

**T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SABİT BİR ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA TELEPARALEL BİR
EVRENDE SPİN-1/2 PARÇACIKLAR**

Ali İhsan KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

DIYARBAKIR

Haziran 2011

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Ali ihsan KESKİN tarafından yapılan “Sabit Bir Elektrik Alan Varlığında Teleparalel Bir Evrende Spin-1/2 Parçacıklar” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV

Üye : Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. F. Figen BİNBAZ

Rabil Maşiyev
İrfan Açıkgöz

F. Figen Binbaz

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 20/06/2011

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2011

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŐEKKÖR

Hayatım boyunca hem maddi hem de manevi olarak desteklerini benden esirgemeyen anneme ve babama sonsuz teőekkÖr ederim. Tez çalıőmam boyunca bir an olsun ilgisini eksik etmeyen eőime, deneyimlerini paylaőan Mustafa SALTI'ya ve danıőman hocam Yrd. Doç. Dr. F.Figen BİNBAY'a teőekkÖr ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Schrödinger Denklemi	3
2.2. Klein-Gordon Denklemi	4
2.3. Dirac Denklemi	7
2.3.1. Spin hakkında	11
2.4. Genel Görelilik, Teleparalel Kuramları ve Kısa Tarihçeleri	12
2.4.1. Parçacık Hareketi	16
2.4.2. Kuvvet Denklemi	16
2.4.3. Teleparalel Kuramın Genel Göreliliğe Eşdeğerliği	17
2.4.5. Genel Görelilik ile Teleparalel Kuramlarının Kısa Bir Karşılaştırılması	17
3. MATERYAL VE METOT	21
3.1. Kullanılacak Notasyon Hakkında	21
3.2. Tetrad Alanı	21
3.3. Burulma Tensörü	23
3.4. Spinör Bağlantıları ve Burulma Tensörünün Bileşenleri	24
3.5. Düz Uzay-Zamanda (Minkowski) Dirac Denklemi	25
3.5.1. Teleparalel Kuramda Dirac Denklemi	26
3.5.2. Dirac (γ^{μ}) Matrislerinin Özellikleri	27
3.6. Spin Salınımı	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	29
4.1. Hesaplamalar	29
4.2. Teleparalel Dirac Denklemine Çözümü	32
4.3. Salınım Frekansının Kuantumlanması	42

4.4. Dirac Parçacığının Spin Salınımı	43
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	45
6. KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	53

ÖZET

SABİT BİR ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA TELEPARALEL BİR EVRENDE SPİN-1/2 PARÇACIKLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali İhsan KESKİN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

2011

Bu çalışmada, izotropik olmayan bir evrende sabit bir elektrik alan varlığında Dirac parçacıklarının dinamikleri üzerine odaklandık. Einstein'in Genel Görelilik teorisi yerine Teleparalel kütle çekim teorisini kullanarak hesaplamaları gerçekleştirdik. İlk olarak, izotropik olmayan Bianchi-I- tipi bir evrende Teleparalel Dirac denkleminin tam çözümlerini bulduk. İkinci olarak, çözümlerin harmonik salınım davranışı tartışıldı ve daha sonra salınım frekansı kuantize edildi. Üçüncü olarak, Dirac parçacıklarının spin salınımını inceledik ve eksensel vektör spin bağlantı terimini tartıştık. Son olarak kütleli spin-1/2 parçacıkların yaratılması üzerine birkaç noktayı verdik. Burada elde edilen sonuçlar, boyutsuz teleparalel üç parametreden bağımsızdır ki bu da sonuçların her bir teleparalel modelde geçerli olduğu anlamına gelir.

Anahtar Kelimeler: Dirac parçacığı, Teleparalel kütle çekim

ABSTRACT

SPIN-1/2 PARTICLES IN A TELEPARALLEL UNIVERSE WHEN A CONSTANT ELECTRIC FIELD IS PRESENT

MSc THESIS

Ali İhsan KESKİN

DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2011

In this work, we focus on the dynamics of Dirac particles in the presence of constant electric field in a cosmological anisotropic universe. Instead of Einstein's theory of general relativity, we perform the calculations using the teleparallel theory of gravity. First, we find the exact solutions of the teleparallel Dirac equation in an anisotropic Bianchi-I universe. Second, the harmonic oscillator behavior of the solutions is discussed and then the oscillation frequency is quantized. Third, we investigated the spin precession of Dirac particles and dispute the axial-vector spin coupling term. Finally, we give some remarks on the creation of the massive spin-1/2 particles. It is interesting to mention here that the results are independent from three teleparallel dimensionless parameters which means the results are valid in any teleparallel model.

Key Words: Dirac particle, Teleparallel gravity.

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1.	Eğri yüzeyde vektörün paralel taşınması	18
Şekil 2.2.	Yüzeyin burulması	18
Şekil 2.3.	Yüzeyin hem burulma hem de eğri olma durumu	19
Şekil 2.4.	Kütle çekim alanının ürettiği eğrilik (Genel Görelilik)	19

1.GİRİŞ

Evrenin dili temelde matematiksel terimlerden oluşmaktadır. Son yüzyılda evrenin hem makroskopik hem de mikroskopik düzeyde dinamiklerinin açıklanmasında temeli matematik ve geometriye dayanan iki teori geliştirilmiştir. Bunlardan biri evreni büyük ölçeklerde betimleyen Einstein Genel Görelilik teorisidir (temel dili Rieman uzay-zaman geometrisidir ve kütleli çekimi başarılı bir şekilde açıklar); diğeri küçüklerin dünyasını (parçacıkların dinamiğini) betimleyen kuantum alan teorisidir. Bu noktada fiziksel evreni anlamak için hem Einstein hem de kuantum alan denklemlerinin çözümlerinin bilinmesi ve bunların iyi okunması gerekmektedir; fakat Einstein Genel Görelilik Teorisi, kütleli çekimi geometri ile açıkladığından (alan olarak açıklamıyor) kuantum alan teorisi ile uzlaşması noktasında problemler ortaya çıkmaktadır. Bu doğrultuda kütleli çekim ile diğeri etkileşimlerin birleştirilmesi ve tek bir formda ifade edilmesi için kütleli çekimi tetradlarla (dört ayaklarla) ifade eden Teleparalel kuram geliştirilmiştir. Geliştirilen bu kuramda parçacık denklemleri yazılmış ve Genel Görelilik Kuramı ile eşdeğerliği incelenmiştir. Bu noktadan bakıldığında, yakın geçmişte mikro parçacık dünyasında kütle çekiminin etkileri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Özellikle Parker (1968, 1977) ve Zeldovich (1971) yaptığı çalışmalardan sonra kozmolojide kuantum etkileri çalışmaları aktif bir araştırma alanı olmuştur. Genel Görelilikte farklı evren modelleri için Dirac denklemi (kütleli ve spin-1/2), Klein-Gordon denklemi (kütleli ve spin-0) ve Weyl denklemleri (kütleli ve spin-1/2) üzerinde daha önce çalışmalar yapılmış ve bu evren modelleri için çözümler elde edilmiştir. Çözülen bu denklemlerin birçoğu genişleyen evren modelinde ele alınmıştır (Parker 1971, Isham ve Nelson 1974, Audretsch ve Shafer 1978, Kovalyov ve Legare 1990, Barut ve Duru 1987, Villalba ve Percoco 1990). Ayrıca İzotropik olmayan uzay zamanda foton denklemlerinin tam çözümleri yapılmıştır (Havare ve ark 2005). Genel Göreliliğe bir alternatif olarak oluşturulan Teleparalel kuramda da bu denklemlerin yazılması ve Genel Görelilik ile eşdeğerliği incelenmiştir. Bu bakımdan Genel Göreliliğe göre daha yeni ve Kütleli çekimi, alan denklemleri ile (tetrad alanlarla) ifade etmesi bir bakıma Teleparalel kuramın daha avantajlı olmasını sağlar. Bu kuramda tetradlar, verilen uzay zaman manifoldunu Minkowski düz uzay-zamana taşır. Bununla beraber Genel Görelilikte relativistik denklemlerin çözülmesi ile elde edilen sonuçların,

Teleparalel kuramın bağıntıları ile çözümlenmiş eşdeğerliğinin gösterilmesi Teleparalel kuramın geçerliliğinin artmasına katkı sağlayacaktır.

Daha önce Villalba ve Greiner (2002) de Genel Görelilik kuramında izotropik olmayan ve genişleyen bir evren modelinde kütleli spin-1/2 parçacıkları betimleyen Dirac denkleminin sabit bir elektrik alan varlığında tam çözümlerini yapıp bu parçacıkların kozmolojik zeminde yaratılması üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bu tezde, izotropik olmayan kozmolojisel bir evrende sabit bir elektrik alan varlığında Dirac parçacıklarının dinamiği ele alındı. Burada Einstein 'nin Genel Göreliliğinin aksine Teleparalel kuramın bağıntıları kullanılarak hesaplamalar yapıldı. Bu çalışmada, asıl amaç verilen metriğe göre Teleparalel Dirac denkleminin izotropik olmayan Bianchi-I tipi bir evren modelinde ve elektrik alan varlığında tam çözümünü bulmaktır. Bu çözümün, Genel Görelilik kuramında daha önce Villalba ve Greiner (2002) tarafından verilen aynı metriğe göre yapılan çözümler ile eşdeğer olduğu görülmüştür. İkinci olarak, çözümlerin harmonik salınım davranışı ve salınım frekansının kuantize edilmesi üzerine tartışmalar verilmiştir. Üçüncü olarak, Dirac parçacıklarının spin salınımının teleparalel kütle çekiminde incelenmesinin yanı sıra eksensel vektör spin bağlantı terimi tartışılmıştır. Ayrıca kütleli spin-1/2 parçacıkların yaratılması üzerine birkaç noktaya değinilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Çalışmanın bu kısmında, serbest parçacık için Dirac denklemi hakkında bilgiler verilmiştir. Bundan önce Schrödinger denklemi ve Klein-Gordon denklemlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca Genel Görelilik ve Teleparalel kuram ile ilgili bilgilerin yanı sıra bunların kısa tarihçeleri verilip birkaç yönüyle karşılaştırılmaları maddeler halinde yapılmıştır.

2.1. Schrödinger Denklemi

Dirac Denklemi ve Klein-Gordon denklemi relativistik parçacıklar için betimlemeler verir. Fakat relativistik olmayan parçacıkları betimleyen denklem, Schrödinger denklemidir.

Kuantum mekaniksel sistemin zamanla değişimi durumunda zamana bağlı Schrödinger denklemi,

$$i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi \quad (2.1.1)$$

şeklinde verilir. Burada $\psi(x,t)$, bir t anında parçacığın bir x koordinatında bulunması için olasılık yoğunluğuna karşılık gelen, sistemin dalga fonksiyonunu belirtir. Hamiltonyen işlemcisi de aşağıdaki gibi verilir:

$$H = \vec{P}^2/2m + V(x) \quad (2.1.2)$$

Burada, \vec{P} parçacık momentumunu ve $V(x)$ parçacığın hareket ettiği potansiyel bölgesini gösterir. (2.1.2) ile verilen Hamiltonyen işlemcisi (2.1.1) denkleminde yazılırsa Schrödinger denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\vec{P}^2}{2m}\psi + V(x)\psi \quad (2.1.3)$$

Temel koordinatlarda momentum işlemcisi aşağıdaki gibi verilir:

$$\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (2.1.4)$$

Verilen bu momentum işlemcisi (2.1.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V(x)\psi \quad (2.1.5)$$

Kuantum mekaniğinde relativistik olmayan schrödinger dalga denklemi elde edilir.

2.2. Klein-Gordon Denklemi

Relativistik olmayan enerji-momentum ilişkisi,

$$E = \vec{P}^2/2m + V(x) \quad (2.2.1)$$

şeklinde verilir. Klein-Gordon denklemi için durgun kütlesi m olan relativistik serbest bir parçacık için relativistik (Einstein) enerji-momentum ilişkisi,

$$E^2 = \vec{P}^2c^2 + m^2c^4$$

$$\text{veya} \quad (2.2.2)$$

$$E^2/c^2 - \vec{P}^2 = p^\mu p_\mu = m^2c^2$$

ile tanımlıdır. Burada p_μ ifadesi momentum işlemcisi için ($\mu= 0, 1, 2, 3$) dördümlü vektör gösterimidir ve \vec{P} çizgisel momentumu ve m ise parçacığın durgun kütlesidir. Momentum işlemcileri koordinat gösterimi,

$$p_\mu = i\hbar\partial_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}), \quad (2.2.3)$$

$$p^\mu = i\hbar\partial^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, i\hbar\vec{\nabla}) \quad (2.2.4)$$

biçiminde verilir. Burada $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ve $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ notasyonu kullanılmıştır ve bu iki işlemcinin çarpımı,

$$\partial^\mu \partial_\mu = \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.2.5)$$

ifadesini verir. Burada \square gösterimi D'Alembertian olarak adlandırılan dört boyutlu Minkowski uzayı için laplasyenin genelleştirilmiş biçimidir.

$p^\mu p_\mu$ işlemcileri kullanılarak en basit relativistik kuantum denklemi elde edilir:

((2.2.2) denkleminde $p^\mu p_\mu = m^2$ olduğu göz önünde tutulursa ve $c=1$ uygun seçimi ile)

$$p^\mu p_\mu \varphi = m^2 \varphi \quad (2.2.6)$$

buradan

$$(i\hbar \partial^\mu)(i\hbar \partial_\mu) \varphi = m^2 \varphi \quad (2.2.7)$$

veya

$$-\hbar^2 \square \varphi = m^2 \varphi \quad (2.2.8)$$

elde edilir. $\hbar=1$ uygun seçimi alınırsa denklem basit bir şekilde aşağıdaki formu alır:

$$(\square + m^2) \varphi = 0. \quad (2.2.9)$$

Bu denklem Klein-Gordon denklemi olarak bilinir. Burada $\varphi(x,t)$ skaler dalga fonksiyonudur. (2.2.5) denklemini (2.2.9)'da yazılırsa Klein-Gordon denkleminin açık hali aşağıdaki gibi olur:

$$\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi \right) + m^2 c^2 = 0. \quad (2.2.10)$$

Klein-Gordon denklemini, serbest parçacıkların karakteristik bir özelliği olan düzlem dalga ($\varphi(x) = e^{\pm i(Et - \vec{P}\vec{r})}$) çözümlerine sahiptir. Burada,

$$E = \pm \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \quad (2.2.11)$$

Olduğundan enerji için pozitif ve negatif özdeğerlere sahip çözümler vardır. Yani, elektronun hem pozitif hem de negatif enerji değerlerinin olduğunu gösterir. Fakat Kuantum mekaniğinde negatif özdeğerlerin fiziksel bir anlamı yoktur. Bununla beraber Dirac'ın çalışmasına kadar da görelilikte negatif enerji yoktu. (2.2.9) ile verilen Klein-Gordon denklemini ve

$$(\square + m^2)\varphi^* = 0 \quad (2.2.12)$$

ile kompleks eşleniği birbiri ile çarpıldığında akım olasılık yoğunluk dört-vektörü elde edilir:

$$J^\mu = (j^0, \vec{J}) = (\rho, \vec{J}) \quad (2.2.13)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2im} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) \quad (2.2.14)$$

$$\rho = \frac{i}{2m} (\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}) \quad (2.2.15)$$

($\hbar = 1$ alındı).

Burada, \vec{J} akım olasılık yoğunluğu (relativistik olmayan kuantum mekaniği ile benzerdir) ve ρ olasılık yoğunluğudur ve pozitif tanımlanması gereklidir (yani negatif değer alamaz). Akı yoğunluğu (ρ) relativistik olmayan kuantum mekaniğindeki olasılık yoğunluğundan farklı bir biçimdedir; çünkü en basit düzlem dalga (e^{-ikx}) çözümlerinde olasılık yoğunluğu negatif çıkmaktadır. Bunun sebebi, Klein-Gordon denkleminde zamana bağlı ikinci dereceden türevidir (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd 2011). Bu denklem, negatif enerji çözümleri verir. Bu durum hakkında herhangi bir açıklama vermez ve denklemin relativistik hesaplamaları hidrojen üzerindeki deneysel sonuçlar

ile uyuşmaz. Çünkü hidrojen atomundaki elektronu (spin-1/2 parçacıkları) tanımlayamaz. Enerji momentum ilişkisi denklem (2.2.2) de verilmiştir. Karekök ile negatif çözümün karşılığı anti-parçacık ile ilgilidir (bunu daha sonra Dirac bulmuştur).

Klein-Gordon denkleminde φ skaler fonksiyonu (bir tensör olarak ele alındığında) her bir rank değeri için relativistik olarak tüm durumlar için doğru betimlemeler verir. Tensör rankı 0 ise, bir skaler dalga fonksiyonu olarak spin-0 bozonları tanımlar. Tensör rankı 1 ise, dört vektör dalga fonksiyonu olarak spin-1 parçacıkları (fotonları) tanımlar. 2 ranklı tensör ise, dalga fonksiyonu olarak spin-2 parçacıkları (graviton) tanımlar.

2.3.Dirac Denklemi

Dirac Denklemi, P.A.M. Dirac tarafından 1928 yılında bulunan relativistik kuantum mekaniksel bir dalga denklemdir (Dirac 1928 a, b). Dirac, bu denklemi Klein-Gordon denkleminin negatif olasılık yoğunluğu probleminin üstesinden gelmek için çalışmalar yaparken bulmuştur. Dirac denkleminde tensörel rankları göstermeyen spinörler vardır. Spin-1/2 parçacıkları (elektronları) doğru ve başarılı bir biçimde betimler. Klein-Gordon denklemine göre daha fazla fiziksel öneme sahiptir (Hansson 2001). Hem özel görelilik teorisinin hem de kuantum mekaniğinin ilkelerini içinde barındırır.

Klein-Gordon denkleminde zamana bağlı ikinci dereceden türev vardı. Bu durum olasılık yoğunluğunu negatif veriyordu. (Relativistik olmayan kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemi gibi) birinci dereceden relativistik bir denklem ile olasılık yoğunluğunun tanımına ($\rho = \varphi\varphi^*$) uygun bir denklem, bu problemi (negatif olasılık yoğunluğu problemini) ortadan kaldırabilir. Bunun için $\varphi(x)$ için birinci dereceden diferansiyel bir denkleme ihtiyaç vardır ki bu doğru bir şekilde ifade edilebilen enerji-momentum ilişkisine yol açar.

Klein-Gordon denkleminin çözümünde negatif olasılık yoğunluğu problemi Skaler fonksiyon φ ile çözülmez. Bu noktada Dirac bir "vektör" kavramını tanıttı.

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

Bu tanımlama ile olasılık yoğunluğunun pozitif tanımı aşağıdaki gibi olur:

$$\rho(x) = \varphi(x)\varphi^*(x). \quad (2.3.2)$$

Alternatif relativistik denklemleri bulmak için kuantum mekaniğinde genel dalga denklemlerinden hareket edilirse

$\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$ ve enerji işlemcisi $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ olmak üzere;

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \quad (2.3.3)$$

Burada hamiltonyen ifadesi aşağıdaki gibi verilir:

$$H = c(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z) + \beta mc^2 \quad (2.3.4)$$

Momentum işlemcisi $p_x \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $p_y \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$, $p_z \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ ile (2.3.4) ifadesi, (2.3.3) denkleminde yazılırsa aşağıda verilen birinci dereceden denklem elde edilir:

$$\hat{E}\Psi = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \Psi. \quad (2.3.5)$$

Denklemin sağ tarafındaki işlemci, relativistik enerji momentum ilişkisi olan $c^2 p^2 + m^2 c^4$ ifadesinin karekökü olarak düşünülebilir. $\hbar = 1$ ve $c = 1$ uygun seçimleri yaptıktan sonra denklem (2.3.5) 'de eşitliğin sağ ve sol tarafındaki işlemcilerin karesi alındığında

$$\hat{E}^2 \Psi = (\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \beta m)^2 \Psi \quad (2.3.6)$$

denklemini elde edilir. (2.3.6) denklemini basit şekli ile işlemciler cinsinden verilen Klein-Gordon denklemini ile karşılaştırırsak

$$\hat{E}^2\Psi = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2)\Psi \quad (\text{Klein-Gordon denk.}) \quad (2.3.7)$$

elde ederiz. Buna göre alternatif relativistik denklemini bulmak için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ parametreleri sıradan sabit sayılar olamazlar. Eğer komüt olmayan matris iseler mümkün gösterimleri($i \neq j$ için),

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \quad (2.3.9)$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (2.3.10)$$

şeklindedir. Bu ilişkileri ifade eden ifadeler en az 4×4 'lük matrislerdir. Bu matrisler için uygun seçim aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.11)$$

Burada σ_i , 2×2 lik Pauli matrisleridir ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.12)$$

Şimdi, Dirac denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i\vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + \beta m \Psi \quad (2.3.13)$$

α ve β 4×4 lük matrisler olduğundan Ψ dalga fonksiyonu vektörel dört bileşene sahip olmalıdır (buna aynı zamanda bi-spinör veya Dirac spinörleri de denir).

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

Dirac denklemi β matrisi ile çarpılarak daha fazla simetrik formaya yerleştirilebilir ve denklem genel olarak γ_μ Dirac matrisleri kullanılarak yazılır. $i = 1, 2, 3$ için aşağıda verilen tanımlama ile

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad (2.3.15)$$

$$\gamma_0 = \beta \quad (2.3.16)$$

(2.3.13) denklemi, (2.3.4) işlemcisi göz önünde bulundurularak (ve tüm terimler eşitliğin bir tarafına toplanarak) aşağıdaki şekli alır.

$$(\gamma_\mu p^\mu - mc)\Psi = 0 \quad (2.3.17)$$

veya $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ notasyonu alındığında denklem (2.3.17) şöyle verilir:

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (2.3.18)$$

Bu bilinen serbest parçacık için Dirac denklemdir. Dirac matrisleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.19)$$

Serbest parçacık çözümleri için ($\vec{P} = 0$) ve ($\hbar = 1$, ve $c = 1$ alındığında):

$$\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} - m\right) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3.20)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

Burada,

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2 = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

şeklindedir. Spin-1/2 elektronların iki spin durumlarına karşılık gelen iki pozitif enerji çözümü vardır.

$$\varphi_1 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_1 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

ve simetrik negatif iki çözümü daha vardır:

$$\varphi_2 = e^{+imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2 = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.24)$$

Klein-Gordon denkleminde skaler fonksiyon ile elektronun spin durumları açıklanamazken Dirac denkleminde (2.3.14) ile verilen vektör fonksiyonu (spinör) kavramı ile bu durumlar başarılı bir biçimde betimlenir. Bunun yanında enerjinin negatif olma problemi Dirac'ın önerdiği anti madde kavramı ile giderilmiştir.

2.3.1. Spin hakkında

Dirac denklemi spinli parçacıkları betimlediği için bu başlıkta parçacıkların spin durumu hakkında bilgi verilecektir. Kuantum Kuramının oluştuğu yıllarda kurama deneysel olarak elektron spin durumunun olduğunu keşfederek büyük katkı sağlayan Stern-Gerlach deneyine kısaca değinilecektir.

Stern-Gerlach deneyi, sıcak bir fırında ısıtılan gümüş atomlarının, fırından açılmış küçük bir yarıktan bir ışın demeti şeklinde manyetik alana dik doğrultuda gönderilmesi ile ışın demetlerinin sapma biçimlerine göre açısal momentumunun kesikli değerleri (kuantumlanması) alıp almadığını incelemek için 1920 yılında Otto Stern ve Walter Gerlach tarafından yapılmıştır. Gümüş atomlarının son yörünge elektronunun açısal momentumu +1, 0 ve -1 değerler alır. Buna göre ışın demetlerinin üçe ayrılması gerekir. Fakat deneyde ikiye ayrılma gözlemlendi. Kalan bir demetin açıklanması elektronun dönmesinden gelen $\hbar/2$ büyüklüğünde içsel bir "eksensel açısal momentumunun" olduğudur. Bu içsel açısal momentum elektronun spinidir.

2.4. Genel Görelilik, Teleparalel Kuramları ve Kısa Tarihçeleri

Fizikte doğadaki etkileşimleri birleştirme konusundaki çalışmalar, özellikle 1860'ta J.C Maxwell'in ışığın elektromanyetik dalga olduğunun keşfi ile başlamıştır. Lorentz'in yük yoğunluğu ve akım için yazdığı denklemlerin Poincaré (1905) tarafından düzeltilmesi ile elektrik alan ve manyetik alanı birleştiren Maxwell denklemlerinin kovaryant formu türetilmiştir.

Einstein 1905 yılında özel görelilik kuramını kurdu. Bu kuramın ilkeleri mutlak uzay ve mutlak zaman kavramlarını reddetmekle beraber yüklü parçacıklar arasındaki elektromanyetik etkileşimleri yeterli bir şekilde betimler. Daha sonra Minkowski görelilik üzerine çalışmaları ile uzay ve zamanı birbirinden bağımsız değil de bir bütün olarak düşünülebileceği dört boyutlu uzay-zamanı buldu (Minkowski 1908).

Einstein uzun yıllar süren çalışmaları ile 1916'da Genel Görelilik kuramını açıklayan makalesini yayımladı (Einstein 1916). Bu kuramın temel ilkesi olan "Genel Kovaryanslık" ilkesine göre:

- Fizik yasalarını betimleyen denklemler tensörel biçimde olmalıdır. Aynı zamanda Riemann uzay-zamanda ifade edilmelidir.
- Bütün koordinat sistemleri fizik yasaları için aynı derecede uygundur.
- Fizik yasalarını tanımlayan denklemler bütün koordinat sistemlerinde aynı biçimde olmalıdır.

Genel Görelilik kuramının temel yapıları metrik tensördür. Metrik tensörün yanında Ricci tensörü ve Riemann skaleri, uzay-zaman geometrisini temsil eden Einstein denklemleri olarak bilinen denklemleri ortaya çıkardı. Einstein denklemi,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.4.1)$$

şeklinindedir. Burada $R_{\mu\nu}$: Ricci tensörü, R : Riemann skaleri, $g_{\mu\nu}$: Metrik tensör ve Λ : Kozmolojik sabittir.

Bu denklemler, maddenin uzay-zamanın eğriliği ile olan ilişkisinin nasıl olduğunu gösterir. Kuram aynı zamanda kütle çekimi, uzay-zamanın eğriliğinin geometrik bir etkisi olarak tanımlar (Schutz 1985, D'Inverno 1992). Bu teori, evrenin geçmişi ile ilgili olayları açıklayabilmesinin yanı sıra kozmolojinin gelişimine önemli katkılar sağlamıştır.

Kütle çekim ile elektromanyetizmayı birleştirmek amacıyla yapılan ilk çalışma H.Weyl (1918) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada (başarısız olmasına rağmen) ilk kez ayar dönüşümü ve ayar değişmezliği (invaryanslığı) tanıtıldı ve bugün bilinen ayar teorisinin (teleparalel) temelleri atıldı. 1923'te E.Cartan tarafından burulmanın tanıtılmasından on yıl sonra benzer doğrultuda ikinci bir girişim Einstein tarafından gerçekleştirildi. Einstein, Genel Görelilik Kuramı ile uzay-zamanı, Riemann geometrisi ile başarılı bir şekilde tanımlamış olması ile beraber, elektromanyetizma ile kütle çekimi birleştirme amacı ile metrik tensör değil de başka yapılar ile gravitasyonel yapıyı oluşturmak için mutlak paralelizm fikrini ortaya atmıştır. Einstein, Mutlak Paralelizm fikri ile dört boyutlu uzay zamanın her bir noktasında tanjant uzayının ortonormal baz vektörleri temelinde bir alan olarak tetrad alanı tanıttı. Bu herhangi bir uzay-zaman için tanjant uzay-zaman yığınlarının her bir noktası Minkowski tanjant uzay-zaman ile ilintilidir. Bu ilintiyi sağlayan (yani tanjant uzayında tanımlı metrik tensörü Minkowski düz uzay-zamana indirgenmesi) tetrad alanlardır. Kütle çekim ile elektromanyetizmayı birleştirmek için (Maxwell denklemlerinde elektrik ve manyetik alanların tek bir formda birleştirilmesi gibi) bu yapıların içinde gravitasyonel alan ile elektromanyetik alan bileşenleri vardır. Einstein'ın bu girişimi başarısızlıkla sonuçlanmasına rağmen daha sonra gelen kuramcılar gravitasyon ile diğer

etkileşimleri birleştirmeye çalışmalarını sürdürmüşlerdir. Çalışmalarda, kütleli çekim alanının uzay-zamanda ürettiği eğrilikle beraber burulmanın da olması gerektiği ortaya konmuştur (çünkü, Genel Görelilik Kuramında gravitasyonel alanın varlığı uzay-zamanda sadece eğrilik meydana getirir). Oysa Genel Görelilikte burulma sıfır olarak belirlenir (De Andre ve Pereira 1997).

Cartan ve Weitzenböck'ün aralarında bulunduğu yoğun çalışmaların ilk periyodundan sonra otuz yıla yakın bir süre paralelizm üzerine yeni bir gelişme olmamıştır. Møller 1960'ta yalnız kütleli çekimi tanımlama amacı ile teleparalelizm fikrini yeniden ele almıştır (Møller 1961). Devamında Pellegrini ve Plebanski (1962) teleparalel kütle çekimi (mutlak paralelizm) için Lagranjiyan formülünü buldu. Problem daha sonra Møller (1978) tarafından tekrar ele alındı. Hayashi ve Nakano (1967) dönüşüm grubları için ayar teorisini formülleştirdi (teleparalel teoriyi geliştirirler). Fakat formül Hayashi (1973) tarafından daha fazla geliştirildi. Birkaç yıl sonra Hayashi (1977) teleparalelizm ile bu teori arasındaki ilişkiye değindi. Bu yaklaşıma göre, yalnız eğriliği içeren genel göreliliğe yalnız burulmayı içeren teleparalel kütle çekime eklendi. Bu teori, alışılmış Einstein-Cartan-Sciama-Kibble yaklaşımı (Sabbata ve Gasperini 1985) ile geliştirilen paralelizme bir alternatif olarak Genel Göreliliğe burulmayı dahil ettiği için "Yeni Genel Görelilik" olarak adlandırılır (bu modelde hem eğrilik hem de burulma vardır).

Yukarıda bahsedildiği üzere Teleparalel kuramda gravitasyonel alanın temel matematiksel yapıları tetrad (paralel vektör alanları) alanlarıdır (Müller ve ark. 1983, De Andre ve Pereira 1998, Carr 2000). Kütleli etkileşimler için yazılan denklemlerde, Genel Görelilikte uzay-zaman geometrisini betimleyen metrik tensöre karşın teleparalel kuramda tetrad alanlar ile uzay-zaman betimlenir. Teleparalel kuramda Genel Göreliliğin aksine jeodeziklerin olmadığı ve kütleli etkileşimlerin, elektrodinamikteki Lorentz kuvvet denklemlerine benzer bir kuvvet denklemi ile temsil edilmektedir (De Andrade ve Pereira 1998). Teleparalel Kuramda kütleli çekim, kuvvet rolünü oynayan burulmaya katkı sağlar (De Andrade ve Pereira 1997). Ayrıca Teleparalel kuramın uzay-zamanı Weitzenböck uzay-zamanıdır (Weitzenböck 1923) ve Bu geometriye dayanan geçiş grupları için bir ayar teorisine karşılık gelen kütle çekimin alternatif bir teorisidir (Hayashi ve Shirafuji 1979).

Teleparalel Kuramda yazılan tüm fizik yasaları kovaryant formda ifade edilirler. Bu bağlamda teleparalel kuramda kütle çekim formülize edilirken birçok açıdan Maxwell'in elektromanyetik teorisi ile benzerlik taşır.

Genel Görelilik, kara delikler, büyük patlama ve benzeri kozmolojik olaylara uzay-zaman geometrisi ile açıklamalar getirmesine rağmen (uzak mesafeleri tanımlamada oldukça başarılıdır) temel kuvvetlerin birleştirilmesi veya kuantize oluşu konusunda (mikroskobik mesafelerde ciddi sorunlarla karşılaşır) tatmin edici açıklamaları yapamamaktadır. Genel Görelilik bilindiği üzere "denklik ilkesi"ne dayanır (Bu ilkeye göre "bütün koordinat sistemleri denktir"). Kuantum mekaniği ise temel olarak "belirsizlik prensibine" dayanır. Bu iki teorinin bir araya gelememesinin temel nedeni bundan kaynaklanmaktadır (Chiao 2003).

Genel Göreliliğin denklik prensibine karşın teleparalel kütle çekimin ayar (gauge) yaklaşımı, denklik ilkesine başvurmadan kütle çekimini tanımlar. Yani kütle çekim, Maxwell teorisine benzer bir şekilde denklik prensibinden bağımsız bir biçimde geçiş (dönüşüm) grupları için ayar kuramı kullanılarak açıklanabilir ve formüleleştirilebilir. Kütle çekim Teleparalel teorisinin bu özelliğinden dolayı, Genel Görelilikte geometri ile açıklanamayan parçacık dinamiğinin açıklanabilir bir hale gelmesi umuduyla Teleparalel kuramda son dönemlerde yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Genel Görelilikte $g_{\mu\nu}$ metrik tensör olmasına karşın teleparalel kütle çekimde B^a_μ ayar potansiyeli vardır ve tetrad alanla aşağıda verilen doğrudan bir eşitliği söz konusudur:

$$h^a_\mu = \partial_\mu x^a + B^a_\mu \quad (2.4.2)$$

Her bir kütle çekimsel teorisinin temel alanları ister tetrad olsun ister metrik olsun geometrik bir teori olmasını gerektirir. Teleparalel kuramın temel alanı olan ayar potansiyeli (buna $\partial_\mu x^a$ kadar farkla tetrad alanlara bağlı), Genel Göreliliğe benzer geometrik yapıya sahip değildir. Teleparalel kuramda hem kütle çekimin tanımlanmasında hem de spini olmayan parçacıkların hareket denklemleri yapılırken

dönüşümsel ayar potansiyeli B^a_μ kullanılır. Tam olarak ne tetrad ne de metrik kullanılır. Burada metrik, temel yapıdan ziyade nicelikten çıkarılan (türetilen) bir yapıdır. Bu nokta hem klasiksel hem de kuantum kütle çekimi için önemli sonuçlara sahiptir. Örneğin, gravitasyonel dalgalar metrik dalgaları değil de B-dalgaları olarak görülebilir ya da gravitasyonel alanın kuantizasyonu metrik üzerinde değil de B^a_μ üzerinde gerçekleştirilebilir. Dahası, Teleparalel kuramın Genel Görelilik kuramı ile yer değiştirmesi kuantum mekaniği ile kütle çekimin kavramsal olarak tekrar uzlaşmasına yol açabilir (Aldrovandi ve Pereira 2005).

2.4.1. Parçacık Hareketi

Genel göreliliğe göre kütle çekim etkileşimleri için kuvvet kavramı kullanılmaz. Kuvvet yerine kütle çekimi, uzay-zamanın bozulması ile gösterilir. Yani gravitasyonel alanların varlığının uzay-zamanda bir eğrilik meydana getirdiği varsayılır. Gravitasyonel kuvvet kavramı Riemann geometrisi ile bu bağlamda yer değiştirir ve spinsiz parçacıklar gravitasyonel alanda geometrik olarak şekillenmiş geodeziklerde hareket eder. Bu, genel göreliliğin bir yaklaşımı olmakla beraber burada parçacıkların hareket yörüngeleri kuvvet denklemleri ile değil geodezik denklemleri ile belirlenir. Oysa Teleparalel kuramda parçacık spini, tensör benzeri bir eğrilikle bağlantılıdır. Bu tensör yalnız burulma yolu ile ifade edilir.

2.4.2. Kuvvet Denklemi

Burulma, Teleparalel kütle çekimde bir kuvvet rolü üstlenerek gravitasyonel alana sebep olduğundan, spinsiz bir parçacık için hareket (kuvvet) denklemi aşağıdaki gibi verilir (Aldrovandi ve Pereira 1995, Pereira ve ark. 2001):

$$\frac{du_\lambda}{ds} - \Gamma_{\mu\lambda\nu} u^\mu u^\nu = T_{\mu\lambda\nu} u^\mu u^\nu \quad (2.4.2.1)$$

Eşitliğin sol tarafı parçacığın takip ettiği yol boyunca (Genel Görelilikte geodezik denklemi bunu belirler) u_λ 'nın Weitzenböck kovaryant türevidir. Eşitliğin sağ tarafı ise

burulma tensörü ile verilmiştir. Burada, Gravitasyonel alana sebep olan burulmanın Kütle Çekim Teleparalel Teoride içsel bir kuvvet rolü üslendiği anlamına gelir.

Ayrıca spin'nin önem kazandığı durumlarda teleparalel kuramda burulma kendini gösterir. Kütle çekimi, Kuantum seviyesinde doğal yapısını kaybederse, gravitasyonel etkileşimin eğrilik yolu ile genel relativistik tanımlaması çöker ve bu durum burulmayı içeren teleparalel kuramı nihayetinde zorunlu hale getirebilir (Aldrovandi ve Pereira 2005).

2.4.3. Teleparalel Kuramın Genel Göreliliğe Eşdeğerliği

Teleparalel kütle çekimi (üç parametreli bir teori olarak bilinir) metrik-affine ayar teorisi ve Poincaré (Hehl ve ark. 1995) örneği gibi genel kütle çekim teorisinin özel bir durumu olarak düşünülür. Bu açıdan bakıldığında Teleparalel Kütle Çekimi, gravitasyonel etkileşim için yalnız burulmanın katkısını gösterecektir (Aldrovandi ve Pereira 2005). Zayıf alanlarda Einstein Genel Görelilik Teorisi ile Teleparalel Kütle Çekimin çakıştığı ve Møller (1958,1961) tarafından belirlenen üç sabit vardır. Bunlar,

$$m_1 = \frac{-1}{\kappa} \quad , \quad m_2 = \frac{\lambda}{\kappa} \quad , \quad m_3 = \frac{1}{\kappa}(1 - 2\rho) \quad (2.4.3.1)$$

şeklindedir. Burada κ Einstein Sabitidir ve ρ boyutsuz serbest parametredir. Genel Göreliliğin Teleparalel eşdeğerliği için bu üç sabitin özel seçimi (Hayashi ve Nakano 1967) aşağıdaki gibi verilir:

$$m_1 = \frac{-1}{4} \quad , \quad m_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad m_3 = -1 \quad (2.4.3.2)$$

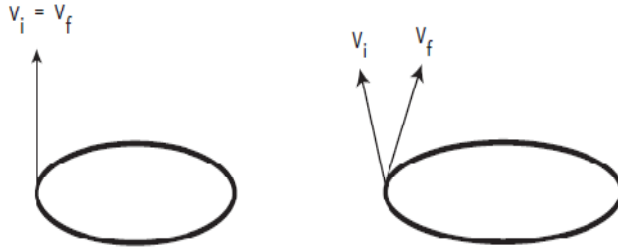
Burulma ve eğrilik tensörleri arasında ilişki (Hayashi ve Shirafuji 1979) incelendiğinde dört farklı durum meydana gelir:

1. Hem eğrilik hem de burulma tensörlerinin olduğu durumdur. Bu, Riemann-Cartan uzayı olarak adlandırılır.
2. Burulmanın sıfır ancak eğrilik tensörünün sıfır olmama durumudur. Bu durumda Genel Görelilik ortaya çıkar.

3. Eğriliğin sıfır ancak burulmanın sıfır olmadığı durumdur. Bu, Teleparalel Kütle Çekimini verir.
4. Son olarak hem burulma hem de eğrilik tensörünün sıfır olması durumudur ki bu da Minkowski uzay-zamanı verir.

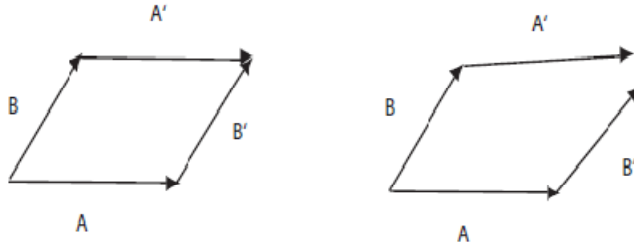
2.4.5. Genel Görelilik ile Teleparalel Kuramlarının Kısa Bir Karşılaştırılması

• Kapalı bir eğri etrafında bir vektörü paralel taşıdığımızı düşünelim. Eğer başlangıç noktasına dönersek vektörler arasında bir açı farklılığı görülür. O halde yüzey eğridir denilir (Genel Görelilik). Yüzeyin eğriliği bu açı farkı ile doğru orantılıdır. Aşağıda verilen şekilde bu durum görülmektedir.



Şekil 2.1. Eğri yüzeyde vektörün paralel taşınması.

• Bu kez iki vektörü paralel taşıdığımızı düşünelim. Birini diğeri boyunca taşıdığımızda eğer paralelkenar oluşmuyorsa bu durumda yüzey artık burulmayı gösterir (Teleparalel). Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:



Şekil 2.2. Yüzeyin burulması .

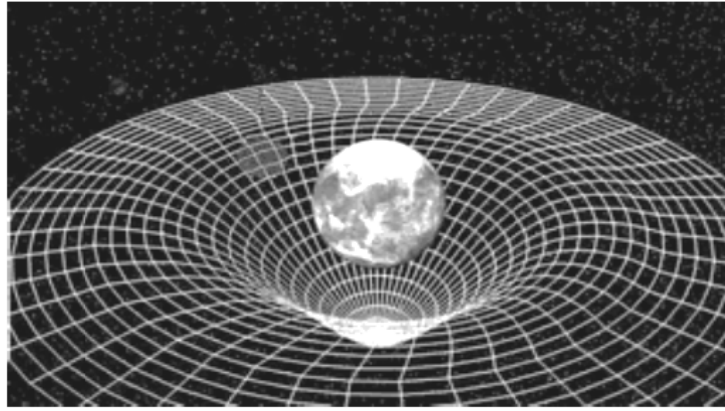
• Tekrar bir vektörün paralel taşınmasını ele alırsak, mesafe farkı nedeniyle vektör'ün başlangıç noktasına tekrar gelmesi mümkün değilse ve ayrıca bir açı farkı

varsa o zaman yüzey hem eğriliği hem burulmayı gösterir (Einstein-Cartan teorisi). Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Yüzeyin hem burulma hem de eğri olma durumu.

- Gravitasyonel alan için Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi temel olarak güçlü denklik prensibine dayanır. Gravitasyonel alanın varlığının uzay-zamanda bir eğrilik ürettiği farz edilir. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Kütle çekim alanının ürettiği eğrilik (Genel Görelilik).

- Gravitasyonel etkileşim geometrize edilmiştir. Yani, geometri kuvvet kavramı ile yer değiştirir. Bir gravitasyonel alanda bir parçacık basit bir şekilde eğri bir uzay-zamanın bir geodeziğinde hareket eder. Genel Görelilikte “Gravitasyonel kuvvet” kavramı yoktur.

- Genel grupları ve Poincaré grubu için ayar teorilerini içeren Einstein-Cartan teorilerinde uzay-zamanda hem eğrilik hem burulma vardır. Enerji ve momentum eğriliği, maddenin spini ise burulmayı gösterir. Bu teoriler spinlerin önem kazandığı mikroskopik seviyelerde Genel Görelilikten farklı sonuçları gösterirken spinin yok olduğu makroskopik seviyelerde Genel Görelilikle çakışır.

- Teleparalel kütle çekimi, dönüşüm grupları için ayar teorisidir. Genel Görelilikte eğrilik gravitasyonel alanı gösterirken, Teleparalel Kütle Çekimde burulma gravitasyonel alanı gösterir. Teleparalel Kütle Çekimde burulma eğrilik için bir alternatif olarak görülür.

- Teleparalel Kütle Çekiminde geodezikler yerine yalnız kuvvet denklemleri olduğundan Maxwell'in teorisi ile oldukça benzerlik gösterir. Burada yüklü parçacıkların elektromanyetik alan ile etkileşimi yalnız bir kuvvet ile tanımlanır.

- Einstein'in kütle çekimi ile elektromanyetizmayı birleştirme amacıyla geliştirdiği teori (paralelizm) Teleparalel yapıya dayanır. Bu alanın temeli h^i_{μ} tetrad alanlarıdır ve 16 bileşene sahiptir. Kütle çekim alanı için 10 ve Elektromanyetik alan için 6 bileşen söz konusudur. Birçok nedenden dolayı bu teori üzerinde çalışma yapılamaz. Bu nedenlerden biri, Teleparalel Lagranjiyanın yerel Lorentz değişmezliğinin sadece 10 bileşeni gerektirmesidir. Bu teoride Teleparalel Kütle Çekimi sadece gravitasyonu tanımlayabilir.

- Genel Görelilik ile Kuantum Mekanik arasında kavramsal farklılıklar vardır. Genel Görelilik denklik ilkesine dayanırken Kuantum Mekanik belirsizlik ilkesine dayanır. Bu sebeple Kuantum seviyelerinde Genel Göreliliğin geometrik tanımlamaları çökebilir. Buna karşın, Teleparalel Kütle Çekimin ayar tanımlaması Kuantum seviyelerinde gravitasyonel etkileşimleri başarılı bir şekilde betimlediği için tutarlı bir teori olarak görülebilir (Pereira 2011).

3. MATERYAL VE METOT

İlgili çalışmada, Dirac denkleminin Teleparalel Kuramda (4.1)'de verilen metrik ile çözümleri hesaplandığından tezin bu kısmında kullanılacak materyal olarak Teleparalel Kuram hakkında bazı temel bağıntılar ve Dirac denkleminin Teleparalel biçimi verilecektir. Ayrıca Dirac parçacıklarının burulma kütle çekiminde spin salınımı hakkında bazı gösterimler verilmiştir.

3.1. Kullanılacak Notasyon Hakkında

Kullanacağımız indis notasyonunda eğri uzay-zaman indisleri ($\mu, \nu, \lambda, \alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3$) Yunan alfabesi ile gösterilecektir. Minkowski tanjant uzay-zamana ait indisler de ($i, j, k, a, b \dots = 0, 1, 2, 3$) Latin alfabesi ile parantez içinde gösterilecektir. Burada sıfır, zaman koordinatını ve (1, 2, 3) rakamları ise uzay koordinatlarını gösterir.

3.2. Tetrad Alanı

Kaynak özetleri kısmında anlatıldığı gibi, tanjant uzay yığınlarının her bir noktasını Minkowski uzay-zaman ile ilişkilendiren tetrad alanlardır. Bu nedenle tetrad alanlar uzay-zaman manifoldu üzerinde teleparalel bir yapıya neden olur ve doğrudan gravitasyonel alanın varlığı ile ilişkilidir. Tetrad alanlar ortonormal baz vektörleri ile tanımlıdır ve tanjant uzayında tanımlanan \hat{e}_μ ortonormal baz vektörünün Minkowski düz uzay-zaman $\hat{e}_{(i)}$ ortonormal baz vektörleri arasındaki ilişki, bu $h_\mu^{(i)}$ tetrad'ları ile verilir:

$$\hat{e}_\mu = h_\mu^{(i)} \hat{e}_{(i)} \quad (3.2.1)$$

ya da

$$\hat{e}_\mu = h_\mu^{(i)} \partial_{(i)} \quad (3.2.2)$$

burada, $\partial_{(i)}$ kısmi türevi $\hat{e}_{(i)} = \partial_i$ ile verilir.

Tetrad'ların ters bileşenleri arasında

$$h_{\mu}^{(i)} h_{(j)}^{\mu} = \delta_{(j)}^{(i)} \quad (3.2.3)$$

$$h_{(i)}^{\mu} h_{\nu}^{(i)} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (3.2.4)$$

ilişkisi vardır.

Riemann metriği tetrad alanların çarpımı olarak verilir:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^{(i)} h_{\nu}^{(j)} \eta_{(i)(j)} \quad (3.2.5)$$

$$g^{\mu\nu} = h_{(i)}^{\mu} h_{(k)}^{\nu} \eta^{(i)(k)}. \quad (3.2.6)$$

Burada, $\eta_{(i)(j)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ile verilen Minkowski uzay-zaman metriğidir. $h_{\mu}^{(i)}$ tetratinin komşu iki nokta arasında paralel taşınması kovaryant türevinde verilir:

$$\nabla_{\nu} h_{\mu}^{(i)} = \partial_{\nu} h_{\mu}^{(i)} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} h_{\lambda}^{(i)} = 0. \quad (3.2.7)$$

Verilen denklem mutlak paralelizm koşuludur. Burada Weitzenböck uzay-zamanda eğrilik sıfır olduğundan dolayı

$$\nabla_{\nu} h_{\mu}^{(i)} = 0 \quad (3.2.8)$$

alınırsa,

$$\partial_{\nu} h_{\mu}^{(i)} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} h_{\lambda}^{(i)} \quad (3.2.9)$$

bağıntısından

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = h_{(i)}^{\lambda} \partial_{\nu} h_{\mu}^{(i)} \quad (3.2.10)$$

şeklinde Weitzenböck bağlantısı elde edilir (Aldrovandi ve Pereira 1995).

3.3. Burulma Tensörü

Genel Görelilikte Riemann uzay-zamanında bağlantılar simetrik olduğundan burulma sıfır çıkar. Oysa, Teleparalel kuramda Weitzenböck uzay-zamanda bağlantılar simetrik olmadığından burulma sıfır değildir.

Weitzenböck uzay-zamanda simetrik olmayan burulma tensörü,

$$T^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Aldrovandi ve Pereira 1995).

Burulma tensörü, tetrad temelinde aşağıdaki gibi verilir:

$$T^{\lambda}_{\alpha\beta} = h^{\lambda}_{\mu} T^{\mu}_{\alpha\beta}. \quad (3.3.2)$$

Ayrıca Weitzenböck bağlantısı ile Christoffel sembolleri arasında aşağıda verilen bir ilişki söz konusudur (Weitzenböck 1923):

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Upsilon^{\lambda}_{\alpha\beta} \quad (3.3.3)$$

Burada $\Upsilon^{\lambda}_{\alpha\beta}$ "eş-burulma tensörü" olarak adlandırılır. Aşağıda verilen bağıntı ile tanımlıdır:

$$\Upsilon^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [T^{\lambda}_{\alpha\beta} + T^{\lambda}_{\beta\alpha} - T^{\lambda}_{\alpha\beta}]. \quad (3.3.4)$$

Ayrıca $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ifadesi, $g_{\alpha\beta} = \eta_{(i)(j)} h_{\alpha}^{(i)} h_{\beta}^{(j)}$ metriğinin Levi-Civita bağlantısını gösterir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}). \quad (3.3.5)$$

3.4. Spinör Bağlantıları ve Burulma Tensörünün Bileşenleri

Spin üzerinde uzay-zamanın dinamiksel etkileri, kütle çekimi içeren Dirac denkleminde görülen spin bağlantıları sayesinde denklemde yazılır. Bu bağlamda Teleparalel kütle çekim teorisinde spinör bağlantıları,

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}V_\mu - \frac{3i}{4}B_\mu\gamma_5 \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, sırasıyla V_μ ve B_μ burulma tensörünün vektörel kısmı ve eksensel vektörel kısmıdır.

Weitzenböck bağıntısının burulma tensörü, global Lorentz dönüşüm grupları altında üç kısma ayrılır (Hayashi ve Nakano 1967): Tensör, vektör ve eksensel vektör kısımları.

Tensör kısmı aşağıdaki ilişki ile verilir:

$$t_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu}) + \frac{1}{6}(g_{\nu\alpha}T_{\delta\mu}^\delta + g_{\nu\mu}T_{\omega\alpha}^\omega) - \frac{1}{3}g_{\alpha\mu}T_{\rho\nu}^\rho . \quad (3.4.2)$$

Vektörel kısmı,

$$V_\mu = T_{\alpha\mu}^\alpha \quad (3.4.3)$$

Eksensel (axial) kısmı,

$$B^\mu = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}T_{\nu\alpha\beta} \quad (3.4.5)$$

şeklindedir.

Şimdi ise burulma tensörü aşağıda verilen üç bileşen kullanılarak tanımlanır:

$$T_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(t_{\alpha\mu\nu} - t_{\alpha\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\alpha\mu}V_\nu - g_{\alpha\nu}V_\mu) + \delta_{\alpha\mu\nu\sigma}B^\sigma \quad (3.4.6)$$

Burada,

$$\delta_{\alpha\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\sigma} \quad (3.4.7)$$

şeklinde verilir ve $\delta = \{\delta^{\alpha\mu\nu\sigma}\}$ ve $\delta^* = \delta_{\alpha\mu\nu\sigma}$ ifadeleri eğri simetrik tensör yoğunluğudur. Ayrıca sapma, eksensel vektör burulması ile tanımlanır.

3.5. Düz Uzay-Zamanda (Minkowski) Dirac Denklemi

Teleparalel kuramda Dirac denklemi verilmeden önce Minkowski uzay-zamanda Dirac denklemi verilecektir. Düz uzay-zamanda Dirac denklemi Euler-Lagranjiyan denkleminden elde edilir.

x^a genelleştirilmiş koordinatlar ve $a = (1, 2, 3, \dots)$ olmak üzere Euler-Lagranjiyan denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = 0. \quad (3.5.1)$$

Düz uzay-zamanda spinör alan Lagranjiyanı aşağıdaki gibidir (Aldrovandi ve Pereira 2005):

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - \partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) - mc^2 \bar{\psi} \psi. \quad (3.5.2)$$

$x^a = \bar{\psi}$ ve $\dot{x}^a = \partial_a \bar{\psi}$ olmak üzere denklem (3.5.1) spinörler türünden aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \bar{\psi}} - \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (\partial_a \bar{\psi})} \right) = 0. \quad (3.5.3)$$

(3.5.2) ifadesi denklem (3.5.3) de yerine yazılırsa denklem aşağıdaki biçimi alır ($\bar{\psi}$ ye görev türev alınıyor):

$$\frac{i\hbar c}{2} (\gamma^a \partial_a \psi - \partial_a \gamma^a \psi) - mc^2 \psi - \partial_a (-\gamma^a \psi) \frac{i\hbar c}{2} = 0. \quad (3.5.4)$$

Denklem düzenlenirse (3.5.5) ile verilen serbest uzay için Dirac denklemine dönüşür:

$$i\hbar\gamma^a\partial_a\psi - mc\psi = 0. \quad (3.5.5)$$

3.5.1. Teleparalel Kuramda Dirac Denklemi

Düz uzay-zamanda verilen (3.5.2) Lagranjiyanını Teleparalel kuramda elde etmek için Teleparalel kuramda verilen Fock Ivanenkov türev işlemcisi kullanılır. Bu işlemci düz uzay-zamanda verilen kovaryant türev işlemcisini eğrilik ve burulmanın varlığında spin-1/2 alanlar için tanımlama bağlantısını kurar ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\partial_a\psi \rightarrow h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi. \quad (3.5.1.1)$$

Teleparalel kuramdaki lagranjiyen ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathcal{L}_\psi = h \left[\frac{i\hbar}{2} (\bar{\psi}\gamma^a h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}\gamma^a\psi) - mc^2\bar{\psi}\psi \right]. \quad (3.5.1.2)$$

Burada tetradlar ile Dirac matrisleri arasında $\gamma^\mu = \gamma^a h_a{}^\mu$ bağıntısı yardımıyla (3.5.1.2) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathcal{L}_\psi = h \left[\frac{i\hbar}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - mc^2\bar{\psi}\psi \right]. \quad (3.5.1.3)$$

Eğrilik ve burulmanın varlığında \mathcal{D}_μ kovaryant türev işlemcisi ile Euler-Lagranjiyan denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial\bar{\psi}} - \mathcal{D}_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi})} \right) = 0. \quad (3.5.1.4)$$

(3.5.1.3) ifadesi (3.5.1.4) denkleminde yazılıp $\mathcal{D}_\mu(h\gamma^\mu) = 0$ tanımı kullanılırsa;

$$i\hbar\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad (3.5.1.5)$$

biçiminde Teleparalel kuramda Dirac denklemi elde edilir.

3.5.2. Dirac (γ^μ) Matrislerinin Özellikleri

γ^μ -Dirac matrisleri Clifford cebiri ile tanımlanan gamma matrisleri (Tetrode 1928),

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (3.5.2.1)$$

şeklinde anti-komütatör ilişkisi içinde verilir. Burada genel olarak $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ uygun seçimi alınır ve özel göreliliğin metrik tensörüdür. $\mu \neq \nu$ için;

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad (3.5.2.2)$$

$\mu = \nu = 0$ için;

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (3.5.2.3)$$

$\mu = \nu = k, k = 1, 2, 3$ için;

$$(\gamma^k)^2 = -1 \text{ olur.} \quad (3.5.2.4)$$

3.6. Spin Salınımı

Hayashi ve Shirafuji (1979), Nitsch ve Hehl (1980)'e göre bir Dirac parçacığının burulma kütle çekiminde spin salınımı, eksensel vektör burulması ile ilintilidir. Bu gösterim aşağıda verilmiştir:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{3}{2}\vec{B} \times \vec{S} \quad (3.6.1)$$

Burada, \vec{S} Dirac parçacıklarının spin vektörüdür ve \vec{B} ise uzay benzeri burulmanın eksensel vektör kısmıdır. Bunun ek olarak Hamiltonyen terimine karşılığı,

$$\delta H = -\frac{3}{4}\vec{B}\cdot\vec{\sigma} \quad (3.6.2)$$

şeklindedir. Burada $\vec{\sigma}$ parçacığın spinini gösterir ve $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ ile tanımlanır (Mashoon 2000).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Hem Teleparalel kuramda hem de Genel Görelilik Kuramında uzay-zamanı betimleyen yapılar doğrusal olarak tanımlanan metriktir. Metrik, her iki kuramda da aynı evren modelini gösterir. Kütle Çekim Teleparalel Teoride, aşağıdaki gibi doğrusal olarak tanımlanan metriği ele alacağız. Bu metrik daha önce Villalba ve Greiner (2002) tarafından Dirac denkleminin çözümü için Genel Görelilik kuramında ele alınan metriktir. Aynı zamanda izotropik olmayan ve genişleyen bir evreni gösterir:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + dz^2. \quad (4.1)$$

Yukarıda verilen metrik $t = 0$ 'da uzay benzeri bir tekillikçe sahiptir. Aşağıdaki vektör potansiyelini göz önünde tutarak (Villalba ve Greiner 2002) uzay-zaman için Teleparalel Dirac denkleminin tam çözümleri bulunacaktır.

$$A_\mu = (0,0,0, -Et) \quad (4.2)$$

vektör potansiyelinden $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2E^2$ ve $\hat{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$ ifadeler bulunur ki buda manyetik alanın olmadığını gösterir.

4.1. Hesaplamalar

Yukarıda verilen (4.1) eşitliğini kullanırsak metrik tensör aşağıdaki biçimde olur:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Metrik tensörün tersi $g^{\mu\nu}$ ifadesini bulmak için: $g^{\mu\nu} = \frac{\text{Cofac}g_{\mu\nu}}{\det(g_{\mu\nu})}$ eşitliğini kullanılırsa:

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

elde edilir. Minkowski metriği aşağıdaki gibi seçildi:

$$\eta_{(i)(k)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Metrik tensör'ün tetradlar cinsinden ifadesini bulmak için (3.2.5) eşitliği kullanılırsa $h_{\mu}^{(i)}$ tetrad ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_{\mu}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

(3.2.6) eşitliğinden de $h_{(i)}^{\mu}$ tetrad ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$h_{(i)}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

Weitzenböck uzay zamanda (teleparalel kuramda), elektromanyetik alanların varlığında Dirac denkleminin kovaryant şekli şöyle verilir:

$$\{\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} - ieA_{\mu}) + m\}\Psi = 0. \quad (4.1.6)$$

Denklemden $\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}$ ifadesi kovaryant türevidir. Ayrıca (4.2) ifadesinden A_{μ} vektör potansiyelinden manyetik alanın olmadığı gösterilmiştir. Bu yüzden (4.1.6) denklemini elektrik alan varlığında Dirac denklemini ifade etmektedir. Bununla birlikte

gravitasyonu içeren bu denklemin spinör bağlantıları vasıtasıyla, spin üzerindeki uzay-zamanın dinamik etkileri Dirac denklemine getirilir (Dirac 1928b, Hayashi ve Nakano 1967).

Ayrıca eğri uzay gama matrisleri (γ^μ), düz uzay gama matrisleri ($\tilde{\gamma}^{(i)}$) cinsinden (Dirac 1928b) (denklemler tetradlarla düz uzay-zamana taşınıyor),

$$\gamma^\mu = \tilde{\gamma}^{(i)} h_{(i)}^\mu \quad (4.1.7)$$

şeklinde verilir. (4.1.7) eşitliği (4.1.6) denkleminde yazılırsa denklem aşağıdaki biçimde olur:

$$\{h_{(i)}^\mu \tilde{\gamma}^{(i)} (\partial_\mu - \Gamma_\mu - ieA_\mu) + m\} \Psi = 0. \quad (4.1.8)$$

Denklem (3.2.10) ile verilen Weitzenböck bağlantısından sıfır olmayan aşağıdaki bileşenleri bulunur:

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{20} = \frac{1}{t}. \quad (4.1.9)$$

(4.1.9)'deki bağlantılar Denklem (3.3.1) ile verilen Weitzenböck uzay-zamanda burulma tensörü ifadesinde yerine yazılırsa sıfır olmayan terimler,

$$T^1_{01} = T^2_{02} = \frac{1}{t} \quad (4.1.10)$$

$$T^1_{10} = T^2_{20} = -\frac{1}{t} \quad (4.1.11)$$

şeklinde bulunur.

Burulma tensörünün vektörel kısmının bileşenlerini (3.4.3) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur,

$$V_0 = -\frac{2}{t} \quad (4.1.12)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 . \quad (4.1.13)$$

Denklem (3.4.5) kullanarak burulmanın eksensel vektör bileşenleri sıfır bulunur:

$$B_0 = \vec{B} = 0 . \quad (4.1.14)$$

Yukarıda verilen Burulma tensörünün vektörel ve eksensel vektör bileşenleri yardımıyla spinör bağlantıları (3.4.1) denklemi ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{t} , \quad (4.1.15)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0 \quad (4.1.16)$$

4.2. Teleparalel Dirac Denkleminin Çözümü

Denklem (4.1.8) aşağıdaki gibi Einstein toplama kuralı ile yazılırsa

$$\{h_{(0)}^0 \tilde{\gamma}^{(0)}(\partial_0 - \Gamma_0 - ieA_0) + h_{(1)}^1 \tilde{\gamma}^{(1)}(\partial_1 - \Gamma_1 - ieA_1) + h_{(2)}^2 \tilde{\gamma}^{(2)}(\partial_2 - \Gamma_2 - ieA_2) + h_{(3)}^3 \tilde{\gamma}^{(3)}(\partial_3 - \Gamma_3 - ieA_3) + m\} \Psi = 0 \quad (4.2.1)$$

Yukarıda hesaplanan spinör bağlantıları denklem (4.2.1) de yerine yazılırsa, Dirac denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$\left\{ \tilde{\gamma}^0 \left(\partial_t + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t} (\tilde{\gamma}^1 \partial_x + \tilde{\gamma}^2 \partial_y) + \tilde{\gamma}^3 (\partial_z + ieEt) + m \right\} \Psi = 0 . \quad (4.2.2)$$

Burada $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ olmak üzere düzlem dalga çözümleri ile:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \Xi(t) \quad (4.2.3)$$

Denklem t' ye bağlı \mathcal{E} fonksiyonu cinsinden yazılacaktır. (4.2.2) denkleminde, (4.1.15) ile hesaplanan spinör bağlantısının sıfırcı bileşeninden gelen katkıyı iptal etmek için

$$\Psi = t^\alpha \mathcal{E} \quad (4.2.4)$$

dönüşümü uygulanacaktır. α terimini bulmak için (4.2.4) ifadesinde her iki tarafın zamana göre türevi alınır;

$$\partial_t \Psi = t^\alpha \left(\frac{\alpha}{t} \mathcal{E} + \partial_t \mathcal{E} \right) \quad (4.2.5)$$

ifadesi bulunur. Bulunan bu ifade (4.2.2) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$t^\alpha \left\{ \tilde{\gamma}^0 \left(\partial_t + \frac{\alpha}{t} + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t} (\tilde{\gamma}^1 \partial_x + \tilde{\gamma}^2 \partial_y) + \tilde{\gamma}^3 (\partial_z + ieEt) + m \right\} \mathcal{E} = 0 . \quad (4.2.6)$$

$\alpha = -1$ seçildiğinde, $\Psi = t^{-1} \mathcal{E}$ dönüşümünden (4.2.6) denklemi aşağıdaki gibi olur (Γ_0 'dan gelen $1/t$ terimi yok edildi):

$$\left\{ \tilde{\gamma}^0 \partial_t + \frac{1}{t} (\tilde{\gamma}^1 \partial_x + \tilde{\gamma}^2 \partial_y) + \tilde{\gamma}^3 (\partial_z + ieEt) + m \right\} \mathcal{E} = 0 . \quad (4.2.7)$$

Dirac matrislerinin (3.5.2.1) ile verilen anti-komütatör özelliğini kullanarak;

$$(\tilde{\gamma}^0)^2 = -1 , (\tilde{\gamma}^3)^2 = 1 \quad (4.2.8)$$

$$(\tilde{\gamma}^0)^2 (\tilde{\gamma}^3)^2 = -1 \quad (4.2.9)$$

$$\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 = -\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3 \quad (4.2.10)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

eşitlikleri elde edilir. Buradan denklem (4.2.9) dan $\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 = 1$ olduğu görülür. Bu ifadeleri kullanarak denklem (4.2.7) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0\partial_t + \frac{1}{t}(\tilde{\gamma}^1\partial_x + \tilde{\gamma}^2\partial_y)\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 + \\ \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0(\partial_z + ieEt) + m\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 \end{array} \right\} \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0\Xi = 0. \quad (4.2.11)$$

(4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) bağıntıları (4.2.11) 'de yazılırsa Dirac denkleminin aşağıdaki biçimi bulunur:

$$\left\{ \tilde{\gamma}^3 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 + \tilde{\gamma}^0 \left(\frac{\partial}{\partial z} + ieEt \right) + m\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 \right\} \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0\Xi = 0. \quad (4.2.12)$$

Denklem (4.2.12) 'nin çözümü için bu denklem, birinci dereceden birbirine komüt iki farklı işlemcinin toplamı olarak yazılabilir (Villalba ve Greiner 2002):

$$(\hat{L}_1 + \hat{L}_2)\Phi(t, x, y, z) = 0. \quad (4.2.13)$$

Burada,

$$\hat{L}_1 = t \left(\tilde{\gamma}^3 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma}^0 \left(\frac{\partial}{\partial z} + ieEt \right) + m\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 \right), \quad (4.2.14)$$

$$\hat{L}_2 = \left[\left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 \right] \quad (4.2.15)$$

şeklindedir ve Φ için aşağıda verilen eşitlik söz konusudur:

$$\Phi = \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0\Xi \quad (4.2.16)$$

Keyfi bir sabit λ tanımlanarak (4.2.13) denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\hat{L}_1\Phi = -\lambda\Phi, \quad (4.2.17)$$

$$\hat{L}_2 \Phi = \lambda \Phi \quad (4.2.18)$$

Denklem (4.2.13), $\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ ile komüt olduğundan Φ spinörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Phi = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \chi(t). \quad (4.2.19)$$

Yapılan hesaplamalar için aşağıda verilen Dirac matrisleri kullanılacaktır:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (4.2.20)$$

Ayrıca Pauli matrisleri,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.21)$$

şeklinde verilir. χ spinörünün bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.22)$$

ve χ bispinörünün bileşenleri arasındaki ilişki denklem (4.2.18) 'in çözülmesi ile bulunur. $\hat{L}_2 \Phi = \lambda \Phi$ ile verilen denklemde hem (4.2.15) hem de (4.2.19) deki ifade yerine yazılırsa;

$$\left[\left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \right] e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \chi = \lambda e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \chi \quad (4.2.23)$$

ifadesi elde edilir. Denklemin çözümü ile;

$$[(ik_x \tilde{\gamma}^1 + ik_y \tilde{\gamma}^2) \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 - \lambda] \chi = 0 \quad (4.2.24)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde $\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0$ matrisleri hesaplanırsa;

$$\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^3 \sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \sigma^1 \end{pmatrix} = -\sigma^2 \quad (4.2.25)$$

elde edilir. Burada Pauli matrisleri arasında $\sigma^3 \sigma^1 = i\sigma^2$ ilişkisi olduğu göz önünde tutularak, denklem (4.2.24) aşağıdaki gibi olur:

$$\left\{ ik_x \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + ik_y \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.26)$$

Denklemlerde eşitliğin her iki tarafı σ^2 ile çarpılır ve $(\sigma^2)^2 = 1$ değeri alınır;

$$\left\{ ik_x \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + ik_y \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.27)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde matris çözümleri ile

$$(ik_y - \lambda) \chi_1 - k_x \sigma^2 \chi_2 = 0 \quad (4.2.28)$$

$$k_x \sigma^2 \chi_1 - (ik_y + \lambda) \chi_2 = 0 \quad (4.2.29)$$

denklemleri elde edilir. (4.2.28) ve (4.2.29) denklemlerinden

$$\chi_1 = \frac{k_x \sigma^2}{ik_y - \lambda} \chi_2 \quad (4.2.30)$$

$$\chi_2 = \frac{k_x \sigma^2}{ik_y + \lambda} \chi_1 \quad (4.2.31)$$

spinörler arasındaki ilişki bulunur. (4.2.31) denklemini (4.2.30) denkleminde yerine yazılırsa λ özdeğeri bulunur:

$$\chi_1 = \frac{k_x \sigma^2}{(ik_y - \lambda)} \frac{k_x \sigma^2}{(ik_y + \lambda)} \chi_1 \quad (4.2.32)$$

$$\lambda = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (4.2.33)$$

Ayrıca (4.2.22) ifadesi göz önünde bulundurularak χ spinörü aşağıda verilen şekilde yazılabilir:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{k_x \sigma^2}{ik_y + \lambda} \chi_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.34)$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \text{ ve } \chi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad (4.2.35)$$

Şimdi, (4.2.17) denklemini ele alacağız. Bu denklemini, (4.2.14) denklemini ve (4.2.34) spinör yapısını göz önünde tutarak iki denklem sistemine indirgeyeceğiz:

$$t \left(\tilde{\gamma}^3 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma}^0 \left(\frac{\partial}{\partial z} + ieEt \right) + m \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \right) \Phi = -\lambda \Phi \quad (4.2.36)$$

(4.2.36) Denkleminde, (4.2.19) ifadesi yerine yazılırsa

$$t \left(\tilde{\gamma}^3 \frac{d}{dt} + i \tilde{\gamma}^0 (k_z + eEt) + m \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \right) \chi = -\lambda \chi \quad (4.2.37)$$

$$\left(\tilde{\gamma}^3 \frac{d}{dt} + ieEt \tilde{\gamma}^0 + m \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 + \frac{\lambda}{t} \right) \chi = 0 \quad (4.2.38)$$

elde edilir. Burada birim matristir $k_z = 0$ alınırsa ((4.2.34) spinör yapısında bu terim yoktur) Dirac matrislerini (4.2.38) denkleminde yazarsak;

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + ieEt \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\lambda}{t} - \sigma^2 m \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2.39)$$

elde edilir. Burada matris işlemi yapıldığında

$$\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2.40)$$

olmak üzere A^+ ve A^- aşağıdaki ifadeleri göstermektedir:

$$A^+ = \sigma^3 \frac{d}{dt} + eEt\sigma^1 + \left(\frac{\lambda}{t} - \sigma^2 m \right) \quad (4.2.41)$$

$$A^- = -\sigma^3 \frac{d}{dt} - eEt\sigma^1 + \left(\frac{\lambda}{t} - \sigma^2 m \right). \quad (4.2.42)$$

(4.2.40) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$A^+ \chi_1 = 0 \quad (4.2.43)$$

$$A^- \chi_2 = 0 \quad (4.2.44)$$

Burada (4.2.43) denklemi ele alıp (4.2.35) yapısını göz önünde bulundurursak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left\{ \sigma^3 \frac{d}{dt} + eEt\sigma^1 + \left(\frac{\lambda}{t} - \sigma^2 m \right) \right\} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.45)$$

Pauli matrisleri bu denklemde yerine yazılırsa;

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + eEt \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2.46)$$

elde edilir. Burada matris işlemleri yapıldıktan sonra;

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{t} & eEt + im \\ eEt - im & -\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2.47)$$

şeklini alır. (4.2.47) denkleminde aşağıda verilen denklem sistemleri meydana gelir:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\lambda}{t}\varphi_1 + (im + eEt)\varphi_2 = 0 \quad (4.2.48)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\lambda}{t}\varphi_2 - (im - eEt)\varphi_1 = 0 \quad (4.2.49)$$

Problemin çözümü için, bu iki denklem kullanılarak ikinci dereceden bir denkleme indirgenecektir. Bunun için denklem (4.2.49)' da φ_1 çekilip denklem (4.2.48)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{im - eEt} \left(-\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\lambda}{t}\varphi_2 \right) \right] + \frac{\lambda}{t} \left[\frac{1}{im - eEt} \left(-\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\lambda}{t}\varphi_2 \right) \right] + (im + eEt)\varphi_2 = 0. \quad (4.2.50)$$

Bu denklemde $\frac{d}{dt}$ türev işlemcisi ile gerekli işlemler yapıldığında;

$$\frac{eE}{im - eEt} \left[-\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\lambda}{t}\varphi_2 \right] - \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - \frac{\lambda}{t^2}\varphi_2 + \frac{\lambda^2}{t^2}\varphi_2 - (m^2 + e^2E^2t^2)\varphi_2 = 0 \quad (4.2.51)$$

denklemini elde edilir. Burada türev alınırken kütle ihmal edildi. Yani, ilk terimde paydada bulunan kütle terimi ihmal edilip işlem yapıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{t} \frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{2\lambda}{t^2}\varphi_2 - \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{\lambda^2}{t^2}\varphi_2 - (m^2 + e^2E^2t^2)\varphi_2 = 0. \quad (4.2.52)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Şimdi ise $\varphi_2 = t^{1/2}\mathfrak{S}$ şeklinde yeni bir dönüşüm uygulanacaktır. Denklem adım adım aşağıdaki biçimleri alır:

$$\left\{ \frac{1}{2t^2} - \frac{2\lambda}{t^2} - \left[-\frac{1}{4t^2} + \frac{d^2}{dt^2} \right] + \frac{\lambda^2}{t^2} - (m^2 + e^2 E^2 t^2) \right\} \mathfrak{S} = 0. \quad (4.2.53)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{4t^2} + \frac{2\lambda}{t^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{\lambda^2}{t^2} + (m^2 + e^2 E^2 t^2) \right\} \mathfrak{S} = 0 \quad (4.2.54)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} + \left(-\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 3/4}{t^2} + m^2 + e^2 E^2 t^2 \right) \mathfrak{S} = 0 \quad (4.2.55)$$

Elde edilen (4.2.55) denklemi Whittaker Denklemine benzetilecektir. Bunun için $U = ieEt^2$ dönüşümü uygulanıp her iki tarafın iki kez türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dt} = 2\sqrt{ieE}U^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dU} \quad (4.2.56)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = 4ieE \left[U^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} U^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dU} + U^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dU^2} \right) \right] \quad (4.2.57)$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler denklem (4.2.55)' de yazılır ve denklemin her iki tarafı $\frac{1}{4ieEU}$ ile çarpılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{1}{2U} \frac{d\mathfrak{S}}{dU} + \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dU^2} + \left(-\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 3/4}{4U^2} + \frac{m^2}{4ieEU} - \frac{1}{4} \right) \mathfrak{S} = 0. \quad (4.2.58)$$

Bu denklemde $\frac{1}{2U} \frac{d\mathfrak{S}}{dU}$ ifadesini yok etmek için $\mathfrak{S} = Z^{-\alpha} \xi$ gibi bir dönüşüm uygulanacaktır. Denklem (4.2.6)' da α teriminin bulunması için yapılan işlemlerin benzeri yapıldığında $\alpha = -\frac{1}{4}$ seçimi ile problem ortadan kalkar. Daha sonra dönüşüm (4.2.58) denkleminde uygulandığında aşağıda verilen ikinci dereceden diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2\xi}{dZ^2} + \left(\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}{Z^2} + \frac{m^2/4ieE}{Z} - \frac{1}{4} \right) \xi = 0 . \quad (4.2.59)$$

Bu denklem

$$\frac{d^2\Psi}{dZ^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{Z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{Z^2} \right) \Psi = 0 \quad (4.2.60)$$

şeklinde verilen Whittaker denklemiyle benzerdir ve bu denklemin çözümü Whittaker fonksiyonların çözümü ile açıklanır. Whittaker fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\Psi = C_1 M_{\lambda, \mu}(Z) + C_2 W_{\lambda, \mu}(Z) . \quad (4.2.61)$$

Buna göre (4.2.52) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur;

$$\varphi_2 = (ieEt)^{-\frac{1}{4}} [\alpha_1 M_{\zeta, \varrho^-}(ieEt^2) + \alpha_2 W_{\zeta, \varrho^-}(ieEt^2)] . \quad (4.2.62)$$

Burada α_1 ve α_2 keyfi sabitlerdir. ζ ve ϱ^- değerleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\zeta = -\frac{im^2}{4eE} \quad (4.2.63)$$

$$\varrho^- = \frac{\lambda-1}{2} . \quad (4.2.64)$$

Diğer taraftan, benzer şekilde (4.2.49)' da φ_2 çekilip denklem (4.2.48)' de yerine yazılırsa ve benzer işlemler takip edilirse φ_1 için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\varphi_1 = (ieEt)^{-\frac{1}{4}} [\alpha_1 M_{\zeta, \varrho^+}(ieEt^2) + \alpha_2 W_{\zeta, \varrho^+}(ieEt^2)] . \quad (4.2.65)$$

Burada, $\varrho^+ = \frac{\lambda+1}{2}$ şeklindedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Genel durumda teleparalel Dirac Denkleminin tam çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\Psi = \Psi(t, x, y, z) = -\frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{t^4 \sqrt{ieE}} \begin{pmatrix} -i\varphi_2 \\ i\varphi_1 \\ \frac{k_x}{ik_y + \lambda} \varphi_1 \\ \frac{k_x}{ik_y + \lambda} \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.66)$$

4.3. Salınım Frekansının Kuantumlanması

Frekans spektrumlarını elde etmek için, differansiyel denklemin çözümleri üzerindeki koşullar göz önünde bulundurulur. Bulunan çözümler kuantum mekaniğinde yapıldığı gibi tüm değerler için sınırlandırılmalıdır. Bu yöntem frekansın kuantumlanmasını verir. Bununla birlikte (4.1) ile verilen metriğe göre genişleyen ve izotropik olmayan bir evren modelinin tanımlamaları ele alındı. Bu tanımlama ile frekansta gravitasyonel kırmızıya kayma elde edilebilir.

Denklem (4.2.55) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathfrak{S}''(t) + \omega^2 \mathfrak{S}(t) = 0. \quad (4.3.1)$$

ω frekansı;

$$\omega^2 = -\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 3/4}{t^2} + m^2 + e^2 E^2 t^2 \quad (4.3.2)$$

ile tanımlanır. Söz konusu bu salınım bölgesi aşağıdaki gibi verilir (Cohen ve ark. 1980):

$$\omega^2 - m^2 - \beta < 2e^2 E^2 t^2 < \omega^2 - m^2 + \beta. \quad (4.3.3)$$

Burada,

$$\beta^2 = (\omega^2 - m^2)^2 + \frac{m^4}{4} + 2ieEm^2 + 3e^2 E^2 \quad (4.3.4)$$

ifadesi tanıtıldı. Değişkenlerin tüm değerleri için sınırlandırılabilen Whittaker fonksiyonu üzerindeki koşullardan,

$$\zeta - \varrho^- + \frac{1}{2} = -n, \quad (4.3.5)$$

denklem (4.1) de verilen uzay-zaman için aşağıdaki gibi kuantumlanma elde edilir:

$$k = i \left[2n - 1 - \frac{im^2}{2eE} \right]. \quad (4.3.6)$$

Burada, n pozitif tam sayı veya sıfırdır. Ayrıca, λ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = ik. \quad (4.3.7)$$

4.4. Dirac Parçacığının Spin Salınımı

Birçok araştırmacı (Hammond 1994, Zhang 2003, Pereira ve ark. 2001) bir Dirac parçacığının spin salınımlarının eksensel vektör burulması ile ilintili olduğunu gösterdi. (Denklem (3.6.1) ve (3.6.2) göz önüne alındığında) denklem (4.1.14)' de burulmanın eksensel vektör bileşeninin yok olduğu hesaplandı:

$$B^\mu(t, x, y, z) = 0. \quad (4.4.1)$$

Uzay benzeri vektör formunda ise eksensel vektör aşağıdaki gibi olur:

$$\vec{B}(t, x, y, z) = 0. \quad (4.4.2)$$

Eksensel vektörün sıfır olması Dirac parçacığının spin vektörünün sabit olduğu sonucunu getirir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fizikte genel olarak, Dirac elektron denklemi, Maxwell foton (ışık) denklemi ve Einstein denklemi olmak üzere üç büyük alan denklemi vardır. Bunlardan elektronun dinamiğini betimleyen Dirac denklemi ve elektromanyetik dalgaları betimleyen Maxwell denklemi kuantum alan teorisinin denklemleridir. Bu denklemlerin birleştirilmesi ile “Kuantum Elektrodinamiği” kuramı oluşturulmuş ve bu kuram kullanılarak elektronun manyetik momenti tam bir kesinlikte bulunması gibi birçok problem çözülmüştür. Bununla birlikte kütle çekimi geometrik olarak betimleyen Einstein denklemlerinin kuantum alan denklemleri ile uyuşması (birleştirilip tek bir denklem olarak ifade edilmesi) noktasında birçok zorluk meydana gelmektedir. Bu problemin temelinde bulunduğu üzere kütle çekimin, Genel Görelilik kuramında kuvvet olarak değil de geometri ile açıklamasıdır. Problemin çözülmesi gayesi ile Genel Göreliliğe alternatif olarak geliştirilen ve kütle çekimi kuvvet denklemleri ile ifade eden ve temel yapısında tetrad alanların olduğu Teleparalel kuram geliştirilmiştir. Teleparalel kuramda kuantum denklemlerinin yazılması ve bu şekilde parçacıkların kütle çekimle etkileşimlerinin incelenmesi ve bunun daha önce deneysel olarak başarılı bir şekilde sınanan Genel Görelilik kuramındaki çalışmalarla eşdeğerliğinin gösterilmesi Teleparalel kuramın hem geçerliliğini hem de üstünlüğünü gösterecektir. Çünkü kütle çekimi, kuvvet denklemleri ile ifade eden teleparalel kuramın parçacık denklemlerini alan olarak ifade etmesi, Genel Göreliliğin kuantum kuramı ile olan bazı noktalarındaki uyumsuzluğunu ortadan kaldıracaktır. Bu sonuçlar, genişleyen eğri uzay-zamanda kuantum alan teorisinin tartışıldığı başka araştırmalara ilham verebilir. Diğer gravitasyonel problemlerin araştırılması için (kütle çekimin kuantum üzerindeki etkileri) Genel Göreliliğin aksine Kütle Çekimini, alan ve kuvvet olarak ele alan Teleparalel kuramın bir alternatif olarak kullanılabileceği hakkında araştırmacılara fikir verebilir.

Başka evren modellerini betimleyen metrik ile kuantum denklemlerinin çözülmesi ve atomik boyuttaki parçacıkların eğrilik ve burulmanın olduğu kozmolojikel zeminde davranışının incelenmesi yapılabilir. Özellikle, parçacık boyutunda relativistik parçacıkların zayıf kütle çekim ile etkileşimlerinin incelenmesinde Genel Göreliliğin kullanılmasında ortaya çıkan problemlerin aşılması noktasında Teleparalel kuramın kullanılabileceği, bu tezdeki hesaplamalar

göstermektedir. Bunun yanında, bu hesaplamaların Genel Görelilik bağıntılarına göre daha basit ve kısa olduğu görülmüştür. Teleparalel kuramda Dirac parçacığının spin salınımının eksensel vektör burulmasıyla temsili ile elektron spininin kütle çekim ile nasıl etkileştiğini de gösterir.

Bu çalışmada, relativistik parçacıkların (elektron) teleparalel bir evrende sabit bir elektrik alan varlığındaki davranışı incelendiğinden kaynak özetleri kısmında kuantum denklemleri olan Schrödinger, Klein-Gordon ve Dirac denklemleri hakkında kısa bilgiler ve bağıntılar verildi. Diğer taraftan Teleparalel kuram ve Genel görelilik hakkında temel bilgiler verildi ve bu iki kuramın karşılaştırılması yapıldı. İkinci kısımda (materyal ve metod), hesaplamalarda kullanılan teleparalel kuramdaki bağıntılar verildi. Ayrıca Dirac denkleminin teleparalel kuramdaki biçimi ile Dirac parçacığının spin salınımının eksensel vektör ile ilişkisini gösteren denklem verildi. Araştırma Bulguları kısmında izotropik olmayan Bianchi-I tipi bir metriğe dayanan uzay-zaman zemininde Dirac denklemi analiz edildi. Teleparalel kütle çekimde Dirac denkleminin tam çözümleri bulundu ve bunun daha önce aynı metrik ile Genel Görelilik kütle çekiminde elde edilen çözümler ile aynı olduğu görüldü. Daha sonra bulunan (4.2.55) ikinci dereceden diferansiyel denklem ile genişleyen ve izotropik olmayan evren modelinde teleparalel kuramda Dirac parçacıklarının salınım bölgesi ve salınım frekansının kuantumlanması elde edildi. Ayrıca Dirac parçacığının spin salınımının sabit olduğu bulundu. Bu şekilde Dirac parçacıklarının spin salınımının teleparalel kuramda kütle çekim ile olan ilişkisi tartışıldı.

Teleparalel Kuramın Genel Göreliliğe Eşdeğerliği başlığında verilen Genel Göreliliğin teleparalel kütle çekimi ile zayıf alanlarda belirlenen üç sabit ile çakıştığı üç durum vardır. Bu üç sabitin ancak belirli seçiminde Genel Göreliliğin Teleparalel ile eşdeğerliği gösterilir.

Bu tezde elde edilen teleparalel gravitasyonel sonuçların teleparalel için seçilen bu boyutsuz parametrelerden bağımsız olduğu gösterildi. Bu durum, sonuçların sadece Genel kütle çekim ile teleparalel kütle çekim eşdeğerliğinde değil aynı zamanda her bir teleparalel modelde geçerli olduğu anlamına gelir.

Villalba ve Greiner (2002) Genel Görelilik teorisini kullanarak, bu çalışmada ele alınan benzer uzay-zaman modeli ile ilintili olan kütleli spin-1/2 parçacıkların yaratılması üzerine çalışma yapmışlardır. Bu tezde, teleparalel kuramda hesaplamalar

yapılmasına rağmen elde edilen sonuçlar, Villalba ve Greiner tarafından 2002 yılında yapılan çalışmada elde edilen sonuçlarla uyuşmaktadır. Bu nedenle onların yaptığı hesaplamalar tekrar burada yapılmadı.

Villalba ve Greiner, güçlü elektrik alan varlığında yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğunu aşağıda verilen biçimi ile elde ettiler:

$$\tilde{n} \approx \exp\left(-\pi k - \frac{\pi m^2}{2eE}\right). \quad (5.1)$$

ayrıca birim hacimde kütleli spin-1/2 parçacıkların N toplam sayısını aşağıdaki gibi elde ettiler:

$$N \approx \frac{eE}{4\pi^4 T} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{2eE}\right). \quad (5.2)$$

Burada, T iç alanların etkileşme zamanıdır.

Ayrıca bu tezde elde edilen sonuçlar teleparalel kütle çekimin önemini vurgular ve diğer gravitasyonel problemlerin incelenmesi için Genel Göreliliğin aksine teleparalel teorisinin kullanımı konusunda Araştırmacıları motive edebilir ve yol gösterebilir. Diğer taraftan bu sonuçlar genişleyen eğri uzay-zamanda kuantum alan teorisinin tartışılması için kullanılabilir.

6.KAYNAKLAR

- Aldrovandi, R and Pereira, J.G. 2005. An Introduction to Teleparallel Gravity, ders notları, Instituto de Fisica, UNESP, Sao Paulo, Sayfa:101. Brazil.
- Aldrovandi, R. and Pereira, J.G.1995.An Introduction to Geometrical Physics.World Scientific, sayfa:683,Singapore.
- Audretsch, J. and Shafer, G. J.1978.Thermal particle production in a radiation dominated Robertson-Walker universe.Phys. A : Math.Gen. ,11: 1583-1602.
- Barut, A.O. and Duru, I. H. 1987. Exact Solutions Of The Dirac Equation In Spatially Flat Robertson-Walker Space-Times Phys. Rev. D, 36: 3705-3711.
- Carr, B.J. 2000. A classification of spherically symmetric self-similar dust models. Phys. Rev. D,62: 044022.
- Cohen,J.M.,Vishveshwara,C.V. and Dhurandhar,S.V.1980.Electromagnetic Fields in the Godel Universe.J.Phys. A:Math.Gen.,13:933-938.
- Chiao, R. Y. 2003. Conceptual tensions between quantum mechanics and general relativity :Are there experimental consequences?.in Wheeler's 90th Birthday Symposium Proceedings (Cambridge University Press, Cambridge) [gr-qc/0303100]:254.
- DAS,A.2011.Lectures On Quantum Field Theory© World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.Erişim:[<http://www.worldscibooks.com/physics/6938.html>],USA. 29.04.2011
- Dirac, P. A. M.1928a.The Quantum Theory of the Electron. Proc. R. Soc. London A,117: 610-612.
- Dirac, P. A. M. 1928b.The Quantum Theory of the Electron Part II. Proc. R. Soc. London A, 118: 351-361.
- De Andrade ,V. C. and Pereira, J. G. 1997. Gravitational Lorentz force and the description of the gravitational interaction. Phys. Rev. D, 56: 4689-4695.
- De Andrade,V. C. and Pereira,J. G. 1998.Riemannian and Teleparalel Description of the scalar field Gravitational Interaction.Gen. Rel. Grav., 30: 263-273.
- D’Inverno, R. A. 1992. Introducing Einstein’s Relativity. Oxford University Press London,sayfa: 383.England.
- De Sabbata, V. and Gasperini, M. 1985. Introduction to Gravitation. World Scientific publishing. sayfa:348.Singapore.
- Einstein, A. 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der physik,322(10): 891-921.

Einstein, A. 1916. The Foundation of the General Theory of the Relativity. *Annalender Physik*, 49:769-822.

Hansson, J. 2001. An Introduction to Relativistic Quantum Mechanics. Division of Physics Lulea University of Technology SE-971 87 Lulea, sayfa:16. Sweden.

Havare, A., Korunur, M., Aydoğdu, O., Saltı, M., Yetkin, T. 2005. Exact Solutions of the Photon Equation in Anisotropic Spacetimes. *Int.J.mod.Phys.D*, 14(6):957-972.

Hehl, F. W., McCrea, J. D., Mielke, E. W. and Ne'eman, Y. 1995. Metric affine gauge theory of gravity. *Phys. Rep.*, 258:1-171.

Hayashi, K. and Nakano, T. 1967. Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields. *Prog. Theor. Phys.*, 38: 491-507.

Hayashi K. 1973. Gravitational Interactions Of The Proton And The Electron-The Possible Existence Of A Massless Scalar Particle. *Nuovo Cimento A* 16: 639-673.

Hayashi K. 1977. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Phys. Lett. B*, 69: 441-444.

Hayashi, K. And Shirafuji, T. 1979. New General Relativity. *Phys. Rev. D*, 19: 3524-3553.

Hammond, R.T. 1994. Spin, torsion, Forces. *Gen. Rel. Grav.*, 26: 247-263.
Isham, C. J. and Nelson, J. E. 1974. Quantization of a coupled fermi field and Robertson-Walker metric. *Phys. Rev. D*, 10: 3226-3234.

Kovalyov, M. and Legare, M. J. 1990. The Dirac Equation In Robertson-Walker Spaces: A Class Of Solutions. *J. Math. Phys.*, 31: 191-198.

Minkowski, H. 1908. Raum und Zeit. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*: 75-88.

Møller, C. 1958. On The Localization Of The Energy Of A Physical System In The General Theory Of Relativity. *Ann. Phys. (NY)*, 4: 347-371.

Møller, C. 1961. Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity. *K. Dan. Vidensk. Selsk.. Math. Fys. Skr.*, 1(10):1-50.

Møller, C. 1961. Further Remarks On The Localization Of The Energy In The General Theory Of Relativity *Ann. Phys. (NY)*, 12: 118-133.

Møller, C. 1978. On the Crisis in the Theory of Gravitation and a Possible Solution. *K. Dan. Vidensk. Selsk.. Math. Fys. Skr.*, 89(13):1-131.

Müller-Hoisson, F. And Nitsch, J. 1983. Teleparallelism—A viable theory of gravity?. *Phys. Rev. D*, 28: 718-728.

Mashhoon, B. 2000. Gravitational couplings of intrinsic spin. *Class. Quant. Grav.*, 17: 2399-2414.

- Nitsch, J. and Hehl, F.W. 1980. Translational Gauge Theory Of Gravity: Postnewtonian Approximation And Spin Precession. *Phys. Lett.*, B90: 98-102.
- O' Raifeartaigh, L. 1998. *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton University Press, Princeton, sayfa:247.USA.
- Parker, L. 1968. particle creation in expanding universes. *Phys. Rev. Lett.*, 21: 562-564.
- Parker, L. 1971. Quantized fields and particle creation in expanding universes. *Phys. Rev. D*,3: 346-356.
- Parker, L. 1977. The production of elementary particles by strong gravitational fields. in *Asymptotic Structure of Space-Time*, edited by F. P. Esposito and L. Witten (New York, Plenum), sayfa: 107–226.
- Pereira, J. G., Vargas, T. and Zhang ,C. M. 2001. Axial-Vector Torsion And The Teleparallel Kerr Spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 18: 833-842.
- PEREIRA, J.G. 2011. Torsion and the Description of the Gravitational Interaction. Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista Sao Paulo Erişim: [www.phys.sinica.edu.tw/~heptheory/files/pereira.pdf], Brazil. 30.05.2011.
- Poincaré, H. 1905. Sur la dynamique de l'électron, *Comptes Rendus.*, 140: 1504-1508.
- Pellegrini, C. and Plebanski, J. 1962. Tetrad Fields And Gravitational Fields. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Math. Fys. Skr.*, 2(2), sayfa: 1-39.
- Schutz, B. F. 1985. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, sayfa: 376. England.
- Tetrode, H. 1928. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* *Z. Phys.*, 50: 336-346.
- Villalba , V. M. and Percoco, U. 1990. Separation Of Variables And Exact Solution To Dirac And Weyl Equations In Robertson-Walker Space-Times. *J. Math. Phys.*, 31: 715-720.
- Villalba, V. M. and Greiner, W. 2002. Creation of dirac particles in the presence of a constant electric field in an anisotropic bianchi I universe *Mod. Phys. Lett. A*, 17(28): 1883-1891.
- Weitzenbock, R. 1923. *Invarianten theorie*. University of Michigan Library, P. Noordhoff Gronningen, Sayfa: 320. Netherland
- Zhang, C.M. 2003. Axial Torsion-Dirac spin Effect in Rotating Frame with Relativistic Factor. *Gen. Rel. Grav.*, 35: 1465-1470.
- Zel'dovich, Ya. B. and Starobinsky, A. A. 1971. Creation of Particles and Vacuum Polarization in an Anisotropic Gravitational Field, *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 61: 2161-75. English translation. 1972. *Soviet Physics-JETP*, 34: 1159-1166.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Ali İhsan KESKİN

Doğum Yeri: Diyarbakır

Doğum Tarihi: 03.10.1980

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

EĞİTİM DURUMU (KURUM VE YIL)

Lise: Yunus Emre Lisesi, 1997

Lisans: Dicle Üniversitesi, 2003 (Fizik Öğretmenliği)

Yüksek Lisans: Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011