T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU ELİPTİK TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Sezgin OĞRAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2011

DİYARBAKIR

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Sezgin OĞRAŞ tarafından yapılan "STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU ELİPTİK TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>

Başkan : Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV

Üye : Prof. Dr. Ali YILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 20/07/2011

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.........

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım danışman hocam Sayın **Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV**'e, beni yetiştiren ve bu tezin oluşturulmasında desteklerini esirgemeyen babam **Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ**'a, Lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince verdikleri emeklerden dolayı başta **Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ** olmak üzere, Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki çok değerli **Hocalarıma** bana verdikleri emeklerden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU
ELİPTİK TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Sezgin OĞRAŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

İlk bölümde üzerinde çalışılan uzayın gelişimi ve literatür hakkında bilgi verilmiştir.
İkinci bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bilgi verilmiştir.
Üçüncü bölümde varyasyonel yaklaşım ve varyasyonel yaklaşımla ilgili temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, ayrıca varyasyonel yaklaşımın uygulandığı bazı problem türlerinden söz edilmiştir.
Dördüncü bölümde Diskret $p(k)$-Laplacian operatörünü içeren eliptik bir denklem incelenerek, sıfırdan farklı en az üç çözümün olduğu Ricceri üç kritik nokta teoremi ile gösterilmiştir.
Beşinci bölümde Kirchhoff tipli diskret problem varyasyonel yaklaşımla incelenerek, sıfırdan farklı çözümler bazı koşullar yardımıyla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Standart Olmayan Büyüme Koşulu, Fark Denklemleri, Lebesgue ve Sobolev Uzayları, Varyasyonel Yaklaşım, Ricceri Üç Kritik Nokta Teoremi, Mountain-Pass Teoremi, Palais-Smale Koşulu.

ABSTRACT

THE SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS AT ELLIPTIC TYPE INVOLVING NONSTANDARD GROWTH CONDITION

MASTER'S THESIS

Sezgin OGRAS

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMANT OF MATHEMATICS

2011

In the first chapter, the necessary knowledge about development of the space and literature are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given which are the necessary for properly understanding of the following chapters. Moreover, the Lebesgue and Sobolev space are mentioned.

In the third chapter, variational approach and the related basic concepts, definitions and theorems are given. Furthermore, applications of variational approach to the some problem types are given.

In the fourth chapter, by examining an elliptic equation involoving a discrete $p(k)$-Laplacian operator, at least three non-zero solutios are shown with Ricceri's three critical points theorem.

In the fifth chapter, by examining via variational approach discrete problem at Kirchhoff type,

Key Words : Nonstandard Growth Condition, Difference Equations, Lebesgue and Sobolev Spaces, Variational Approach, Ricceri's three critical points theorem, Mountain-Pass Theorem, Palais-Smale Condition.

SİMGELER

$\mathbb{R}^n$, n-Boyutlu Euclid (Öklid) Uzayı

$\overline{A}$, A kümesinin kapanışı

∂A , A kümesinin sınırı

$\|u\|$, u 'nun normu

X' , X uzayının duali

$C(\Omega)$, Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı

$L^p(\Omega)$, Ω bölgesinde p.mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı (Lebesgue uzayı)

$W^{m,p}(\Omega)$, Sobolev uzayı

∇ , gradient operatörü

Δ_p, p-Laplace operatörü

$\Delta u(k)$, u fonksiyonunun farkı

1. GİRİŞ

1.1. Standart Olmayan Büyüme Koşullu Denklemler

Bu kısımda değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tarihsel gelişiminden kısaca bahsedilecek, daha sonra standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemler, bu denklemlerin gelişimi, fiziksel anlamı ve uygulamaları hakkında bilgi verilecektir. Son olarak da standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili şimdiye kadar yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlara kısaca değinilecektir.

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayları ilk kez Orlicz (1931) tarafından incelenerek çeşitli sonuçlar elde edilmiş, ayrıca değişken üstlü Lebesgue uzayı reel aralıkta incelenmiştir. Daha sonra yine Orlicz tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge, $u:\Omega \to [0,\infty)$, $\lambda > 0$ ve φ bazı özel koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\vartheta(u) = \int_{\Omega} \varphi\left(\lambda |u(x)|\right) dx < \infty \qquad (1.1)$$

şeklindeki modüler forma sahip fonksiyon uzayları ele alınmış ve literatürde Orlicz uzayı adıyla anılan fonksiyon uzayı tanımlanmıştır. Ancak (1.1) ile verilen ifadede φ fonksiyonu tam olarak x değişkenine bağlı değildir ve $|u(x)|^{p(x)}$ durumu da içerilmemektedir. Dolaysıyla bu aşamadan sonra araştırmalar, modüler uzaylar olarak adlandırılan ve modüllerin özel fonksiyonlarla tanımlanmadığı daha soyut bir araştırma sahasında yoğunlaşmıştır. Modüler uzaylar sistematik olarak ilk kez Nakano (1950,1951) tarafından incelenmiştir. Daha sonra, Polonyalı matematikçiler Hudzik (1976) ve Musielak (1983) tarafından modüler uzayların çok daha belirgin bir hali olan modüler fonksiyon uzayları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Reel aralıkta değişken üstlü Lebesgue uzayları ile ilgili ilk kapsamlı çalışmalar Rus araştırmacılar Tsenov (1961) ve Sharapudinov (1979) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonra 80'li yıllarda Zhikov (1987) tarafından, standart olmayan büyüme koşullarına sahip varyasyonel integraller üzerinde yapılan çalışmalar sayesinde değişken üstlü uzaylarla ilgili yeni bir araştırma alanı doğmuştur. Bununla birlikte bazı İtalyan araştırmacılar (1991) tarafından; $c>0$ ve $p>1$ için,

$$|t|^p \le F(x,t) \le c\left(|t|^p+1\right) \tag{1.2}$$

olmak üzere,

$$\min\int_\Omega F(x,|\nabla u|)\,dx \tag{1.3}$$

şeklinde verilen enerji integralinin minimizasyon problemleriyle ilgili çalışmalar yapılmıştır.

(1.2) eşitsizliğinde F fonksiyonu; $p:\Omega\to(1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \le F(x,t) \le c\left(|t|^{p(x)}+1\right)$$

olacak şekilde seçilirse, F fonksiyonu **standart olmayan büyüme koşulu**na veya kısaca $p(x)$-**büyüme koşulu**na sahiptir denir. Standart olmayan büyüme koşuluna sahip fonksiyonları içeren denklemlere de **Standart olmayan büyüme koşullu denklemler** denir. Eğer F fonksiyonu; $p,q:\Omega\to(1,\infty)$, $1<p(x)<q(x)$ özelliğindeki ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \le F(x,t) \le c\left(|t|^{q(x)}+1\right)$$

olacak şekilde seçilirse, F fonksiyonu $(p(x),q(x))$-**büyüme koşulu**na sahiptir denir. Bu ikinci eşitsizlik ilkine göre daha esnek bir koşuldur. Standart olmayan büyüme koşullu denklemlerin ortaya çıkmasında,

$$\Delta_{p(x)}u = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)=0 \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan ve $p(x)$-**Laplacian denklemi** olarak adlandırılan denklem önemli bir yere sahiptir. Burada verilen $\Delta_{p(x)}u$, $p(x)$-**Laplacian operatörü**'dür ve $|t|^{p(x)-2}t=|t|^{p(x)-1}\operatorname{sgn}t$, $p(x)>1$ olmak üzere,

$$\Delta_{p(x)}u := \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right)^{(p(x)-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

şeklinde;

veya $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$ alınarak,

$$\Delta_{p(x)}u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

biçiminde tanımlanır.

Dikkat edilirse $p(x) \neq 2$ için $p(x)$-Laplacian denklemi lineer değildir, bu yüzden $p(x)$-Laplacian operatörünü içeren denklemler, lineer olmayan diferansiyel denklem sınıfındandırlar. Bunula birlikte $p(x)$-Laplacian denklemi, lineer olmayan eliptik denklemler için bir model oluşturur ve (1.4) biçimindeki diferansiyel denklemler,

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,dx \tag{1.5}$$

şeklindeki (varyasyonel) integrallere karşılık gelir. Dikkat edilirse (1.4) eşitliğinde $p(x) = p = sabit$ olarak seçilirse o zaman,

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) = 0 \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanan ve p-Laplacian denklemi olarak adlandırılan denklem elde edilir ki bu durumda (1.6),

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx$$

integraline karşılık gelen diferansiyel denklem olur. Ve yine (3.4) eşitliğinde $p(x) = 2$ olarak seçilirse o zaman,

$$\Delta u = div(\nabla u) = 0 \tag{1.7}$$

şeklinde Laplacian denklemi elde edilir.

Belirtmekte yarar vardır ki (1.4), (1.6) ve (1.7) denklemleri arasında önemli bazı yapısal farklılıklar mevcuttur. Laplacian denklemi lineerdir, yani eğer u ve v fonksiyonları (1.7) denkleminin bir çözümü ise o zaman, λ ve μ sabit olmak üzere, $\lambda u + \mu v$'de bir çözümdür. p-Laplacian denklemi ise $p \neq 2$ durumu için lineer değildir; ancak scalable'dir, yani genel olarak $u + v$, (1.6) için bir çözüm değilken $\lambda u + \mu$ bir çözüm olabilmektedir. $p(x)$-Laplacian denklemi için lineer olmama durumu p-Laplacian denklemine göre çok daha güçlüdür, dolayısıyla (1.6) için bir çözüm olan $\lambda u+\mu$'nin (1.4) için bir çözüm olabilmesi için öncelikle $\lambda=\pm 1$ olması gerekmektedir. Bununla birlikte p-Laplacian operatörü $(p-1)$-homojendir, yani her $\lambda>0$ sayısı için $\Delta_p(\lambda u)=\lambda^{p-1}\Delta_p u$'dur; ancak $p(x)\neq sabit$ iken $p(x)$-Laplacian operatörü homojen değildir. Bu durum bazı önemli zorluklar doğurur, örneğin Lagrange Çarpanlar teorisi $p(x)$-Laplacian operatörünü içeren denklemlere uygulanamaz.

Standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin uygulama alanları oldukça geniş olup, belli başlı uygulama alanları Electrorheological Akışkanlar Teorisi (Electrorheological Fluids Theory), Lineer olmayan esneklik Teorisi (Nonlinear Elasticity Theory), Görüntü İyileştirme (Image Processing) ve Gözenekli Ortamlarda Akış (Flow in Porous Media)'dır. Bunlar içerisinde en önemlisi electrorheological akışkanlar (ER akışkanlar) teorisidir. Bu akışkanlar, harici bir elektromanyetik alanın etkisiyle, mekanik özellikleri etkili/şiddetli bir şekilde değiştirebilme kabiliyetine göre kategorize edilirler. ER akışkanlar teorisiyle ilgili ilk önemli çalışma Winslow (1949) tarafından yapılmıştır. ER akışkanlar fiziğinin matematiksel modelinin oluşturulmasının birkaç farklı yöntemi mevcuttur. Bunlar içerisinde son zamanlarda Rajagopal&Ruzicka (2001) tarafından elde edilen ve daha sonra Ruzicka'nın (2000) daha da geliştirdiği matematiksel model öne çıkmaktadır. Bu model, elektromanyetik alanlar ile hareketli akışkanlar arasındaki hassas etkileşimi hesaba katmaktadır. Buna göre, ER akışkanların hareketine karşılık gelen temel matematiksel model aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+divS(u)+(u.\nabla)u+\nabla\pi=f \tag{1.8}$$

Burada $u:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}^3$ akışkanın hızını veren fonksiyonu, $\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ gradient operatörünü, $\pi:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}$ basınç fonksiyonunu, $f:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}^3$ harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonu ve $S:W_{loc}^{1,1}\to\mathbb{R}^{3\times 3}$ fonksiyonu da ekstra stres tensörünü göstermekte olup, bu tensör

$$S(u)(x)=\mu(x)\left(1+\left|Du(x)\right|^2\right)^{(p(x)-2)/2}Du(x) \tag{1.9}$$

olarak verilir. Burada $Du = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right)$, u fonksiyonunun gradientinin simetrik kısmı ve μ bir ağırlık fonksiyonudur. Dikkat edilirse (1.9)'da $p(x) = 2$ alınırsa, (1.8) denklemi boyutlandırılmamış (non-dimensionalized) Navier-Stokes denklemine dönüşür. Bununla birlikte, (1.8) denklemi bilinen Laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türeve sahip terim için, $\lambda = 1$ seçildiğinde elde edilen,

$$div\left(\left(\lambda + \left|Du(x)\right|^2\right)^{(p(x)-2)/2} Du(x)\right) \tag{1.10}$$

ifadesi Laplace denklemine oldukça benzerdir. Gerçekten, dejenere durumda yani $\lambda = 0$ iken (1.10), $p(x)$-Laplacian denklemine dönüşür.

Son yıllarda standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili çok yoğun ve yaygın çalışmalar yapılmaktadır öyle ki sadece son 10 yıl içerisinde 100'den fazla araştırmacı (2010) tarafından 300'den fazla çalışma yayımlanmıştır. Bu alanda şu ana kadar yayınlaşmış olan bazı önemli çalışmalara aşağıda yer verilmiştir.

Zang (2008) tarafından; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -div\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x,u)\ , & x \in \Omega \\ u(x) = 0\ , & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklinde standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklem ele alınmış, varyasyonel bir yaklaşımla, denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Mashiyev ve ark. (2011) tarafından; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırına sahip bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p \in C(\overline{\Omega})$, $1 < p(x) < N$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ve $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı büyüme koşullarını sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx\right)div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)=f(x,u)\ ,\ x\in\Omega \\ u=0\ , \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklinde lokal olmayan $p(x)$-Laplacian Dirichlet denklemi ($p(x)$-Kirchhoff denklemi) incelenerek, varyasyonel yaklaşım ve Krasnoselskii Genus teorisi yardımıyla bu denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu elde edilmiştir.

Fan (2010) tarafından; A ve B, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlı iki fonksiyonel, a sıfır noktasında singülerliğe sahip olabilen bir fonksiyon ve $F(x,t)=\int\limits_0^t f(x,s)ds$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -A(u)\Delta_{p(x)}u=B(u)\,f(x,u)\ ,\ x\in\Omega \\ u=0\ , \qquad\qquad\qquad x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)$-Laplacian Dirichlet denkleminin varyasyonel olmayan formu ve

$$\begin{cases} -a\left(\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u=b\left(\int\limits_{\Omega}F(x,u)dx\right)f(x,u)\ ,\ x\in\Omega \\ u=0\ , \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Kirchhoff denkleminin varyasyonel formu incelenmiştir.

1.2. Fark Denklemleri

Bu kısımda Fark denklemlerinin tarihsel gelişiminden, tanımından, diferansiyel denklemlerle olan ilişkisinden ve sınıflandırılmasından bahsedilecek, sonrasında ise bazı çalışmalardan örnekler sunulacaktır.

Fark denklemi, bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Fonksiyonel denklem olarak da isimlendirilen fark denklemleri, diferansiyel denklemlere benzerlik gösterirler. Fakat inceleme süreci yönünden, diferansiyel denklemlerden daha yenidir. Diferansiyel denklemler 200 yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemleri 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Diferansiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluklar yoktur" yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındak denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferansiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ve kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacısıydı. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir.

Sonlu Fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré'ye kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklemi üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemleri ele alınmamıştı. 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklemi teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887'de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde çalışmış, Birkhoff ve Carmichael bu çalışmaları genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden self-adjoint doğrusal diferansiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denkleminin çözümünü ifade etmişlerdir.

Fark denklemleri sonlu sayıda bilinmeyen fonksiyonların farklarını, dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun $x_1, x_2, ..., x_m$ noktalarındaki değerlerinin farklarını içerir. Örneğin ekonomi ile ilgili araştırmalarda y fonksiyonunun belli diskret (ayrık) zamanlardaki değerini hesaplamak gerekmektedir. Bu yüzden zamana göre sürekli değişim hızı $\dfrac{dy}{dt}$ yi önceden belirlenmiş sonlu bir zaman içerisinde $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ diskret hız ile hesaplanmasına dönüştürebiliriz. Eğer zaman birimini 1'e eşit alırsak, o zaman değişim hızı, $\Delta y = y(t+1) - y(t)$ 1.mertebe fark denklemi ile gösterilir.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için bir yöntem olarak bu denklemler uygun fark denklemlerine dönüştürülebilir. Bunun için $\Delta t \to 0$ iken fark denklemlerinin çözümünün diferansiyel denklemin çözümüne yaklaştığının gözlenmesi gerekmektedir. Zamandaki değişim yeterince küçük değilse, $y(t)$ değişkeninin zamana bağlı değişimlerini diferansiyel ile tanımlamak doğru olmayacaktır. Bunun yerine fark denklemleri olarak ifade ettiğimiz yöntemi kullanacağız.

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevini şöyle tanımlayabiliyoruz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx ’in davranışı yerine, belirli bir miktarda değiştirildiğini kabul edelim ve y ’nin değişimini buna göre yeniden yazarsak,

$$f(x+\Delta x) - f(x) = y(x+\Delta x) - y(x) = \Delta y(x)$$

eşitliğini elde ederiz. Δ simgesine **fark işlemcisi** diyoruz. Yukarıda yazdığımız son ifade, Δx aralığına karşılık oluşan y aralığını belirlemektedir.

Yani bir fark denklemi, bir değişkenin art arda değerleri arasındaki farkın açıkça belirlenmesidir. Başka bir deyişle bir değişkendeki değişiklik için bir denklemdir. İki peryot arasında bir değişkendeki değişim veya fark,

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t), \ t = 0,1,2,...$$

şeklindedir.

$y(k)$ ’nın 1.mertebe farkını $\Delta y(k)$ ile gösterelim. $k \in \mathbb{Z}[1,T]$ ayrık aralık olup,

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

şeklinde yazılır. Buradan sonuçla 2.mertebe fark denklemini $\Delta^2 y(k)$ ile gösterirsek;

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(k) = \Delta(\Delta y(k)) = \Delta(y(k+1) - y(k)) &= \Delta y(k+1) - \Delta y(k) \\ &= y(k+2) - y(k+1) - y(k+1) + y(k) \\ &= y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer işlemlerle *m.* mertebeden farkları,

$$\Delta^m y(k) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i y(k+m-i)$$

şeklinde tanımlarız. Burada $C_m^i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$ binomiyel katsayılardır.

1.3. Fark Denklemlerinin Sınıflandırılması

Mertebe: Bir fark denkleminin mertebesi, denklemde mevcut farkın en yüksek mertebesidir. Örneğin;

$$y(t+1) = 3y(t) + 2$$

şeklinde 1.mertebeden bir fark denklemi sadece bir değişkenin ilk farkını içerir. Halbuki,

$$y(t+2) = 2y(t+1) + 3y(t) + 2$$

veya eşdeğer olarak $t+2$ yerine t alarak,

$$y(t) = 2y(t-1) + 3y(t-2) + 2$$

şeklinde yazılabilen 2.mertebeden bir fark denklemi ayrı iki peryotta değişkenleri içerir.

Bağımlı-Bağımsız Fark Denklemleri: Eğer fark denklemi açık olarak zamana bağlı değilse o zaman bu fark denklemine Bağımsız Fark Denklemi adı verilir. Aksi halde bağımsız olmayan adını alır. Örneğin;

$$y(t+1) = 2y(t) + 3t$$

fark denklemi t değişkenine açıkça bağımlı olduğu için bağımsız olmayan bir denklemdir. Diğer taraftan,

$$y(t+1) = 2y(t) + 3$$

fark denklemi açıkça t değişkenine bağlı olmadığından bağımsızdır (autonomous).

Lineer-Lineer Olmayan Fark Denklemleri: Eğer bir fark denklemi $y(t)$, $y(t+1)$, $y(t+2)$,… denklemlerinde herhangi lineer olmayan terimleri içerirse, o zaman bu fark denklemine lineer olmayan (nonlinear) adı verilir. Eğer y terimlerinin tümü “1” den başka kuvvete yükseltilemiyorsa bu fark denklemleri de lineer adını alır. Örneğin;

$$y(t+1) = 2\left[y(t)\right]^2 + 3$$

ifadesi 1.mertebeden lineer olmayan bağımsız bir fark denklemidir. Yine,

$$y(t+1) = 2\log y(t) + 3$$

denklemi de 1.mertebeden lineer olmayan bir fark denklemidir.

Ancak;

$y(t+1) = 2y(t) + 3t^2 \quad \rightarrow$ lineer fakat bağımsız olmayan

$y(t+2) = 5y(t+1) + 2y(t) + 3 \quad \rightarrow$ 2.mertebeden, lineer ve bağımsız

$y(t+2) = 5y(t+1) + \dfrac{2}{y(t)} + 3 \quad \rightarrow$ 2.mertebeden, lineer olmayan ve bağımsız

fark denklemleridirler.

Çözümler: Bir fark denkleminin çözümü kavramı, şimdiye kadar tartışılmış diğer çözüm kavramlarından farklıdır. Fark denkleminde bir çözüm, fark denklemini sağlayan yine bir fonksiyondur. Halbuki cebirsel denklemde bir çözüm, bir değişkendir. Bir fark denkleminin genellikle çok çözümleri vardır. Örneğin;

$$y(t+1) = 2y(t) \quad , \qquad t = 0,1,2$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer fark denkleminin bir çözümü $y(t) = 2^t$ fonksiyonudur.

Matematikte sonlu farkların yaygın bir kullanımı vardır. Sonlu farklar prensip olarak fonksiyonun ve onun türevlerinin süreklilik kavramının bir diskret (ayrık) versiyonu olup, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de geniş bir kullanım alanına sahiptir. Diferansiyel denklemlerle fark denklemleri arasında sıkı ilişkiler mevcuttur. Dolayısıyla burada izlenen amaç, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin uygun fark denklemlerinin çözümlerine indirgenebilmesidir.

Bilgisayar biliminde, makine mühendisliğinde, kontrol sistemlerinde, biyolojik veya yapay sinir ağlarında, ekonomide ve diğer birçok farklı araştırma alanlarında önemli soruların matematiksel modellemeleri, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin haliyle dikkate alınmasını gerektirmektedir. Bu sebeple, son yıllarda birçok bilim adamı, diskret problemler üzerinde çalışmak için alt ve üst sınır çözüm metotlarını geliştirmiştir. Bunlardan bazıları; Agarwal ve ark. (2000,2004,2005), Bonanno ve Candito (2009), Cabada ve ark. (2009), Mihailescu ve ark. (2009) olarak verilebilir. Başlıca çalışmalardan örnekler sunalım.

P. Candito ve N. Giovannelli (2008) tarafından; $p = sabit$ olduğu durumda; $T \geq 2$ pozitif bir tamsayı, $\{1,\ldots,T\}$ için $[1,T]$ ayrık aralık, λ pozitif reel bir parametre, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$ $(1 < p < \infty)$ ve $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta\left(\phi_p\left(\Delta u\left(k-1\right)\right)\right) = \lambda f\left(k,u\left(k\right)\right) \ , \ k\in\mathbb{Z}\left[1,T\right] \\ u\left(0\right) = u\left(T+1\right) = 0 \end{cases}$$

problemi araştırılmıştır. Kritik nokta teoremi kullanılarak bu problem için çözümün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

M. Mihailescu ve ark. (2009) tarafından; λ pozitif bir sabit, $p:\mathbb{Z}\left[0,T\right]\to\left[2,\infty\right)$ ve $q,s:\mathbb{Z}\left[1,T\right]\to\left[2,\infty\right)$ fonksiyonları sınırlı ve $T\geq 2$ bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta\left(\left|\Delta u\left(k-1\right)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u\left(k-1\right)\right) = \lambda\left|u\left(k\right)\right|^{q(k)-2}u\left(k\right) \ , \ k\in\mathbb{Z}\left[1,T\right] \\ u\left(0\right) = u\left(T+1\right) = 0 \end{cases}$$

problemi üzerinde durmuşlardır. Kritik nokta teoremini kullanarak bu problem için çözümün varlığını göstermişlerdir.

B. Kone ve S. Ouaro (2010) tarafından; $T\geq 2$ pozitif bir tamsayı, $\Delta u(k) = u(k+1)-u(k)$ fark operatörü ve ζ reel sayısı için $\forall k\in\mathbb{Z}[0,T]$ olacak şekilde $a(k,\zeta) = |\zeta|^{p(k)-2}\zeta$ için bir önceki çalışmanın (Mihailescu ve ark., 2009) bir genelleştirmesi olan,

$$\begin{cases} -\Delta\left(a\left(k-1,\Delta u\left(k-1\right)\right)\right) = f(k) \ , \ k\in\mathbb{Z}\left[1,T\right] \\ u\left(0\right) = u\left(T+1\right) = 0 \end{cases}$$

problemiyle ilgilenilmiştir. Kritik Nokta Teoremi kullanılarak bu problem için zayıf çözümün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

İleriki bölümlerde inceleyeceğimiz Kirchhoff problemi (lokal olmayan $p\left(x\right)$-Laplacian Dirichlet problemi) için; $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $x\in\Omega$ için $p\left(x\right)>1$, $p\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $f\left(x,u\right):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathéodory koşulu) sağlayan, lineer olmayan bir fonksiyon ve $M(t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx\right)div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)=f(x,u)\ ,\ x\in\Omega \\ u=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,\ x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

denklemi model olarak göz önünde tutulabilir. (1.11) problemi, Kirchhoff (1883) tarafından; ρ, P_0, h, E, L sabitler olmak üzere,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int\limits_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ , \tag{1.12}$$

biçiminde ifade edilen denklemin bir modelidir. Aslında (1.12) denklemi D'Alambert'in dalga denkleminin genelleştirilmiş halidir. Fiziksel olarak (1.11) ile verilen Kirchhoff denklemindeki diverjansın lokal olmayan $M\left(\int_{\Omega}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)$ katsayısı, kinetik enerjinin ortalama değerine bağlı bir fonksiyondur. Bununla birlikte (1.12) denkleminin durgun (stationary) hali,

$$\begin{cases} -\left(a+b\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u=f(x,u)\ ,\ x\in\Omega \\ u=0\ ,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

olarak Lions (1978) tarafından verilmiştir.

(1.12) şeklindeki Kirchhoff denkleminin ayrık özelliği, $[0,L]$ aralığı üzerinde $\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ kinetik enerjisinin $\frac{E}{2L}\int\limits_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$ ortalamasına bağlı $\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int\limits_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$ şeklindeki lokal olmayan bir katsayı içeren bir denklem olmasıdır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölüm, bu tez kapsamında bilinmesi gerekli olan bazı temel kavram, tanım ve teoremlerle birlikte üzerinde çalışılan Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bilgi içermektedir.

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

(M_1) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$

(M_2) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M_3) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(M_4) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** veya **uzaklık fonksiyonu** denir. Bu durumda (X, d) ikilisine bir **metrik uzay** ve $(M_1) - (M_4)$ özelliklerine de **metrik aksiyomları** adı verilir.

Örnek 2.1.2. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerindeki **adi metrik** veya **öklid metriği** denir.

Örnek 2.1.3. $X = \mathbb{C}$ olmak üzere $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{C}$ üzerindeki **adi metrik** veya **öklid metriği** denir.

Örnek 2.1.4. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ için,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \ , \ x = y \\ 1 \ , \ x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki **ayrık metrik** adı verilir.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}^n$ $\left(\text{veya } \mathbb{C}^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, tüm sıralı reel $\left(\text{veya kompleks}\right)$ n-lilerin kümesini göstermek üzere, $\forall x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \forall y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) \in \mathbb{R}^n$ için $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - y_k\right)^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki dönüşüme $\mathbb{R}^n$ üzerindeki **adi metrik** veya **öklid metriği**, $\left(\mathbb{R}^n, d\right)$ ikilisine ise n**-boyutlu öklid uzayı** denir.

Örnek 2.1.6. l^p, $\left(1 \leq p < \infty\right)$ terimlerinin p. kuvvetten toplamları sonlu olan dizi uzayı olmak üzere $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) \in l^p$ ve $d : l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ için,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|x_k - y_k\right|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü l^p'de bir metriktir. Bu metrik, özel olarak $p = 2$ için $\left(l_2, d\right)$ şeklindeki Hilbert uzayını oluşturur.

Tanım 2.1.7. $\left(X, d\right)$ metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere,

$\left(a\right)$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < d\left(c, x\right) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa $c \in X$ elemanına G kümesinin bir **yığılma noktası** denir.

$\left(b\right)$ Eğer bir $c \in G$ noktası G'nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G'nin **yalıtık noktası** (isolated point) denir.

Tanım 2.1.8. (X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylar, $E \subseteq X$, c noktası E'nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun. $x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x,c) < \delta$ iken $d_2(f(x),l) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : E \to Y$ fonksiyonunun **limiti** denir ve $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir. Burada c noktasının E kümesine ait olması gerekmez.

Tanım 2.1.9. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere,
$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi x_0 noktasına **yakınsıyor** denir ve bu durum,

$$x_n \longrightarrow x_0 \text{ veya } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.10. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise;

(a) x_0 limiti tektir.

(b) (x_n) dizisi sınırlıdır.

(c) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0'dır.

(d) Ek olarak $y_n \longrightarrow y_0$ ise $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x_0, y_0)$ olur ($(y_n) \in X$ dizisi ve $y_0 \in X$ elemanı için).

Tanım 2.1.11. (X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım. Eğer,

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x,c) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f **fonksiyonu** c **noktasında süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f **fonksiyonu** X **uzayında süreklidir** denir.

Tanım 2.1.12. (X,d) metrik uzay olsun. (x_n), X'te bir dizi olmak üzere,

$\forall \varepsilon > 0$ için $m > n \geq N$ olmak üzere $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.13. (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. E'deki her Cauchy dizisi E'deki bir noktaya yakınsıyor ise E kümesine **tamdır** denir.

Tanım 2.1.14. (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X'teki bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

Teorem 2.1.15. (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun.

(a) Eğer E kümesi tam ise kapalıdır.

(b) Eğer X kümesi tam ve E kümesi kapalı ise E kümesi tamdır.

Tanım 2.1.16. (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer E'deki her dizi, limiti E'de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine **kompakt** küme denir. Eğer X kompakt ise (X,d) **metrik uzayı kompakt** olur.

Teorem 2.1.17. Bir metrik uzaydaki kompakt bir küme aynı zamanda tamdır.

Tanım 2.1.18. (X,d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x_0, r) = \{x \in X : \, d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**,

$B(x_0, r) = \{x \in X : \, d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar**,

$B(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x_0,x)=r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **yuvar yüzeyi** adı verilir.

Eğer $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in B(a,r)$ olacak şekilde bir $B(a,r)$ açık yuvarı varsa (x_n) **dizisi** X **metrik uzayında sınırlıdır** denir. Ayrıca $E\subseteq B(a,r)$ olacak şekilde $B(a,r)$ açık yuvarı varsa $E\subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında **sınırlıdır** denir.

Tanım 2.1.19. (X,d) metrik uzay ve $E\subseteq X$ olmak üzere; eğer $B(x_0,\varepsilon)\subseteq E$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı varsa $x_0\in E$ elemanına E 'nin bir **iç noktası** adı verilir.

Tanım 2.1.20. (X,d) metrik uzay ve $G\subseteq X$ olmak üzere; eğer G kümesinin her noktası G 'nin bir iç noktası ise G 'ye (X 'te) bir **açık küme** denir.

Tanım 2.1.21. (X,d) metrik uzay ve $F\subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyor ise F 'ye (X 'te) bir **kapalı küme** denir.

Örnek 2.1.22. Her (X,d) metrik uzayı için X ve $\varnothing$ kümeleri hem açık hem de kapalı kümelerdir.

Teorem 2.1.23. (X,d) metrik uzay ve $F\subseteq X$ olmak üzere,

F kümesi X 'te kapalıdır $\Leftrightarrow$ F 'nin tümleyeni $F^c=X-F$, X 'te bir açık kümedir.

Tanım 2.1.24. $E\subseteq X$ olmak üzere;

(a) E kümesinin tüm iç noktalarının kümesine E 'nin **içi** denir ve E° şeklinde gösterilir.

(b) E kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye E 'nin **kapanışı** denir ve $\overline{E}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.25. (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere, E° kümesi X'te bir açık küme ve $\overline{E}$ kümesi X'te bir kapalı kümedir.

Tanım 2.1.26. $E \subseteq X$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için $B(s,r)$ açık yuvarı E ve E^{c} kümelerinin en az birer noktalarını kapsıyor ise yani $B(s,r) \cap E \neq \varnothing$ ve $B(s,r) \cap E^{c} \neq \varnothing$ ise $s \in X$ noktasına E'nin bir **sınır noktası** denir. E'nin tüm sınır noktalarının kümesi ∂E ile gösterilir.

Tanım 2.1.27. (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \overline{E}$ ise E kümesine X'te **yoğun küme** denir.

Örnek 2.1.28. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'de yoğundur; ancak $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $\mathbb{R}$'de yoğun değildir.

Tanım 2.1.29. Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya **ayrılabilir metrik uzay** adı verilir.

Örnek 2.1.30. $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad , \quad (1 \leq p < \infty)$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ metriğiyle $(\mathbb{R}^n, d)$ ayrılabilir metrik uzaydır.

2.2. Vektör Uzayları

Tanım 2.2.1. V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere,

$$+ : V \times V \to V, \ (x,y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \ (a,x) \mapsto ax$$

dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in V$ ve $a, b \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki özellikler sağlansın.

1-) $x + y = y + x$

2-) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3-) $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.

4-) $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.

5-) $1 \cdot x = x$

6-) $a(x + y) = ax + ay$

7-) $(a + b)x = ax + bx$

8-) $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda V 'ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı** (lineer uzay), elemanlarına ise **vektör** veya **nokta** denir. $V = \mathbb{R}$ alınırsa V 'ye bir **reel vektör uzayı**, $V = \mathbb{C}$ alınırsa V 'ye bir **kompleks vektör uzayı** denir.

Tanım 2.2.2. V , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W , V 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W , V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W 'ye V 'nin bir (lineer) **alt uzayı** denir.

Teorem 2.2.3. $\varnothing \neq W \subset V$ kümesinin V 'nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall y_1, y_2 \in W$ ve $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{F}$ için $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in W$ olmasıdır.

Tanım 2.2.4. V , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$ olmak üzere, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$ toplamına $x_1, x_2, ..., x_n$ 'nin **lineer kombinasyonu** denir.

Tanım 2.2.5. $\varnothing \neq W \subset V$ olmak üzere, M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M 'nin **gereni** $(Span)$ denir ve $SpanM$ olarak gösterilir. $SpanM$, V 'nin bir alt uzayıdır ve bu alt uzaya M **'nin ürettiği alt uzay** denir.

Tanım 2.2.6. V , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset V$ olsun. $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{F}$ olmak üzere,

$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$ eşitliği ancak ve ancak $a_1=a_2=...=a_n=0$ olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1,x_2,...,x_n$ vektörlerine **lineer bağımsız**, aksi halde en az bir $a_i\neq 0$ $(i=1,2,...,n)$ ise **lineer bağımlıdır** denir.

Tanım 2.2.7. V , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\varnothing\neq W\subset V$ olmak üzere,

(a) M lineer bağımsızdır.

(b) $V=SpanM$ ise M ’ye V ’nin bir **tabanı** veya **bazı** denir.

Eğer $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, V ’nin bir tabanı ise $\forall x\in V$ vektörü $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{F}$ olmak üzere,

$$x=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer V vektör uzayının sonlu tabanı varsa V ’ye **sonlu boyutlu vektör uzayı**, aksi halde **sonsuz boyutlu vektör uzayı** denir. Sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerin sayısına **V ’nin boyutu** denir ve $BoyV$ şeklinde gösterilir.

2.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 2.3.1. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir. Bir f fonksiyoneli her $x,y\in X$ ve her $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için ,

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

koşulu altında bir **lineer dönüşüm** olur.

Tanım 2.3.2. X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\,.\,\|:X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $x\to\|x\|$ dönüşümü; $\forall x,y\in X$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{F}$ için,

(N_1) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$

(N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise X üzerinde bir norm olur ve $(X, \| \ . \ \|)$ ikilisine **normlu vektör uzayı** denir. $(N_1)-(N_3)$ özelliklerine ise **norm aksiyomları** denir. Bu uzay $X = \mathbb{R}$ için **reel normlu uzay**, $X = \mathbb{C}$ için **kompleks normlu uzay** olur.

Örnek 2.3.3. $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayını düşünelim. $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\| \ . \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu norma $\mathbb{R}^n$ 'deki **adi norm** veya **öklid normu** denir.

Örnek 2.3.4. l^∞ sınırlı, yakınsak ve kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere l^∞ uzayı, $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in l^\infty$ olmak üzere,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...)$$

şeklindeki vektörel toplama ve

$$cx = (cx_1, cx_2, cx_3, ...)$$

şeklindeki skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olup aynı zamanda,

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile bir normlu uzaydır. $\| \ . \ \|_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}$ dönüşümüne, l^∞ 'daki **supremum normu** veya **adi norm** denir.

Örnek 2.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel değerli fonksiyonlar kümesi olmak üzere; $C[a,b]$ uzayı,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (cf)(t) = cf(t)$$

şeklinde tanımlı sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olup bu uzay aynı zamanda,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

normu ile bir normlu uzaydır.

Örnek 2.3.6. l^p uzayı $\left(1 \le p < \infty\right)$,

$$\left\|x\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\| : l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.3.7. Her $\left(X, \|\,.\,\|\right)$ normlu uzayından; $x, y \in X$ olmak üzere,

$$d\left(x, y\right) = \left\|x - y\right\|$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\|\,.\,\|$ **normu tarafından üretilen metrik** veya $\|\,.\,\|$ **normunun indirgediği metrik** denir.

Örnek 2.3.8. $\mathbb{R}^n$ normlu vektör uzayından (örnek 2.3.3'te tanımlanan),

$$d\left(x, y\right) = \left\|x - y\right\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|x_k - y_k\right|^2\right)^{1/2}$$

şeklindeki adi (öklid) metrik elde edilir.

Örnek 2.3.9. l^∞ normlu uzayından (örnek 2.3.4'te tanımlanan),

$$d\left(x, y\right) = \left\|x - y\right\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|x_k - y_k\right|$$

şeklindeki metrik (adi supremum metriği) elde edilir.

Lemma 2.3.10. Normlu bir X vektör uzayı üzerinde bir norm tarafından üretilen bir d metriği; $\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

(a) $d\left(x + z, y + z\right) = d\left(x, y\right)$ (öteleme değişmezliği)

(b) $d\left(\alpha x, \alpha y\right) = \left|\alpha\right| d\left(x, y\right)$ (mutlak homojenlik özelliği)

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.3.11. (x_n), $(X,\|\ .\ \|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$$

oluyor ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzaylarda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsama** veya **güçlü yakınsama** denir.

Tanım 2.3.12. (x_n), $(X,\|\ .\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m,n>N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, yani $m,n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ oluyorsa, (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.3.13. Aşağıdaki önermeler doğrudur.
i) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
ii) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
iii) Bir $(X,\|\ .\ \|_X)$ normlu uzayda (x_n) bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi x 'e yakınsaktır.
iv) Bir $(X,\|\ .\ \|_X)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.3.14. Bir $(X,\|\ .\ \|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X,\|\ .\ \|)$ normlu uzayına **tam uzay** veya **Banach uzayı** adı verilir.

Örnek 2.3.15. $X = \mathbb{R}^n$ (veya $X = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı,

(a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(b) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{1/p}$

$(c)\ \|x\|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1,2,...,n\}$

normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.3.16. $X = \mathbb{R}^n$ (veya $X = \mathbb{C}^n$) olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı X vektör uzayı,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

normuna göre bir Banach uzaydır.

Örnek 2.3.17. l^{∞} normlu vektör uzayı (örnek 2.3.4'te tanımlanan),

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.18. X normlu uzayında tanımlı tüm lineer ve sürekli fonksiyonellerin kümesine X normlu uzayının **duali** denir ve X' ile gösterilir. Bu uzay, $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ ve $(cu)(x) = cu(x)$; $u, v \in X',\ x \in X,\ c \in \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan noktasal toplam ve çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X'$ elemanının normu,

$$\|u\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır. X' uzayı $\|\ .\ \|_{X'}$ normu ile bir Banach uzayı olur. Ayrıca, X vektör uzayının duali de normlu vektör uzayı olduğundan dolayı bu uzayın da dual uzayı tanımlanabilir.

Tanım 2.3.19. X normlu uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm $\|\ .\ \|_1$ ve $\|\ .\ \|_2$ olmak üzere, $\forall x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$$

olacak şekilde c_1, c_2 reel sayıları varsa o zaman $\|\ .\ \|_1$ ve $\|\ .\ \|_2$ normlarına **denk normlar** adı verilir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir(2.9 kısmında ispatlı olarak ele alınacak). Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayı üzerindeki bir (x_n) dizisi, $\|\,.\,\|_1$ ($\|\,.\,\|_2$) normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy ise, $\|\,.\,\|_2$ ($\|\,.\,\|_1$) normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy'dir.

Tanım 2.3.20. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$$

özelliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir L operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına **izometrik olarak izomorfizma**; L operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında **izometrik izomorfizma** denir.

Tanım 2.3.21. X normlu uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer $\overline{A} = X$ oluyorsa, A **kümesi** X **uzayında yoğundur** denir. Bununla birlikte A ve B, X normlu uzayının iki alt kümesi olmak üzere; eğer her bir $x \in B$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\|x - y\|_X < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı varsa A kümesi B'de yoğundur denir.

Tanım 2.3.22. X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip ise X uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Tanım 2.3.23. X' normlu uzayının duali olarak tanımlanan $X'' = (X')'$ vektör uzayına X uzayının ikinci duali denir. X'' dual uzayı da bir Banach uzay olur.
Sabit bir $x \in X$ elemanı ve $u \in X'$ için,

$$g : X' \to \mathbb{R} \text{ (veya } \mathbb{C}\text{)}$$

$$u \to g_x(u) = u(x)$$

olacak şekilde bir g_x fonksiyoneli olduğunu varsayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden,

$$T : X \to X''$$

$$x \to T(x) = g_x(u)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** denir. Eğer, bu dönüşüm üzerine ise bu durumda X uzayına **yansımalı uzay** adı verilir. X yansımalı bir uzay ise $X = X''$ olur.

Teorem 2.3.24. Yansımalı bir $\left(X, \|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayının her alt uzayı da yansımalıdır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.3.25. $\left(X, \|\,.\,\|_X\right)$ normlu bir uzay ve $\left(x_n\right)$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X'$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x_0\right)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa $\left(x_n\right)$ dizisine x_0'a **zayıf yakınsıyor** denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.26. Normlu bir $\left(X, \|\,.\,\|_X\right)$ uzayında bir $\left(x_n\right)$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Bu durumda,

i) $x_n \xrightarrow{z} x_0$ ise x_0 elemanı tektir;

ii) $x_n \xrightarrow{z} x_0$ ise $\|x_n\|_X$ dizisi sınırlıdır;

iii) $x_n \xrightarrow{z} x_0$ ise $\left(x_n\right)$ dizisinin her alt dizisi x_0'a zayıf yakınsaktır;

iv) $x_n \longrightarrow x_0$ ise $x_n \xrightarrow{z} x_0$ olur. Bunun tersi genel olarak doğru değildir;

v) $BoyX < \infty$ ise $x_n \longrightarrow x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{z} x_0$ olur. Yani, sonlu boyutlu uzaylarda zayıf ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 2.3.27. Yansımalı bir $\left(X, \|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayında sınırlı bir dizi aynı zamanda X'de zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Wang 2002).

Teorem 2.3.28. $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ ayrılabilir yansımalı bir Banach uzay ve $\left(x_n\right)$, X' uzayında sınırlı bir dizi ise o zaman bu dizi X' uzayında zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Wang 2002).

Teorem 2.3.29. $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ normlu bir uzay olsun. X uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşul X' uzayının yansımalı olmasıdır. Eğer X uzayı ayrılabilir ise, X' uzayı da ayrılabilirdir. Bu durumda, X ayrılabilir ve yansımalı bir uzay ise X' ayrılabilir ve yansımalı bir uzay olur (Adams 1975).

Tanım 2.3.30. $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ bir normlu uzay olsun. $x_k \in X$, $k=1,2,...$ için terimleri; $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2, \ldots,$ $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ şeklinde tanımlanan $\left(S_n\right)$ dizisini göz önüne alalım.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_k + ...$ sonsuz toplamına X içinde bir **seri** adı verilir. x_k terimine **serinin genel terimi**, $\left(S_n\right)$ dizisine de **serinin kısmi toplamlar dizisi** adı verilir.

Eğer $\left(S_n\right)$ kısmi toplamlar dizisi bir $s \in X$ elemanına yakınsıyor ise yani $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ veya $\lim_{n\to\infty}\left\|S_n - s\right\| = 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_k + ...$ sonsuz toplamına (serisine) yakınsaktır denir ve bu $\lim_{n\to\infty} S_n = s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ şeklinde gösterilir.

Pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k\right\|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine **mutlak yakınsak** seri denir.

Mutlak yakınsak bir seri daima yakınsaktır; ancak bu önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 2.3.31. Eğer $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ normlu uzayı içindeki her mutlak yakınsak seri yakınsak ise $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.32. (x_n), $(X,\|\,.\,\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall x\in X$ için $\mathbb{F}$ cismi içinde,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{n=1}^{m}a_nx_n\right\|=0$$

olacak şekilde bir tek (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisine X uzayının bir **Schauder bazı**(tabanı) denir. x toplamına sahip olan $\sum_{n=1}^{m}a_nx_n$ serisine x'in (x_n) tabanına göre **açılımı** denir ve $x=\sum_{n=1}^{m}a_nx_n$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.3.33. Bir Schauder bazına sahip olan Banach uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.3.34. $(X,\|\,.\,\|)$ bir normlu uzay ve V, X'in bir lineer alt uzayı ise $(V,\|\,.\,\|)$'de bir normlu uzay olur. Bu uzaya $(X,\|\,.\,\|)$ uzayının **normlu alt uzayı** denir. Eğer ek olarak V kapalı ise $(V,\|\,.\,\|)$ **kapalı alt uzay** olur.

Teorem 2.3.35. Bir Banach uzayının her kapalı alt uzayı yine bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.3.36. $(X,\|\,.\,\|)$ bir Banach uzayı ve V, X'in bir lineer alt uzayı ise $(V,\|\,.\,\|)$'nin bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul V'nin kapalı olmasıdır.

2.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Tanım 2.4.1. $X=\mathbb{R}$ (veya $X=\mathbb{C}$) ve X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\langle .,. \rangle : X\times X\to\mathbb{F}$ dönüşümü;

$(\dot{I}_1)$ $\forall x\in X$ için $\langle x,x\rangle\geq 0$ ve $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$

$(\dot{I}_2)$ $\forall x,y\in X$ için $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ ($\overline{c}$, $c\in\mathbb{C}'$nin karmaşık eşleniğidir)

$(\dot{I}_3)$ $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$(\dot{I}_4)$ $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir **iç çarpım** ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** denir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olması durumunda (ii) özelliği $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ şeklinde olur.

Örnek 2.4.2. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ (veya $\in \mathbb{C}^n$) için,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \left(\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \right)$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma göre $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 2.4.3. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel(kompleks) değerli fonksiyonlar kümesi olmak üzere; $C[a,b]$ uzayı,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (cf)(t) = cf(t)$$

şeklinde tanımlı sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olsun. $f, g \in C[a,b]$ olmak üzere,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma göre $C[a,b]$ bir iç çarpım uzayıdır.

Önerme 2.4.4. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$(X, \langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in X$ için,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.4.5. $(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $x \in X$ olmak üzere bir x **vektörünün normu**,

$$\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2} \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bu tanım göz önünde bulundurulursa Cauchy-Schwarz eşitsizliği,

$$\sqrt{|\langle x,y \rangle|^2} \le \sqrt{\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle} \Rightarrow |\langle x,y \rangle| \le \langle x,x \rangle^{1/2} \langle y,y \rangle^{1/2}$$

$$|\langle x,y \rangle| \le \|x\|\|y\| \tag{2.4.2}$$

şeklinde de yazılabilir.

Önerme 2.4.6. $(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı üzerindeki (2.4.1) normu $\forall x,y \in X$ için,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \textbf{(Paralel kenar kuralı)}$$

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right\} \quad \textbf{(Kutupsal özdeşlik kuralı)}$$

eşitliklerini sağlar.

Paralel kenar özelliği, bir normlu uzayın iç çarpım uzayı olup (eşitlik sağlanırsa) olmadığını (eşitlik sağlanmazsa) gösterir.

Tanım 2.4.7. $(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x,y \in X$ için,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y \rangle^{1/2}$$

tanımıyla bu iç çarpım uzayı bir metrik uzaydır, yani her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır.

Teorem 2.4.8. $(X,\|\ .\ \|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in X$ vektörleri için Paralel kenar kuralını sağlamasıdır.

Teorem 2.4.9. Bir $(X,\langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı (2.4.1) normuna göre tam ise, başka bir deyişle $(X,\langle .,. \rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise bu iç çarpım uzayına **Hilbert Uzayı** denir.

Örnek 2.4.10. $\langle .,. \rangle : l_2 \times l_2 \to \mathbb{F}$ **,** $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü l_2 üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma göre l_2 iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı her Hilbert uzayı $\mathbb{F}$ üzerinde bir Banach uzayıdır; ancak bir Banach uzayının Hilbert uzayı olması gerekmez. Örneğin, l^{∞} uzayı bir Banach uzayı olduğu halde aynı metrik altında Hilbert uzayı değildir.

2.5. Normlu Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 2.5.1. $\left(X, \| \, . \, \|_X \right)$ normlu bir uzayda açık kümelerin bir ailesi $\wp = \left(D_j \right)_{j \in \Lambda}$ olsun. Eğer bir $E \subset X$ alt kümesi için $E \subset \bigcup_{j \in \Lambda} D_j$ oluyorsa $\wp$ ailesine E kümesinin bir **açık örtüsü** denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{j \in \Lambda_0} D_j$ ise $\wp_0 = \bigcup_{j \in \Lambda_0} D_j$ ailesine E kümesinin sonlu alt örtüsü adı verilir. E kümesini örten $\wp$ ailesinin her kümesinin çapı bir $\varepsilon > 0$ 'dan büyük değilse $\wp$ örtüsüne E kümesinin ε örtüsü denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.5.2. $\left(X, \| \, . \, \|_X \right)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X 'de **kompakt** bir küme adı verilir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X 'de kompakt bir küme ise E 'ye X 'de bir **ön-kompakt** küme denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $\left(X, \| \, . \, \|_X \right)$ normlu uzayına kompakt (ön-kompakt) normlu uzay adı verilir.

Ön-kompaktlık kavramı (kompaktlık kavramından farklı olarak), verilen kümenin hangi uzayda incelendiğine bağlıdır. Örneğin, $(0,1)$ açık aralığında yer alan tüm rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'de ön-kompakt olmasına rağmen $\mathbb{Q}$ 'da ön-kompakt değildir. Normlu uzaylarda kompaktlık ile ön-kompaktlık kavramları denktir.

Tanım 2.5.3. $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. E içindeki her dizinin E'de bir limit noktası varsa E kümesine X'de bir **dizisel kompakt küme** denir.

Teorem 2.5.4. (Heine-Borel teoremi)
$\mathbb{R}$'nin bir E alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Wang 2002).

Yukarıdaki teoremden "$\mathbb{R}$ içinde her kompakt küme $\mathbb{R}$ içinde kapalı ve sınırlıdır" sonucunu çıkarabiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}$'de bir kümenin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Fakat sonsuz boyutlu Banach uzaylarında kapalılık ve sınırlılık koşulu kompaktlık için gerekli olmasına rağmen yeterli bir koşul değildir.

Lemma 2.5.5. Bir $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ normlu uzay ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E kümesi X 'de kompakt ise bu küme X 'de dizisel kompakt bir kümedir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.5.6. $\left(X,\|\ .\ \|_X\right)$ normlu bir uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin.
Bu durumda;

$$B_r\left(x_0\right)=\left\{x \in X : \left\|x-x_0\right\|_X < r\right\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$\overline{B_r}\left(x_0\right)=\left\{x \in X : \left\|x-x_0\right\|_X \leq r\right\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **kapalı yuvar** ve

$$\sigma_r\left(x_0\right)=\left\{x \in X : \left\|x-x_0\right\|_X = r\right\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

Tanım 2.5.7. Bir $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ normlu uzay ve $E\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için E kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan ε-örtüsü varsa E kümesine X'de **tamamen sınırlı bir küme** adı verilir.

Teorem 2.5.8. Bir $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzay ve $E\subset X$ alt kümesi verilsin. E'nin X'de ön-kompakt olması için gerek ve yeter koşul E'nin X'de tamamen sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp 2000).

Yukarıdaki teoremden; kapalı bir kümenin tamamen sınırlı bir küme olması için gerek ve yeter koşul, bu kümenin kompakt bir küme olmasıdır. Böylece sonlu boyutlu uzaylarda doğru olan "kapalılık+sınırlılık=kompaktlık" özelliği yerine, "kapalılık+tamamen sınırlılık=kompaktlık" özelliğinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 2.5.9. Bir $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ normlu uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşul, bu uzayın kapalı $\left\{x\in X:\|x\|\le 1\right\}$ yuvarının kompakt olmasıdır [(Wang 2002), (Adams 1975)].

Teorem 2.5.10 $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayı ve tanım kümesi $E\subset X$ olan $f:E\to\mathbb{C}$ fonksiyoneli verilsin. f fonksiyonelinin E üzerinde **düzgün sürekli** olması için gerek ve yeterli koşul; $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta(\varepsilon)>0 \ni \forall x,y\in E$ için,

$$\|x-y\|_X<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$$

olmasıdır.

Teorem 2.5.11 u, $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayının kompakt E alt kümesinde sürekli reel bir fonksiyonel olsun. Bu durumda, u fonksiyoneli E üzerinde sınırlıdır ve bu küme üzerinde bir en küçük ve bir en büyük değere ulaşır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.5.12. $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E içindeki her sonsuz $\left(x_n\right)$ dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$'de **zayıf kompakt** (veya dizisel zayıf kompakt) küme adı verilir.

Teorem 2.5.13. $\left(X,\|\,.\,\|_X\right)$ Banach uzayının zayıf kompakt her kümesi sınırlıdır (Wang 2002).

2.6. Operatörler ve Gömmeler

Tanım 2.6.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve D_T, X'in bir alt kümesi olsun. $T : D_T \subset X \to Y$ dönüşümü D_T'nin her bir elemanını Y'nin bir elemanına karşılık getiriyorsa, T'ye D_T'den Y'ye bir **operatör** adı verilir ve D_T'ye T operatörünün tanım kümesi denir.

$$\left\{ y \in Y :\ y = Tx,\ x \in D_T \right\}$$

kümesine T operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir.

Tanım 2.6.2. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü, her $x, y \in D_T$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için,

$$T\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha T\left(x\right) + \beta T\left(y\right)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **lineer operatör** denir.

Tanım 2.6.3. $D_T \subset X$ ve $T : X \to Y$ operatör olmak üzere, her $x \in D_T$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{2.6.1}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa T operatörüne D_T üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D_T = X$ ise T operatörüne **sınırlıdır** denir.

(2.6.1) eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayılarının infimumuna $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörünün normu denir. Buna göre,

$$\|T\| = \inf\left\{c > 0 : \forall x \in D_T \text{ için } \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X\right\}$$

olur. Ayrıca (2.6.1) eşitsizliği $x \neq 0$ için

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$$

yazılabilir ki bu durum da c'nin en az sol taraftaki ifadenin $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremumu kadar olabileceğini gösterir. O halde (2.6.1) eşitsizliğinde mümkün olan en küçük c'nin söz konusu olduğu supremum değerine T operatörünün normu denir ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D_T \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

şeklinde gösterilebilir.

X'den Y'ye tanımlanan bütün sınırlı ve lineer operatörlerin oluşturduğu uzay $L(X,Y)$ şeklinde gösterilsin. Eğer Y bir Banach uzay ise $L(X,Y)$ uzayı da bir Banach uzaydır.

Tanım 2.6.4. $T : X \to Y$ operatör, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer $n \to \infty$ iken,

$$\|x_n - x_0\|_X \longrightarrow 0 \ \left(x_n \longrightarrow x_0\right) \text{ iken } \|T(x_n) - T(x_0)\|_Y \longrightarrow 0 \ \left(T(x_n) \longrightarrow T(x_0)\right)$$

oluyorsa T operatörüne x_0 noktasında **süreklidir** denir. Lineer operatörler için sınırlılık ve süreklilik kavramları denktir. Lineer olmayan operatörler için bu ifade geçerli değildir (Willem 1996).

Tanım 2.6.5. $T : X \to Y$ operatör, X'de $x_n \xrightarrow{z} x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer,

i) $n \to \infty$ iken Y'de $T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$ sağlanıyorsa T operatörüne x_0 noktasında **güçlü süreklidir**,

ii) $n \to \infty$ iken Y'de $T(x_n) \xrightarrow{z} T(x_0)$ sağlanıyorsa T operatörüne x_0 noktasında **zayıf süreklidir** denir.

Norma göre güçlü yakınsak olan bir T operatörü, aynı zamanda zayıf yakınsak olduğundan dolayı, eğer T operatörü güçlü sürekli ise aynı zamanda süreklidir. Bu yüzden güçlü süreklilik kavramı, süreklilikten daha güçlü bir kavramdır.

Teorem 2.6.6. X yansımalı bir Banach uzayı ve $T : X \to Y$ güçlü sürekli operatör ise T operatörü kompakttır (Willem 1996).

Tanım 2.6.7. $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \longrightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{2.6.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan yarı-süreklidir** denir. Eğer (2.6.2) eşitsizliği $x_n \xrightarrow{z} x_0$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan zayıf yarı-süreklidir** denir.

Tanım 2.6.8. $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \longrightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{2.6.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **üstten yarı-süreklidir** denir. Eğer (2.6.3) eşitsizliği $x_n \xrightarrow{z} x_0$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **üstten zayıf yarı-süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında (zayıf) sürekli ise, o zaman f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında (zayıf) alttan yarı-sürekli ve (zayıf) üstten yarı-sürekli olur.

Tanım 2.6.9. X ve Y iki Banach uzayı ve $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine dönüştürüyorsa, T'ye **kompakt lineer operatör** adı verilir. T kompakt lineer operatör ise aynı zamanda tamamen sürekli lineer operatör olur.

Tanım 2.6.10. X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer,

i) X, Y'nin bir alt uzayı,

ii) Her $x \in X$ için X'ten Y'ye $I(x) = x$ ile tanımlanan I birim operatörü

sürekli,

koşulları sağlanıyorsa X uzayı Y uzayına **gömülür** denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü doğrusal olduğundan (ii) koşulu her $x \in X$ için,

$$\|I(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığına denktir. Eğer, I birim operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına **kompakt gömülür** denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Adams 1975).

2.7. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.7.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x, x_0 \in \Omega$ elemanları için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε'a bağlı bir δ pozitif sayısı bulunabiliyorsa $u(x)$ fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında **süreklidir** denir.

Ω'da tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümeye de **sürekli fonksiyonlar uzayı** denir ve $C^0(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n ; f \text{ fonksiyonu sürekli}\}$$

olarak ta yazılabilir ve bu uzayda tanımlanan norm,

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$$

şeklindedir.

Tanım 2.7.2. X ve Y iki metrik uzay ve f fonksiyonu $f : X \to Y$ şeklinde tanımlı olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|_Y \leq M\left|x_1-x_2\right|_X^{\alpha}$$

olacak şekilde M (Lipschitz sabiti) ve α pozitif sayıları varsa, f fonksiyonu α. mertebeden Lipschitz koşulunu sağlar veya **Lipschitz-süreklidir** denir. Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu uzay ise $C^{0,\alpha}\left(X,Y\right)$ şeklinde gösterilir.

2.8. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.8.1. $\alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ negatif olmayan α_j 'lerin $n-$ bileşenlisi ise α 'ya **çoklu indis** denir ve x^{α}, $\left|\alpha\right|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ olarak tanımlanır, yani $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ olur. Buna göre $1\leq j\leq n$ için $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ ise, o zaman $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$ ifadesi $\left|\alpha\right|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Bu ifade,

$$D^{\alpha}u=\frac{\partial^{\left|\alpha\right|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca bir u fonksiyonunun **gradienti**,

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

şeklinde ve u fonksiyonunun **gradientinin normu**,

$$\left|\nabla u\right|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8.2. $\overline{G}$, $G\subset\mathbb{R}^n$ alt kümesinin kapanışıdır. $\mathbb{R}^n$ de bir Ω bölge için $\overline{G}\subset\Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ 'nin kompakt (kapalı ve sınırlı) bir alt kümesi ise $G\subset\subset\Omega$ şeklinde gösterilir. G 'de tanımlı bir u fonksiyonunun desteği,

$$\mathrm{supp}u=\overline{\left\{x\in G:u\left(x\right)\neq 0\right\}}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\text{supp}u \subset\subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω'da **kompakt desteğe** sahiptir denir (Adams, R. A. 1975).

Tanım 2.8.3. Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde, $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $C^m(\Omega)$ vektör uzayıdır.

$$C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$$

ve

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

olarak yazılabilir.

$C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına **test fonksiyonu** denir. Ω açık bir bölge olduğundan dolayı $C^m(\Omega)$ daki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir.

Tanım 2.8.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde $D^\alpha u$ kısmi türevlerinin sınırlı olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının belirttiği uzaya $C_B^m(\Omega)$ vektör uzayı adı verilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\alpha u(x) \right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.8.5. Eğer $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $0 \le |\alpha| \le m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha u$ sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonların belirttiği vektör uzayı $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ şeklinde gösterilir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı, $C_B^m\left(\Omega\right)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında tanımlanan norm,

$$\|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \left|D^{\alpha}u\left(x\right)\right|$$

ya da

$$\|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} + \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \left|D^{\alpha}u\left(x\right)\right|$$

şeklinde yazılır. Bu norm altında $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.8.6. X ve Y iki Banach uzayı ve $x \in X$ olsun. Eğer, $f : X \to Y$ şeklinde tanımlanan operatör her $h \in X$ için,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f\left(x+\lambda h\right)-f\left(x\right)}{\lambda} = Th$$

olacak şekilde bir $T \in L\left(X,Y\right)$ varsa, f 'e $x \in X$ **noktasında ve** h **yönünde Gateaux diferansiyellenebilirdir** denir. T operatörüne ise f 'in $x \in X$ noktasındaki **Gateaux türevi** adı verilir ve $f'\left(x\right) = T$ şeklinde gösterilir. Eğer bu durum her $x \in X$ için doğru ise f operatörü **Gateaux diferansiyellenebilirdir** denir (Schechter 2007).

Tanım 2.8.7. X bir Banach uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli X **'**de Gateaux diferansiyellenebiliyorsa ve bu Gateaux diferansiyeli sürekli ise f fonksiyonelinin diferansiyeli zayıf süreklidir denir (Duc ve Vu 2005).

2.9. Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylar

Çalışmak için en basit vektör uzaylar sonlu boyutlu olanlardır. Bu nedenle normlu uzaylarla çalışmak için doğal bir yer sonlu boyutlu normlu uzaylardır.

Aşağıdaki örnek bize her sonlu boyutlu uzayın bir norma sahip olduğunu gösterir fakat bu norm seçilen tabana bağlıdır. Bu her sonlu boyutlu uzay üzerinde birçok farklı normun olabileceğini bize söyler.

$\mathbb{F}^n$ göz önüne getirmek için belki de en kolay normlu uzay olduğundan, daha sonra normlu vektör uzayların yeni özellikleri tanıtıldığında ilk olarak $\mathbb{F}^n$ içinde (bunun sonlu boyutlu olduğu düşünülse bile) bunların ne ifade ettiğini görmeye çalışmak yararlı olabilir.

Şimdi,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} \qquad \textbf{(2.9.1)}$$

ele alalım ve (2.9.1) eşitliğindeki $\| \, . \, \|_2$ yi sonlu boyutlu vektör uzaylara genelleştirelim.

Örnek 2.9.1. X, $\mathbb{F}$ üzerinde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tabanlı, sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Her $x \in X$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ (tek türlü seçilebilen) olmak üzere $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ olarak yazılabilir. O zaman $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X$ için,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.9.2)}$$

ile tanımlı $\| \, . \, \|_2 : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir norm tanımlar.

Eğer X bir vektör uzayı ise ve $\| \, . \, \|$ ile $\| \, . \, \|_1$, X üzerinde denk iki norm ve $x \in X$ ise o zaman $\|x\| \neq \|x\|_1$ olabilir. Eğer X sonlu boyutlu bir uzay ise o zaman yukarıdaki örnekten X in en az bir norma sahip olduğunu biliyoruz. Şimdi, X üzerindeki diğer normların bu norma denk olduğunu göstereceğiz ve bu nedenle sonlu boyutlu normlu vektör uzayların birçok metrik uzay özelliklerini elde edeceğiz.

Teorem 2.9.2. X sonlu boyutlu bir vektör uzay ve $\| \, . \, \|$, X üzerinde bir norm olsun ve X için bir taban $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. X üzerinde başka bir norm

$$\|x\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlanmıştı. O zaman $\| \, . \, \|$ ve $\| \, . \, \|_2$ normları denktir.

İspat. $M = \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{1/2}$ olsun. O zaman $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, X için bir taban olduğundan $M > 0$ dır. Ayrıca,

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j e_j\| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \|e_j\|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{1/2}$$

$$= M \|x\|_2$$

olur. Şimdi,

$$f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|$$

ile tanımlı $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f fonksiyonu $\mathbb{F}^n$ üzerindeki standart metriğe göre süreklidir.

$$S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{F}^n : \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 = 1 \right\}$$

olsun. O zaman S kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır, bu nedenle $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in S$ vardır öyle ki her $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in S$ için,

$$m = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \leq f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

olur. $m = 0$ ise o zaman $\left\| \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\| = 0$ ve bu nedenle $\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j = 0$ bulunur ki bu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ nin X için bir taban oluşu ile çelişir. O halde $m > 0$ dır.

Ayrıca $\| \, . \, \|_2$ nin tanımından eğer $\|x\|_2 = 1$ ise o zaman $\|x\| \geq m$ dir. Bu nedenle eğer $y \in X - \{0\}$ ise $\left\| \dfrac{y}{\|y\|_2} \right\|_2 = 1$ olduğundan $\left\| \dfrac{y}{\|y\|_2} \right\| \geq m$ olmak zorundadır ve bundan dolayı,

$$\|y\| \geq m \|y\|_2 \qquad \textbf{(2.9.3)}$$

elde edilir. $y=0$ için de $\|y\| \geq m\|y\|_2$ eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak $\|\,.\,\|$ ve $\|\,.\,\|_2$ normları denktir.

Sonuç 2.9.3. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayı üzerinde iki norm $\|\,.\,\|$ ve $\|\,.\,\|'$ ise o zaman bu iki norm denktir.

Örnek 2.9.4. $[0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların vektör uzayını P ile gösterelim. P, $C_{\mathbb{F}}([0,1])$ nin lineer bir alt uzayı olduğundan $\|p\|_1 = \sup\{|p(x)| : x \in [0,1]\}$ normuna sahiptir ve P, $L^1[0,1]$ nin lineer bir alt uzayı olduğundan $\|p\|_2 = \int_0^1 |p(x)|\,dx$ normuna sahiptir. $\|\,.\,\|_1$ ve $\|\,.\,\|_2$ normları P üzerinde denk değildir.

Çözüm. $\|\,.\,\|_1$ ve $\|\,.\,\|_2$ normlarının P üzerinde denk olduklarını kabul edelim. O zaman her $p \in P$ için,

$$m\|p\|_1 \leq \|p\|_2 \leq M\,\|p\|_1$$

olacak biçimde $M, m > 0$ sayıları vardır. $m > 0$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < m$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ vardır. p_n polinomu,

$$p_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad p_n(x) = x^n$$

ile tanımlı olsun. O zaman,

$$\|p_n\|_1 = \sup\{|p_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1$$

olur ve p_n sürekli olduğundan p_n nin Riemann ve Lebesgue integralleri aynıdır, bu nedenle,

$$\|p_n\|_2 = \int_0^1 |p_n(x)|dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

çıkar. O halde,

$$m = m\|p_n\|_1 \leq \|p_n\|_2 = \frac{1}{n+1}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $\| \, . \, \|_1$ ve $\| \, . \, \|_2$ normları P üzerinde denk değildir.

Sonuç 2.9.3'ten sonlu boyutlu bir vektör uzay üzerinde bütün normların denk olduğunu biliyoruz, bu nedenle basitçe belirli bir normu göz önüne alarak herhangi bir normun indirgediği metriğin metrik uzay özelliklerini elde edebiliriz.

Önerme 2.9.5. X ,$\mathbb{F}$ üzerinde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tabanlı, sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. (2.9.2) ile tanımlı $\| \, . \, \|_2 : X \to \mathbb{R}$ normuna göre X bir tam metrik uzaydır.

İspat. (2.9.2)'nin $x \in X$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ olmak üzere $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X$ için,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

ile verildiğini hatırlayalım. $\{x_m\}$, X içinde bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bazı $\lambda_{j,m} \in \mathbb{F}$ için dizinin her bir elemanı,

$$x_m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,m} e_j$$

olarak yazılabilir. $\{x_m\}$ nin X içinde yakınsak olduğunu göstermek zorundayız.

Aşağıda vereceğimiz üç adım, tamlık ispatlarında standarttır.

1. aday bir x limiti bulunur;
2. x in, tam olup olmadığı araştırılan uzayın bir elemanı olduğu gösterilir;
3. $x_m \to x$ olduğu gösterilir.

$\{x_m\}$ Cauchy olduğundan $k, m \geq N$ olduğunda,

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 = \|x_k - x_m\|_2^2 \leq \varepsilon^2$$

olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $k, m \geq N$ ve $1 \leq j \leq n$ için,

$$|\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 \leq \varepsilon^2$$

bulunur. Bu nedenle $1 \leq j \leq n$ için $\{\lambda_{j,m}\}$, $\mathbb{F}$ içinde bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{F}$ tam olduğundan,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{j,m} = \lambda_j$$

olacak biçimde $\lambda_j \in \mathbb{F}$ vardır. Buradan $m \geq N_j$ olduğunda,

$$\left|\lambda_{j,m} - \lambda_j\right|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n}$$

olacak biçimde $N_j \in \mathbb{N}$ vardır. $N_0 = \max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ ve $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ olsun. O zaman $m \geq N_0$ olduğunda,

$$\|x_m - x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_{j,m} - \lambda_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

bulunur. Bu $\{x_m\}$ in x 'e yakınsadığını verir. Sonuç olarak X tamdır.

Sonuç 2.9.6. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayı üzerinde herhangi bir norm $\|\cdot\|$ ise o zaman X bir tam metrik uzaydır.

İspat. X için bir taban $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. X üzerinde başka bir norm (2.9.1) ile tanımlı $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}$ normu olsun. Sonuç 1. den $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_2$ normları denktir ve Önerme 2.9.5'den $\|\cdot\|_2$ normu ile X tamdır. O halde X ayrıca $\|\cdot\|$ ile de tamdır.

Sonuç 2.9.7. X bir normlu vektör uzay ve Y, X in sonlu boyutlu bir alt uzayı ise o zaman Y kapalıdır.

İspat. Y 'nin kendisi de normlu bir vektör uzayıdır ve bu nedenle Sonuç 2.9.6'dan Y bir tam metrik uzaydır. Sonuç olarak bir X metrik uzayının herhangi bir tam alt uzayı kapalı olduğundan Y kapalıdır.

Bu sonuçlar bütün sonlu boyutlu normlu uzayların metrik uzayların özelliklerinin $\mathbb{F}^n$ 'ninkilere benzer olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte bir sonlu boyutlu uzay üzerindeki her bir norm farklı normlu uzay özelliklerini verir.

2.10. Lebesgue Ölçümü ve Lebesgue Uzayı

Tanım 2.10.1. $\Re$, $\mathbb{R}^n$ 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\Re$ ailesi

i) $\mathbb{R}^n \in \Re$

ii) Eğer $A \in \Re$ ise $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\} \in \Re$

iii) Eğer $j = 1, 2, ...$ için $A_n \in \Re$ ise $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Re$

sağlıyorsa $\Re$ ailesine $\mathbb{R}^n$ üzerinde σ**-cebir** denir.

Tanım 2.10.2. $\Re$, $\mathbb{R}^n$ 'in alt kümelerinin bir ailesi ve $\mu : \Re \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer μ fonksiyonu, $\Re$ ailesindeki ayrık kümelerin bir $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ ailesinin sayılabilir her bileşimi için,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad , \quad \forall A_j \cap A_k = \varnothing \ , j \neq k$$

eşitliği sağlanıyorsa μ fonksiyonuna $\Re$ üzerinde bir **ölçüm** denir.

Teorem 2.10.3. $\mathbb{R}^n$ 'in alt kümelerinin $\Re$ ailesi $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir σ-cebir ve $\Re$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir μ ölçümü vardır.

i) $\mathbb{R}^n$ 'de her açık küme $\Re$ 'ye aittir.

ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Re$ ve $\mu(B) = 0$ ise o zaman $A \in \Re$ ve $\mu(A) = 0$ olur.

iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_j \leq x_j \leq b_j \ , j = 1, 2, ..., n\}$ ise o zaman $A \in \Re$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) .$$

iv) μ ötelemeye göre değişmeyen, yani; eğer $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Re$ ise

$$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Re \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A) .$$

Bu özelliklere sahip bir $\Re$ ailesinin elemanlarına $\mathbb{R}^n$ 'in **Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri**; μ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ 'in **Lebesgue ölçümü** ve herhangi bir $A \in \Re$ için $\mu(A)$ ifaedesine A **'nın ölçümü** denir (Adams 1975).

Tanım 2.10.4. Eğer $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mu(B) = 0$ ise bu durumda $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde **hemen hemen her yerde** $(h.h.h.)$ sağlanan bir özellik adını alır.

Tanım 2.10.5. Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesindeki değerleri alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $k \in \mathbb{R}$ için,

$$\{x : f(x) > k\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Ω, $\mathbb{R}^n$ 'in ölçülebilir bir alt kümesi, $|\Omega| > 0$ ve

$$S(\Omega) = \{u \in \Omega : \ u, \ \Omega \text{ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi}\}$$

olsun. Ayrıca $S(\Omega)$ kümesinin elemanlarını hemen hemen her yerde $(h.h.h.)$ eşit fonksiyonların bir elemanı olarak kabul edelim.

Tanım 2.10.6. Ω**,** $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \ < \ \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir.

$L^p(\Omega)$ uzayı,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \ \int_\Omega |u(x)|^p \ < \infty \ , \ 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olur. Ayrıca $u, v \in L^p(\Omega)$ için

$$\left|u(x)+v(x)\right|^{p} \leq \left(\left|u(x)\right|+\left|v(x)\right|\right)^{p} \leq 2^{p}\left(\left|u(x)\right|^{p}+\left|v(x)\right|^{p}\right)$$

olduğundan $u+v \in L^{p}(\Omega)$ yazılabilir. Bu durumda, $L^{p}(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olur.

$L^{p}(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{L^{p}(\Omega)} := |u|_{p} = \left(\int_{\Omega}\left|u(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad , 1 \leq p < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.10.7. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $\left|u(x)\right| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sabit sayısı varsa u fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Bu eşitsizliği sağlayan $K \geq 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına da $|u|$'nun Ω bölgesindeki **esas** (essential) **supremumu** denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}\left|u(x)\right|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L^{\infty}(\Omega)$ ile gösterilir. $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} := |u|_{\infty} = ess\sup_{x\in\Omega}\left|u(x)\right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.10.8. $L^{p}(\Omega)$ uzayında $p=2$ olarak aldığımızda $L^{2}(\Omega)$ uzayı oluşur. Bu uzay,

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

iç çarpımı altında Hilbert uzay olur.

Tanım 2.10.9. $1<p<\infty$ iken $1<p'<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ veya $p'=\frac{p}{1-p}$ sayısına p'nin eşleniği denir. Bu durumda, $1<p<\infty$ ve $\phi(u) \in \left(L^{p}(\Omega)\right)'$ alınırsa, her $u \in L^{p}(\Omega)$ için $\phi(u)=\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Ayrıca

$$|v|_{L^{p'}(\Omega)} = |\phi|_{\left(L^{p}(\Omega)\right)'}$$

olduğundan $L^{p'}(\Omega) \cong \left(L^{p}(\Omega)\right)'$ yazılır. Dolayısıyla elemanları çok farklı olmasına rağmen, Banach uzay olmaları açısından bu iki uzay aynı kabul edilebilir.

Teorem 2.10.10. $|\Omega| = \int_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \le p \le q \le \infty$ olsun. Eğer $u \in L^{q}(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^{p}(\Omega)$ olur ve

$$|u|_{p} \le |\Omega|_{q}^{(1/p)-(1/q)} |u|_{q}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla,

$$L^{q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır.

Teorem 2.10.11. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $L^{p}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_{0}(\Omega)$ ile $C_{0}^{\infty}(\Omega)$ uzayları $L^{p}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Adams, R. A. 1975).

Teorem 2.10.12. Eğer $1 < p < \infty$ ise $L^{p}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır (Adams 1975).

2.11. Sobolev Uzayı

Tanım 2.11.1. Ω, $\mathbb{R}^{n}$ 'de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonların uzayına $L_{loc}^{p}(\Omega)$ uzayı adı verilir. Bu uzay $p = 1$ için $L_{loc}^{1}(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir.

Tanım 2.11.2. $u \in L_{loc}^{1}(\Omega)$ ve α -çoklu indisi verilsin. Eğer, her $\varphi \in C_{0}^{\Omega}(\Omega)$ için,

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. **zayıf türevi** denir. Bu durumda v fonksiyonuna, u fonksiyonunun **genelleşmiş türevi** denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.11.3. Ω**,** $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le m \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **Sobolev Uzayı** denir. Bu uzayda tanımlanan norm;

$1 \le p \le \infty$ için,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left| D^\alpha u \right|_p^p \right)^{1/p} \quad ;\ 1 \le p < \infty\ ,$$

ve $p = \infty$ için,

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \left| D^\alpha u \right|_\infty \quad ; p = \infty$$

olur.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayı normları ile bir Banach uzaydır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı olur.

Uzayların tanımlarının bir sonucu olarak, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Ayrıca, $1 \le p < \infty$ iken $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan dolayı $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, bu uzaylar arasında negatif olmayan herhangi m tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır.

Teorem 2.11.4. (Sobolev Eşitsizliği)

Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \le p < \infty$ ise, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise bu durumda $p^* = \dfrac{Np}{N - mp}$ olmak üzere,

$$|u|_{p^*} \le C \|u\|_{m,p}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C(n, m, p)$ sabiti vardır (Harjulehto ve Hästö 2008).

Not 2.11.5. $p = 2$ iken,

$$W^{2,p}(\Omega) = H^m(\Omega) \ , \ W_0^{2,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

olur. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} |D^\alpha u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde verilir. $H^m(\Omega)$ uzayı,

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı oluşturur.

Teorem 2.11.6. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları ayrılabilirdir (Adams 1975).

Teorem 2.11.7. Eğer $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları yansımalı ve düzgün konvekstir [(Adams 1975), (Willem 1996)].

Tanım 2.11.8. $\mathbb{R}^n$ 'de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{ x + \lambda (z - x) : \ z \in B_{r_2}(y), \ \lambda > 0 \}$$

kümesine, tepe noktası x olan bir **sonlu koni** adı verilir. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde ediliyorsa bu durumda Ω bölgesinin **koni özelliği vardır** denir.

Teorem 2.11.9. (Sobolev Gömme Teoremi)

Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömmeler yazılabilir. Eğer;

i) $mp < N$ ise,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad , \quad p \leq q \leq q^+ = \frac{Np}{N-mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad , \quad p \leq q \leq q^+ = \frac{Np}{N-mp}$$

elde edilir.

ii) $mp = N$ ise,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad , \quad p \leq q < \infty$$

olur. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp > N$ ise,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir (Adams 1975, 2003).

3. STANDART VE STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNDE KULLANILAN TEOREMLER VE YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde, standart ve standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için kullanılan teoremler ve yaklaşımlar hakkında bilgi verilecektir.

Üzerinde çalıştığımız Lebesgue-Sobolev uzayları yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olduklarından dolayı, bu bölümde X Banach uzayı denildiğinde yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olarak kabul edilecektir. Bu X uzayının dual uzayı X' şeklinde gösterilecektir.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ sınıfında bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her $v \in X$ için,

$$\langle J'(u), v \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan her bir $u \in X$ elemanına J fonksiyonelinin **kritik noktası** denir.

Tanım 3.1.2. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer her $u \in X$ elemanı için,

$$|J(u)| \leq c$$

olacak şekilde pozitif bir $c \in \mathbb{R}$ varsa J fonksiyoneline **sınırlıdır** veya **iyi tanımlıdır** denir.

Tanım 3.1.3. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer her $u \in X$ elemanı için,

$$J(v) \leq J(u)$$

olacak şekilde bir $v \in X$ varsa, bu v fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir **minimumu** veya **minimize edici** denir ve

$$\inf_{u\in X} J(u) = J(v)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.1.4. X bir Banach uzay ve $J : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her bir $(u_n) \subset X$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in X} J(u)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu (u_n) dizisine J fonksiyonelinin **minimize dizisi** denir.

Tanım 3.1.5. X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ için $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$-div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

kısmi differansiyel denklemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen,

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx\ , \quad \forall u \in X$$

$J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneline **Euler-Lagrange fonksiyoneli** (enerji fonksiyoneli) denir. Bu J enerji fonksiyonelinin türevi,

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx\ ,$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, her bir $v \in C_0^\infty$ için,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx = 0$$

eşitliği sağlanırsa, bu durumda her $u \in X$ elemanına (3.1.1) denkleminin **zayıf çözümü** denir. Bir denklemin zayıf çözümleri aynı zamanda denklemin kritik noktalarıdır.

Tanım 3.1.6. X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer her $x \in \Omega$ ve $|t| \geq M$ $(\exists M > 0)$ $t \in \mathbb{R}$ için,

$$0 < \theta F(x,t) < t\, f(x,t)$$

olacak şekilde en az bir tane $\theta > p^+$ sayısı varsa, o zaman f fonksiyonu **Ambrosetti-Rabinovitz koşulunu (AR)** sağlar denir. $\theta > p^+$ eşitsizliğindeki p^+ esnek olan kısımdır.

Ambrosetti-Rabinovitz koşulu sınırlı bir dizi bulmak için f fonksiyonuna bırakılan önemli koşullardan biridir.

Tanım 3.1.7. Yukarıda tanımladığımız (3.1.1) denkleminin,

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx$$

kısmı ve bu kısmın türevi,

$$\left\langle I'(u), v \right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

aşağıdaki koşulları sağlar.

i) $I(u)$ convex fonksiyonel,

ii) $I' : X \to X'$ fonksiyoneli sürekli, sınırlı ve kesin monotondur.

iii) $I' : X \to X'$ fonksiyoneli (S_+) tipindendir: eğer $(u_n) \subset X$ dizisi için X uzayında $u_n \xrightarrow{z} u$ iken,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \right\rangle \leq 0$$

oluyorsa o zaman X uzayında

$$u_n \longrightarrow u$$

olur,

iv) $I' : X \to X'$ fonksiyoneli bir hemeomorfizmdir.

Tanım 3.1.8. X bir Banach uzay $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer f fonksiyoneli,

i) Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $\xi \to f(x,\xi)$ fonksiyoneli sürekli,

ii) Her $\xi \in \mathbb{R}$ için $x \to f(x,\xi)$ fonksiyoneli Ω 'da ölçülebilir,

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyoneli **Carathéodory koşulunu** sağlar denir.

Tanım 3.1.9. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer $u \in X$ için,

$$\|u\| \to \infty \text{ iken } J(u) \to \infty$$

koşulu sağlanıyorsa J fonksiyoneli X üzerinde **Coersive** fonksiyoneldir denir.

3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Tanım 3.2.1. X bir Banach uzay ve $T : X \to X^*$ tanımlı bir operatör olarak verilsin. Eğer,

$$T(\ .\ ) = J'(\ .\ )$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyonel bulunabiliyorsa T operatörüne **varyasyonel operatör** adı verilir.

Eğer bir problem,

$$T(\ .\ ) = 0$$

şeklinde bir fonksiyonel denklem olarak yazılabiliyorsa bu probleme **varyasyonel problem** adı verilir. Bu durumda $T(u) = 0$ denklemini sağlayan u fonksiyonları aynı zamanda $J'(u) = 0$ enerji fonksiyonelini de sağlar. Dolayısıyla, $J(u)$ enerji fonksiyonelini sağlayan u kritik noktaları aynı zamanda $T(u) = 0$ probleminin de zayıf çözümleri olur. Yani, $J'(u) = 0$ enerji fonksiyonelini minimize eden bir minimum fonksiyonunu bulmak, varyasyonel yaklaşımın temel amacıdır. Daha açık söylemek gerekirse;

X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J : X \to \mathbb{R}$ olarak tanımlayalım. Varyasyonel yaklaşım, verilen bir $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümlerini $(\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2))$ $(\Omega$ sınırlı bir bölge$)$ bulmak için $F(x, u(x), \nabla u(x))$ karşılık gelen ve

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

şeklinde tanımlanan $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları (veya kritik noktaları) olan $u = u(x)$ fonksiyonlarını bulmak olarak ifade edilebilir. Çünkü $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları, $F(x, u(x), \nabla u(x))$ differansiyel denkleminin çözümleridir. $J(u)$ enerji fonksiyonelinin kritik noktalara sahip olması için gerekli koşul $J(u)$ karşılık gelen Euler-Lagrange denklemini sağlaması, yani;

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla u)}\right) = 0$$

olmasıdır.

3.3. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler

Çalışmamızın bu kısmında varyasyonel yaklaşımda kullanılan temel teoremler ve bu teoremlerin kullanıldığı belli başlı çalışmalar verilecektir.

Teorem 3.3.1. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) J fonksiyoneli X üzerinde coersive

ii) J fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli

koşullarını sağlıyorsa, o zaman $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Not 3.3.2. J fonksiyoneli coersive ve alttan yarı sürekli koşulunu sağladığı zaman bir minimum noktaya sahip olur.

Tanım 3.3.3. (Palais-Smale Dizisi) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer, herhangi $(u_n) \subset X$ dizisi için;

i) $|J(u_n)| \leq c$, $c \in \mathbb{R}$

ii) X' uzayında $n \to \infty$ için $J'(u_n) \to 0$

koşulları sağlanıyorsa, o zaman (u_n) dizisine J fonksiyonelinin bir **Palais-Smale dizisi** denir.

Not 3.3.4. Palais-Smale dizisi J fonksiyonelini minimize eden bir dizidir. Ancak, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneli alttan sınırlı değilse, o zaman J fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi hakkında kesin bir şey söylenemez.

Teorem 3.3.5. (Palais-Smale Koşulu) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer J 'nin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip ise o zaman J enerji fonksiyoneli **Palais-Smale Koşulu**na sahiptir denir.

J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale koşuluna sahip olduğunu gösterebilmek için öncelikle (u_n) dizisinin X uzayında sınırlı olduğu gösterilecek. Sınırlılığın gösterilmesi durumunda (u_n) dizisinin X uzayında zayıf yakınsak olduğu gösterilmiş olur. Çünkü, X yansımalı Banach uzay olduğundan X 'deki her sınırlı dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur. Daha sonra (u_n) dizisinin X uzayında güçlü yakınsak olup olmadığı gösterilecek. Bunun için de kompakt gömme teoremlerinden yararlanılacaktır. Böylece J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale koşulunu sağlar ve alttan sınırlı olursa o zaman bu Palais-Smale dizisi J enerji fonksiyonelini minimize eder. Ayrıca dizinin güçlü yakınsadığı değer, fonksiyonelin bir kritik noktası ve denklemin de çözümü olur. Ancak Palais-Smale koşulunu sağlamazsa bu ifade yanlış olur.

Not 3.3.6. Palais-Smale koşulu ve coersive'lik özelliği J fonksiyonelinin infimumunun (yani kritik noktasının/çözümünün) X uzayında olduğunun ispatı için yeterli koşullardır.

Teorem 3.3.7. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) X üzerinde alttan sınırlı

ii) (PS) koşulunu sağlıyor

ise bu durumda o zaman $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Teorem 3.3.8. X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli,

i) X üzerinde alttan sınırlı

ii) X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli

iii) X üzerinde coersive

koşullarını sağlıyorsa o zaman $J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Tanım 3.3.9. (Cerami Koşulu) X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer J fonksiyoneli, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için,

i) $|J(u_n)| \leq c$

ii) $n \to +\infty$ iken $\left(1+\|u_n\|_X\right)|J'(u_n)| \to 0$

koşullarını sağlayan yakınsak bir alt diziye sahip ise, o zaman J fonksiyoneli Cerami koşuluna (C) sahiptir denir. Buradaki (u_n) dizisine Cerami dizisi adı verilir [(Willem 1996), (Zang 2008)].

Teorem 3.3.10. (Mountain Pass Geometrisi) X bir Banach uzay, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $J(0)=0$ şartını sağlasın. Varsayalım ki J fonksiyoneli;

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0$$

olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır.

ii) $J(v) < 0$ (veya $t \to \infty$ iken $J(tv) < -\infty$)

olacak şekilde $\|v\|_X > \rho$ koşulunu sağlayan bir $v \in X$ fonksiyonu vardır.

şeklindeki geometrik koşulları sağlasın. Bu durumda J fonksiyoneli, X uzayında sıfırdan farklı en az bir kritik noktaya sahiptir [(Napoli ve Mariani 2003), (Vu 2005)].

Not 3.3.11. J fonksiyonelinin coersive'lik özelliği yerine Mountain Pass Geometrisi olarak bilinen teorem de kullanılabilir. Eğer J fonksiyoneli, Palais-Smale koşulunu ve Mountain Pass Geometrisini sağlarsa o zaman bu fonksiyonel en az bir kritik noktaya sahip olur. Bu kritik nokta denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.12. (Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi) X bir Banach uzay, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $J(0)=0$ şartını sağlasın. Varsayalım ki;

i) $\|u\|_X > \rho$ iken $J(u) \leq J(0)$,

ii) $\alpha = \inf\{J(u) : u \in X,\ \|u\| = \rho\} > 0$,

olacak şekilde bir ρ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun. Ayrıca $G \neq \emptyset$ olacak şekilde

$$G = \{\varphi \in C([0,1], X) : \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf\{\max J(\varphi([0,1])) : \varphi \in G\}$$

kümeleri verilsin.

Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ olmak üzere; β, J'nin kritik noktasıdır.

Şimdi de bazı çalışmalardan örnekler sunalım.

Mihailescu ve Radulescu (2006),

$$\begin{cases} div\left(a\left(x,\nabla u\right)\right)=\lambda\left(u^{\gamma-1}-u^{\beta-1}\right) \ , & x\in\Omega \\ u\left(x\right)=0 \ , & x\in\partial\Omega \\ u\left(x\right)\geq 0 \ , & x\in\Omega \end{cases}$$

şeklindeki dejenere sınır koşullarına sahip standart olmayan büyüme koşullu denklemi incelemişlerdir. Burada; $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ($N\geq 3$) sınırlı bir bölge, $\lambda>0$, her $x\in\overline{\Omega}$ için $1<\beta<\gamma<\inf_{x\in\Omega} p\left(x\right)$ ve $p\left(x\right)>1$ olarak alınmaktadır. Bu çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini ve Genelleştirilmiş Mountain Pass teoremi kullanılarak, denklemin Sublineer durumu incelenerek, denklemin sıfırdan farklı en az iki tane zayıf çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Fan ve Zhang (2003),

$$\begin{cases} div\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right)=f\left(x,u\right) \ , & x\in\Omega \\ u\left(x\right)=0 \ , & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

Şeklindeki $p\left(x\right)$-Laplace operatörünü içeren, standart olmayan büyüme koşullu ve Dirichlet sınır koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemi ele almışlardır. Burada; $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $\Delta_{p(x)}u=div\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right)$, her $x\in\overline{\Omega}$ için $p\left(x\right)>1$, $p\left(x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathédory koşulu ve Ambrosetti-Rabinovitz koşulu) sağlayan bir fonksiyon olarak alınmaktadır. Bu çalışmada varyasyonel yaklaşımla, Ambrosetti-Rabinovitz koşulu altında Fountain teoremi kullanılarak, denklemin Sublineer durumu incelenerek, denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu gösterilmiştir.

Yao (2006),

$$\begin{cases} -div\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right)+\left|u\right|^{p(x)-2}u=\lambda f\left(x,u\right) \ , & x\in\Omega \\ \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial v}=\mu g\left(x,u\right) \ , & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklinde standart olmayan büyüme koşullu ve Neumann sınır koşullarına sahip lineer olmayan denklemi ele almıştır. . Burada; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, f ve g bazı özel koşulları (büyüme koşulu ve Carathédory koşulu) sağlayan fonksiyonlar ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla denklemin Sublineer durumu incelenmiş, Mountain Pass Geometrisi kullanılarak denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Dai ve Hao (2009),

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) div\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x,u) \ , \ x \in \Omega \\ u = 0 \ , \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip Kirchoff problemini incelemişler. Denklemde; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < p^- \leq p^+ < N$, $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu ve Carathédory koşulu) sağlayan lineer olmayan bir fonksiyon ve $M(t)$ sürekli bir fonksiyon olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu gösterilmiştir.

4. DİSKRET $p(k)$-LAPLACIAN OPERATÖRÜNÜ İÇEREN BİR DIRICHLET PROBLEMİ İÇİN ZAYIF ÇÖZÜMLER

4.1. Giriş

Bu kısımda,

$$\begin{cases} -\Delta\left(\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\right)+\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}u(k-1)=\lambda f\left(k,u(k)\right) ,k\in\mathbb{Z}[1,T] \\ u(0)=u(T+1)=0 \end{cases} \quad \textbf{(P)}$$

şeklindeki diskret sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı ve çokluğu Ricceri üç kritik nokta teoremi ile varyasyonel metot kullanılarak incelenmiştir.

Öncelikle **(P)** problemini incelemek için gerekli olan,

$$W=\left\{u \mid u:\mathbb{Z}[0,1+T]\to\mathbb{R} \text{ , } u(0)=u(T+1)=0\right\}$$

fonksiyon uzayını tanımlayalım. Bu durumda W uzayı,

$$\langle u,v\rangle=\sum_{k=1}^{T+1}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1) \text{ , } \forall u,v\in W$$

iç çarpımı ile T-boyutlu bir Hilbert uzayı olur (Agarwal ve ark. 2004).

Bu uzayda tanımlanan norm,

$$\|u\|=\left(\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{2}\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan W üzerinde,

$$|u|_m = \left(\sum_{k=1}^{T} |u(k)|^m \right)^{1/m}, \quad \forall u \in W \text{ ve } m \geq 2$$

normu tanımlanabilir ve bu norm yardımıyla,

$$T^{(2-m)/2m} |u|_2 \leq |u|_m \leq T^{1/m} |u|_2, \quad \forall u \in W \text{ ve } m \geq 2 \qquad \textbf{(4.1)}$$

eşitsizliği yazılır (Cai ve Yu, 2006).

Açıklama 4.1.1. Her $u \in W$ ve $k \in [1,T]$ için $u(j) = \max |u(k)|$ olacak şekilde $j \in [1,T]$ vardır. Dolayısıyla, $u(0) = u(T+1) = 0$ eşitliği dikkate alınarak,

$$u(j) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{T+1} |u(k) - u(k-1)|$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikte ayrık Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\max_{k \in [1,T]} |u(k)| \leq \frac{\sqrt{T+1}}{2} \|u\|$$

yazılır.

Lemma 4.1.2. (Mihailescu ve ark. 2009)

a) $\forall u \in W$ ve $\|u\| > 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} \geq C_1 \|u\|^{p^-} - C_2$$

olacak şekilde iki pozitif C_1 ve C_2 sabitleri vardır.

b) $\forall u \in W$ ve $\|u\| < 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} \geq C_3 \|u\|^{p^+}$$

olacak şekilde pozitif bir C_3 sabiti vardır.

c) $\forall u \in W$ ve herhangi bir $m \geq 2$ için,

$$\sum_{k=1}^{T} \left| u(k) \right|^m \leq C_m \sum_{k=1}^{T+1} \left| \Delta u(k-1) \right|^m$$

olacak şekilde pozitif bir C_m sabiti vardır.

Teorem 4.1.3. (Bonanno ve Candito 2009) X ayrılabilir ve yansımalı bir reel Banach uzayı, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ sürekli Gateaux diferansiyellenebilir ve Gateaux türevleri X' dual uzayı üzerinde sürekli olan, dizisel zayıf alttan yarı sürekli bir fonksiyonel; $\Psi : X \to \mathbb{R}$ de Gateaux türevi kompakt olan sürekli Gateaux differansiyellenebilir bir fonksiyonel olsun. Kabul edelim ki $\lambda > 0$ için,

(i) Bütün $\lambda > 0$ değerleri için, $\lim_{\|u\| \to \infty} J_\lambda(u) = \lim_{\|u\| \to \infty} (\Phi(u) + \lambda \Psi(u)) = \infty$

(ii) $\Phi(u_0) < r < \Phi(u_1)$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ ve $u_0, u_1 \in X$ vardır.

(iii) $\inf_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r])} \Psi(u) > \dfrac{(\Phi(u_1) - r)\Psi(u_0) + (r - \Phi(u_0))\Psi(u_1)}{\Phi(u_1) - \Psi(u_1)}$

olsun.

Bu durumda $\Lambda \subset (0, \infty)$ bir açık aralık ve her bir $\lambda \in \Lambda$ için X uzayında,

$$\Phi'(u) + \lambda \psi'(u) = 0$$

denkleminin normları ρ'dan daha küçük en az üç çözüme sahip olacak şekilde pozitif bir ρ reel sayısı vardır.

4.2. Temel Sonuçlar

Herhangi bir $\lambda > 0$ için, **(P)** problemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $J_\lambda : W \to R$,

$$J_\lambda(u)=\sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}+\frac{1}{p(k-1)}\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)}\right)$$
$$-\lambda\left[\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{q(k)}\left|u(k)\right|^{q(k)}-\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{s(k)}\left|u(k)\right|^{s(k)}\right]$$

şeklinde tanımlıdır. Bu fonksiyoneli,

$$\Phi(u)=\sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}+\frac{1}{p(k-1)}\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)}\right)$$

ve

$$\Psi(u)=-\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{q(k)}\left|u(k)\right|^{q(k)}+\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{s(k)}\left|u(k)\right|^{s(k)}$$

olarak yazalım.

Herhangi $u,v\in W$ için $J_\lambda\in C^1(W,R)$ ve J_λ'nın türevi,

$$\left\langle J'(u),v\right\rangle=\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1)+\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}u(k-1)v(k-1)$$
$$-\lambda\left[\sum_{k=1}^{T}\left|u(k)\right|^{q(k)-2}u(k)v(k)-\sum_{k=1}^{T}\left|u(k)\right|^{s(k)-2}u(k)v(k)\right]$$

şeklindedir.

Tanım 4.2.1. Eğer $\varphi\in W$ için,

$$\sum_{k=1}^{T+1}\left(\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta\varphi(k-1)+\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}u(k-1)\varphi(k-1)\right)$$

$$= \lambda \left[\sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{q(k)-2} u(k)\varphi(k) - \sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{s(k)-2} u(k)\varphi(k) \right]$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $u \in W$, **(P)** probleminin bir zayıf çözümüdür deriz. Dolayısıyla J'nin kritik noktalarının **(P)** problemi için zayıf çözümleri olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.2.2. Kabul edelim ki; $p^- > q^+$ olacak şekilde $p : \mathbb{Z}[1,T] \to [2,\infty)$ ve $q, s : \mathbb{Z}[1,T] \to [2,\infty)$ fonksiyonları sınırlı olsunlar. Bu durumda herhangi $\lambda \in \Lambda$ için **(P)** problemi, normları ρ'dan daha küçük olan en az üç zayıf çözümü olacak şekilde $\Lambda \subset (0,\infty)$ açık aralığı ve $\rho > 0$ sabiti vardır.

İspat. İlk olarak, $\forall k \in \mathbb{Z}[1,T]$ ve $u \in W$ için,

$$|u(k)|^{q(k)} \le |u(k)|^{q^+} + |u(k)|^{q^-}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{q(k)} \le \sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{q^+} + \sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{q^-}$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizliği kullanarak,

$$J_\lambda(u)=\sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}+\frac{1}{p(k-1)}\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)}\right)$$
$$-\lambda\left[\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{q(k)}\left|u(k)\right|^{q(k)}-\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{s(k)}\left|u(k)\right|^{s(k)}\right]$$
$$\geq\frac{1}{p^+}\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}-\frac{\lambda}{q^-}\left(|u|_{q^-}^{q^-}+|u|_{q^+}^{q+}\right) \qquad \textbf{(4.2)}$$

ifadesini yazabiliriz.

Şimdi $u\in W$ için $\|u\|>1$ durumunu inceleyeceğiz. Bu halde herhangi $k\in\mathbb{Z}[0,1+T]$ için $|u(k)|<1$ olur. Lemma 4.1.2 (c) ve (4.1) bağıntısını kullanarak,

$$|u|_{q^-}^{q^-}+|u|_{q^+}^{q^+}\leq c_{q^-}\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{q^-}+c_{q^+}\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{q^+}$$
$$\leq Tc_{q^-}\|u\|^{q^-}+Tc_{q^+}\|u\|^{q^+} \qquad \textbf{(4.3)}$$

eşitsizliği bulunur.

(4.2) eşitsizliğinde (4.3) eşitsizliği ve $\|u\|>1$ durumu için Lemma 4.1.2 (a) kullanılırsa,

$$J_\lambda(u)\geq\frac{C_1}{p^+}\|u\|^{p^-}-\frac{C_2}{p^+}-\frac{\lambda}{q^-}\left(c_{q^-}T\|u\|^{q^-}+c_{q^+}T\|u\|^{q^+}\right)\quad ;\, u\in W$$

eşitsizliği elde edilir.

$p^->q^+$ olduğundan, $\lim_{\|u\|\to\infty}\left(\Phi(u)+\lambda\Psi(u)\right)=\infty$ çıkar ve dolayısıyla Teorem 4.1.3'deki **(i) ifadesi gösterilmiş olur**.

Şimdi de Teorem 4.1.3'deki (ii) ve (iii) ifadelerini gösterelim. Bunun için $H: W \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$H(k,t) = \frac{1}{q(k)}|t|^{q(k)} - \frac{1}{s(k)}|t|^{s(k)} \quad , \ \forall k \in W \text{ ve } t \in [0,\infty)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

Açıktır ki; H fonksiyonu t'ye göre C^1 sınıfında, $k \in W$'ye göre düzgün ve $\forall k \in W$ ve $t \in [0,\infty)$ için,

$$H_t(k,t) = |t|^{q(k)-1} - |t|^{s(k)-1} = |t|^{s(k)-1}\left(|t|^{q(k)-s(k)} - 1\right)$$

olur.

Böylece tüm $t \geq 1$ ve tüm $k \in W$ için $H_t(k,t) \geq 0$; tüm $t \leq 1$ ve tüm $k \in W$ için $H_t(k,t) \leq 0$ olur. Bu durumda $t \in (1,\infty)$ için $H(k,t)$ artan ve $t \in (0,1)$ için azalandır. Ayrıca, $k \in W$'ye göre düzgün olan $H(k,t)$ fonksiyonu için $\lim_{t\to\infty} H(k,t) = \infty$ olur.

Yukarıdaki bilgilerden $\tau \in (0,1)$, $t > \delta$ ve $\forall k \in W$ için,

$$H(k,t) \geq 0 = H(k,0) \geq H(k,\tau) \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $\delta > 1$ sayısını elde edebiliriz.

$0 < a < \min\left\{1, \frac{\sqrt{T+1}}{2}\right\}$ ve $b > \delta$ olacak şekilde a ve b reel sayılarını alalım. Bu durumda b sayısının $b^{p^-}(T+1) > 1$ özelliğini sağladığı açıktır. Bu halde (4.4) bağıntısı,

$$\sum_{k=1}^{T} \sup_{0\leq t\leq a} H(k,t) \leq 0 < \frac{1}{b^{p^-}}\left(\frac{2a}{\sqrt{T+1}}\right)^{p^+} \sum_{k=1}^{T} H(k,b)$$

eşitsizliğini ortaya çıkarır.

Herhangi bir $k \in W$ için ve $u_0(k)=0$ ve $u_1(k)=b$ olacak şekilde $u_0, u_1 \in W$ alalım. Ayrıca $r = \dfrac{1}{p^+}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{T+1}}\right)^{p^+}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $r \in (0,1)$ olduğu açıktır.

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla,

$$\Phi(u_0) = \Psi(u_0) = 0 \ ,$$

$$\Phi(u_1) = \sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u_1(k-1)\right|^{p(k-1)} + \frac{1}{p(k-1)}\left|u_1(k-1)\right|^{p(k-1)}\right)$$

$$\geq \frac{1}{p^+} b^{p^-}(T+1) > \frac{1}{p^+}\left(\frac{2a}{\sqrt{T+1}}\right)^{p^+} = r$$

ve

$$\Psi(u_1) = -\sum_{k=1}^{T} H(k,b)$$

olur. Böylece,

$$\Phi(u_o) < r < \Phi(u_1)$$

eşitsizliği yazılabilir ve dolayısıyla Teorem 4.1.3'deki **(ii) ifadesi sağlanır**.

Diğer taraftan,

$$-\frac{\left(\Phi(u_1)-r\right)\Psi(u_0)+\left(r-\Phi(u_0)\right)\Psi(u_1)}{\Phi(u_1)-\Phi(u_0)} = -r\frac{\Psi(u_1)}{\Phi(u_1)}$$

$$= r\frac{\sum_{k=1}^{T} H(k,b)}{\sum_{k=1}^{T+1}\dfrac{1}{p(k-1)} b^{p(k-1)}} > 0$$

ifadesini yazabiliriz.

Ayrıca $\Phi(u) \le r < 1$ özelliğiyle $u \in W$ için Lemma 4.1.2 (b) ve $C_3 = T^{\frac{p^+-2}{2}}$ için,

$$\frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} \le \frac{1}{p^+}C_3\|u\|^{p^+} \le \sum_{k=1}^{T+1}\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)} \le r < 1$$

elde edebiliriz.

Böylece, herhangi $u \in W$ için $\Phi(u) \le r$ özelliği ve Açıklama (4.1.1) bir arada kullanılarak; $r < \frac{1}{p^+}$ olmak üzere,

$$\left|u(k)\right| \le \frac{\sqrt{T+1}}{2}\|u\| \le \frac{\sqrt{T+1}}{2}\left(p^+ r\right)^{\frac{1}{p^+}} = a\ , \quad \forall k \in W$$

eşitsizliği yazılabilir.

Yukarıdaki eşitsizlik,

$$-\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u) = \sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])} -\Psi(u) \le \sum_{k=1}^{T}\sup_{0\le t\le a} H(k,t) \le 0$$

anlamına gelmektedir.

Dolayısıyla,

$$-\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u) < r\frac{\sum_{k=1}^{T}H(k,b)}{\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{p(k-1)}b^{p(k-1)}}$$

veya

$$\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u) > \frac{\left(\Phi(u_1)-r\right)\Psi(u_0)+\left(r-\Phi(u_0)\right)\Psi(u_1)}{\Phi(u_1)-\Phi(u_0)}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da Teorem 4.1.3'deki **(iii) koşulunun sağlandığı görülür**. Böylece Teorem 4.1.3'ün tüm varsayımları sağlanmış olur.
Bu durumda herhangi $\lambda \in \Lambda$ için,

$$\Phi'(u) + \lambda \Psi'(u) = 0$$

denkleminin W uzayında en az üç çözümü olacak şekilde sabit $\rho > 0$ ve açık bir $\Lambda \subset (0, \infty)$ aralığının olduğu sonucuna varırız. Bu ise Teorem 4.2.2'nin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.3. Eğer **(P)** problemi için $T = 2$ ve p, q, s fonksiyonlarını;

$$\begin{aligned} p(k-1) &= e^{k-1} + 6 \ , \\ q(k) &= k + 4 \ , \\ s(k) &= \ln k + 4 \ , \end{aligned}$$

şeklinde alırsak,

$$\begin{aligned} &p^- = 7 \ , p^+ = e + 6 \ , \\ &q^- = 5 \ , q^+ = 6 \ , \\ &s^- = 4 \ , s^+ = \ln 2 + 4 \ , \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla p, q ve s fonksiyonları Teorem 4.2.2'yi sağlar.

Açıklama 4.2.4. Teorem 4.2.2'nin ispatında G. Bonanno (2003) çalışmasındaki Teorem 2.1 uygulanarak, **(P)** probleminin en az üç zayıf çözüme sahip olduğu λ parametrelerinin aralığının bir üst sınırı elde edilir. Her bir $h > 1$ ve $H(k,b) > 0$ olacak şekilde Teorem 4.2.2'nin ispatındaki b sayısı için,

$$\Lambda \subseteq \left(0, \frac{h \sum_{k=1}^{T+1} \frac{b^{p(k-1)}}{p(k-1)}}{\sum_{k=1}^{T} H(k,b)} \right)$$

olur.

Çalışmanın bundan sonraki aşamasında aşağıdaki (g_1) ve (g_2) koşullarının sağlandığını varsayacağız.

(g_1): $f \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

(g_2): Tüm $k \in \mathbb{Z}[1,T]$ ve $|t| \geq \eta$ için $tg(k,t) \leq 0$ olacak şekilde η>0 olsun.

Lemma 4.2.5. Kabul edelim ki (g_1) ve (g_2) sağlansın. Bu durumda $G(k,u(k)) = \int\limits_0^{u(k)} g(k,t)dt$ ve $B > 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{T+1} G(k,u(k)) \leq B$$

olur.

İspat. (g_1) ve (g_2) ile $u \in W$ için,

$$\sum_{k=1}^{T+1} G(k,u(k)) = \sum_{k=1}^{T+1} \int\limits_0^{u(k)} g(k,t)dt \leq \sum_{k=1}^{T+1} \int\limits_{-\eta}^{\eta} |g(k,t)|dt = B$$

bulunur ki, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.6. Varsayalım ki $p:\mathbb{Z}[0,T]\to[2,\infty)$ ve $q,s:\mathbb{Z}[1,T]\to[2,\infty)$ fonksiyonları sınırlı, $s^- > q^+$ ve $\lambda \in (0,\infty)$ olarak alınsın. Bu durumda $J_\lambda(u) = \inf_{v\in W} J_\lambda(v)$ olacak şekilde **(P)** probleminin $u \in W$, $u \neq 0$ şeklinde en az bir zayıf çözümü vardır.

İspat. Açıktır ki her $k \in \mathbb{Z}[1,T]$ için $f(k,t) = |t|^{q(k)-2}t - |t|^{s(k)-2}t \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ olur. $s^- > q^+$ olduğundan,

$$tf(k,t) = |t|^{q(k)} - |t|^{s(k)} \leq 0 \ , \ t \geq 1, \ k \in \mathbb{Z}[1,T]$$

yazabiliriz.

Dolayısıyla (g_2) koşulu $f(k,t)=|t|^{q(k)-2}t-|t|^{s(k)-2}t$ durumu için geçerlidir. $u\in W$ için $\|u\|\geq 1$ ile Lemma 4.2.5'ten,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{1}{p(k-1)}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}+\frac{1}{p(k-1)}\left|u(k-1)\right|^{p(k-1)}\right) \\ &\quad -\lambda\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k)) \\ &\geq \frac{C_1}{p^+}\|u\|^{p^-}-\lambda B\to\infty,\ \text{eğer } \|u\|\to\infty \end{aligned}$$

olur. J_λ coersive, sürekli (dolayısıyla W sonlu boyutlu olduğundan, zayıf alttan yarı-sürekli) ve W üzerinden Gateaux diferansiyellenebilir olduğundan; **(P)** problemi ve J_λ'nın kritik noktaları arasındaki bağıntıyı kullanarak, Teorem 4.2.6'nın sağlandığını görebiliriz.

5. KIRCHHOFF TİPLİ ANİZOTROPİK DİSKRET SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ZAYIF ÇÖZÜMLER

Bu bölümde, $p(k)$-Kirchhoff tipli anizotropik diskret (ayrık) sınır değer probleminin W'deki zayıf çözümleri ile ilgilenilmiş ve direkt bir varyasyonel metot kullanılarak W'de çözümlerin varlığını ortaya koyan bazı koşullar ele alınmıştır.

5.1. Giriş

Bu çalışmada; $T \geq 2$ pozitif bir tamsayı, $\mathbb{Z}[a,b]$, $a<b$ olacak şekilde a ve b tamsayıları ile $\{a,a+1,...,b\}$ ayrık aralığı, λ pozitif bir sabit ve $\Delta u(k)=u(k+1)-u(k)$ şeklinde fark operatörü ve üstelik $p:\mathbb{Z}[0,T]\to[2,\infty)$ fonksiyonu $p^- = \min_{k\in\mathbb{Z}[0,T]} p(k-1) \leq p^+ = \max_{k\in\mathbb{Z}[0,T]} p(k-1)$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -M\left(\dfrac{|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)\Delta\left(|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\,\Delta u(k-1)\right)= f\left(k,u(k)\right),\ k\in\mathbb{Z}[1,T] \\ u(0)=u(T+1)=0 \end{cases} \qquad \textbf{(P)}$$

problemiyle ilgileniyoruz. Ayrıca $M:\mathbb{Z}[1,T]\to(0,\infty)$ fonksiyonunun hem sürekli hem de azalan olmadığını kabul edeceğiz.

Bu çalışmamızda da;

$$\langle u,v\rangle = \sum_{k=1}^{T+1}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1)\ ,\ \ \forall u,v\in W$$

iç çarpımı ile

$$W=\left\{u \,\middle|\, u:\mathbb{Z}[0,1+T]\to\mathbb{R}\ ,\ u(0)=u(T+1)=0\right\}$$

T -boyutlu Hilbert uzayını (Agarwal ve ark. 2004) ve bu uzayda tanımlanan normu,

$$\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{T+1} \left| \Delta u(k-1) \right|^2 \right)^{1/2}$$

olacak şekilde gösteriyoruz. Diğer taraftan W üzerinde

$$|u|_m = \left(\sum_{k=1}^{T} \left| u(k) \right|^m \right)^{1/m} \quad , \quad \forall u \in W \text{ ve } m \geq 2$$

normu tanımlanabilir ve bu norm yardımıyla,

$$T^{(2-m)/2m} |u|_2 \leq |u|_m \leq T^{1/m} |u|_2 \quad , \quad \forall u \in W \text{ ve } m \geq 2 \qquad \textbf{(5.1)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz (Cai ve Yu 2006).

Lemma 5.1.1.

(i) $u \in W$ ve $\|u\| > 1$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{T+1} \frac{\left| \Delta u(k-1) \right|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \geq \frac{1}{p^+ \left(\sqrt{T} \right)^{2-p^-}} \|u\|^{p^-} - T$$

olur.

(ii) $u \in W$ ve $\|u\| < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{T+1} \frac{\left| \Delta u(k-1) \right|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \geq \frac{1}{p^+ \left(\sqrt{T} \right)^{2-p^+}} \|u\|^{p^+}$$

olur.

(iii) Herhangi $m \geq 2$ için,

$$\sum_{k=1}^{T} \left| u(k) \right|^m \leq \mathrm{c}_m \sum_{k=1}^{T+1} \left| \Delta u(k-1) \right|^m \quad , \quad \forall u \in W$$

olacak şekilde pozitif bir c_m sabiti vardır.

Ayrıca (5.1) eşitsizliği ve Lemma 5.1.1'den,

$$|u|_m^m \le T\,|u|_2^m \le c_m T\left(\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^2\right)^{\frac{m}{2}} \le c_m T\,\|u\|^m \qquad \textbf{(5.2)}$$

sonucuna varırız.

5.2. Temel Sonuçlar

Tanım 5.2.1. $\varphi \in W$ olmak üzere,

$$M\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\,\Delta\varphi(k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{T} f\left(k,u(k)\right)\varphi(k)\ , \quad k\in\mathbb{Z}[1,T]$$

şeklindeyse o zaman $u \in W$, **(P)** probleminin bir zayıf çözümü olur. **(P)** problemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli;

$k\in\mathbb{Z}[1,T]$, $\widehat{M}(t)=\int_0^t M(s)\,ds$ ve $F(k,t)=\int_0^t f(k,\xi)\,d\xi$ olmak üzere, $I : W \to \mathbb{R}$,

$$I(u)=\widehat{M}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)-F\left(k,u(k)\right)$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 5.2.2.

(i) I fonksiyoneli W üzerinde iyi tanımlıdır.

(ii) I fonksiyoneli $C^1(W,\mathbb{R})$ sınıfındandır ve

$$\left\langle I'(u),v\right\rangle = M\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)\sum_{k=1}^{T+1}\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k)-2}\Delta u(k-1)\,\Delta v(k-1)$$

$$-\sum_{k=1}^{T} f\left(k,u(k)\right)v(k)$$

şeklindedir.

(iii) I fonksiyoneli zayıf, alttan yarı süreklidir.

Teorem 5.2.3. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(M_1): (Polinomial büyüme koşulu)

$$As^{\alpha-1} \le M(s) \le Bs^{\alpha-1} \quad , \; s>0 \text{ için}$$

olacak şekilde $\alpha \ge 1$ ve $A \le B$ özelliğinde pozitif A ve B reel sayıları vardır.

(f_0): $f:\mathbb{Z}[1.T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $2\le\gamma^+<\alpha p^-$ ve $c>0$ olmak üzere;

$$\left|f(k,t)\right| \le c\left(1+|t|^{\gamma(k)-1}\right)$$

koşulunu sağlar. Bu durumda **(P)** problemi bir zayıf çözüme sahiptir.

İspat. $\|u\|>1$ olsun. $(M_1),(f_0)$ ve Lemma 5.1.1'in (i) kısmıyla,

$$I(u)=\widehat{M}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)-F(k,u(k))$$

$$\ge A\int_0^{\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}} s^{\alpha-1}ds-\frac{c}{2}\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^2-c\sum_{k=1}^{T}\frac{|u(k)|^{\gamma(k)}}{\gamma(k)}$$

yazılır. Eğer yukarıdaki eşitsizlikte $|u(k)|^{\gamma(k)}\le|u(k)|^{\gamma^-}+|u(k)|^{\gamma^+}$, $k\in\mathbb{Z}[1,T]$ ve (5.2) kullanılırsa, bu durumda $K(\alpha,T)>0$ olmak üzere,

$$I(u)\ge\frac{A}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u_n(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha}-\frac{c}{2}c_2T\|u\|^2-\frac{c}{\gamma^-}\left(\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^{\gamma^+}+\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^{\gamma^-}\right)$$

$$\ge\frac{A}{\alpha\left(p^+\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^-}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^-}-K(\alpha,T)T^{\alpha}-\frac{c}{2}c_2T\|u\|^2$$

$$-\frac{c}{\gamma^-}\left(c_{\gamma^+}T\|u\|^{\gamma^+}+c_{\gamma^-}T\|u\|^{\gamma^-}\right)\to+\infty \;,\; \|u\|\to+\infty \text{ iken.}$$

ifadesini yazabiliriz. $\alpha p^->\gamma^+\ge 2$ olduğundan I coersive olur. Bununla birlikte eğer $\|u\|\le 1$ ise Lemma 5.1.1'in (ii) özelliğiyle,

$$I(u) \geq \frac{A}{\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}} \|u\|^{\alpha p^{+}} - \frac{c}{2} c_2 T \|u\|^{2} - \frac{c}{\gamma^{-}} c_{\gamma^{+}} T \|u\|^{\gamma^{+}}$$

$$-\frac{c}{\gamma^{-}} c_{\gamma^{-}} T \|u\|^{\gamma^{-}} \geq -\frac{c}{\gamma^{-}} c_2 T \|u\|^{2} \geq -\frac{c}{\gamma^{-}} T > -\infty$$

ifadesini yazabiliriz. Bu demektir ki I alttan sınırlıdır. I zayıf, alttan yarı sürekli olduğundan **(P),** W'de bir zayıf çözüme sahiptir. Böylece teorem 5.2.3'ün ispatı tamamlanır.

Tanım 5.2.4. $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, $x \to a$ iken sonsuz küçülen (0'a yakınsayan) fonksiyonlar olsun.

i) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ ise α, β'ya göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür denir ve $\alpha = o(\beta)$ şeklinde gösterilir.

ii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$ ($m > 1$) ise α, β'ya göre *m.* mertebeden sonsuz küçüktür denir.

iii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ise α ve β fonksiyonları aynı hızla birbirlerine yaklaşır denir ve $\alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.2.5. $\sin x \sim x$, $x \to 0$ iken.

Örnek 5.2.6. $\alpha(t) = t\sin^2 t$, $\beta(t) = 2t\sin t$ olmak üzere,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\sin t = 0$$

olduğundan $t\sin^2 t = o(2t\sin t)$ veya $\alpha = \beta(t)$ yazabiliriz.

Teorem 5.2.7. Kabul edelim ki (M_1) ve aşağıdaki koşullar sağlansın.

(f_1): $f : \mathbb{Z}[1.T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\beta^{-} > \alpha p^{+} > 1$ ve $c > 0$ olmak üzere;

$$\left| f(k,t) \right| \le c\left(1+|t|^{\beta(k)-1}\right)$$

eşitsizliğini sağlar.

(f_2): $\forall k \in \mathbb{Z}[1,T]$ için $\alpha p^+ > 1$ özelliğiyle $t \to 0$ olduğunda $f(k,t) = o\left(|t|^{\alpha p^+ - 1}\right)$ olur.

(AR): Ambrosetti-Rabinowitz koşulu sağlanır. Yani;

$$0 \le \theta F(k,t) \le f(k,t)t \ , \ |t| \ge t_* \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}[1,T]$$

olacak şekilde,

$$\theta > \frac{B}{A}\alpha p^+$$

eşitsizliği sağlanır.

(f_3): $\forall k \in \mathbb{Z}[1,T]$ ve tüm $t \ge t_*$ için $F(k,t) > 0$ olacak şekilde $t_* > 0$ sayısı vardır.

Bu durumda **(P)** problemi aşikar olmayan en az bir zayıf çözüme sahiptir.

Tanım 5.2.8. Eğer her $\{u_n\} \subset W$ dizisi; $\left|I(u_n)\right| \le c$ ve $I'(u_n) \to 0$ olacak şekilde W uzayına ait norm ile yakınsak bir alt diziyi kapsarsa, o zaman I 'ya **Palais-Smale** (PS) **koşulu**nu sağlıyor deriz.

Lemma 5.2.9. Kabul edelim ki (M_1), (f_1) ve (AR) özellikleri sağlansın. Bu durumda I fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlar.

İspat. $\{u_n(k)\} \subset W$, $\left|I(u_n(k))\right| \le c$ ve $n \to \infty$ için $I'(u_n(k)) \to 0$ olsun. Bu durumda (M_1) kullanılarak

$$c+\|u_n\| \ \geq \ I(u_n)-\frac{1}{\theta}\left\langle I'(u_n),u_n\right\rangle = \widehat{M}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)-\sum_{k=1}^{T}F(k,u_n(k))$$

$$-\frac{1}{\theta}M\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}+\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{T}f(k,u_n(k))u_n(k)$$

$$\geq A\int_0^{\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}} s^{\alpha-1}ds-\frac{B}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}$$

$$+\left(\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{T}f(k,u_n(k))u_n(k)-\sum_{k=1}^{T}F(k,u_n(k))\right)$$

$$\geq \ \frac{A}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha}-\frac{Bp^+}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha}$$

$$\geq \ \left(\frac{A}{\alpha}-\frac{Bp^+}{\theta}\right)\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha}$$

ifadesini yazabiliriz.

(AR) ve Lemma 5.1.1'in (i) kısmıyla,

$$c+\|u_n\|\geq\left(\frac{A}{\alpha}-\frac{Bp^+}{\theta}\right)\frac{1}{\left(p^+\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^-}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^-}-K(\alpha,T)T^{\alpha}$$

yazabiliriz ve buradan da $\{\|u_n\|\}$'in W uzayında sınırlı olduğu sonucunu çıkarırız. W'nın sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı olduğu gerçeği ve yukardaki bilgilerle $\{u_n\}$, W'da u_0'a yakınsayacak şekilde $u_0\in W$ ve $\{u_n\}$ ile belirtilmiş bir alt dizisi vardır. Böylece I fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlar.

Açıklama 5.2.10. $\alpha=1$ olsun. Bu durumda $A\leq M(s)\leq B$ olur. Eğer $M(s)=1$ seçersek o zaman,

$$-\Delta\left(\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\right)=f(k,u)$$

ifadesini buluruz. Bundan dolayı (AR) koşulu sağlanır ve $\theta > p^{+}$ olur.

Lemma 5.2.11.

(i) $\|u\|=\rho$ iken $I(u)\geq a\geq 0$ olacak şekilde a ve ρ pozitif reel sayıları vardır.

(ii) $I(u)<0$ olacak şekilde $\|u\|>\rho$ koşulunu sağlayan bir $u\in W$ vardır.

İspat.

(i) $\|u\|<1$ olsun. Bu durumda (M_1) ve Lemma 5.1.1'in (ii) kısmıyla,

$$\begin{aligned} I(u) &= \widehat{M}\left(\sum_{k=1}^{T+1}\frac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)-\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k)) \\ &\geq \frac{A}{\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^{+}}-\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k)) \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$\varepsilon>0$, $\varepsilon c_{\alpha p^{+}}T\leq \dfrac{A}{2\alpha}\dfrac{1}{\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}$ olacak şekilde yeterince küçük bir sayı

olsun. (f_1) ve (f_2) yardımıyla,

$$F(k,t)\leq\varepsilon|t|^{\alpha p^{+}}+c|t|^{\beta(k)}\ ,\ c>0,\ t\in\mathbb{R}$$

yazabiliriz.

$$|u(k)|^{\beta(k)}\leq|u(k)|^{\beta^{+}}+|u(k)|^{\beta^{-}}\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}[1,T]$$

olduğundan (5.2) ile,

$$I(u)\ \geq\ \frac{A}{\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^{+}}-\varepsilon\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^{\alpha p^{+}}-c\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^{\beta(k)}$$

$$\geq \frac{A}{\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^{+}} - \varepsilon c_{\alpha p^{+}} T\|u\|^{\alpha p^{+}} - c c_{\beta^{+}} T\|u\|^{\beta^{+}} - c c_{\beta^{-}} T\|u\|^{\beta^{-}}$$

$$\geq \frac{A}{2\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^{+}} - c c_{\beta^{+}} T\|u\|^{\beta^{+}} - c c_{\beta^{-}} T\|u\|^{\beta^{-}}$$

$$\geq \frac{A}{2\alpha\left(p^{+}\left(\sqrt{T}\right)^{2-p^{+}}\right)^{\alpha}}\|u\|^{\alpha p^{+}} - 2\max\left\{c c_{\beta^{+}} T, c c_{\beta^{-}} T\right\}\|u\|^{\beta^{-}}$$

yazılabilir.

$\|u\| < 1$ ve $\alpha p^{+} < \beta^{-}$ olduğundan, $\|u\| = \rho \in (0,1)$ özelliğiyle $u \in W$ ve $I(u) \geq a > 0$ olacak şekilde a ve ρ pozitif reel sayıları vardır.

(ii) (AR) ve (f_3)'den,

$$F(k,t) \geq \frac{F(k,t_*)}{t_*^{\theta}} t^{\theta} \ , \ t \geq t_*$$

sonucu çıkarılabilir. Bu halde $\forall \delta > 1$ ve $\forall u \in W$ için;

$$E_1 := \left\{k \in \mathbb{Z}[1,T] : \ u(k) \geq t_*\right\} \text{ ve } E_2 := \left\{k \in \mathbb{Z}[1,T] : \ \delta u(k) \geq t_*\right\}$$

kümeleri göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{T} F\left(k, \delta u(k)\right) &\geq \sum_{E_2} F\left(k, \delta u(k)\right) \\
&\geq \frac{\delta^{\theta}}{t_*^{\theta}} \sum_{E_2} F(k,t_*) u^{\theta}(k) \geq \frac{\delta^{\theta}}{t_*^{\theta}} \sum_{E_1} F(k,t_*) u^{\theta}(k) \\
&\geq \delta^{\theta} \sum_{E_1} F(k,t_*) > 0
\end{aligned}$$

olur (tekrar hatırlatalım ki hemen hemen her yerde $F > 0$ ve $F(\ .\ ,t_*) > 0$ şeklindedir).

$t \geq t_* > 0$ iken (M_1)'den ($\frac{B}{A} \geq 1$ olduğundan),

$$\widehat{M}(t) \leq \frac{A}{\alpha} t^{\alpha} \leq \frac{A}{\alpha} t^{\frac{B}{A}\alpha}$$

yazılabilir.

$w \in W - \{0\}$ için,

$$I(tw) = \widehat{M}\left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|t\Delta w(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right) - \sum_{k=1}^{T} F(k, tw(k))$$

$$\leq \frac{A}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|t\Delta w(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\frac{\alpha B}{A}} - \sum_{k=1}^{T} F(k, tw(k))$$

$$\leq \frac{A}{\alpha\left(p^{-}\right)^{\frac{B}{A}\alpha}} t^{\frac{B}{A}\alpha p^{+}} \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta w(k-1)|^{p(k-1)} - t^{\theta} \sum_{E_1} F(k, t_*)$$

yazabiliriz. θ üzerindeki varsayımdan (AR), $t \to \infty$ için $I(tw) \to -\infty$ sonucu çıkarılır.

İspat. Lemma 5.2.9, Lemma 5.2.11 ve $I(0) = 0$ gerçeğinden, I fonksiyonelinin Mountain Pass teoremini sağladığı görülür (Willem 1996). Dolayısıyla I fonksiyoneli aşikar olmayan en az bir zayıf çözüme sahiptir. Böylece Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5.3. Temel Sonuçlar

Şimdi Lemma 5.2.2 ve Teorem 5.2.3'ün bazı sonuçlarını vereceğiz. $\alpha > 0$ ve a, b pozitif sabitler olmak üzere Kirchhoff tipli diskret denklemin,

$$-\left(a + b\left(\frac{|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)^{\alpha-1}\right)\Delta\left(|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\right) = f(k, u(k)),\ k \in \mathbb{Z}[1, T] \tag{5.3}$$

şeklindeki versiyonunu göz önüne alalım. $\alpha = 2$ olduğunda (5.3) denkleminin,

$$-\left(a + b\left(\frac{|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}\right)\right)\Delta\left(|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\right) = f(k, u(k)),\ k \in \mathbb{Z}[1, T]$$

şeklinde Kirchhoff tipli diskret denklemine dönüştüğünü belirtmeliyiz.

$t = \dfrac{\left|\Delta u(k-1)\right|^{p(k-1)}}{p(k-1)}$ özelliğiyle $M(t) = a + bt^{\alpha-1}$ olsun. Bu durumda (M_1) koşulu sağlanır. $A \le b < B$ seçelim. O halde tüm $t > t_*$ için,

$$At^{\alpha-1} \le a + bt^{\alpha-1} \le Bt^{\alpha-1}$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı Lemma 5.2.2 ve Teorem 5.2.3'e karşılık aşağıdaki sonuçlara sahip oluruz.

Sonuç 5.3.1. Eğer (M_1) ve (f_0) sağlanırsa, o zaman (5.3) denklemi bir zayıf çözüme sahiptir.

Sonuç 5.3.2. Eğer $(M_1),(f_1),(f_2)$ ve (f_3) sağlanırsa, o zaman (5.3) denklemi aşikar olmayan en az bir zayıf çözüme sahiptir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının dört ve beşinci bölümlerinde diskret $p(k)$-Laplacian operatörünü içeren eliptik denklemler incelenerek, sıfırdan farklı en az üç çözümün olduğu Ricceri kritik nokta teoremi ile gösterilmiş ve Kirchhoff tipli diskret problem varyasyonel yaklaşımla incelenerek, sıfırdan farklı çözümler bazı koşullar yardımıyla elde edilmiştir. İleri çalışma olarak, bu denklemler M ve f sürekli fonksiyonlarının sağladığı farklı, nispeten daha az sınırlayıcı koşullar altında veya farklı metotlarla tekrar ele alınabilir.

7. KAYNAKLAR

R. P. Agarwal (2000), Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Marcel Dekker, New York, Basel.

R. P. Agarwal, K. Perera and D. O.Regan (2004), Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods, Nonlinear Anal. 58 69.73.

R. P. Agarwal, K. Perera and D. O.Regan (2005), Multiple positive solutions of singular discrete $p-$Laplacian problems via variational methods, Advance in Difference Equations, 2, 93-99.

G. Bonanno (2003), Some remarks on a three critical points theorem, Nonlinear Anal. 54, 651-665.

G. Bonanno and P. Candito (2009), Nonlinear difference equations investigated via critical point methods, Nonlinear Analysis 70, 3180-3186.

A. Cabada, A. Iannizzotto and S.Tersian (2009), Multiple solutions for discrete boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 356, 418-428.

P. Candito, N. Giovannelli (2008), Multiple solutions for a discrete boundary value problem involving the $p-$Laplacian, Comput. Math. Appl., 56, 959-964.

X. Cai and J. Yu (2006), Existence theorems for second-order discrete boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 320, 649.661.

Y. Chen, S. Levine and M. Rao (2006), Variable exponent, linear growth functionals in image processing, SIAM J. Appl. Math. 66 (4), 1383.1406.

M. Mihailescu, V. Radulescu and S.Tersian (2009), Eigenvalue problems for anisotropic discrete boundary value problems, J. Difference Equ. Appl. 15, 557-567.

B. Kone and S. Ouaro (2010), Weak solutions for anisotropic discrete boundary value problems, J. Difference Equ. Appl. 18 February.

M. Willem (1996), Minimax Theorems, Birkhäuser, Boston.

V. Zhikov (1987), Averaging of functionals in the calculus of variations and elasticity, Math. USSR Izv. 29, 33-66.

G. Kirchhoff (1883), Mechanik, Teubner, Leipzig.

J. L. Lions (1978), On some equations in boundary value problems of mathematical physics, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat. Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), in: North-Holland Math. Stud., 30, 284.346.

R. A. Mashiyev, B. Cekic and M. Avci (2011), Existence and multiplicity of the solutions of the $p(x)$-Kirchhoff type equation via genus theory, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Accepted manuscript.

X. L. Fan (2010), On nonlocal $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal., 72 (2010), 3314-3323.

P. Marcellini (1991), Regularity and existence of solutions of elliptic equations with $(p(x),q(x))$-growth conditions, J. Differential Equations, 90 (1), 1.30.

J. Musielak (1983), Orlicz Spaces and Moduler Spaces, Springer-Verlag, Berlin.

H. Nakano (1950), Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

H. Nakano (1951), Topology and Topological Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

W. Orlicz (1931) Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math., 3, 200-212.

K. R. Rajagopal and M. Ruzicka (2001), Mathematical modelling of electrorheological fluids, Continuum Mech. Thermdyn, 13, 59-78.

M. Ruzicka (2000), Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

I. Sharapudinov (1979), On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$, Math. Notes, 26, No. 3-4, 796-806.

I. V. Tsenov (1961), Generalization of tha problem of best approximation of a function in the space L^s, (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., 7, 25-37.

W. M. Winslow (1949), Induced fibration of suspensions, J. Applied Physics, 20, 1137-1140.

A. Zang (2008), $p(x)$-Laplacian equations satisfying Cerami condition, J. Math. Anal. Appl., 337, 547.555.

H. Hudzik (1976), On generalized Orlicz-Sobolev space, Funct. Approx. Comment. Math., 4, 37-51.

Wang, H. C. (2002). On the compactness and the minimization. Taiwanese J. Math. vol. 6, no. 4, pp. 441-464, December 2002.

Musayev , B., Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. ¸Sti., Kütahya.

Adams, R. A. (1975). Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Willem, M. (1996). Minimax Theorems, Birkhauser, Boston.

Dai, G., Hao, R. (2009). Existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff-type equation, J. Math. Anal. Appl. 359, 275.284

Adams, R. A. (2003) Fournier, J.J. Sobolev Space. Elsevier Science.

Fan, X. L., Zhang, Q. H. (2003). Existence of solutions for $p(x)$- Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal. 52,1843-1852.

Napoli, P. D., Mariani, M. C. (2003). Mountain pass solutions to equations of p -Laplacian type, Nonlinear Anal. 54, 1205-1219.

Vu, N. T. (2005). Mountain pass theorem and nonuniformly elliptic equations, Vietnam J. of Math. 33:4, 391.408.

Mihailescu, M., Radulescu, V. (2006). A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. Proceedings of the Royal Society A. 462, 2625-2641.

Zang, A. (2008). $p(x)$-Laplacian equations satisfying Cerami condition, J. Math. Anal. Appl. 337, 547-555.

Yao, J. (2006). Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)$ -Laplacian operators. Nonlinear Anal. accepted 11 December 2006.

ÖZGEÇMİŞ

1985 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise eğitimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2008 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fak. Matematik Bölümünden mezun oldum. 2008 yılından beri özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Evliyim ve bir çocuğum var.