T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜTLE ÇEKİMİ KURAMLARI VE KÜTLESİZ DİRAC DENKLEMİNE ÇÖZÜM ARAYIŞI

Gülistan AKKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Aralık 2011

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Gülistan AKKAYA tarafından yapılan "**KÜTLE ÇEKİMİ KURAMLARI VE KÜTLESİZ DİRAC DENKLEMİNE ÇÖZÜM ARAYIŞI"** konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. …..

Üye : Doç. Dr. …..

Üye : Yrd. Doç. Dr. …

Tez Savunma Sınavı Tarihi: .../...../.........

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.........

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Hayatım boyunca hem maddi hem de manevi olarak desteklerini benden esirgemeyen canım annem Fatma AKKAYA ve hayatım boyunca deneyimlerinden yararlandığım yol göstericim ablam Gülbahar AKKAYA'ya, ayrıca bu zorlu süreçte engin bilgileriyle bana ışık tutan değerli hocam Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

KÜTLE ÇEKİMİ KURAMLARI VE KÜTLESİZ DİRAC DENKLEMİNE ÇÖZÜM ARAYIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gülistan AKKAYA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİMDALI
2011

Bu çalışmada, eğri uzay – zamanda kütlesiz Dirac denklemine çözüm elde etme ve kütle çekimi kuramları adına gerçekleştirilen çalışmalardan bazılarını gözden geçirdik. Gödel tipi kozmolojik evrende, değişkenlerine ayırma yoluyla kütlesiz Dirac denklemine çözümün hesaplanmasında eğri uzayın metriğinden yararlanarak bir takım hesaplamalar yaptık. Bulunan değerler kütlesiz Dirac denkleminde yerine yazılarak denklemin sıfıra eşitlenmesi sağlandı. Elde edilen çözümlerden frekans spektrumu hesaplandı. Burada elde edilen sonuçlar kütlesiz Dirac parçacıklarının spektrumunun kesikli olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Kütlesiz Dirac parçacığı, Weyl denklemi.

ABSTRACT

THEORIES OF GRAVITATION AND SEARCH FOR MASSLESS DIRAC EQUATION

MSc THESIS
Gülistan AKKAYA

DEPARTMENT OF PHYSISC
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE
2011

In this work, we have examined some of the studies carried out to reach solutions on massless Dirac aquation in curved space – time and on theories of gravitation. In the Gödel – type cosmological universe, we have made a number of calculations by using curvilinear space metric in the calculation of the solution of massless Dirac equation via separation of variables. The results obtained from this study are written in their respective places in order to equalize the equation to zero. The frequency spectrum has been calculated from the obtained solutions. The results we get from this study show that the spectrum of massless Dirac particles is discrete.

Key Words: Massless Dirac particle, Weyl equation.

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge No **Sayfa**

GİRİŞ

Newton'un evrensel çekim yasası fizikte en önemli dönüm noktalarından biridir. Bu yasa, dünya daki nesnelerin kütle çekimi etkisiyle nasıl hareket ettiğini anlattığı gibi yıldızların, gezegenlerin hatta galaksilerin evrende nasıl hareket ettiğini hesaplamamıza yarar. Bu yasa, kütle çekiminin ne olduğu ya da nasıl çalıştığı hakkında yetersiz kalmaktadır. Einstein'ın özel ve genel görelilik kuramları ise kütle çekiminin ne olduğu ya da nasıl çalıştığı hakkında bilgi verse de çok yoğun ve çok küçük ortamlarda kütle çekiminin nasıl işlediğine dair soruları yanıtsız bırakmaktadır. Kütle çekiminin en küçük atomaltı parçacıklarda nasıl davrandığını tespit etmek için son yıllarda kozmolojik evrendeki skaler ve spinör parçacıklarının kuantum etkilerine ilişkin çalışmalara büyük ilgi oluştu. Eğri uzay – zamandaki kuantum etkilerini analiz etmek için eğri uzay – zamandaki göreli dalga denklemlerinin tam çözümünün detaylı araştırması gereklidir. Bu noktadan bakıldığında yakın geçmişte göreli dalga denklemlerinin tam çözümleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Genel Görelilikte farklı evren modelleri için Dirac denklemi (kütleli ve spin 1/2), Klein – Gordon denklemi (kütleli ve spin O) ve Weyl denklemi (kütlesiz ve spini 1/2) üzerine çalışmalar yapılmış ve bu evren modelleri için çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlerin çoğunda, kütleli ve kütlesiz nötrinolar için Dirac denkleminde değişkenlerine ayırmanın tam analizi yapılmıştır (Villalba ve Shishkin 1991, Karman ve McLenaghan 1983, Brill ve Wheeler 1957, Bagrov ve ark. 1990, Pimentel ve Macias 1986). Bu çözümler yoluyla kozmolojik evrendeki skaler parçacıklar ve nötrinolar kapsamlı bir şekilde analiz edilmiş olur. Dolayısıyla eğri uzay – zamanındaki kuantum etkileri çalışması, yani kütle çekiminin madde ile etkileşmesi daha kolay anlaşılır.

Daha önce Villalba (1993) Genel Görelilik kuramında sabit olmayan Gödel tipi kozmolojik evrendeki Dirac spinörü üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bu tezde, sabit olmayan Gödel tipi kozmolojik evrende kütlesiz Dirac denklemi değişkenlerine ayırma yoluyla çözülüp ele alındı. Bu çözümün, daha önce Villalba (1993) tarafından verilen aynı metriğe göre yapılan çözümler ile benzer olduğu görülmüştür.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Çalışmanın bu kısmında kütle çekimi kuramları ile ilgili detaylı bilgiler verilmiştir. Ayrıca Schrödinger denklemi, Dirac denklemi ve Klein – Gordon denklemi ile ilgili bilgiler verilmiştir. Bu denklemlerle ilgili son yıllarda yapılan çalışmalara kısaca değinilmiştir.

2.1. Kütle Çekimi Kuramları

Yukarı atılan bir cisim bir süre sonra döner ve yere düşer. Irmaklar hep yukardan aşağıya doğru akar. Bunun açıklamasını "yerçekimi" olarak yaparız. Bu tüm kütleli nesnelerde, gezegenlerde ve yıldızlarda varolan bir kuvvettir ve ona "kütle çekimi" diyoruz. Bu çekim, en yoğun cisimleri ve boşluğu eşit oranda donatır. Ondan korunmanın ya da onu etkilemenin hiçbir yolu yoktur. Uzaklıkla azalır ama hiçbir şekilde kaybolmaz. Atmosferi yerkürenin çevresinde tutan kuvvet ya da bizim evren boşluğuna uçup gitmemizi engelleyen kuvvet, Dünya'nın uyguladığı kütle çekimi kuvvetidir.

Kütle çekimi için ilk bilimsel kuramı geliştiren ve bunu evreni kapsayacak kadar genişleten büyük İngiliz bilimcisi Sir Isaac Newton'dur. Newton, başına düşen elmanın, yeryüzüyle arasında doğal olarak bulunan bir çekim kuvveti sebebiyle düştüğünü öne sürmüştür. Kütle çekiminin tüm evrende geçerli olan bir güç olduğuna inandı ve bunu basit bir formüle indirgedi:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Burada;

F: İki kütle arasındaki çekim kuvvetinin büyüklüğü

m_1: Birinci kütlenin büyüklüğü.

m_2: İkinci kütlenin büyüklüğü.

r: İki kütle arasındaki mesafe.

G: Yer çekimi ivmesi.

Newton'un evrensel çekim yasası fizikteki en önemli dönüm noktalarından biridir. Bu yasa, dünya daki nesnelerin kütle çekimi etkisiyle nasıl hareket ettiğini hesaplamamızı sağladığı gibi yıldızların, gezegenlerin hatta galaksilerin evrende nasıl hareket ettiklerini de hesaplamamıza yarar.

1969 yılında Neil ve Buzz adındaki bilim insanları Ay'a yolculuk yaparak oraya Newton'un kütle çekimi teorisini test etmekte kullanılan özel bir ayna seti yerleştirdiler. Bu özel aynalar yardımıyla Ay'da lazerli bir teleskop kullanılarak Dünya ile Ay arasındaki uzaklık kesin olarak ölçülebiliyordu. Bu ölçümler yıllarca hergün yapılarak Ay'ın yörüngesinin inanılmaz doğrulukta bir haritası oluşturuldu. Fakat ortaya garip bir sonuç çıktı. Aynı gerçek yörüngesi Newton'unkinden farklıydı. Newton gerçekten iyi bir formül bulmuştu. Eldeki bilgilere göre sonuçlar tatminkârdır. Fakat daha hassas veriler elde ettikçe Newton'un çekim yasası anlamsızlaşıyordu. Peki Newton nerde yanılıyordu acaba?

Newton'un kütle çekimi kuramında bir problem var. O, bize kütle çekiminin etkisiyle cisimlerin nasıl hareket ettiğini anlatıyor. Kütle çekiminin ne olduğu ya da nasıl çalıştığı hakkında bir şey söylemiyor. Yani bu teori, sadece bir şeyleri hesap edebilmemizi sağlıyor. Newton açıkça şunu söylemiştir: "Size nesnelerin nasıl hareket ettiğini hesaplayacak bir araç vereceğim ama bana nasıl ve neden olduğunu sormayın, bu Yaratıcı'nın bilgisindedir."

Buna göre kütle çekimini ilahi ellerden kurtarmamız gerekiyor. Yani kütle çekiminin nasıl çalıştığını keşfetmek zorundayız.

1950'lerde evrenin yapı taşları hakkında birçok şeyin gözlemlendiği, Dünya'daki en meşhur rasathanelerden biri olan Kitt Peak'te 7.8. milyar ışık yılı uzaktaki bir gökyüzü parçası gözlemlenir. Uzayın bu küçük parçası bize kütle çekiminin iç işleyişi hakkında bir bakış açısı sunar. Gökbilimciler milyonlarca ışık yılı uzaktaki galaksileri bulmak için gökyüzüne bakıyorlardı. Ve iki galaksi buldular. Daha yakından bakınca fark ettiler ki her açıdan özdeş görünüyordu ve galaksiler sanki ikiz gibiydi. Bu durumun açıklaması şudur: bunlar tek bir galaksinin fotoğraflarıdır. Bu olayı gök bilimcilerin kafasını allak bullak etti. Ama kısa süre sonra fark ettiler ki bu kozmik mucizenin sebebi yaklaşık yüzyıl önce öngörülmüştü. Bu öngörüyü bizlere sunan tüm zamanların en büyük fizikçisi Albert Einstein'dir.

Albert Einstein, özel görelilik kuramının temellerini 1905'te yayımladığı bir makaleyle atmıştı. Özel görelilik kuramı iki temel ilkeye dayanır:

1. Fizik yasaları tüm eylemsiz sistemlerde aynıdır.

2. Işığın boşluktaki hızı kaynağın hızından bağımsız olarak tüm eylemsiz sistemler için aynıdır.

Einstein 1907 yılında özel görelilik kuramı hakkında bir bilimsel dergiye yazdığı makalede yeni bir düşüncesi olduğunu ve dayandığı görelilik ilkesinin çok daha genel bir başka ilkenin sadece özel bir hali olduğunu belirtiyor. Bu ilke "Denklik İlkesi" olarak adlandırılır. Peki denklik ilkesi nedir?

Tüm konu, cisimlerin "kütle" olarak adlandırdığımız özelliğinin iki farklı doğa yasasında işin içine girmesinden kaynaklanıyor.

Kütlenin belirlediği yasalardan birincisi Newton'un evrensel kütle çekim yasasıdır. Bu yasaya göre iki cisim birbirlerini kütleleriyle orantılı, aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak çeker. Bu nedenle bu kütleye "çekim kütlesi" diyoruz. Kütlenin belirlediği diğer yasaysa Newton'un hareket yasalarından ikincisidir. Bir cisme herhangi bir kuvvet uygulayarak cismi hızlandırır, yavaşlatır veya hız yönünü değiştirebilirsiniz. Birim zamanda meydana gelen hızdaki değişime "ivme" deniyor. İkinci yasa; ivmenin, kuvvetin kütleye bölünmesiyle elde edileceğini söylüyor. Burada da kütle, karşımıza bir cismin hızını değiştirme direnci yani eylemsizlik olarak çıkıyor. Bu nedenle bu yasada geçen kütleye "eylemsizlik kütlesi" diyoruz.

Einstein tüm cisimlerin eylemsizlik ve çekim kuvvetlerinin denk olduğunu sadece iki farklı doğa yasasında işin içine girdiğini öne sürüyor. Dolayısıyla bu ilkeye "Denklik İlkesi" deniyor. Bu ilkeye göre tüm cisimlerin gravitasyon alanındaki serbest düşme hareketi aynı olup cisimlerin türüne bağlı değildir. İşte Genel Görelilik kuramı, bu ilkeden yola çıkarak oluşturulmuştur. G.G. kuramı, tüm koordinat sistemleri için geçerli fiziksel formülleştirme kuramıdır. Kuramın başlıca problemi gravitasyon yani kütle çekimidir.

G.G. kuramı ile Einstein şunları ortaya çıkartmıştır:

- Yerçekimi (kütle çekimi) ve ivmeli hareket birbirinden ayırt edilmez (Denklik İlkesi).
- Kütle, içinde bulunduğumuz uzay – zamanı eğip bükmektedir.
- Yerçekimi bir kuvvet değildir. Uzay – zamanın geometrik eğriliğinden ortaya çıkar. Yani nesneleri birbirine doğru çeken olgu, kütle sebebiyle uzay – zamanın eğilmiş olmasıdır.

G.G.'nin öngörüleri ise şunlardır:

- Eğer kütle, uzay – zamanı geometrik olarak eğiyorsa Güneş'in çok yakınından geçip gelen uzak yıldızların ışıkları eğrilmiş olmalıdır. Bu eğrilik, uzay – zamanın eğriliğine uygun iç bükey olmalıdır.
- Çok çok yoğun kütleler uzay – zamanı öylesine bükebilir ki uzay – zaman kendi üstüne katlanır ve içe çöker. Böylesine yoğun kütle görülemez çünkü ışık dahi bu uzay – zamanının eğriliğinden kurtulamaz (Burada kastedilen şey kara deliklerdir).
- Kütle, uzay – zamanı eğiyorsa bu eğilmeden zaman da etkileniyor olmalıdır. Eğilmiş zaman yavaş akmalıdır.
- Hareketli büyük kütleler etraflarındaki bir kısım uzay – zamanı da sürükleyebiliyor olmalıdır.
- Kütle, uzay – zamanı eğiyorsa, kütle yakınındaki eğrilikten ilerleyen ışık, uzağındaki düzgün uzay – zamanda ilerleyenden daha uzun yol almalıdır.

Bu öngörülerin hepsi 1916'dan beri gözlemlenebilmiş, defalarca denenmiş ve doğru çıkmıştır.

Bu öngörülerden de yola çıkarak şunu söyleyebiliriz. Einstein'ın evreni uzay – zamanda oluşur. Einstein'ın evreninde onlar bir kumaşa birlikte dokunmuşlardır. Yani uzay ve zaman ayrı değildir. Onlar bir ve bütündür. Einstein'ın evreninde gezegenler, yıldızlar ve galaksiler uzay – zamanı eğer ve büker. İkiz galaksi görüntüsü, uzay – zamanın bükülmesiyle açıklanabilir. Uzak bir galaksiden gelen ışık Dünya'ya gelirken başka bir galaksi veya galaksi kümesinin içinden geçer. Gelen ışık, bu kütlenin etrafında eğrilir. Ve bizim Dünya'daki bakışımızla bu bükülme olayı, uzak galaksinin birden fazla görüntüsünü görmemize neden olur.

Peki Einstein'ın kütle çekimi anlayışı eksiksiz mi? Hayır, değil! Dünya ve diğer gezegenler hatta galaksilerin hareketleri için geçerli olan Einstein kuramı evrendeki en çalkantılı yerlerde çalışmıyor. Bir nötron yıldızı, tahminen güneşten iki veya üç kat ağırdır. Bu yıldızlardan iki tanesinin bir arada bulunduğu yerler vardır. Birbirinin etrafında dönen bu inanılmaz yoğun nötron yıldızları uzay – zamanı çalkalar. Gittikçe hızlanarak döndükçe "kütle çekimi dalgaları" olarak adlandırılan bir etki oluşturur.

Bugün birçok araştırmacı, bu dalgaları doğrudan gözlemlemek için çalışmalar yapıyor. Ama henüz herhangi bir somut sonuç yoktur. Fakat biliyoruz ki evreni tam manasıyla anlamak için kütle çekiminin her yerde nasıl çalıştığını bilmeye ihtiyacımız vardır. Einstein ne kadar uğraştıysa da çok yoğun ve çok küçük ortamlarda kütle çekiminin nasıl işlediğine dair cevap bulamadı. Dünya'yı oluşturan atomların, moleküllerin ve atomaltı parçacıkların dünyasında Einstein kuramının kütle çekimiyle ilgili söyleyebileceği hiçbir şey yoktur. Bu, Einstein'ın en büyük başarısızlığıdır. Çünkü her şeyin Büyük Patlama Olayı (Big Bang) ile nasıl başladığını bilmek istiyorsak -ki bu anda evren inanılmaz küçük ve yoğundu – bu en küçük mesafelerde yerçekimini nasıl işlediğini bilmek zorundayız.

Einstein'ın zamanın başlangıç anında kütle çekiminin nasıl davrandığını anlamak için aradığı cevapları kuantum – gravite atomaltı parçacıklarda nasıl çalıştığını açıklayabilirsek o zaman belki Einstein ve Newton'un başladıkları çalışmayı bitirip, bu gizemli çekim gücünün tam bir resmini ortaya koyabiliriz. Bunu başarabilmek için Büyük Patlama şartlarını burada, Dünya'da yeniden oluşturmak ve atomaltı dünyasının kalbine nüfuz etmek zorundayız.

2.2. Schrödinger Denklemi

Schrödinger Denklemi bir kuantum sistemi hakkında bize her bilgiyi veren araç dalga fonksiyonu adında bir fonksiyondur.

Schrödinger Denklemi kapalı formda şöyle ifade edilebilir:

$$H\psi = E\psi \qquad (2.2.1)$$

burada H Hamiltonyeni temsil eder. Hamiltonyen, parcacığın toplam enerjisini veren bir operatördür ve H;

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \qquad (2.2.2)$$

şeklinde ifade edilir. İlk terim kinetik enerjiyi, ikinci terim ise potansiyel enerjiyi temsil eder.

Momentum operatörü $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ denklemde yerine konursa Schrödinger denkleminin sol tarafı elde edilir.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V \right)\psi = -i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{2.2.3}$$

bu denklem zamana bağlı göreli olmayan Schrödinger denklemidir.

Denklemin sağ tarafının sıfıra eşit olması durumunda zamandan bağımsız Schrödinger denklemi karşımıza çıkar. Burada h= 10^{-34} j.s değerinde Planck sabiti, m; parçacığın kütlesi, V; potansiyel enerji, ψ; parçacığa eşlik eden dalga fonksiyonudur.

Parçacığın kinetik enerjisinin hareket etmezken sahip olduğu iç enerjisinden oldukça büyük olması durumunda enerjisi göreli olarak ifade edileceğinden;

$$E^2 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4 \tag{2.2.4}$$

şeklinde olur. Bu sayede elde edilen Schrödinger denklemine "Relativistik (Göreli) Schrödinger Denklemi" denir ve $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ olmak üzere şu formda yazılır:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \right)\psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \tag{2.2.5}$$

Denklemin çözümü için, parçacığın bulunduğu duruma göre içinde olduğu potansiyeller şöyle özetlenebilir:

$$1.\ V = \text{sbt} \tag{2.2.6}$$

V'nin sıfır olması durumunda serbest parçacık durumu incelenir. Sıfırdan fraklı durumlarda parçacığın enerjisinin uygulanan potansiyelden büyük veya küçük olması koşullarına göre değişen çözümler bulunur. Parçacığın enerjisinin uygulanan potansiyelden küçük olması ancak belirli bir genişlikten sonra bu potansiyel engelin kaldırılması durumunda "Tünel etkisi" gözlemlenir. Akım yoğunluğu hesaplanarak geçme ve yansıma katsayıları bulunur.

2. V= V (r) (2.2.7)

Değişen potansiyellere örnek; basit harmonik titreştirici ve Coulomb potansiyelleridir. Bunlar bir katıdaki atomların titreşimi ve atomdaki çekirdeğe bağlı elektronların hareketini kapsar.

2.3. Klein – Gordon Denklemi

Schrödinger denkleminin bağıl / göreli (relativistik) olan biçimidir. Ve atomaltı fizikte kendi ekseni etrafında dönmeyen parçacıkları tanımlamada kullanılır.

Serbest parçacık için Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{p^2}{2m}\psi = ih\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{2.3.1}$$

burada $p = -ih\vec{\nabla}$ momentum operatörü, $\vec{\nabla}$ ise del operatörü (işlemcisi) dür.

Schrödinger denklemi, Einstein'ın ÖG kuramını hesaba katmadığı için özellikle atomaltı parçacık hesaplamalarında yetersiz kalır.

Ö.G kuramından enerjinin tanımını ihraç edip

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{2.3.2}$$

sonra bu formüle kuantum mekanik momentum operatörünü eklediğimizde;

$$\sqrt{(-ih\nabla)^2c^2 + m^2c^4}\,\psi = ih\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.3.3}$$

sonucunu alırız. Ancak bu eşitlik karekökten dolayı gayrilokal ve düzensiz bir yapıdadır. Bu yüzden Klein ve Gordon, eşitliğin daha objektif bir biçimini türetmişlerdir:

$$(\Box^2+\mu^2)\psi = O \qquad (2.3.4)$$

$$\mu = \frac{mc}{h} \qquad \text{ve} \qquad \Box^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (2.3.5)$$

olur.

Bu yeni operatöre “d′ Alembert operatörü” denir ve günümüzde skaler (sıfır notasyonlu) parçacıklar için alan denklemi olarak kullanılmaktadır.

Serbest bir parçacığın Klein – Gordon denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{\nabla}^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \frac{m^2c^2}{h^2}\psi \qquad (2.3.6)$$

Yukarıdaki ifadenin göreli olmayan biçimi ise şu şekilde ifade edilebilir:

$$\psi\left(\vec{r}, t\right) = e^{i(\vec{k}.\vec{r}-Wt)} \qquad (2.3.7)$$

Ancak elbette bu durumda,

$$-k^2 + \frac{W^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{h^2} \qquad (2.3.8)$$

engeli oluşacaktır. Göreli olmayan parçacıklarda olduğu gibi aynı ifadenin enerji momentum için olan versiyonları,

$$<p> = <\psi> -ih\vec{\nabla}\,|\psi> = hk \qquad (2.3.9)$$

ve

$$<E> = <\psi|\; ih\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi> = hW \qquad (2.3.10)$$

şeklinde formüle edilir. Bu noktada eşitliği k ve W bilinmeyenleri için çözüp yukarda değindiğimiz engel denklemine yerleştirdiğimizde m > O kütleli parçacıkların enerji ve momentum değerleri arasındaki bağlantıyı formüle etmiş oluruz.

$$<E>^2 = m^2 c^4 + <p>^2 c^2 \qquad (2.3.11)$$

Kütlesiz parçacıklar için yukardaki denklemde m'i "0" olarak alabiliriz. Bu durumda kütlesiz parçacığın enerji ve momentumu arasında;

$$<E> = <|\vec{p}|> c \qquad (2.3.12)$$

bağıntısına ulaşırız.

2.4. Dirac Denklemi

Adını fizikçi Paul Dirac'tan alan göreli kuantum mekaniği denklemi;

$$\gamma^\mu p_\mu = \Psi = m_o c^2 \Psi \qquad (2.4.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

m_o: parçacığın durağan kütlesi

c: ışık hızı

p_μ : dörtmomentum

γ^μ : Dirac matrislerini

göstermektedir. Ayrıca ψ, dört tane karmaşık sayıdan oluşan bir sütun matristir ve olasılığın dalga fonksiyonudur. Bu dört sayı da iki gruba ayrılır:

$$\Psi^{+} = \begin{bmatrix} \Psi^{+} \\ \Psi^{-} \end{bmatrix} \qquad (2.4.2)$$

Burada Ψ^{+} ve Ψ^{-} Dirac spinörleri olarak adlandırılır ve her birinin farklı fiziksel bir anlamı vardır. Ψ^{+} dönücüsü pozitif enerjileri, Ψ^{-} negatif enerjileri ifade eder. Bunlar da;

$$\Psi^{+} = \begin{bmatrix} \psi^{+} \\ \varphi^{+} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Psi^{-} = \begin{bmatrix} \psi^{-} \\ \varphi^{-} \end{bmatrix} \qquad (2.4.3)$$

olarak tanımlanır. ψ yukarı dönü ve ϕ aşağı dönü olarak anlam kazanır. Yani dalga fonksiyonu;

$$\Psi^{+} = \begin{bmatrix} \psi^{+} \\ \varphi^{+} \\ \psi^{-} \\ \varphi^{-} \end{bmatrix} \qquad (2.4.4)$$

şeklindedir.

Dirac denkleminde μ= O bileşenini ayırıp gerisi için i= 1, 2, 3 indisini bırakırsak Dirac denklemi;

$$\gamma^{o} p_{o} c \, \Psi + \gamma^{i} p_{i} c \, \Psi = m_{o} c^{2} \Psi \qquad (2.4.5)$$

biçiminde yazılabilir. Dirac matrisleri; I birim matris olmak üzere;

$$\gamma^{o} = \begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix} \qquad \gamma^{i} = \begin{bmatrix} O & \sigma^{i} \\ -\sigma^{i} & O \end{bmatrix} \qquad (2.4.6)$$

olarak Pauli matrisleri cinsinden yazılabilir. Bunlar yerine konunca Dirac denklemi;

$$\begin{bmatrix} O & p_o c + \sigma^i p_i c \\ p_o c - \sigma^i p_i c & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{bmatrix} = m_o c^2 \begin{bmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{bmatrix} \qquad (2.4.7)$$

biçimini alır. Matris çarpımı yapılırsa çiftlenimli denklemler elde edilir.

$$(p_o\, c - \sigma^i\, p_i\, c)\, \Psi^- = m_o\, c^2\, \Psi^+ \qquad (2.4.8)$$

$$(p_o\, c + \sigma^i\, p_i\, c)\, \Psi^+ = m_o\, c^2\, \Psi^- \qquad (2.4.9)$$

Bu özdeğer denklemlerini çözmek için spinörlerden biri çekilip diğer denklemde yerine yazılabilir. Buradan göreliliğin en önemli denklemlerinden biri elde edilir:

$$p_o^2\, c^2 - p_i^2\, c^2 = m_o^2\, c^4 \qquad (2.4.10)$$

Burada $p_o\, c = E = mc^2$ ve $p_i^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = |\vec{p}|^2$ olduğundan ifade;

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m_o^2\, c^4 \qquad (2.4.11)$$

şeklindedir. Buradan E için pozitif ve negatif değerler gelir.

Dirac denklemini elektromanyetik alanda şöyle yazabiliriz. Denklemdeki dörtmomentum işlemcisine elektromanyetik potansiyeli dahil edersek;

$$p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \qquad (2.4.12)$$

denklem,

$$\gamma^{\mu}\left(p_{\mu} - eA_{\mu}\right)\Psi = m_o c^2 \Psi \qquad (2.4.13)$$

biçimine gelir. Buradaki $A\mu$ elektromanyetik dörtpotonsiyeldir ve e elektriksel yüktür.

2.5. Klein – Gordon ve Dirac Denklemleri İle İlgili Yapılan Bazı Çalışmalar

Eğri uzay – zamandaki kuantum etkileri çalışması, kütle çekiminin madde ile etkileşmesini anlamanın başlıca yoludur. Bilindiği gibi tek parçacık durumları hakkında en sağlıklı bilgi onun dalga fonksiyonunda yer alır. Bunun için kozmolojik evrenlerdeki skaler parçacıklar ve nötrinolar kapsamlı bir şekilde analiz edilir ve tam çözümler, bu alanlarla ilgili olan dalga denklemleri ile verilir.

Kuantum sistemlerindeki gravitasyonel etkileşmeler son zamanlarda kovaryant Dirac ve Klein – Gordon denklemleri kullanılarak çalışılmıştır. Özellikle Dirac denkleminin tam çözümlerinin araştırılmasında büyük bir çaba harcanmıştır. Bu çalışmanın öncüleri Brill, Wheeler ve Chandrasekhar'dır.

Brill ve Wheeler (1957) diagonal metrikle ilgili olan merkezi simetrik gravitasyonel alan içindeki Dirac denklemini çalışmışlardır. Dirac denklemini değişkenlerine ayırmada normal diagonal tetradı kullanmışlar ve genel açısal momentum oparetörünü oluşturmuşlardır. Bu çalışma merkezi simetrik gravitasyonel alanda Weyl denklemindeki değişkenleri ayırma çalışmasında ilk çalışma olabilecek niteliktedir. Brill ve Wheeler'in makalesinden sonra başka yazarlar da diagonal metrikle ilgili olan gravitasyonel alanların varlığında Dirac denklemini değişkenlerine ayırmanın olasılıklarını analiz etmişlerdir.

Diagonal metrikler içinde Dirac denklemini değişkenlerine ayırma (diagonal tetradlara sınırlamadan!) Bagrou ve arkadaşları (1990) tarafından ele alınmıştır.

Chandrasekhar (1976) diagonal olmayan eksenel simetrik Kerr metriğini göz önünde bulundurup çalışmıştır. İzotropik tetrad ve Newman – Penrose spin kofaktörleri metodunu kullanarak karışık geometrik konfigürasyonu içindeki Dirac denklemindeki değişkenleri ayırabilmeyi başarmıştır. Chandrasekhar'ın makalesi yayınlandıktan sonra birtakım çalışmalar eksenel simetrik – özellikle rotasyonel simetrik – metrikler ile Dirac denklemini değişkenlerine ayırma problemi üzerine yapılmıştır. Bu makaleler içinde

Chandrasekhar'ın çalışmasında incelenen sonuçların ve uygulama metodlarının daha fazlası yeralır.

Kalnins (1986) tarafından yazılan makalede Minkowski uzay – zamanı içindeki Dirac denkleminin için ikinci dereceden simetri operatörleri cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiştir. Kartezyen koordinatlarda serbest Dirac denkleminin bazı çözümlerinin aynı zamanda Klein Fock denkleminin de çözümü olması gerektiği abes bir durum gibi görünse de Kalnins tarafından kanıtlanan teoremin önemini kabul etmeliyiz. Kalnins teoremi serbest durumlar için gösterilmiştir ve dış alan varlığında bu teorem geçerli olmayabilir. Çünkü alan varlığındaki kuadratik Dirac denklemi, alanların ek türevlerinin varlığından dolayı Klein – Fock denklemi ile uyumlu olmaz.

Kütleli Dirac denklemi için yapılan çalışmalar Tevkolsky (1873) tarafından Weyl nötrino denklemi için genişletilmiştir. Tevkolsky'nin ayırma metodu, Kerr zemininde Dirac denkleminin ayrılabilirliğini çalışan Chandrasekhar'a kadar başarısızdı. Chandrasekhar'ın bulduğu sonuç Page ve Toop (1976) tarafından Kerr-Newman zeminine genişletilmiştir. Daha sonra Carter ve McLenaghan (1979) tarafından analiz edilmiştir. Carter ve McLenaghan Kerr – Newman zemininde Dirac operatörü ile komüt olan bir operatör oluşturmuşlardır. Bu operatör, ayırma çözümlerini özdeğer ile özvektör kabul eder. Keyfi eğri zeminde Dirac operatörü için simetri operatörlerine Carter ve McLenaghan tarafından tensörel kısaltma McLenaghan ve Spinden (1979) tarafından tensörel karakterizasyon verilmiştir.

Değişkenlerine ayırma bazı kısmi diferansiyel denklemlerde – özellikle Dirac denkleminde – tam çözümleri bulmaya yarar. Gravitasyonel alanların varlığında Dirac denklemini değişkenlerine ayırma problemi, değişkenlerine ayırmayı sağlayan tüm metrik türlerini bulma problemi olarak da çalışılabilir. Bu amaçla Shishkin ve Villalba (1991) tarafından metrik tensörün en genel formu göz önünde bulundurularak Dirac denklemini değişkenlerine ayırmayı sağlayan tüm gravitasyonel alan konfigürasyonları hesaplanır. Bu makalede verilen kütlesiz nötrinolar için Dirac denkleminin tam çözümlerinin çoğu sadece bir uzay – zaman değişkenine bağlı olan metriklerle ilgilidir.

$$ds^2 = e^{2u}(dx^2 - dt^2) + e^{2v}(dy^2 + dz^2) \tag{2.5.1}$$

$$U = U(x) \qquad , \qquad V = V(x)$$

metriği Davis (1974) ve Pechenik (1979) tarafından Dirac denklemini çözmede kullanılmıştır.

Marder metriğinde Dirac denkleminin tam çözümü,

$$ds^2 = e^{2(\alpha-\beta)} (dr^2 - dt^2) + r^2 e^{2-\beta} d\varphi^2 + e^{2(\beta+V)} dz^2$$

$$\alpha = \alpha (r) \quad , \quad \beta = \beta (r) \quad , \quad V = V (r) \tag{2.5.2}$$

ile verilen Krori (1982) ve Patra (1986) tarafından incelenmiştir.

Kasner metriğinde nötrino;

$$ds^2 = t^{2a} dx^2 + t^{2b} dy^2 + t^{2c} dz^2 - dt^2 \tag{2.5.3}$$

$$a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ile verilen Srivastova (1989) tarafından incelenmiştir.

Kütlesiz nötrinolor için Dirac denkleminin tam çözümleri uzaysal düzlem Robertson – Walker metriğinde;

$$ds^2 = a^2 (t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 \tag{2.5.4}$$

Barut (1987) ve Lotae (1990) tarafından incelenmiştir.

Ayrıca uzaysal açık ve kapalı Robertson – Walker evrenleri için tam çözümler Villalba ve Percoco (1990) tarafından incelenmiştir. Kerr- Newton metriğinde kütleli ve kütlesiz nötrinolar için Dirac denkleminin tam çözümleri ise Einstein ve Finkelstein (1977) tarafından incelenmiştir. Pimentel ve Macias (1986) Klein – Gordon ve Weyl denklemlerini Gödel tipi evrende yer metriği için araştırmıştır. İki denklemin de çözümü bu evrende detaylı bir şekilde yapılmıştır.

Eğri uzay – zamanda Klein – Gordon ve Hamilton – Jacobi gibi skaler denklemlerin ayrılabilirlik özellikleri Kerr – Neqma çözümü tarafından tanımlanan yüklü dönen karadeliği detayla inceleyen Carter (1968) tarafından çalışılmıştır. Son on yılda bu önemli gelişme, yüksek spin dalga denklemlerinin ayrılabilirliğini anlama içerisinde başarılmıştır. Özellikle spini 1/2 olan Weyl nötrino denklemi, spini 1 olan

Maxwell denklemi ve spini 2 olan pertürbe edilmiş Einstein gravitasyonel olan denklemlerinin ayrılabilirliği Dudley ve Finley (1979) tarafından 7 parametreli Plebanski – Demianski zemini içinde oluşturulmuştur.

Krori ve Borgohain (1987) Klein – Gordon ve Weyl denklemlerinin tam çözümlerini bazı dönen evrenlerde çalışmışlardır. Bu iki denklem aynı evrende Pimentel ve Macias (1986) tarafından da çalışılmıştır. Bu denklemler çok iyi bilinen üç dönen evrende incelenip tam çözümleri bu makalelerde verilmiştir.

Som – Kaychaudhuri (SR) metriği,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2\, q\, r^2\, d\phi\, dt - (r^2 - q^2 r^4)\, d\phi^2 \qquad (2.5.5)$$

Hoenselaers – Vishveshwara (HV) metriği;

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + \frac{1}{2} A^2 (c-1)(c-3)\, d\phi^2 + 2(c-1)\, d\phi\, dt \qquad (2.5.6)$$

Rebouças metriği,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + 4 \cosh 2r d\phi\, dt + (3 \cosh^2 2r + 1)\, d\phi^2 \qquad (2.5.7)$$

ile verilir.

Son yıllarda lokal rotasyonel simetri ile süper akışkan uzay – zaman içinde dönen parçacıkların davranışına büyük bir ilgi gösterilmiştir. Percoco ve Villalba (1991) süper akışkan Einstein – Maxwell uzay – zamanı içinde Klein-Gordon ve Weyl denklemlerinin tam çözümlerini çalışmalardır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada; Dirac denkleminin G.G'te verilen metrik ile çözümleri hesaplandığından tezin bu kısmında kullanılacak materyal olarak G.G hakkında bazı temel bağıntılar verilmiştir. Ayrıca Dirac Denklemi ile ilgili bazı terimler tanıtılmıştır.

3.1. Tensörler

Fizik yasalarının matematiksel ifadesinde koordinat sistemleri önemli bir rol oynar. Bununla birlikte fizik yasaları veya fiziksel sonuçlar koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır. Yani koordinat sistemi nasıl seçilirse seçilsin fizik yasaları değişmez. İşte fizik yasalarının aynı kalması koşulunun ya da daha soyut olarak özelliklerin koordinat dönüşümleri altındaki davranışlarının incelenmesi Tensör analizin konusunu oluşturmaktadır. Newton kuramında vektörleri etkili bir biçimde kullanabilmemiz gerektiği gibi görelilik kuramlarında da tensörleri kullanabilmemiz gerekir. Çünkü vektörler birden fazla denklem takımını tek bir denkleme indirger, yani özetleyicidir. Aynı görevi görelilikte tensörler üstlenmektedir.

T.A. Ricci ve öğrencisi Levi- Civita tarafından geliştirilen tensör hesabının 1916 yılında Einstein'ın Genel Relativite Teorisini tanımlamasıyla birlikte fizikteki önemi de arttı. Mekanik, hidrodinamik, elektromagnetik teori gibi fiziğin bir çok alanında geniş bir uygulama alanına sahip olan tensörler, bazı temel denklemlerin daha kapalı biçimde ve koordinat sisteminden bağımsız olarak ifade edilmelerinde de önemli bir role sahiptir ve matematiksel fiziğin ortak dili olarak kabul edilir.

Genel anlamda tensörler, koordinat dönüşümleri durumunda çeşitli özelliklere göre dönüşen ve manifold olarak adlandırılan bir geometri (uzay – zaman) üzerinden tanımlanan niceliklerdir. Vektörler ve skalerler, tensörlerin özel bir durumuna karşılık gelen niceliklerdir. Örneğin, O ranklı bir sensör skaler, 1 ranklı bir tensör vektör, 2 ranklı bir tensör matris ve 3 ranklı bir tensör Levi – Civita'dır. Tensör kavramı; skaler, vektör ve matrisleri de içine alan daha genel bir kavram olarak da tanımlanabilir. Örneğin, T^{ij}, T_{ijk} ve $T^{ik}{}_{jklm}$ tensörler sırasıyla ikinci mertebeden kotravaryant, üçüncü mertebeden kovaryant ve dördüncü mertebeden karma tensörler olarak isimlendirilirler.

3.2. Simetrik ve Antisimetrik Tensörler

$T^{\mu\nu}$ biçimindeki bir kontravoryant tensör x^{μ} gibi herhangi bir koordinat için simetrik (ya da antisimetrik) ise bu durumda bu tensörün tüm koordinat sistemlerinde simetrik (ya da antisimetrik) olduğu söylenebilir ve bu simetri (ya da antisimetri) durumu;

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}\text{ , simetri} \tag{3.2.1}$$

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}\text{ , antisimetri} \tag{3.2.2}$$

ile gösterilir. Aynı tanımlamalar kovaryant tensörler için de geçerlidir. Simetrik kovaryant tensör $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ve antisimetrik kovaryant tensör $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ ‘dır. Karma tensörlerle ilgili genelleştirilebilecek herhangi bir simetri ya da antisimetri durumu yoktur.

2 ranklı bir kontravaryant ya da kovaryant tensör bir simetrik ve bir antisimetrik tensörün toplamı biçiminde yazılabilir:

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \tag{3.2.3}$$

burada

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \quad , \quad S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \tag{3.2.4}$$

ve

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} \quad , \quad A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \tag{3.2.5}$$

olarak tanımlanır.

$T^{\mu\nu}$ gibi kontravaryant bir tensörün matris formu aşağıdaki gibi olur.

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{11} \ldots\ldots\ldots\ldots T^{1n} \\ . \qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad . \\ T^{n1} \ldots\ldots\ldots\ldots T^{nn} \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

Yukarıdaki $T^{\mu\nu}$ tensörünün simetrik olması durumunda bağımsız bileşenlerinin sayısı,

$$\frac{n\,(n+1)}{2} \tag{3.2.7}$$

ya da antisimetrik olması durumunda bağımsız bileşenlerinin sayısı,

$$\frac{n\,(n-1)}{2} \tag{3.2.8}$$

yardımıyla hesaplanır.

Genel anlamda simetrik ya da antisimetrik durumu tanımlayacak olursak $T^{\mu\nu\lambda}$ gibi bir tensörün $T^{\mu\nu\lambda} = T^{\nu\mu\lambda}$ ya da $T^{\mu\nu\lambda} = -P^{\nu\mu\lambda}$ olması durumunda μ ile υ indislerine göre simetri ya da anti-simetri olduğu söylenir ve bu durum tüm koordinat sistemlerinde geçerlidir.

3.3. Metrik Tensör

Eğrisel koordinatlarda sonsuz yakın iki nokta arasındaki en kısa uzaklığın ya da diferansiyel yay elemanının karesi ds^2 ile tanımlansın. ds^2'nin n boyutlu uzay için genelleştirilmiş hali,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} \; (\mu,\upsilon = 1, 2, 3, \ldots., n) \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$g_{\mu\nu}$" ifadesine "metrik tensör" denir. Metrik, kısaca uzayın yapısını tanımlar diyebiliriz. Metrik tensör aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $g_{\mu\nu}$ konuma bağlı bir fonksiyondur: ($g_{\mu\nu}$ (x))

2. $g_{\mu\nu}$'nin determinantı sıfır olamaz: ($|g_{\mu\nu}| \neq 0$)

3. $g_{\mu\nu}$ simetrik bir tensördür: ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$)

Metrik tensör, metriğin tanımlanmasındaki en önemli niceliktir ve koordinatlara bağlı değerler alır. Eğer $g_{\nu\mu}$ metrik tensörünün köşegen dışı elemanları sıfırsa yani

$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ise ya da tek değerli sürekli ve sürekli türetilen bir koordinat dönüşümü yardımıyla köşegenleştirilebiliyorsa metriğin "öklitsel", metriğin tanımlandığı uzayın da "öklit uzayı" olduğu söylenir.

Riemann uzayında giriş metriği genellikle köşegen değildir ve köşegenleştirecek bir dönüşüm bulmak da zordur. Riemann uzayında, öklit uzayının aksine iki nokta arasındaki en kısa mesafe de artık bir doğru değil eğridir ve bu eğrilere "geodezik eğrileri" denir.

Öklit uzayındaki metrik tensör Kronecker deltasına karşılık gelir ve birim matris ile tanımlanır:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

Dolayısıyla $(x^0, x^1, x^2) = (x, y, z)$ koordinatlı öklit uzayındaki metrik;

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \qquad (3.3.3.)$$

biçiminde olur.

Minkowski uzay – zamanda ise metrik tensör şu şekilde tanımlanır:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

Minkowski uzay – zaman metriği,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3.3.5}$$

ile tanımlanır.

3.4. Christoffel Sembolleri

Metrik tensörün kısmi türevi $g_{\mu\nu,\lambda}$ ve $g^{\mu\nu}$ ters metrik tensör ile elde edilen ve klasik GG'nin temelini oluşturan niceliğe "Levi – Civita" ya da "Christoffel bağlantısı" denir.

Christoffel bağlantısı metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olması durumundan elde edilebilir.

$$O = g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{k\nu}\Gamma^{k}_{\mu\lambda} - g_{k\mu}\Gamma^{k}_{\nu\lambda} \qquad (3.4.1)$$

Bu denklemde μ ile λ'nın ve υ ile λ'nın yerdeğişimi ile sırayla

$$g_{\lambda\nu,\mu} = g_{k\nu}\Gamma^{k}_{\lambda\mu} + g_{k\lambda}\Gamma^{k}_{\nu\mu} \qquad (3.4.2)$$

ve

$$g_{\mu\lambda,\nu} = g_{k\lambda}\Gamma^{k}_{\mu\nu} + g_{k\mu}\Gamma^{k}_{\lambda\nu} \qquad (3.4.3)$$

denklemleri elde edilir.

(3.4.1) ve (3.4.2) denklemlerinin toplamını alıp bu toplamdan (3.4.3) denklemi çıkarılarak;

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} &= g_{k\nu}\Gamma^{k}_{\mu\lambda} + g_{k\mu}\Gamma^{k}_{\nu\lambda} + g_{k\nu}\Gamma^{k}_{\lambda\mu} \\ &\quad + g_{k\lambda}\Gamma^{k}_{\nu\mu} - g_{k\lambda}\Gamma^{k}_{\mu\nu} - g_{k\mu}\Gamma^{k}_{\lambda\nu} \end{aligned} \qquad (3.4.4)$$

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = 2g_{k\gamma}\Gamma^{k}_{\lambda\mu} \qquad (3.4.5)$$

denklemi elde edilir. (3.4.5) denklemini $g^{\nu\beta}$ ile çarparak ve $g^{\nu\beta}g_{k\nu} = \delta^{\beta}_{k}$ özelliğini kullanarak

$$\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\beta}\left\{g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}\right\} \qquad (3.4.6)$$

ifadesi elde edilir. (3.4.6) denklemi ile tanımlanan Christoffel bağlantısının elemanlarına "Christoffel Sembolleri" denir.

3.5. Dirac Matrisleri ve Özellikleri

Dirac denklemi bilindiği üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}-m)\,\psi = O \qquad (3.5.1)$$

burada γ^{μ} matrislerine "Dirac matrisleri" denir. Dirac matrisleri 4x4'lük matrislerdir.

$$\gamma^{0} = \beta \quad ; \quad \gamma^{i} = \beta\,\alpha^{i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \qquad (3.5.2)$$

β ve γ^{i} matrislerinin özellikleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$1.\ (\gamma^{0})^{2} = I \quad ; \quad (\gamma^{i})^{2} = -I \quad , \quad i = 1, 2, 3 \qquad (3.5.3)$$

Yani;

* $\mu = \upsilon = O$ için;

$$(\gamma^{0})^{2} = 1 \qquad (3.5.4)$$

* $\mu = \upsilon = i$ için ; $(i = 1, 2, 3)$

$(\gamma^{i})^{2} = -1$ olur. (3.5.5)

$$2.\ \gamma^{\mu}\,\gamma^{v}+\gamma^{v}\,\gamma^{\mu} = O \qquad (\mu \neq v \text{ ise})$$

$$\gamma^{\mu}\,\gamma^{v} = -\gamma^{v}\,\gamma^{\mu} \qquad (3.5.6)$$

Dirac matrisleri chiral temsili içinde;

$$\gamma^{o} = \begin{pmatrix} O & \sigma^{o} \\ \sigma^{o} & O \end{pmatrix} , \ \gamma^{i} = \begin{pmatrix} O & \sigma^{i} \\ -\sigma^{i} & O \end{pmatrix} \qquad (3.5.7)$$

şeklinde verilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın önceki bölümünde (kaynak özetleri) de değindiğimiz gibi, gravitasyonel alanların varlığında Dirac denklemini değişkenlerine ayırma problemi, değişkenlerine ayırmayı sağlayan tüm metrik türlerini bulma problemi olarak da çalışılabilir. Villelt (1993) tarafından kütlesiz Dirac denklemine çözüm arayışı amacıyla yapılan çalışmada kozmolojik dönen evren modeli ile ilgili olan metrik ele alınmıştır:

$$ds^2 = -dt^2 + c^2t^2\,(dx^2+\lambda e^{2mx}dy^2+dz^2)+2cte^{mx}dydt \qquad (4.1)$$

(1) denklemi ile verilen metriğin açısal hızı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w = \frac{m}{2ct\sqrt{\lambda+1}} \qquad (4.2)$$

Bu çalışmada da yukardaki metrik modeli (4.1) göz önünde bulundurularak kütlesiz Dirac parçacıkları için uygun frekans spektrumu bulunacaktır.

4.1. Hesaplamalar

Yukarda verilen (4.1) eşitliğini kullanırsak metrik tensör aşağıdaki biçimde olur:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & cte^{mx} & 0 \\ 0 & c^2t^2 & 0 & 0 \\ cte^{mx} & 0 & \lambda c^2t^2e^{2mx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2t^2 \end{pmatrix} \qquad (4.1.1)$$

Metrik tensörün tersi olan $g^{\mu\nu}$ ifadesini bulmak için $g^{\mu\nu} = \dfrac{Adj\left(g_{\mu\nu}\right)}{\det\left(g_{\mu\nu}\right)}$ yani

$\dfrac{\left(g_{\mu\nu}\right)^{ct}}{\det\left(g_{\mu\nu}\right)}$ eşitliği kullanılırsa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{\lambda+1} & O & \dfrac{e^{-mx}}{ct(\lambda+1)} & O \\ O & \dfrac{1}{c^2t^2} & O & O \\ \dfrac{e^{-mx}}{ct(\lambda+1)} & O & \dfrac{e^{-2mx}}{c^2t^2(\lambda+1)} & O \\ O & O & O & \dfrac{1}{c^2t^2} \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Minkowski metriği aşağıdaki gibi seçildi:

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

Metrik tensörün tetradlar cinsinden ifadesini bulmak için aşağıdaki bağıntıdan yararlanırsak;

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^{(i)} h_{\nu}^{(j)} \eta_{ij} \tag{4.1.4}$$

$h_{\nu}^{(j)}$ tetrad ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_{\nu}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ct & 0 & 0 \\ -cte^{mx} & 0 & \dfrac{cte^{mx}(\lambda+1)}{(\lambda+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ct \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

$h_{(i)}^{\mu} = g^{\nu\mu}\eta_{ij} h_{\nu}^{(j)}$ bağıntısından yararlanırsak $h_{(i)}^{\mu}$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h^{\mu}{}_{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda+1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{ct} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{e^{-mx}}{ct\sqrt{\lambda+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{ct} \end{pmatrix} \tag{4.1.6}$$

Eğri uzay – zamanda kütlesiz Dirac denkleminin kovaryant formu aşağıdaki gibidir:

$$\left[\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}\right)\right]\psi = 0 \tag{4.1.7}$$

burada (∂_{μ}- Γ_{μ}) ifadesi kovaryant türevdir. γ^{μ} ile gösterilen ifade ise Dirac matrisleridir.

Eğru uzayın Dirac matrisleri aşağıdaki antikomütasyon bağıntısını sağlar:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\}+=2g^{\mu\nu} \tag{4.1.8}$$

Ayrıca eğri uzayın gama matrisleri (γ^{μ}) ile düz uzayın gama matrisleri $\left(\tilde{\gamma}^{(i)}\right)$ aşağıdaki ifadeyle birbirine bağlanır:

$$\gamma^{\mu} = h^{\mu}_{(i)}\,\tilde{\gamma}^{(i)} \tag{4.1.9}$$

(4.1.9) eşitliği (4.1.7) ifadesinde yerine yazılırsa denklem aşağıdaki biçimde olur:

$$\left\{h^{\mu}_{(i)}\,\tilde{\gamma}^{(i)}\left(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}\right)\right\}\psi = 0 \tag{4.1.10}$$

Christoffel sembolleri aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$\Gamma\beta_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\beta}\left\{g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}\right\} \tag{4.1.11}$$

Burada (4.1.11) denklemiyle verilen Christoffel sembollerinden sıfır olmayan aşağıdaki bileşenler bulunur:

Çizelge 4.1. Dönen Gödel tipi kozmolojik evren modeli için Christoffel sembolleri bileşenleri

$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10}$	$\dfrac{1}{t(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10}$	$\dfrac{m}{2(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20}$	$\dfrac{\lambda\, ce^{mx}}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{11} =$	$\dfrac{\lambda\, c^2 t}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21}$	$\dfrac{e^{mx}\lambda ctm}{2(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{22} =$	$\dfrac{\lambda^2 c^2 te^{2mx}}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^0_{33} =$	$\dfrac{\lambda\, c^2 t}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10}$	$\dfrac{1}{t}$
$\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20}$	$\dfrac{-me^{mx}}{2ct}$
$\Gamma^1_{22} =$	$-\lambda\, me^{2mx}$
$\Gamma^2_{00} =$	$\dfrac{e^{-mx}}{ct^2(\lambda+1)}$
$\Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10}$	$\dfrac{me^{-mx}}{2ct(\lambda+1)}$
$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20}$	$\dfrac{\lambda}{t(\lambda+1)}$
$\Gamma^2_{11} =$	$\dfrac{-ce^{-mx}}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$	$\dfrac{m}{(\lambda+1)}\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$
$\Gamma^2_{22} =$	$\dfrac{-\lambda ce^{mx}}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^2_{23} =$	$\dfrac{-ce^{-mx}}{(\lambda+1)}$
$\Gamma^3_{03} = \Gamma_{30}$	$\dfrac{1}{t}$

Eğri uzay ile düz uzayın dalga fonksiyonlarını birbirine bağlayan 4x4’lük matrisler olan spin tensörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] \tag{4.1.12}$$

Bu denklemde ilgili terimler yerine yazılarak sıfır olmayan spin tensörü bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

Çizelge 4.2. Dönen Gödel tipi kozmolojik evren modeli için spin tensörü bileşenleri

$S^{01} = -S^{10} =$	$\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{1} + \frac{1}{ct\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\tilde{\gamma}^{1}$
$S^{02} = -S^{20} =$	$\frac{e^{-mx}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{2}}{ct\sqrt{\lambda+1}} - \frac{e^{-2mx}}{c^{2}t^{2}(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}$
$S^{03} = -S^{30} =$	$\frac{\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{3}}{ct} + \frac{\tilde{\gamma}^{2}\tilde{\gamma}^{3}}{ct\sqrt{\lambda+1}}$
$S^{12} = -S^{21} =$	$\frac{e^{-mx}}{c^{2}t^{2}\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{2}$
$S^{13} = -S^{31} =$	$\frac{\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{3}}{c^{2}t^{2}}$
$S^{23} = -S^{32} =$	$\frac{e^{-mx}}{c^{2}t^{2}\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\tilde{\gamma}^{3}$

(4.1.7) denklemi ile verilen Γ_{μ} şeklinde gösterilen spinör bağlantılarını hesaplamak için aşağıdaki bağıntıdan yararlanılır:

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha}\left(\partial_\lambda h^k_\nu h^\alpha_k - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\right)S^{\mu\nu} \tag{4.1.13}$$

Buna göre spinör bağlantılarının bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

Çizelge 4.3. Dönen Gödel tipi kozmolojik evren modeli için spinör bağlantısının bileşenleri

$\Gamma_0 =$	$\frac{\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2}{t(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} + \frac{\lambda \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2}{2t(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} - \frac{\lambda e^{-mx}}{2ct^2(\lambda+1)^2\sqrt{\lambda+1}} - \frac{e^{-mx}}{ct^2(\lambda+1)^2\sqrt{\lambda+1}}$ $+\frac{m \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2}{t(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}$
$\Gamma_1 =$	$2c\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 + \frac{2c\tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^1}{\sqrt{\lambda+1}} + \frac{m\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2}{8(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} - \frac{-me^{-mx}}{8ct(\lambda+1)^2\sqrt{\lambda+1}}$
$\Gamma_2 =$	$-me^{mx}\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 + \frac{me^{mx}\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2(2\lambda+1)}{\sqrt{\lambda+1}} + \frac{2\lambda c e^{mx}\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2}{\sqrt{\lambda+1}}$ $\frac{-2\lambda}{t(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}$
$\Gamma_3 =$	$2c\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3 + \frac{2c\tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3}{\sqrt{\lambda+1}}$

4.2. Kütlesiz Dirac Denkleminin Çözümü

Kütlesiz Dirac denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left[\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \Gamma_\mu\right)\right]\psi = 0 \tag{4.2.1}$$

Bu denklem (4.1.9) bağıntısının yardımıyla Einstein toplama kuralı ile yazılırsa

$$\left\{h^{0}_{(0)}\tilde{\gamma}^{(0)}\left(\partial_0-\Gamma_0\right)+h^{1}_{(1)}\tilde{\gamma}^{(1)}\left(\partial_1-\Gamma_1\right)+h^{2}_{(2)}\tilde{\gamma}^{(2)}\left(\partial_2-\Gamma_2\right)+h^{3}_{(3)}\tilde{\gamma}^{(3)}\left(\partial_3-\Gamma_3\right)\right\}\psi=0 \quad (4.2.2)$$

bulunur.

Hesaplamalar kısmında yer alan değerler yukardaki denklemde yerine yazılırsa kütlesiz Dirac denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$\left\{\left(\tilde{\gamma}^{(0)}+\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\right)\partial_t+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{1}\partial_x+\frac{e^{-mx}}{ct\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{(2)}\partial_y+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{3}\partial_z\right\}\psi=0 \qquad (4.2.3)$$

Burada,

$\phi=\phi^0 e^{i(k_y y+k_z z-w\eta)}$ olduğu göz önünde tutulursa yukardaki denklem aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\left\{\left(\tilde{\gamma}^{(0)}+\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\right)\partial_t+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{1}\partial_x+\frac{e^{-mx}}{ct\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{(2)}\partial_y+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{3}\partial_z\right\}\varphi\, e^{i(k_y y+k_z z-w\eta\eta}=0 \qquad (4.2.4)$$

Burada,

$$t=e^{\eta c} \qquad (4.2.5)$$

fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Buna göre,

$$\partial_t=\frac{1}{ct}\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad (4.2.6)$$

olur. Bu ifadeyi (4.2.4) denkleminde yerine yazarsak (4.2.4) denklemi aşağıdaki forma dönüşür:

$$\left\{\left(\tilde{\gamma}^{0}+\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\right)\left(-\frac{iw}{ct}\right)+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{1}\partial_x+\frac{e^{-mx}}{ct\sqrt{\lambda+1}}\tilde{\gamma}^{2}\partial_y\left(ik_y\right)+\frac{1}{ct}\tilde{\gamma}^{3}\left(ik_z\right)\right\}\varphi_0=0 \qquad (4.2.7)$$

Denklemin her iki tarafı $\frac{ct}{i}$ ile çarpılırsa:

$$\left\{ -w\tilde{\gamma}^{0} - i\tilde{\gamma}^{1}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{ky}{e^{mx}} - w\right)\tilde{\gamma}^{2} + k_z\tilde{\gamma}^{3} \right\}\varphi_0 = 0 \tag{4.2.8}$$

denklemine dönüşür.

Bu denklemin çözümü için denklem, birinci dereceden birbirine komüt olan iki farklı işlemcinin toplamı olarak yazılabilir:

$$\left(\hat{K}_1 + \hat{K}_2\right)\varepsilon = 0 \tag{4.2.9}$$

Burada;

$$\hat{K}_1 = \left(-w\tilde{\gamma}^{0} + k_z\tilde{\gamma}^{3}\right)\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{3} \tag{4.2.10}$$

$$\hat{K}_2 = \left(-i\tilde{\gamma}^{1}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{ky}{e^{mx}} - w\right)\tilde{\gamma}^{2}\right)\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{3} \tag{4.2.11}$$

şeklindedir ve ε için aşağıda verilen eşitlik söz konusudur:

$$\varepsilon = \tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{3}\varphi_0 \tag{4.2.12}$$

$\hat{K}_1$ ve $\hat{K}_2$ işlemcilerinin ε spinörüne etkisi aşağıdaki bağıntılar ile verilir:

$$\hat{K}_1\varepsilon = -\hat{K}_2\varepsilon = ik\,\varepsilon \tag{4.2.13}$$

Burada k ayırma sabitidir.

Yapılan hesaplamalar için aşağıda verilen Dirac matrisleri (Jauch ve Rohrlich 1976) kullanılacaktır:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} , \qquad \tilde{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad i= 1, 2, 3 \tag{4.2.14}$$

Buna göre ε spinörü için aşağıda verilen ifade elde edilir:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \end{pmatrix} = i\sigma_3 \begin{pmatrix} -\varphi_{02} \\ \varphi_{01} \end{pmatrix} \tag{4.2.15}$$

$\hat{K}_1\, \varepsilon = ik\, \varepsilon$ denkleminde $\hat{K}_1$ ve ε değerlerini yerine yazarsak,

$$\left(-w\tilde{\gamma}^0 + k_z \tilde{\gamma}^3 \right) \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3\, i\sigma_3 \begin{pmatrix} -\varphi_{02} \\ \varphi_{01} \end{pmatrix} = ik\, i\sigma_3 \begin{pmatrix} -\varphi_{02} \\ \varphi_{01} \end{pmatrix} \tag{4.2.16}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklem uygun biçimde düzenlenirse,

$$-ik_z \sigma_3^2 \varphi_{02} + \sigma_3 w \varphi_{01} = -ik\varphi_{02} \tag{4.2.17}$$

$$-\sigma_3 w \varphi_{02} - -ik_z \sigma_3^2 \varphi_{01} = ik\, \varphi_{01} \tag{4.2.18}$$

Bu iki denklemin çözümünden aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$k^2 = k_z^2 - W^2 \tag{4.2.19}$$

(4.2.10) ve (4.2.15) ifadeleri göz önünde bulundurularak ε spinörü aşağıda verilen şekilde yazılabilir:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dfrac{-iw}{k_x + k}\sigma_3\varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{4.2.20}$$

Buna göre ε ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{4.2.21}$$

Burada ε ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dfrac{-iw}{k_x + k}\sigma_3\alpha \\ \dfrac{-iw}{k_x + k}\sigma_3\beta \end{pmatrix} \tag{4.2.22}$$

Burada σ_3 Pauli spin matrisidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2.23}$$

Bu ifadeyi (4.2.20) matrisinde yerine yazarsak ε spinörü için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dfrac{-iw}{k_x + k}\alpha \\ \dfrac{-iw}{k_x + k}\beta \end{pmatrix} \tag{4.2.24}$$

Şimdi (4.2.13) denklemini ele alalım:

$$\hat{K}_2\,\varepsilon = -ik\,\varepsilon \tag{4.2.25}$$

Burada;

$$\hat{K}_2 = \left(-i\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3\,\partial_x + \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{ky}{e^{mx}} - w\right)\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3 \right) \tag{4.2.26}$$

şeklindedir. Bu ifade de yer alan Dirac matrisleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.27}$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.28}$$

Bu matrislerle işlem yapıldığında (4.2.26) denkleminden aşağıdaki gibi çiftlenimli iki denklem elde edilmiş olunur:

$$\left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{k_y}{e^{mx}} - w\right)\right]\beta - ik\alpha = 0 \tag{4.2.29}$$

$$\left[\frac{d}{dx} - \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{k_y}{e^{mx}} - w\right)\right]\alpha + ik\beta = 0 \tag{4.2.30}$$

(4.2.29) denkleminden α'yı β cinsinden yazıp (4.2.30) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left[\frac{d^2\beta}{dx^2} - \frac{m_{ky}}{e^{mx}\sqrt{\lambda+1}}\beta - \frac{k_y^2\,\beta}{e^{2mx}(\lambda+1)} - \frac{w^2\beta}{(\lambda+1)} - k^2\beta\right] = 0 \tag{4.2.31}$$

Burada y =e^{-mx} dönüşümünü uygularsak,

$$\frac{dy}{dx} = -me^{mx} = -my \qquad (4.2.32)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{dy}{dx}.\frac{d\beta}{dy} = -my\frac{d\beta}{dy} \qquad (4.2.33)$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = m^2y\frac{d\beta}{dy} + m^2y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} \qquad (4.2.34)$$

buluruz.

Bu ifadeleri (4.2.31) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$m^2y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + m^2y\frac{d\beta}{dy} - \frac{myk_y\beta}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{y^2ky^2\beta}{(\lambda+1)} - \frac{w^2ky^2\beta}{(\lambda+1)} - k^2\beta = 0 \qquad (4.2.35)$$

Denklem düzenlenirse:

$$\frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\beta}{dy} - \left(\frac{k_y}{my\sqrt{\lambda+1}} + \frac{k_y^2}{m^2(\lambda+1)} + \frac{w^2}{m^2y^2(\lambda+1)} + \frac{k^2}{m^2y^2}\right)\beta = 0 \quad (4.2.36)$$

Burada $\frac{1}{y}\frac{d\beta}{dy}$ terimini yok etmek için β=z.y$^{-1/2}$ dönüşümünü uygulayalım:

$$\frac{d\beta}{dy} = y^{-1/2}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2}y^{-3/2}.z \qquad (4.2.37)$$

$$\frac{d^2\beta}{dy^2} = y^{-1/2}\frac{d^2z}{dy^2} - y^{-3/2}\frac{dz}{dy} + \frac{3}{4}y^{-5/2}.z \qquad (4.2.38)$$

Bu ifadeler (4.2.36) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{1}{4y^2}-\frac{ky}{my\sqrt{\lambda+1}}-\frac{ky^2}{m^2(\lambda+1)}-\frac{w^2}{m^2y^2(\lambda+1)}-\frac{k^2}{m^2y^2}\right).z=0 \quad (4.2.39)$$

Whittaker denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)\psi=0 \quad (4.2.40)$$

(4.2.39) denklemi Whittaker denklemine benzetilirse:

$$\frac{d^2z}{dy^2}+\left[-\eta-\frac{\sqrt{\eta}}{y}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{y^2}\right]z=0 \quad (4.2.41)$$

$$\eta=\frac{ky^2}{m^2(\lambda+1)}\ ,\ \mu^2=\frac{k^2}{m^2}+\frac{w^2}{m^2(\lambda+1)} \quad (4.2.42)$$

şeklinde bir denklem meydana gelir. Bu denklemin çözümü Whittaker fonksiyonları cinsinden verilir. Whittaker fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\psi=c_1M_{\lambda,\mu}(z)+c_2w_{\lambda,\mu}(z) \quad (4.2.43)$$

Buna göre (4.2.41) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$z(y)=c_1M\left(-\frac{1}{2},\mu,2y\sqrt{\eta}\right)+c_2w\left(-\frac{1}{2},\mu,2y\sqrt{\eta}\right) \quad (4.2.44)$$

Yani,

$$z(y) = c_1 M\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}}, \frac{2k_y y}{m\sqrt{\lambda+1}} \right)$$

$$+ c_2 w\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}}, \frac{2k_y y}{m\sqrt{\lambda+1}} \right) \tag{4.2.45}$$

Şimdi de Whittaker fonksiyonlarını M(k, m, z) şeklindeki confluent hypergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazacağız. Buna göre,

$$k \to \frac{-1}{2}$$

$$m \to \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}} \tag{4.2.46}$$

$$z \to \frac{2k_y}{m\sqrt{\lambda+1}} y$$

dönüşümü göz önünde bulundurularak $M_{\eta,\mu}(y)$ şeklindeki confluent hypergeometric fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır:

$$M_{\eta,\mu}(y) = e^{\frac{-ky}{m\sqrt{\lambda+1}} y} \left(\frac{2ky}{m\sqrt{\lambda+1}} \right)^{\left(\frac{\sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}} + 1}{2} \right)} F_1\left(1 + \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}} \right.$$

$$\left. 1 + 2\sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}}, \frac{2k_y y}{m\sqrt{\lambda+1}} \right) \tag{4.2.47}$$

4.3. Dirac Parçacıklarının Frekansının Kuantumlanması

Denklem (4.2.47) ile verilen $\sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{w^2}{m^2(\lambda+1)}}$ ifadesini göz önünde bulunduralım. Burada,

$$k^2 = k_z^{\;2} - w^2 \tag{4.3.1}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi, köklü ifadede yerine yazıp ifadeyi $\sqrt{(n^2)}$'ye eşitlersek w için aşağıdaki bağıntı meydana gelir:

$$w = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\, m \sqrt{\frac{k_z^{\;2}}{m^2} - n^2} \qquad \text{(n: tamsayı)} \tag{4.3.2}$$

Burada son terimin anlamlı olması için

$$\frac{k_z^{\;2}}{m^2} > n^2 \tag{4.3.3}$$

şartı sağlanmalıdır.

Buna göre:

$$\frac{k_z}{m^2} = n^2 + \beta^2 \qquad (\beta\text{= tamsayı}) \tag{4.3.4}$$

olmalıdır. Böylece frekans ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$w = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\, m\, \beta \tag{4.3.5}$$

Bu ifadeden Dirac parçacıklarının frekans spektrumunun kuantumlu olduğu sonucuna varırız.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yukarı atılan bir cisim bir süre sonra döner ve yere düşer. Irmaklar hep yukardan aşağıya doğru akar. Bunun açıklamasını "yerçekimi" olarak yaparız. Bu, tüm kütleli nesnelerde, gezegenlerde ve yıldızda varolan bir kuvvettir ve ona "kütle çekimi" diyoruz. Bu çekim, en yoğun cisimleri ve boşluğu eşit oranda donatır. Uzaklıkla azalır ama hiçbir şekilde kaybolmaz. Atmosferi yerkürenin çevresinde tutan kuvvet ya da bizim evren boşluğuna uçup gitmemizi engelleyen kuvvet, Dünya'nın uyguladığı kütle çekimi kuvvetidir. İnsanoğlu çok eski zamanlarda da kütle çekimini sezmiş ve onu hesaba katmış olmalıdır. Fakat kütle çekimi için ilk bilimsel kuram geliştiren ve bunu, evreni kapsayacak kadar genişleten büyük İngiliz bilimcisi Sir Isaac Newton'dur.

Newton'un evrensel çekim yasası, fizikteki en önemli dönüm noktalarından biridir. Bu yasa, dünya daki tüm maddelerin hatta yıldızların, gezegenlerin ve galaksilerin kütle çekimi etkisiyle evrende nasıl hareket ettiğini hesaplamamıza yarar. Fakat bu yasa kütle çekiminin ne olduğu ya da nasıl çalıştığı hakkında yetersiz kalmaktadır. Einstein'in özel ve genel görelilik kuramları ise kütle çekiminin ne olduğu ya da nasıl çalıştığı hakkında bilgi verse de çok yoğun ve çok küçük ortamlarda kütle çekiminin nasıl işlediğine dair soruları yanıtsız bırakmaktadır. Fakat biz Dünya'nın başlangıcı kabul edilen Büyük Patlama Olayı – ki bu anda evren inanılmaz küçük ve yoğundu – ile her şeyin nasıl başladığını bilmek istiyorsak bu en küçük mesafelerde yerçekiminin nasıl işlediğini bilmek zorundayız. Eğer kütle çekiminin en küçük atomaltı parçacıklarda nasıl çalıştığını açıklayabilirsek o zaman belki Einstein ve Newton'un başladıkları çalışmayı bitirip bu gizemli çekim gücünün tam bir resmini ortaya koyabiliriz. Aradığımız bu sorulara yanıt bulmak için ise kuantum – gravite kuramını göz önünde bulundurmalıyız.

Eğri uzay / zamandaki kuantum etkileri çalışması, kütle çekiminin madde ile etkileşimini anlamanın başlıca yoludur. Eğru uzay-zamandaki kuantum etkilerini analiz etmek için ise uzay – zamandaki göreli dalga denklemlerinin tam çözümünün detaylı araştırması gereklidir.

Bu çalışmada, Genel Görelilik Kuramı'nda sabit olmayan Gödel tipi kozmolojik evrende relativistik parçacıkların kuantum denklemleri olan Schrödinger, Klein – Gordon ve Dirac denklemleri hakkında kısa bilgiler ve bağıntılar verildi. Diğer taraftan eğri uzay – zamandaki kuantum etkileri çalışması yani kütle çekiminin madde ile etkileşmesinin daha kolay anlaşılabilmesi için kütle çekimi hakkında bazı bilgiler verildi. Materyal ve metod kısmında, hesaplamalarda kullanılan Genel Görelilik kuramındaki terimler ve bağıntılar açıklandı. Araştırma Bulguları kısmında ise dönen Gödel – tipi kozmolojik evren modeli ile ilgili olan metrik ele alınarak Dirac denklemi analiz edildi. Genel Görelilik kütle çekiminde kütlesiz Dirac denklemi için bulunan çözümlerin değişkenlerine ayırma yoluyla verilen aynı metriğe göre yapılan çözümler ile tutarlı olduğu görüldü. Elde edilen diferansiyel denklem çözümlerinden Dirac parçacıklarının frekans spektrumunun kuantumlanması elde edildi.

$$w = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\, m\,\beta \qquad (\beta = \text{tamsayı}) \tag{5.1}$$

Bu tezde elde edilen sonuçlar eğri uzay – zamanda göreli dalga denklemlerinin tam çözümünün, eğri uzay – zamandaki kuantum etkilerini analiz etmek için gerekli olduğunu vurgular niteliktedir. Dolayısıyla bulunan sonuçlar, genişleyen eğri uzay – zamanda kuantum alan teorisinin tartışılması için kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

Bagrov, V.G., Shapovalov, A.B. and Yevseyevich, A.A. 1990. Separation of variables in the Dirac equation in Stackel spaces. Class. Quantum Grav., 7: 517

Barut, A.O.and Duru, I.H.1987. Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson – Walker space – time. Phys.Rev.D, 36: 3705.

Brill, D. And Whceler, J.A. 1957. Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields. Rev. Mod. Phys., 29: 465 – 479.

Carter, B. 1968. Hamilton – Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einsten's equations. Phys. Rev., 10: 280.

Chandrasekhar, S. 1976. The solution of Dirac's equation in Kerr geomtry. Proc. R. Soc. London Ser. A., 349: 571-575.

Chandrasekhar, S. 1983. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Pres, Oxford, 213: 231. England.

Cohen, J.M., Visheveshwara, C.V., and Dhurandhar, S.V.1980. Elektromagnetic fields in the Gödel type universe. J. Physics., 13: 933.

Cottingham, W. N. 2001. An introduction to the Standard model of particle pysics. University of Bristol, 49-56, UK.

Cresser, J.D. 2005. Lecture Notes on Special Relativity. Macquorie University, 7-44, Sydney.

Davis, T.M. and Ray, J.R.1974. Gravity and Neutrinos Paradoxes and Possibilities. Phys. Rev. D., 9: 331.

Debever, R., Karman, N., and McLenaghon, R.G. 1982. Separation of variables and quantum numbers for Weyl nevtrino fields on curved space – time. J. Math. Phys., 7: 381-386.

Debever, R., Karman, N. and McLenaghon, R.G. 1984. Exhaustive integration and a single expression for the general solution of the type D vacuum and elektrovac field equations with cosmological constant for a non – singular aligned Maxwell field. J. Math. Phys., 25: 1955.

Dudley, A.L., and Finley, J.D. 1979. Covariant perturbed wave equations in arbitrary type – D backgrounds. J. Math. Phys., 20: 311.

Einstein, S. and Finkelstein, R. 1977. Lorentz covariance and the Kerr – Newman geometry. J. Math. Phys., 18: 664.

Fels, M. And Karman, N. 1990. Nonfactorizable separable systems and high – order symmetries of the Dirac operator. Proc. R. Soc. London Ser. A., 425: 249.

Hees, H. 2003. Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. University of Bielefeld, 78, Bielefeld.

Hwang, W. Y. 1991. Relativistic Quantum Mechanicsz and Quantum Fields. World Scientific Publishing, 453, Brazil.

Jauch, J.M. and Rohrlich, F. 1955. The Theory of Photons and Electrons. Addison – Wesley Publishing Company, 483, USA.

Joshi, A.W. 1975. Matrices and Tensors in Physics, Institute of Advanced Studies, 51, England.

Kalnins, E.G., Miller, W. And Williams, C. G. 1986 Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables. J. Math. Phys. 27: 1893-1900.

Kamran, N. And McLenaghan, R.G. 1984. Separation of variables and symmetry operators for the neutrino and Dirac equations in the space – times admitting a two – parameter abelian orthogonally transitive isometry group and a pair of shearfree geodesic null congruences. J. Math. Phys., 25: 1019-1020.

Keskin, A. 2011. Spin $-\frac{1}{2}$ particles in a teleparallel universe when a constant elektric field is present. Yayına gönderilmiş yüksek lisans tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, 2011.

Krori, K.D., Chaudhury, T. And Bhattacharjee, R. 1982. Some exact solutions of Einstein-Dirac –Maxwell fields and massive nevtrino. Phys. Rev. D., 25: 1492.

Krori, K.D., Borgohain, P., and Das, D. 1987. Exact scalar and spinor solutions in some rotating universes., J. Math. Phys., 29 (7): 1645.

Lotze, K.H. 1990. Production of massive spin $-\frac{1}{2}$ porticles in Robertson – Walker universes with external elektromagnetic fields. Naturwiss. Reihe., 39: 98.

Patra, A.C. and Ray, D. 1986. Some exact solutions of Einstein – Dirac – Maxwell fields and massive neutrino. J. Math. Phys., 27: 568.

Percoco, U. and Villalba, M. 1991. Exact solutions to Klein – Gordon and Weyl equations in a perfectfluid Einstein – Maxwell space – time with local rotational symmetry. J. Phys., 69: 665.

Pimentel, L.O., and Macias, A. 1986. Klein – Gordon and Weyl equations in the Gödel universe. Phys. Lett. A., 117: 325.

Pimentel, L.O., Camacho, A. and Macias, A. 1994. Weyl equation in Gödel type universes. J. Math. Phys., 55: 534.

Reed, M. And Simon, B. 1980. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Pres, 395, America.

Shishkin, G.V. and Villalba, V.M. 1991. Neutrinos in the presence of gravitational fields: Separation of variables. J. Math. Phys., 33 (6): 2093 – 2096.

Srivastava, S.K. 1989. Solution of the Dirac equation in Kasner's space – time. J. Math. Phys., 30: 2838.

Tevkolsky, S.A. 1973. Rotating Stars in Relativity. Astrophys. J., 185: 635.

Villalba, V.M and Percoco, V. 1990. Separation of variables and exact solution to Dirac and Weyl equations in Robertson – Walker space – times. J. Math. Phys., 31: 715.

Villalba, V. M. 1993. Dirac spinor in a nonstationary Gödel – type cosmological universe. J. Math. Phys., 425: 3011-3018.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Gülistan AKKAYA

Doğum Yeri: Diyarbakır

Doğum Tarihi: 19.10. 1984

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

EĞİTİM DURUMU (KURUM VE YIL)

Lise: Diyarbakır Anadolu Lisesi, 2003

Lisans: Dicle Üniversitesi, 2008 (Fizik Bölümü)

Yüksek Lisans: Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011