T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA $L^{p(.)}(\Omega)$ HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Mustafa Özgür KELEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

ARALIK - 2011

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Mustafa Özgür KELEŞ tarafından yapılan " Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ Hardy Operatörünün Sınırlılığı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan: Prof. Dr.	Sezai OĞRAŞ
Üye : Doç. Dr.	Selahattin GÖNEN
Üye : Yrd. Doç. Dr.	Aziz HARMAN (DANIŞMAN)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 30/12/2011

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

30/12/2011

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

T.C DİCLE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1973

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilimsel ve manevi katkılarını her zaman yanımda hissettiğim ve bana çok emeği geçen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Aziz HARMAN' a, bilimsel kişiliği, düşünceleri ve tecrübelerinden çokça istifade ettiğim Prof. Dr. Farman MAMADOV' a ve tüm desteklerinden dolayı sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA $L^{p(\cdot)}(\Omega)$
HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Özgür KELEŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2011

Bu yüksek lisans tezinde Hardy operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı ile ilgili çeşitli koşullar ve ilgili Hardy tipli eşitsizlikler incelenmiştir.

Birinci bölümde, Hardy operatörünün ve Hardy eşitsizliğinin tarihsel gelişimi ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde bu tezde kullanacağımız temel tanımlar tanıtılarak ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Orlicz uzayları (L^{φ}) ve değişken üstlü Lebesgue uzayları ($L^{p(\cdot)}$) tanıtılmış, değişken üstlü Lebesgue uzaylarının bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde öncelikli olarak klasik Lebesgue uzaylarında (L^p) Hardy operatörü ve Hardy tipli eşitsizliklere yer verilmiş, sonrasında ise Orlicz uzaylarında Hardy operatörü ve Hardy eşitsizlikleri özetle tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde Hardy operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı, yapılmış olan bazı çalışmaların yardımıyla ifade edilmeye çalışılmıştır.

ABSTRACT

BOUNDEDNESS OF HARDY OPERATOR

IN VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES $L^{p(.)}(\Omega)$

MASTER THESIS

Mustafa Özgür KELEŞ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF DICLE

2011

This postgraduate thesis deals with boundedness of Hardy operator in variable exponent Lebesgue spaces and related Hardy-type inequalities.

In Chapter 1 an overview of development and application areas of Hardy operator and Hardy inequalities are mentioned.

In Chapter 2 basic concepts and related theorems used in this thesis are described.

In Chapter 3 Orlicz spaces (L^{φ}) and variable exponent Lebesgue spaces ($L^{p(.)}$) are discribed and some properties of variable exponent Lebesgue spaces are examined.

In Chapter 4 before all else Hardy operators and Hardy inequalities in classical Lebesgue spaces (L^{p}) are examined and then these are briefly represented in Orlicz spaces.

In Chapter 5 the boundedness of Hardy operators and Hardy inequalities in variable exponent Lebesgue spaces are tried to express by the means of some studies.

1. GİRİŞ

1900'lü yılların başında David Hilbert tarafından Hilbert eşitsizliği olarak bilinen ve aşağıda verilen (1.1) eşitsizliği ifade edildi ve bundan sonra birçok matematikçi bu eşitsizliğin farklı ispatları üzerinde çalıştı.

Teorem 1.1. [Hilbert eşitsizliği]. $a_m \geq 0$ ve $a_m \geq 0$ olmak üzere eğer $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 < \infty$ ise bu durumda $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ serisi yakınsaktır.

Daha açık olarak;

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 \right)^{1/2} \tag{1.1}$$

eşitsizliği π mükemmel sabitiyle sağlanır.

Hilbert eşitsizliğinin farklı ve daha kolay bir ispatını yapmak amacıyla G.H. Hardy 1920 [27] yılında bugün Hardy eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliğin integral formunu ve 1925 yılında yayınladığı ünlü makalesinde de bu eşitsizliğin diziler için olan formunu ispatlarıyla birlikte vermiştir. Literatürde bu eşitsizliklere sürekli Hardy eşitsizliği ve kesikli Hardy eşitsizliği denmektedir. Dördüncü bölümde de bahsedeceğimiz gibi G.H. Hardy'nin bu çalışmalarından sonra birçok matematikçi Hardy eşitsizliğinin farklı durumları üzerinde çalışmıştır.

Sabit üstler için Hardy eşitsizliği klasik bir konudur. Bu zamana kadar Hardy operatörü için tam bir ağırlık teorisi kurulduğu söylenebilir. Bilinen sonuçların ilgi çekici bir kronolojisini şöyle sıralayabiliriz: [2, 4, 8, 12]. [11, 36, 63]'de $1 < p \leq q < \infty$ durumunun maksimum üzerinde bir parametreli bir probleme dönüştüğü gösterilirken, [25, 63]'de $0 < q < p,\ 1 \leq p < \infty$ durumunda bir has olmayan (improper) integralin yakınsaklığına dönüştüğü gösterilmiştir. Aynı eşitsizliği tanımlamak için farklı kriterlerin mümkün olduğunu hatırlatmak uygun olacaktır. [bkz. 2, 4, 6, 12, 14, 15]

Hardy eşitsizliğinin bu kadar çok bilim adamı tarafından farklı koşullar altında çalışılmış olmasının nedeni ise bu eşitsizliğin matematiğin birçok alanında uygulamasının olmasıdır. Bu alanların başlıcalarını şöyle sıralayabiliriz:

1. Adi diferansiyel denklemler teorisi
    - Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı,
    - Kestirim problemleri,
    - L^2 de diferansiyel operatörler teorisi,

- Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi,
- Sturm-Liouville Problemleri,

2. Fonksiyonel Analiz
   - Ağırlıklı Sobolev uzayları için gömülme teoremleri,
   - Operatörler için interpolasyon teorisi,
3. Kompleks fonksiyonlar teorisi
   - Laplace dönüşümü teorisi,
   - Fourier seriler teorisi [34 s. 175].

Ayrıca Hardy eşitsizlikleri fizikteki en bilinen örneği olarak elektroreolojik akışkanların davranışlarının matematiksel ifadesinde [39] uygulama alanı bulmuştur.

1931 yılında W. Orlicz [69] tarafından değişken üstlü Lebesgue uzayının $L^{p(.)}(\Omega)$ tanımı yapıldıktan sonra, bu uzay matematiğin harmonik analiz, fonksiyonel analiz, varyasyonel analiz, operatör teorisi, nonlineer analiz, kısmi diferansiyel denklemler teorisi, sınır değer problemleri, matematik modelleme ve integral denklemler gibi birçok alanındaki uygulamalarda yer almıştır.

Lebesgue uzaylarıdaki özgün fikir ve yaklaşımların, integral operatörler teorisine [1, 7, 16, 35, 41-43,51] ve non-Newton sistemler teorisine son bir uygulaması ile, Hardy tipli eşitsizliklerin değişken üstlü Lebesgue uzaylarında incelenmesi mümkün kılınmıştır. Bu yaklaşımların ışığında klasik sonuçlar $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ uzayları normlarıyla etkili bir şekilde yeniden formüle edilebilir [17, 44, 51]. Bu gelişmelerle birlikte değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Hardy operatörünün kompaktlık, sınırlılık gibi özellikleri ve ilgili olarak Hardy eşitsizlikleri hakkında birçok bilim adamı tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır. [2-5, 10, 12, 17, 18, 21-24, 30, 37, 40, 45, 46, 51-53, 55-60, 64-67, 73]. Sonuç olarak Hardy eşitsizliği ile ilgili çok sayıda kitap yazılmıştır. Bu kitapların başlıcaları:

1. Klasik eşitsizlikler üzerine Hardy-Littlewood-Pólya [29];
2. B. Opic and A. Kufner [12];
3. A. Kufner and L.-E. Persson [5];
4. Hardy eşitsizliğinin tarihsel gelişimi üzerine bir kitapçık niteliğindeki çalışmalarıyla A.Kufner, L. Malingranda, L.E. Persson [6];
5. Hardy eşitsizliğinin detaylı tarihsel gelişimi ve Hardy eşitsizliği hakkında yeni bilgileri içeren A. Kufner, L. Maligranda, L.E. Persson [4] şeklindedir.

Günümüzde Hardy operatörü ve Hardy tipli eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar hem değişken üstlü Lebesgue uzaylarında hem de diğer birçok fonksiyon uzaylarında devam etmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde metrik, metrik uzay, norm, normlu uzay, operatör, Lebesgue integrali, klasik Lebesgue uzayları ve özellikleri ile bazı temel teorem ve eşitsizlikler ispatları olmadan verilecektir.

2.1. Metrik Uzay

X, elemanları $u, v, w, \ldots$ olan bir küme olsun. $X \times X$ Kartezyen çarpımında tanımlı negatif olmayan bir ρ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa ρ 'ya bir metrik denir.

(i.) $\rho(u,v)=0$ ancak ve ancak $u=v$ ise

(ii.) $\rho(u,v)=\rho(v,u)$

(iii.) $\rho(u,v)\leq \rho(u,w)+\rho(w,v)$

ρ, X de tanımlı bir metrik olmak üzere (X,ρ) çiftine bir metrik uzay denir.

(X,ρ) metrik uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

(a.) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $n \geq N$ için

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsar (ya da $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

veya

$$x_n \to x$$

yazılır.

(b.) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq N$ için

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir **temel dizi** (veya **Cauchy dizisi**) denir. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir, ancak tersi doğru değildir.

(X,ρ) bir metrik uzayı olsun. Herhangi $x \in X$ noktası ve herhangi $r > 0$ sayısı için

$$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar (açık top),

$$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar (kapalı top),

$$S_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) = r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı küre yüzeyi (sphere) denir.

(X,ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a. Her $x, y \in A$ için $\rho(x,y) < c$ olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı varsa A sınırlıdır denir.

b. $x \in A$ noktası için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x e A nın bir iç noktası denir ve A nın bütün iç noktaları $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir. Her bir $x \in A$ noktası için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa (yani A nın her noktası bir iç nokta ise) A bir açık kümedir denir. Bir $x \in A$ noktası için x i kapsayan herhangi bir açık kümeye x noktasının bir komşuluğu denir.

c. $X \backslash A$ kümesi açık ise A kapalıdır.

d. $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\rho(x,y) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in A$ varsa (denk olacak biçimde $y_n \to x$ olacak biçimde bir $\{y_n\} \subset A$ dizisi varsa) x e A nın bir kapanış noktası denir.

e. A kümesinin bütün kapanış noktalarının kümesi $\overline{A}$ ile gösterilir ve A nın kapanışı olarak adlandırılır.

f. $A \subset B \subset X$ olmak üzere eğer her bir $v \in B$ ve $\varepsilon > 0$ için $\|v-u\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir $u \in A$ varsa A ya B de yoğundur denir. $\overline{A} = X$ şeklinde gösterilir.

2.2 Norm ve Normlu Uzay

X elemanları $u, v, w, \ldots$ olan bir küme olsun. X de toplama işlemi tanımlı olsun, yani u, v çifti için u, v nin toplamına karşılık gelen ve $u+v$ ile gösterilen bir

$$w = u + v$$

$w \in X$ olsun. Ayrıca X de skalerle çarpım tanımlı olsun, yani her reel (kompleks) λ (skaler) sayısı ve $u \in X$ e karşılık u nun $\lambda -$katı olarak adlandırılan ve λu (veya $\lambda . u$) olarak yazılan bir

$$w = \lambda u$$

$w \in X$ olsun.

Toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımlı olduğu bir X kümesi eğer aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir reel (kompleks) vektör uzayı denir.

(i.) $u + v = v + u$;

(ii.) $u + (v + w) = (u + v) + w$;

(iii.) X de yer alan ve θ ile gösterilen tek bir sıfır elemanı vardır öyle ki her $u \in X$ için

$$u + \theta = u\,;$$

(iv.) her $u \in X$ için X de $-u$ ile gösterilen tek bir eleman vardır öyle ki

$$u + (-u) = \theta\,;$$

(v.) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}(\lambda \in \mathbb{C})$;

(vi.) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$;

(vii.) $\lambda(\mu u) = (\lambda \mu)u,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$;

(viii.) $1.u = u$;

(ix.) $0.u = \theta$

X bir vektör uzayı olmak üzere, X de tanımlı negatif olmayan ve $u \in X$ deki değeri $\|u\|$ ile gösterilen fonksiyon eğer aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa u fonksiyonuna norm denir.

i. $\|u\| = 0$ ancak ve ancak u=θ (θ, X vektör uzayının sıfır vektörü.)

ii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (homojenlik aksiyomu)

iii. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (üçgen eşitsizliği)

Normu $\|.\|$ olan bir X vektör uzayına normlu lineer uzay denir. $\|u\|$ sayısına $u \in X$ in normu denir.

Eğer normun X vektör uzayında olduğu belirtilmesi gerekiyorsa $\|u\|$ gösterimi yerine $\|u\|_X$ gösterimi kullanılır. Bazı durumlarda X normlu lineer uzayı $\left(X, \|.\|_X\right)$ ile gösterilir.

Eğer $\|.\|$ fonksiyonu sadece (ii) ve (iii) aksiyomlarını sağlıyorsa buna yarı-norm (seminorm veya bazen pseudonorm) denir.

X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımında tanımlı (u,v), $u \in X$, $v \in X$ sıralı ikilisindeki değeri $\langle u,v \rangle$ şeklinde gösterilen fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım denir.

(i.) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$;

(ii.) $\langle \lambda u,v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$(veya $\lambda \in \mathbb{C}$);

(iii.) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$;

(iv.) $\langle u,v \rangle > 0$, $u \neq \theta$ ise.

İç çarpıma sahip bir vektör uzayına bir İç Çarpım Uzayı (veya pre-Hilbert Uzayı) denir.

Bir $M \subset X$ altkümesi için eğer $\overline{M} = X$ ise M (X içinde) yoğundur denir. Normlu lineer bir X uzayının sayılabilir bir yoğun $M \subset X$ altkümesi varsa X ayrılabilirdir denir.

Her temel dizinin (Cauchy dizisinin) (X de) yakınsak olduğu X normlu lineer uzayına tam uzay denir. Tam normlu lineer uzaya ise Banach uzayı denir.

X , $\langle u,v\rangle$ iç çarpımıyla bir iç çarpım uzayı ve $\|u\|=\langle u,v\rangle^{1/2}$ normuna göre tam olsun, bu durumda X e bir Hilbert uzayı denir.

X normlu lineer uzayının kapalı, lineer bir alt kümesine X in bir alt uzayı denir.

Eğer M deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa (yani limiti X de olan bir dizi) X deki M kümesine ön kompakt denir. Eğer M kapalı ve ön kompaktsa M ye kompakt denir.

Teorem 2.2.1.[Heine-Borel Teoremi] Bir $E\subset\mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart E kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

2.3. Operatör ve Fonksiyonel

X,Y aynı K cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olsun. $L:D(L)\subset X\to R(L)\subset Y$ dönüşümü $D(L)$ alt uzayındaki bir u elemanını Y uzayındaki bir tek elemana götürüyorsa, bu durumda L ye operatör , $D(L)$ ye L operatörünün tanım kümesi ve $R(L)$ ye de L operatörünün değer kümesi denir.

$D(L)\subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere, $L:D(L)\subset X\to Y$ operatörüne her $x,y\in D(L)$ ve $\alpha,\beta\in K$ için $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$ koşuluyla birlikte lineer operatör denir.

$L:X\to Y$ bir operatör olmak üzere. Eğer her $x\in X$ için $Lx=0$ oluyorsa L’ye sıfır operatörü ve eğer her $x\in X$ için $Lx=x$ oluyorsa L’ye özdeşlik operatörü veya birim operatör denir. Birim operatör genellikle I ile gösterilir.

$\{u_n\}\in D(L)$ ve $u\in D(L)$ olmak üzere her $\{u_n\}$ dizisi için; X de $u_n\to u$ olması Y de $L(u_n)\to Lu$ olmasını belirtiyorsa L operatörüne süreklidir denir.

Sürekli lineer operatörler için normdan (başka bir değişle operatör normundan) bahsedebiliriz. L , X den Y ye bir sürekli lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\|L\|=\sup\|Lu\|_Y$$

şeklinde tanımlıdır, burada supremum tüm $D(L)$ üzerinde alınmıştır öyle ki $\|u\|_X\leq 1$ dir. L nin normu için aşağıdaki formüller çoğu zaman kullanışlıdır:

$$\|L\| = \sup_{\substack{u\in D(L)\\ \|u\|_X=1}} \|Lu\|_Y = \sup_{\substack{u\in D(L)\\ u\neq\theta}} \frac{\|Lu\|_Y}{\|u\|_X}$$

$L : D(L) \subset X \to Y$ operatörü ve $M \geq 0$ sayısı için eğer

$\|Lu\|_Y \leq M \|u\|_X$

oluyorsa L operatörüne sınırlı operatör denir.

Teorem 2.3.1. Lineer bir L operatörü sınırlıdır eğer, $\sup\|Lu\|_Y < \infty$, burada supremum tüm $D(L)$ üzerinde alınmıştır öyle ki $\|u\|_X \leq 1$ dir.

Teorem 2.3.2. Lineer bir operatör ancak ve ancak sürekli ise sınırlıdır.

Teorem 2.3.3.[Banach Teoremi (Ters Operatörün Sürekliliği Üzerine)] X, Y Banach uzayları, L, $D(L) = X$ (ve $R(L) = Y$) olan X den Y ye lineer bir operatör olsun. L nin sürekli ve L^{-1} in var olduğunu varsayalım. Bu durumda L^{-1} süreklidir.

L, X normlu lineer uzayından Y normlu lineer uzayına bir lineer operatör ve $D(L) = X$ olsun. Eğer L operatörü X deki her sınırlı kümeyi Y deki ön kompakt bir kümeye götürüyorsa yani, $A \subset X$ sınırlı kümesi için $L(A) \subset Y$ ön kompakt ise L operatörüne kompakt operatör veya tamamen sürekli operatör denir.

Teorem 2.3.4. [Banach-Steinhaus Teoremi (Düzgün Sınırlılık Prensibi)] X bir Banach uzayı ve Y normlu lineer uzay ve $\{T_n\}$ X den Y ye tanımlı sınırlı (sürekli) bir operatörler dizisi olsun. Her $x \in X$ için $\{\|T_n x\|\}$ dizisi sınırlı ise o zaman normların $\{\|T_n\|\}$ dizisi de sınırlıdır, yani her $x \in X$ için c_x bir reel sayı olmak üzere

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leq c_x < \infty$$

ise o zaman

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq c < \infty$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır.

Aynı K cismi üzerinde tanımlı X ve Y lineer uzayları için $D(T)=X$ ve $R(T)=Y$ olan X den Y ye sürekli lineer bir operatör T operatörü var ve bunun tersi olan T^{-1} operatörü var ve sürekli ise X ve Y ye izomorfik ve T ye de X ve Y arasında izomorfik dönüşüm veya kısaca izomorfizm denir.

(X,ρ) ve (Y,σ) birer metrik uzay olmak üzere, her $x,y\in X$ çifti için $D(T)=X$, $R(T)=Y$ ve

$$\rho(x,y)=\sigma(Tx,Ty)$$

olan bir T operatörü varsa X ve Y ye izometrik denir.

X,Y normlu lineer uzaylar olmak üzere eğer her $u,v\in X$ çifti için $D(T)=X$, $R(T)=Y$ ve

$$\|u-v\|_X=\|Tu-Tv\|_Y$$

olacak şekilde bir T lineer operatörü varsa X,Y ye izometri olarak izomorfik denir. İzometrik olarak izomorfik iki uzak izometriktir.

X,Y iki normlu lineer uzay $X\subset Y$ ve I $D(I)=R(I)=X$ olan birim operatör olsun. Eğer I apaçık lineer ve ek olarak sürekli ise bu durumda I gömülme operatörü ya da kısaca gömülme olarak adlandırılır ve $X\rightarrow Y$ ile gösterilir.

Eğer eş zamanlı olarak $X\rightarrow Y$ ve $Y\rightarrow X$ ise $X\rightleftarrows Y$ yazılır.

Gömülmenin sürekliliği, her $u\in X$ için

$$\|u\|_Y\le c\|u\|_X$$

olmasını gerektirir.

X in bir vektör uzayı, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ nin X de iki norm olduğunu varsayalım. Eğer, tüm $u\in X$ ler için

$$c\|u\|_1\le\|u\|\ \le d\,\|u\|_1$$

olacak şekilde $c>0,d>0$ sayıları varsa bu iki norma denk norm denir. Sonlu boyutlu bir uzayda tüm normlar denktir.

Başka bir değişle $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarının denk olması için gerek ve yeter şart $\left(X,\|.\|_1\right) \rightleftarrows \left(X,\|.\|_2\right)$ olmasıdır. Özel olarak $\left(X,\|.\|_1\right)$ den $\left(X,\|.\|_2\right)$ ye olan gömülme bir izomorfizmdir.

X reel (kompleks) normlu lineer bir uzay ve Y reel eksen $\mathbb{R}$ (kompleks düzlem $\mathbb{C}$) olsun. X den Y ye lineer operatöre reel (kompleks) lineer fonksiyonel denir.

Teorem 2.3.5. [Hahn-Banach Teoremi] φ, X de yoğun olan lineer M kümesi üzerinde tanımlı lineer sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu durumda X üzerinde tanımlı öyle tek bir sürekli lineer Φ fonksiyoneli vardır ki

$$u \in M \text{ için } \Phi(u) = \varphi(u) \text{ ve } \|\Phi\| = \|\varphi\| \text{ dir.}$$

Teorem 2.3.6. X de tanımlı tüm sürekli fonksiyonellerin kümesini F ile gösterelim. Bu durumda $\varphi, \psi \in F$ ve λ bir skaler olmak üzere toplama

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$$

ve skaler çarpım

$$(\lambda.\varphi)(u) = \lambda.\varphi(u)$$

işlemlerinin tanımlanmasıyla F bir vektör uzayı belirtir. Dahası $\varphi \in F$ nin normunu

$$\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|$$

formülüyle tanımlarsak F normlu lineer bir uzay olur. Bu uzaya X in duali denir ve X^* ile gösterilir. Başka bir deyişle bir X normlu lineer uzayı üzerindeki tüm lineer fonksiyoneller uzayına X in duali denir.

Teorem 2.3.7. X normlu lineer bir uzay ise X^* bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.3.7. X bir normlu lineer uzay ve $\{u_n\}$ X 'de tanımlı bir dizi olsun. Eğer her $\varphi \in X^*$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \varphi(u)$ ise bu durumda u_n dizisi $u \in X$ 'e zayıf yakınsar denir ve

$$u_n \xrightarrow{w} u$$

ile gösterilir. Her zayıf yakınsak dizi sınırlıdır.

Teorem 2.3.8. X bir Banach uzayı ve X^* de duali olsun. Bu durumda X^* in duali

$$\left(X^*\right)^* = X^{**}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $X^{**} = X$ ise bu durumda X 'e refleksivdir denir.

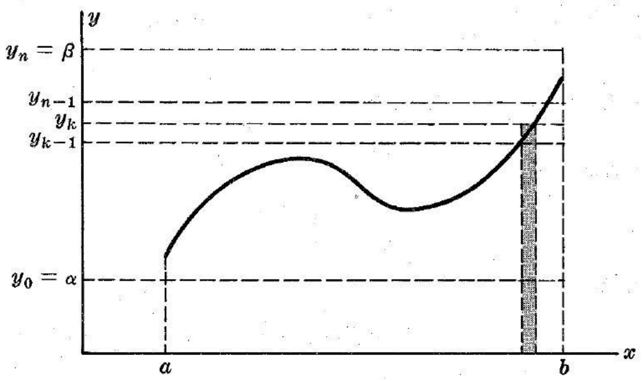
2.4. Lebesgue İntegrali ve İlgili Teoremler

Lebesgue uzayını (L^p) tanımlamadan önce, Lebesgue integralini tanımlayarak bu integralden faydalanılarak ortaya çıkarılan bazı önemli teoremleri yazalım.

E ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ bu küme üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $\kappa \in \mathbb{R}$ sayısı için $f(x) > \kappa$ olan $x \in E$ noktalarının kümesi ($E\left[f(x) > \kappa\right]$) ölçülebilir ise $f(x)$ 'e Lebesgue ölçülebilir yada sadece ölçülebilir fonksiyon denir. Bu tanımdan ve E kümesinin ölçülebilir olmasından faydalanarak, $E\left[f(x) < \kappa\right]$, $E\left[f(x) \le \kappa\right]$, $E\left[f(x) \ge \kappa\right]$ kümelerinden herhangi birinin her $\kappa \in \mathbb{R}$ sayısı için ölçülebilir olmasının $E\left[f(x) > \kappa\right]$ ile eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.4.1. [Luzin Teoremi] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir, f fonksiyonu Ω üzerinde hemen hemen her (h.h.h.) yerde tanımlanmış olsun. Bu durumda f 'nin Ω üzerinde ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için f 'nin $\Omega - M$ 'ye kısıtlaması $\Omega - M$ 'de sürekli olacak şekilde $\mu(M) < \varepsilon$ olan bir $M \subset \Omega$ açık kümesinin bulunmasıdır.

$f(x)$, (a,b) aralığında sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Farz edelim ki $\alpha < f(x) < \beta$ olan α, β sayıları var. α 'dan β 'ya olan aralığı $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ değerleri seçerek $\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = \beta$ olan n aralığa bölelim. Bu noktalar, şekil 2.1.'de de görüldüğü gibi, geometrik olarak y eksenindeki noktalara karşılık gelmektedir.



Şekil 2.4.1. Lebesgue İntegralinin Geometrik Yorumu

$E_k \ (k=1,2,...,n)$, $y_{k-1} \le f(x) < y_k$ olan tüm x'lerin kümesi yani; $E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$, $k=1,2,...,n$ olsun.

$f(x)$ ölçülebilir olduğundan bu kümeler de ölçülebilirdir ve kolayca görülebileceği gibi ayrıktır.

$S = \sum_{k=1}^{n} y_k.\mu(E_k)$ ve $s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}.\mu(E_k)$ şeklinde tanımlanan alt ve üst toplamları göz önünde bulunduralım. Parçalanmayı çeşitlendirerek S ve s'nin farklı değerlerinin kümesini elde ederiz. Mümkün olan tüm parçalanmalar için $I = \inf S$ ve $J = \sup s$ olsun. Her zaman var olan bu değerler $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığındaki alt ve üst Lebesgue integralleri olarak adlandırılır ve $I = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$, $J = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ ile gösterilir. Eğer $I = J$ ise $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında Lebesgue integrallenebilirdir denir ve bu değer $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.2. [Levi Teoremi] $\{f_n\}$, ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, öyle ki h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$f_1(x) \le f_2(x) \le ... \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le ... \text{ ve}$$

$$\int_{\Omega} f_t(x)dx > -\infty$$

olsun.

Bu durumda h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti vardır, f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx$$

eşitliklerinin her üçü de mevcuttur.

Teorem 2.4.3. [Lebesgue Dominant Yakınsama Teoremi (Lebesgue Dominated Convergence Theorem)] $\{f_n\}$, ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların h.h.h. $x \in \Omega$ için $f(x)$ 'e yakınsayan bir dizisi olsun.

Farzedelim ki Ω üzerinde sonlu Lebesgue integrali olan ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

olan bir $g(x)$ fonksiyonu bulunsun.

Bu durumda $f_n(n)$ ve f $(n = 1, 2, ...)$ her ikisi de sonlu Lebesgue integraline sahiptir ve

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\,dx$$

dir.

Teorem 2.4.4. [Fatou Teoremi] $\{f_n\}$, Ω'de nonnegatif olan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

integrallenebilirdir ve

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\,dx$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.4.5. [Vitali Teoremi] $\{f_n\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesi üzerinde sonlu integrale sahip fonksiyonların bir dizisi, h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ve f h.h.h. yerde sonlu olsun. Aşağıdaki (P) koşulunun sağlandığını farz edelim.

(P) Her $\varepsilon > 0$ için, $B \subset \Omega$ ve $\mu(B) < \delta$ olacak şekilde öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_B |f_n(x)| dx < \varepsilon$$

Bu durumda f fonksiyonu Ω üzerinde sonlu bir entegrale sahiptir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) dx = \int_\Omega f(x) dx$$

Teorem 2.4.6. [Fubini Teoremi] $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$ ölçülebilir ve $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ olsun. $f(x, y)$, Ω üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda h.h.h. $x \in \Omega_1$ ve $y \in \Omega_2$ için

$$\int_{\Omega_1} f(x, y)\, dx \text{ ve } \int_{\Omega_2} f(x, y)\, dy$$

integralleri vardır. Dahası

$$\int_\Omega f(x, y) dx = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y)\, dx \right) dy$$

eşitliğinin olması için; üç integralden birinin var ve sınırlı olması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 2.4.7. [Young Eşitsizliği] φ, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı kesinlikle artan, sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun öyle ki;

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = \infty \; ; \; u \in [0, \infty)$$

ve

$$\varphi(0) = 0$$

olsun.

$\psi = \varphi^{-1}$ olsun. Her $x \in [0, \infty)$ için

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) du$$

ve

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(v) dv$$

tanımlayalım.

Bu durumda her $a,b \in [0,\infty)$ için

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$$

eşitsizliğinin ortaya çıkması için gerek ve yeter şart $b = \varphi(a)$ olmasıdır [3].

SONUÇ 2.4.8. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve a,b negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $a^p = b^{p'}$ olmasıdır.

2.5. Lebesgue Uzayı L^p

$p \in [0,\infty)$ olsun. Ω, n boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$'nin ölçülebilir bir altkümesi olsun. Ω üzerinde h.h.h. yerde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

Lebesgue integrali sonlu olan fonksiyonlara $L^p(\Omega)$ sınıfındandır denir. Bu sınıf bir vektör uzayı belirtir. Bu uzayda $0 < p < \infty$ için $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$ ifadesi bir yarı norm belirtir. Ancak eğer aynı tanımı $1 \leq p < \infty$ için yaparsak, $\|f\|_p$ bir norm belirtir. Sonuç olarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\|f\|_p$ normuyla bu uzaya Klasik Lebesgue uzayı veya kısaca Lebesgue uzayı denir.

$1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p(\Omega)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left(\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \varepsilon; h \in \mathbb{R}^n : |h| < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna p-ortalama sürekli denir.

Lemma 2.5.1. $p \geq 1$ olsun. Bu durumda, (i.) $L^p(\Omega)$ bir vektör uzayıdır.

(ii.) $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$ ifadesi $L^p(\Omega)$ uzayında bir normdur.

Teorem 2.5.2. [Hölder Eşitsizliği] $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^q(\Omega)$ olsun. Bu durumda $f.g \in > L^1(\Omega)$ dır ve

$$\left| \int_\Omega |f(x).g(x)| dx \right| \le \int_\Omega |f(x).g(x)| dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır.

Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınarak iyi bilinene Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\int_X |f.g| \le \left(\int_X |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 \right)^{1/2}$$

elde edilir.

$$\int_\Omega |f(x).g(x)| dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{1/q}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart A, B' den her ikisi birden sıfır olmadan

$$A|f(x)|^p = B|g(x)|^{p'}$$

olacak şekilde negatif olmayan A ve B reel sayılarının bulunmasıdır.

Teorem 2.5.3. [Minkowski Eşitsizliği] $1 \le p < \infty$ ve $f, g \in L^p(\Omega)$ ise, bu durumda $f + g \in L^p(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)| dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}$$

dir.

Teorem 2.5.4. $\mathbb{R}^N$'nin boş olmayan sınırlı açık bir alt kümesi Ω olsun. Bu durumda herhangi $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonu p-ortalama süreklidir.

Teorem 2.5.5. $\mathbb{R}^N$'nin boş olmayan sınırlı açık bir alt kümesi Ω olsun. O zaman $C_0^\infty(\Omega)$ kümesi keyfi $1 \le p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ da yoğundur.

Teorem 2.5.6. $\mathbb{R}^N$'nin boş olmayan sınırlı açık bir alt kümesi Ω ve $1 \le p < \infty$ olsun. O zaman $L^p(\Omega)$ normlu lineer uzayı ayrılabilirdir.

Teorem 2.5.7. $1 \le p < \infty$ ve $\{f_n\} \in L^p(\Omega)$ bir temel fonksiyon dizisi (Cauchy dizisi) olsun. Yani $\lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \|_p = 0$ özelliği sağlansın. Bu durumda $f, h \in L_p(\Omega)$ ve $\{f_n\}$ dizisinin öyle bir $\{g_n\}$ alt dizisi vardır ki

1. $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0$;
2. $g_n(x) \to f(x)$, Ω da h.h.h. yerde;
3. $|g_n(x)| \le |h(x)|$, her $n \in \mathbb{N}$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

özellikleri sağlanır. Bu teorem $L^p(\Omega)$'daki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösterdiğinden $L^p(\Omega)$ tamdır.

Teorem 2.5.8. $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.5.9. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayının duali $\left[L^p(\Omega)\right]^* = L^q(\Omega)$ dır

Teorem 2.5.10. $1 < p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ uzayı refleksivdir, yani $\left[L^p(\Omega)\right]^{**} = L^p(\Omega)$.

Ω üzerinde tanımlı tüm Lebesgue ölçülebilir, esas sınırlı fonksiyonların kümesi $L_\infty(\Omega)$ bir vektör uzayıdır. Ayrıca h.h.h. $x \in \Omega$ için $f_1(x) = f_2(x)$ ise $f_1 = f_2$ kabullenimiyle,

$$\| f \|_\infty = ess \sup | f(x) |$$

ifadesi $L_\infty(\Omega)$ da bir norm belirtir. Yani $\| f \|_\infty$ normu ile $L_\infty(\Omega)$ normlu bir uzay belirtir.

Teorem 2.5.11. $\mathbb{R}^N$'nin boş olmayan sınırlı açık bir alt kümesi Ω olsun. Bu durumda $L_\infty(\Omega)$ ayrılabilir bir uzay değildir.

(Ω,Σ,μ) üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonların vektör uzayına $L^0(\Omega,\mu)$ denir. $L^0(\Omega,\mu)$ vektör uzayı tüm L^p uzaylarını içine alır.

Teorem 2.5.12. [F. Riesz Teoremi] $1 \le p < \infty$ olsun. $K \subset L_p(\Omega)$ kümesinin ön kompakt olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların doru olmasıdır:

(i.) K kümesi sınırlıdır, yani her $f \in K$ için $\|f\|_p \le c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcuttur;

(ii.) K kümesi p-ortalama eşsüreklidir, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p, \ \forall f \in K, \ h \in \mathbb{R}^n : |h| < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Teorem 2.5.13. [Radon–Nikodym]. (A,Σ,μ) sonlu bir ölçüm uzayı ve v (A,Σ) üzerinde sonlu, işaretli bir ölçüm olsun. Eğer v, μ'ye göre mutlak sürekli ise, bu durumda öyle tek bir $g \in L^1(A,\mu)$ vardır ki; her $E \in \Sigma$ için. $v(E) = \int_E g \, d\mu$ dir. [46]

Teorem 2.5.14.[Jensen Eşitsizliği] (A,Σ,μ), $\mu(A) = 1$ olan sınırlı bir ölçüm uzayı olsun. Eğer $f \in L^1(A,\mu)$, her $x \in A$ için $a < f(x) < b$ olan reel bir fonksiyon ve φ (a,b)'de konveks ise bu durumda; $\varphi\left(\int_A f \, d\mu\right) \le \int_A \varphi \circ f \, d\mu$ dir. [46]

Lokal olarak integrallenebilir ve h.h.h. yerde pozitif $\omega : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir

ω bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \omega(x) dx \right)^{1/p} < \infty$ normuyla

tanımlı Lebesgue uzayına ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\Omega,\omega)$ veya bölgenin önemli olmadığı durumlarda kısaca $L^p(\omega)$ şeklinde gösterilir. Yukarıda klasik Lebesgue uzayları için bahsettiğimiz özellikleri benzer şekilde ağırlıklı Lebesgue uzayları için de yazabiliriz.

3. DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYI $L^{p(.)}$ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Değişken üstlü Lebesgue uzaylarını tanımlayacağız ve bazı özelliklerini vereceğiz. Değişken üstlü Lebesgue uzaylarını tanımlayabilmemiz için, öncelikli olarak klasik Lebesgue uzaylarından $\left(L^p(\Omega)\right)$ faydalanarak Orlicz uzaylarını tanımlamamız gerekmektedir.

3.1. Orlicz Uzayı

ρ, X üzerinde

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlı bir yarı-norm olsun. Bu durumda X_ρ bir normlu vektör uzayıdır. Bu norm Luksemburg normu olarak adlandırılır.

ρ, X üzerinde bir yarı-norm ve X_ρ^*, X_ρ'nin duali olsun. Bu durumda

$$\|x\|'_\rho = \sup\left\{\left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right| : x^* \in X_\rho^*, \left\|x^*\right\|_{\rho^*} \leq 1\right\}$$

$$= \|x\|'_\rho = \sup\left\{\left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right| : x^* \in X_\rho^*, \rho^*\left(x^*\right) \leq 1\right\}$$

ifadesi X_ρ üzerinde bir norm belirtir ve bu norma Orlicz normu denir.

(Ω, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun; yani Ω boş olmayan bir küme, Σ ise Ω'nın altkümelerinin bir $\delta-$cebri ve μ tamamıyla kaybolmayan, nonnegatif bir tam ölçüm olsun. $\Omega \times [0, \infty)$'da tanımlı bir φ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\Phi-$ sınıfındandır denir:

(i.) $\varphi(t,u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için $u \geq 0$ değişkenli bir $\varphi-$fonksiyonudur; yani u'nun azalmayan, sürekli öyle bir fonksiyonudur ki $\varphi(t,0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t,u) > 0$ ve $u \to \infty$ için $\varphi(t,u) \to \infty$ dur.

(ii.) Her $u \geq 0$ için $\varphi(t,u)$ fonksiyonu t'nin Σ-ölçülebilir bir fonksiyonudur.

Konvex sol-yarı sürekli bir $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$ fonksiyonuna $\Phi-$fonksiyonu veya Orlicz fonksiyonu denir. Eğer her $t>0$ için $\varphi(t)>0$ ise pozitif $\Phi-$fonksiyonu denir. Başka bir değişle sürekli, artan ve sınırsız bir $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(0)=0$ fonksiyonuna **Orlicz fonksiyonu** denir. Konveks Orlicz fonksiyonlarına **Young fonksiyonu** denir. Ayrıca eğer bir Young fonksiyonu $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\Phi(t)}{t}=0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Phi(t)}{t}=\infty$ koşullarını sağlıyorsa buna da N **-fonksiyonu** denir.

(A,Σ,μ) bir $\delta-$sonlu, tam ölçüm uzayı olsun. Eğer;

(i.) her $y\in A$ için $\varphi(y,.)$ bir $\Phi-$fonksiyonu,

(ii.) her $t\geq 0$ için $y\mapsto\varphi(y,t)$ ölçülebilir

ise $\varphi: A\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş $\Phi-$fonksiyonu denir.

$\varphi\in\Phi(A,\mu)$ ve $f\in L^o(A,\mu)$ ise bu durumda, $y\mapsto\varphi(y,|f(y)|)$ $\mu-$ölçülebilirdir ve

$$\rho_\varphi(f)=\int_A\varphi(y,|f(y)|)d\mu(y)$$

$L^o(A,\mu)$ üzerinde bir yarı-normdur. ρ_φ'ye φ tarafından türetilen yarı-norm denir. Eğer φ pozitifse ρ_φ bir normdur.

$\varphi\in\Phi(A,\mu)$ ve ρ_φ her $f\in L^o(A,\mu)$ için

$$\rho_\varphi(f)=\int_A\varphi(y,|f(y)|)d\mu(y)$$

ile verilmiş olsun. Bu durumda yarı-normlu

$$\begin{aligned}\left(L^0(A,\mu)\right)_{\rho_\varphi}&=\left\{f\in L^0(A,\mu):\lim_{\lambda\to 0}\rho_\varphi(\lambda f)=0\right\}\\&=\left\{f\in L^0(,\mu):\rho_\varphi(\lambda f)<\infty,\ \text{bazı } \lambda>0 \text{ için}\right\}\end{aligned}$$

uzayı **Musielak-Orlicz uzayı** olarak adlandırılır ve $L^\varphi(A,\mu)$ veya kısaca L^φ ile gösterilir.

$\|.\|_{\rho_\varphi}$ normu $\|.\|_\varphi$ şeklinde gösterilir, böylece $\|f\|_\varphi=\inf\left\{\lambda>0:\rho_\varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$ dir.

Musielak-Orlicz uzayına ayrıca **Genelleştirilmiş Orlicz Uzayı** da denir.

3.2. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı $L^{p(.)}$

(A,Σ,μ) bir $\delta-$sonlu, tam, ölçüm uzayı olsun. $p:A\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı tüm μ ölçülebilir fonksiyonlar kümesini $P(A,\mu)$ ile tanımlayalım. $p\in P(A,\mu)$ fonksiyonlarına A'da **değişken üst** denir.

$$p^{-}:=p_A^{-}:=ess\inf_{y\in A}p(y) \qquad (3.2.1.)$$

ve

$$p^{+}:=p_A^{+}:=ess\sup_{y\in A}p(y) \qquad (3.2.2)$$

olarak tanımlarız. Eğer $p^{+}<\infty$ ise bu durumda p'ye sınırlı değişken üst denir.

$p\in P(A,\mu)$ olmak üzere $p'\in P(A,\mu)$ değişken üstü $\frac{1}{\infty}=0$ kabullenimiyle $\frac{1}{p(y)}+\frac{1}{p'(y)}=1$ şeklinde tanımlanır. p''ne p'nin dual değişken üstü denir. Ayrıca μ'nün $n-$boyutlu Lebesgue ölçümü ve Ω'nın $\mathbb{R}^n$'de açık bir alt küme olması durumunda $P(\Omega):=P(\Omega,\mu)$ kısaltması yapılır.

$t>0$ ve $1\le p<\infty$ için

$$\tilde{\varphi}_p(t):=\frac{1}{p}t^p,$$

$$\bar{\varphi}_p(t):=t^p$$

tanımlayalım.

Ayrıca

$$\bar{\varphi}_\infty(t)=\tilde{\varphi}_\infty(t)=\infty.\chi_{(1,\infty)}(t)=\begin{cases}0 & t\in[0,1]\text{ ise}\\ \infty & t\in(1,\infty)\text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunu kuralım.

$p\in P(A,\mu)$ değişken üstü için; $y\in A$ ve $t>0$ ile

$$\tilde{\varphi}_{p(.)}(y,t)=\tilde{\varphi}_{p(y)}(t) \text{ ve } \bar{\varphi}_{p(.)}(y,t)=\bar{\varphi}_{p(y)}(t)$$

şeklinde tanımlanır.

$\tilde{\varphi}$ ve $\bar{\varphi}$ nin $q\in[1,\infty]$ için $\Phi-$ fonksiyonu oluğu açıktır.

Bir φ $\Phi-$ fonksiyonu için $\varphi^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ters fonksiyonu tüm $t\geq 0$ için

$$\varphi^{-1}(t)=\inf\{\tau\geq 0:\varphi(\tau)\geq t\}$$

şeklinde tanımlanır. φ^{-1}'e φ'nin sol-sürekli tersi denir.

Genelleştirilmiş $\Phi-$ fonksiyonu $\varphi\in\Phi(A,\mu)$ sol-sürekli ters y de nokta tabanlı (pointwise) tanımlanmıştır yani, tüm $y\in A$ için $\varphi^{-1}(y,.)=(\varphi(y,.))^{-1}$ şeklindedir

$p\in P(A,\mu)$ ve ayrıca ya $\varphi_{p(.)}=\tilde{\varphi}_{p(.)}$ yada $\varphi_{p(.)}=\bar{\varphi}_{p(.)}$ olsun. Dolayısıyla

$$\rho_{L^{p(.)}(A)}(f)=\int_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx$$

yarı-normunu elde edilir. $L^{\varphi_{p(.)}}(A,\mu)$ Musielak-Orlicz uzayı $\|.\|_{L^{p(.)}(A,\mu)}=\|.\|_{L^{\varphi_{p(.)}}(A,\mu)}$ normuyla **değişken üstlü Lebesgue uzayı** olarak adlandırılır ve bu uzay $L^{p(.)}(A,\mu)$ veya kısaca $L^{p(.)}$ ile gösterilir. Özel olarak değişken üstlü Lebesgue uzayı $L^{p(.)}(A,\mu)$, $\|f\|_{L^{p(.)}(A,\mu)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{L^{p(.)}(A)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$ normuyla

$$L^{p(.)}(A,\mu)=\left\{f\in L^0(A,\mu):\lim_{\lambda\to 0}\rho_{L^{p(.)}(A)}(\lambda f)=0\right\} \text{ şeklinde}$$

veya eşdeğer olarak;

$$L^{p(.)}(A,\mu)=\left\{f\in L^0(A,\mu):\rho_{L^{p(.)}(A)}(\lambda f)<\infty \text{ bazı } \lambda>0 \text{ için}\right\} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$L^{p(.)}$ uzayı ilk olarak 1931 yılında $1\leq p^-\leq p\leq p^+<\infty$ durumunda $\varphi_{p(.)}=\bar{\varphi}_{p(.)}$ ile W. Orlicz [69] tarafından tanımlanmıştır. $L^{p(.)}$ nin $p^+<\infty$ durumundaki tanımı ilk olarak I. Sharapudinov [32] tarafından ve sonra yüksek boyutlu durum için O. Kovacik ve J. Rakosnik [51] tarafından yapılmıştır. Ayrıca O. Kovacik ve J. Rakosnik [51] ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\rho_{KR}(f)=\bar{\rho}_{p(.)}\left(f\chi_{\{p\neq\infty\}}\right)+\left\|f\chi_{\{p=\infty\}}\right\|_{\infty}$$

tanımını yapmış ve buna eşdeğer olan Luxemburg normunu

$$\|f\|_{KR}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{KR}\left(\frac{1}{\lambda}f\right)\leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Her ne kadar yukarıda yapmış olduğumuz tanımlama değişken üstlü Lebesgue uzayının temel tanımı olsa da bu tanımı daha basit ve anlaşılır olarak yapmak mümkündür. Şimdi değişken üstlü Lebesgue uzaylarını yukarıdaki tanıma benzer ancak daha kolay anlaşılacak bir şekilde, norm özelliklerini de ispatlayarak, yeniden tanımlayalım.

Ω, $\mathbb{R}^n$'nin Lebesgue ölçümü ($|\Omega|$) pozitif olan ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $\Im(\Omega)$, Ω da tanımlı, genişletilmiş (Ω dışında sıfır değerli) skaler değerli (reel veya kompleks) tüm ölçülebilir fonksiyonların ailesi olsun. Ayrıca $P(\Omega)\subset\Im(\Omega)$ olsun. $p(x)$, $P(\Omega)$'da tanımlı bir değişken üst olmak üzere, p^+ ve p^- değerleri

$$p^-=ess\inf_{x\in\Omega}(x)>1,\; p^+=ess\sup_{x\in\Omega}p(x)<\infty \tag{3.2.3}$$

şeklinde tanımlı olsun.

Her $f\in\Im(\Omega)$ ve $p\in P(\Omega)$ fonksiyonu için; $\inf\varnothing=\infty$ kabullenimiyle

$$\rho_p(f)=\int_{\Omega}|f(x)|^{p(x)}dx \tag{3.2.4}$$

ve

$$\|f\|_p=\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_p(f/\lambda)\leq 1\right\} \tag{3.2.5}$$

tanımlarını yapalım. Her $f\in\Im(\Omega)$ için $\rho_p(f)=\rho_p(-f)\geq 0$ olduğu ve $\rho_p(f)=0$ olması için h.h.h. $f=0$ olması gerektiği açıktır. Ayrıca $f\mapsto\rho_p(f)$ konvekstir.[ispat için bkz. 33] Şimdi ρ_p'nin bir norm teşkil ettiği $\Im(\Omega)$'nın uygun bir alt kümesinin olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Öncelikli olarak tüm $f_1, f_2\in\Im(\Omega)$ fonksiyonları için $\|f_1+f_2\|\leq\|f_1\|+\|f_2\|$ olduğunu kabul edelim. Eğer eşitsizliğin sağ kısmı sınırsızsa bu durumda ispatlayacak bir şey yok demektir. Bu nedenle f_1 ve f_2'nin her ikisinin de sınırlı olduğunu farz edelim. $\lambda_i > \| f_i \|_p , (i=1,2)$ ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ olsun. ρ_p'nin konveks olmasından faydalanarak,

$$\rho_p\left(\frac{f_1+f_2}{\lambda}\right) = \rho_p\left(\frac{f_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{f_2}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{\lambda}\rho_p\left(\frac{f_1}{\lambda_1}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\rho_p\left(\frac{f_2}{\lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda} = 1$$

elde ederiz. Böylece $\| f_1 + f_2 \| \leq \lambda_1 + \lambda_2$ olur. λ_i değeri $\| f_i \|_p$'ye keyfi yakın seçildiğinden $\| f_1 + f_2 \| \leq \| f_1 \| + \| f_2 \|$ olur.

Şimdi tüm $t \in \mathbb{R}$ değerleri ve $\| f \|_p < \infty$ olan f fonksiyonları için, $\| t \cdot f \|_p = |t| \cdot \| f \|_p$ olduğunu ispatlayalım.

$t = 0$ için $\| t \cdot f \|_p = |t| \cdot \| f \|_p$ olduğu açıktır. Eğer $t \neq 0$ ise;

$$\| t \cdot f \|_p = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_p\left(t \cdot f / \lambda\right) \leq 1\right\} = |t| \inf\left\{\lambda/|t| > 0 : \rho_p\left(\frac{f}{\lambda/|t|}\right) \leq 1\right\}$$

$$= |t| \inf\left\{\beta > 0 : \rho_p\left(\frac{f}{\beta}\right) \leq 1\right\} = |t| \cdot \| f \|_p \text{ olur.}$$

Son olarak $\| f \|_p = 0$ olması için ancak ve ancak h.h.h. yerde $f = 0$ olması gerektiğini göstermemiz gerekiyor.

Farz edelim ki $\| f \|_p = 0$ ve pozitif ölçümlü bir kümede $|f| > 0$ olsun. Bu durmda öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $A = \left\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\right\}$. Böylece herhangi $\lambda \in (0, \delta)$ için,

$$\rho_p(f/\lambda) = \int_\Omega |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx \geq \int_A |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx \geq \int_A |\delta/\lambda|^{p(x)} dx$$

$$\geq \int_A |\delta/\lambda|^{p^-} dx = |\delta/\lambda|^{p^-} |A| \geq 1$$

olur. Yeterince küçük tüm λ sayıları için $\lambda \in (0, \lambda_0)$ dersek, $\| f \|_p \geq \lambda_0 > 0$ olur. Böylece bir çelişki elde ederiz. İspat tamamlanmış olur.

$\| \cdot \|_p$'nin doğrulanan özellikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$L^{p(.)}(\Omega)=\left\{f\in\Im(M):\rho_p\left(f/\lambda\right)<\infty,\ \text{bazı}\ \lambda>0\right\} \qquad (3.2.6)$$

bir lineer uzaydır ve bu uzayda $\|\cdot\|_p$ bir norm belirtir. (3.2.6) ile tanımlı $L^{p(.)}(\Omega)$ uzayına genelleştirilmiş Lebesgue uzayı veya değişken üstlü Lebesgue uzayı denir.[33]

Teorem 3.2.1. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı tamdır.

İspat. $\Omega_1^p=\{x\in\Omega: p(x)=1\}$, $\Omega_\infty^p=\{x\in\Omega: p(x)=\infty\}$,

$$p'(x)=\begin{cases}\infty & x\in\Omega_1^p \quad \text{ise,}\\ 1 & x\in\Omega_\infty^p \quad \text{ise,}\\ p(x)/\left(p(x)-1\right) & \text{diğer}\ x\in\Omega\end{cases} \qquad \text{ve}\ \rho_p(f)=\int\limits_{\Omega-\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}dx+ess\sup|f(x)|$$

olsun. $f_n\in L^{p(.)}(\Omega)$ bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda $m,n>n_0$ olacak şekilde öyle $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı vardır ki $\rho_{p'}(g)\le 1$ olan her g fonksiyonu için

$$\int\limits_\Omega |f_m(x)-f_n(x)||g(x)|dx<\varepsilon \qquad (3.2.7)$$

olur. Şimdi Ω kümesini sonlu ölçümlü, ikili ayrık G_k altkümelerine parçalayalım ve $g_k=\left(1+|G_k|\right)^{-1}\chi_{G_k}, k\in\mathbb{N}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $\rho_{p'}(g_k)\le\int\limits_{G_k}\left(1+|G_k|\right)^{-p(x)}dx+\left(1+|G_k|\right)^{-1}\le 1$ olur ve (3.2.7) de g yerine g_k yerleştirirsek;

$\int\limits_{G_k}|f_m(x)-f_n(x)|dx\le\varepsilon\left(1+|G_k|\right),\ m,n\ge n_0,\ k\in\mathbb{N}$ elde ederiz. Bu $\{f_n\}$ nin bir Cauchy dizisi ve ger $L^1(G_k)$ için yakınsak olduğu anlamına gelir. Tümevarımla h.h.h. $x\in G_k,\ k\in\mathbb{N}$ için $f_n^k(x)\to f^k(x)$ olacak şekilde $\{f_n^k(x)\}$ alt dizisini ve $f^k(x)\in L^1(G_k)$ fonksiyonlarını buluruz. Böylelikle h.h.h. $x\in\Omega$ için $f_m^{(m)}(x)\to\sum\limits_{k=1}^{\infty}f^k(x)\chi_{G_k}(x)$ olur, f_m yerine $f_m^{(m)}$ kullanarak ve Fatou Lemmasını uygulayarak her $n_0\in\mathbb{N}$ ve $\rho_{p'}(g)\le 1$ olan her g için

$$\int\limits_\Omega |f(x)-f_n(x)||g(x)dx|\le\sup_m\int\limits_\Omega\left|f_m^{(m)}(x)-f_n(x)\right||g(x)dx|\le\varepsilon$$

elde ederiz. Dolayısı ile $\|f-f_n\|_{p,Or}<\varepsilon$ olur[51]. ■

Lemma 3.2.2. [Young Eşitsizliği]. $p,q,s\in[1,\infty]$ ve $\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ olsun. Bu durumda her $a,b\geq 0$ için

$$\varphi_s(ab)\leq\varphi_p(a)+\varphi_q(b),$$

$$\bar{\varphi}_s(ab)\leq\frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a)+\frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b)$$

burada $s=p=q=\infty$ için $\frac{s}{p}=\frac{s}{q}=1$ dir. Dahası eğer $1\leq s<\infty$ ise her $a\geq 0$ için

$$\tilde{\varphi}_p(a)=\sup_{b\geq 0}\left(\tilde{\varphi}_s(ab)-\tilde{\varphi}_q(b)\right) \text{ dir.}$$

Lemma 3.2.3.[Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği] $p,q,s\in P(A,\mu)$ öyle ki h.h.h. $y\in A$ için $\frac{1}{s(y)}=\frac{1}{p(y)}+\frac{1}{q(y)}$ olsun. Bu durumda her $f\in L^{p(.)}(A,\mu)$ ve $g\in L^{q(.)}(A,\mu)$ olmak üzere,

$$\rho_{s(.)}(fg)\leq\rho_{p(.)}(f)+\rho_{q(.)}(g),$$

$$\|fg\|_{s(.)}\leq 2\|f\|_{p(.)}\|g\|_{q(.)},$$

$$\|fg\|_{\bar{\varphi}_{s(.)}}\leq\left(\left(\frac{s}{p}\right)^{+}+\left(\frac{s}{q}\right)^{+}\right)\|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}}\|g\|_{\bar{\varphi}_{q(.)}}$$

olur. Burada $s=p=q=\infty$ için $\frac{s}{p}=\frac{s}{q}=1$ kabullenimi kullanılır.

Teorem 3.2.4. $p,q\in P(A,\mu)$ olsun. Her $y\in A$ için $r\in P(A,\mu)$ üstünü $\frac{1}{r(y)}=\max\left\{\frac{1}{q(y)}-\frac{1}{p(y)},0\right\}$ ile tanımlayalım.

(i.) hem hemen her yerde $q\leq p$ ve $1\in L^{r(.)}(A,\mu)$ ise bu durumda $L^{p(.)}\to L^{q(.)}$ gömülmesi olsa olsa $2\|1\|_{L^{r(.)}(A)}$ normu ile vardır.

(ii.) Eğer μ ölçümü atom-less ve $K>0$ normu ile $L^{p(.)}\to L^{q(.)}$ gömülmesi varsa bu durumda hem hemen her yerde $q\leq p$ ve $\|1\|_{L^{r(.)}(A)}\leq 4K$ dır.

Sonuç 3.2.5. $p,q \in P(A,\mu)$ ve μ ölçümü $\mu(A) < \infty$ ve atom-less olsun. Bu durumda $L^{p(.)} \to L^{q(.)}$ gömülmesinin olması için gerek ve yeter şart A'da h.h.h. yerde $q \le p$ olmasıdır. Gömülme sabiti ise $2(1+\mu(A))$ ve $2\max\left\{\mu(A)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)^+}, \mu(A)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)^-}\right\}$'e eşittir ya da küçüktür.

Teorem 3.2.6. $p \in P(\mathbb{R}^n)$ ve $p_\infty \in [1,\infty]$ olsun. $s \in P(\mathbb{R}^n)$'i $\frac{1}{s(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}$ ile tanımlayalım. Bu durumda $1 \in L^{s(.)}(\mathbb{R}^n)$ olması için gerek ve yeter şart

$$L^{\max\{p(.),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n) \to L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \to L^{\min\{p(.),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n)$$

gömülmesinin var olmasıdır.

Teorem 3.2.7. $p \in P(A,\mu)$ ve $1 < p^- \le p^+ < \infty$ olsun. O zaman $L^{p(.)}(A,\mu)$ refleksivdir.

Lemma 3.2.8. Eğer $p \in P(\Omega)$ ve $p^+ < \infty$ ise bu durumda Ω'daki tüm sınırlı fonksiyonlar kümesi $L^{p(.)}(\Omega)$ da yoğundur.

Teorem 3.2.9. Eğer $p \in P(\Omega)$ ve $p^+ < \infty$ ise $C_0^\infty(\Omega)$, $L^{p(.)}(\Omega)$ da yoğundur.

Teorem 3.2.10. $p \in P(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ kümesi $L^{p(x)}(\Omega)$'de yoğundur. Dahası Ω açıksa bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$, $L^{p(x)}(\Omega)$ da yoğundur.

İspat (Teorem 3.2.10.). $f \in L^{p(x)}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Lemma 3.1.10'dan dolayı öyle bir sınırlı $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır ki;

$$\|f-g\|_p < \varepsilon \qquad (3.2.8)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.4.1. den faydalanarak öyle bir $h \in C(\Omega)$ fonksiyonu ve $|U| < \min\left\{1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty}\right)^{p+}\right\}$ olan açık U kümesi vardır ki, her $x \in \Omega \backslash U$ için $g(x) = h(x)$ ve $\sup|h(x)| = \sup_{\Omega\backslash U}|g(x)| \le \|g\|_\infty$.

Bundan dolayı $\rho_p\left((g-h)/\varepsilon\right) \le \max\left\{1,\left(2\|g\|_\infty/\varepsilon\right)^{p+}\right\}|U| \le 1$ yani, (3.2.6) ile birlikte $\|g-h\| \le \varepsilon$ ifadesi

$$\|f-h\|_p \le 2\varepsilon \qquad (3.2.9)$$

verir.

Dahası Ω'nın açık olduğunu farz edelim. $p \in L_\infty(\Omega)$ $C_0^\infty \subset L_\infty(\Omega)$ ve $\rho_p\left(h/\varepsilon\right) < \infty$ olduğundan öyle bir sınırlı açık $G \subset \Omega$ kümesi vardır ki $\rho_p\left(h\chi_{\Omega \backslash G}/\varepsilon\right) \le 1$ yani,

$$\|h-h\chi_G\|_p \le \varepsilon \qquad (3.2.10)$$

olur.

m, $\sup_G |h(x)-m(x)| < \varepsilon \min\left\{1,|G|^{-1}\right\}$ koşulunu sağlayan bir polinom olsun. Bu durumda $\rho_p\left((h\chi_G - m\chi_G)/\varepsilon\right) \le \min\left\{1,|G|^{-1}\right\}|G| \le 1$ yani,

$$\|h\chi_G - m\chi_G\|_p \le \varepsilon \qquad (3.2.11.)$$

Son olarak, (3.2.11)'e yol açan değerlendirmeler, yeterince küçük pozitif bir a sayısı için $\left\|m\chi_G - m\chi_{K_a}\right\|_p \le \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $K_a = \left\{x \in G : dist(x,\partial G) \ge a\right\}$ kompakt kümesini var olduğunu verir. Her $x \in G$ için $0 \le \varphi(x) \le 1$ ve $x \in K_a$ için $\varphi(x) = 1$ olacak şekilde bir $\varphi \in C_0^\infty(G)$ alarak, $\|m\chi_G - m\varphi\|_p \le \left\|m\chi_G - m\chi_{K_a}\right\|_p \le \varepsilon$ kestirimini elde ederiz. Bu kestirim ve (3.2.9.)-(3.2.11) birlikte $\|f-m\varphi\|_p < 4\varepsilon$ verir. Dolayısıyla $m\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ olduğu açıkça görülür.■ [51]

Lemma 3.2.11. $p \in P(A,\mu)$ sınırlı bir üst ve μ ayrılabilir olsun. Bu durumda $L^{p(.)}(A,\mu)$ ayrılabilirdir.

Teorem 3.2.12 $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p,q \in P(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(x)}(\Omega) \to L^{p(x)}(\Omega)$ gömülmesi ancak ve ancak h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \le q(x)$ olması durumunda vardır. Ayrıca gömülme sabiti $|\Omega|+1$ den büyük değildir.

4. HARDY OPERATÖRÜ VE HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde klasik Lebesgue uzaylarında Hardy operatörü ve Hardy tipli eşitsizlikler tanımlanarak, Hardy operatörü ve Hardy tipli eşitsizliklerin tarihsel gelişiminden ve Orlicz uzaylarında bazı temel eşitsizliklerden bahsedilmiştir.

4.1 Lebesgue Uzaylarında L^p Hardy Operatörü ve Hardy Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. [Hardy Eşitsizliği]. Eğer $p>1$ ve $\{a_k\}$ negatif olmayan reel terimli keyfi bir dizi ise bu durumda;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca Eğer $p>1$ ve f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan p-integrallenebilir bir fonksiyon ise bu durumda; f fonksiyonu $x>0$ için herhangi $(0,x)$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\,dx \tag{4.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.1.'i başka bir şekilde şöyle ifade edebiliriz:

$\{a_n\}\geq 0$, $a=\{a_n\}$ ve

$$h(a)=\{h_n(a)\},h_n(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k<\infty \tag{4.1.3}$$

olmak üzere. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}h_n^p(a)<\infty \tag{4.1.4}$$

Ayrıca sürekli durum için ;

$$f(x)\geq 0 \text{ ve } H_k f(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt \tag{4.1.5}$$

olmak üzere. Eğer

$$\int_0^\infty f^p(x)dx < \infty$$

ise

$$\int_0^\infty \left(H_k f(x)\right)^p dx < \infty \tag{4.1.6}$$

dir. Burada (4.1.3) kesikli Hardy operatörü ve (4.1.5) ise klasik Hardy operatörü olarak bilinir. (4.1.4) ve (4.1.6) eşitsizlikleri sırasıyla (4.1.1) ve (4.1.2) eşitsizliklerinin zayıf hali olarak adlandırılır.(bkz. Hardy'nin [26] çalışmasının sonundaki yorum.) Buradan şu sonuca ulaşabiliriz. H_k ve h Hardy operatörleri sırasıyla L_p uzayını L_p uzayına ve l_p uzayını da l_p uzayına eşler. $p>1$ olmak üzere bu operatörlerin normları $p'=\dfrac{p}{p-1}$'e eşittir.

(4.1.2) eşitsizliğinin literatürde birçok genelleştirilmiş hali mevcuttur. Hardy, bazı integral operatörler için kestirimi ispatladığı 1928 yılındaki [27] çalışmasında (4.1.2) eşitsizliğinin ilk ağırlıklı halini tüm negatif olmayan ölçülebilir f fonksiyonları, $p>1$ ve $\varepsilon < p-1$ için $\left(\dfrac{p}{p-\varepsilon-1}\right)$ en iyi sabitiyle,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{p-\varepsilon-1}\right)\int_0^\infty f(x)^p x^\varepsilon dx \tag{4.1.7}$$

şeklinde ifade etti. Ayrıca (4.1.7) eşitsizliğinden $p>1$ ve $\varepsilon > p-1$ için $\left(\dfrac{p}{\varepsilon+1-p}\right)$ en iyi sabitiyle

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx < \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)\int_0^\infty f(x)^p x^\varepsilon dx \tag{4.1.8}$$

dual eşitsizliği elde edildi ([28], Teorem 330). (4.1.2) eşitsizliği sonraki yıllarda $-\infty \le a < b \le \infty,\ 0<q\le\infty,\ 1\le p\le\infty$ olacak şekilde a,b reel sayıları, p,q parametreleri ve $u(x),v(x)$ ağırlık fonksiyonlarıyla, ağırlıklı Hardy eşitsizliği veya genelleştirilmiş Hardy eşitsizliği olarak bilinen

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C_{p,q}\left(\int_a^b f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{4.1.9}$$

eşitsizliğine genişletildi.

Daha sonraları (4.1.9) eşitsizliğinde $g(a)=0$ ve $g(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$ alınarak, Hardy eşitsizliğinin diferansiyel formu olarak adlandırılan ve diferansiyel denklemlerin uygulamalarında kullanılan

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p} \qquad (4.1.10)$$

eşitsizliği elde edildi. Benzer şekilde bu eşitsizlik çok boyutlu durum için; Ω $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $u(x)$ ve $v(x)$ Ω'da ağırlık fonksiyonları ve $f \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b |f(x)|^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |\nabla f(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p} \qquad (4.1.11)$$

şeklinde ifade edildi ve n-boyutlu Hardy eşitsizliği olarak adlandırıldı.[4]

Literatürde sıklıkla (4.1.5)'de tanımladığımız klasik Hardy operatörü yerine Hardy operatörü ya da integral operatörü olarak bilinen , f (a,b) de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$Hf(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (4.1.12)$$

operatörü kullanılmaktadır. Genel olarak ise

$$Tf(x) = v(x)\int_a^x u(t)\,f(t)\,dt \qquad (4.1.13)$$

operatörü L^p uzayları arasında bir dönüşüm belirtmektedir. Bu tip operatörlere Hardy tipi operatörler denir. (4.1.13)'de $u(x)=v(x)=1$ alındığında (4.1.12) Hardy operatörünün elde edildiği kolayca görülmektedir.

(4.1.9) da yer alan Hardy eşitsizliği u,v ağırlık fonksiyonkları olmak üzere $L^p(a,b;v)$ ağırlıklı Lebesgue uzayından $L^q(a,b;u)$ ağırlıklı Lebesgue uzayına sürekli bir dönüşüm anlamına geldiğinden (4.1.9) ve (4.1.10) eşitsizlikleri sırasıyla

$$\|Hf\|_{q,u} \le C_{p,q}\|f\|_{p,v}$$

ve

$$\|g\|_{q,u} \le C\|g'\|_{p,v}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(4.1.12)'de ifade edilen Hardy operatörü; $k(x,t),(a,b)\times(a,b)$'de tanımlı bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$(Kf)(x)=\int_a^x k(x,t)\,f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanan ve *Volterra operatörü* olarak adlandırılan K operatörünün özel bir durumudur. Burada çekirdek fonksiyondan kasıt K operatörünü h.h.h. yerde tanımlı yapan pozitif bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\|Kf\|_{q,u}\le C_{p,q}\|f\|_{p,v}$$

şeklindeki eşitsizlikler *Hardy-tipli eşitsizlikler* veya *Hardy-Volterra eşitsizlikleri* olarak adlandırılır.

1950'lerin sonlarında ve 1960'ların başlarında P.R. Beesack Hardy eşitsizliğinin sistematik bir araştırmasına önayak oldu. $p=q$ durumuyla ilgilendi ancak aynı zamanda $p<0$ durumunu ve hatta (4.9) eşitsizliğinin terse döndüğü $0<p<1$ durumunu da göz önünde bulundurdu [13][4]. Beesack'ın yaklaşımı Hardy eşitsizliğini içeren bir eşitsizlik sınıfına genişletildi ancak (4.8) eşitsizliğindeki $\varepsilon=p-1$ değeri dahil edilmedi [13]. 1965 yılında Kadlec ve Kufner var olan bu boşluğu kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu x^{ε} yerine $x^{\varepsilon}|\log x|^{\eta}$ ağırlık fonksiyonu alarak kaldırmayı başardı. [13]

(4.1.7) eşitsizliğinin yine $(a,b)=(0,\infty)$ ve $p=q$ için gerekli ve yeterli koşullarının bulunması problemi 1966, 1967 ve 1969'da G. Taneli ve 1969'da G. Tomaselli tarafından araştırıldı ve $f\ge 0$, $0<b\le\infty$ ve $1<p<\infty$ ile

$$\int_0^b\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p u(x)\,dx\le C\int_0^b f(x)^p v(x)\,dx \qquad (4.1.14)$$

kestirimi için gerekli ve yeterli koşul

$$A=\sup_{r\in(a,b)}\left(\int_r^b u(x)\,dx\right)\left(\int_0^r v(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1}<\infty \qquad (4.1.15)$$

olarak ifade edildi. Buna ek olarak bu koşul (4.1.14) eşitsizliğindeki mükemmel sabit için

$A\le C\le\dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}A$ vermektedir. (4.1.15) koşulu $b=\infty$ ile başka bir formda

$$A_M=\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r v(x)^{1-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \qquad (4.1.16)$$

şeklilinde yazılmakta ve Muckenhoupt koşulu olarak adlandırılmaktadır[10]. Daha sonraları G. Tomaselli (4.1.9) eşitsizliğinin varlığı için (4.1.16) koşulundan başka eşdeğer koşullar bulmuştur [13]. Bu noktadan sonra $1 \le p = q < \infty$ koşulu için problem çözülmüş oldu ve farklı p ve q parametreleri $1 \le p, q < \infty$ için araştırmalar başlamıştır.

1978 yılındaki çalışmasında J.S. Bradley $1 \le p, q \le \infty$ durumunda

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^q u(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.1.17)$$

eşitsizliğinin varlığı için

$$A_m = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty u(x)\,dx \right)^{1/q} \left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx \right)^{1/p'} < \infty \qquad (4.1.18)$$

koşulunun gerekli olduğunu, ayrıca bu koşulun $1 \le p \le q \le \infty$ durumu için de yeterli olduğunu göstermiştir.

$p \ne q$ durumu için yazılmış en önemli çalışmalar ise Walsh (1971), Boyd ve Erdos (1972, yayınlanmamış), Juberg (1974), Bradley (1978), Maz'ya ve Rozin (1979 ve 1985), V. Kokilashvili (1979), Andersen ve Muckenhoupt (1982), P. Gurka (1984) [32], V.G. Maz'ja(1985), Sinnamon (1987,1991), V.D. Stepanov (1987,1992,1994), B. Opic ve A. Kufner (1990) [8], G. Bennett (1991), V.M. Manakov (1992), Heinig, Maligranda (1995), Sinnamon ve Stepanov (1996) tarafından yapılmıştır. [4]

4.2. Orlicz Uzaylarında Hardy Eşitsizliği

Hardy eşitsizliğinin Orlicz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarındaki araştırmaları altmışlı yıllarda başlamıştır. Bu dönemdeki çalışmaların sonuçları sadece kuvvet fonksiyonları için değil genel konveks fonksiyonlar için de Hardy tip kestirimleri ilgilendirmekteydi. [4]

L^p uzaylarında integral operatörü (4.1.12) için iki-ağırlıklı eşitsizliğin iki eşdeğer formülasyonu mevcuttur:

$$\left(\int |Hf(x)|^q u(x)\,dx \right)^{1/q} \le C \left(\int |f(x)|^p v(x)\,dx \right)^{1/p}$$

veya

$$\left(\int \left| Hf(x) u(x)^{1/q} \right|^q dx \right)^{1/q} \le C \left(\int \left| f(x) v(x)^{1/p} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

Bu eşitsizliklerin Orlicz uzayı versiyonuları

$$\|Hf\|_{\Phi_2,u} \le C \|f\|_{\Phi_1,v}, \qquad (4.2.1)$$

$$\Phi_2^{-1}\left(\int \Phi_2\left[\left|Hf(x)\right|\right]u(x)\,dx\right) \le \Phi_1^{-1}\left(\int \Phi_1\left[\left|Cf(x)\right|\right]v(x)\,dx\right) \tag{4.2.2}$$

ve

$$\Phi_2^{-1}\left(\int \Phi_2\left[\left|Hf(x)\right|u(x)\right]dx\right) \le \Phi_1^{-1}\left(\int \Phi_1\left[\left|Cf(x)\right|v(x)\right]dx\right) \tag{4.2.3}$$

eşitsizlikleri olup sırasıyla norm, dış modular ve iç modular olarak adlandırılır. Ne yazık ki bu eşitsizliklerin hiç biri eş değer değildir ve hangisinin Orlicz uzayının bu tip problemlerine en uygun yaklaşımı sunduğu açık değildir. (4.2.2) ve (4.2.3) kestirimlerini birleştirirsek u_0, u_1, v_0, v_1 ağırlıklarıyla

$$\Phi_2^{-1}\left(\int \Phi_2\left[\left|Hf(x)\right|u_1(x)\right]u_0(x)\,dx\right) \le \Phi_1^{-1}\left(\int \Phi_1\left[\left|Cf(x)\right|v_1(x)\right]v_0(x)\,dx\right) \tag{4.2.4}$$

dört-ağırlıklı modular eşitsizliği elde ederiz. Uygun ağırlıklar alarak (5.1.4) eşitsizliğini (4.2.2) veya (4.2.3) eşitsizliklerinden istenilen birine dönüştürmek mümkündür. Bu üç temel eşitsizlikten faydalanılarak Orlicz uzaylarında Hardy eşitsizliği için birçok kestirimler yapılmıştır. [4]

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI VE HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

Değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Hardy operatörünün sınırlılığı ve Hardy tipli eşitsizlikler birçok bilim adamı tarafından farklı koşullar altında çalışılmış ve farklı gerekli ve veya yeterli koşullar ortaya çıkmıştır. Bu bölümde Hardy operatörünün sınırlılığını incelemek adına yapılan bu çalışmaların bazılarını ana teoremleri ile birlikte vereceğiz.

L. Diening ve S. Samko [45] çalışmasında değişken üstlü Lebesgue uzaylarında

$$\left\| x^{\alpha(x)+\mu(x)-1} \int_0^x \frac{f(y)dy}{y^{\alpha(y)}} \right\|_{L^{q(\cdot)}\left(\mathbb{R}_+^1\right)} \le C \|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}_+^1\right)}$$

Hardy eşitsizliğini ispatlamış ve

$$H^{\alpha} f(x) = x^{\alpha-1} \int_0^x \frac{f(y)}{y^{\alpha}} dy \text{ ve } H_{\beta} f(x) = x^{\beta} \int_x^{\infty} \frac{\varphi(y)dy}{y^{\beta+1}}$$

şeklinde tanımlı olan H^{α} ve H_{β} integral operatörlerinin $L^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}_+^1\right)$ uzayında sınırlılığını şu teoremle vermişlerdir:

Teorem 5.1. $p \in P_{0,\infty}$ olsun. Bu durumda H^{α} ve H_{β} opratörleri ancak ve ancak

$$\alpha < \min\left\{\frac{1}{p'(0)}, \frac{1}{p'(\infty)}\right\},$$

$$\beta > \max\left\{-\frac{1}{p(0)}, -\frac{1}{p(\infty)}\right\}$$

koşullarının sırasıyla sağlanması durumunda $L^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}_+^1\right)$ uzayında sınırlıdır.

H. Rafeiro, S. Samko 2008 yılındaki [31] çalışmalarında, değişken üstlü Lebesgue uzayları $L^{p(.)}(\Omega)$'da, $p(.)$'nin logaritma koşulunu sağlaması ve $\mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}$ koni şartını sağlayan bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi için, $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$ olmak üzere;

$$\left\| \frac{1}{\delta(x)^{\alpha}} \int_{\Omega} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{p(.)} \le C \|\varphi\|_{p(.)}, \quad 0 < \alpha < \min\left(1, \frac{n}{p^+}\right) \tag{4.2}$$

Hardy eşitsizliğinin geçerliliğinin, Ω bölgesinin α ve χ_α ile gösterilen belirli bir özelliğinin varlığına eşdeğer olduğunu gösterdiler.

R.A. Bandaliev [55] çalışmasında ağırlıklı değişken üstlü Lebesgue uzayında çok boyutlu Hardy tipli operatörün sınırlılığı üzerine çalıştı.

Teorem 5.2. $Hf(x)=\int\limits_{|y|<|x|} f(y)dy$ olmak üzere $p(x)$ ve $q(x)$ $\mathbb{R}^n$'de tanımlı fonksiyonlar ve $1<p^-\leq q(x)\leq q^+<\infty$ olsun. $v(x)$ ve $\omega(x)$'in $\mathbb{R}^n$'de ağırlık fonksiyonları olduğunu farz edelim. Bu durumda her $f\geq 0$ fonksiyonu için

$$\|Hf\|_{L^{q(.),\omega}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|f\|_{L^{p^-,v}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin sağlanması ancak ve ancak

$$A_B(\alpha,p,q)=\sup_{t>0}\left(\int\limits_{|y|<t}\left[v(y)\right]^{-(p')^+}dy\right)^{\frac{\alpha}{(p')^+}}\left\|\omega(.)\left(\int\limits_{|y<|.\|}\left[v(y)\right]^{-(p')^+}dy\right)^{\frac{1-\alpha}{(p')^+}}\right\|<\infty$$

olacak şekilde $\alpha\in(0,1)$ sayısının var olmasıyla mümkündür. Ayrıca $C>0$ sabiti (5.1)'deki mümkün olan en iyi sabitse,

$$\sup_{0<\alpha<1}\frac{(p')^+A_B(\alpha,p,q)}{(1-\alpha)\left[\left(\frac{(p')^+}{1-\alpha}\right)^{p^-}+\frac{1}{\alpha\left(p^--1\right)}\right]^{1/p^-}}\leq C\leq\left(\frac{p^-}{q^-}+\frac{q^+-p^-}{q^+}\right)^{\frac{2}{p^-}}\inf_{0<\alpha<1}\frac{A_B(\alpha,p,q)}{(1-\alpha)^{1/(p')^+}}\text{ dir.}$$

S. Boza ve J. Soria [57] çalışmalarında artmayan fonksiyonlara kısıtlanmış Hardy operatörü için değişken üstlü ağırlıklı modular eşitsizlikler üzerine çalıştılar. Bu çalışmanın ana teoremi şöyledir:

Teorem 5.3. u, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $p:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ öyle ki $0<p^-\leq p^+<+\infty$ olsun ve farz edelim ki $\varphi_{p(.),u}(0^+)=0$. Aşağıdaki durumlar özdeştir:

(a.) Herhangi pozitif ve azalmayan f fonksiyonu için öyle bir C sabiti vardır ki

$$\int_0^{+\infty}\left(H_k f(x)\right)^{p(x)}u(x)dx\leq C\int_0^{+\infty}\left(f(x)\right)^{p(x)}u(x)dx.$$

(b.) Herhangi $r,s>0$ için;

$$\int_r^{+\infty}\left(\frac{r}{sx}\right)^{p(x)}u(x)dx \le C\int_0^r \frac{u(x)}{s^{p(x)}}dx .$$

(c.) h.h.h. yerde $p_{|\mathrm{supp}\, u} \equiv p_0$ ve $u \in B_{p_0}$.

V. Kokilashvili ve S. Samko 2004 yılındaki [64] çalışmalarında; $n=1$, $0<l<\infty$ olacak şekilde $\Omega=(0,l)$ ve $x_0=0$ olmak üzere $H^{\beta}f(x)=x^{\beta-1}\int_0^x \frac{f(t)dt}{t^{\beta}}$ ve $H_*^{\beta}f(x)=x^{\beta}\int_x^l \frac{f(t)dt}{t^{\beta+1}}$ Hardy tipli operatörlerini göz önünde bulundurdular.

Teorem 5.4 $x\in[0,l]$ için $1\le p(x)\le P<\infty$ olduğunu farzedelim.

(i.) $\mathbb{R}^n, n\ge 1$ de açık bir küme Ω olsun. $d>0$ olmak üzere, $\bar{\Omega}$ tanımlı bir $p(x)$ fonksiyonu orijinin $[0,d]$ komşuluğunda

$$1<p_0\le p(x)\le P<\infty, x\in\bar{\Omega} \tag{5.2}$$

ve

$$|p(x)-p(y)|\le \frac{A}{\ln\frac{1}{|x-y|}},\quad |x-y|\le\frac{1}{2},\quad x,y\in\bar{\Omega} \tag{5.3}$$

koşullarını sağlasın. Eğer $-\frac{1}{p(0)}<\beta<\frac{1}{q(0)}$ ise bu durumda, $0<x\le l$ için $1\le s(x)\le S<\infty$, $s(0)=p(0)$ ve $\delta>0,\ 0<x<\delta$ için $|s(x)-p(x)|\le\frac{A}{\ln\frac{1}{x}}$ olan bir $s(x)$ fonksiyonu ile H^{β} ve H_*^{β} operatörlerinin her ikisi de $L^{p(.)}(\Omega)$ uzayından $L^{s(.)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır.

(ii.) Eğer bazı $d>0$ için, $0\le x\le d$, $p(0)\le p(x)$ ise $[0,d]$ üzerinde (5.2) ve (5.3) koşullarının geçerliliği daha zayıf

$$p(0)>1 \text{ ve } |s(x)-p(0)|<\frac{A}{\ln\frac{1}{x}},\quad 0<x<\min\left(l,\frac{1}{2}\right)$$

varsayımıyla yer değiştirilebilir ve bu durumda $L^{p(.)}(\Omega)$ uzayından $L^{s(.)}(\Omega)$ uzayına sınırlılık doğru kalır.

F. Mamedov ve A. Harman [22] çalışmalarında ağırlıklı değişken üstlü Lebesgue uzaylarında $Hf(x)=\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}^n:|t|\le|x|\}} f(t)dt$ Hardy operatörü üzerinde çalıştılar ve $L^{p(.)}(\omega)$'dan $L^{q(.)}(v)$'ye Hardy eşitsizliğinin sınırlılığı için $v(x),\omega(x)$ ağırlık fonksiyonları ve $p(x),q(x)$ üstlerinin gerekli ve yeterli koşullarını belirlediler:

$\sigma(x)=\omega^{-1/(p(x)-1)}(x)$ olmak üzere $W(x)=\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}^n:|t|\le|x|\}}\sigma(t)dt$ ve $\bar{W}(x)=\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}^n:|t|\ge|x|\}}\sigma(t)dt$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Ayrıca $p,q:\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ üst fonksiyonları ve $v,\omega:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları ve $B(0,a)$, a yarıçaplı 0 merkezli bir Euclid yuvarı olmak üzere;

$|x|<\delta$ için $V_\delta(x)=\int\limits_{B(0,\delta)\backslash B(0,|x|)} v(t)dt$; $V(x)=V_\infty(x)$ ve

$|x|>N$ için $W_N(x)=\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)}\sigma dt$; $W(x)=W_0(x)$ notasyonlarını kullanalım.

Ağırlık fonksiyonları için

$$\sigma=\omega^{-\frac{1}{p(x)-1}}\in L^1(B(0,a)),\qquad \text{herhangi}\qquad a>0\qquad \text{için}\qquad v(x)\in L^1(\mathbb{R}^n\backslash B(0,a)),$$

$$V(0)=\infty,\quad W(\infty)=\infty \tag{5.4}$$

doğal koşullarını kabul edelim.

Teorem 5.5. $1\le p\le q<\infty$ reel sayılar ve pozitif ölçülebilir $v,\omega:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları (5.4) koşulunu sağlıyor olsun. Herhangi $f(x)\ge 0$ fonksiyonu için

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\le|x|\}} f(y)dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}\le C\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.5}$$

eşitsizliği ancak ve ancak

$$C_{pq}=\sup_{t>0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,t)} v(x)dx\right)\left(\int\limits_{B(0,t)}\omega^{-1/(p-1)}dx\right)^{q/p'}<\infty;\quad C\sim C_{pq}^{1/q} \tag{5.6}$$

olduğunda doğru olur.

$0\le a<b\le\infty$ iken $f(x)\chi_{a\le|x|\le b}(x)$ test fonksiyonunu (5.5) eşitsizliğinde yerine koyarak

$$\left(\int\limits_{B(0,b)\backslash B(0,a)} v(x)\left(\int\limits_{B(0,|x|)} f(t)dt\right)^q dx\right)^{1/q}\le C\left(\int\limits_{B(0,b)\backslash B(0,a)}\omega(x)f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \tag{5.7}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 5.6. $x \in \mathbb{R}^n$ için $q(x) \geq p(x)$, $1 < p^- \leq p(x), q(x) \leq q^+ < \infty$ olsun. Ayrıca $p(x), q(x)$ fonksiyonları için

$$\exists \delta > 0, \exists f(0) \in \mathbb{R} \qquad \sup_{x \in B(0,\delta)} \left| f(x) - f(0) \right| \ln \frac{1}{W(x)} < \infty \tag{5.8}$$

ve

$$\exists N > 1, \exists f_\infty \in \mathbb{R} \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \left| f(x) - f_\infty \right| \ln W(x) < \infty \tag{5.9}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda Hf operatörü ve herhangi $f(x) \geq 0$ için

$$\left\| v^{1/q(x)} Hf(x) \right\|_{q(.)} \leq C \left\| \omega^{1/p(x)} f(x) \right\|_{p(.)} \tag{5.10}$$

eşitsizliği ancak ve ancak

$$\exists \delta > 0 \qquad \sup_{x \in B(0,\delta)} V_\delta(x) W(x)^{q(0)/p'(0)} < \infty \text{ ve}$$

$$\exists N > 1, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} V(x) W_N(x)^{q_\infty / p'_\infty} < \infty$$

sağlanması durumunda geçerlidir.

İspat. Yeterlilik. Sıfır civarında kestirim. $f(x) \geq 0$,

$$\left\| f \omega^{1/p} \right\|_{p(.)} \leq 1 \tag{5.11}$$

koşulunu sağlayan keyfi bir fonksiyon olsun. $\delta > 0$ (5.8) koşulunu sağlayan yeterince küçük bir sayı iken $x \in B(0,\delta)$ keyfi bir sabit nokta olsun.

$$\int_{B(0,|x|)} f(t)\,dt = \int_{B(0,|x|)} f \chi_{f(t)/\sigma(t) \geq 1} dt + \int_{B(0,|x|)} f \chi_{f(t)/\sigma(t) < 1} dt \tag{5.12}$$

olduğu aşikardır.

O zaman

$$\int_{B(0,|x|)} f \chi_{f(t)/\sigma(t) \geq 1} dt = \int_{B(0,|x|)} (f/\sigma) \chi_{(f/\sigma) \geq 1} \sigma(t)\,dt$$

$$\leq \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-(x)} \sigma dt \right), \text{ Hölder eşitsizliğinden}$$

$$\leq \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)} \sigma dt \right)^{1/p_x^-} \left(\int_{B(0,|x|)} \sigma dt \right)^{1/(p_x^-)'} , \text{ (5.10) dan}$$

$$\leq \left(\int_{B(0,|x|)} \sigma dt \right)^{1/(p_x^-)'} . \tag{5.13}$$

$q(x) \geq p(x)$ koşulunu dikkate alarak, (5.13)'den

$$\left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-} \chi_{f/\sigma \geq 1} \sigma dt \right)^{q(x)} = W(x)^{q(x)/(p_x^-)'} \left(W^{-1/(p_x^-)'}(x) \int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-} \sigma dt \right)^{q(x)}$$

$$\leq \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-} \sigma dt \right)^{p_x^-} W(x)^{\left(q(x)-p_x^-\right)/(p_x^-)'} \tag{5.14}$$

elde ederiz. $\dfrac{p_x^-}{p^-}, \dfrac{p_x^-}{p_x^- - p^-}$ indeksleriyle Hölder eşitsizliğini uygulayarak (5.14) eşitsizliğinin sağ yanını

$$\leq W(x)^{\left(q(x)-p_x^-\right)/(p_x^-)'-\left(p^- -1\right)} \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-} \sigma dt \right)^{p^-} \tag{5.15}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Böylece (5.15) ve (5.13) eşitsizliği

$$\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)\geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \leq \int_{B(0,\delta)} W(x)^{q(x)/(p_x^-)'-\left(p^- -1\right)} \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-} \sigma dt \right)^{p^-} v(x) dx \tag{5.16}$$

belirtir.

$$W(x)^{q(x)/(p_x^-)'} \sim W(x)^{q(0)/p'(0)} \;;\; x \in B(0,\delta) \tag{5.17}$$

olduğundan (5.9) koşulunun bir sonucu olarak ve (5.16), (5.17)'dan

$$\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)\geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \leq C_1 \int_{B(0,\delta)} W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-\left(p^- -1\right)} \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-} \sigma dt \right)^{p^-} v(x) dx \tag{5.18}$$

elde ederiz.

(5.18)'de (5.7) eşitsizliğini kullanarak ve $\omega_1 = \omega(x)^{\frac{p^- -1}{p(x)-1}}$, $v_1 = v(x) W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-\left(p^- -1\right)}$, $q_1 = p_1 = p^-$, $a = 0,\ b = \delta$ farz ederek,

$C_1 \sim \sup\limits_{0<s<\delta} \left(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,s)} v(x) W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-\left(p^- -1\right)} dx \right) W(s)^{p^- -1}$ olmak üzere,

$$\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)\geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \leq C_2 \left(\int_{B(0,\delta)} (f/\sigma)^{p(t)} \sigma dt \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\dfrac{q(0)}{p'(0)} - \left(p^- -1\right) > 0$ olduğunu doğrulamak zor değildir ve bu sebeple (5.8) koşulundan

$$W^{\frac{q(0)}{p'(0)}-\left(p^- -1\right)}(x) \leq C_3 V_\delta(x)^{-1+\frac{q(0)}{p'(0)}\left(p^- -1\right)} ;\; x \in B(0,\delta) \tag{5.19}$$

elde ederiz. Sıfır orijinli küresel koordinat sistemine geçerek (5.19)'den dolayı

$$C_2 \sim W(s)^{p^- -1} \int\limits_{B(0,\delta)\backslash B(0,s)} v(x) W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^- -1)} dx$$

$$\le C_3 \left[-\int_s^{\delta} \tilde{V}^{-1+\frac{p'(0)}{q(0)}(p^- -1)}(t)\, d\tilde{V}(t) \right] \tilde{W}(s)^{p^- -1} \le C_4 \qquad (5.20)$$

Son olarak (5.12)'deki toplanan terimlerin her biri için

$$\int\limits_{B(0,\delta)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)\ge 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \le C_5 \qquad (5.21)$$

kestirimini yaparız. Şimdi (5.21) eşitsizliğinin bir sonucu olarak

$$\int\limits_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int\limits_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)<1} dt \right)^{q(x)} dx \le \int\limits_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int\limits_{B(0,|x|)} \sigma dt \right)^{q(x)} dx, \text{ (5.8)'den}$$

$$\le C_6 \int\limits_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int\limits_{B(0,|x|)} \sigma dt \right)^{q(0)} dx \qquad (5.22)$$

Dolayısıyla $\omega_1 = \omega(x)^{\frac{p(0)-1}{p(x)-1}}$, $v_1 = v(x)$, $q_1 = q(0)$, $p_1 = p(0)$, $a = 0$, $b = \delta$ kabul edip (5.7) vasıtasıyla

$$\int\limits_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int\limits_{B(0,|x|)} f \chi_{(f/\sigma)<1} dt \right)^{q(x)} dx \le C_7 \int\limits_{B(0,\delta)} \sigma dt = C_9 \tilde{W}(\delta) = C_8 \qquad (5.23)$$

elde ederiz.

Sonsuzlukta kestirim. $N > 1$ (5.9) koşulunda yeterince büyük bir sayı olsun. Sıfır civarındaki kestirimle aynı kanıtlama yolunu takip edeceğiz.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f(t) dt \right)^{q(x)} v(x) dx$$

$$\le 2^{q^+ -1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f \chi_{(f/\sigma)\ge 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f \chi_{(f/\sigma)<1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \right)$$

$$:= 2^{q^+ -1} (I_1 + I_2) \qquad (5.24)$$

elde ederiz. (5.11) koşulunu hesaba katarak

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} (f/\sigma) \chi_{(f/\sigma)\ge 1} \sigma dt \right)^{q(x)} v(x) dx$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} (f/\sigma)^{p(t)} \chi_{(f/\sigma)\ge 1} \sigma dt \right)^{q(x)} v(x) dx, \text{ (5.11)'den}$$

$$\leq C_9 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} v(x)\,dx = C_{10} \tag{5.25}$$

elde ederiz.

Şimdi $I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \setminus B(0,N)} f \chi_{(f/\sigma)<1} dt \right)^{q(x)} v(x)\,dx$ 'i kestirelim.

Farz edelim ki

$F(x) = \int_{B(0,|x|)} f(t)\chi_{(f/\sigma)<1} dt$, bu durumda

$$\leq \int_{B(0,|x|)} \sigma dt = W(x) \tag{5.26}$$

$g(x) = \dfrac{F(x)}{W(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda $0 \leq g(x) \leq 1$ olur ve

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} F(x)^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} g^{q(x)} W^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$= \int_{\{x:\, g(x)<1/W(x),\ |x|>N\}} g^{q(x)} W^{q(x)} v(x)\,dx + \int_{\{x:\, g(x)\geq 1/W(x),\ |x|>N\}} g^{q(x)} W^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} v(x)\,dx + \int_{\{x:\, g(x)>1/W(x),\ |x|>N\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$\leq \tilde{V}(N) + \int_{\{x:\, g(x)>1/W(x),\ |x|>N\} \cap \{x: q(x)>q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$+ \int_{\{x:\, g(x)\geq 1/W(x),\ |x|>N\} \cap \{x: q(x)\leq q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$\leq \tilde{V}(N) + \int_{\{x:\, g(x)\leq 1/W(x),\ |x|>N\} \cap \{x: q(x)\geq q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q_\infty} v(x)\,dx$$

$$\leq \tilde{V}(N) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q(x)} v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q_\infty} v(x)\,dx$$

$$\leq \tilde{V}(N) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} F^{q_\infty} W^{q(x)-q_\infty} v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)\,dx, \text{ (5.9)'dan}$$

$$\leq \tilde{V}(N) + C_{11} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)\,dx \tag{5.27}$$

$1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$ iken (5.7) eşitsizliğini (5.27)'de yerine yazarak ve $\varphi = f\chi_{(f/\sigma)<1}$; $\omega_1 = \omega^{\frac{p_\infty - 1}{p(x)-1}}$; $v_1 = v$; $q_1 = q_\infty$, $p_1 = p_\infty$, $a = N$, $b = \infty$ farz ederek

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)\,dx \le C_{12}\left(\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{(f/\sigma)<1}dx\right)^{q_\infty/p_\infty}$$ elde ederiz.

Böylece

$$I_2 \le C_9\left(\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{(f/\sigma)<1}dx\right)^{q_\infty/p_\infty} + \tilde{V}(N) \text{ dir.} \qquad (5.28)$$

(5.9) ve (5.11) koşullarından

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{(f/\sigma)<1}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx$$

$$= \int_{\{x:\ f/\sigma<W^{-2/p_\infty},|x|>N\}} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx + \int_{\{x:\ f/\sigma\ge W^{-2/p_\infty},|x|>N\}} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx$$

$$\le \int_{\{x:\ f/\sigma>W^{-2/p_\infty}(x),|x|>N\}\cap\{x:p(x)<p_\infty\}} (f/\sigma)^{p}(f/\sigma)^{p_\infty-p}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx$$

$$+ \int_{\{x:\ f/\sigma>W^{-2/p_\infty}(x),|x|>N\}\cap\{x:p(x)\ge p_\infty\}} (f/\sigma)^{p}(f/\sigma)^{p_\infty-p}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx + \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} W^{-2}\sigma dx$$

$$\le \frac{1}{\tilde{W}(N)} + \int_{\{x:\ f/\sigma>W^{-2/p_\infty}(x),|x|>N\}\cap\{x:p(x)<p_\infty\}} (f/\sigma)^{p}dx$$

$$+ \int_{\{x:\ f/\sigma\le 1,|x|>N\}\cap\{x:p(x)>p_\infty\}} W^{-2(p-p_\infty)}(f/\sigma)^{p}\chi_{(f/\sigma)<1}\sigma dx + C_{15}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} \sigma^{1-p}f^{p}dx$$

$$\le \frac{1}{\tilde{W}(N)} + C_{13}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} \sigma^{1-p}f^{p}dx \text{, (5.10)'dan}$$

$$\le C_4 + C_{13}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} f^{p}\omega dx = C_{15}. \qquad (5.29)$$

(5.26)-(5.29) kestirimleri ve (5.25) eşitsizliği

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)}\left(\int_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f(t)dt\right)^{q(x)} v(x)dx \le C_{16} \qquad (5.30)$$

verir.

Ortasında kestirim.

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)}\left(\int_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f(t)dt\right)^{q(x)} v(x)dx \le \left(1+\left(\int_{B(0,N)} f(t)dt\right)^{q^+}\right)\int_{\mathbb{R}^n} v(x)dx \qquad (5.31)$$

olduğu açıktır.

$I_{p'(.);B(0,N)}\left(\omega^{-1/p}\right)=\int\limits_{B(0,N)}\omega^{-1/(p-1)}dt=\tilde{W}(N)\le C_{17}$ olduğunda, $p(.)-$normları için Hölder eşitsizliği ve (5.10) dan

$$\int\limits_{B(0,N)} f(t)\,dt \le C_{18}\left\|f\omega^{1/p}\right\|_{p(.);B(0,N)}\left\|\omega^{-1/p}\right\|_{p'(.);B(0,N)} \le C_{19} \tag{5.32}$$

kestirimini yaparız.

(3.30) ve (3.32)'ye göre

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)}\left(\int\limits_{B(0,N)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx \le \left(1+C_{19}^{q^+}\right)\tilde{V}(N)=C_{20} \tag{5.33}$$

buluruz.

$a\ge 0, b\ge 0, p\ge 1$ iken $(a+b)^p \le 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right)$ temel eşitsizliğini ve , (5.23),(5.30),(5.32),(5.33) kestirimlerini kullanarak

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{B(0,|x|)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx \le \int\limits_{B(0,\delta)}\left(\int\limits_{B(0,|x|)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$+\int\limits_{B(0,N)\backslash B(0,\delta)}\left(\int\limits_{B(0,|x|)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$+2^{q^+-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)}\left(\int\limits_{B(0,N)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx$$

$$+2^{q^+-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)}\left(\int\limits_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} f(t)\,dt\right)^{q(x)} v(x)\,dx \le C_{21} \tag{5.34}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 5.7.'nin yeterlilik kısmı ispatlanmış oldu.

Gereklilik. (5.8) koşulunda $\tilde{W}(\delta)<\frac{1}{2}$ olacak şekilde yeterince küyük bir $\delta>0$ seçelim. $t\in B(0,\delta)$ olsun. (5.10) eşitsizliği için

$$f_t(x)=\left(\int\limits_{B(0,t)}\sigma\,ds\right)^{\frac{-1}{p(0)}}\sigma(x)\,\chi_{B_{(0,t)}}(x) \tag{5.35}$$

test fonksiyonunu kullanalım. Böylece

$$Hf_t(x)=\frac{W(x)}{W(t)^{1/p(0)}}\chi_{B(0,t)}(x)+W(t)^{1-1/p(0)}\chi_{B(0,\delta)\backslash B(0,t)}(x) \tag{5.36}$$

olduğu açıktır. Ayrıca, (5.8) koşulunu uygulayarak $I_{p(.)}\left(\omega^{1/p}f_t\right)=\int\limits_{B(0,|t|)}\frac{\sigma(x)dx}{W(t)^{p(x)/p(0)}}\le C_{22}\int\limits_{B(0,|t|)}\frac{\sigma(x)dx}{W(t)}=C_{22}$ buluruz.

(5.8) koşulunun bir sonucu olarak

$$I_{q(.)}\left(v^{1/p}Hf_t\right)\ge\int\limits_{B(0,|t|)}v(x)(Hf_t)^{q(x)}dx$$

$$\ge\int\limits_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)}v(x)(Hf_t)^{q(x)}dx$$

$$\ge\int\limits_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)}v(x)W(t)^{(1-\frac{1}{p(0)})q(x)}dx\text{, (5.8)'den}$$

$$\ge C_{23}\int\limits_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)}v(x)W(t)^{q(0)/p'(0)}dx$$

$$=C_{23}V_\delta(t)W(t)^{q(0)/p'(0)} \tag{5.37}$$

elde ederiz. (5.11)'in gerekliliği ispatlanmış oldu.

(5.12) koşulunun gerekliliğinin ispatı için (5.10) eşitsizliğine $f_t(x)=\left(\int\limits_{B(0,t)\backslash B(0,N)}\sigma ds\right)^{\frac{-1}{p_\infty}}\sigma(x)\chi_{B(0,t)\backslash B(0,N)}(x),\quad |t|>N$ test fonksiyonunu uygulayalım.

N, (5.9) koşulundan yeterince büyük bir sayı olmak üzere $t\in\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)$ osun. O zaman

$$Hf_t(x)=\frac{W_N(x)}{W_N^{1/p_\infty}(t)}\chi_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)}(x)+W_N^{1-1/p_\infty}(t)\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,|t|)}(x) \tag{5.38}$$

olur.

(5.9) gereğince

$$I_p\left(\omega^{1/p} f_t\right) = \int\limits_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma(x)^{p(x)} \omega(x) \left(\int\limits_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma dy \right)^{-p(x)/p_\infty} dx \le C_{24},$$

$$I_{q(.)}\left(v^{1/p} Hf_t\right) \ge \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,|t|)} v(x)\left(Hf_t(x)\right)^{q(x)} dx$$

$$\ge \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,|t|)} v(x) \left(\int\limits_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma ds \right)^{q(x)/p'_\infty} dx. \quad (5.39)$$

(5.9)'dan (5.39)'a diğer koşulları uygulayarak

$$I_q\left(v^{1/q} Hf_t\right) \ge C_{25} V(t) \left(\int\limits_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma ds \right)^{q_\infty/p'_\infty} = C_{25} V(t) W_N(t)^{q_\infty/p'_\infty}.$$

(5.12) koşulunun gerekliliği ispatlanmış oldu. Böylece Teorem 5.6 ispatlandı.■

Yine F. Mamedov ve A. Harman [23] çalışmalarında değişken üstlü Lebesgue uzaylarında, yukarıda verilmiş olan, çok boyutlu genelleştirilmiş Hardy eşitsizliği üzerine çalıştılar ve değişken üstler $q(0) < p(0)$, $q(\infty) < p(\infty)$ şeklinde olduğunda $L^{p(.)} \to L^{q(.)}$ Hardy operatörünün sınırlılığı için eşdeğer gerekli ve yeterli koşullar buldular.

Theorem 5.7. $\tilde{V}(m) > 1,\ \tilde{W}(m) < 1$ ve $\tilde{V}(M) < 1,\ \tilde{W}(M) > 1$ olacak şekilde $0 < m < 1$ ve $M > 1$ var olsun. $p,q \in P \cap \Lambda_0 \cap Z_\infty$ ve $v, \sigma = \omega^{-\frac{1}{p(.)-1}}$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$'da tanımlı lokal integrallenebilir negatif olmayan fonksiyonlar olsun. $V(x) = \int\limits_{|y|>|x|} v(y) dy$; $W(x) = \int\limits_{|y|<|x|} \sigma(y) dy$ fonksiyonlarını kuralım. Burada $V(x)$, $W(x)$ ifadeleri sadece $|x|$'e bağlıdır. $\sim$ sembollü fonksiyonlar tek değişkenli olmak üzere $\tilde{V}(|x|) = V(x)$, $\tilde{W}(|x|) = W(x)$ tanımlayalım. Bu fonksiyonlar için $\tilde{V}(0) = \infty$, $\tilde{W}(\infty) = \infty$ koşullarının sağlandığını ve $p^- > 1,\ 0 < q(0) < p(0) < \infty,\ 0 < q(\infty) < p(\infty) < \infty$ olduğunu farz edelim. Bu durumda şu ifadeler özdeştir:

1. $C_1, C_2, p^-, p^+, q^-, q^+, p(0), q(0), p(\infty), q(\infty), \tilde{W}(m), \tilde{W}(M), \tilde{V}(m), \tilde{V}(M)$ değerlerine bağlı öyle bir pozitif C sabiti vardır ki; herhangi ölçülebilir $f(x) \geq 0$ fonksiyonu için $\left\| v^{1/q(.)} Hf \right\|_{q(.)} \leq C \left\| \omega^{1/p(.)} f \right\|_{p(.)}$ ağırlıklı norm eşitsizliği sağlanır.

2. Öyle C_3, C_4 sabitleri vardır ki; herhangi ölçülebilir $f(x) \geq 0$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{B(0,m)} v(x) \left(\int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy \right)^{q(0)} dx \right)^{1/q(0)} \leq C_3 \left(\int_{B(0,m)} \sigma(x)^{1-p(0)} f(x)^{p(0)}\,dx \right)^{1/p(0)}$$

ve

$$\left(\int_{|x|>M} v(x) \left(\int_{B(0,|x|)\setminus B(0,M)} f(y)\,dy \right)^{q(\infty)} dx \right)^{1/q(\infty)} \leq C_4 \left(\int_{|x|>M} \sigma(x)^{1-p(\infty)} f(x)^{p(\infty)}\,dx \right)^{1/q(\infty)}$$

eşitsizliklerinin her ikisi de sağlanır.

3. $\dfrac{1}{r(0)} = \dfrac{1}{q(0)} - \dfrac{1}{p(0)}, \quad \dfrac{1}{r(\infty)} = \dfrac{1}{q(\infty)} - \dfrac{1}{p(\infty)}$ olmak üzere,

$$\int_0^m \left[\tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(0)}} \tilde{W}(t)^{\frac{1}{q'(0)}} \right]^{r(0)} d\tilde{W}(t) < \infty$$

ve

$$\int_M^\infty \left[\tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(\infty)}} \tilde{W}(t)^{\frac{1}{q'(\infty)}} \right]^{r(\infty)} d\tilde{W}(t) < \infty$$

koşullarının her ikisi de sağlanır.

4. $\dfrac{1}{r(x)} = \dfrac{1}{q(x)} - \dfrac{1}{p(x)}$ iken, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left[V(x)^{\frac{1}{q(x)}} W(t)^{\frac{1}{q'(x)}} \right]^{r(x)} \sigma(x)\,dx < \infty$ koşulu doğru kalır.

5. $\displaystyle -\int_0^m \left[\tilde{V}(t)^{\frac{1}{p(0)}} \tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \right]^{r(0)} d\tilde{V}(t) < \infty$ ve $\displaystyle -\int_M^\infty \left[\tilde{V}(t)^{\frac{1}{p(\infty)}} \tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(\infty)}} \right]^{r(\infty)} d\tilde{V}(t) < \infty$

koşullarının her ikisi de sağlanır.

6. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left[V(x)^{\frac{1}{p(x)}} W(t)^{\frac{1}{p'(x)}} \right]^{r(x)} v(x)\,dx < \infty$ koşulu sağlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hardy operatörünün sınırlılığı ve Hardy eşitsizliğinin varlığı özdeş durumlar olduğundan, bu tez çalışmasında değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hardy eşitsizlikleri incelenmiş ve güncel çalışmalarla örneklendirilmiştir.

5. bölümde de görüleceği gibi Hardy operatörünün sınırlılığı p ve q değişken üslerinin $p > q$, $p < q$ gibi farklı durumları için incelenmiş sonuç olarak farklı gerekli ve yeterli sonuçlar elde edilmiştir.

İleri bir çalışma olarak benzer ya da aynı koşullar için daha kolay uygulanabilir gerekli ve yeterli koşullar araştırılabilir. Ayrıca, $p > q$, $p < q$ gibi koşullar 2. bölümde bahsedilen kesikli Hardy eşitsizliği için de incelenebilir.

7. **KAYNAKLAR**

[1] A.K. Lerner, (2005), On modular inequalities in variable L^p spaces. Arch. Math. (Basel) 85(6), 538–543

[2] A. Kufner, L.E. Persson, (2003), Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Co., Singapore/ New Jersey/ London/ Hong Kong, 376 pp.

[3] A. Kufner, O. John, S. Fucik, (2007), Function Spaces, Prague, Noordhoff International Publishing

[4] A. Kufner, L. Maligranda, and L.-E. Persson. The Hardy inequality -About its history and some related results. Research report, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Sweden, (141 pages), 2006

[5] A. Kufner and L.-E. Persson. The Hardy inequality - about its history and current status. Research Report 2002-06, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Sweden, (16 pages), ISSN:1400-4003, 2002

[6] A. Kufner, L. Maligranda, and L.-E. Persson, (Oct. 2006), The Prehistory of the Hardy Inequality, The American Mathematical Monthly, 113, 8; ProQuest Science Journal, pg. 715-732A. Nekvinda, (2004), Hardy–Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$, Math. Inequal. Appl. 7(2), 255–265

[7] A. Wedestig, (2003), Weighted inequalities of Hardy type and their limiting inequalities. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Sweden

[8] A. Wedesting,(2005), Weighted Iequalities fort he Sawyer Two-Dimensional Hardy Operator and its Limiting Geometric Mean Operator, Journal of Inequalities and Applications,vol. 2005- No.4, 387-394

[9] B. Muckenhoupt, (1972), Hardy's inequality with weights, Studia Math. , 34, 31-38

[10] B. Muckenhoupt, (1972), Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Am. Math. Soc. 165, 207–226

[11] B. Opic and A. Kufner. Hardy-type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990A.

[12] C. A. Okpoti, (October 2006), Weight Characterization of Hardy and Carleman Type Inequalities, Sweden, University Printing Office, Luleå

[13] C.A. Okpoti, L.-E. Persson, G. Sinnamon, (2007), An equivalence theorem for some integral conditions with general measures related to Hardy's inequality, J. Math. Anal. Appl. 326(1), 398–413

[14] C.A. Okpoti, L.-E. Persson, G. Sinnamon, (2008), An equivalence theorem for some integral conditions with general measures related to Hardy's inequality. II. J. Math. Anal. Appl. 337(1), 219–230

[15] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C.J. Neigebauer, (2003), The maximal function on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28(1), 223–238

[16] D. Cruz-Uribe and Fiorenza, J. Martell and C. Perez, (2006) The boundedness of operators in variable L^p spaces, Anal. Acad. Sci. Fenn. Math. , 31:239-264,

[17] D.E. Edmunds, V. Kokilashvili, A. Meskhi, (2005), On the boundedness and compactness of weighted hardy operators in spaces $L^{p(x)}$ Georgian Math. J. 12(1), 27–44

[18] E. Acerbi, G. Mingione, (2001), Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth. Arch. Ration. Mech. Anal. 156(2), 121–140

[19] E. Mitidier, (2000), A Simple Approach to Hardy Inequalities, Math. Notes 67, 479–486

[20] E. Sawyer, (Jan. 1984), Weighted Lebesgue and Lorents Norm Inequalities for the Hardy Operator, Trensactions of the American Mathematical Society,No 1, 329-337

[21] F.I. Mamedov and A. Harman, (2009), On a weighted inequality of Hardy type in spaces $L^{p(.)}$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 353, 521-530

[22] F.I. Mamedov and A. Harman, (2010), On a Hardy type general weighted inequality in spaces $L^{p(.)}$, Integ. Equ. Oper. Theory, 66, 565-592

[23] F. Zhao, Zunwei Fu, Shanzhen Lu, (2 Jun 2011), Sharp Bounds fort he Generalized Hardy Operators, arXiv:1106.0455v1 [math.FA]

[24] G. Sinnamon and V. D. Stepanov, (19 August 1994) The weighted Hardy inequality : New proofs and the case p=1, Journal of the London Math. Soceity, 54(1), 89-101

[25] G. H. Hardy, (1919), Notes on some points in the integral calculus, Messenger of Mathematics, 51(48):107–112.

[26] G.H. Hardy, (1920), Notes on a theorem Hilbert, Math. Z. 6, 314-317

[27] G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus. Messenger of Mathematics, 57:12–16, 1928.

[28] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Poyla,(1952), Inequalities 2nd ed., England, Cambridge University Pres.

[29] H. Hudzik and L. Maligranda, (18 December 2000), Amemiya norm equals Orlicz norm in general, Indag. Mathem. N. S. , 11(4), 573-585

[30] H. Rafeiro, S. Samko, (2008), Hardy Type Inequalıty In Varıable Lebesgue Spaces, Annal. Acad. Scient. Fenn.,

[31] I. Sharapudinov, (1979), On the topology of the space Lp(t)([0; 1]). Math. Notes, 26(3–4):796–806

[32] J. E. Mitronovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives,” Boston Kluwer Academic Publishers, 1991

[33] J. Lang, D. Edmunds , (2011), Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, ISBN 978-3-642-18267-9

[34] J. Musielak, (1983), Orlicz spaces and modular spaces. Lecture Notes in Mathematics, 1034. Springer, Berlin

[35] J.S. Bradley,(1978), Hardy inequalities with mixed Norm. Can. Math. Bull. 21(4), 405–408

[36] K. Novak, (Jun. 1993), Schatten Ideal Behavior of a Generalized Hardy Operator, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 118, No. 2, 479-483)

[37] Lai Qinsheng, L. Pick, (1993), The Hardy Operator, L_∞, and BMO, J. London Math. Soc. (2) 48 (1993) 167-177

[38] L. Diening, (Feb. 2002), Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph. D. Thesis, University of Freiburg, Germany

[39] L. Diening and S. Samko, (2003), Hardy inequality in veriable exponent Lebesgue spaces, Fract. Calc. and Appl. Anal. , vol:6, no 4, 355-362

[40] L. Diening, M. Růžička, (2003), Calderon–Zigmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics. J. Reine Angew. Math. 563, 197–220

[41] L.Diening, (2004), Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$,Math. Nachr. 268, 31–43

[42] L. Diening, (2004), Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ Math. Inequal. Appl. 7(2), 245–253

[43] L. Diening, P. Hästö, A. Nekvinda, (2005) Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces. In: FSDONA 04 Proceedings (P. Drabek and J. Rakosnik eds.); Milovy, Czech Republic, 38–58. Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague

[44] L. Diening and S. Samko, (2007), Hardy Inequality In Variable Exponent Lebesgue Spaces, Frac. Cal. and App. Anal, vol. 10, 1-18

[45] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, (2011), Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponenets, Berlin, Springer-Verlag

[46] L. Pick, M. Růžička, (2001), An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy–Littlewood maximal operator is not bounded, Expo. Math. 19(4), 369–371

[47] M. R. Spiegel, (1990), Theory and Problems of Real Variables Lebesgue Measure and Integration with Applications to Fourier Series, USA, McGraw-Hill Inc.

[48] M. Růžička, (2000), Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748. Springer, Berlin

[49] N. Kaiblinger, L. Maligranda, L.-E. Persson, (2000), Norms in Weighted L^2-spaces and Hardy Operators, Function spaces : the fifth conference : proceedings of the conference at Poznan, Poland, Marcel Dekker Incorporated, p.p. 205-216

[50] O. Kováčik, J. Rákosnik, (1991), On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41, No. 4, 592—61

[51] P. Gurka, (1984), Generalized Hardy's Inequality, Casopis pro pestovani Matematiky, vol 109, No 2, 194-203, url:http//dmlcz/108498

[52] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja, (2005), Hardy's inequality in a variable exponent Sobolev space. Georgian Math. J. 12(3), 431–442

[53] R. A. Adams, (1972), Sobolev Spaces, New York. Res

[54] R.A. Bandaliev, (2010), The Boundedness of Multidimensional Hardy Operators in Weighted Variable Lebesgue Spaces, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 50, No. 3, pp. 249–259

[55] R.A. Mashiyev, B. Çekiç, F.I. Mamedov, S. Ogras, (2007), Hardy's inequality in power-type weighted $L^{p(\cdot)}(0,\infty)$ spaces. J. Math. Anal. Appl. 334(1), 289–298

[56] S. Boza, J. Soria, (2008), Weighted Hardy modular inequalities in variable L^{p} spaces for decreasing functions, J. Math. Anal. Appl. 348 (2008) 383–388

[57] S. Samko, (2003), Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces, , Fract. Calc. and Appl. Anal., vol. 6, no 4, 355-362.

[58] S. Samko, (2003), Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent, Fract. Calc. and Appl. Anal., vol. 6, No 4, 421-440

[59] S. Samko, (2005), Best Constant In The Weighted Hardy Inequality: The Spatial And Spherical Version, Frac. Cal. and App. Anal. , vol. 8, 39-52

[60] Tieling Chen, (2003), Weighted Weak Type Inequalities for the Hardy Operator When p=1, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 4, Issue 4, Article 81

[61] V.D. Stepanov, (1994), Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators, J. Lond. Math. Soc. (2) 50(1), 105–120

[62] V.G. Maz'ya, (1985), Sobolev Spaces. (Translated from Russian) Springer series in Soviet Mathematics. Springer, Berlin

[63] V. Kokilashvili, S. Samko, (2004), Maximal and Fractional Operators in Weighted $L^{p(x)}$ Spaces, Matematica Iberoamericana, vol. 20, No 2, 493-515.

[64] V. Kokilashvili, S. Samko, (2005), Weighted Boundedness In Lebesgue Spaces with Variable Exponents Of Classical Operators On Carleson Curves; Proc. A. Razmadze Math. Inst. , 138(2005), 106–110

[65] V. Kokilashvili, S. Samko, (2005), Boundedness of Maximal Operators and Potential Operators on Carleson Curves in Lebesgue Spaces with Variable Exponent, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol. 23, No. 6, pp. 965-97

[66] V. Kokilashvili,N. Samko, S. Samko, (2007), The Maximal Operator in Weighted Variable Spaces $L^{p(\cdot)}$, Journal of Functıon Spaces and Applıcatıons, Volume 5, 299-317

[67] V.V. Zhikov, (1998), On some variational problems. Russ. J. Math. Phys. 5(1), 105–116

[68] W. Orlicz, (1931), Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math., 3:200–211,

[69] X.-L. Fan, D. Zhao, (1999), A class of De Giorgi type and Hölder continuity. Nonlinear Anal. 36 (3):295–318 (Ser. A: Theory, Methods & Applications)

[70] X.-L. Fan, D. Zhao, (2000), The Quasi-Minimizer of Integral Functionals with $m(x)$ Growth Conditions. Nonlinear Anal. 39(7):807–816, (Ser. A: Theory, Methods & Applications)

[71] X.L. Fan, D. Zhao, (2001), On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Journal of Mathematical Analysis and Applications 263, 424_44

[72] X.L. Fan, (Feb. 2007), Amemiya norm equals Orlicz norm in Musielak-Orlicz spaces, Acta Mathematica Sinica, English serie, vol 23, No 2, p.p. 281-288

[73] Y.A. Alkhutov, (2005), On the Hölder continuity of $p(x)-$harmonic functions. (Russian) Mat. Sb. 196 (2), 3–28 (2005); translation in Sb. Math. 196 (1-2),147–171 (2005)

[74] Y. Soykan, (Ekim 2008), Fonksiyonel Analiz, Ankara, Nobel Yayın Dağ. Tic. Ltd. Şti.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler
Adı Soyadı : Mustafa Özgür KELEŞ
Doğum Yeri : Kızılcahamam
Doğum Tarihi : 04.02.1983
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Adıyaman Özel Merkez Lisesi /Adıyaman – 2001
Lisans : Dicle Üniversitesi Z. G. Eğitim Fakültesi Orta Alanlar Fen ve Matematik Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği/Diyarbakır- 2008
Yüksek Lisans : Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik A.B.D.- 2011

<u>Ulusal Bildiriler :</u>
* Aziz HARMAN, Mustafa Özgür KELEŞ; "Değişken Üslü Lebesgue Uzayları ve Özellikleri"; 10. Matematik Sempozyumu 21-23 Eylül 2011, Işık Üniversitesi İSTANBUL
* Aziz HARMAN, Mustafa Özgür KELEŞ; "Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Hardy Operatörünün Sınırlılığı"; 10. Matematik Sempozyumu 21-23 Eylül 2011, Işık Üniversitesi İSTANBUL