoulli beam, *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 697-709.

- Liu, B., Zhou, X., Du, Q.** (2015). Differential transform method for some delay differential equations, *Applied Mathematics*, 6, 585-593.
- Mabie, H. H. & Rogers, C. B.** (1964) Transverse vibrations of tapered cantilever beam with end loads. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36(3), 463-469.
- Malaeké, H. & Moenfarid, H.** (2016). Analytical modeling of large amplitude free vibration of non-uniform beams carrying a both transversely and axially eccentric tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 366, 211-229.
- Matt, C. F.** (2013). Simulation of the transverse vibrations of a cantilever beam with an eccentric tip mass in the axial direction using integral transforms, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 9338-9354.
- Mousavi Lajimi, S. A. & Heppler, G. R.** (2012). Comments on “Natural frequencies of a uniform cantilever with a tip mass slender in the axial direction, *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2964-2968.
- Mei, C.** (2008) Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam, *Comput. Struct.* 86, 1280–1284.
- Nourifar, M., Sani, A. A., Keyhani, A.** (2017). Efficient multi-step differential transform method: Theory and its application to nonlinear oscillators, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 53, 154-183.
- Oguamanam, D. C. D.** (2003). Free Vibration of beams with finite mass rigid tip load and flexural-torsional coupling, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, 963-979.
- Oguamanam, D. C. D. & Arshad, M.** (2005). On the natural frequencies of a flexible manipulator with a tip load, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 219, 1199-1205.
- Ozgunus, O. O. & Kaya, M.O.** (2006). Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method, *Journal of Sound Vibration*, 289, 413–420.
- Ozgunus, O. O. & Kaya, M.O.** (2010). Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM. *Meccanica*. 45, 33-42.
- Öz, H. R.** (2003). Natural frequencies of an immersed beam carrying a tip mass with rotary inertia, *Journal of Sound and Vibration*, 266, 1099-1108.
- Park, J. H. & Kim, J. H.** (1999). Dynamic analysis of a rotating curved beam with tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 1017-1034.
- Pratiher, B. & Dwivedy, S. K.** (2009). Nonlinear vibration of a magneto-elastic cantilever beam with tip mass, *Journal of Vibration and Acoustics*, 131, 1-8.
- Pratiher, B. & Dwivedy, S. K.** (2010). Nonlinear response of a soft magneto elastic cantilever beam with end mass under static and dynamics magnetic field, *Journal of Vibration and Control*, 17(9), 1394-1406.
- Pratiher, B.** (2012). Vibration control of a transversely excited cantilever beam with tip mass, *Arch appl Mech*, 82, 31-42.
- Pukhov, G. E.** (1981). Expansion formulas for differential transforms, *Cybern Syst. Anal.*, 17, 460.

- Pukhov, G. E.** (1982). Differential transforms and circuit theory, *Int. J. Circ. Theor.App.*, 10, 265.
- Rajasekaran, S.** (2013a). Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4440-4463.
- Rajasekaran, S.** (2013b). Differential transformation and differential quadrature methods for centrifugally stiffened axially functionally graded tapered beams, *International Journal of Mechanical Science*, 74, 15-31.
- Rashidi, M. M., Chamkha, A. J., Keimanesh, M.** (2011) Application of Multi-Step Differential Transform Method on flow of a second-grade fluid over a stretching or shrinking sheet, *American Journal of Computational Mathematics*, 6, 119-128.
- Salarieh, H. & Ghorashi, M.** (2006). Free vibration of timoshenko beam with finite mass rigid tip load and flexural torsional coupling, *International Journal of Mechanical Science*, 48, 763-779.
- Shen, Z. B., Deng, B., Li, X. F., Tang, G. J.** (2011). Vibration of double-walled carbon nanotube-based mass sensor via nonlocal Timoshenko beam theory, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 2, 031003.
- Silva, D. G. & Varoto, P. S.** (2008). Effects of variations in nonlinear damping coefficients on the parametric vibration of a cantilever beam with a lumped mass, *Mathematical Problems in Engineering*, 2008, 185351.
- Storch, J & Gates, S.** (1985). Transverse vibration and buckling of a cantilevered beam with tip body under axial acceleration, *Journal of Sound and Vibration*, 99(1), 43-52.
- Şekerci, B. U.** (2013). *Bir hava aracı komponentinin dinamik karakteristiklerinin teorik ve deneysel modal analiz metoduyla belirlenmesi.* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Tang, H. L., Shen, Z. B., Li, D. K.** (2014). Vibration of nonuniform carbon nanotube with attached mass via nonlocal Timoshenko beam theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28(9), 3741-3747.
- To, C. W. S.** (1982). Vibration of a cantilever beam with a base excitation and tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 83(4), 445-460.
- Uscilowska, A. & Kolodziej, J. A.** (1998). Free vibration of immersed column carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 216(1), 147-157.
- Vakil, M., Sharbati, E., Vakil, A., Heidari, F., Fotouhi, R.** (2013) Vibration analysis of a Timoshenko beam on a moving base, *Journal of Vibration and Control*, 21(6), 1068-1085.
- Wei, J., Cao, D., Liu, L., Huang, W.** (2017). Global mode method for dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator with tip mass. *Applied Mathematical Modelling*, 48, 787-805.
- Wang, L., Chen, H., He, X.** (2011). Study on modal shape of the vibration of an axially moving cantilever beam with tip mass, *Advanced Materials Research*, 211-212, 200-204.

- Wu, J. S. & Chen, C. T.** (2005). An exact solution for the natural frequencies and mode shapes of an immersed elastically restrained wedge beam carrying an eccentric tip mass moment of inertia, *Journal of Sound and Vibration*, 286, 549-568.
- Wu, J. S. & Hsu, S. H.** (2006). A unified approach for the free vibration analysis of an elastically supported immersed uniform beam carrying an eccentric tip mass with rotary inertia, *Journal of Sound and Vibration*, 291, 1122-1147.
- Wu, J. S. & Hsu, S. H.** (2007). The discrete methods for free vibration analyses of an immersed beam carrying an eccentric tip mass with rotary inertia, *Ocean Engineering*, 34(1), 54-68.
- Yabuno, H., Ide, Y., Aoshima, N.** (1998). Nonlinear analysis of a parametrically excited cantilever beam (Effect of the tip mass on stationary response), *JSME International Journal*, 41(3), 555-562.
- Yaman, M.** (2006). Finite element vibration analysis of a partially covered cantilever beam with concentrated tip mass, *Materials and Design*, 27, 243-250.
- Yaman, M.** (2007) Adomian Decomposition Method for solving a cantilever beam of varying orientation with tip mass, *J. Comput. Nonlinear Dyn*, 2(1), 52-57.
- Yang, K. Y.** (1990). The natural frequencies of a non-uniform beam with a tip mass and with translational and rotational springs, *Journal of Sound and Vibration*, 137(2), 339-341.
- Yang, H., Hong, J., Yu, Z.** (2003). Dynamic modeling of a flexible hub-beam system with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 266, 759-774.
- Yesilce, Y. & Çatal, S.** (2009). Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method, *Structural Engineering and Mechanics*, 31, 453-476.
- Yesilce Y.** (2010) Differential transform method for free vibration analysis of a moving beam, *Structural Engineering and Mechanics*, 35, 645-658.
- Yesilce Y.** (2013) Determination of natural frequencies and mode shapes of axially moving Timoshenko beams with different boundary conditions using differential transform method, *Adv. Vib. Eng*, 12, 90-108.
- Yesilce, Y.** (2015). Differential transform method and numerical assembly technique for free vibration analysis of the axial-loaded Timoshenko multi-step beam carrying a number of intermediate lumped masses and rotary inertias, *Structural Engineering and Mechanics*, 53, 537-573.
- Yoon, H. I. & Son I. S.** (2007). Dynamic response of rotating cantilever pipe conveying fluid with tip mass, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 878-887.
- Zeren, S. & Gürgöze, M.** (2013). On the dynamics of rotating, tapered, visco-elastic beams with a heavy tip mass, *Structural Engineering and Mechanics*, 45(1), 69-93.
- Zhou, J. K.** (1986). *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits*. Huazhong University Press. Wuhan China.
- Zhou, D.** (1997). The vibration of a cantilever beam carrying a heavy tip mass with elastic supports, *Journal of Sound and Vibration*, 206(2), 275-279.

Xiao, S., Chen, B., Du, Q. (2005). On dynamic behavior of a cantilever beam with tip mass in centrifugal field, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 33, 79-98.



EKLER

EK A: Literatürdeki kiriş-uç kütle sistemlerinin şematik gösterimleri

Çizelge A.1 : Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Boyce ve Handelman, 1961	
Bhat ve Wagner, 1976	
To, 1982	
Storch ve Gates, 1985	
Hoa, 1979; Bhat, 1986	
Gürgöze, 1986	
Bruch ve Mitchell, 1987	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Abramovich ve Hamburger, 1991	
Chandrashekhara ve Bangera, 1993	
Lee, 1995	
Joshi, 1995	
Gürgöze ve diğ., 1995	
Cuvalci ve Ertas, 1996	
Gürgöze, 1996a	
Gürgöze, 1996b	
Zhou, 1997	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Esmailzadeh ve Nakhaie-Jazar, 1998	
Gürgöze, 1998a	
Fung ve diğ., 1998; Yabuno ve Aoshima, 1998	
Esmailzadeh ve Jalili, 1998	
Uscilowska ve Kolodziej, 1998	
Gürgöze, 1998b; Gurgoze ve Mermertas, 1998	
Esmailzadeh ve Nakhaie. Jazar, 1998	
Park ve Kim, 1999	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Gürgöze ve Erol, 2002	
Cicek ve Ertas, 2002	
Andrews ve Shillor, 2002	
Yang ve Yu, 2003	
Oguamanam, 2003	
Gökdağ ve Kopmaz, 2005	
Cai ve diğ., 2005	
Oguamanam ve Arshad, 2005	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Xiao ve diğ., 2005	
Salarieh ve Ghorashi, 2006	
Gürgöze ve Zeren, 2006	
Lim ve Yoo, 2006	
Yaman, 2006	
Wu ve Hsu, 2006; 2007	
Yaman, 2007	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Gürgöze ve diğ., 2007	
Yoon ve Son, 2007	
Gürgöze ve diğ., 2008	
Hijmissen ve Horssen, 2008	
Silva ve Varoto, 2008	
Gürgöze ve Zeren, 2009	
Pratiher ve Dwivedy, 2009	
Pratiher ve Dwivedy, 2010	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Emam, 2009	
Gürgöze ve Zeren, 2011	
Ansari ve diğ., 2011	
Wang ve diğ., 2011	
Pratiher, 2012	
Eftekhari ve diğ., 2012	
Friswell ve diğ., 2012	

Çizelge A.1 (devam): Literatürdeki bazı uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Mousavi Lajimi ve Heppler, 2012	
Li ve diğ., 2013	
Vakil ve diğ., 2013	
Matt, 2013	
Kim ve Lee., 2013	
Zeren ve Gürgöze, 2013	
Hongjin ve diğ., 2014	
Wei ve diğ., 2017	

Çizelge A.2 : Literatürdeki bazı non-uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Mabie ve Rogers, 1964	
Laura ve Gutierrez, 1986	
Alvarez ve diğ., 1988	
Kuo ve diğ., 1992	
Lee ve Lin, 1992	
Auciello, 1996	
Yang, 1990	

Çizelge A.2 (devam) : Literatürdeki bazı non-uniform kesitli kiriş-uç kütle sistemleri

Araştırmacılar	Sistemin şematik görüntüsü
Auciello ve Nole, 1998	
Auciello, 2000	
Lee ve diğ., 2004	
Wu ve Chen, 2005	
De Rosa ve diğ., 2010	
Shen ve diğ., 2011	
Tang ve diğ., 2014	
Malaeke ve Moeenfar, 2016	

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : HİLAL DOĞANAY KATI
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.12.1987 /TERCAN
E-posta : hilaldoganay@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2008, Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik
- **Lisans** : 2010, Atatürk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2009, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Tezsiz Yüksek Lisans
- **Yüksek Lisans** : 2013, University College London (UCL), Engineering Department, Mechanical Engineering

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Kati HD., Gökdağ H., Free vibration of a Timoshenko beam carrying three dimensional tip mass:Analytical and experimental modal testing, Material Testing, 2017, 59(6), 591-597, DOI: 10.3139/120.111045.
- Kati H.D., Gokdag H., Vibration analysis of a Timoshenko beam carrying 3D tip mass by using differential transform method, Structural Engineering&Mechanics, 2018, 65(4), 381-388, DOI: 10.12989/sem.2018.65.4.381
- Katı HD., Gökdağ H., Multi-step diferansiyel transform metodu ile uç kütle eklentili kirişlerin serbest titreşim analizi, Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 2018, (Kabul edildi.)
- Free Vibration of EB Beam with 3D Tip Mass using Differential Transform Method, Hilal Doğanay Katı, Hakan Gökdağ (10.05.2017 -12.05.2017) , Yayın Yeri:International Conference on Mathematics and Engineering , 2017.
- Free Vibration of a Tapered EB Beam with 3D Tip Mass by Multi-Step Differential Transformation Method, Hilal Doğanay Katı ve Hakan Gökdağ (15.08.2017-

18.08.2017), Yayın Yeri:6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), 2017.

