T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARINDA AĞIRLIKLI HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL VE RİESZ POTANSİYEL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Enver ÜLGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat–2012

DİYARBAKIR

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Enver ÜLGÜL tarafından yapılan "Değişken Üstlü Morrey Uzaylarında Ağırlıklı Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. Ali YILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ (Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 24/02/2012

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.........

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma ve ilerleme imkanı veren, bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım danışman Hocam Sayın **Yrd. Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ**'e, ve sonuçların değerlendirilip tartışılmasında katkı sunan Hocam Sayın **Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV**'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her türlü desteği ve sevgilerini esirgemeyen sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım…

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARINDA AĞIRLIKLI HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL VE RIESZ POTANSİYEL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Enver ÜLGÜL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

Bu çalışmada değişken üstlü Morrey uzaylarında ağırlıklı Hardy-Littlewood maksimal ve Riesz potansiyel operatörlerinin sınırlılığı ispatlanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde değişken üstlü Lebesgue ve Morrey uzaylarının çıkış noktası ve günümüze kadar yapılan çalışmalar kronolojik sırada ele alınmıştır.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, değişken üstlü Lebesgue uzayları ve ağırlıklı değişken üstlü Lebesgue uzayları teorisi ve bu uzaylarda çalışma konumuzla ilgili elde edilmiş sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk önce klasik Morrey uzayları ve değişken üstlü Morrey uzayları teorisi verilmiş ve daha sonra bu uzaylarda Hardy-Littlewood maksimal ve Riesz potansiyel ile ilgili elde edilmiş sonuçlar verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde, ağırlıklı değişken üstlü Morrey uzayları tanımlanarak $\Omega, \mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi ve $p(\cdot), \lambda(\cdot)$ fonksiyonları log-Hölder sürekli olmak üzere ağırlıklı Hardy-Littlewood maksimal ve ağırlıklı Riesz operatörlerinin sınırlığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişken üstlü Lebesgue uzayları, Ağırlıklı değişken üstlü Morrey uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatör, Riesz potansiyel operatör, log-Hölder süreklilik koşulu.

ABSTRACT

THE BOUNDEDNESS OF THE WEIGHTED HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL

AND RIESZ POTENTIAL OPERATORS IN THE VARIABLE

EXPONENT MORREY SPACES

M.Sc. Thesis

Enver ÜLGÜL

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2012

In this study the boundedness of the weighted Hardy-Littlewood maximal and Riesz operators in the variable exponent Morrey spaces are proved.

This thesis consists of five chapters.
The first chapter is an introduction to the theory of the variable exponent Lebesgue and Morrey spaces. Moreover, it gives the origin of the theory and lists the relevant works of the various authors in chronological order.

In the second chapter, we give the basic definitions and theorems of the theory.

In the third chapter, the theory of the variable exponent Lebesgue and weighted variable exponent Lebesgue spaces and some important results related to the thesis are given.

In the fourth chapter, the theory of the classical Morrey and the variable exponent Morrey spaces and the necessary conditions of the boundednes of the Hardy-Littlewood maximal and Riesz operators are given.

In the last chapter, the definition of the weighted variable exponent Morrey spaces is given and the boundedness of the weighted Hardy-Littlewod maximal and weighted Riesz operators on a bounded open domain is obtained.

Key Words: Variable exponent Lebesgue spaces, weighted variable exponent Morrey spaces, Hardy-Littewood maximal operator, Riesz potential operator, log-Hölder continuity condition

SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu öklid uzayı
Ω	: $\mathbb{R}^n$nin bir alt bölgesi
$\|\Omega\|$	: Ω bölgesinin Lebesgue ölçümü
$S(\Omega)$	: Ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
Çap (Ω)	: Ω bölgesinin çapı
$L^p(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
L^1_{loc}	: Lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
L^p_{loc}	: p. mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
w	: Ağırlık fonksiyonu
ρ	: Kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu
$L^p_w(\Omega)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Lebesgue uzayı
$L^{p(\cdot)}_w(\Omega)$	: Ağırlıklı değişken üstlü Lebesgue uzayı
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$(B(x,r))^c$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvarın tümleyeni
$\widetilde{B}(x,r)$	: $B(x,r)\cap\Omega$
λ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^{p,\lambda}(\Omega)$	: Morrey uzayı
$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Morrey uzayı
$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}_w(\Omega)$	: Ağırlıklı değişken üstlü Morrey uzayı
M	: Hardy-Littlewood maksimal operatör
$M^\sharp$	: Sharp maksimal operatör
M^β	: Ağırlıklı Hardy-Littlewood maksimal operatör
I_α	: Riesz potansiyel operatör
M_α	: Kesirli maksimal operatör
I^β_α	: Ağırlıklı Riesz potansiyel operatör

1. GİRİŞ

Bu bölümde, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tarihsel gelişiminden bahsedilecek, Morrey uzayları hakkında bilgi verilecek ve bu uzaylarda harmonik analizin önemli araçlarından olan Hardy-Littlewood maksimal ve Riesz potansiyel operatörlerinin sınırlılığını ilgili çalışmalar verilecektir.

Değişken üstlü Lebesgue uzayları literatürde ilk defa, Orlicz (1931) tarafından, yazılan makalede görüldü. Bu makalede aşağıdaki soru göz önüne alınmıştır. (p_k) ve (x_k) dizileri $\sum x_k^{p_k}$ yakınsak olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun. Bu halde $\sum x_k y_k$ ifadesinin yakınsak olması için y_k üzerindeki gerek ve yeter koşullar nelerdir? Bu soruya yanıt en az bir $\lambda > 0$ ve $p_k' = \frac{p_k}{p_k - 1}$ için $\sum (\lambda y_k)^{p_k'}$ serisinin yakınsak olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Orlicz aynı zamanda değişken üstlü Lebesgue uzayını reel aralıkta göz önüne almıştır ve bu uzayda Hölder eşitsizliğini ispatlamıştır. Bu makaleden sonra Orlicz değişken üstlü Lebesgue uzayında çalışmayı bırakıp, kendi ismi ile anılan Orlicz fonksiyon uzayları teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Orlicz uzayları u, Ω bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere enaz bir $\lambda > 0$ ve koşulları bilinen bir φ fonksiyonu için

$$I(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |u(x)|)\, dx < \infty$$

olacak şekildeki fonksiyonlardan oluşan uzaya denir. Ek olarak eğer I fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da **modüler uzay** denir. Bu uzaylar ilk defa sistematik olarak Nakano (1950,1951) tarafından çalışılmış ve değişken üstlü Lebesgue uzayını daha genel uzayların bir örneği olarak göz önüne almıştır. Daha sonra, özellikle Hudzik (1976, 1979) ve Musielak (1983) tarafından modüler uzaylar incelenmiştir. Eğer yukarıdaki φ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda **Genelleştirilmiş Orlicz Uzayları** veya **Musielak Orlicz Uzayları** adı verilen daha genel uzaylar elde edilir.

Reel aralıkta değişken üstlü Lebesgue uzayları, bağımsız olarak Rus araştırmacılar özellikle de Sharapudinov (1979,1981,1986) tarafından geliştirildi. Bu araştırmacıların orjin noktası Tsenov (1961) tarafından üretilen ve Sharapudinov (1979) tarafından cevaplanan u sabit bir fonksiyon ve v, $L^{p(\cdot)}([a,b])$ uzayının sonlu boyutlu alt uzayında değişmek üzere

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)}\, dx$$

ifadesini minimize problemine dayanır. 1980 li yılların ortasında Zhikov (1987) değişken üstlü uzaylarla yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel integralleri göz önüne alarak araştırmalar için yeni bir çizgi oluşturmuştur.

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki adım 90 lı yılların başlarında Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından atılmıştır. Bu makalede $\mathbb{R}^n$ de değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının bir çok temel özelliği ortaya konmuştur.Kováčik ve Rákosník, değerlerini $[1,\infty]$ aralığında alan ölçülebilir bir p fonksiyonu için değişken üstlü Lebesgue uzayının tanımını genişletmişlerdir.

Bu tanıma göre Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olmak üzere $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$ olsun.

$$I(f) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}\, dx + ess\sup_{\Omega_\infty} |f(x)|$$

ve

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : I\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

olarak alınsın. En az bir $\lambda > 0$ için $I(\lambda f) < \infty$ olacak şekilde tüm fonksiyonların sınıfına **değişken üstlü Lebesgue uzayı** adı verilir.

Ayrıca Kováčik ve Rákosník, Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1,n)$ fonksiyonu sürekli ve

$$1 \leq q(x) \leq \frac{np(x)}{n-p(x)} - \varepsilon = p^*(x) - \varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{1}{n-1}$$

olmak üzere Sobolev tipli

$$\|u\|_{q(\cdot)} \leq c\, \|\nabla u\|_{p(\cdot)} \quad ; u \in C_0^\infty$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Bu makaleden sonra uzun bir süre herhangi bir çalışma gözlenmemiştir. Daha sonra bu konu bağımsız olarak bir çok araştırmacı tarafından yeniden ele alınmıştır. Samko (1998), Rus bilim adamlarının çalışmalarına dayalı olarak değişken üstlü Lebesgue uzayında konvolüsyon ve potansiyel tipli operatörleri incelemiştir. Konvolüsyon operatörleri bu uzaylarda istenmeyen özelliklere sahiptir. Bunu nedeni $K = k * f$ konvolüsyon operatörünün genel olarak bir f fonksiyonunun singüleritesini başka bir noktaya taşımasıdır. Bunun bir sonucu olarak Young tipli teorem bu uzaylarda genel olarak geçerli değildir. Bu çalışmasını takip eden ikinci çalışmasında potansiyel operatörlerini de göz önüne alarak bu uzaylar için Young Teoreminin bazı çeşitlerini ispatlamış ve değişken üstlü Lebesgue uzayında Sobolev tipli teoremin geçerliliği sorusunu ele almıştır. Ω sınırlı bir bölge ve p ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Riesz potansiyeli için Sobolev tipli eşitsizlik ve ayrıca p fonksiyonun

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|}, |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

koşulu ve maximal operatörün sınırlılığı koşulu altında kritik Sobolev üstü için Sobolev tipli eşitsizliği ispatlamıştır. Bunun dışında değişken mertebeli potansiyel tip operatörleri incelemiştir.

Pick ve Růžička (2001), genel p fonksiyonları için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında Hardy-Littlewood maximal operatörün sınırlılığına dair ters bir örnek sundular.

Diening (2002, 2004),

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|}, |x-y| \leq \frac{1}{2} \tag{1.1.1}$$

koşulunu sağlayan ve yeteri kadar büyük yuvarın dışında sabit olan p fonksiyonları için Hardy-Littlewood maximal operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığını ispatlamış, ayrıca Diening (2004) çalışmasında Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığını ve Sobolev gömme teoremini vermiştir.

Cruz-Uribe ve ark.(2003), (1.1.1) ve

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}, \qquad x, y \in \Omega, |y| \geq |x| \tag{1.1.2}$$

koşulu altında Hardy-Littlewood maximal operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığını ve üstten yarı sürekli p fonksiyonu için (1.1.2) koşulunun gerekliliğini göstermişlerdir.

Capone ve ark. (2007), ise Hardy-Littlewood maximal operatörün sınırlılığına bağlı olarak, kesirli maximal operatörün sınırlılığını ve Riesz potansiyel operatörü yardımıyla da Sobolev gömme teoremini ispatlamışlardır.

Diening (2005), Muckenhoupt sınıfları kavramını genelleştirerek, maximal operatörün sınırlılığı için gerek ve yeter koşulları vermiştir. Cruz-Uribe ve ark.(2011), değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Maksimal operatörün sınırlılığını ispatlamıştır.

Kokilashvili ve Samko (2003), sınırlı bölge üzerinde ağırlıklı Lebesgue uzayında singüler operatörün sınırlılığını, Kokilashvili ve Samko (2004, 2005) de maximal operatörün sınırlılığını ele almışlar ve Hardy operatörünün sınırlılığı ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir. Ayrıca Samko (2003) sınırlı bölgede kesirli integraller için Hardy eşitsizliğini elde etmiştir. Edmunds ve ark. (2004), Değişken üstlü Lebesgue uzaylarında, genel ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı için integral tipli bir gerek koşul ve ayrıca bir yeter koşul vermiştir. Bu koşullar, p fonksiyonun sabit olması durumunda çakışmaktadır.

Diening ve ark. (2011) tarafından Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayları ve uygulamaları ile ilgili bir çok sonucu içeren kitap yayınlanmıştır.

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları Morrey (1938) tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisine önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirilebileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması doğal ve önemlidir.

Şimdi bu alanda yapılan bazı çalışmalardan bahsedelim.

Chiarenza ve Frasca (1987), Klasik Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatör, Singuler integral operatör ve Kesirli integral operatörün sınırlılığını göstermiştir.

Samko (2008), Morrey uzaylarında ağırlıklı Hardy ve singular operatörlerin sınırlılığını ispatlamıştır.

Guliyev(2009), Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maximal operatör, Singuler integral operatör ve Riesz potansiyel operatörün sınırlılığını göstermiştir.

Gürbüz(2010), Guliyev(2009) çalışmasından yararlanarak Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı üzerine tez çalışması yapmıştır.

Komori ve Shirai (2009), Ağırlıklı Morrey uzaylarını tanımlayarak yukarıdaki klasik operatörlerin sınırlılığını bu uzaylarda çalışmışlardır.

Mustafayev (2012), Ağırlıklı Morrey uzaylarında altliner operatorlerin sınırlılığı üzerine çalışma yapmıştır.

Almeida ve ark. (2008), Ω, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi $0 \leq \lambda(x) < n$ ve $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olmak üzere $p(\cdot)$ fonksiyonun log-Hölder süreklilik koşulunu sağlaması durumunda Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığını ve $p(\cdot)$ ve $\alpha(\cdot)$ fonksiyonları logaritmik Hölder sürekli ve

$$\inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0, \ \sup_{x\in\Omega}[\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n$$

varsayımları altında

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$$

olmak üzere $I^{\alpha(\cdot)}$ operatörünün $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlılığını değişken üstlü Morrey uzaylarında ispatlamıştır.

Hästö (2009), Almeida ve ark. sonuçlarından yararlanarak, p fonksiyonunun global log-Hölder sürekli olması durumunda Hardy-Littlewood maksimal operatörün $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılığını ispatlamıştır.

Mizuta ve Shimomura (2008, 2010), Değişken üstlü Morrey uzaylarıda Riesz potansiyelinin sınırlılığını incelemiştir.

Kokilashvili ve Meskhi (2008), Değişken üstlü Morrey uzaylarında maksimal operatörün ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörün sınırlılığını incelemiştir.

Fan (2010), Değişken üstlü Morrey ve Campanato uzaylarını incelemiştir.

5

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler hakkında bilgi verilecek ve daha sonra çalışmamız ile ilgili uzaylar tanımlanacaktır.

2.1. Normlu Uzay

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X, \qquad (x, y) \to x + y, \\ \cdot &: \mathbb{F} \times X \to X, \qquad (\alpha, x) \to \alpha x, \end{aligned}$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Eğer,
$A)$ X, $+$ işlemine göre değişmeli bir grup,
$G_1)$ Her x, $y \in X$ için $x + y \in X$
$G_2)$ Her x, y, $z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
$G_3)$ Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır
$G_4)$ Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır
$G_5)$ Her x, $y \in X$ için $x + y = y + x$
$B)$ Her x, $y \in X$ ve α, $\beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere
$E_1)$ $\alpha x \in X$
$E_2)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
$E_3)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
$E_4)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
$E_5)$ $1x = x$
şartları sağlanıyorsa X uzayına $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.2. Bir X vektör uzayında $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her x, $y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$) için
$i)$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
$ii)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
$iii)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
özelliklerini sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir. Bundan sonra bir $x \in X$ elemanın normu $\|x\|$ şeklinde ve X uzayında tanımlanan norm $\|\cdot\|_X$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.1.3. X bir normlu uzay, $x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;
$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**,
$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar** olarak tanımlanır. $A \subset X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A'ya **açık küme** denir.

Tanım 2.1.4. (x_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_0\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir.

Tanım 2.1.5. (x_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.6. Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **Banach uzayı** adı verilir.

Tanım 2.1.7. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x, x_0 \in \Omega$ elemanları için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa u fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında **süreklidir** denir.

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay ve X in bir $E\,(E \subset X)$ altkümesi verilsin. Eğer, her bir $x \in X$, E deki elemanlardan oluşan bir (x_n) dizisinin limiti ise E kümesi X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.9. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Tanım 2.1.10. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$, X vektör uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ sabitleri varsa $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk**(eşdeğer) **normlar** denir.

Tanım 2.1.11. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T)$, X in bir altkümesi olsun. $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ dönüşümü $D(T)$ nin her bir elemanını Y nin yalnız bir elemanına götürüyorsa, T ye $D(T)$ den Y ye bir **operatör** adı verilir ve $D(T)$ ye T operatörünün **tanım kümesi** denir.

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx,\ x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün **değer(görüntü) kümesi** denir.

Tanım 2.1.12. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T) \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü, her $x, y \in D(T)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **lineer operatör** denir.

Tanım 2.1.13. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere; $T : X \to Y$ operatörü, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x \in X$ elemanı verilsin. n'nin yeterince büyük değerlerinde ($n \to \infty$ iken)

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \ \text{ iken } \ \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$$

oluyorsa T operatörü x *noktasında* **süreklidir** denir. Eğer T, X'deki her noktada sürekli ise T'ye **sürekli operatör** denir.

Tanım 2.1.14. X ve Y normlu uzay, $D(T) \subset X$ ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $A \subset X$ alt kümesi sınırlı iken $T(A)$, Y'de sınırlı ise T operatörüne **sınırlı operatör** denir. Bir başka ifadeyle, her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde pozitif bir c reel sayısı varsa T'ye sınırlı operatör denir. Bununla birlikte, (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan c'lerin infimumuna T *operatörünün* **normu** denir ve bu norm

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.1.15. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.1.16. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

özelliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir T operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına **izometrik** *olarak* **izomorfizma** ve T operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında **izometrik izomorfizma** denir.

Bu özelliğe sahip uzaylar aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu durum $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.17. X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt uzayı

ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan birim operatör sürekli ise X normlu uzayı Y normlu uzayına **gömülür** denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü lineer olduğundan *ii)* koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq C\,\|x\|_X\,, \ x \in X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.1.18. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir. Bir f fonksiyoneline,

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)\,;\; x_1, x_2 \in X \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

koşulu altında bir lineer dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.1.19. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X normlu uzayının **dual uzayı** denir ve X' ile gösterilir. Bu uzay $u, v \in X', x \in X$ ve $c \in \mathbb{C}$

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \text{ ve } (cu)(x) = cu(x),$$

şeklinde tanımlanan noktasal toplam ve çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X'$ elemanının normu

$$\|u\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır. X' uzayı $\|\cdot\|_{X'}$ normu ile bir Banach uzay olur.

Tanım 2.1.20. Bir X vektör uzayının X' duali de normlu vektör uzayı olduğundan, bu uzayın da duali tanımlanabilir. Bu durumda $(X')' = X''$ lineer vektör uzayına X in **ikinci duali** denir.

Sabit bir $x \in X$ için X' uzayında

$$g_x(f) = f(x) \qquad (\, f \in X' \text{ değişken})$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden, bu halde

$$\begin{aligned} C:\ \ X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g_x \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** adı verilir. Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, bu durumda X uzayına yansımalı uzay adı verilir. X yansımalı uzay ise $X \cong X''$ olur.

Teorem 2.1.21. Yansımalı bir $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının her alt uzayı da yansımalıdır.

Teorem 2.1.22. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay olsun. X uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul X' uzayının yansımalı olmasıdır. Eğer X uzayı ayrılabilir ise, X' uzayıda ayrılabilirdir. Bu durumda, X ayrılabilir ve yansımalı bir uzay ise X' de ayrılabilir ve yansımalı bir uzay olur.

2.2. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1. Ω, $\mathbb{R}^n$'nin açık bir bölgesi olmak üzere,

$$C^0(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}^n;\ u \text{ fonksiyonu sürekli}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye **sürekli fonksiyonlar uzayı** denir. Bu uzay; $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$'de tanımlanan norm olmak üzere,

$$\|u\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \|u(x)\| < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin $n-$bileşenlisi ise, α ya **çoklu indis** denir ve $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$ şeklinde yazılabilir. Buna göre $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ise, o zaman $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$ ifadesi $|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Bu ifade,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.2.3. $\overline{G}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ altkümesinin kapanışı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de bir Ω bölgesi için $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ nin kompakt(kapalı ve sınırlı) bir altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. G de tanımlı bir u fonksiyonun desteği

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G; u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer supp $u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da **kompakt desteğe** sahiptir denir.

Tanım 2.2.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde, $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $C^m(\Omega)$ vektör uzayıdır.

$$C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$$

ve

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

olarak yazılabilir.

$C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına **test fonksiyonu** denir.

Tanım 2.2.5. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde $D^\alpha u$ kısmi türevlerin sınırlı olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının belirttiği uzaya $C_B^m(\Omega)$ vektör uzayı adı verilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. Σ, $\mathbb{R}^n$'nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

i) $\mathbb{R}^n \in \Sigma$,

ii) $A \in \Sigma$ ise $A^c \in \Sigma$ (A^c, A'nın tümleyen kümesi),

iii) Eğer $i = 1, 2, ...,$ için $A_i \in \Sigma$ ise, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

koşulları sağlanıyorsa, Σ sınıfına bir **σ-cebir** adı verilir.

Tanım 2.3.2. Σ sınıfı üzerinde tanımlanan $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, Σ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_i\}_{i\in n}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \forall A_i \cap A_k = \varnothing, i \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna Σ sınıfı üzerinde bir **ölçüm** denir.

Tanım 2.3.3. $\mathbb{R}^n$'nin altkümelerinin aşağıda verilen özelliklere sahip σ-cebiri olan bir Σ sınıfının ve bu Σ sınıfı üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir;

i) $\mathbb{R}^n$'deki her açık küme Σ'ya aittir,

ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$ dir,

iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, ..., n\}$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$ dir,

iv) $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Sigma$ iken

$$x + A = \{x + y : y \in A \in \Sigma\} \quad \text{ve} \quad \mu(x + A) = \mu(A)$$

olur, yani μ ölçümü öteleme altında değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir Σ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^n$'nin Lebesgue ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$'de **Lebesgue ölçümü** ve $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$ gösterimine ise A kümesinin **ölçümü** denir. Bu tez çalışmasında, bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin Lebesgue ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.4. Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ve $|B| = 0$ ise, $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her yerde geçerli bir özellik olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.5. A ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Tanım 2.3.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer} \quad x \in A \\ 0, & \text{eğer} \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7. Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, bu durumda f fonksiyonunu her ikiside ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max(f, 0)$ ve $f^- = -\min(f, 0)$ fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$şeklinde yazabiliriz. $\int\limits_\Omega f^+(x)dx$ ve $\int\limits_\Omega f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int\limits_\Omega f(x)dx = \int\limits_\Omega f^+(x)dx - \int\limits_\Omega f^-(x)dx$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her iki integral sonlu ise, f fonksiyonuna Ω bölgesinde **Lebesgue integrallenebilir** denir ve Ω bölgesindeki integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.8. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt(Kapalı ve Sınırlı) K kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir ve

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \int\limits_K |f| \, d\mu < \infty; \; K \subset \Omega, \; K \text{ kompakt} \right\}$$

yazılır.

Teorem 2.3.9.(Monoton Yakınsama Teoremi)

A, $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkümesi ve $\{f_n\}$ her $x \in A$ için

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ......$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu halde

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_A f_n(x)dx = \int\limits_A \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

özelliği sağlanır (Adams 2003).

Teorem 2.3.10.(Fatou's lemma)

$A, \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman,

$$\int\limits_A \left(\liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_A f_n(x)dx$$

eşitsizliği yazılabilir (Adams 2003).

Teorem 2.3.11.(**Baskın Yakınsama Teoremi**)

$A, \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkümesi ve $\{f_n\}$ A kümesi üzerinde noktasal yakınsayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her n ve tüm $x \in A$ lar için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olacak şekilde bir $g \in L^1(A)$ fonksiyonu varsa o halde

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_A f_n(x)dx = \int\limits_A \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

eşitliği yazılabilir (Adams 2003).

Teorem 2.3.12.(**Fubini Teoremi**)

f fonksiyonu $\mathbb{R}^{n+m}$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve kabul edelim ki

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)| \, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| \, dx)dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| \, dy)dx$$

integrallerinden en az biri var ve sonlu olsun. Bu durumda

(a) hemen hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(b) hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$,

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,.)dy \in L^1(\mathbb{R}^m)$,
(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(.,y)dx \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve
(e) $I_1 = I_2 = I_3$
özellikleri sağlanır (Adams 2003).

Tanım 2.3.13. $\mathbb{R}^n$ Reel Euclid uzayında bir $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x)dx = \int ... \int f\left(x_1, ..., x_n\right) dx_1...dx_n$$

ile gösterilir. Çok katlı integrali kutupsal kordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx, \qquad dx = dx_1...dx_n$$

integralinin hesabı için

$$0 \le r < \infty, \; 0 \le \theta_1, ..., \theta_{n-2} \le \pi, \; 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$$

olmak üzere
$x_1 = r \, \cos\theta_1$
$x_2 = r \, \sin\theta_1 \, \cos\theta_2$
$x_3 = r \, \sin\theta_1 \, \sin\theta_2 \, \cos\theta_3$
...
$x_n = r \, \sin\theta_1 \, \sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}$
dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J\left(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}\right) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^{2\pi} f(r) J(r,\theta)\, dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j}\, d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \omega_{n-1} \int\limits_0^\infty f(r) r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır. Genel olarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f\left(r\sin\theta_1, ..., r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-1}\right) r^{n-1} dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f\left(r,\theta\right) r^{n-1} d\sigma dr
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

2.4. Lebesgue Uzayları($L^p(\Omega)$)

Ω, $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkümesi, $|\Omega| > 0$ ve $S(\Omega)$, Ω da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $1 < p < \infty$ olmak üzere,

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına **Lebesgue uzayı** adı verilir. Ω bölgesinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları $L^p(\Omega)$ uzayında eşit kabul edelim. $L^p(\Omega)$ uzayının elemanları (2.4.1) ifadesini sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Bu farkı göz ardı ederek, eğer u fonksiyonu (2.4.1) özelliğine sahipse $u \in L^p(\Omega)$ ve Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $u(x) = 0$ ise $L^p(\Omega)$ uzayında $u = 0$ yazacağız.

Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır ve eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise

$$|u(x) + v(x)|^p \le (|u(x)| + |v(x)|)^p \le 2^p \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)$$

olduğu için $u + v \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Böylece

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\}$$

uzayı bir vektör uzayı olur.

$L^p(\Omega)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_p = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzaydır.

Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki **esas (essential) supremumu** denir ve $ess \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$ ile gösterilir.

Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.4.1. $1 < p < \infty$ iken $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısına p nin **eşleniği** denir.

Bu durumda, $1 < p < \infty$ ve $T \in [L^p(\Omega)]'$ alınırsa her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Üstelik

$$\|v\|_{L^{p'}} = \|T\|_{[L^p(\Omega)]'}$$

olur ki buradan da $L^{p'}(\Omega) \cong [L^p(\Omega)]'$ özelliği çıkar.

Eşitsizlikler matematiğin birçok branşı (fonksiyonel analiz, diferansiyel ve integral denklemler, interpolasyon teorisi vb.) ve fizik, mekanik gibi diğer bilimlerin gelişimi için daima çok önemli olmuştur. Üstelik bu önem son on yılda çok hızlı artmıştır.

Teorem 2.4.2.(Hölder Eşitsizliği)

Eğer, $1 < p < \infty$ ve $u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Adams 1975).

Teorem 2.4.3.(Young Eşitsizliği)
Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

yazılabilir (Ziemer 1989).

Teorem 2.4.4. $|\Omega| = \int\limits_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu halde $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir (Adams 2003).

Teorem 2.4.5. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Adams 2003).

Teorem 2.4.6. Eğer $1 < p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır (Adams 2003).

2.5. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları ($L^p_w(\Omega)$)

Tanım 2.5.1. w fonksiyonu hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w(x) \geq 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

Özel olarak, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve α reel bir sayı olmak üzere

$$w(x) = (d(x))^\alpha$$

ağırlık fonksiyonuna **kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 2.5.2. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int\limits_{\Omega} w\, |u|^p\, dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir ve $L^p_w(\Omega)$ ile gösterilir.

$L^p_w(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{p,w} = \left(\int_\Omega w\,|u|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.5.3. $1 \leq p < \infty$ olarak alınsın. Eğer her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq A, \qquad p > 1$$

olacak şekilde pozitif bir A sabiti varsa $w \in A_p$ olduğunu ve eğer $p = 1$ ise

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right) ess \sup_{x\in\Omega} \frac{1}{w(x)} \leq A$$

olacak şekilde pozitif bir A sabiti varsa $w \in A_1$ olduğunu söyleriz.

Ek olarak $w \in A_1 \Longleftrightarrow Mw(x) \leq Aw(x)$ dir.

Teorem 2.5.4. $w(x) = |x|^\eta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda eğer $p = 1$ ve $-n < \eta \leq 0$ ise $w \in A_1$ ve eğer $1 < p < \infty$ ve $-n < \eta < n\,(p-1)$ ise $w \in A_p$ dir (Torchinsky 1986).

$L^p_w(\Omega)$ uzayı,

$$\int_\Omega |wu|^p\,dx < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olarak da tanımlanabilir o zaman A_p koşulumuz $w^{\frac{1}{p}} = v$ olmak üzere

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \|v\|_{L^p(B)} \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^{p'}(B)} < \infty, \qquad 1 < p < \infty$$

şeklinde geçerlidir.

2.6. Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörleri

Maksimal operatör ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. Maksimal operatör $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy-Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

Tanım 2.6.1. (Riesz potansiyel Operator)

Her iki çarpan fonksiyondan lokal olarak daha iyi davranan bir fonksiyon üretmek için, her birinin düzensizliğini kaldıran iki fonksiyonun noktasal olmayan çarpımını oluşturmak genellikle kullanışlıdır.

Bunlardan biri

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y) dy \tag{2.6.1}$$

integrali var olmak üzere (2.5.1) şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonlarının $f * g$ **konvolüsyonudur.**

f fonksiyonun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu

$$f * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x-y) dy$$

şeklindedir. Konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekliği varsa **singüler integral,** zayıf(integrallenebilen) tekliği varsa **potansiyel** adı verilir.

$0 < \alpha < n$ olmak üzere $I_\alpha f(x) = |x|^{\alpha - n}$ çekirdek fonksiyonuna **Riesz çekirdek fonksiyonu** adı verilir. Bu fonksiyonun kordinat başlangıcında zayıf tekliği vardır. Böylece bir fonksiyonun **Riesz potansiyeli** konvolüsyon olarak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.6.2. $0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Eğer $p > 1$ ise

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

Tanım 2.6.3. (Hardy-Littlewood Maximal Operator)

$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen bir f fonksiyonunun $r > 0$ yarıçaplı x merkezli $B(x,r) = \{y : |x-y| < r\}$ **açık yuvarı** üzerinde ortalama değeri

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklinde gösterilir.

Lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun **Hardy−Littlewood maximal** operatörü, $Mf : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy = \sup_{r>0} M_r f(x)$$

olarak tanımlanır.

Bu şekilde tanımlanan M operatörü alt lineerdir, yani, f ve $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$M(af + bg) \leq |a| Mf + |b| Mg$$

eşitsizliği yazılabilir.

$0 \leq \alpha < n$ olsun. Lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonun kesirli maksimal operatörü ise

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli Maksimal operatör kısmi diferansiyel denklemlerde ve potansiyel teoride birçok uygulamalara sahiptir. Özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa Hardy-Littlewood maksimal operatörü elde edilir.

$\widetilde{B}(x,r) := B(x,r) \cap \Omega$ ile gösterelim. $M^\sharp$ Sharp maksimal operatörü

$$f_{\widetilde{B}(x,r)} = \frac{1}{\left|\widetilde{B}(x,r)\right|} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(z)| \, dz$$

olmak üzere

$$M^\sharp f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \left| f(y) - f_{\widetilde{B}(x,r)} \right| dy$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.6.4. Eğer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

Teorem 2.6.5. (Fefferman-Stein eşitsizliği)

f, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan reel değerli bir fonksiyon olsun. w bir ağırlık fonksiyonu ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} ((Mf)(x))^p \, w(x) dx \leq C(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, (Mw)(x) dx$$

eşitsizliği sağlanır.

2.7. Modüler Uzaylar ve Orlicz Uzayları

Tanım 2.7.1. X bir reel vektör uzayı olmak üzere, $I : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için

i) $I(x) = 0 \iff x = 0$,

ii) $I(x) = I(-x)$,

iii) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $I(\alpha x + \beta y) \leq I(x) + I(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, I fonksiyoneline X üzerinde bir **modüler** denir. Eğer (iii) özelliği yerine $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$I(\alpha x + \beta y) \leq \alpha I(x) + \beta I(y)$$

özelliği sağlanırsa, I fonksiyoneline X üzerinde bir **konveks modüler** denir.

Tanım 2.7.2. X bir reel vektör uzayı ve I fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise

$$X_I = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} I(\lambda x) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **modüler uzay** denir. X_I uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.7.3. X bir reel vektör uzayı ve I fonksiyoneli X üzerinde bir konveks modüler ise, bu durumda I fonksiyoneli X_I üzerinde **Lüxemburg normu** adı verilen

$$\|u\|_I = \inf \{\lambda > 0 : I(u/\lambda) \leq 1\}$$

biçiminde bir norm tanımlar.

Tanım 2.7.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir bir bölge olmak üzere, $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) Her $t \in \Omega$ için $\varphi(t, u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\varphi(t, 0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t, u) > 0$ ve $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi(t, u) = \infty$,

iii) Her $u \geq 0$ için $\varphi(t, u)$ ölçülebilir fonksiyon

özelliklerine sahipse φ fonksiyonuna **Φ sınıfına aittir** denir.

Tanım 2.7.5. X bir reel vektör uzayı ve φ fonksiynu Φ sınıfına aitse, her $x \in X$ için $\varphi(t, |x(t)|)$ fonksiyonu ölçülebilir olur ve

$$I(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(t, |x(t)|)\, dt \tag{2.6.1}$$

ifadesi X'de bir modüler tanımlar. Bununla birlikte, $\varphi(t, u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u'nun bir konveks fonksiyonu ise, (2.6.1) ifadesi X'de bir konveks modüler olur.

Buna göre, elde edilen

$$X_I = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\Omega} \varphi\left(t, \lambda \left|x\left(t\right)\right|\right) dt = 0 \right\}$$

modüler uzayına **genelleştirilmiş Orlicz uzayı veya Orlicz-Musielak uzayı** denir ve L^{φ} ile gösterilir. Ayrıca,

$$L_0^{\varphi} = \left\{ x \in X : \int_{\Omega} \varphi\left(t, \left|x\left(t\right)\right|\right) dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan L_0^{φ} kümesine, **genelleştirilmiş Orlicz sınıfı** denir. L_0^{φ}, L^{φ} uzayının bir konveks alt uzayı, L^{φ} uzayı ise X'in L_0^{φ} uzayını kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır. Bununla birlikte, eğer $\varphi\left(t, u\right) = \varphi\left(u\right)$ ise (φ, t'den bağımsız ise) L^{φ} ve L_0^{φ} uzaylarına sırasıyla **Orlicz uzayı ve Orlicz sınıfı** denir.

3. DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYLARI VE AĞIRLIKLI DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYLARI

3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları($L^{p(\cdot)}(\Omega)$)

Her $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \in S(\Omega)$ ve $s \geq 0$ olmak üzere,

$$\vartheta(x, s) = s^{p(x)}$$

şeklinde tanımlanan $\vartheta(x, \cdot) : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $\forall x \in \Omega$ için $\vartheta(x, \cdot) : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon

ii) $\vartheta(x, 0) = 0$ ve $s > 0$ için $\vartheta(x, 0) > 0$ ve $\lim\limits_{s \longrightarrow \infty} \vartheta(x, s) = \infty$

iii) Her $s \geq 0$ için $\vartheta(\cdot, s) \in S(\Omega)$

özelliklerine sahip olduğundan $\vartheta(x, \cdot)$ fonksiyonu Φ sınıfına aittir. Ayrıca, $\vartheta(x, \cdot)$ fonksiyonu her $x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle her $x \in \Omega$ için $u \in S(\Omega)$ ve $\vartheta(x, s) = s^{p(x)}$ olmak üzere

$$I_{p(\cdot)}(u) = \int\limits_{\Omega} \vartheta(x, |u|)\, dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx$$

şeklinde tanımlanan $I_{p(\cdot)} : S(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

i) $I_{p(\cdot)}(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

ii) $I_{p(\cdot)}(u) = I_{p(\cdot)}(-u)$

iii) $I_{p(\cdot)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha I_{p(\cdot)}(u) + \beta I_{p(\cdot)}(v), \forall u, v \in S(\Omega), \forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$

özelliklerini sağladığından $S(\Omega)$ kümesi üzerinde bir **konveks** modülerdir. Bu durumda $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} I_{p(\cdot)}(\lambda u) = 0 \right\}$$

Musileak -Orlicz uzayının özel bir çeşididir ve $S(\Omega)$ kümesinin lineer alt uzayıdır. $\vartheta(x, s)$ fonksiyonun özelliklerinden, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının en az bir $\lambda > 0$ için $I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm $u \in S(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi olduğu açıktır. Yani,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty \right\}$$

yazılabilir.

Genelleştirilmiş Orlicz sınıfının $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega)\right)$ bir çeşiti olan

$$L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega) : I_{p(\cdot)}(u) < \infty \right\}$$

uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayıdır.

$L_1^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayıda

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \forall\lambda > 0,\ I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty\right\}$$

$S(\Omega)$ nın $L_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Tanım 3.1.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$1 \leq p^- = ess \inf_{x\in\Omega} p(x) \leq p^+ = ess \sup_{x\in\Omega} p(x) < \infty \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **değişken üstlü Lebesgue Uzayı** denir.

p nin sabit $(p(x) = p)$ olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı klasik Lebesgue uzayına dönüşür. $L_+^\infty(\Omega)$ uzayı da

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{g \in L^\infty(\Omega) : ess \inf_{x\in\Omega} g(x) \geq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Aksi belirtilmedikçe $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olarak kabul edilecektir ve Sobolev kritik üstü

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{np(x)}{n-p(x)}, & p(x) < n \\ \infty, & p(x) \geq n \end{cases}$$

olarak alınacaktır. $p \in L_+^\infty(\Omega)$ fonksiyonun eşleniği ise p' ile gösterilip $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir.

Teorem 3.1.2. $L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır (Fan ve Zhao 2001). Böylece $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ise

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = L_1^{p(\cdot)}(\Omega)$$

yazılabilir.

$p \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$ olması durumunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$i)$ $I_{p(\cdot)}(u+v) \leq 2^{p^{+}}\left(I_{p(\cdot)}(u)+I_{p(\cdot)}(v)\right)$

$ii)$ $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise

$$I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda^{p^{-}} I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^{+}} I_{p(\cdot)}(u)$$

ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p^{+}} I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^{-}} I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(u)$$

elde edilir.

$iii)$ Eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq |v(x)|$ ve $I_{p(\cdot)}(u) < \infty$ ise bu durumda $I_{p(\cdot)}(u) < I_{p(\cdot)}(v)$ ve $|u| \neq |v|$ için kesin eşitsizlik vardır.

$iv)$ Verilen bir $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \backslash \{0\}$ için, $I_{p(\cdot)}(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır.

$I_{p(\cdot)}(u)$ modülü konveks olduğundan dolayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(\cdot),\Omega} = \|u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : I_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

Lüxemburg normu tanımlanabilir. Bu norm altında $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Ayrıca, $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise $\|u\|_{p(\cdot)} \leq \|v\|_{p(\cdot)}$ yazılabilir.

Teorem 3.1.3. $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda, $\|u\|_{p(\cdot)} = a$ olması için gerek ve yeter koşul $I_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ olmasıdır.[(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.4. Eğer $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $I_{p(\cdot)} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$i)$ $\|u\|_{p(\cdot)} < 1\,(= 1;\ \ > 1) \Leftrightarrow I_{p(\cdot)}(u) < 1\,(= 1;\ \ > 1)$

$ii)$ Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$ ise, $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^{-}} \leq I_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^{+}}$

$iii)$ Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} < 1$ ise, $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^{+}} \leq I_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^{-}}$

olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991), (Samko 1998)].

Teorem 3.1.5. Eğer $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, ...$için $\{u_n\} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ise, bu durumda

$i)$ $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(\cdot)} = 0$

$ii)$ $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} I_{p(\cdot)}(u_n - u) = 0$

$iii)$ Ω bölgesindeki ölçüme göre $u_n \longrightarrow u$ iken $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} I_{p(\cdot)}(u_n) = I_{p(\cdot)}(u)$

özellikleri eşdeğerdir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1.6. Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayında yoğundur (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 3.1.7. Eğer $p^+ < \infty$ ise, o zaman $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayı ayrılabilirdir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.8. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayı düzgün konveks ve dolayısıyla yansımalı bir uzay olur (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 3.1.9. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ şeklinde ki gibi bir altbölge ise, o zaman $C(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayında yoğun olur [(Fan ve Zhao 2001), (Samko 1999)].

Teorem 3.1.10. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ şeklindeki gibi bir açık altbölgesi ise, bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayında yoğun olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.11. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani,

i) Her $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyoneli $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir.

ii) $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde (3.1.2) şeklinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ vardır [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Bu teoremden $p^- > 1$ ise $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının yansımalı olduğu sonucu elde edilir.

Tanım 3.1.12. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge E kümesi ve $\chi_E(x)$, E nin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer, her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\lim_{|E| \longrightarrow 0} \|u(x)\chi_E(x)\|_{p(\cdot)} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normuna göre **mutlak süreklidir** denir.

Teorem 3.1.13.(Hölder Eşitsizliği)

$L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı ve $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$ olmak üzere her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |u\ v|\, dx \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'}) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \tag{3.1.3}$$

ifadesi yazılabilir (Kováčik ve Rákosník 1991).

Lemma 3.1.14. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de ölçülebilir sınırlı bir küme ve $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, +\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \max\left\{|\Omega|^{\frac{1}{p^+}}, |\Omega|^{\frac{1}{p^-}}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Ek olarak eğer, p^+ ve p^- fonksiyonları $\overline{\Omega}$ üzerinde elde edilirse bu durumda

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p(x_*)}} \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde $x_* \in \overline{\Omega}$ sayısı vardır (Fan 2008).

Teorem 3.1.15. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in L^\infty_+(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen her yerde $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |\Omega|)\|u\|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliği yazılabilir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Klasik Lebesgue uzaylarının en önemli özelliklerinden biri elemanlarının orta sürekliliğidir. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının klasik Lebesgue uzayından farklı olduğu bu noktayı gösterelim.

Tanım 3.1.16. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $f_h(x) = f(x+h)$, $x \in R^n$ ve $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olmak üzere, $|h| < \delta$ ve $h \in R^n$ için $I_p(f_h - h) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonuna $p(\cdot)-$**orta sürekli** adı verilir.

Örnek 3.1.17. $\Omega = (-1, 1)$ ve $1 \leq r < s < \infty$ olarak alınsın. Bu durumda p ve f fonksiyonlarını

$$p(x) = \begin{cases} r\ ; & x \in [0,1) \\ s\ ; & x \in (-1,0) \end{cases} \quad \text{ve } f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{s}}\ ; & x \in [0,1) \\ 0\ ; & x \in (-1,0) \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur. Fakat $h \in (0, 1)$ için

$$I_p\left(\frac{f_h}{\lambda}\right) \geq \lambda^{-1} \int_{-h}^{0} (x+h)^{-1} dx = \infty$$

olduğundan $f_h \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir (Kovacik ve Rakosnik 1991).

Teorem 3.1.18. p fonksiyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sabit olmasın. Bu durumda $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ öteleme operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında süreksiz olacak şekilde $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vardır. Üstelik $\tau_h f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak şekilde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vardır (Diening 2004).

Teorem 3.1.19. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı ölçülebilir bir bölge olsun. Ω bölgesinde tanımlı p ve r fonksiyonları için $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $1 < r^- \leq r^+ < \infty$ özellikleri sağlansın. Bu durumda $* : (f,g) \longrightarrow f * g$ konvolüsyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ dönüşümü olarak sürekli olması için gerek ve yeter koşul $p^- > r^+$ olmasıdır (Diening 2004).

Öteleme operatörünün genelde süreksiz olması $u \in L^1(\Omega)$ ile f fonksiyonun konvolüsyonunun genelde süreksiz olduğunu verir. Daha açıkçası genel olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Young teoremi beklenen sonucu vermez. Yani, genel olarak

$$\|v * u\|_{p(\cdot)} \nleq \|u\|_1 \|v\|_{p(\cdot)}$$

şeklindedir.

3.1.1. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

L.Pick ve Ruzicka genel p fonksiyonu için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında maximal operatörün sınırlılığı için ters bir örnek sundular. p fonksiyonu çok hızlı bir artış noktası olan x_0 a sahip ise, yani $x \longrightarrow x_0$ için $-|p(x) - p(x_0)| \log|x - x_0| \longrightarrow \infty$ oluyorsa bu durumda maximal operatör $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sürekli olmaz.

Tanım 3.1.1.1. Eğer her $x, y \in \overline{\Omega}$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{L}{-\ln|x-y|}, \qquad |x-y| \leq \frac{1}{2} \tag{3.1.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L > 0$ sayısı varsa, p fonksiyonuna log-Hölder sürekli ve (3.1.1.1) koşuluna log-Hölder süreklilik koşulu adı verilir. Diening tarafından keşfedilen log-Hölder süreklilik koşulu değişken üstlü uzaylardaki çalışmalarda oldukça önemlidir. Bu koşul yardımıyla, her açık $B(x,r)$ yuvarı için $r^{p^- - p^+} \leq C$ olacak şekilde pozitif C sayısı vardır.

Lemma 3.1.1.2. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $C > 0$ olmak üzere her $f \in L^{p(\cdot)}$ için $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde

$$(Mf(x))^{\frac{p(x)}{p^-}} \leq C\left[M\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}}\right)(x) + 1\right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Diening 2002).

Teorem 3.1.1.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durmda M maximal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Diening 2002).

Tanım 3.1.1.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $p : \Omega \longrightarrow [1,\infty)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve her x için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde $\lim\limits_{|x|\longrightarrow\infty} p(x) = p_\infty \in [1,\infty)$ ve $C > 0$ sabitleri varsa p fonksiyonuna **global log-Hölder sürekli** adı verilir.

Teorem 3.1.1.5. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun ve

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}, \qquad x, y \in \Omega, |y| \geq |x|$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olur (Cruz-Uribe ve ark. 2003, 2004).

Teorem 3.1.1.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $0 < \alpha < n$ olmak üzere p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli ve $x \in \Omega$ için

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$$

özelliği ile $q : \Omega \longrightarrow [1,\infty)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda I_α Riesz operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlı olur (Capone ve ark. 2004).

3.2. Ağırlıklı Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları($L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$)

Tanım 3.2.1. $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı, hemen hemen her yerde $w(x) \geq 0$ olmak üzere $wf \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak şekilde Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır. $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_w^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\left\{\eta > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{w(x)f(x)}{\eta}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

normu altında bir Banach uzayıdır. $w(x) \equiv 1$ ise $L_w^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olduğu açıktır.

Bu uzayda tanımlanan modüler fonksiyon w bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I_{p(\cdot),w}(f) = \int\limits_\Omega |w(x)f(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 3.2.2. Eğer $f \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ ise bu durumda,

$i)$ $f \neq 0$ için $\|f\|_{p(\cdot),w} = \eta \Longleftrightarrow I_{p(\cdot),w}(\frac{f}{\eta}) = 1$
$ii)$ Eğer $\|f\|_{p(\cdot),w} > 1$ ise

$$\|f\|_{p(\cdot),w}^{p^-} \leq I_{p(\cdot),w}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}^{p^+} \tag{3.2.1}$$

$iii)$ Eğer $\|f\|_{p(\cdot),w} < 1$ ise

$$\|f\|_{p(\cdot),w}^{p^+} \leq I_{p(\cdot),w}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}^{p^-} \tag{3.2.2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Fan 2005).

Lemma 3.2.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $|\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda w bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere eğer $u \in L_w^{q(\cdot)}(\Omega)$ ise o halde $u \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{p(\cdot),w} \leq (1 + |\Omega|) \|u\|_{q(\cdot),w}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Dolayısıyla

$$L_w^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir.

3.2.1. Ağırlıklı Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

Tanım 3.2.1.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge olsun. $x_0 \in \overline{\Omega}$ olmak üzere ağırlıklı Hardy-Littlewood maksimal $M^\beta f$ operatörü

$$M^\beta f(x) = |x - x_0|^\beta \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \frac{|f(y)|}{|y - x_0|^\beta} dy$$

şeklinde tanımlanır.

$\beta = 0$ olması durumunda $M = M^0$ yazılabilir. Ayrıca $M^\beta f$ operatörünün ortalaması

$$M_r^\beta f(x) = \frac{|x - x_0|^\beta}{|B(x,r)|} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \frac{|f(y)|}{|y - x_0|^\beta} dy$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 3.2.1.2. Eğer $0 \leq \beta < n$ ise C pozitif bir sabit sayı olmak üzere

$$M_r^{\beta}(1) = \frac{|x-x_0|^{\beta}}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)\cap\Omega} \frac{dy}{|y-x_0|^{\beta}} \leq C$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.1.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Eğer, $0 \leq \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ ise bu durumda $C = C(p,\beta)$ olmak üzere her $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde

$$\left[M_r^{\beta} f(x)\right]^{p(x)} \leq C\left[M\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) + 1\right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Kokilashvili ve Samko 2000).

Teorem 3.2.1.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $x_0 \in \Omega$ olmak üzere M^{β} operatörünün $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)} \tag{3.2.1.1}$$

dir (Kokilashvili ve Samko 2000).

$x_0 \in \overline{\Omega}$, olması durumunda $\frac{-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ koşulu yeterli kalır. Eğer x_0 noktası $|\{y \in \Omega : |y-x_0| < r\}| \sim Cr^n$ bakımından sınırda regüler bir nokta ise bu koşul aynı zaman da gereklidir.

Tanım 3.2.1.5. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge olsun. Bu durumda ağırlıklı Riesz potansiyel operatörü $I_{\alpha(\cdot)}^{\beta} f$

$$I_{\alpha(x)}^{\beta} f(x) = |x-x_0|^{\beta} \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|y-x_0|^{\beta}\,|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy, \;\; x_0 \in \overline{\Omega},$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\beta = 0$ olarak alınırsa, $I_{\alpha(x)}^{0} f(x) = I_{\alpha(x)} f(x)$ eşitliği yazılabilir. Buradan $I_{\alpha(\cdot)} f$ operatörü

$$I_{\alpha(x)} f = \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.2.1.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın ve $\inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0$ olsun. Eğer

$$\frac{-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)} \tag{3.2.1.2}$$

ise bu durumda $I^{\beta}_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Kokilashvili ve Samko 2000).

Teorem 3.2.1.7. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın, $\inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0$ ve $\sup\limits_{x\in\Omega} \alpha(x)p(x) < n$ olsun. Bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü, $\frac{1}{r(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$ olmak üzere $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dan $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ ya sınırlıdır (Kokilashvili ve Samko 2000).

4. MORREY UZAYLARI VE DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARI

4.1. Morrey Uzayları($L^{p,\lambda}(\Omega)$)

$L^{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey uzayları Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teori ile ilgili önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Bu bölümde önce, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey uzayı tanıtılacak, bu uzay üzerinde tanımlanan norm ve λ nın durumlarına göre $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilecektir. Daha sonra Hardy-littlewood maksimal ve Riesz operatörlerinin hangi koşullar altında sınırlı olduğu verilmiştir. Bu bölüm ve bundan sonraki bölümlerde $\tilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$ olarak alınacak.

Tanım 4.1.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda$ olsun. $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x\in\Omega,\ r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\tilde{B}(x,r)} \leq C < \infty \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonların lineer uzayı olarak tanımlanır. $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı $\|f\|_{p,\lambda}$ normu ile Morrey uzayı adı verilen bir Banach uzayıdır.

Teorem 4.1.2. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

1) $\lambda = 0$ ise $L^{p,0}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$,
2) $\lambda = n$ ise $L^{p,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$,
3) $\lambda > n$ ise $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$.
4) $0 < \lambda \leq n$ ise $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir uzay değildir.

Teorem 4.1.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $0 \leq \mu \leq n$ olsun. Eğer $p \leq q$ ve $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{q}$ ise bu durumda

$$L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$$

şeklinde gömmesi geçerlidir.

Ω bölgesi sınırsız olduğu zaman yukarıdaki gömme geçerli değildir.

4.1.1. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

Teorem 4.1.1.1. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda Hardy-littlewood maksimal operatörü $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.Yani

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır (Chiarenza ve Frasca 1987).

Daha sonra Guliyev aşağıdaki eşitsizilikten yararlanarak Hardy-Littlewood Maksimal operatörün sınırlılığını farklı bir metodla ispatlamıştır.

Teorem 4.1.1.2. $1 < p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ alalım. Bu durumda $C > 0$ sabiti $f, x \in \Omega$ ve $t > 0$ dan bağımsız olmak üzere $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^\infty r^{\frac{-n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

Teorem 4.1.1.3. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır (Guliyev 2009).

Teorem 4.1.1.4. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ olarak alınsın. $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ için

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır (Peetre 1966).

Teorem 4.1.1.5. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olarak alınsın. Bu durumda her $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ için

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır (Adams 1975).

Yukarıdaki sonuçlar daha sonra Guliyev tarafından Teorem 4.1.1.6 ve Teorem 4.1.1.8 deki norm eşitsizliklerinden faydalanarak yeniden elde edildi.

Teorem 4.1.1.6. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ olsun. Bu durumda,

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \le C t^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{\frac{-n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

Teorem 4.1.1.7. $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. $\mu = \frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ diyelim. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \le C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

Teorem 4.1.1.8. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ olsun. Bu durumda C f, x ve t den bağımsız olmak üzere

$$|I_\alpha f| \le C t^\alpha M f(x) + C \int_t^\infty r^{\alpha - \frac{n}{p} - 1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

Teorem 4.1.1.9. $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \le C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ dir ve C sadece n, λ, p, α ya bağlıdır (Guliyev 2009).

4.2. Değişken Üstlü Morrey Uzayları($L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$)

Değişken üstlü Morrey uzayları ile ilgili ilk çalışmalar Almeida ve ark. (2008), ve Fan (2010), tarafından yapılmıştır. Almeida ve ark. (2008), değişken üstlü Morrey uzaylarını $\lambda(x) \in [0, n]$ için Fan (2010), ise $\lambda(x) \in [0, \infty)$ için tanımlamıştır. Ayrıca Fan (2010), ait çalışmada değişken üstlü Morrey uzayları λ fonksiyonunun log-Hölder sürekli olması durumunda incelenmiştir.

Tanım 4.2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $\lambda : \Omega \to [0, \infty)$ olmak üzere $\lambda \in S(\Omega)$ olsun. Değişken üstlü Morrey uzayı $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda(x)} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan norm olmak üzere $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|f\|_1 = \inf\left\{\eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leq 1\right\}$$

ya da

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f\chi_{\tilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

şeklinde normlar tanımlanabilir.

Lemma 4.2.2. $\forall f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\| f \|_i \leq 1 \text{ ise } \| f \|_i^{p+} \leq I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq \| f \|_i^{p-} \tag{4.2.1}$$

$$\| f \|_i \geq 1 \text{ ise } \| f \|_i^{p-} \leq I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq \| f \|_i^{p+} \tag{4.2.2}$$

eşitsizlikleri $i = 1, 2$ için geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 4.2.3. $\forall f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_1 = \|f\|_2$$

eşitliği geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Normların çakışmasından dolayı

$$\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} := \|f\|_1 = \|f\|_2$$

yazılabilir.

Lemma 4.2.4. Ω sınırlı açık bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $|x - y| \leq r$ olacak şekilde her $x, y \in \Omega$ için

$$\frac{1}{C} r^{-\lambda(y)} \leq r^{-\lambda(x)} \leq C r^{-\lambda(y)},$$

eşitsizliği geçerlidir. $C = e^{A_\lambda}$ sabiti x, y ve r ye bağlı değildir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 4.2.5. Ω sınırlı bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|f\|_3 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\| r^{-\frac{\lambda(\cdot)}{p(\cdot)}} f\chi_{\tilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

fonksiyoneli $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir denk norm tamımlar.

Eğer $p(x) \equiv p$ ve $\lambda(x) \equiv \lambda$ şeklinde sabit olarak alınırsa $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 4.2.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1,\infty)$ ve $\lambda : \overline{\Omega} \longrightarrow [0,\infty)$, $\overline{\Omega}$ üzerinde log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1) $\lambda \equiv 0$ ise $L^{p(\cdot),0}(\Omega) \cong L^{p(\cdot)}(\Omega)$
2) $\lambda \equiv n$ ise $L^{p(\cdot),n}(\Omega) \cong L^{\infty}(\Omega)$
3) $\lambda^- > n$ ise $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) \equiv \{0\}$ (Fan 2010).

Lemma 4.2.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 \leq \lambda(x) \leq n$ ve $0 \leq \mu(x) \leq n$ olsun. Eğer $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonları log-Hölder sürekli, $p(x) \leq q(x)$ ve

$$\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$$

ise bu durumda

$$L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

4.2.1. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

Teorem 4.2.1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olsun. Eğer p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli ise M maximal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 4.2.1.2. Teorem 4.2.1.1 in koşulları altında $M^\sharp$ sharp maximal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 4.2.1.3. p fonksiyonu **global log-Hölder sürekli** ve $0 \leq \lambda^- \leq \lambda^+ < n$ olsun. Bu durumda M maksimal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Hästö 2009).

Teorem 4.2.1.4. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olsun. Eğer α fonksiyonu log-Hölder sürekli ve

$$\inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0, \ \sup_{x\in\Omega} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n \tag{4.2.1.1}$$

ise

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$$

olmak üzere $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 4.2.1.5. Teorem 4.2.1.4 in koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maximal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 4.2.1.6. Ω sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun. Ayrıca α ve λ fonksiyonları log-Hölder sürekli ve (4.2.1.1) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü, $q(\cdot)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli ve

$$1 \leq q(x) \leq \frac{p(x)\,[n-\lambda(x)]}{n-[\lambda(x)+\alpha(x)p(x)]}$$

koşulunu sağlamak üzere ve $\mu(\cdot)$ fonksiyonu

$$\frac{n-\mu(x)}{q(x)} = \frac{n-\lambda(x)}{p(x)} - \alpha(x)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ den $L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$ ya sınırlıdır.

Özel olarak,

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$$

ve

$$\mu(x) = \frac{n\lambda(x)}{n-\alpha(x)p(x)}$$

olarak alınabilir (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 4.2.1.7. Teorem 4.2.1.6 ün koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maximal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

5. AĞIRLIKLI DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARI

5.1. Ağırlıklı Değişken Üstlü Morrey Uzayları($L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$)

Tanım 5.1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, w bir ağırlık fonksiyonu, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $\lambda : \Omega \to [0,\infty)$ olmak üzere $\lambda \in S(\Omega)$ olsun. Ağırlıklı değişken üstlü Morrey uzayı $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w(\cdot)}(f) := \sup_{x\in\Omega, r>0} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |w(y)f(y)|^{p(y)}\, dy < \infty$$

olacak şekildeki $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan norm olmak üzere $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|f\|_1 = \inf\left\{\eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(\frac{wf}{\eta}\right) \le 1\right\}$$

ya da

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} wf\chi_{\widetilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

şeklinde normlar tanımlanabilir. $w(x) \equiv 1$ ise $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olduğu açıktır. Ayrıca $\lambda \equiv 0$ ise $L_w^{p(\cdot),0}(\Omega) = L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ dir.

Lemma 4.2.3 e benzer olarak aşağıdaki Lemma kolayca elde edilebilir.

Lemma 5.1.2. $\forall f \in L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_1 = \|f\|_2$$

eşitliği geçerlidir.

Normların çakışmasından dolayı

$$\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w} = \|f\|_1 = \|f\|_2$$

yazılabilir.

Lemma 5.1.3. $\forall f \in L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

i) Eğer $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w} \le 1$ ise

$$\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}^{p^+} \le I_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}(f) \le \|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}^{p^-} \tag{5.1.1}$$

ii) Eğer $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w} \ge 1$ ise

$$\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}^{p^-} \le I_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}(f) \le \|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w}^{p^+} \tag{5.1.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $g_{x,r} = r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f\chi_{\tilde{B}(x,r)}(\cdot)$ olmak üzere $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w} = \sup\limits_{x\in\Omega, r>0} \|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)}$ olarak yazılabilir. $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayındaki (3.2.1) ve (3.2.2) eşitsizliklerinden faydalanarak

$i)$ Eğer $\|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)} \leq 1$ ise

$$\|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq I_{p(\cdot),w}(g_{x,r}) \leq \|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{p^-} \tag{5.1.3}$$

$ii)$ Eğer $\|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)} \geq 1$ ise

$$\|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq I_{p(\cdot),w}(g_{x,r}) \leq \|wg_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{p^+} \tag{5.1.4}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Daha sonra (5.1.3) ve (5.1.4) eşitsizliklerinde x ve r ye göre supremum alınırsa (5.1.1) ve (5.1.2) eşitsizlikleri elde edilir.

Lemma 4.2.4 göz önüne alınarak aşağıdaki Lemma kolayca elde edilebilir.

Lemma 5.1.4. Ω sınırlı bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|f\|_3 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\| r^{-\frac{\lambda(\cdot)}{p(\cdot)}} wf\chi_{\tilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

fonksiyoneli $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir denk norm tamımlar.

Lemma 5.1.5. Ω sınırlı bir bölge, w bir ağırlık fonksiyonu ve $0 \leq \lambda(x) \leq n$, $0 \leq \mu(x) \leq n$ olsun. Eğer $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ log-Hölder sürekli, $p(x) \leq q(x)$ ve $\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$ ise bu durumda

$$L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir.

İspat: Lemmanın koşullarının sağlandığını kabul edelim. $L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \subset L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $f \in L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$ olsun. $p(x) \leq q(x)$ olduğundan $f \in L_w^{q(\cdot)}(\Omega) \subset f \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ yazılabilir ve ayrıca $f \in L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\sup_{x_0\in B,\ r>0} r^{-\mu(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |wf(x)|^{q(x)}\, dx \leq K \tag{5.1.5}$$

olacak şekilde bir $K \geq 1$ sabiti vardır. Herhangi bir $x_0 \in \Omega$ ve $r \in (0,1)$ için lemma 3.1.16, (3.1.4), (5.1.5), Hölder eşitsizliği ve p, q, λ, μ fonksiyonlarının log-Hölder sürekliliğinden x_1 ve x_2 $\widetilde{B}(x_0,r)$ kümesinin birer elemanı ve $C > 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
I &= r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |wf(x)|^{p(x)}\,dx \\
&\leq 2r^{-\lambda(x_0)} \left\| |wf(x)|^{p(x)} \right\|_{\frac{q(.)}{p(.)},\widetilde{B}(x_0,r)} \|1\|_{\left(\frac{q(\cdot)}{p(\cdot)}\right)',\widetilde{B}(x_0,r)} \\
&\leq 2r^{-\lambda(x_0)} \left(\int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |wf(x)|^{q(x)}\,dx \right)^{\frac{p(x_1)}{q(x_1)}} \left|\widetilde{B}(x_0,r)\right|^{1-\frac{p(x_2)}{q(x_2)}} \\
&\leq 2Cr^{-\lambda(x_0)} r^{\frac{\mu(x_0)p(x_1)}{q(x_1)}} \left(r^{-\mu(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |wf(x)|^{q(x)}\,dx \right)^{\frac{p(x_1)}{q(x_1)}} r^{n\left(1-\frac{p(x_2)}{q(x_2)}\right)}
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. (5.1.5) eşitsizliği ve $\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$ kabülünden

$$
\begin{aligned}
I &\leq 2Cr^{-\lambda(x_0)} r^{\frac{\mu(x_0)p(x_0)}{q(x_0)}} r^{n(1-\frac{p(x_0)}{q(x_0)})} K \\
&\leq 2Cr^{p(x_0)\left(\frac{n-\lambda(x_0)}{p(x_0)} - \frac{n-\mu(x_0)}{q(x_0)}\right)} K \leq C
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu $f \in L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. Böylece $L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \subset L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ sonucu elde edilir.

Lemma 5.1.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, p ve λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 < \lambda^- \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun. $x_0 \in \overline{\Omega}$ olmak üzere $|\cdot - x_0|^\beta$ kuvvet fonksiyonun $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına ait olması için gerek ve yeter koşul $\beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ olmasıdır.

İspat: $\beta > 0$ iken iddia aşikardır. Bu yüzden $\beta < 0$ olduğunu kabul edelim.

Gereklilik kısmı: $|\cdot - x_0|^\beta \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda p ve λ fonksiyonlarının log-Hölder sürekliliğinden

$$
\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\Omega}} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y-x_0|^{\beta p(y)}\,dy \geq \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |y-x_0|^{\beta p(x_0)}\,dy
$$

yazılabilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |y-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dy &= \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^r \rho^{\beta p(x_0)} \rho^{n-1} d\rho ds \\
&= C \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_0^r \rho^{\beta p(x_0)+n-1} d\rho \\
&= C \sup_{r>0} \frac{r^{-\lambda(x_0)+\beta p(x_0)+n}}{\beta p(x_0)+n}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin sonlu olması için $-\lambda(x_0)+\beta p(x_0)+n \geq 0$ olması gerekiyor. Yani

$$-\lambda(x_0)+\beta p(x_0)+n \geq 0 \Longrightarrow \beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$$

koşulu gereklidir.

Yeterlilik kısmı: $\beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\Omega}} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y-x_0|^{\beta p(y)}\, dy < \infty$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $|x-x_0| > 2r$ ve $|x-x_0| \leq 2r$ durumlarını göz önüne alalım.

$|x-x_0| > 2r$ olması durumunda $|y-x_0| \geq |x-x_0| - |x-y| > r$ olduğundan $|y-x_0|^{\beta p(x_0)} < r^{\beta p(x_0)}$ yazılabilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\Omega}} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y-x_0|^{\beta p(y)}\, dy &\leq C \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\Omega}} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} r^{\beta p(x_0)} dy \\
&\leq C \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} r^{\beta p(x_0)} \left|\widetilde{B}(x,r)\right| \\
&\leq C \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)+\beta p(x_0)+n} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi $|x-x_0| \leq 2r$ durumunu inceleyelim. $|x-x_0| \leq 2r$ ise $|y-x_0| \leq 3r$ olur. Yani $\widetilde{B}\,(x,r) \subset \widetilde{B}\,(x_0,3r)$ dir.

O halde

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\Omega}} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y-x_0|^{\beta p(y)}\, dy &\leq C\sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,3r)} |y-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dy \\
&\leq C\sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{0}^{3r} \rho^{\beta p(x_0)} \rho^{n-1} d\rho\, ds \\
&\leq Cr^{-\lambda(x_0)}\, r^{n+\beta p(x_0)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Açıklama 5.1.7. $x_0 \in \partial\Omega$ olması durumunda $\beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ koşulu yeterli kalır. Eğer x_0 noktası sınırda regüler bir nokta ise $\beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ koşulu gereklidir. Ayrıca $\lambda > 0$ durumu ile $\lambda = 0$ durumu birbirinden farklıdır. $\lambda > 0$ olduğunda $\beta \geq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ olur. $\lambda = 0$ olduğunda ise $\beta > \frac{-n}{p(x_0)}$ olur.

Teorem 5.1.8. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, p ve λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 < \lambda^- \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun. $x_0 \in \overline{\Omega}$ olmak üzere eğer

$$0 \leq \beta < \frac{n}{p'(x_0)} \tag{5.1.6}$$

ise bu durumda $C = C(p, \lambda, \beta)$ olmak üzere $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde her $f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\left[M^\beta f(x)\right]^{p(x)} \leq C\left(1 + M\left[|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right](x)\right) \tag{5.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde $f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ ve $p_r(x) = \min\limits_{|y-x|\leq r} p(y)$, $\frac{1}{p'_r(x)} = 1 - \frac{1}{p_r(x)}$ olarak alınsın. Bu durumda eğer $|x-x_0| \leq \frac{d}{2}$ ve $0 < r \leq \frac{d}{4}$ ise $\beta p'_r(x) < n$ dir.

1. Durum. Eğer $|x-x_0| \leq \frac{d}{2}$ ve $0 < r \leq \frac{d}{4}$ ise $\beta < \frac{n}{p'_r(x)}$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left|M_r\left(\frac{f(y)}{|y-x_0|^\beta}\right)\right|^{p(x)} &= \frac{C}{r^{np(x)}}\left(\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \frac{|f(y)|\, dy}{|y-x_0|^\beta}\right)^{p(x)} \\
&= \frac{C}{r^{(n-\lambda(x))p(x)}}\left(r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \frac{|f(y)|\, dy}{|y-x_0|^\beta}\right)^{p(x)}
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki integrale $p_r(x)$ ve $p_r^{'}(x)$ üstleriyle Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|M_r\left(\frac{f(y)}{|y-x_0|^{\beta}}\right)\right|^{p(x)} \leq \frac{C}{r^{(n-\lambda(x))p(x)}}\left(r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)|^{p_r(x)}\,dy\right)^{\frac{p(x)}{p_r(x)}}\left(r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}\frac{dy}{|y-x_0|^{\beta p_r'(x)}}\right)^{\frac{p(x)}{p_r'(x)}}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.2.1.2 den

$$\left(\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}\frac{dy}{|y-x_0|^{\beta p_r'(x)}}\right)^{\frac{p(x)}{p_r'(x)}} \leq C\frac{r^{\frac{np(x)}{p_r'(x)}}}{|x-x_0|^{\beta p(x)}}$$

olduğundan

$$\left|M_r\left(\frac{f(y)}{|y-x_0|^{\beta}}\right)\right|^{p(x)} \leq C\frac{|x-x_0|^{-\beta p(x)}}{r^{(n-\lambda(x))\frac{p(x)}{p_r(x)}}}\left(r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)|^{p_r(x)}\,dy\right)^{\frac{p(x)}{p_r(x)}}$$

yazılabilir. Buradan

$$\left|M_r^{\beta}f(x)\right|^{p(x)} \leq \frac{C}{r^{(n-\lambda(x))\frac{p(x)}{p_r(x)}}}\left(r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)|^{p_r(x)}\,dy\right)^{\frac{p(x)}{p_r(x)}}$$

eşitsizliği bulunur. $y\in\widetilde{B}(x,r)$ için $p_r(x)\leq p(y)$ olduğu için

$$r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)|^{p_r(x)}\,dy \leq r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)}dy + r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)\cap\{y:|f(y)|\geq 1\}}|f(y)|^{p(y)}\,dy$$

eşitsizliği kolayca yazılabilir.

Bu yüzden

$$\left|M_r^{\beta} f(x)\right|^{p(x)} \le \frac{C}{r^{(n-\lambda(x))\frac{p(x)}{p_r(x)}}}\left(r^{n-\lambda(x)} + \frac{r^{-\lambda(x)}}{2}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right)^{\frac{p(x)}{p_r(x)}}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\frac{p(x)}{p_r(x)} \ge 1$, $r \le \frac{d}{2} \le \frac{1}{2}$ ve parantezdeki ikinci terimin değeri $\frac{1}{2}$ yada daha küçük olduğu için

$$\begin{aligned}
\left|M_r^{\beta} f(x)\right|^{p(x)} &\le \frac{C}{r^{(n-\lambda(x))\frac{p(x)}{pr(x)}}}\left(r^{n-\lambda(x)} + r^{-\lambda(x)}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right) \\
&\le C\frac{r^{n-\lambda(x)}}{r^{(n-\lambda(x))\frac{p(x)}{p_r(x)}}}\left(1 + \frac{1}{r^n}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right) \\
&\le Cr^{(n-\lambda(x))\frac{p_r(x)-p(x)}{p_r(x)}}\left(1 + \frac{1}{r^n}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$p(\cdot)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli olduğundan $r^{\frac{(n-\lambda(x))(p_r(x)-p(x))}{p_r(x)}} \le C$ ve dolayısıyla

$$\left|M_r^{\beta} f(x)\right|^{p(x)} \le C\left[1 + \frac{1}{r^n}\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right]$$

sonucu elde edilir.

2. Durum. $\frac{d}{2} \le |x - x_0|$ ve $0 < r \le \frac{d}{4}$ olsun. Bu durumda

$$|y - x_0| \ge |x - x_0| - r \ge \frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$$

olduğundan $|y - x_0|^{\beta} \ge \left(\frac{d}{4}\right)^{\beta}$ elde edilir. Ayrıca, $|x - x_0|^{\beta} \le (\text{Çap}(\Omega))^{\beta}$ olduğundan

$$M_r^{\beta} f(x) \le CM_r f(x)$$

sonucu elde edilir.

3. Durum. $d \geq r \geq \frac{d}{4}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} M_r^\beta f(x) &\leq C\frac{(\text{Çap}(\Omega))^\beta}{\left(\frac{d}{4}\right)^n}\int\limits_\Omega \frac{|f(y)|\,dy}{|y-x_0|^\beta} \\ &\leq C\frac{(\text{Çap}(\Omega))^\beta}{\left(\frac{d}{4}\right)^n}\left(\int\limits_{|y-x_0|\leq\frac{d}{8}} \frac{|f(y)|\,dy}{|y-x_0|^\beta} + \int\limits_{|y-x_0|\geq\frac{d}{8}} \frac{|f(y)|\,dy}{|y-x_0|^\beta}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradaki ilk integral $\alpha p'_{\frac{d}{8}} < n$ olduğu için **1.durumdaki** gibi $p_{\frac{d}{8}} = \min\limits_{|y-x_0|\leq\frac{d}{8}} p(y)$ ve $p'_{\frac{d}{8}}$ üstleriyle Hölder eşitsizliği uygulanarak hesaplanılır. İkinci integralin hesaplaması $|y-x_0| \geq \frac{d}{8}$ olduğu için aşikardır.

5.1.1. Ağırlıklı Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 5.1.1.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de sınırlı açık bir bölge ve $x_0 \in \Omega$ olsun. p, λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder koşulunu sağlasın. Eğer $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ ise bu durumda

$$M^\beta f(x) = |x-x_0|^\beta \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)\cap\Omega}\frac{|f(y)|}{|y-x_0|^\beta}dy, \qquad (5.1.1.1)$$

operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teoremin ispatı için

$$\left\| |y-x_0|^\beta M\left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^\beta}\right)(y)\right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C\,\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor. Bunun için $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ iken

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(|y-x_0|^\beta M\left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^\beta}\right)(y)\right) \leq C$$

olduğunu göstermeliyiz.

Eşitsizliğin ispatı için $\beta \leq 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere iki duruma ayıralım.

1. $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta \leq 0$ **durumu:**

f fonksiyonunu Ω bölgesinin dışında sıfır olarak devam ettirerek

$$\begin{aligned} J \ :&= \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \left(|y-x_0|^{\beta} M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right)^{p(y)} dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|y-x_0|^{\beta \frac{p(y)}{p^-}} \left(M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right)^{\frac{p(y)}{p^-}} \right)^{p^-} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \quad (5.1.1.2) \end{aligned}$$

eşitliği yazabilir. Teorem 5.1.8. den $\beta = 0$ için $s(x) = \frac{p(x)}{p^-}$ olmak üzere $\|\psi\|_{s(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde her $\psi \in L^{s(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$(M\psi(y))^{s(y)} \leq C \left(1 + M \left(|\psi(\cdot)|^{s(\cdot)} \right)(y) \right) \quad (5.1.1.3)$$

eşitsizliği yazılabilir. $\psi(y) = \frac{f(y)}{|y-x_0|^{\beta}}$ için $\beta \leq 0$ olduğu dikkate alınarak

$$\|\psi\|_{s(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq a_0 \|f\|_{s(\cdot),\lambda(\cdot)}, \qquad a_0 = (\text{Çap}(\Omega))^{|\beta|}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kolayca görülebilir. Lemma 4.2.7. den

$$\|\psi\|_{s(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq a_0 k \|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq a_0 k$$

eşitsizliği elde edilir. $k = \frac{1}{a_0}$ seçilirse $\|\psi\|_{s(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ elde edilir. Böylece (5.1.1.3) eşitsizliği (5.1.1.2) ifadesine uygulanabilir. Böylece

$$\begin{aligned} J \ &\leq \ C \int\limits_{\Omega} |y-x_0|^{\beta p(y)} \left[M \left(\left| \frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}} \right)(y) \right]^{p^-} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \\ &\quad + C \int\limits_{\Omega} |y-x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \quad (5.1.1.4) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Fefferman-Stein eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} J &\leq C\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy + C\int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y-x_0|^{\beta p(y)}\, dy \\ &\leq C\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy \\ &\quad + C\int\limits_{(\widetilde{B}(x,2r))^c} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy + Cr^{n+\beta p(x_0)} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta$ olduğundan $|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \in A_1$ dir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y) &\leq M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)}\right)(y) \\ &\leq C\,|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} J &\leq C\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} |y-x_0|^{\beta p(y)}\, dy \\ &\quad + C\int\limits_{(\widetilde{B}(x,2r))^c} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy + Cr^{n+\beta p(x_0)} \\ &\leq C\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} |f(y)|^{p(y)}\, dy + C\int\limits_{(\widetilde{B}(x,2r))^c} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy \\ &\quad + Cr^{n+\beta p(x_0)} \\ &\leq C\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} |f(y)|^{p(y)}\, dy + C\int\limits_{(\widetilde{B}(x,2r))^c} \frac{|f(y)|^{p(y)}}{|y-x_0|^{\beta p(y)}} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(y)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)dy \\ &\quad + Cr^{n+\beta p(x_0)} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi $|x-y| > r$ olmak üzere $M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(x_0)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y)$ ifadesini hesaplayalım.

$$M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(x_0)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{\widetilde{B}(y,t)\cap \widetilde{B}(x,r)} |z-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dz$$

olmak üzere

a) Eğer $t > |x-y| > r$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(x_0)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y) &\leq \frac{1}{|x-y|^n} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |z-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dz \\ &\leq \frac{1}{(|x-y|-r)^n} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |z-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dz \\ &\leq C \frac{r^{n+\beta p(x_0)}}{(|x-y|-r)^n} \end{aligned}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

b) Eğer $0 < t \leq |x-y| - r$ ise bu durumda

$$M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(x_0)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y) = 0$$

olur.

c) Eğer $|x-y| - r < t < |x-y|$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} M\left(|\cdot - x_0|^{\beta p(x_0)} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}\right)(y) &\leq \frac{1}{(|x-y|-r)^n} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |z-x_0|^{\beta p(x_0)}\, dz \\ &\leq C \frac{r^{n+\beta p(x_0)}}{(|x-y|-r)^n} \end{aligned}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Bu nedenle

$$\begin{aligned} J &\leq Cr^{\lambda(x)} + C\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{B}(x,2^{j+1}r)\setminus \widetilde{B}(x,2^j r)} \frac{|f(y)|^{p(y)}\, r^{n+\beta p(x_0)}}{(|x-y|-r)^n} \frac{1}{|y-x_0|^{\beta p(x_0)}} dy \\ &\quad + Cr^{n+\beta p(x_0)} \\ &\leq Cr^{\lambda(x)} + C\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^{n+\beta p(x_0)}}{(2^j r)^{\beta p(x_0)}} \frac{1}{((2^j-1)\, r)^n} \int\limits_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)|^{p(y)}\, dy \\ &\quad + Cr^{n+\beta p(x_0)} \\ &\leq Cr^{\lambda(x)} + C\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{j+1}r)^{\lambda(x)}}{(2^j)^{\beta p(x_0)}} \frac{1}{(2^j-1)^n} + Cr^{n+\beta p(x_0)} \\ &\leq Cr^{\lambda(x)} + Cr^{\lambda(x)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{j+1})^{\lambda(x)}}{(2^j)^{\beta p(x_0)}} \frac{1}{(2^j-1)^n} + Cr^{n+\beta p(x_0)} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}\right)^{\lambda(x)}}{(2^j)^{\beta p(x_0)}(2^j-1)^n}$ serisi yakınsak olduğundan

$$\int\limits_{B(x,r)} \left(|y-x_0|^{\beta} M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right)^{p(y)} dy \leq C r^{\lambda(x)}$$

sonucu elde edilir. Buradan $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(|y-x_0|^{\beta} M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right) \leq C$ olduğu görülür.

2. $0 \leq \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ **durumu:**

$1 < \alpha < p^-$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J &:= \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} \left(|y-x_0|^{\beta} M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right)^{p(y)} dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left(|y-x_0|^{\beta} M \left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}} \right)(y) \right)^{\frac{p(y)}{\alpha}} \right)^{\alpha} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \qquad (5.1.1.5) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

$\beta < \frac{n}{p'(x_0)} < \alpha \left(\frac{n}{p'(x_0)} \right)$ olduğundan Teorem.5.1.8, (5.1.1.5) eşitsizliğine uygulanabilir.

Böylece

$$\begin{aligned} J &\leq C \int\limits_{\Omega} \left(1 + M \left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\alpha}} \right)(y) \right)^{\alpha} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \\ &\leq C \left(\int\limits_{\Omega} \left[M \left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\alpha}} \right)(y) \right]^{\alpha} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \right) \\ &\quad + C \int\limits_{\Omega} \chi_{\widetilde{B}(x,r)}(y) dy \qquad (5.1.1.6) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Fefferman-Stein eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
J &\leq C\left(\int\limits_{\Omega} |f(y)|^{p(y)} M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y)dy + r^n\right) \\
&\leq C\left(\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} |f(y)|^{p(y)} M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y)dy + \int\limits_{\left(\widetilde{B}(x,2r)\right)^c} |f(y)|^{p(y)} M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y)dy + r^n\right) \\
&\leq C\left(\int\limits_{\widetilde{B}(x,2r)} |f(y)|^{p(y)} dy + \int\limits_{\left(\widetilde{B}(x,2r)\right)^c} |f(y)|^{p(y)} M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y)dy + r^n\right) \\
&\leq C\left(r^{\lambda(x)} + \int\limits_{\left(\widetilde{B}(x,2r)\right)^c} |f(y)|^{p(y)} M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y)dy + r^n\right)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$M_{\chi_{\widetilde{B}(x,r)}}(y) \leq \frac{4^n r^n}{(|x-y|+r)^n}$$

hesaplamasından yararlanarak

$$\begin{aligned}
J &\leq C\left(r^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{B}(x,2^{j+1}r)\setminus\widetilde{B}(x,2^j r)} \frac{|f(y)|^{p(y)} r^n}{(|x-y|+r)^n} dy + r^n\right) \\
&\leq C\left(r^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j+1)^n} \int\limits_{\widetilde{B}(x,2^{j+1}r)} |f(y)|^{p(y)} dy + r^n\right) \\
&\leq C\left(r^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}r\right)^{\lambda(x)}}{(2^j+1)^n} + r^n\right) \\
&\leq C\left(r^{\lambda(x)} + r^{\lambda(x)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}\right)^{\lambda(x)}}{(2^j+1)^n} + r^n\right)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}\right)^{\lambda(x)}}{(2^j+1)^n}$ serisi yakınsak olduğundan

$$J \leq C\left(r^{\lambda(x)} + r^{\lambda(x)} + r^n\right) \leq C r^{\lambda(x)}$$

elde edilir. Buradan $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(|y-x_0|^{\beta} M\left(\frac{f(\cdot)}{|\cdot - x_0|^{\beta}}\right)\right) \leq C$ olduğu görülür.

Bu sonuç ispatı tamamlar.

Sonuç 5.1.1.2. Teorem 5.1.1.1 in koşulları altında $M^\sharp$ sharp maximal operatörü $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. M operatörünün sınırlılığından ve

$$M^\sharp f(x) \leq 2Mf(x), x \in \Omega$$

noktasal eşitsizliğinden $M^\sharp$ sharp maximal operatörünün $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınrlı olduğu görülür.

5.1.2. Ağırlıklı Riesz Potansiyel Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 5.1.2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı açık bir bölge ve $x_0 \in \overline{\Omega}$ olarak alınsın. p, λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder sürekli, $x \in \Omega$ ve $\inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0$ olsun. Eğer $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ ise bu durumda,

$$I^\beta_{\alpha(x)} f(x) = |x - x_0|^\beta \int\limits_\Omega \frac{f(y)}{|y - x_0|^\beta |x - y|^{n-\alpha(x)}} dy$$

operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

İspat.

$$\left\| I^\beta_{\alpha(\cdot)} f \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor. Bunun için $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq 1$ iken

$$\left\| I^\beta_{\alpha(\cdot)} f \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} I^\beta_{\alpha(x)} f(x) &= |x - x_0|^\beta \int\limits_{\substack{|x-y|>1 \\ y\in\Omega}} \frac{f(y)dy}{|x - y|^{n-\alpha(x)} |y - x_0|^\beta} \\ &\quad + |x - x_0|^\beta \int\limits_{\substack{|x-y|<1 \\ y\in\Omega}} \frac{f(y)dy}{|x - y|^{n-\alpha(x)} |y - x_0|^\beta} \\ &= A_1 f(x) + A_2 f(x) \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. $A_1 f(x)$ terimi için

$$|A_1 f(x)| \leq C |x - x_0|^\beta \int\limits_\Omega \frac{|f(y)| \, dy}{|y - x_0|^\beta} \tag{5.1.2.1}$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.1.2.1) eşitsizliğine $\theta = \begin{cases} \frac{1}{(p')^+} & , \ I_{p'}(...) \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{(p')^-} & , \text{ diğer durumlarda ise} \end{cases}$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)|\, dy}{|y-x_0|^{\beta}} &\leq C \|f\|_{p(\cdot)} \left\| |y-x_0|^{-\beta} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \left\{ I_{p'(\cdot)} \left(|y-x_0|^{-\beta} \right) \right\}^{\theta} \|f\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|x-x_0|^{\beta p(x)} \sim |x-x_0|^{\beta p(x_0)}$ özelliğinden ve $\beta p'(x_0) < n$ koşulundan

$$
I_{p'(\cdot)} \left(|y-x_0|^{-\beta} \right) \leq C \int\limits_{\Omega} |y-x_0|^{-\beta p'(x_0)}\, dy = C \tag{5.1.2.2}
$$

olduğu görülür. O halde (5.1.2.1) ve (5.1.2.2) eşitsizliklerinden

$$
|A_1 f(x)| \leq C\, |x-x_0|^{\beta} \|f\|_{p(\cdot)} \tag{5.1.2.3}
$$

eşitsizliği elde edilir. $A_2 f(x)$ terimi için eğer gerekirse f fonksiyonun Ω bölgesinin dışında sıfır olduğu varsayılmak üzere

$$
|A_2 f(x)| \leq |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-(k+1)} < |x-y| < 2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha(x)} |y-x_0|^{\beta}}
$$

ifadesine sahipiz. $\alpha(x) < n$ koşulunu sağlayan x ler için

$$
\begin{aligned}
|A_2 f(x)| &\leq |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{-(k+1)(n-\alpha(x))}} \int\limits_{|x-y|<2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta}} \\
&\leq |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{-kn+k\alpha(x)-n+\alpha(x)}} \int\limits_{|x-y|<2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta}} \\
&\leq 2^{n-\alpha(x)} |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n-\alpha(x))} \int\limits_{|x-y|<2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta}} \\
&\leq 2^{n} |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n-\alpha(x))} \int\limits_{|x-y|<2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta}} \\
&\leq 2^{n} |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n-\alpha(x))} \frac{2^{-kn}}{2^{-kn}} \int\limits_{|x-y|<2^{-k}} \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta}} \\
&\leq 2^{n} |x-x_0|^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha(x)} M \left(\frac{f(y)}{|y-x_0|^{\beta}} \right)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Bu yüzden $\alpha_0 = \inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(x)$ ve $C = 2^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha_0}$ olmak üzere

$$|A_2 f(x)| \leq C M^\beta f(x) \tag{5.1.2.4}$$

noktasal eşitsizliği geçerlidir. $\alpha(x) \geq n$ olması durumunda $A_2 f(x)$ in noktasal hesaplaması $A_1 f(x)$ hesaplamasına benzerdir. Sonuç olarak, her $x \in \Omega$ için (5.1.2.3) ve (5.1.2.4) eşitsizliklerinden

$$\left| I^\beta_{\alpha(x)} f(x) \right| \leq C M^\beta f(x) + C\,|x - x_0|^\beta \, \|f\|_{p(\cdot)}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan eşitsizliğin her iki tarafının Morrey normu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\| I^\beta_{\alpha(\cdot)} f(\cdot) \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} &\leq C \left\| M^\beta f(x) + |x - x_0|^\beta \, \|f\|_{p(\cdot)} \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \\
&\leq C \left\| M^\beta f \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} + C \left\| |x - x_0|^\beta \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq C \left\| M^\beta f \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} + C \left\| |x - x_0|^\beta \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}
\end{aligned}$$

bulunur. $M^\beta f$ nin sınırlılığından ve $\beta > \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ olmak üzere $\left\| |x - x_0|^\beta \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C$ olduğundan

$$\left\| I^\beta_{\alpha(\cdot)} f(\cdot) \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C$$

elde edilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

5.1.1. Kesiminde elde edilen ağırlıklı Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığından Teorem 5.1.1.1. koşulları altında

$$\left\| |\cdot - x_0|^{\beta} \ Mf \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq C \left\| |\cdot - x_0|^{\beta} \ f \right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Ayrıca $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta$ koşulu gereklidir. $\mu > -\beta + \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ olmak üzere $f(x) = |x - x_0|^{\mu}$ olarak alınırsa bu durumda

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(|x - x_0|^{\beta} \ f) = \sup_{r>0} r^{-\lambda(x)} \int\limits_{\widetilde{B}(x,r)} |y - x_0|^{(\beta+\mu)p(x_0)} \, dy$$

integralinin değeri Lemma 5.1.6. dan $|y - x_0|^{(\beta+\mu)} \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olduğundan sonlu olduğu görülür. Fakat

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(|x - x_0|^{\beta} \, Mf) \geq C \ \sup_{r>0} r^{-\lambda(x_0)} \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,r)} |y - x_0|^{\beta p(x_0)} \, dy$$

ifadesi eğer $\beta \leq \frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)}$ ise ıraksaktır. Bu nedenle $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta$ olmalıdır.

Son bölümde elde edilen sonuçlara paralel olarak, (X, d, μ) metrik ölçüm uzayında Ω açık sınırlı bir küme, $w(x) = d(x_0, x)^{\beta}$, $x_0 \in X$ ve $\mu\,(B(x,r))\,\tilde{}\,r^s$, $s > 0$ olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\,(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu$$

ve

$$I_{\alpha(x)} f(x) = \int\limits_{X} \frac{f(y)}{d(x,y)^{s-\alpha(x)}} d\mu, \qquad 0 < \alpha(x) < s$$

operatörlerinin $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(X)$ uzaylarında sınırlığı araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

Adams R. A., Hedberg L. I. 1996. Function spaces and Potential Theory Springer verlag, Berlin.

Adams R. A. 1975. Sobolev Space, Academic Pres,New York.

Adams R. A. and Fournier J. J. 2003. Sobolev Space. Elsevier Science.

Adams R. A. 1975. A note on Riesz potentials, Duke Mathematical Journal, vol 42, no.4 : 765-778.

Almeida A., Hasanov J., Samko S. 2008. Maximal and Potential operators in variable exponent Morrey Spaces. Georgian Mathematical Journal, Volume 15, Number 2-1.

Capone C., Cruz-Uribe D., Fiorenza A. 2007. The fractional maximal operator on variable L^p spaces. Rev. Mat. Iberoamericana, Volume 23, Number 3, 743-770.

Chiarenza F. and Frasca M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rend. Math.,7, 273-279.

Cruz-Uribe D , Fiorenza A., Martell J.M., Perez C. 2006. The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 31(1):239-264.

Cruz-Uribe D., Diening L., Hästö P. 2011, The Maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces. Fractional Calculus and Applied Analysis vol. 14, no. 3, 361-374.

Cruz-Uribe D. and Fiorenza A., Neugebauer C.J. 2003. The maximal function on variable L^p-spaces. Ann. Acad. Scient. Fennicae, Math. 28, 223-238.

Cruz-Uribe D. and Fiorenza A., Neugebauer C.J. 2004. Corrections to "The maximal function on variable L^p-spaces". Ann. Acad. Scient. Fennicae, Math.,29, 247-249.

Cruz-Uribe D., Diening L. and Fiorenza A. 2009. A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces. Boll. Unione Mat. Ital.(9), 2(1): 151-173.

Diening L. 2002. Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids. Ph.D. thesis, University of Freiburg, Germany.

Diening L. 2004. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl.7, no. 2:245-254.

Diening L. 2004. Riesz potential and Sobolev imbeddings of generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$. Math. Nachr.263, no. 1:31-43.

Diening L. 2005. Maximal function on Orlicz-Musileak spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull. Sci. Math., 129(8):657-700.

Diening L., Růžička M. 2003. Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics. J. Reine Angev. Math. 563, 197-220.

Diening L., Harjuletho P., Hästö P. and Růžička M. 2011. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Number 2017 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Diening L., Hästö P. and Nekvinda A. 2004. Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces. In "Function Spaces, Differential Operators and Non-linear Analysis", Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28-June 2,. Inst. Acad. Sci. Czech Republick, Praha.

Gürbüz F. 2010. Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü ve Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. 54.

Edmunds D. E. and Meskhi A. 2002. Potential-type operators in $L^{p(x)}$ spaces. Z. Anal. Anwendungen 21, no. 3, 681-690.

Fan X. L., Zhao D. 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 263: 424-446.

Fan X. L. 2010. Variable exponent Morrey and Companato spaces. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (11), 4148 - 4161.

Guliyev V. S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singuler operators in generalized Morrey spaces. J. Inequal. Appl., Art. ID. 503948, 20pp.

Hästö P. 2009. Local-to-global results in variable exponent spaces. Math. Res. Letters, 16, no. 2, 263-278.

Hudzik H. 1976. On generalized Orlicz-Sobolev space. Funct. Approx. Comment, Math. 4:37-51.

Hudzik H. 1977. On problem of density of $C_0^\infty(\Omega)$ in generalized Orlicz- Sobolev Space $W_M^k(\Omega)$ for every open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Comment. Math . Parce. Mat. 20: 65-78.

Hudzik H. 1978. On Continuity of the imbedding operation from $W^k_{M_1}(\Omega)$ into $W^k_{M_2}(\Omega)$. Funct. Approx. Comment. Math.6:111-118.

Hudzik H. 1979. The problems of Separabilitiy,duality, reflexivity and Comparision for generalized Orlicz- Sobolev Space $W^k_M(\Omega)$. Comment. Math . Parce Mat. 21:315-324.

Kopaliani T. 2007. Infimal convolution and Muckenhoupt $A_{p(\cdot)}$ condition in variable L^p spaces. Arch. Math. 89, 185-192.

Kokilashvili V., Meskhi A. 2008. Boundedness of maximal and singular operators in Morrey spaces with variable exponent. Armenian J. Math.,1(1):18-28.

Kokilashvili V., Samko S. 2003. Singuler integrals in Weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Georgian.Math. J.10, no.1,145-156.

Kokilashvili V., Samko S. 2004. Maximal and fractional operators in Weighted $L^{p(x)}$ spaces. Rev. Mat. Iberoamericana 20, no. 2, 493-515.

Kokilashvili V., Samko S. 2005. Boundedness in Lebesgue spaces with variable exponent of maximal, singular and potential operators. Izv. Visshikh Uchebn. Zaved. Severo-Kavk. Region, 152-157.

Kokilashvili V., Samko S. 2007. The maximal operator in weighted variable spaces on metric measure spaces. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 144:137-144.

Kokilashvili V., Samko S. 2009. Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growths. J. Math. Anal. Appl. Vol. 352, 15-34.

Kokilashvili V., Samko N., and Samko S. 2007. Singular operators in variable spaces $L^{p(\cdot)}(w,\rho)$ with oscillating weights. Math. Nachrichten, 280 (9-10):1145-1146.

Komori Y., Shirai S. 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, Math. Nachr., 282, 219-231.

Kováčik O., Rákosník J. 1991. On Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. Czechoslovak. Math. J. 41. (116): 592-618.

Lerner A. 2005. Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces. Math. Zeit.,251(3):509-521.

Mizuhara T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. Harmonic Analysis (S. Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer - Verlag, Tokyo, p. 183-189.

Mizuta Y., Shimomura T. 2008. Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan 60 (2), pp. 583–602, (2008).

Mizuta Y., Shimomura T. 2010. Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, Math. Inequal. Appl. 13, no. 1, 99-122.

Morrey C. B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126-166.

Musielak J. 1983. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Springer Verlag, Berlin.

Mustafayev R.Ch. 2012. On boundedness of sublinear operators in weighted Morrey spaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, V.2. No:1, 63-75.

Nakai E. 1994. Hardy–Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr. 166, 95-103.

Nakano H. 1950. Modulared Semi -ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd. Tokyo.

Nakano H. 1951. Topology and Topological Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd.Tokyo.

Nekvinda A. 2004. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. Math. Inequal. and Appl., 7(2):255-265.

Nekvinda A. 2008. Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent. Journal of Mathematical Analysis and Applications 337, no. 2, 1345-1365.

Nekvinda A. 2010. A note one-sided maximal operator in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. Math. Inequal. and Appl., 13, no:4, 887-897.

Orlicz W. 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math. 3:200-212.

Peetre J. 1966. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 72, pp. 295–304.

Peetre J. 1969. On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces. J. Funct. Anal. 4, 71-87.

Persson L. E., Samko N. 2011. Weighted Hardy and potential operators in the generalized Morrey spaces, J. Math. Anal. Appl. 377, 792–806.

Persson L. E., Samko N. 2010. Singular integral equations in generalized weighted Morrey spaces, AIP (American Institute of Physics), Vol.1281 , pp. 498-502.

Pick L. and Růžička M. 2001. An example of a space $L^{p(x)}(\Omega)$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded, Expo. Math. 19. 369-371.

Samko S. 1998. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. Integr. Transform. Spec. Funct. 7, no.1-2:123-144.

Samko S. 2003. Hardy-Littlewood-Stein inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent. Fract. Calc. Appl. 6, no. 4:421-440.

Samko S. 2003. Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces. Fract. Calc. Appl.Anal. 6 no. 4: 355-362.

Samko S. 2005. On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent : maximal and singular operators. Integr. Transf. and Spec. Funct, 16(5-6):461-482.

Samko N. 2008. Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces. JMAA, doi:10.1016/j.jmaa. 2008.09.021, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009) 56-72.

Samko S. G. 1998. Convolution and potential type operators in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. Integral Transf. Spec. Funct. 7, no. 3-4, 261-284.

Sharapudinov I. I. 1979. On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$, Math. Notes 26, no. 3-4, 796-806.[Translation of Mat. Zametki 26(1978), no.4, 613-632.]

Sharapudinov I. I. 1983. Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas, (Russian) Constructive function theory '81(Varna, 1981), 189-193, Publ. House Bulgar. Acad. Sci.,Sofia.

Sharapudinov I. I. 1986. The basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean, (Russian) Mat. Sb. (N.S) 130(172)(1986), no. 2, 275-283, 286.

Torchinsky A. 1986. Real-variable Methods in Harmonic Analysis, Academic press, San Diego, Calif.

Wheeden R. L. 1993. A characterization of some weighted norm inequalities for the fractional maximal functions. Studia Math. 107, 251-272.

Zhikov V. V. 1987. Avearing of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSRIzv.29, no.1, 33-36.[Translation of Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50(1986), no.4, 675-710,877].

Ziemer W. P. 1983. Weakly Differrentable Functions. Grad . Texts in Math. 120, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Enver ÜLGÜL
Doğum Yeri ve Yılı: ADIYAMAN, 10.01.1981
Medeni Hali: Bekar
Yabancı Dili: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise: Erdemir Lisesi
Lisans : 2004-2008, Dicle Üniversitesi, Matematik Bölümü
Adres : Çamgazi Köyü, Adıyaman, Merkez