

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARA DELİKLER, SOLUCAN DELİKLERİ
VE TELEPARALEL KÜTLE ÇEKİM KURAMI

Mustafa SALTI

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DİYARBAKIR
HAZİRAN 2012

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Mustafa SALTİ tarafından yapılan “Kara Delikler, Solucan Delikleri ve Teleparalel Kütle Çekim Kuramı” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından FİZİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ

Üye : Prof. Dr. Sehban KARTAL

Üye : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Figen BİNBAŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 29/06/2012

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

...../...../2012

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŐEKKÖR

Maddi-manevi destekleri ile her zaman yanımda olan çok değerli aileme, Doktora eğitimim süresince desteğini esirgemeyen danıőmanım ve saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ'e ve problemin çözümlü aşamasında yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Dr. Murat KORUNUR'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
ÇİZELGE LİSTESİ	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Kara Delikler Hakkında	13
1.2. Solucan Delikleri Hakkında	17
1.3. Neden Teleparalel Kütle-Çekim Kuramı?	19
1.4. Neden Enerji-Momentum Problemi?	20
1.5. Evrenin Enerji-Momentum Dağılımını Hesaplayabilmek İçin Neler Yapıldı?	21
2. KAYNAK ÖZETLERİ	23
2.1. Özel Modeller Hakkında	23
2.1.1. Kara Delik Modelleri	23
2.1.2. Solucan Deliği Modelleri	32
2.2. Silindirik Kütle-Çekimsel Dalgalar ve Teleparalel Nicelikler	38
3. MATERYAL ve METOT	45
3.1. Notasyon Hakkında	45
3.2. Yöntem Hakkında	45
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	49
4.1. Teleparalel Kütle-Çekim Kuramının Önemi Üzerine	49
4.2. Genel Hesaplamalar	58
4.3. Özel Durumlar ve Enerji'nin Tam Çözümleri	73
4.3.1. Genişlemeyen-Dönmeyen Metrikler	73
4.3.2. Dönmeden Genişleyen Modeller	78
4.3.3. Genişlemeden Dönen Modeller	81
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	83
6. KAYNAKLAR	85

ÖZET

KARA DELİKLER, SOLUCAN DELİKLERİ VE TELEPARALEL KÜTLE ÇEKİM KURAMI

DOKTORA TEZİ

Mustafa SALTI

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

2012

Bu çalışmada, teleparalel kütle-çekim kuramın Hamilton yaklaşımı kullanılarak genel, durağan olmayan ve dönen küresel simetrik bir uzay-zaman modeline eşlik eden kütle-çekimsel enerji dağılımı araştırılmıştır. Genel çizgi elemanı kara delikler ve solucan delikleri gibi birçok özel uzay-zaman metriğini içermektedir. Gerekli hesaplamaları yaptıktan sonra birkaç özel durum göz önüne alınmıştır. Sonrasında ise elde edilen sonuçlar genel görelilikte elde edilen hesaplamalarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kara Delikler, Solucan Delikleri, İzafiyet kuramı, Teleparalel Kuram, Enerji dağılımı.

ABSTRACT

BLACKHOLES, WORMHOLES AND TELEPARALEL GRAVITATION THEORY

PhD THESIS

Mustafa SALTI

DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2012

In the present work, we investigate gravitational energy associated with a general, non-static and rotating spherical symmetric space-time model using Hamilton approach in teleparallel gravity. The general model includes many specific space-time metrics such as Blackholes and Wormholes. After performing required calculations, we consider several specific cases. Next, we compare our results with those obtained by using general relativity.

Keywords: Blackholes, Wormholes, Relativity, Teleparallel Gravity, Energy Distribution.

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Çizelge No</u>		<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1.	Evren geometri tipleri ve özellikleri	11
Çizelge 1.2.	Yıldızların Ölümü	15
Çizelge 1.3.	Kara delik tipleri	16
Çizelge 1.4.	Einstein'ın genel görelilik kuramı ve Teleparalel kütle-çekim kuramı: bazı temel farklar ve benzerlikler	20

ŞEKİL LİSTESİ

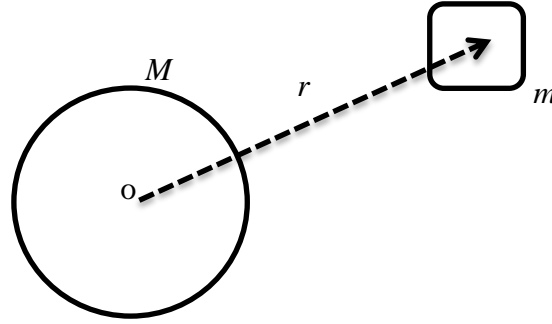
<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Aralarında r mesafesi bulunan farklı kütlelere sahip iki cisim	1
Şekil 1.2.	Kütle-çekimi etkisiyle eliptik yörüngede dolanan nesne	2
Şekil 1.3.	<i>“Enerji kütlelerdir, kütle de enerji!”</i>	3
Şekil 1.4.	Özel Görelilik’ten Genel Göreliliğe	4
Şekil 1.5.	Bir elmayla başlayan yolculuk: düz uzay-zamandan eğri uzay-zamana	5
Şekil 1.6.	Nesnelere uzay-zamana nasıl büküleceğini, uzay-zamanda nesnelere nasıl hareket edeceğini söyler	6
Şekil 1.7.	Genel Görelilik Kuramını kanıtlayan Arthur Eddington tarafından çekilen tutulma fotoğrafının negatifi	7
Şekil 1.8.	Öklid geometrisi (düz evren) hakkında	10
Şekil 1.9.	Küresel geometri (küresel simetrik evren) hakkında	10
Şekil 1.10.	Hiperbolik geometri (hiperbolik evren) hakkında	11
Şekil 1.11.	Evrenin geleceği ve eğrilik parametresi	12
Şekil 1.12.	Bir Kara Delik karikatürü	13
Şekil 1.13.	Kütle miktarı fazla olan cisimlerin uzay-zamanı bükmesi	14
Şekil 1.14.	Kara delikleri olay ufku	15
Şekil 1.15.	Bir solucan deliği karikatürü	17
Şekil 1.16.	Bir solucan deliği çizimi	18
Şekil 1.17.	Genel Görelilik kuramı ve Teleparalel kütle-çekim kuramından düz uzay-zamana geçiş	19

1.GİRİŞ

“Bilim gidebildiği kadar ilerlediğinde, aklın doğaya vermesi gerektiğinden fazlasını doğadan aldığını anladık. Bilinmeyenin kıyılarında acayip ayak izleri bulduk. Bu ayak izlerinin kökenini açıklayabilmek için birbiri ardı sıra sağlam teoriler kurduk. Ve sonunda bu ayak izini bırakan canlıyı bulduk. O da ne? Bu iz bize ait! -Arthur Eddington- (www.eksisozluk.com)”

Fizikteki bilimsel araştırmaların amacı temel olarak doğa olaylarını anlamaya çalışarak onlardan yararlanmaktır. Tarih boyunca doğadaki olaylar ile ilgili olarak birçok problem türetilmiştir, en önemli problemlerden bir tanesi de kütle-çekimdir.

Newton kuramında tüm maddeler birbirlerini çeker!



Şekil 1.1. Aralarında r mesafesi bulunan farklı kütlelere sahip iki cisim

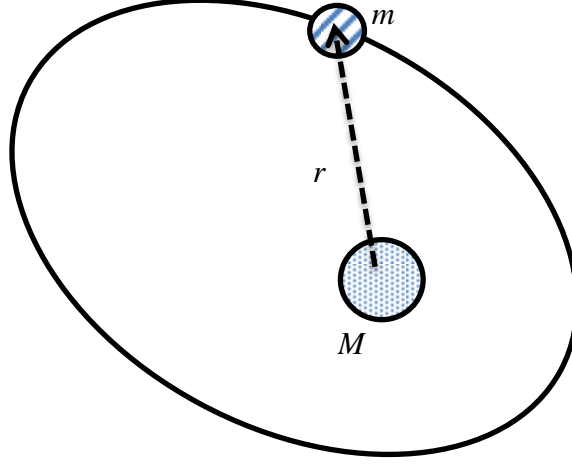
Aralarında r mesafesi bulunan m ve M kütleli iki cismin birbirlerine uyguladıkları meşhur (çekici etkiye sahip) kuvvet ifadesi büyüklük olarak

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (G Newton’un kütle-çekim sabitidir). Kütle çekimi çok zayıftır bu nedenle de G sabitinin değeri çok küçüktür. Newton’un kütle-çekim yasası iki önemli noktayı vurgulamaktadır:

- Kepler’in gezegenlerin hareketi ile ilgili ortaya attığı fikirlerin matematiksel ifadesini tanımlar, eksik kısım olan kuramsal açıklama ise kütle-çekimi ile tamamlandı.

- Gezegenlerin dairesel yörüngeler yerine eliptik yörüngelerde hareket ettiklerini kesin bir şekilde ortaya koyar.



Şekil 1.2. Kütle-çekimi etkisiyle eliptik yörüngede dolanan nesne

Görüldüğü gibi Newton'un yazdığı kuvvet ifadesi ters kare yasasına uymaktadır yani kuvvetin büyüklüğü cisimlerin arasındaki mesafenin karesiyle ters orantılıdır. Bu biçimiyle zıt yüklere sahip iki cisim arasındaki elektriksel kuvvete benzemektedir, fakat aynı değildir. Kütle-çekim kuvveti adında da anlaşıldığı gibi her zaman çekici etkiye sahiptir. Aslında Newton'un kuramının önemi de buradan gelir: Tek bir kuram ile birkaç olguyu açıklayabilmiş yani farklı problemleri birleştirebilmeyi başarmıştır. Newton kuramını ortaya atarken kendisinden önceki bilim insanlarının da kabul ettiği uzay ve zamanın birbirinden farklı ve değişmez olgular olduğu varsayımını doğru kabul etmiştir. Bu iki farklı olguyu birleştiren kuram ise zamanı geldiğinde Einstein tarafından ortaya atılmıştır: "Özel Görelilik Kuramı".

Einstein 1905 yılında yayınlanan "*On the electrodynamics of moving bodies*" başlıklı makalesinde ortaya attığı Özel Görelilik Kuramı (*Special Relativity*) ile birbirlerine göre sabit hızla hareket eden eylemsiz iki gözlem çerçevesi arasındaki olayı yorumlamıştır. Özel görelilik kuramı iki temel prensibe dayanır (Einstein 1905):

- o Görelilik prensibi: sabit hızla ilerleyen bir eylemsiz çerçevesinde hareket eden nesnelere için de fizik yasaları değişmez!
- o Işık hızı prensibi: tüm gözlemciler için ışığın hızı aynıdır!

Einstein'in bu teorisi uzay ve zaman arasında temel bir bağlantı kurmuş uzay ve zamanı birleştirmiştir. Zaman olgusu artık üç boyutlu Öklid uzayının bir parametresi değil o da bir boyuttur! Bu kurama göre evrenimiz; *Aşağı-Yukarı*, *Sağ-Sol* ve *İleri-Geri* olmak üzere üç tane uzay boyutundan ve bir tane de zaman boyutundan oluşmakta olup (3+1)-boyutlu sürekliliğe sahiptir.

Fiziksel evren artık üç boyutlu Euclid uzayından değil (3+1)-boyutlu Minkowski uzay-zamanından oluşmaktadır. Özel görelilik sadece uzay-zamanı birleştirmekle kalmamış aynı zamanda fizik tarihindeki en önemli basamaklardan birisi olan enerji ile kütlelerin birleştirilmesini sağlamıştır. Bu olay,

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.2)$$

denklemini ile tanımlanmaktadır. Bu denklemde kinetik enerjiye sahip cisimler yani belirli bir hızla hareket eden cisimler betimlenmektedir. Eğer cisim hareketsiz olsaydı (durgun kütleli bir cisim) söz konusu yukarıdaki denklem literatürde çok iyi bilinen meşhur

$$E = mc^2 \quad (1.3)$$

denklemine indirgenir.



Şekil 1.3. “Enerji küttedir, kütle de enerji!” (Bassett ve Edney 2010)

Özel görelilik adından da anlaşılacağı üzere özel bir durumu betimlemektedir, doğrusal bir yörüngede sabit hızlı hareket söz konusu olduğunda geçerlidir. İvmeli ya da eğri bir yörüngedeki hareketleri tartışmak istediğimizde özel görelilik kuramı artık yetersiz kalmaktadır. Einstein 1915 yılındaki hazırladığı “*Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory*” başlıklı çalışmasıyla özel görelilik

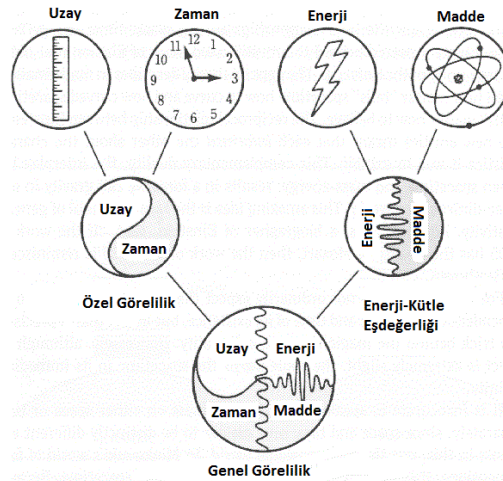
kuramını genişleterek eylemleri çerçeveler içinde geçerli olan Genel Görelilik Kuramı'nı (*General Relativity*) yayınlamıştır. Newton'un klasik fizik kuramında kütle-çekim alanını anlamak için kullanılan kuvvetler ve alanların yerini Einstein'ın genel görelilik kuramında dört boyutlu uzay-zaman eğriliği almaktadır.

Evrenimizi anlamaya yönelik en önemli adımlardan birisi Kütle-Çekim Problemi serüveni Newton'un Klasik fizik kuramıyla başlamış, 1905'te Özel Görelilik, 1915'te Genel Görelilik, 1922'de de Einstein-Cartan Kuramları ile devam etmiştir. Kozmolojide artık birçok önemli soruya cevap bulunmuştur fakat bu cevaplar bizi başka yeni önemli problemlere sürüklemiştir.

Genel görelilik kuramının temelinde

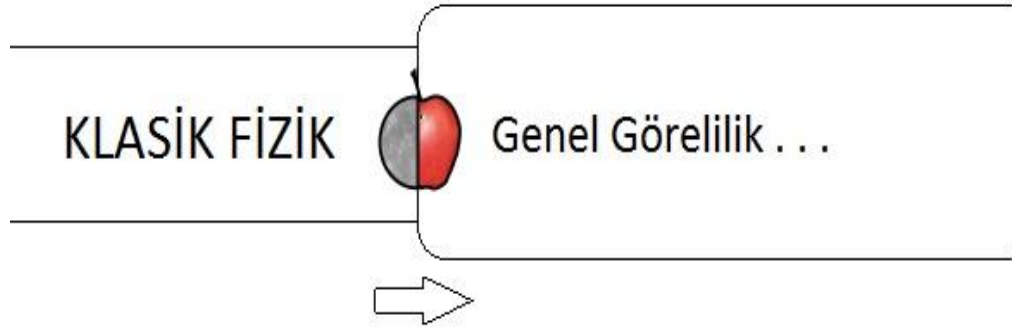
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

denklemini yer tutmaktadır. Bu denklemin sol tarafı evrenin (uzay-zamanın) geometrik yapısını betimlerken, sağ tarafı ise evrendeki enerji-madde dağılımı hakkında bilgi vermektedir (burada artık evrenin geometrisi ile enerji-madde dağılımından birleştirildiğine dikkat edilmelidir). Genel görelilik kuramına göre fiziksel evren (3+1)-boyutlu Riemann geometrisine sahiptir (Einstein 1915). Uzay-zaman sürekliliği zaten Özel görelilik kuramında ortaya atılmıştı, buna ek olarak Einstein genel görelilik kuramıyla kütle-çekim kavramını uzay-zamanın bükülmesinden yola çıkarak tanımlamıştır.



Şekil 1.4. Özel Görelilik'ten Genel Göreliliğe (<http://abyss.uoregon.edu>)

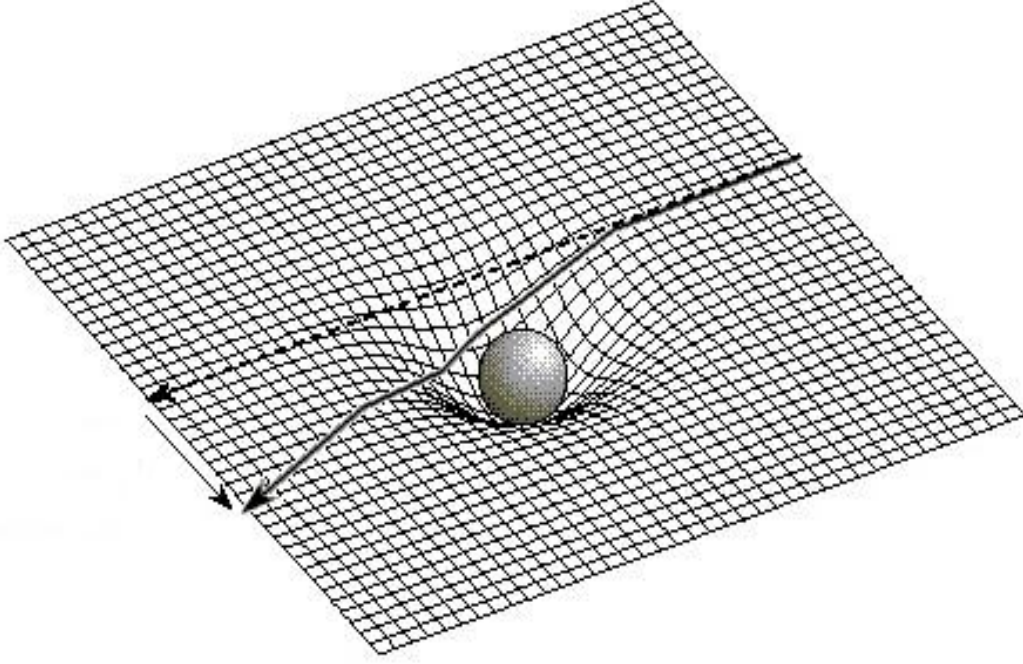
Newton'a ilham veren ve bir "Elma" ile başlayan Einstein'ın izafiyet (görelilik) kuramıyla devam eden en önemli fizik serüvenlerinden birisi olan "Kütle-çekim problemi" günümüzde hala güncelliğini korumaktadır.



Şekil 1.5. Kütle çekimi: düz uzay-zamandan eğri uzay-zamana

1915 yılında ortaya atılan Genel Görelilik Kuramı o döneme göre çok önemli inanılmaz öngörüler ortaya atmıştır. Bu öngörülerden bazıları (Baez ve Bunn 2006) şunlardır:

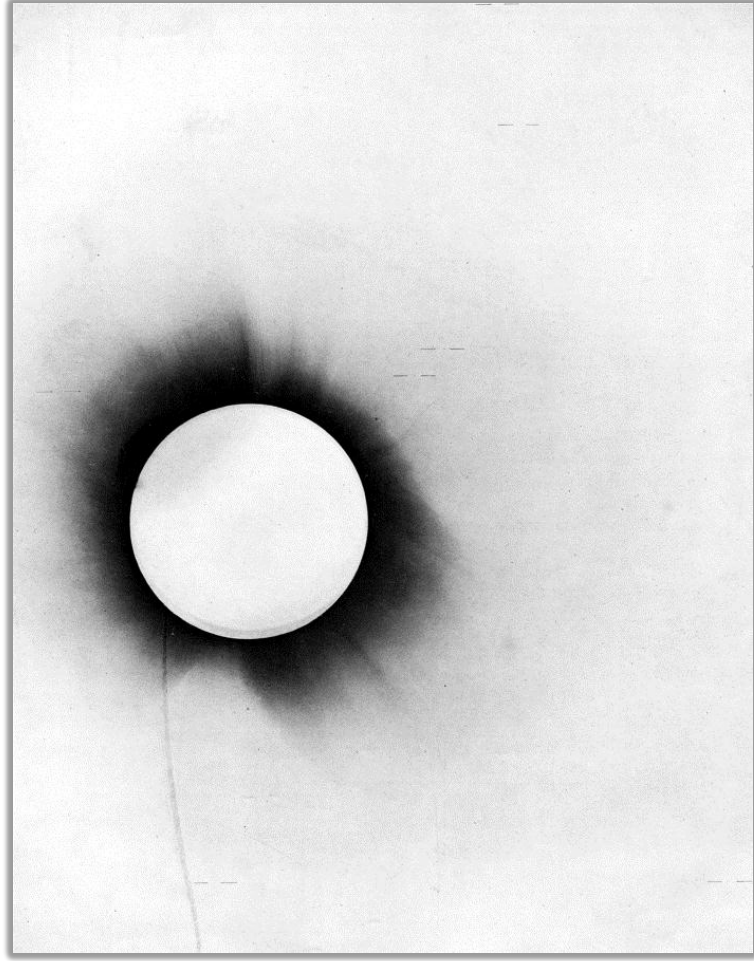
- Kütle uzayı büküğü gibi zamanı da bükmektedir. Eğer kütle evreni büküyorsa bundan zaman da etkilenmeli ve daha yavaş akmalıdır.
- Işık ışınlarının evrende izlediği yollar Güneşe yaklaştıkça eğrilir. Kütleli nesnelere uzay-zamanı büküyorsa, Güneşin yakınından geçerek gelen uzaktaki gök cisimlerinin ışık ışınları bükülerek gelmelidir. Bu eğrilik, Güneş çektiği için değil uzay-zaman eğri olduğu için meydana gelmektedir.
- Kütle yoğunluğu çok çok fazla olan gök cisimleri evreni öylesine eğebilir ki uzay-zaman kendi içine çöker. Işık bile uzay-zamanın bu eğriliğinden kaçamaz.
- Kütleli çok fazla olan cisimlerin ani hareketleri evrende ani değişimlere ve eğrilikten ileri gelen dalgalara (kütle-çekimsel ya da literatürde bilinen diğer adıyla gravitasyonel dalgalara) sebebiyet verebilir.
- Kütle uzay-zamanının kendisine yakın olan kısımlarını büküyorsa, bu kütleli yakındaki eğri bölgeden geçen ışık, gök cismini uzağında olan ve bükülmeyen kısımdan geçen ışığa göre daha fazla yol almış olmalıdır.



Şekil 1.6. Nesnelere uzay-zamana nasıl büküleceğini, uzay-zamanda nesnelere nasıl hareket edeceğini söyler (<http://www.astronomynotes.com>)

Bazılarından kısaca bahsettiğimiz genel görelilik kuramının öngörülerinin neredeyse tamamı günümüze kadar (1916'dan bu yana) defalarca test edilmiştir. Einstein'ın genel görelilik kütle-çekim kuramının matematiksel olarak formüle edildiği son biçimi sınanabilir üç temel kilit noktaya sahiptir:

- *Merkür gezegeninin yörüngesinin Perihel (Günberi) noktasındaki kayma:* Diğer gezegenlerden kaynaklanan etkiler de göz önüne alınsa Merkür gezegeni Newton Kütle-çekim etkileri ile açıklanamayan bir hareket gerçekleştirmektedir. Einstein'ın kuramı bu kayma olayını olağanüstü bir şekilde öngörmektedir.
- *Işık ışınlarının izlediği eğri yollar:* Arthur Eddington'ın öncülüğünde 1919'daki Güneş tutulması olayını gözlemlemek amacıyla gerçekleştirilen ünlü seyahatin nedenidir. 29 Mayıs 1919 tarihli Batı Afrika'daki tutulma gözlemleri Einstein'ın öngörülerini doğrulayan sonuçlar vermiştir.
- *Kütle-çekimi etkisinde zaman daha yavaş ilerler:* Yani zeminde bulunan bir saat daha yüksek bir konumda bulunan bir saate göre daha yavaş çalışmalıdır. Bu etki de çok hassas atom saatleri ile deneysel olarak ölçülmüş, öngörü doğrulanmıştır.



Şekil 1.7. Genel Görelilik Kuramını kanıtlayan Arthur Eddington tarafından çekilen tutulma fotoğrafının negatifi

Gözlemlerle doğrulanan diğer bazı öngörüler şunlardır:

- Hiç ışık vermeyen, etrafındaki ışık dâhil her şeyi içine çekecek kadar yoğun kütleyle sahip cisimlerin varlığı gözlemlenmiştir. Bunlar günümüzde Karadelik olarak bilinirler (Karadelikler bu tez çalışmasında önemli yer tutmaktadır).
- Oldukça hassas jiroskoplara sahip LEGOS⁽¹⁾ ve LEGOS⁽²⁾ (*Laboratoire d'Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiales*) uydularının yaptığı ölçümler (yaklaşık 11 yıl sürmüştür) dünyanın etrafındaki uzay-zamanı sürüklediği sonucunu elde etmiştir.
- Güneşin arkasına geçen VIKING uzay araçlarından gelen sinyallerin olması gerekenden daha uzun sürede gezegenimize ulaşması Güneş'in etrafındaki uzay-zamanı bükmüş olduğunu göstermiştir.

- Birbiri etrafında dönen cisimler kütle-çekim dalgaları halinde enerji yayarlar. Russell A. Hulse ve Joseph H. Taylor Jr. 1993 yılında ikiz yıldızların spiral hareketinden kaynaklanan kütle-çekim dalgalarının oluşumunu gözleyerek Nobel ödülü kazanmışlardır.

Genel Görelilik kuramındaki önemli problemlerden bir diğeri ise kozmolojik sabit problemidir. Einstein genel görelilik kuramını formüle ederken (evrenin durağan bir yapıda olduğuna inanıyordu) yazdığı temel denklemin genişleyen evren çözümleri verdiğini görmüştü ve bu durum da kendisinin inandığı sabit evren modeline ters düşmekteydi. Bu sebeple Einstein denklemi olarak bilinen ifadeye elle bir terim (kozmozolojik sabit) daha eklemiştir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (\Lambda: \text{kozmozolojik sabit}) \quad (1.5)$$

Amerikalı bilim insanı Edwin Powell Hubble (1929'da yaptığı gözlemler sonucunda) uzaktaki gökadalarn yaydığı ışığın kıızıla kaymasından gökadalarn Dünya'dan uzaklaşmakta oldukları sonucunu ortaya koymuştur. Yani evren genişlemekteydi!

Einstein temel bir nedenden kaynaklanmadan ilave ettiği terim olan kozmozolojik sabit için “*Hayatımda yaptığım en büyük hata!*” demiştir. Fakat son zamanlardaki bazı çalışmalar, Einstein'ın kozmozolojik sabitinin bir hata olmaya bileyeceğini, hatta evreni anlayabilmenin bu terimin varlığı ile mümkün olabileceğini göstermektedir.

Aslında genel görelilik kuramını çalışmadan da bazı kozmozoloji problemlerini Newton kuramını kullanarak kısmen tartışmak mümkündür. Mesela evrenin genişlemesini tanımlayan ve kozmozolojideki en önemli denklemlerden biri olan Friedmann denklemi Newton'un kütle-çekim kuramından da elde edilebilmektedir. Bunun için bir test parçacığını referans alarak kütle-çekimsel potansiyel enerjiyi ve kinetik enerjiyi yazdıktan sonra enerji korunumunu kullanmak yetmektedir. Bu denklemi Einstein denklemlerinden de türetilebilmek mümkündür.

Peki, evrenin genişlemesi ne anlama gelmektedir? Bu soruya cevap bulmak için ne anlama gelmediğiyle başlayalım (Liddle 2003):

- Vücudumuzun zamanla genişleyeceği anlamına gelmez,
- Dünyanın yörüngesinin zamanla güneşten uzaklaştığı anlamına gelmez,

- Hatta galaksimizdeki yıldızlar arası mesafelerin zaman geçtikçe daha da genişlediği anlamına da gelmez.

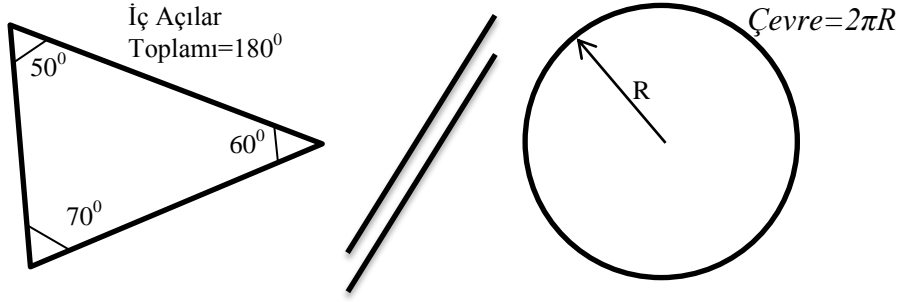
Fakat uzak galaksilerin birbirlerinden uzaklaştığı anlamına gelir! Aslında fark bir nesnenin hareketinin homojen bir madde dağılımından ileri gelen toplam kütle-çekim etkisiyle belirlenip belirlenmemesinden ileri gelmektedir. Mesela vücudumuzdaki atomlar birbirlerine güçlü kimyasal bağlarla bağlıdır, kütle-çekim kuvveti burada atomları birbirinden ayırabilecek büyüklükte önemli bir etkiye sahip değildir. Bu nedenle moleküler yapılar genişlemeden etkilenmezler. Benzer olarak dünyamızın yörüngesi ise Güneşin çekim etkisi altındadır (çok az da olsa diğer gezegenlerin de etkileri vardır), galaksimizdeki yıldızlarda kendilerinin oluşturduğu kütle-çekim etkilerinden kaynaklanan yörüngelerde dolanırlar (Liddle 2003). Buradaki ortak nokta homojen ve eş-yönlü bir yapının olmamasıdır, fakat yeterince büyük ölçeklere çıktığımızda evren kabul edilebilir bir oranda homojen ve eş-yönlü bir yapıda olduğundan galaksilerin birbirlerinden uzaklaşmakta olduğu görülmektedir (Liddle 2003). Bu uzaklaşma olayını betimleyen denklem olan Friedmann denklemi:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.6)$$

biçimindedir. Bu denklemdeki k uzay koordinatlarına ve zamana bağlı olarak değişmeyen bir sabittir. Burada karşımıza çıkan bu sabit aslında sıradan bir sabit değildir, bize evrenin geometrisi (eğriliği) hakkında bilgi vermektedir. “ $k=0$ ” Öklid düz evreni, “ $k>0$ ” Küresel evren ve “ $k<0$ ” ise hiperbolik evren tipini betimler.

Friedmann denklemi Newton kuramından elde edildiğinde k sabiti parçacık başına enerjiyi tanımlarken, genel görelilikten elde edilen denklemdeki k değeri bize uzayın eğriliğinin ölçüsünü vermektedir. Genel görelilik kuramından önce evrenin geometrisinin Euclidean yani düz olduğuna inanılıyordu. Euclidean geometriye göre:

- Doğru; iki nokta arasındaki en kısa mesafe olarak tanımlanır,
- Paralel iki doğru arasındaki mesafe her zaman aynı kalır, yani bu doğrular bir yerde birleşmezler,
- Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir,
- R yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi R$ 'dir.

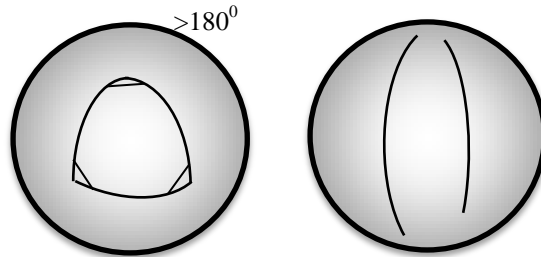


Şekil 1.8. Euclid geometrisi (düz evren) hakkında

Bu özellikleri sağlayan bir evren “*Düz Evren*” olarak bilinmektedir. 19. yüzyıla gelindiğinde Riemann kendi adıyla bilinen geometriyi ortaya atarak, Euclid tarafından ortaya atılmış olan yukarıdaki temel aksiyomların aslında bir seçimden ibaret olduğunu genel olmadıklarını yani başka birinin daha farklı seçimler yapabileceğini göstermiştir. Riemann’ın ortaya attığı bu yeni geometri daha sonra Einstein’ın genel görelilik kuramının temelini oluşturacaktır. Euclidean olmayan geometri türlerinden biri küresel olandır. Küresel bir evrende:

- Yanyana başlayan iki doğru arasındaki mesafe her zaman aynı kalmaz,
- Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür,
- R yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi R$ ’den küçüktür.

Eğer böyle bir evrende yaşasaydık (dünyanın yüzeyi gibi), bu sınırı olmayan ancak sonlu boyutlu bir evren anlamına gelirdi. Böyle bir evrende düz bir çizgi boyunca hareket etmeye başlarsanız eninde sonunda tekrar başladığınız noktaya gelirsiniz, sonsuza kadar uzaklaşamazsınız. Yani evren kapalıdır! Böyle bir geometri Friedmann denkleminde k ’nın pozitif değerine karşılık gelmektedir. k ’ya eğrilik terimi denmesinin sebebi budur.

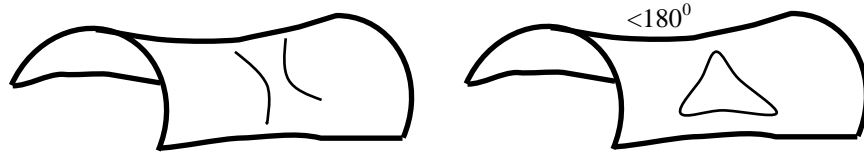


Şekil 1.9. Küresel geometri (küresel simetrik evren) hakkında

Diğer bir geometri biçimi ise hiperboliktik ve negatif k değeri seçiminde geçerlidir. Bu evrende paralel iki çizgi hiçbir zaman birleşmezler ancak aralarındaki mesafe yine de hep aynı kalmaz, bazen azalır bazen de artar. Bunun dışında hiperbolik bir evrende;

- Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçüktür,
- R yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi R$ 'den büyüktür.

Tıpkı düz evrende olduğu gibi bu geometrik yapıdaki evrenlerde sonsuz genişliktedir ve bir doğru boyunca hareket ederseniz tekrar başladığınız noktaya ulaşma gibi bir durum söz konusu değildir. Literatürde bu evren tipi “*Açık Evren*” olarak bilinir.



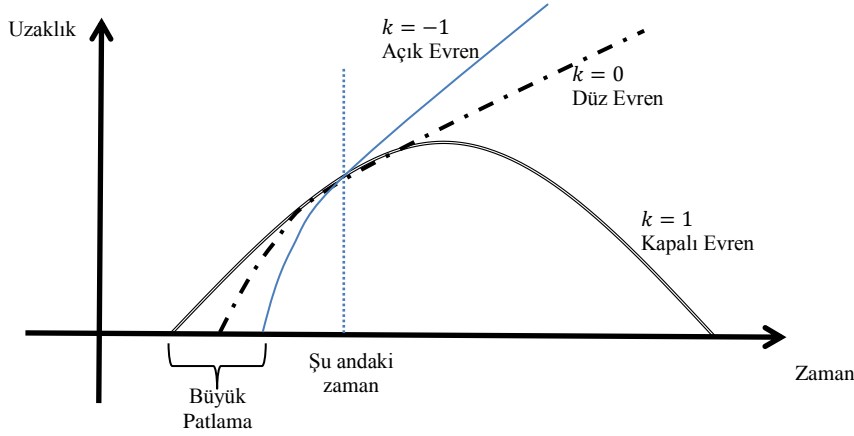
Şekil 1.10. Hiperbolik geometri (hiperbolik simetriye sahip evren) hakkında

Özetlemek gerekirse şöyle bir çizelge oluşturmak mümkündür:

Çizelge 1.1. Evren geometri tipleri ve özellikleri (Liddle 2003)

Eğrilik	Geometri	Evren Tipi	Üçgenin İç Açıları Toplamı	R yarıçaplı bir çemberin çevresi
$k < 0$	Hiperbolik	Açık	$<180^0$	$>2\pi R$
$k = 0$	Öklidyen	Düz	$=180^0$	$=2\pi R$
$k > 0$	Küresel	Kapalı	$>180^0$	$<2\pi R$

Her üç tipte de büyük patlamadan bu yana beri evren genişlemektedir. Acaba gelecekte evrenin yapısı nasıl olacak? Genişlemeye devam edecek mi? Yoksa büyük patlamanın aksine gelecekte bir de büyük çöküşü mü yaşayacak evrenimiz? Kendimize bu soruları sordüğümüzde olası cevapları bize yine eğrilik diye adlandırdığımız k sabiti vermektedir.



Şekil 1.11. Evrenin geleceği ve eğrilik parametresi

Şekilden de anlaşılacağı üzere günümüzde her üç model aynı noktada birleşmektedir, sorun gelecekte bizi neyin beklediğinden ileri gelmektedir. Aslında tüm öngörüler bunlardan ibaret değildir, evrenin büyük patlama ve büyük çöküş olaylarını daha öncede yaşadığını ve bu durumun periyodik bir süreç olduğu da düşünülmektedir (Liddle 2003).

Buraya kadar olan kısımda genel görelilik kuramı ve kozmoloji hakkında giriş niteliğinde kısa bilgiler verilmiştir. Bilim insanları genel görelilik kuramını kullanarak yaşadığımız evrenin yapısını anlamaya, doğası hakkında bilgi sahibi olmaya çalışmış ve çalışmaya de devam etmektedirler. Kütle-çekim kuramı içerisinde hala cevap bekleyen (ucu açık) pek çok soruyu barındırmaktadır, bu soruların sayısı gün geçtikçe de artmaktadır. Kütle-çekim kuvveti fizikteki dört temel kuvvetten bir tanesidir, fizikçilerin en büyük hayali olan *Büyük Birleşim Kuramı*'na (*her şeyi ifade edebilen dört temel kuvveti birleştiren kuram*) ulaşabilmek için Kütle-çekim alanı önem arz etmektedir. Einstein'ın genel görelilik kuram kütle-çekim etkilerini de göz önüne aldığımız olayları tartışmak için önemlidir ancak yine de hala eksiklikleri, yetersiz kaldığı noktalar vardır. Bu sebeple zamanla bu kurama alternatif kuramlar ortaya atılmıştır. Bunlardan metrik tensör yerine tetrad alanının temel alındığı yeni bir kütle-çekim kuramı olan *Teleparalel Gravite*, yine Einstein denkleminin farklı biçimlerde yeniden düzenlemesiyle ortaya çıkan Modifiye Edilmiş Gravite (ya da diğer adıyla $f(R)$ gravite) bilinen diğer popüler kütle-çekim kuramlarıdır. Bu kuramlar genel göreliliğin yetersiz kaldığı durumlardaki çözüm arayışlarının sonucunda ortaya çıkmıştır.

Genel göreliliğin tam olarak açıklayamadığı önemli problemlerden birisi evrendeki madde-enerji dağılımının hesabıdır. Bu olgu kozmolojide her zaman en

önemli problemlerden bir tanesi olmuştur ve olmaya da devam etmektedir. Çünkü evrenin yoğunluğunu ölçebilirsek (öngörülen tahmini bir değer vardır) evrenin ne kadar enerjisi olduğunu öğrenebiliriz, dolayısıyla ileride bizi büyük çöküşün bekleyip beklemediği ya da evrenin genişlemeye devam edip etmeyeceği gibi sorularımıza cevap bulabiliriz.

1.1. Kara Delikler Hakkında

Dünyanın kütlesi cisimleri yere doğru çeken bir etkiye sebep olmaktadır, bu nedenle ancak yeterince güce sahip olduğumuzda bu çekim etkisini yenerek dünyayı terk edebiliriz (örneğin: uzay mekiklerinin gezegeni terk edebilmeleri için çekim etkisini aşmaları gerekir). Eğer dünyamızı bir boncuk büyüklüğüne kadar yeniden boyutlandırma imkânımız olsaydı yüzeydeki kütle-çekim etkisi şimdikinden çok daha fazla olurdu ki ışık bile dünyanın yanından geçerken bu çekim etkisinden kurtulamazdı. İşte o zaman dünya bir *Kara Delik* olurdu.

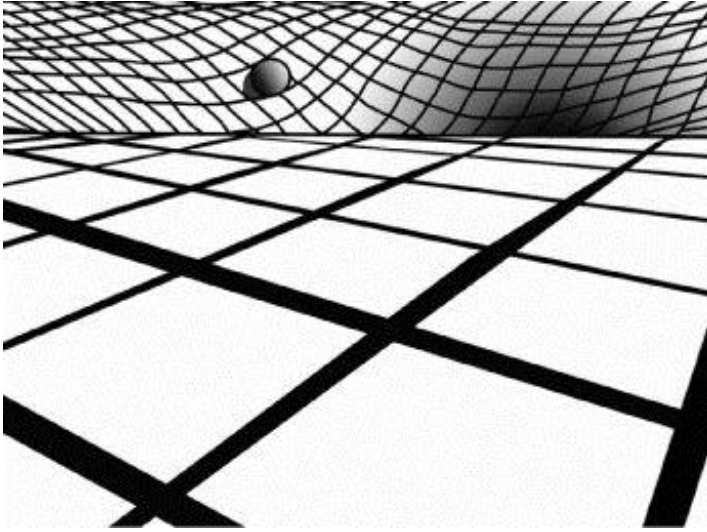


Şekil 1.12. Bir Kara Delik karikatürü (Frolov ve Novikov 1998)

Makro evreni düşündüğümüzde bir kara delik başka bir kozmik nesne üzerine kendisiyle aynı kütleye sahip başka bir nesnenin uyguladığından daha fazla çekim kuvveti uygulamaz, bu nedenle kara delikleri “kozmetik süpürge” gibi algılamak yanlış olacaktır. Olayı şöyle örneklendirebiliriz: Dünyanın uydusu Ay’ın yerinde aynı kütleye sahip bir kara delik bulunsaydı, ya da güneşin yerinde aynı kütleli bir kara delik olsaydı

ne dünyamızın ne de güneş sistemindeki diğer gezegenlerin yörüngelerinde herhangi bir değişiklik olmazdı.

1783 yılında John Michell yeteri kadar yoğun kütleyle sahip cisimlerden kaynaklanan ve ışığı dahi çekebilecek kadar büyük olan çekim alanlarının varlığı gibi çok şaşırtıcı bir fikir ortaya atmıştır. Kavram olarak *Kara Delik* terimi ise ilk defa 1967’de John Wheeler (ünlü fizikçi Richard Feynman’ın hocası) tarafından yazılan “*Our Universe: The Known and the Unknown (Evrenimiz: Bilinenler ve Bilinmeyenler)*” başlıklı makalede kullanılmıştır. Einstein’ın genel görelilik kuramını ortaya atmasına kadar Kara Delikler hep sıra dışı bir kavram olarak kalmıştır. Kara delikleri doğrudan gözlemleyebilmek imkânsızdır. Fiziksel olarak bir nesneyi görebilmemiz için ya ışık saçması ya da üzerine gelen ışık ışınlarını yansıtması gerekir, oysa kara delikler için her iki durumda söz konusu değildir, çünkü yakınlarından geçen ışığı dahi yutabilmektedirler.



Şekil 1.13. Kütle miktarı fazla olan cisimlerin uzay-zamanı bükmesi (www.jrank.org)

Kara delikler “Olay Ufku” olarak bilinen ışık ve maddenin artık kaçamayacağı kütle-çekiminden kaçamayacağı bir bölgeye sahiptirler. Bir gözlemci bir kara deliğin olay ufkuuna girdiğinde bir yüzeyle karşılaşmaz, sadece artık geriye kaçamayacağı bir bölgede olduğunun farkına varır, bu sebeple olay ufkundan ötesini bilmenin bir yolu yoktur. Bununla birlikte olay ufkuuna yaklaşmış bir gözlemci ise kara delikten daha uzaktaki bir gözlemciye göre kütle-çekim etkilerinden dolayı doğal olarak zamanın daha farklı ilerlediğini fark edecektir.

Kara delikten uzaktaki cisimler herhangi bir yönde hareket edebilir.	
Kara deliğe yaklaştıkça cismin hareketi kısıtlanmaya başlar.	
Olay ufkunu geçtikten sonra artık tüm yollar kara deliğe gider!	

Şekil 1.14. Kara delikleri olay ufku

Kara delikler sadece Einstein'ın genel görelilik kuramının ortaya koyduğu fiziksel nesnelere değildir. Aslında diğer kütle-çekim kuramları da bu gök cisimlerinin varlığından söz etmektedir. Bir nötron yıldızının çekirdek kütlesi Güneş'in kütlesinin yaklaşık üç katından fazla olduğu anda artık kendi kütle-çekimine karşı koyamamaya başlar. Bu kritik kütle aşan yıldız kendi merkezine doğru çökme sürecine girer. Çökme devam ederken her aşamada yüzeydeki kütle-çekim etkisi de artacaktır, öyle ki bir aşamadan sonra artık ışık bile bu etkiden kaçamayacaktır. Yani, kara delikler yıldızların ölümü sonrasında ortaya çıkan kozmik gök cisimleridirler.

Çizelge 1.2. Yıldızların Ölümü

Yıldız Kütle	Yarıçap	Yoğunluk	Ortaya çıkan kozmik cisim
$M_{Yıldız} < 0.8 M_{Güneş}$	-	$10 - 10^3 \frac{gr}{cm^3}$	Siyah Cüce
$0.8 M_{Güneş} < M_{Yıldız} < 1.44 M_{Güneş}$	7000 km	$10^6 \frac{gr}{cm^3}$	Beyaz Cüce
$1.33 M_{Güneş} < M_{Yıldız} < 2.1 M_{Güneş}$	10 - 20 km	$8.10^{13} - 2.10^{15} \frac{gr}{cm^3}$	Nötron Yıldızı
$M_{Yıldız} > 3 M_{Güneş}$	4 km	$> 10^{16} \frac{gr}{cm^3}$	Kara Delik

Einstein Alan denklemlerinin çözümlerinin tartışılmaya başlanmasıyla birçok Kara Delik çözümü elde edilmiştir. Yıldızlar kara deliğe dönüşmeden önce dönme hareketi yapıyorsa, bu dönme hareketi kara deliğe dönüşünde de devam edecek yani

dönen kara delikler oluşmuş olacaktır. Böyle kara deliklere giren maddeler içerde sarmal hareket yapar. Bununla birlikte elbette ki dönmeyen kara delikler de bulunmaktadır. Buna ek olarak elektriksel olarak yüklü ve yüksüz olan kara delik çözümleri de vardır. İlk kuramsal kara delik çözümü Einstein'ın genel görelilik kuramını ortaya atmasından hemen sonra 22 Aralık 1915 tarihinde Alman fizikçi Karl Schwarzschild tarafından elde edilmiştir (bu çözüm aynı zamanda Einstein denklemlerinin en basit ve en kullanışlı çözümlerinden de biridir). Bu, dönmeyen küresel simetrik kütleli kozmolojik objeleri ifade eden bir kara delik modelidir (Schwarzschild 1916).

Yaşadığımız evrende bilinen kara delik modelleri üç temel parametre yardımıyla sınıflandırılabilir. Bunlar kara deliğin kütlesi, yükü (genellikle elektriksel) ve açısal momentumudur.

Çizelge 1.3. Kara delik tipleri

<i>Kütleli</i>			
<i>Yüksüz</i>		<i>Yüklü</i>	
<i>Açısal Momentumsuz</i>	<i>Açısal Momentumlu</i>	<i>Açısal Momentumsuz</i>	<i>Açısal Momentumlu</i>
Schwarzschild tipi kara delik	Kerr tipi kara delik	Reissner-Nordstrom tipi kara delik	Kerr-Newman tipi kara delik

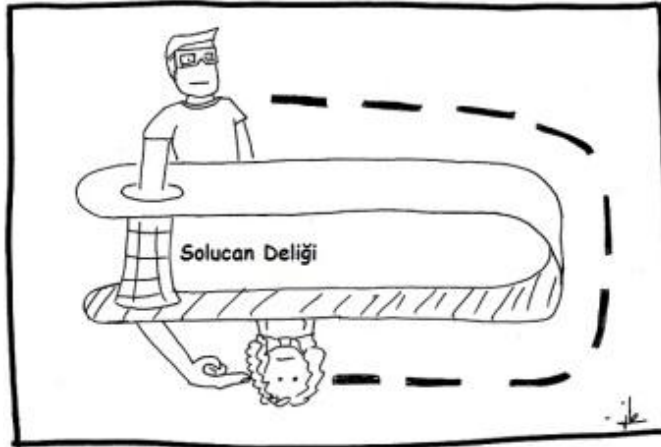
Şimdiye kadar verdiğimiz bilgilerin en ilginç olanı kuşkusuz ışığın bile kara delikten kaçamamasıdır. Peki, kara deliğin çekim alanından kaçacak hiç mi bir şey yok? Işık kaçamayabilir, fakat bu ışıktan hızlı olan nesnelere kaçamayacağı anlamına gelmez (eğer böyle nesnelere olsaydı). Bu fikir 1974'te Hawking'e "Karadelik Işması" (ya da literatürde bilinen adıyla Hawking Radiation) olayını ortaya atmasında yol göstermiştir: Kara deliklerden dışarı bir şey çıkmaz ancak kara delikler radyasyon yayar. Aslında daha öncesinde 1969'da Roger Penrose bugün Penrose Süreci ya da Penrose Mekanizması (Penrose Process) olarak bilinen bir olaydan bahsetmişti. Penrose kendi eksenini etrafında dönme hareketi yapan kara deliklerin enerjisinin bir kısmını dışarıya aktardığından bahsediyordu. Hawking ışmasına göre kara delikler kütlesine bağlı olarak belirli sıcaklıklarda parçacık yayar. Kara deliğin olay ufkuna giren nesnelere kara delikten kaçamazken, nasıl oluyor da ışımaya sonucu oluşan parçacıklar dışarı çıkabiliyor? Kuantum mekaniğindeki Belirsizlik İlkesi bu ilginç soruya cevap bulmamızda bize

yardımcı olur: Çok küçük bir mesafede parçacıklar ışıktan daha hızlı hareket etmeye başlayarak kara delikten kurtulma şansı elde eder. Kara deliğin Hawking Işımasına göre dışarı parçacık yayması kütesinin değiştiği anlamına gelir, yani ışıma yaptıkça kara delik kütle kaybetmektedir. Bu kara deliklerin de bir ömrünün olması gerektiği düşüncesini doğurur: Kara delikler kütle miktarına bağlı olarak belli bir zaman sonra büyük bir patlama ile yok olur.

Evrenin başlangıç evresinde yoğunlaşmış haldeki gaz kümesinin Büyük Patlama (*Big Bang*) sonucunda günümüzdeki galaksiler meydana gelmiştir. O halde bu galaksilerde çok büyük yıldızlar da olabilir dolayısıyla çok büyük kara deliklerin de varlığı mümkündür. Kara delikleri tartışırken Ak Deliklerden bahsetmemek elbette doğru olmayacaktır. Fizikçiler kara deliklerin yapılarını incelediklerinde ortaya yeni bir düşünce olan Ak Delikler fikri de çıkmıştır. Tüm nesnelere içine çeken kozmik nesnelere olduğu gibi tıpkı kara delikler gibi parçacık yayabilen ancak nesnelere kendisinden kaçamayacak şekilde çekmeyen cisimler de olmalıdır. Fark olay ufkundadır: Kara delikler olay ufkuna giren cisimleri kendi içine çekerken, ak delikler olay ufkuna kadar çektiği cisimleri, olay ufkuna geldiğinde geri püskürtmektedirler. Ak delikler tamamen kuramsaldır ve henüz gözlemlenmiş bir ak delik yoktur.

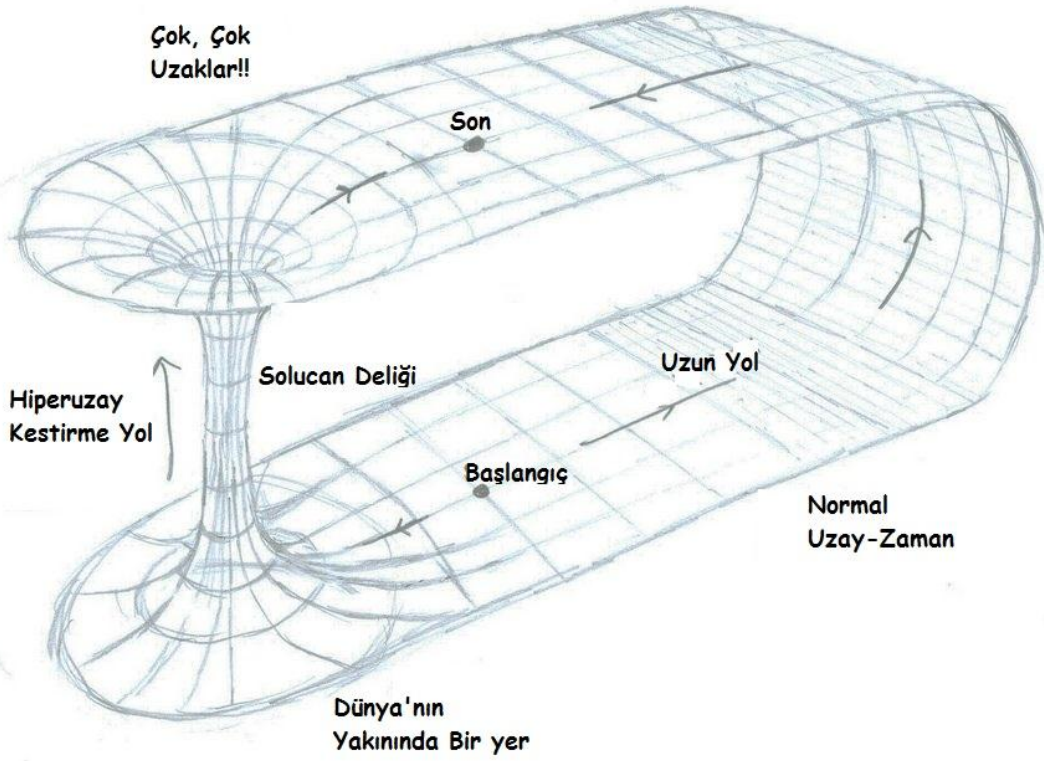
1.2. Solucan Delikleri Hakkında

Literatürde Einstein-Rosen köprüsü adıyla da anılan solucan delikleri (ya da kurt delikleri) uzay ve zamanda “kestirme yol” olduğu tahmin edilen tamamen kuramsal topolojik bir uzay-zaman özelliğidir.



Şekil 1.15. Bir solucan deliği karikatürü (Goldberg ve Blomquist 2010)

Kuramsal olarak solucan deliklerinin uzayın bir noktasında başka bir zamandaki başka bir noktasına açılan tüneller olduğu düşünülmektedir. Bilim kurguda zamanda yolculuğun solucan deliklerinin aracılığıyla yapılabileceğine inanılmaktadır. Genel inanişaya göre solucan deliklerinin işlevini şöyle örneklendirebiliriz. Evreni düz bir kâğıt gibi düşünerek bu kâğıdı rulo şeklinde sarıp ortasından bir delik açalım. Kâğıt yüzeyinde hareket etmektense delik kullanıldığında kâğıt üzerindeki bir noktadan diğerine daha kısa zamanda gidilecektir. Bunu evren ölçeğinde düşünürsek kuramsal olarak evrenin çok uzak bir noktasına kestirme yollardan gitmek mümkün olabilecektir. İşte bu kestirme yollar solucan delikleridir. Zamanda yolculuk yapmamızı sağlayabilecek bir makinemiz olsaydı, temel olarak önce evreni yeteri kadar bükmeli sonra da bir solucan deliği oluşturmalıydı.



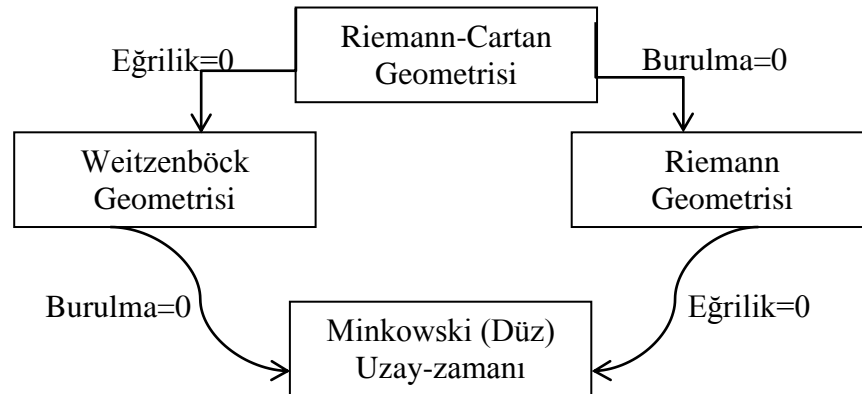
Şekil 1.16. Bir solucan deliği çizimi (V. Hubeny)

Einstein'ın genel görelilik kuramı hiper-yüzeyler arasındaki solucan delikleri için bazı matematiksel çözümler vermektedir. Hâlihazırda farklı fiziksel durumlar için bir solucan deliği oluşturmaya yönelik birçok bilimsel çalışma yer almaktadır. Bu

çalışmalarda temel olarak ya iki kara delik ya da bir kara delik bir de solucan deliği kullanılmıştır. Yani birbiriyle bağlantılı iki kara delik arasındaki bağlantının bir solucan deliğiyle sağlanabileceğine inanılır.

1.3. Neden Teleparalel Kütle-Çekim Kuramı?

Genel göreliliğin yetersiz kaldığı bazı problemlere (kozmozolojik sabit problemi gibi) çözümler arayışları fizikçileri alternatif kütle-çekim kuramları oluşturmaya yöneltmiştir. Teleparalel Gravite, kütle-çekim alanını anlamak için ortaya atılan genel göreliliğe alternatif kuramlardan biridir. İlk defa 1979 yılında ortaya atılan Teleparalel gravite literatürde Üç-sabit Kuramı olarak da adlandırılır (Hayashi ve Shirafuji 1979). Üç önemli parametre sayesinde kuram farklı limit durumlarına indirgenebilmektedir, bu sabitlerin özel değerlerinden birisi de bizi teleparalel kuramdan Einstein'in kütle-çekim kuramına götürmektedir. Genel görelilik eşdeğeri Weitzenböck geometrisinde (Weitzenböck 1923) öteleme grubu (translation group) için ayar kuramı olarak da bilinir (Hammond 1994). Teleparalel kuramda kütle-çekimsel etkileşimler eğrilik tensörünün sıfır olduğu durumda elektrodinamikteki Lorentz kuvvetine benzer bir role sahip olan torsion (burulma) tensörü ile ifade edilmektedir (de Andrade ve ark. 1997). Yani, genel görelilikte uzay-zamanın bükülmesi matematiksel olarak eğrilik tensörü ile betimlenirken teleparalel kütle-çekim kuramında torsion (burulma) tensörü ile ifade edilmektedir.



Şekil 1.17. Genel Görelilik kuramı ve Teleparalel kütle-çekim kuramından düz uzay-zamana geçiş

Genel görelilikteki metrik tensörün yerini teleparalel kuramda temel nicelik olarak tetradlar almaktadır (bu arada tetradlar eğri uzay-zaman ile düz uzay zaman arasındaki

bağlantıyı kuran yani bir nevi eğri uzay-zamanın düz uzay-zamana izdüşümünü betimleyen niceliklerdir). Sonuç olarak şunu söylemek mümkündür: Genel Görelilik ve Teleparalel Kuram kütle-çekim etkilerini inceleyen ve kütle-çekim alanını birbirinden farklı iki yolla ifade eden iki ayrı kuramdırlar.

Einstein'in kuramı ile teleparalel kuram arasındaki önemli bazı temel farkları ve benzerlikleri şöyle bir tabloyla kısaca ifade etmek mümkündür:

Çizelge 1.4. Einstein'ın genel görelilik kuramı ve Teleparalel kütle-çekim kuramı: bazı temel farklar ve benzerlikler

	Genel Görelilik	Teleparalel Gravite
Uzay-Zaman	Riemann Geometrisi	Weitzenböck Geometrisi
Bağlantı	Levi-Civita (Christoffel)	Weitzenböck Bağlantısı
Temel Yapı	Metrik Tensör	Tetrad
Kütle-Çekimi	Eğrilik Tensörü	Torsion (Burulma) Tensörü
Dönüşüm Grubu	Yerel Lorentz	Global Lorentz
Newton Yaklaşımı	Var	Var

Ayrıca burada şu vurguya yer vermek yerinde olacaktır: Tetrad formalizmi eşdeğerlik ilkesinden bağımsız olması dolayısıyla birçok avantaja sahiptir, ayrıca kuantum etkilerini tartışmak için de uygundur (Blagojevic 2002).

Riemann geometrisi kullanılarak çözülemeyen problemler, Weitzenböck geometrisi kullanılarak herkes tarafından kabul görecektir biçimde tekrar ele alınmaya çalışılmaktadır. Buna ek olarak, teleparalel kütle-çekim kuramı özel durumlarda genel göreliliğe indirgenebilmesinden ve ele alınan birçok problemdeki sonuçların genel görelilikte daha önceden elde edilen sonuçlarla uyumlu olması sebebiyle son yıllarda oldukça çok çalışılan bir kuram haline gelmiştir. Evrenin enerji-madde dağılımını hesaplamaya yönelik problemler ve kütle-çekimsel etkilerin de göz önüne alındığı parçacık fiziği problemleri bunlara örnek olarak verilebilir.

1.4. Neden Enerji-Momentum Problemi?

Günümüzde kozmolojinin geldiği noktada evrenin *Büyük Patlama*'dan bu yana genişlemekte olduğundan artık şüphemiz yok. Ancak merak ettiğimiz bundan sonra da

evren genişlemeye devam edecek mi? Yoksa *Büyük Çöküş*'e doğru mu gidiyor evrenimiz? Fizikçilerin bu soruya cevap bulabilmek için evrendeki enerji-madde dağılımını hesaplaya çalıştıklarını vurgulamıştık.

1.5. Evrenin Enerji-Momentum Dağılımını Hesaplayabilmek İçin Neler Yapıldı?

Einstein'ın 1915'te tanımladığı ilk enerji-momentum ifadesinden sonra birçok bilim insanı kütle-çekimsel enerji-momentum problemini çözebilmek için girişimlerde bulunmuşlardır. Genel görelilik kuramında tanımlanmış bazı enerji-momentum formülasyonları şunlardır:

- Einstein gösterimi (Einstein 1915)
- Tolman gösterimi (Tolman 1934)
- Papapetrou gösterimi (Papapetrou 1948)
- Bergmann-Thomson gösterimi (Bergmann ve Thomson 1953)
- Möller gösterimi (Möller 1958)
- Weinberg gösterimi (1972)
- Landau-Lifshitz gösterimi (Landau ve Lifshitz 1977)
- Qadir-Sharif gösterimi (Qadir ve Sharif 1992)

Bu gösterimlerde (Möller hariç) sadece kartzyen koordinatlar kullanıldığında anlamlı sonuçlar elde edilebilmektedir. Möller gösterimi ise herhangi bir koordinat sisteminde hesap yapabilmemize olanak tanımaktadır. Lessner (1996) yaptığı bir çalışmada Möller gösteriminin genel görelilikteki en güçlü formülasyon olduğunu ileri sürmüştür.

Virbhadra (1999) durağan olmayan küresel simetrik genel bir metrik için Einstein, Landau-Lifshitz, Papapetrou ve Weinberg gösterimlerini kullanarak aynı sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bu çalışmadan sonra birçok özel evren modeli için enerji-momentum gösterimlerinin güvenilirliklerinin tartışıldığı çalışmalar yapılmıştır (Virbhadra 1990, Aguirregabiria ve ark. 1996, Vagenas 2003, Radinschi 2000, Yang ve Radinschi 2003, Xulu 2000, Bringley 2002, Sharif ve Fatima 2005, Grammenos 2005, Gad 2004, Patashnick 2005, Halpern 2006, Yang 2000, Saltı ve Havare 2005, Saltı ve Aydoğdu 2006, Aydoğdu ve Saltı 2006, Aydoğdu ve ark. 2005).

Ancak bu kadar çok sayıda enerji-momentum gösteriminin olması bile kütle-çekim etkilerinin de göz önünde bulundurulduğu evrenin enerji-momentum dağılımı probleminin genel görelilikte tam olarak çözülemediğine işaret etmektedir, bu gösterimler her zaman kendi aralarında uyumlu sonuçlar vermemektedir, dolayısıyla güvenilirlikleri tartışılır durumdadır. Genel görelilik kuramıyla şimdiye kadar tatmin edici bir çözüm elde edilemediğinden, kütle-çekimsel enerji-momentum problemine çözüm arayışları teleparalel kuramda yapılan çalışmalarla devam etmiştir (Vargas 2004). Öncesinde, Moller (1962) tetrad alanı kullanılarak elde edilen kütle-çekim alanı tanımının genel görelilikte elde edilenden daha tatmin edici olduğunu göstermiştir. Vargas ise ilgili çalışmasında Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson gösterimlerinin teleparalel versiyonlarını elde etmiştir. Bu ifadeler kullanılarak yapılan bazı özel hesaplamalarda genel görelilikte elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür (Vargas 2004). Ancak şimdiden teleparalel kuramda da dört farklı enerji-momentum gösterimi ortaya çıkmıştır:

- Teleparalel Einstein gösterimi (Vargas 2004)
- Teleparalel Landau-Lifshitz gösterimi (Vargas 2004)
- Teleparalel Bergmann-Thomson gösterimi (Vargas 2004)
- Teleparalel Möller gösterimi (Möller 1962, Mikhail ve ark. 1993).

Bu gösterimlerde de Kartezyen koordinatlar kullanıldığında daha anlamlı sonuçlar elde edilmektedir.

Evrendeki enerji-momentum dağılımı problemi görüldüğü gibi hala güncelliğini korumaktadır. Bu çalışmada bazı karadelik ve solucan deliği modelleri için enerji-momentum dağılımı hesaplanacaktır, ancak genel görelilik kuramı yerine teleparalel kuram, yukarıdaki enerji-momentum gösterimleri yerine “Teleparalel kuramda Hamilton yaklaşımı” olarak bilinen bir yöntem kullanılacaktır. Bu yöntem ile ilgili ayrıntılara sıradaki bölüm olan kaynak özetleri kısmında yer verilmiştir. Enerji-momentum önce genel olarak hesaplanacak, sonrasında bulunan sonuçlar özel durumlara indirgenerek önceden genel görelilikte elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Özel Modeller Hakkında

Bu başlık altında tezdeki hesaplamaların temeli olarak tanımlanan genel uzay-zaman modeline önem ve anlam kazandıran, modelin özel limit durumlarını teşkil edecek olan literatüre geçmiş bazı iyi bilinen uzay-zaman modelleri hakkında özet bilgiler verilecektir. Bu uzay-zaman modellerinin her biri ayrı ayrı birer Kara Delik ve Solucan Deliği modeline karşılık gelmektedir. Tezde yer alan işlemlerde tüm modeller tek bir model altında ifade edilecektir. Genel hesaplamalar tamamlandığında göz önüne alınmak istenen özel modeller (sadece bu kısımda verilecek özel modeller için değil bunların dışında burada tanımlanan genel metrik yapısına uyduğu sürece daha onlarca Kara Delik modeli) için özel sonuçlar kolayca elde edilebilecektir.

2.1.1. Kara Delik Modelleri

- *Küresel Topolojik Anti-de Sitter C-metriği* (Plebanski ve Demianski 1976, Dias ve Lemos 2003):

Bu karadelik modeli,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{|\Lambda|}{3} r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{|\Lambda|}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

çizgi elemanı ile betimlenmektedir. Bu çözüm “ $\Lambda = 0$ ” limitinde yine iyi bilinen “Charged Regular Black Hole” modeline gitmektedir. Reissner-Nordstrom çözümü olarak da bilinen bu limit elektriksel (*q elektriksel yüküdür*) olarak yüklü bir kara deliği gösterir (Ayon-Beato ve Garcia 1999). Çok uzun mesafelerde ve ortaya çıkan matematiksel tekillikler yok edildiğinde metrik aşağıda yazılan çizgi elemanına dönüşmektedir:

$$ds^2 = -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \left(1 - \tanh \frac{q^2}{2mr}\right)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \left(1 - \tanh \frac{q^2}{2mr}\right)\right)^{-1} dr^2, \quad (2.2)$$

Eğer elektrik yükü “ $q=0$ ” seçilirse yukarıdaki kara delik modeli Schwarzschild çözümüne indirgenecektir. (2.2)’de yazdığımız çizgi elemanını çok uzak mesafelerde yeniden yazacak olursak (*Binom serisi kullanılacaktır*)

$$ds^2 = -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{q^6}{12m^2r^6} + O\left(\frac{1}{r^{n>6}}\right)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{q^6}{12m^2r^6} + O\left(\frac{1}{r^{n>6}}\right)\right)^{-1} dr^2, \quad (2.3)$$

halini almaktadır (Hayashi ve Shirafuji 1978).

- *Konformal skaler dyon kara deliği* (Virbhadra ve Parikh 1994):

Bu model,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{Q_{CSD}}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{Q_{CSD}}{r}\right)^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.4)$$

ifadesiyle betimlenmiştir. Einstein-Maxwell konformal skaler alan denklemlerinin çözülmesinden elde edilen bu model skaler alan, yük, manyetik yük ve elektrik yükü karakteristiklerine sahip bir karadeliği ifade eder. Bu modelin yer aldığı çalışmada konformal skaler alan

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{q_s}{r - Q_{CSD}}\right), \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Ayrıca,

$$Q_{CSD} = \sqrt{q_s^2 + q_e^2 + q_m^2}, \quad (2.6)$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifadelerde yer alan q_s , q_e ve q_m terimleri sırasıyla skaler, elektrik ve manyetik yük niceliklerini göstermektedir.

- *Küresel simetrik sicimsel yüklü bir kara delik* (Grafinkle ve ark. 1991):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.7)$$

biçiminde yazılan çizgi elemanı ile ifade edilmiştir. Küresel simetriye sahip olan yüklü bir sicim kara deliğidir. Bu çizgi elemanında M ve Q sırasıyla kütle ve yük kavramlarını betimlemektedir. Ayrıca: M , Q ve Dilation (*genişleme, genleşme, açılma anlamlarını taşımaktadır, literatüre geçmiş fiziksel bir terim olduğundan cümle içinde Türkçe karşılığı yazılmamıştır*) alanının asimptotik değeri olan Φ_0 cinsinden α terimi yazarlar tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\alpha = \frac{Q^2}{M} \exp[-2\Phi_0], \quad (2.8)$$

- *Regular kara delik* (Bardeen 1968, Borde 1994):

Zayıf enerji koşuluna uyan kara deliği temsil eden ve Reissner-Nordstrom modelinden ilham alınarak yazılmış bir modeldir. Küresel koordinatlarda şu çizgi elemanı ile bilinir,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2+e^2)^{3/2}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2+e^2)^{3/2}}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.9)$$

Bu ifade, yük sıfır olarak alınırsa ($e=0$) Schwarzschild modeline dönüşmektedir.

- *Janis-Newman-Winicour çözümü* (Virbhadra 1997):

Literatürde *Wymann modeli* olarak da bilinir, ancak Virbhadra 1997'deki bir araştırmasında Wymann'ın sonucunun daha önce yapılan başka bir bilimsel çalışmada verilen *Janis-Newman-Winicour* çözümü ile aynı olduğunu ispatlamıştır. Bu çözüm şu metrik kullanılarak betimlenir:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{B}{r}\right)^\mu dt^2 - \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{-\mu} dr^2 - \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{1-\mu} r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.10)$$

Bu metriktaki B ve μ terimleri;

$$\mu = \frac{2M}{B}, \quad B = 2\sqrt{M^2 + q^2}, \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Yukarıdaki iki ifadede yer alan M ve q ise sırasıyla kütle ve skaler yük parametreleridir. Yük sıfır seçildiğinde bu çözüm çok iyi bilinen Schwarzschild uzay-zaman modeline indirgenebilmektedir (Xulu 2003).

- *Melvin Manyetik Evreninde Schwarzschild Kara deliği* (Ernst 1974, Xulu 2000):

Bu uzay-zaman modeline ait olan çizgi elemanı şu biçimdedir:

$$ds^2 = \Lambda^2 \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 \right] - \Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.12)$$

Bu metriktaki Λ terimi aşağıdaki denklemdeki gibi tanımlanmıştır:

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.13)$$

M (kütle) ve B_0 (manyetik alan) sabit herhangi iki parametredir. Bu çizgi elemanı: $B_0 = 0$ seçildiğinde Schwarzschild modelini, $M = 0$ alındığında ise Melvin'in manyetik evrenini vermektedir.

- *Kehagias-Sfetsos kara deliği* (Kehagias ve Sfetsos 2009):

Genel olarak şu ifadeyle betimlenir:

$$ds^2 = e^{v(r)} dt^2 - e^{-\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.14)$$

buradaki kapalı fonksiyonlar $v(r)$ ve $\lambda(r)$ metrik potansiyelleri olup aşağıdaki denklem yardımıyla açık olarak elde edilebilir:

$$e^{v(r)} = e^{\lambda(r)} = 1 + wr^2 - wr^2 \sqrt{1 + \frac{4M}{wr^3}}. \quad (2.15)$$

Denklemden yer alan w ve M sabit iki parametredir.

- *Lu-Mei-Pope (LMP) kara deliği* (Lu ve ark. 2009):

Bu modeli ifade eden genel tanım (2.14) denkleminde yazılan çizgi elemanı ile aynıdır. Ancak metrik potansiyellerinin açık halleri bu defa şu denklemlerle verilir:

$$e^{\nu(r)} = e^{\lambda(r)} = 1 - \beta r^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{-\beta}} r^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

β ve α sabit parametrelerdir.

- *Yüklü topolojik kara delik* (Martinez ve Staforelli 2005):

Bu modeli tanımlayan çizgi elemanı şu biçimde yazılmaktadır;

$$ds^2 = \left(-\frac{\Lambda r^2}{3} - \left[1 + \frac{Gm}{r^2} \right]^2 \right) dt^2 - \left(-\frac{\Lambda r^2}{3} - \left[1 + \frac{Gm}{r^2} \right]^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.17)$$

Bu model için " $r > 0$ " olup zaman $-\infty < t < \infty$ aralığında değişmektedir. Skaler alan fonksiyonu ($\alpha > 0$ durumunda)

$$\phi = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6\alpha}} \frac{G\mu}{r + G\mu} \quad (2.18)$$

denklemlerle betimlenirken elektromanyetik alanın sıfırdan farklı olan tek bileşeni ise

$$A_t = -\frac{q}{r} \quad (2.19)$$

biçiminde yazılan t yönündeki bileşendir. Burada q ve μ birbirlerine bağımlı integral sabitleridir. Bu bağımlılık şu denklemle verilmiştir:

$$q^2 = -G\mu^2 \left[1 + \frac{2\pi\Lambda G}{9\alpha} \right]. \quad (2.20)$$

M kütlesi ve Q yükü bu parametreler yardımıyla şöyle tanımlanmıştır:

$$M = \frac{\sigma}{4\pi}\mu, \quad Q = \frac{\sigma}{4\pi}q. \quad (\sigma: \text{Yüzey Alanı}) \quad (2.21)$$

Bu modelde $m=0$ alınırsa

$$ds^2 = \left(-\frac{\Lambda r^2}{3} - 1\right) dt^2 - \left(-\frac{\Lambda r^2}{3} - 1^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.22)$$

metriğiyle ifade edilen “Skaler alanlı yüklü kütesiz kara delik” modeli elde edilmektedir.

- *Schwarzschild-de Sitter uzay-zamanı* (Shankaranarayanan 2003):

Pozitif Λ (*kozmojik sabit*) içeren alan denklemlerinin en genel küresel simetrik vakum durumu çözümü Schwarzschild-de Sitter uzay-zaman modelidir.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.23)$$

biçiminde yazılan küresel simetrik (3+1)-boyutlu çizgi elemanı Schwarzschild-de Sitter uzay-zaman modelini betimler. Bu ifadede $R = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ şeklinde tanımlanmıştır. Özel durumlarda; $m = 0$ alındığında bu model de Sitter vakum çözümünü verirken, $\Lambda = 0$ limitinde ise Schwarzschild çözümü elde edilmektedir.

- *Heterotik Sicim Kuramında tanımlı bir kara delik* (Sen 1992):

Modelin geometrisini betimleyen çizgi elemanı aşağıdaki gibidir:

$$ds^2 = \frac{(r^2-2mr)r^2}{(r^2+2mr\sinh^2(\frac{a}{2}))^2} dt^2 - \frac{r^2}{r^2-2mr} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.24)$$

Buradaki a keyfi bir sayıdır. Yukarıda yazılan metrik M kütleli ve Q yüklü bir kara delik modelini ifade etmektedir. M ve Q terimleri açık halde şöyle tanımlanmıştır:

$$M = \frac{m}{2}(1 + \cosh a), \quad Q = \frac{m}{\sqrt{2}}\sinh a. \quad (2.25)$$

- *Durağan, küresel simetrik, Dyonik Dilaton Kara Deliği* (Cheng ve ark. 1994):

Modeli betimleyen metrik,

$$ds^2 = \xi^2 dt^2 - \frac{\sigma^2}{\xi^2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

şeklindedir. Buradaki terimler şu biçimde tanımlanmıştır:

$$\sigma^2 = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2}, \quad (2.27)$$

$$\xi^2 = 1 - \frac{2M}{r^2} \sqrt{r^2 + \lambda^2} + \frac{\beta^2}{r^2}, \quad (2.28)$$

$$\lambda = \frac{1}{2M} (Q_e^2 e^{2\phi_0} - Q_m^2 e^{-2\phi_0}), \quad (2.29)$$

$$\beta = Q_e^2 e^{2\phi_0} + Q_m^2 e^{-2\phi_0}, \quad (2.30)$$

$$e^{2\phi} = e^{-2\phi_0} \left(1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{r^2 + \lambda^2 + \lambda}} \right). \quad (2.31)$$

Dyonik dilaton kara delik modelinin özellikleri kütleyi ifade eden M , elektriksel yükü betimleyen Q_e , manyetik yükü veren Q_m ve dilatonun asimptotik değeri olan ϕ_0 terimleri ile karakterize edilir. Yapıları genel olarak Reissner-Nordstrom kara deliklerine benzemektedir (Radinschi 1999).

- *Durağan, küresel simetrik, tekil olmayan kara delik çözümü* (Dymnikova 1992):

Model genel olarak,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_g(r)}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g(r)}{r} \right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.32)$$

çizgi elemanı ile betimlenmektedir. Bu metrikte kullanılan tanımlamalar şu denklemlerle ifade edilir:

$$R_g(r) = r_g \left(1 - e^{-\frac{r^3}{r_1^3}} \right), \quad (2.33)$$

$$r_1^3 = r_0^2 r_g, \quad (2.34)$$

$$r_0^2 = \frac{3}{8\pi\epsilon_0}, \quad (2.35)$$

$$r_g = 2M. \quad (2.36)$$

- *Bir kara deliğin dyado-küresel çözümü* (de Lorenci ve ark. 2001):
Geometriyi betimleyen metrik,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^5} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^5} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.37)$$

şeklinde. M ve Q sırasıyla kütle ve yük kavramlarını ifade eden terimler olup σ keyfi bir parametredir.

- *Kerr kara deliği* (Setare ve Vagenas 2005):
Dönen fakat genişlemeyen bir kara delik modelidir, matematiksel olarak

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - (r^2 + a^2 + 2Ma^2r\sin^2\theta)\sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.38)$$

çizgi elemanı ile tanımlanır. Bu metrikte kullanılan tanımlamalar ise şunlardır:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2.39)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.40)$$

M ise kara deliğin kütesidir. Δ 'nın kökleri,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.41)$$

denklemindeki gibidir. Bu ifadede yer alan r_+ kara deliğin olay (dış) ufkunun yerini verirken, r_- ise iç ufkun yerini göstermektedir.

İfadelerde yer alan diğer terim olan a ise şu denklemle betimlenmiştir:

$$a = \frac{J}{M}. \quad (2.42)$$

J kara deliğin açısal momentumudur. Kerr kara deliği

$$\omega = \frac{J}{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}, \quad (2.43)$$

açısal hızıyla döner.

- *Vaidya kara delikleri* (Vaidya 1951):
Genişleyen bir kara delik modelidir,

$$ds^2 = e^{-2\psi(t,r)} \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.44)$$

metriğine sahiptir. $m(t,r)$ yavaşça-değişen kütle fonksiyonudur (Farley 2006). Buradaki kütle fonksiyonunun bazı biçimleri bizi başka özel kara delik modellerine (altı tane) götürmektedir. Keyfi bir ε sabiti ile birlikte $m(t,r) = \frac{\varepsilon r}{2}$ olduğunda *monopol çözümü* (Barriola ve Vilenkin 1989), $m(t,r) = \frac{\Lambda r^3}{6}$ yazıldığında $\Lambda > 0$ için *de Sitter*

çözümü $\Lambda < 0$ içinse *anti-de Sitter* çözümü (Wang ve Wu 1999), $m(t, r) = k(t) - \frac{q^2(t)}{2r}$ seçilirse *yüklü Vaidya* çözümü (Wang ve Wu 1999), buraya kadar olan durumların hepsi bir arada iken $m(t, r) = \frac{\epsilon r}{2} + \frac{\Lambda r^3}{6} + k(t) - \frac{q^2(t)}{2r}$ alındığında *monopol-de Sitter-yüklü Vaidya* çözümü (Wang ve Wu 1999), başka bir limitte $m(t, r) = K(t) - \frac{q_e^2(t) + q_m^2(t)}{2r}$ seçiminde *radyasyon yayan dyon* çözümü (Chamorro ve Virbhadra 1995) ve son limit durumunda η bir sabit olmak üzere $m(t, r) = Y(t) - \frac{L(t)}{(1-2\eta)r^{1-2\eta}}$ seçilirse *Husain* çözümleri (Husain 1996) elde edilmektedir.

- *Garfinkle–Horowitz–Strominger dilaton kara deliği* (Garfinkle ve ark. 1991):

Küresel koordinatlarda tanımlanan bu modeli veren metrik aşağıdaki gibidir:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r(r - 2a)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.45)$$

Burada a terimi dilaton alanı ile ilişkili bir parametre iken M kara deliğin kütlesini vermektedir. Dilaton alanı ile a parametresi arasındaki bağıntı

$$e^{-2\phi} = e^{-2\phi_0} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.46)$$

denklemlerle tanımlanır. ϕ_0 , $r \rightarrow \infty$ 'daki dilaton alanını tanımlamakta olup kara deliğin kütlesi, yükü ve a parametresi birbirlerine

$$a = \frac{Q^2}{2M} \quad (2.47)$$

denklemindeki gibi bağlıdır.

2.1.2. Solucan Deliği Modelleri

- *Branz-Dicke solucan deliği* (Buchdahl 1959):

Matematiksel ifadesi özel durumlarda Schwarzschild kara delik modeline indirgenebilmektedir. Bu model,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{n>3}}\right)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^{n>3}}\right)\right)^{-1} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.50)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki " $M=m\beta$ " Kepler kütlesi olarak bilinir ve " $r = \frac{m}{2}$ " değerinde bu model yalnız bir tekilliğe sahiptir. Modelde " $\beta=1$ " limiti izotropik koordinatlarda yazılmış Schwarzschild kara delik çözümünü verirken " $\beta>1$ " durumu ise traversable (*kestirme, çapraz*) wormhole modelini vermektedir.

- *Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) kozmolojik solucan deliği* (Bochicchio ve Faraoni 2010):

Modeli ifade eden polar koordinatlardaki çizgi elemanı,

$$ds^2 = dt^2 - [R'(t, r)]^2 dr^2 - R^2(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.51)$$

biçimindedir. Buradaki $R(t, r)$ fonksiyonu

$$R(t, r) = \left(r^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{m_e(r)t}\right)^{2/3} \quad (2.52)$$

denkleminle tanımlanırken bu denklemdeki $m_e(r)$ fonksiyonu hiper-yüzeydeki $\rho_0(r)$ enerji yoğunluğuna bağlı olarak şu ifadeyle verilir:

$$m_e(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \rho_0(x) dx. \quad (2.53)$$

Bu model aslında aynı zamanda toz kaplı homojen olmayan küresel simetrik bir evreni tanımlamaktadır.

- *Ellis-Bronnikov-Morris-Thorne solucan deliği* (Novikov ve ark. 2009):
Bu solucan deliği modeli,

$$ds^2 = dt^2 - e^\lambda dr^2 - e^\eta (r^2 + Q^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.54)$$

metriğine sahiptir. λ ve η terimleri t ve r 'ye bağlı fonksiyonlar olup, Q ifadesi ise uzunluk boyutunda ve solucan deliğinin boğaz uzunluğu yardımıyla belirlenen bir sabittir.

- *Yüksüz, durağan bir solucan deliği çözümü* (Kim ve Lee 2001):

Modele ait çizgi elemanı şu şekildedir:

$$ds^2 = e^{2\Xi(r)} dt^2 - \left(1 - \frac{\xi(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.55)$$

Buradaki $\xi(r)$ fonksiyonu solucan deliğinin şeklini belirler, bu fonksiyon ile ilgili olarak iki tane koşul belirlenmiştir: Bunlar pozitiflik ve düzlük şartlarıdır. $r \rightarrow \infty$ limiti altında $\xi(r)$ fonksiyonu $2M$ 'ye yaklaştığından (burada M solucan deliğinin kütesidir) bu fonksiyon pozitif olmalıdır (Visser 1995).

- *Skaler alanlı solucan deliği* (Kim ve Lee 2001):

Bu solucan deliği,

$$ds^2 = dt^2 - \left(1 + \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\rho}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.56)$$

çizgi elemanı ile bilinmekte olup burada ρ skaler yük rolündedir. Bileşenler her zaman pozitif olduğundan bu solucan deliği modeli için *ufuk* yoktur.

Boyutsal nedenler için $\xi(r)$ fonksiyonu açık halde şu biçimdedir:

$$\xi(r) = \xi_0^{2\omega+1} r^{\frac{1}{2\omega+1}}. \quad (2.57)$$

ω terimi " -0.5 " ten küçük olan sabit bir parametredir (Kim 1996).

- *Elektrik yüklü solucan deliği çözümü* (Kim ve Lee 2001):

Elektriksel yüklü durağan bir solucan deliği modelini ifade eden bu model aslında Morris-Thorne tipi küresel simetrik solucan deliği ile Reissner-Nordstrom uzay-zaman modelinin birleşimidir:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{Q}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\xi(r)}{r} + \frac{Q}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.58)$$

Model $Q = 0$ olursa Morris-Thorne solucan deliği metriğine, $\xi(r) = 0$ olduğunda ise sıfır kütleli Reissner-Nordstrom kara delik modeline indirgenebilmektedir.

- *Genişleyen Morris-Thorne solucan deliği* (Roman 1993, Kar 1994):
Genişleyen küresel simetrik solucan deliği modeli olup

$$ds^2 = \Lambda^2(t) \left[e^{\Omega(r)} dt^2 - \left(1 - \frac{\Xi(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.59)$$

metriğiyle betimlenmektedir (Morris ve Thorne 1998). Bu model bazı özel limitlerle iyi bilinen başka uzay-zaman modellerine indirgenebilmektedir. Bu metrikte,

$$\Lambda(t) = 1, \quad \Omega(r) = 1 - \frac{\Xi(r)}{r}, \quad \Xi(r) = 2M, \quad (2.60)$$

seçildiğinde Schwarzschild kara deliği,

$$\Lambda(t) = 1, \quad \Omega(r) = 1 - \frac{\Xi(r)}{r}, \quad \Xi(r) = 2M - \frac{q^2}{r}, \quad (2.61)$$

limitinde ise Reissner-Nordstrom kara deliği elde edilebilmektedir.

- *Brans solucan delikleri* (Brans 1962):
Brans tarafından yazılan dört tip solucan deliği modeli bulunmaktadır, bu modellerin tamamı genel olarak

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - e^{2\nu(r)} r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.62)$$

metriğiyle tanımlanır. Burada yer alan ve yarıçap, bağlı fonksiyonlar olan $\alpha(r)$, $\beta(r)$ ve $\nu(r)$ ifadelerinin açık hallerine göre Brans tipi özel solucan delikleri verilir. Buna göre Brans-I tipi solucan deliği için elde edilen çözümler:

$$e^{2\alpha(r)} = \left(\frac{1-\frac{B}{r}}{1+\frac{B}{r}} \right)^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (2.63)$$

$$e^{2\beta(r)} = e^{2\nu(r)} = \left(1 + \frac{B}{r} \right)^2 \left(\frac{1-\frac{B}{r}}{1+\frac{B}{r}} \right)^{\frac{\lambda-C-1}{\lambda}}, \quad (2.64)$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 \left(\frac{1-\frac{B}{r}}{1+\frac{B}{r}} \right)^{\frac{C}{\lambda}}, \quad (2.65)$$

$$\lambda^2 \equiv (C+1)^2 + C \left(1 - \frac{\omega C}{2} \right) > 0, \quad (2.66)$$

şeklindedir. Bu denklemlerde karşımıza çıkan $B = \frac{\lambda M}{2}$, C ve φ_0 parametreleri birer sabittir.

İkinci tip çözüme ait fonksiyonlar ise şu denklemlerle betimlenmiştir:

$$\alpha(r) = \alpha_0 + \frac{2}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right) \quad (2.67)$$

$$\beta(r) = \nu(r) = \beta_0 - \frac{2(C+1)}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right) - \ln \left(\frac{r^2}{r^2+B^2} \right), \quad (2.68)$$

$$\Lambda^2 \equiv C \left(1 - \frac{\omega C}{2} \right) - (C+1)^2. \quad (2.69)$$

Ayrıca skaler alan,

$$\varphi(r) = \varphi_0 e^{\frac{2C}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right)} \quad (2.70)$$

şeklindedir. Son olarak karşımıza çıkan yeni sabitler

$$\alpha_0 = -\frac{\pi}{\Lambda}, \quad (2.71)$$

$$\beta_0 = \frac{\pi(C+1)}{\Lambda}, \quad (2.72)$$

$$B = \frac{\Lambda M}{2}. \quad (2.73)$$

denklemlerinin yardımıyla elde edilebilmektedir.

Brans-III tipi solucan deliği modelini elde etmemizi sağlayan fonksiyonlar ve sabitler şu biçimdedir:

$$\alpha(r) = \alpha_0 - \frac{r}{B}, \quad (2.74)$$

$$\beta(r) = \beta_0 - \ln\left(\frac{r}{B}\right)^2 + (C+1)\frac{r}{B}, \quad (2.75)$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 e^{-\frac{Cr}{B}}, \quad (2.76)$$

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega-3}}{\omega+2}. \quad (2.77)$$

Dördüncü tip olan Brans-IV tipi solucan deliklerini betimleyen fonksiyonların ve gerekli sabitin açık ifadeleri:

$$\alpha(r) = -\frac{1}{Br}, \quad (2.78)$$

$$\beta(r) = \frac{C+1}{Br}, \quad (2.79)$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 e^{-\frac{Cr}{B}}, \quad (2.80)$$

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega-3}}{\omega+2}, \quad (2.81)$$

$$B = \frac{1}{M} > 0 \quad (2.82)$$

denklemlerindeki gibidir.

2.2. Silindirik Kütle-Çekimsel Dalgalar ve Teleparalel Nicelikler

Tezin bu kısmında ise örnek olması açısından Sharif ve Taj (2010) tarafından çözülen bir problemin yer aldığı çalışmalarının özeti sunulacaktır. Çalışmalarında yazarlar uzay-zaman indisleri için Yunan alfabesini, tanjant uzayı indisleri içinse Latin alfabesini tercih etmişlerdir. Zaman ve uzay indisleri için sırasıyla şu açılımlar kullanılmıştır: “ $\mu = 0, i$ ” ve “ $a = (0), (i)$ ”.

Bu çalışmada, yazarlar silindirik gravitasyonel dalgaları betimleyen Einstein-Rosen metriği olarak bilinen ve

$$ds^2 = -e^{2(\gamma-\psi)} dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)} d\rho^2 + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 + e^{2\psi} dz^2 \quad (2.83)$$

denklemleriyle tanımlanan uzay-zaman modelini göz önünde bulundurmuşlardır. Buradaki fonksiyonlar $\gamma = \gamma(\rho, t)$, $\psi = \psi(\rho, t)$ şeklinde olup,

$$\psi'' + \frac{1}{\rho} \psi' - \ddot{\psi} = 0, \quad (2.84)$$

$$\gamma' = \rho(\psi'^2 + \dot{\psi}^2), \quad (2.85)$$

$$\dot{\gamma} = 2\rho\dot{\psi}\psi', \quad (2.86)$$

Vakum alan denklemlerini sağladıkları ifade edilmiştir. Bu denklemlerde yer alan *üssü* (') ve *nokta* (.) ibareleri sırasıyla ρ ve t değişkenlerine göre türev alma işlemlerini göstermektedir. Çalışmada, Einstein-Rosen uzay-zaman modeli için tetrad alanı bileşenleri,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \quad (2.87)$$

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad (2.88)$$

denklemlerinin kullanılmasıyla

$$e_{\mu}^a(t, \rho, \phi) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A \cos \phi & -\rho C \sin \phi & 0 \\ 0 & A \sin \phi & \rho C \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

olarak elde edilmiştir. Burada $A = e^{(\nu-\psi)}$, $B = e^{\psi}$ ve $C = e^{-\psi}$ kısaltmaları kullanılmış ve bu matrisin determinanı için $e = \det(e_{\mu}^a) = \rho A^2$ sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlarla birlikte

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} e_{\nu}^a - \partial_{\nu} e_{\mu}^a, \quad (2.90)$$

Denklemleri kullanılarak Torsion tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri şöyle elde edilmiştir:

$$T_{(0)01} = A', \quad T_{(1)01} = \dot{A} \cos \phi, \quad T_{(1)02} = -\rho \dot{C} \sin \phi, \quad (2.91)$$

$$T_{(1)12} = (A - C - \rho C') \sin \phi, \quad T_{(2)01} = \dot{A} \sin \phi, \quad T_{(2)02} = \rho \dot{C} \cos \phi, \quad (2.92)$$

$$T_{(2)12} = -(A - C - \rho C') \cos \phi, \quad T_{(3)03} = \dot{B}, \quad T_{(3)13} = B'. \quad (2.93)$$

İndislerin tamamı uzay-zaman indisleri (Yunan alfabesi ile betimlenenler) haline dönüştürüldüğünde torsion tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri şu biçimleri almıştır:

$$T_{001} = AA', \quad T_{101} = A\dot{A}, \quad T_{202} = \rho^2 C\dot{C}, \quad (2.94)$$

$$T_{212} = \rho C(C - A + \rho C'), \quad T_{001} = B\dot{B}, \quad T_{313} = BB', \quad (2.95)$$

Bu aşamadan sonra şimdiye kadar elde edilen hesaplamalar kullanılarak enerji, momentum, açısal momentum, enerji-momentum akısı ve kütle-çekimsel basınç hesabına geçilmiştir. Torsion tensörünün hesaplanmış sıfırdan farklı bileşenleri

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c), \quad (2.96)$$

denkleminde kullanıldığında ($\Sigma^{abc} = -\Sigma^{acb}$ özelliğine sahiptir)

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{2\rho} e^{4(\gamma-\psi)}(e^\gamma - 1), \quad (2.97)$$

$$\Sigma^{002} = \frac{1}{2\rho^2} \dot{\gamma} e^{2(2\psi-\gamma)}, \quad (2.98)$$

$$\Sigma^{212} = -\frac{1}{2\rho^2} \gamma' e^{2(2\psi-\gamma)}, \quad (2.99)$$

$$\Sigma^{303} = \frac{1}{2} e^{-2\gamma}(\dot{\gamma} - 2\dot{\psi}), \quad (2.100)$$

$$\Sigma^{313} = \frac{1}{2\rho} e^{-2\gamma} \{ \rho(2\psi' - \gamma') + e^\gamma - 1 \}, \quad (2.101)$$

sonuçlarına ulaşılmış ve elde edilen bu sonuçların da

$$\Pi^{ai} = -4\kappa e \Sigma^{a0i} \quad (i = 1,2,3) \quad (2.102)$$

ifadesinde yerine yazılmasıyla silindirik kütle-çekim dalgalarının enerji-momentum yoğunluğu bileşenleri için elde edilmiş sonuçları şöyledir:

$$-\partial_i \Pi^{(0)i} = -\partial_1 [-2\kappa e^{(\psi-\gamma)}(e^\gamma - 1)] = 2\kappa \partial_1 [e^{(\psi-\gamma)}(e^\gamma - 1)], \quad (2.103)$$

$$-\partial_i \Pi^{(1)i} = -\partial_2 [2\kappa \dot{\gamma} e^\psi \sin \phi] = -2\kappa \partial_2 [\dot{\gamma} e^\psi \sin \phi], \quad (2.104)$$

$$-\partial_i \Pi^{(2)i} = -\partial_2 [-2\kappa \dot{\gamma} e^\psi \cos \phi] = 2\kappa \partial_2 [\dot{\gamma} e^\psi \cos \phi], \quad (2.105)$$

$$-\partial_i \Pi^{(3)i} = -\partial_3 [-2\kappa \rho e^{-\psi}(\dot{\gamma} - 2\dot{\psi})] = 2\kappa \partial_3 [\rho e^{-\psi}(\dot{\gamma} - 2\dot{\psi})]. \quad (2.106)$$

Bu değerlerin keyfi uzunlu olan L ve yarıçap ρ için tanımlanmış silindirik yüzey üzerinden integralleri alınırsa enerji ve momentum bileşenleri

$$P^{(0)} = \frac{1}{4} L e^{(\psi-\gamma)} (e^\gamma - 1), \quad (2.107)$$

$$P^{(i)} = 0, \quad (2.108)$$

şeklinde hesaplanır. Açıl momentum bileşenleri ise sabit çıkmaktadır. Enerji akısı bileşenlerini hesaplamak için öncelikle

$$\phi^{aj} = \kappa e e^{a\mu} (4 \Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta_\mu^j \Sigma^{bcd} T_{bcd}), \quad (2.109)$$

denklemini kullanarak

$$\phi^{(0)1} = -2\kappa \dot{\psi} e^{\psi-\gamma} (2\psi' + e^\gamma - 1), \quad (2.110)$$

$$\phi^{(0)2} = \phi^{(0)3} = 0, \quad (2.111)$$

biçimindeki enerji akısı yoğunluğu bileşenleri elde edilmiş, sonrasında kütle-çekimsel enerji akısının

$$\phi^{(0)1} = \frac{1}{4} L e^{(\psi-\gamma)} \{ \dot{\psi} (e^{\gamma-1}) + \dot{\gamma} \} + \text{sabit}, \quad (2.112)$$

şeklinde olduğu görülmüştür. Kütle-çekimsel momentum akısı bileşenlerini elde edebilmek içinse ilk olarak kütle-çekimsel momentum akısı yoğunluğu bileşenleri olan

$$\phi^{(1)1} = 2\kappa \gamma' e^\psi \cos \phi, \quad (2.113)$$

$$\phi^{(1)2} = -2\kappa e^\psi \sin \phi (\dot{\psi}^2 - \dot{\psi}'^2) (1 - \rho\psi), \quad (2.114)$$

$$\phi^{(1)3} = 0, \quad (2.115)$$

$$\phi^{(2)1} = 2\kappa\gamma'e^\psi \sin \phi, \quad (2.116)$$

$$\phi^{(2)2} = 2\kappa e^\psi \cos \phi (\dot{\psi}^2 - \psi'^2), \quad (2.117)$$

$$\phi^{(2)3} = 0, \quad (2.118)$$

$$\phi^{(3)1} = \phi^{(3)2} = 0, \quad (2.119)$$

$$\phi^{(3)3} = 2\kappa e^{-\psi} \{ \rho^2 \psi' (\dot{\psi}^2 - \psi'^2) + 2\rho\psi'^2 + \psi'(e^\gamma - 1) - \gamma'e^\gamma \}, \quad (2.120)$$

sonuçlarına ulaşılmış, bu sonuçların yardımıyla

$$\Phi_g^{(1)} = \text{sabit} - 2\kappa L \sin \phi \int e^\psi (\dot{\psi}^2 - \psi'^2)(1 - \rho\psi')d\rho, \quad (2.121)$$

$$\Phi_g^{(2)} = \text{sabit} + 2\kappa L \cos \phi \int e^\psi (\dot{\psi}^2 - \psi'^2)(1 - \rho\psi')d\rho, \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(3)} = \text{sabit} + \frac{1}{4} \int e^{-\psi} \{ \rho^2 \psi' (\dot{\psi}^2 - \psi'^2) + 2\rho\psi'^2 + \psi'(e^\gamma - 1) \} d\rho \\ + \frac{1}{4} e^{\gamma-\psi}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

denklemleriyle verilen momentum akısı bileşenlerine ulaşılmıştır. Burada enerji-momentum akısı kütle-çekimsel dalgaların taşıdığı enerji-momentumu temsil etmektedir.

Silindirik Kütle-çekimsel dalgaların kütle-çekim basıncını hesaplayabilmek için

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = \int_S dS_1 (-\phi^{(i)1}) \quad (2.125)$$

denklemini göz önüne alınmıştır. Kütle-çekimsel momentum akısı yoğunluğu bileşenleri olan

$$\phi^{(1)1} = 2\kappa\gamma' e^\psi \cos \phi, \quad (2.126)$$

$$\phi^{(2)1} = 2\kappa\gamma' e^\psi \sin \phi, \quad (2.127)$$

$$\phi^{(3)1} = 0, \quad (2.128)$$

ifadelerini kullanarak ve yukarıdaki basıncın zamana göre değişimini veren denklemde birim vektörü $\hat{r} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ seçerek

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -2\kappa\gamma' e^\psi \int_S d\phi dz \hat{r} \quad (2.129)$$

sonucuna ulaşılmıştır. $d\phi dz$ ile verilen yüzey elemanı küresel polar koordinatlar cinsinden ifade edildiğinde yukarıdaki denklem

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -2\kappa\gamma' e^\psi \int_S \rho \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (2.130)$$

biçimini almaktadır. Sabit ρ yarıçaplı küçük katı açı $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ üzerinden integral alındığında kütle-çekimsel basıncın son ifadesi

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -2\kappa\gamma' e^\psi \Delta\Omega \hat{r} \quad (2.131)$$

denkleme dönüşmüştür.

$$dt \rightarrow d(ct), \quad (2.132)$$

$$\kappa = \frac{1}{16\pi} \rightarrow \frac{c^3}{16\pi G} \quad (2.133)$$

değişikliklerinin yapılmasından sonra

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\gamma' e^\psi \frac{c^4}{16\pi G} \rho^2 \Delta\Omega \hat{r} \quad (2.134)$$

sonucu elde edilmiştir. Denklem sağ tarafında yer alan $\gamma' e^\psi \frac{c^4}{16\pi G}$ niceliği $\rho^2 \Delta\Omega$ alan elemanı üzerine uygulanan kütle-çekimsel basıncı verir. Bu denklem aynı zamanda

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{P}}{M} \right) = -\gamma' e^\psi \frac{c^4}{16\pi GM} \rho^2 \Delta\Omega \hat{r} \quad (2.135)$$

biçiminde de yazılabilir. Buradaki denklemde yer alan sol taraf ρ yarıçap mesafesinde $\Delta\Omega$ katı açısı üzerine etkiyen kütle-çekimsel ivme alanı olarak alınabilen ivmeye karşılık gelir.

3. MATERYAL ve METOT

Temeli bazı özel Kara Delik ve Solucan Deliği modellerini teleparalel kütleçekim kuramında göz önünde bulundurmaktan dolayı bu tez çalışması kuramsal hesaplamalar içermektedir. Çalışmada herhangi bir materyal kullanılmamıştır. Fakat bazı hesaplamaları tamamlamak için bilgisayar programı (*Wolfram Mathematica 8.0*) kullanılmıştır. Kullanılan metot: Öncelikle genel bir uzay-zaman modeli tanımlanarak birçok özel Kara Delik ve Solucan Deliği modelinin tek bir modelle ifade edilebilmesi sağlanacak, daha sonra bu genel model için gerekli hesaplamalar tamamlanacak ve son olarak problem limit durumlarda özel çözümlere indirgenerek elde edilen ifadeler literatürde önceden yapılmış çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

3.1. Notasyon Hakkında

Tez çalışması boyunca tensörel ifadelerdeki tüm indisler genel olarak “0-3” arasında değişmektedir (*aksi özel durumlar olduğunda ayrıca bildirilmiştir*). Sıfır zaman koordinatını, $\{1, 2, 3\}$ ise üç boyutlu uzay koordinatlarını betimler. Yunan alfabesi kullanılan indisler ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$) eğri uzay-zaman ($3+1$ - boyutlu) koordinatlarını (*tanjant uzayı*), Latin alfabesi kullanılan indisler ($a, b, i, j, \dots = 0, 1, 2, 3$) ise düz uzay-zamanı ($3+1$ - boyutlu) ifade etmektedir.

3.2. Yöntem Hakkında

Kütle-Çekim (gravitasyon) teorilerinde uzay-zaman modelleri

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanan çizgi elemanı yardımıyla betimlenir. Bu ifade kullanılarak göz önünde bulundurulmuş uzay-zaman modeli için metrik tensörü $g_{\mu\nu}$ ve tersi olan $g^{\mu\nu}$ hesaplanır. Bu iki tensör ile birlikte

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} h^i_\mu h^j_\nu \quad (3.2)$$

ve

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ij} h_i^\mu h_j^\nu \quad (3.3)$$

denklemleri kullanılarak eğri uzay-zaman ile düz uzay-zaman arasındaki ilişkiyi kurmamızı sağlayan ve teleparalel kütle çekim kuramının temelini oluşturan h^μ_i ve h_i^μ tetrad bileşenleri elde edilir. Yukarıda yazılan ifadelerdeki η_{ij} ve η^{ij} Minkowski metriği ve onun tersidir. Bu çalışmadaki hesaplamalar yapılırken Minkowski metriği $\eta^{ij} = \text{Köşegenel}(+1, -1, -1, -1)$ şeklinde seçilecektir.

Teleparalel kütle çekim kuramının temelini Weitzenböck Bağlantısı'nı tanımlamakta kullanılan h^μ_i tetrad alanı oluşturmaktadır. Weitzenböck bağlantısı ve Torsion tensörü, tetrad alanı kullanılarak (Ulhoa ve ark. 2010)

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = h_i^\lambda \partial_\nu h^\mu_i, \quad (3.4)$$

$$T^i_{\mu\nu} = \partial_\mu h^\nu_i - \partial_\nu h^\mu_i, \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Madde etkisinden kaynaklanan kütle-çekim alanı için Lagrangian yoğunluğu Genel Göreliliğin Teleparalel kuram eşdeğerinde (Maluf 1994)

$$L \equiv -\kappa h \Sigma^{abc} T_{abc} - L_M \quad (3.6)$$

ifadesiyle betimlenmektedir. Burada $\kappa = 1/16\pi$, $h = \det(h^\mu_i)$ şeklindedir. Anti-simetrik bir tensör olarak bilinen Σ^{abc} (sağdaki iki indise göre anti-simetriktir) ise aşağıdaki denklemdeki gibi tanımlanır:

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c). \quad (3.7)$$

Bu durumda, karşılık gelen alan denklemleri şunlardır:

$$h_{a\lambda} h_{b\mu} \partial_\nu (h \Sigma^{b\lambda\nu}) - h \left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} h_{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{4\kappa} h T_{a\mu}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta h^{a\mu}} = hT_{a\mu}. \quad (3.9)$$

Toplam Hamiltoniyen yoğunluğu ise

$$H(h_{aj}, \Pi_{aj}) = h_{a0}C^a + \alpha_{jk}\Gamma^{jk} + \beta_k\Gamma^k + \partial_k(h_{a0}\Pi^{ak}), \quad (3.10)$$

biçiminde yazılmaktadır (Maluf ve da Rocha-Neto 2001). Buradaki C^a , Γ^{jk} ve Γ^k gerekli olan başlıca şartları α_{jk} ve β_k ise Lagrange çarpanlarını vermektedir.

Keyfi bir V hacmi üzerinden *Kütle-çekimsel Enerji-Momentum*,

$$P^a = - \int_V \partial_\mu \Pi^{a\mu} d^3x \quad (3.11)$$

denklemindeki gibi verilir. Bu ifadede karşımıza çıkan

$$-\partial_\mu \Pi^{a\mu} = \partial_\mu (4\kappa \Sigma^{a0\mu}) \quad (3.12)$$

ifadesi *Enerji-Momentum Yoğunluğu*'dur (Maluf ve ark. 2002). *Toplam açısal-momentum* ise şu şekilde tanımlanır:

$$M^{\mu\nu} = 2\kappa \int_V h[-g^{\mu m}g^{\nu n}T_{mn}^0 + (g^{\mu m}g^{0\nu} - g^{\nu m}g^{0\mu})T_{mn}^n] d^3x. \quad (3.13)$$

Yukarıdaki denklemde özel bir durum söz konusudur, bu ifadede μ ve ν indisleri (1, 2, 3) değerlerini almaktadırlar. Bazı basit cebirsel işlemler sonucunda *Kütle-çekimsel Enerji-Momentum Akısı* ve *Madde Enerji-Momentum Akısı* bileşenleri için genel tanımlar şöyle elde edilebilmektedir (Maluf ve Faria 2004):

$$\Phi_{K\u00fctle-\u00e7ekim}^a = \int_S \phi^{av} dS_\nu, \quad (\nu = 1,2,3) \quad (3.14)$$

$$\Phi_{Madde}^a = \int_S (hh^a_\mu T^{\nu\mu}) dS_\nu. \quad (\nu = 1,2,3) \quad (3.15)$$

Bu matematiksel tanımlardaki S ibaresi V hacmini sınırlayan yüzeyi göstermektedir. ϕ^{av} niceliği ise v yönündeki *Kütle-çekimsel Enerji-Momentum Akı Yoğunluğu*'nu ifade eder ve şu denklem kullanılarak hesaplanabilir:

$$\phi^{av} = \kappa h h^{a\mu} (4 \Sigma^{bcv} T_{bc\mu} - \delta_{\mu}^v \Sigma^{bcd} T_{bcd}). \quad (v = 1,2,3) \quad (3.16)$$

Kütle-çekimsel Basınç ise

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = \int_S dS_1 (-\phi^{(i)1}) \quad (3.17)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanabilmektedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Teleparalel Kütle-Çekim Kuramının Önemi Üzerine

Bu kesimde tezdeki hesaplamaları yaparken Teleparalel Kütle-Çekim kuramının tercih edilmesindeki nedeni göstermek amacıyla tez döneminde yapılan farklı bir hesaba yer verilecektir. Tezde ele alınan problemdeki ilgili hesaplamalar buradaki hesaplamaların ışığında ve çıkan sonuçların önemine binaen yapılmıştır.

Bu alt bölümde NUT uzay-zamanı olarak bilinen ve

$$ds^2 = P(t,r)dt^2 - Q(t,r)dr^2 - (r^2 + l^2)d\theta^2 - [(r^2 + l^2)\sin^2\theta - 4Pl\cos^2\theta]d\varphi^2 - 2Pl\cos\theta dt d\varphi \quad (4.1)$$

biçiminde yazılan çizgi elemanı (l keyfi bir parametredir) ile betimlenmekte olan model için kütleli spin-1/2 parçacıklarının dinamiğini betimleyen Dirac denklemi Teleparalel Kütle-Çekim kuramında incelenecektir. Bu model aynı zamanda tezde ele alınan problemin temelinde yatan genel uzay-zaman modelinin özel bir durumudur. Tezdeki işlemler daha genel bir modeli esas almaktadır.

Spin üzerindeki dinamik uzay-zaman etkileri Dirac denkleminde “Spin Bağlantı Katsayısı” olarak bilinen terim aracılığıyla ifade edilir (Dirac 1928, Hayashi ve Nakano 1967, Hayashi ve Shirafuji 1979). Dirac spinör alanını betimleyen kovaryant Lagrangian şöyle tanımlanır:

$$L_{Dirac} = -m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}h_i^\alpha[\bar{\psi}\tilde{\gamma}^i\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\tilde{\gamma}^i\psi]. \quad (4.2)$$

Burada $\tilde{\gamma}^i$ düz uzay-zamanda Dirac matrislerini göstermektedir (Cardall ve Fuller 1996). Bu ifade eylem integralinde yerine yazıldıktan sonra $\bar{\psi}$ 'e göre Varyasyonu alma işlemi uygulandığında kovaryant Dirac denklemi şu biçimde elde edilir:

$$[h_i^\mu\tilde{\gamma}^i(\partial_\mu + \Gamma_\mu) + m]\psi = 0. \quad (4.3)$$

Spin Bağlantı Katsayısı olarak bilinen Γ_μ teriminin açık hali Einstein'ın Genel Görelilik kuramında

$$\Gamma_\mu \equiv \frac{1}{8} [\tilde{\gamma}^j, \tilde{\gamma}^k] h_j^\alpha h_{k\alpha;\mu} \quad (4.4)$$

şeklinde verilir. Dirac Gamma matrisleri olarak bilinen $\tilde{\gamma}^i$ matrisleri genel olarak

$$\tilde{\gamma}^i [\tilde{\gamma}^j, \tilde{\gamma}^k] = 2\eta^{ij} \tilde{\gamma}^k - 2\eta^{ik} \tilde{\gamma}^j - 2i\varepsilon^{tijk} \tilde{\gamma}_5 \tilde{\gamma}_n \quad (4.5)$$

ifadesini sağlamaktadır. Bu ifadedeki η^{ik} Minkowski metriğini gösterirken ε^{tijk} ise “tüm indislerine göre anti-simetrik” Levi-Civita tensörünü gösterir ($\varepsilon^{0123} = 1$). Dirac denklemi teleparalel kuramda yazıldığında spin bağlantı katsayısı artık

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} V_\mu - \frac{3i}{4} A_\mu \tilde{\gamma}_5 \quad (4.6)$$

denklemleriyle verilir (Hayashi ve Nakano 1967, Hayashi ve Shirafuji 1979). Bu yeni ifadede yer alan terimler olan V_μ ve A_μ torsion tensörünün sırasıyla vektör kısmı ve axial-vektör kısmıdır. Bu niceliklerin bileşenleri aşağıdaki matematiksel ifadeler yardımıyla hesaplanabilmektedir:

$$V_\mu = T^\alpha_{\alpha\mu} , \quad (4.7)$$

$$A_\mu = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\nu\alpha\beta} . \quad (4.8)$$

Burada karşımıza çıkan yeni ifade olan $T^\lambda_{\alpha\mu}$ torsion tensörüdür. Bu tensörün V_μ ve A_μ kısımlarının dışında üçüncü kısmı olan $t_{\alpha\mu\nu}$ “tensör kısmı” da bulunmaktadır. Bu kısım ise şöyle tanımlanır:

$$t_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu}) + \frac{1}{6} (g_{\nu\alpha} T^\delta_{\delta\mu} + g_{\nu\mu} T^\omega_{\omega\alpha}) - \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} T^\sigma_{\sigma\nu} . \quad (4.9)$$

Sonuç olarak torsion tensörü üç farklı kısımdan oluşur ve bu bileşenleri cinsinden genel matematiksel ifadesi aşağıdaki biçimdedir:

$$T_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(t_{\alpha\mu\nu} - t_{\alpha\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\alpha\mu}V_\nu - g_{\alpha\nu}V_\mu) + \delta_{\alpha\mu\nu\sigma}A^\sigma. \quad (4.10)$$

Burada $\delta^{\alpha\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\mu\nu\sigma}$ ile verilir. Ancak bu ifadelerden de anlaşıldığı gibi Dirac denklemini Teleparalel kuramda yazabilmek için torsion tensörünün vektör ve axial-vektör kısımları olan V_μ ve A_μ bileşenleri hesaplanmalıdır. bu hesaplar için de torsion tensörünün bileşenlerine ihtiyaç duyulur. Torsion tensörünü hesaplamak için bazı ekstra terimler hesaplanmalıdır. Buna göre ilgili hesabı yapabilmek için izlenmesi gereken yöntemde gerekli olan nicelikler aşağıda verilmiş olan denklemler yardımıyla elde edilir. Weitzenböck katsayıları olan $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ cinsinden torsion tensörü şöyle betimlenir:

$$T_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda. \quad (4.11)$$

Weitzenböck bağlantı katsayılarını veren matematiksel ifade ise

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = h_i^\lambda \partial_\beta h_\alpha^i \quad (4.12)$$

biçimindedir. Dirac parçacığının yarı-klasik spin vektörü olan \vec{S} , axial-vektör torsion'un uzaysal kısmı olan \vec{A} kullanılarak şöyle tanımlanır:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{3}{2}\vec{A} \times \vec{S}. \quad (4.13)$$

Bu ifade Dirac parçacığının Spin Presesyon hareketini veren denklem olarak bilinir. Ayrıca bu harekete karşılık gelen Hamiltonyende yer alan ekstra terim şöyledir:

$$\delta H = -\frac{3}{4}\vec{A} \cdot \vec{\sigma}. \quad (4.14)$$

$\vec{\sigma}$ Pauli spin matrislerini göstermektedir. Spin vektörü ile arasındaki ilişki ve bu matrislerin açık halleri şu denklemlerle ifade edilir:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad (4.15)$$

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16a)$$

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16b)$$

$$\sigma_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.16c)$$

Artık ‘‘NUT uzay-zamanı’’ için Dirac denklemini teleparalel kuramda yazmak için gerekli matematiksel niceliklerin açık hallerini biliyoruz ve gerekli hesaplamalara başlayabiliriz.

NUT uzay-zamanı için metrik tensörü ve tersi şöyle elde edilir:

$$g_{\mu\nu} = P\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - Q\delta_\mu^1\delta_\nu^1 - (r^2 + l^2)\delta_\mu^2\delta_\nu^2 - [(r^2 + l^2)\sin^2\theta - 4Pl\cos^2\theta]\delta_\mu^3\delta_\nu^3 - 2Pl\cos\theta[\delta_\mu^0\delta_\nu^3 + \delta_\mu^3\delta_\nu^0], \quad (4.17)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{r^2+l^2-4Pl^2\cos^2\theta}{P(r^2+l^2)}\delta_0^\mu\delta_0^\nu - \frac{\delta_1^\mu\delta_1^\nu}{Q} - \frac{1}{r^2+l^2}[\delta_2^\mu\delta_2^\nu + \operatorname{cosec}^2\theta\delta_3^\mu\delta_3^\nu] - \frac{2l\operatorname{cosec}\theta\cot\theta}{r^2+l^2}[\delta_0^\mu\delta_3^\nu + \delta_3^\mu\delta_0^\nu]. \quad (4.18)$$

Bu model $P(t, r)$ ve $Q(t, r)$ fonksiyonlarının bazı özel seçimleri ile farklı limit durumlarına indirgenebilir.

- (i) Durağan çözümler (Nouri-Zonoz ve ark. 1999): bu seçim için fonksiyonların açık biçimi şöyle verilir:

$$P = \frac{1}{Q} = 1 - \frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}. \quad (4.19)$$

(ii) İkinci seçim ise şöyledir (Nouri-Zonoz ve ark. 1999):

$$P = \frac{1}{Q} = \alpha_1 \left[\alpha_2 - \frac{2l^2}{l^2+r^2} \right] + \frac{\alpha_3}{\sqrt{l^2+r^2}} \sqrt{\left[\alpha_2 - \frac{l^2}{l^2+r^2} \right]} \quad (4.20)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve NUT parametresi l birer sabittir.

(iii) Son seçim ise Dual-Nut uzay-zamanını betimler. İlgili seçim için fonksiyonların tanımları aşağıdaki biçimdedir (Nouri-Zonoz ve ark. 1999):

$$P = \frac{1}{Q} = 1 - 2k - \frac{2[mr+l^2(1-2k)]}{r^2+l^2}. \quad (4.21)$$

Küresel simetrik bir metrikle betimlenen NUT uzay-zamanı için h_μ^a tetrad seçimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{P} & 0 & 0 & -2l\sqrt{P} \cos \theta \\ 0 & \sqrt{Q} \sin \theta \cos \varphi & \sqrt{r^2+l^2} \cos \theta \cos \varphi & -\sqrt{r^2+l^2} \sin \varphi \\ 0 & \sqrt{Q} \sin \theta \sin \varphi & \sqrt{r^2+l^2} \cos \theta \sin \varphi & \sqrt{r^2+l^2} \cos \varphi \\ 0 & \sqrt{Q} \cos \theta & -\sqrt{r^2+l^2} \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Buna göre bu matrisin tersi h_a^μ ise aşağıdaki denklemde verilen biçimde olmaktadır:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{P}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2l \cot \theta \sin \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} & \frac{\cos \varphi \sin \theta}{\sqrt{Q}} & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} & -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} \\ -\frac{2l \cot \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} & \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{Q}} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} & \frac{\cos \varphi}{\sqrt{r^2+l^2}} \\ 0 & \frac{\cos \theta}{\sqrt{Q}} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2+l^2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Bu sonuçlar ışığında elde edilen Weitzenböck bağlantı katsayıları şunlardır:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{P_t}{2P} \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{Pr}{2P}, \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{Qt}{2Q}, \quad (4.26)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Qr}{2Q}, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sqrt{\frac{r^2+l^2}{Q}}, \quad (4.28)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}}, \quad (4.29)$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = \frac{r}{r^2+l^2}, \quad (4.30)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta, \quad (4.31)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\cos\theta \sin\theta, \quad (4.32)$$

$$\Gamma_{13}^0 = 2l \cos\varphi \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma_{23}^0 = 2l \cot\theta \cos\theta, \quad (4.34)$$

$$\Gamma_{30}^0 = -l \cos\theta \frac{Pt}{P}, \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{2lr \cos\theta}{r^2+l^2} - l \cos\theta \frac{Pr}{P}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{32}^0 = 2l \operatorname{cosec}\theta, \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\sin^2 \theta \sqrt{\frac{r^2+l^2}{Q}}. \quad (4.38)$$

Böylece, torsion tensörünün karşılık gelen sıfırdan farklı bileşenleri,

$$T_{01}^0 = -T_{10}^0 = -\frac{P_r}{2P}, \quad (4.39)$$

$$T_{03}^0 = -T_{30}^0 = -l \cos \theta \frac{P_t}{P}, \quad (4.40)$$

$$T_{13}^0 = -T_{31}^0 = -l \cos \theta \left\{ -2 \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} + \frac{2r}{r^2+l^2} - \frac{P_t}{P} \right\}, \quad (4.41)$$

$$T_{23}^0 = -T_{32}^0 = 2l \sin \theta, \quad (4.42)$$

$$T_{01}^1 = -T_{10}^1 = \frac{Q_t}{2Q}, \quad (4.43)$$

$$T_{12}^2 = -T_{21}^2 = T_{13}^3 = -T_{31}^3 = \frac{r}{r^2+l^2} - \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}}, \quad (4.44)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, Torsion'ın vektör kısmının sıfırdan farklı olan bileşenleri,

$$V_0 = -\frac{Q_t}{2Q}, \quad (4.45)$$

$$V_1 = -\frac{2r}{r^2+l^2} + 2 \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} - \frac{P_r}{2P}, \quad (4.46)$$

$$V_3 = -l \cos \theta \frac{P_t}{P}. \quad (4.47)$$

iken, Torsion'ın sıfırdan farklı olan tek axial-vektör bileşeni ise şudur:

$$A^1 = -\frac{2l}{3(r^2+l^2)} \sqrt{\frac{P}{Q}}, \quad (4.48)$$

Son olarak, Torsion'ın sıfırdan farklı tensör kısım bileşenleri ise şöyle elde edilir:

$$3t_{001} = -6t_{100} = -6t_{010} = P \left[\frac{2r}{r^2+l^2} - 2\sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} \right] - P_{,r} , \quad (4.49)$$

$$t_{003} = -2t_{030} = -2t_{300} = \frac{l \cos \theta}{3Q} (PQ_{,t} - 2QP_{,t}) , \quad (4.50)$$

$$t_{011} = t_{101} = -\frac{1}{2}t_{110} = -\frac{Q_{,t}}{6Q} , \quad (4.51)$$

$$t_{022} = t_{202} = -\frac{1}{2}t_{220} = -\frac{(r^2+l^2)Q_{,t}}{12Q} , \quad (4.52)$$

$$\frac{3}{2l \cos \theta} t_{031} = \frac{3}{2l \cos \theta} t_{301} = 2P \left[\sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} - \frac{r}{r^2+l^2} \right] + P_{,r} , \quad (4.53)$$

$$t_{013} = t_{103} = t_{130} = t_{310} = -\frac{4l \cos \theta}{3} \left\{ 2P \left[\sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} - \frac{r}{r^2+l^2} \right] + P_{,r} \right\} , \quad (4.54)$$

$$t_{033} = t_{303} = t_{330} = \frac{2}{3}l^2 \cos^2 \theta P_{,t} + [(r^2 + l^2) \sin^2 \theta - 4l^2 P \cos^2 \theta] \frac{Q_{,t}}{Q} , \quad (4.55)$$

$$t_{113} = -2t_{131} = -2t_{311} = -l Q \cos \theta \frac{P_{,t}}{3P} , \quad (4.56)$$

$$t_{122} = t_{212} = -\frac{1}{2}t_{221} = -\frac{r}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{Q(r^2 + l^2)} + (r^2 + l^2) \frac{P_{,t}}{12P} , \quad (4.57)$$

$$t_{133} = t_{313} = -\frac{1}{2}t_{331} = \frac{8l^2 P \cos^2 \theta + (r^2 + l^2) \sin^2 \theta}{12P(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \times \left[2P\sqrt{r^2 + l^2} \left(\sqrt{Q(r^2 + l^2)} - r \right) + P_{,r}(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} \right] , \quad (4.58)$$

$$t_{203} = t_{023} = -t_{302} = -t_{032} = lP \sin \theta , \quad (4.59)$$

$$t_{223} = -2t_{322} = -2t_{232} = -l \cos \theta (r^2 + l^2) \frac{P_{,t}}{3P} , \quad (4.60)$$

$$t_{233} = t_{323} = -\frac{1}{2}t_{332} = -2l^2P \sin \theta \cos \theta. \quad (4.61)$$

(4.48) denkleminde göre NUT uzay-zamanı için Axial-vektör şöyle yazılabilir:

$$\vec{A}(t, r) = -\frac{2l}{3(r^2+l^2)}\sqrt{\frac{P}{Q}}\hat{e}_r. \quad (4.62)$$

Buna göre Torsion Gravite için Dirac parçacığının Spin Presesyon hareketini betimleyen ifade,

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{l\sqrt{P}}{r^2+l^2}\hat{e}_r \times \vec{S} \quad (4.63)$$

biçiminde elde edilir, karşılık gelen Hamiltonyen katkısı ise

$$(\delta H)I = \frac{l\sqrt{P}}{2(r^2+l^2)}\sigma_r \quad (4.64)$$

şeklindedir. Sonuçlar özel durumlar için üç farklı şekilde olur:

(i) Birinci seçim için özel çözümler:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{l}{r^2+l^2}\left[1 - \frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right]^{1/2}\hat{e}_r \times \vec{S}, \quad (4.65)$$

$$(\delta H)I = \frac{l}{2(r^2+l^2)}\left[1 - \frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right]^{1/2}\sigma_r, \quad (4.66)$$

(ii) İkinci seçim için özel çözümler:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{l}{r^2+l^2}\left[\alpha_1\left[\alpha_2 - \frac{2l^2}{l^2+r^2}\right] + \frac{\alpha_3}{\sqrt{l^2+r^2}}\sqrt{\left[\alpha_2 - \frac{l^2}{l^2+r^2}\right]}\right]^{1/2}\hat{e}_r \times \vec{S}, \quad (4.67)$$

$$(\delta H)I = \frac{l}{2(r^2+l^2)}\left[\alpha_1\left[\alpha_2 - \frac{2l^2}{l^2+r^2}\right] + \frac{\alpha_3}{\sqrt{l^2+r^2}}\sqrt{\left[\alpha_2 - \frac{l^2}{l^2+r^2}\right]}\right]^{1/2}\sigma_r, \quad (4.68)$$

(iii) Son durum için özel çözümler:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{l}{r^2+l^2} \left[1 - 2k - \frac{2[mr+l^2(1-2k)]}{r^2+l^2} \right]^{1/2} \hat{e}_r \times \vec{S}, \quad (4.69)$$

$$(\delta H)I = \frac{l}{2(r^2+l^2)} \left[1 - 2k - \frac{2[mr+l^2(1-2k)]}{r^2+l^2} \right]^{1/2} \sigma_r, \quad (4.70)$$

Bu kısımda elde edilen sonuçlar kullanılarak Spin bağlantı katsayılarının farklı bir kuramda (genel görelilik yerine teleparalel kuram) tekrar hesaplanmasıyla Dirac denklemi farklı bir yöntemle yeniden tartışılabilir. Böylece, genel görelilikte Dirac denkleminin çözümünde karşımıza çıkan zorluklar aşılmaya çalışılır. Bundan sonrası başlı başına ayrı bir çalışma konusu olduğundan bu kısmının hesaplamaları burada bırakılacaktır. Teleparalel nicelikler kullanıldığında Spin bağlantı katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Gamma_0 = -\frac{Q_t}{4Q}, \quad (4.71)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{r}{r^2+l^2} + \sqrt{\frac{Q}{r^2+l^2}} - \frac{P_r}{4P} + \frac{i\tilde{\gamma}_5}{2(r^2+l^2)} \sqrt{\frac{P}{Q}}, \quad (4.72)$$

$$\Gamma_2 = 0, \quad (4.73)$$

$$\Gamma_3 = -l \cos \theta \frac{P_t}{2P}. \quad (4.74)$$

4.2. Genel Hesaplamalar

Bu kesimde gerekli hesaplamalarımızı yapmak için göz önünde bulunduracağımız uzay-zaman tipi, aşağıda açık olarak verilen “(3+1) boyutlu, hem dönen hem de genişleyen” Kara Delikler ve Solucan Delikleri modellerini betimleyen çizgi elemanı ile verilir:

$$ds^2 = A^2(t,r)dt^2 - B^2(t,r)dr^2 - F^2(t,r,\theta)d\theta^2 - P^2(t,r,\theta)d\varphi^2$$

$$+2\xi(t,r)dtd\varphi. \quad (4.75)$$

Bu model için metrik tensörü $g_{\mu\nu}$ ve metrik tensörünün tersi $g^{\mu\nu}$ 'yü matris biçiminde yazmak istersek

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^2(t,r) & 0 & 0 & \xi(t,r) \\ 0 & -B^2(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F^2(t,r,\theta) & 0 \\ \xi(t,r) & 0 & 0 & -P^2(t,r,\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{P^2(t,r)}{A^2(t,r)P^2(t,r,\theta)+\xi^2(t,r)} & 0 & 0 & \frac{\xi(t,r)}{A^2(t,r)P^2(t,r,\theta)+\xi^2(t,r)} \\ 0 & -\frac{1}{B^2(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{F^2(t,r,\theta)} & 0 \\ \frac{\xi(t,r)}{A^2(t,r)P^2(t,r,\theta)+\xi^2(t,r)} & 0 & 0 & \frac{A^2(t,r)}{A^2(t,r)P^2(t,r,\theta)+\xi^2(t,r)} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

ifadelerini elde ederiz. Tez konusuyla ilgili hesaplamalar yapılırken ihtiyaç duyulacak diğer bir ifade olan $\sqrt{-g}$ (buradaki g terimi metrik tensörünün determinantını betimler) aşağıdaki biçimde elde edilmektedir:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{B^2 F^2 (A^2 P^2 + \xi^2)}. \quad (4.78)$$

Robertson (1932) tarafından ortaya atılan küresel simetrik tetrad formu için kartezyen koordinatlardaki en genel tetrad ifadesi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$h_{(0)}^0 = M(t,r), \quad h_{(i)}^0 = B(t,r)x^{(i)}, \quad h_0^{(i)} = B(t,r)x^{(i)}, \quad (4.79a)$$

$$h_{(i)}^\mu = K(t,r)\delta_{(i)}^\mu + S(t,r)x^{(i)}x^\mu + \epsilon_{(i)\mu\nu}G(t,r)x^\nu. \quad (4.79b)$$

Genel koordinat dönüşümleri kullanıldığında tetradlar için

$$h_{i\mu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial X^\mu} h_{i\nu} \quad (4.80)$$

ifadesi yazılır. Buradaki $\{X^\nu\}$ ve $\{X^\mu\}$ yöndeş Schwarzschild koordinatları olarak bilinmektedir. Küresel, durağan ve yöndeş koordinat sisteminde X^1 , X^2 ve X^3

$$X^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad X^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad X^3 = r \cos \theta \quad (4.81)$$

denklemleri ile tanımlanır. Denklem (4.2)'de verdiğimiz metrik tensör ifadesi göz önünde bulundurulduğunda, ele aldığımız uzay-zaman modeli için tetrad bileşenleri şu şekilde elde edilecektir:

$$h^i{}_{\mu}(t, r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \psi(t, r) \\ 0 & B \sin \theta \cos \varphi & F \cos \theta \cos \varphi & -\Lambda(t, r, \theta) \sin \varphi \\ 0 & B \sin \theta \sin \varphi & F \cos \theta \sin \varphi & \Lambda(t, r, \theta) \cos \varphi \\ 0 & B \cos \theta & -F \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Buradaki $\psi(t, r)$ ve $\Lambda(t, r, \theta)$ fonksiyonlarının açık biçimleri

$$\psi(t, r) = \frac{\xi}{A}, \quad \Lambda^2(t, r, \theta) = \frac{\xi^2 + A^2 P^2}{A^2} \quad (4.83)$$

şekindedir. $h^i{}_{\mu}$ ile tanımlanan tetrad bileşenlerini verdiğimiz matrisin tersi

$$h_i{}^{\mu}(t, r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi \sin \varphi}{A\Lambda} & \frac{\cos \varphi \sin \theta}{B} & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{F} & -\frac{\sin \varphi}{\Lambda} \\ -\frac{\psi \cos \varphi}{A\Lambda} & \frac{\sin \theta \sin \varphi}{B} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{F} & \frac{\cos \varphi}{\Lambda} \\ 0 & \frac{\cos \theta}{B} & -\frac{\sin \theta}{F} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $h = ABF\Lambda$ biçiminde tanımlanmıştır. (4.8) ve (4.10) denklemleri kullanıldığında $T^i{}_{\mu\nu}$ tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri için aşağıdaki sonuçlar bulunacaktır:

$$T^{(0)}_{01} = -T^{(0)}_{10} = A_{,r} \quad (4.85a)$$

$$T^{(0)}_{03} = -T^{(0)}_{30} = -\psi_{,t} \quad (4.85b)$$

$$T^{(0)}_{13} = -T^{(0)}_{31} = -\psi_{,t} \quad (4.85c)$$

$$T^{(1)}_{01} = -T^{(1)}_{01} = -B_{,t} \cos \varphi \sin \theta \quad (4.85d)$$

$$T^{(1)}_{02} = -T^{(1)}_{20} = -F_{,t} \cos \theta \cos \varphi \quad (4.85e)$$

$$T^{(1)}_{03} = -T^{(1)}_{30} = \Lambda_{,t} \sin \varphi \quad (4.85f)$$

$$T^{(1)}_{12} = -T^{(1)}_{21} = (B - F_{,r}) \cos \theta \cos \varphi \quad (4.85g)$$

$$T^{(1)}_{13} = -T^{(1)}_{31} = (\Lambda_{,r} - B \sin \theta) \sin \varphi \quad (4.85h)$$

$$T^{(1)}_{23} = -T^{(1)}_{32} = (\Lambda_{,\theta} - F \cos \theta) \sin \varphi \quad (4.85i)$$

$$T^{(2)}_{01} = -T^{(2)}_{10} = -B_{,t} \sin \theta \sin \varphi \quad (4.85j)$$

$$T^{(2)}_{02} = -T^{(2)}_{20} = -F_{,t} \cos \theta \sin \varphi \quad (4.85k)$$

$$T^{(2)}_{03} = -T^{(2)}_{30} = -\Lambda_{,t} \cos \varphi \quad (4.85m)$$

$$T^{(2)}_{12} = -T^{(2)}_{21} = (B - F_{,r}) \cos \theta \sin \varphi \quad (4.85n)$$

$$T^{(2)}_{13} = -T^{(2)}_{31} = (B \sin \theta - \Lambda_{,r}) \cos \varphi \quad (4.85o)$$

$$T^{(2)}_{23} = -T^{(2)}_{32} = (F \cos \theta - \Lambda_{,\theta}) \cos \varphi \quad (4.85p)$$

$$T^{(3)}_{01} = -T^{(3)}_{10} = -B_{,t} \cos \theta \quad (4.85q)$$

$$T^{(3)}_{02} = -T^{(3)}_{20} = -F_{,t} \sin \theta \quad (4.85r)$$

$$T^{(3)}_{12} = -T^{(3)}_{21} = (F_{,r} - B) \sin \theta. \quad (4.85s)$$

Yukarıda elde verilmiş olan sonuçlarda yer alan “,t”, “,r” ve “,θ” ifadeleri sırasıyla “t”, “r” ve “θ” değişkenlerine göre türev alınması gerektiğini göstermektedir. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlarda bazı indisler parantez içerisinde yazılmıştır. İndislerin alacağı rakam değerleri açık halde yerine yazıldığında Yunan indisleri ile Latin indislerinin birbirine karışması durumu söz konusu olmaktadır. Bu ifadeler fiziksel olarak farklı anlamlar taşıyan indisler olup bu karışıklığı önlemek adına yukarıdaki gösterim tercih edilmiştir.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlar kullanıldığında $T^{\alpha}_{\mu\nu}$ tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıda verilen biçimlerde elde edilmektedir:

$$T^0_{01} = -T^0_{10} = \frac{A_{,r}}{A}, \quad (4.86a)$$

$$T^0_{03} = -T^0_{30} = \frac{\Lambda\psi_{,t} - \psi\Lambda_{,t}}{A\Lambda}, \quad (4.86b)$$

$$T^0_{13} = -T^0_{31} = -\frac{B\Lambda \sin \theta + \Lambda\psi_{,r} - \psi\Lambda_{,r}}{A\Lambda}, \quad (4.86c)$$

$$T^0_{23} = -T^0_{32} = \frac{\psi(\Lambda_{,\theta} - F \cos \theta)}{A\Lambda}, \quad (4.86d)$$

$$T^1_{01} = -T^1_{10} = -\frac{B_{,t}}{B}, \quad (4.86e)$$

$$T^2_{02} = -T^2_{20} = -\frac{F_{,t}}{F}, \quad (4.86f)$$

$$T^2_{12} = -T^2_{21} = \frac{B-F_r}{F}, \quad (4.86g)$$

$$T^3_{03} = -T^3_{30} = -\frac{\Lambda_t}{\Lambda}, \quad (4.86h)$$

$$T^3_{13} = -T^3_{31} = \frac{B \sin \theta - \Lambda_r}{\Lambda}, \quad (4.86i)$$

$$T^3_{23} = \frac{F \cos \theta - \Lambda_\theta}{\Lambda}. \quad (4.86j)$$

Sıradaki aşamada ise sonraki işlemlerde ihtiyaç duyacağımızdan T^a_{bc} tensörünün bileşenlerini hesaplayacağız. Buna göre sıfırdan farklı olan bileşenler şunlardır:

$$T^{(0)}_{(0)(1)} = -T^{(0)}_{(1)(0)} = \frac{\Lambda_{A,r} \sin \theta \cos \varphi + \psi_{,t} \sin \varphi}{AB\Lambda}, \quad (4.87a)$$

$$T^{(0)}_{(0)(2)} = -T^{(0)}_{(2)(0)} = \frac{\Lambda_{A,r} \sin \theta \sin \varphi - \psi_{,t} \cos \varphi}{AB\Lambda}, \quad (4.87b)$$

$$T^{(0)}_{(0)(3)} = -T^{(0)}_{(3)(0)} = \frac{A_r \cos \theta}{AB}, \quad (4.87c)$$

$$T^{(0)}_{(1)(2)} = -T^{(0)}_{(2)(1)} = \frac{\sin \theta (\psi_{A,r} - A\psi_r)}{AB\Lambda}, \quad (4.87d)$$

$$T^{(0)}_{(1)(3)} = -T^{(0)}_{(3)(1)} = \frac{\cos \theta \sin \varphi (\psi_{A,r} - A\psi_r)}{AB\Lambda}, \quad (4.87e)$$

$$T^{(0)}_{(2)(3)} = -T^{(0)}_{(3)(2)} = -\frac{\cos \theta \cos \varphi (\psi_{A,r} - A\psi_r)}{AB\Lambda}, \quad (4.87f)$$

$$T^{(1)}_{(0)(1)} = -T^{(1)}_{(1)(0)} = -\frac{F\Lambda_{B,t} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + B\Lambda_{F,t} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + B\Lambda_{,t} \sin^2 \varphi}{ABF\Lambda}, \quad (4.87g)$$

$$T^{(1)}_{(0)(2)} = -T^{(1)}_{(2)(0)} = T^{(2)}_{(0)(1)} = -T^{(2)}_{(1)(0)} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi (F\Lambda_{B,t} \sin^2 \theta + B\Lambda_{F,t} \cos^2 \theta - B\Lambda_{,t})}{ABF\Lambda}, \quad (4.87h)$$

$$\begin{aligned}
 T_{(0)(3)}^{(1)} &= -T_{(3)(0)}^{(1)} = T_{(0)(1)}^{(3)} \\
 &= -T_{(1)(0)}^{(3)} = -\frac{\cos \theta \cos \varphi \sin \theta (FB_t - BF_t)}{ABF}, \quad (4.87i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(1)(2)}^{(1)} &= -T_{(2)(1)}^{(1)} \\
 &= -\frac{A \sin \varphi (B[F - \Lambda_\theta \cos \theta] - F \Lambda_r \sin \theta) + \psi \cos \varphi (FB_t \sin^2 \theta + BF_t \cos^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \quad (4.87j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(1)(3)}^{(1)} &= -T_{(3)(1)}^{(1)} \\
 &= \frac{1}{BF\Lambda} \left(-B[\Lambda \cos \theta \cos^2 \varphi + \Lambda_\theta \sin \theta \sin^2 \varphi] \right. \\
 &\quad \left. + \cos \theta [\Lambda F_r \cos^2 \varphi + F \Lambda_r \sin^2 \varphi] \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4ABF\Lambda} \psi \sin 2\theta \sin 2\varphi (BF_t - FB_t), \quad (4.87k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(2)(3)}^{(1)} &= -T_{(3)(2)}^{(1)} = \frac{\cos \varphi}{ABF\Lambda} \left(-A \sin \varphi [B\{\Lambda \cos \theta - \Lambda_\theta \sin \theta\} + \cos \theta \{F\Lambda_r - \right. \\
 &\quad \left. \Lambda F_r\}] \right) + \frac{1}{2ABF\Lambda} \psi \sin 2\theta \cos \varphi [FB_t - BF_t] \quad (4.87m)
 \end{aligned}$$

$$T_{(0)(2)}^{(2)} = -T_{(2)(0)}^{(2)} = -\frac{F\Lambda B_t \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B\Lambda F_t \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + BF\Lambda_t \cos^2 \varphi}{ABF\Lambda}, \quad (4.87n)$$

$$\begin{aligned}
 T_{(0)(3)}^{(2)} &= -T_{(3)(0)}^{(2)} = T_{(0)(2)}^{(3)} = -T_{(2)(0)}^{(3)} \\
 &= -\frac{\cos \theta \sin \varphi \sin \theta (FB_t - BF_t)}{ABF}, \quad (4.87o)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(1)(2)}^{(2)} &= -T_{(2)(1)}^{(2)} \\
 &= \frac{A \cos \varphi (B[F - \Lambda_\theta \cos \theta] - F \Lambda_r \sin \theta) + \psi \sin \varphi (FB_t \sin^2 \theta + BF_t \cos^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \quad (4.87p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(1)(3)}^{(2)} &= -T_{(3)(1)}^{(2)} = \frac{\sin \varphi}{ABF\Lambda} \left(-A \cos \varphi [B\{\Lambda \cos \theta - \Lambda_\theta \sin \theta\} + \right. \\
 &\quad \left. \cos \theta \{F\Lambda_r - \Lambda F_r\}] \right) + \frac{1}{2ABF\Lambda} \psi \sin 2\theta \sin \varphi [BF_t - FB_t], \quad (4.87q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(2)(3)}^{(2)} &= -T_{(3)(2)}^{(2)} \\
 &= \frac{1}{BF\Lambda} \left(-B[\Lambda \cos \theta \sin^2 \varphi + \Lambda_{,\theta} \sin \theta \cos^2 \varphi] \right. \\
 &\quad \left. + \cos \theta [\Lambda F_{,r} \sin^2 \varphi + F \Lambda_{,r} \cos^2 \varphi] \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4ABF\Lambda} \psi \sin 2\theta \sin 2\varphi (FB_{,t} - BF_{,t}), \tag{4.87r}
 \end{aligned}$$

$$T_{(0)(3)}^{(3)} = -T_{(3)(0)}^{(3)} = -\frac{FB_{,t} \cos^2 \theta + BF_{,t} \sin^2 \theta}{ABF}, \tag{4.87s}$$

$$T_{(1)(2)}^{(3)} = -T_{(2)(1)}^{(3)} = \frac{\psi \sin \theta \cos \theta (BF_{,t} - FB_{,t})}{ABF\Lambda}, \tag{4.87t}$$

$$T_{(1)(3)}^{(3)} = -T_{(3)(1)}^{(3)} = \frac{A\Lambda \sin \theta \cos \varphi (B - F_{,r}) - \psi \sin \varphi (FB_{,t} \cos^2 \theta + BF_{,t} \sin^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \tag{4.87u}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(2)(3)}^{(3)} &= -T_{(3)(2)}^{(3)} \\
 &= \frac{A\Lambda \sin \theta \sin \varphi (B - F_{,r}) + \psi \cos \varphi (FB_{,t} \cos^2 \theta + BF_{,t} \sin^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \tag{4.87v}
 \end{aligned}$$

Tek indise sahip olan T^a ifadesinin sıfırdan farklı olan dört bileşeni şöyle elde edilmektedir:

$$T^{(0)} = \frac{F\Lambda B_{,t} + B\Lambda F_{,t} + BF\Lambda_{,t}}{ABF\Lambda}, \tag{4.88a}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(1)} &= \frac{1}{AB\Lambda} \left(\Lambda A_{,r} \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi [\psi B_{,t} + B\psi_{,t}] \right) \\
 &\quad - \frac{\cos \varphi}{BF\Lambda} \left(B[F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_{,\theta} \cos \theta] - \sin \theta [\Lambda F_{,r} + F\Lambda_{,r}] \right) \\
 &\quad - B\psi F_{,t} \sin \varphi, \tag{4.88b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(2)} &= \frac{1}{AB\Lambda} \left(\Lambda A_{,r} \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi [\psi B_{,t} + B\psi_{,t}] \right) \\
 &\quad - \frac{\sin \varphi}{BF\Lambda} \left(B[F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_{,\theta} \cos \theta] - \sin \theta [\Lambda F_{,r} + F\Lambda_{,r}] \right) \\
 &\quad - B\psi F_{,t} \cos \varphi, \tag{4.88c}
 \end{aligned}$$

$$T^{(3)} = \frac{F\Lambda A_t \cos \theta + A(\cos \theta [\Lambda F_r + F\Lambda_r] - B[\Lambda \cos \theta + \Lambda_\theta \sin \theta])}{ABF\Lambda} \quad (4.88d)$$

Torsion tensörü ile ilgili yapacağımız son hesaplama tüm Latin indislerin yukarıda olduğu durum olan T^{abc} ifadesinin bileşenlerinin elde edilmesidir. Buna göre T^{abc} 'nin sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$T^{(0)(0)(1)} = -T^{(0)(1)(0)} = -\frac{\Lambda A_r \sin \theta \cos \varphi - B\psi_t \sin \varphi}{AB\Lambda}, \quad (4.89a)$$

$$T^{(0)(0)(2)} = -T^{(0)(2)(0)} = -\frac{\Lambda A_r \sin \theta \sin \varphi - B\psi_t \cos \varphi}{AB\Lambda}, \quad (4.89b)$$

$$T^{(0)(0)(3)} = -T^{(0)(3)(0)} = -\frac{A_r}{AB} \cos \theta, \quad (4.89c)$$

$$T^{(0)(1)(2)} = -T^{(0)(2)(1)} = \frac{\psi A_r - A\psi_r}{AB\Lambda} \sin \theta, \quad (4.89d)$$

$$T^{(0)(1)(3)} = -T^{(0)(3)(1)} = \frac{\psi A_r - A\psi_r}{AB\Lambda} \sin \varphi \cos \theta, \quad (4.89e)$$

$$T^{(0)(2)(3)} = -T^{(0)(3)(2)} = -\frac{\psi A_r - A\psi_r}{AB\Lambda} \cos \theta \cos \varphi, \quad (4.89f)$$

$$T^{(1)(0)(1)} = -T^{(1)(1)(0)} = \frac{F\Lambda B_t \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + B\Lambda F_t \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + BF\Lambda_t \sin^2 \varphi}{ABF\Lambda}, \quad (4.89g)$$

$$T^{(1)(0)(2)} = -T^{(1)(2)(0)} = T^{(2)(0)(1)} = -T^{(2)(1)(0)} = \frac{F\Lambda B_t \sin^2 \theta + B\Lambda F_t \cos^2 \theta - BF\Lambda_t}{2ABF\Lambda} \sin 2\varphi, \quad (4.89h)$$

$$T^{(1)(0)(3)} = -T^{(1)(3)(0)} = \frac{FB_t - BF_t}{2ABF} \sin 2\theta \cos \varphi, \quad (4.89i)$$

$$T^{(1)(1)(2)} = -T^{(1)(2)(1)} = -\frac{A \sin \varphi (B[F - \Lambda_\theta \cos \theta] - F\Lambda_r \sin \theta) + \psi \cos \varphi (FB_t \sin^2 \theta + BF_t \cos^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \quad (4.89j)$$

$$\begin{aligned}
 T^{(1)(1)(3)} = -T^{(1)(3)(1)} &= -\frac{1}{F\Lambda} [\Lambda \cos \theta \cos^2 \varphi + \Lambda_{,\theta} \sin \theta \sin^2 \varphi] \\
 &+ \frac{1}{ABF\Lambda} (\cos \theta [\Lambda F_{,r} \cos^2 \varphi + F \Lambda_{,r} \sin^2 \varphi] \\
 &+ \frac{\psi}{4} \sin 2\theta \sin 2\varphi [BF_{,t} - FB_{,t}]), \quad (4.89k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(1)(2)(3)} = -T^{(1)(3)(2)} &= \\
 &\frac{\cos \varphi (-A \sin \varphi [B\{\Lambda \cos \theta - \Lambda_{,\theta} \sin \theta\} + \cos \theta \{F\Lambda_{,r} - \Lambda F_{,r}\}] - \frac{\psi}{2} \sin 2\theta \cos \varphi [BF_{,t} - FB_{,t}])}{ABF\Lambda}, \quad (4.89m)
 \end{aligned}$$

$$T^{(2)(0)(2)} = -T^{(2)(2)(0)} = \frac{F\Lambda B_{,t} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B\Lambda F_{,t} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + BF\Lambda_{,t} \cos^2 \varphi}{ABF\Lambda}, \quad (4.89n)$$

$$T^{(2)(0)(3)} = -T^{(2)(3)(0)} = \frac{FB_{,t} - BF_{,t}}{2ABF} \sin 2\theta \sin \varphi, \quad (4.89o)$$

$$\begin{aligned}
 T^{(2)(1)(2)} = -T^{(2)(2)(1)} &= \\
 &= \frac{\cos \varphi}{BF\Lambda} (B[F - \Lambda_{,\theta} \cos \theta] - F\Lambda_{,r} \sin \theta) \\
 &- \frac{\psi}{ABF\Lambda} \sin \varphi (FB_{,t} \sin^2 \theta + BF_{,t} \cos^2 \theta), \quad (4.89p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(2)(1)(3)} = -T^{(2)(3)(1)} &= \\
 &\frac{\sin \varphi (-A \cos \varphi [B\{\Lambda \cos \theta - \Lambda_{,\theta} \sin \theta\} + \cos \theta \{F\Lambda_{,r} - \Lambda F_{,r}\}] + \frac{\psi}{2} \sin 2\theta \sin \varphi [BF_{,t} - FB_{,t}])}{ABF\Lambda}, \quad (4.89q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(2)(2)(3)} = -T^{(2)(3)(2)} &= -\frac{\psi}{4ABF\Lambda} \sin 2\theta \sin 2\varphi [BF_{,t} - FB_{,t}] \\
 &+ \frac{1}{BF\Lambda} (-B[\Lambda \cos \theta \sin^2 \varphi + \Lambda_{,\theta} \sin \theta \cos^2 \varphi] + \cos \theta [\Lambda F_{,r} \sin^2 \varphi + \\
 &F\Lambda_{,r} \cos^2 \varphi]), \quad (4.89r)
 \end{aligned}$$

$$T^{(3)(0)(1)} = -T^{(3)(1)(0)} = -\frac{BF_{,t} - FB_{,t}}{2ABF} \sin 2\theta \cos \varphi, \quad (4.89s)$$

$$T^{(3)(0)(2)} = -T^{(3)(2)(0)} = -\frac{BF_{,t} - FB_{,t}}{2ABF} \sin 2\theta \sin \varphi, \quad (4.89t)$$

$$T^{(3)(0)(3)} = -T^{(3)(3)(0)} = \frac{FB_t \cos^2 \theta + BF_t \sin^2 \theta}{ABF}, \quad (4.89u)$$

$$T^{(3)(1)(2)} = -T^{(3)(2)(1)} = \frac{BF_t - FB_t}{2ABF\Lambda} \psi \sin 2\theta, \quad (4.89v)$$

$$T^{(3)(1)(3)} = -T^{(3)(3)(1)} = \frac{A\Lambda \sin \theta \cos \theta (B - F_r) - \psi \sin \varphi (FB_t \cos^2 \theta + BF_t \sin^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \quad (4.89y)$$

$$T^{(3)(2)(3)} = -T^{(3)(3)(2)} = \frac{A\Lambda \sin \theta \sin \varphi (B - F_r) + \psi \cos \varphi (FB_t \cos^2 \theta + BF_t \sin^2 \theta)}{ABF\Lambda}, \quad (4.89z)$$

Bu sonuçları kullanarak sağdaki iki indisine göre anti-simetrik olan Σ^{abc} 'nin sıfırdan farklı olan bileşenleri hesaplandığında şu sonuçlara ulaşılmaktadır:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)(0)(1)} = -\Sigma^{(0)(1)(0)} = \\ \frac{-A \cos \varphi (B[F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_\theta \cos \theta] - \sin \theta [\Lambda F_r + F\Lambda_r]) + \psi \sin \varphi [FB_t + BF_t]}{2ABF\Lambda}, \end{aligned} \quad (4.90a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)(0)(2)} = -\Sigma^{(0)(2)(0)} = \\ \frac{-A \sin \varphi (B[F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_\theta \cos \theta] - \sin \theta [\Lambda F_r + F\Lambda_r]) + \psi \cos \varphi [FB_t + BF_t]}{2ABF\Lambda}, \end{aligned} \quad (4.90b)$$

$$\Sigma^{(0)(0)(3)} = -\Sigma^{(0)(3)(0)} = -\frac{B(\Lambda \cos \theta + \Lambda_\theta \sin \theta) - \cos \theta (\Lambda F_r + F\Lambda_r)}{2BF\Lambda}, \quad (4.90c)$$

$$\Sigma^{(0)(1)(2)} = -\Sigma^{(0)(2)(1)} = \frac{\sin \theta (\psi A_r - A\psi_r)}{4AB\Lambda}, \quad (4.90d)$$

$$\Sigma^{(0)(1)(3)} = -\Sigma^{(0)(3)(1)} = \frac{\cos \theta \sin \varphi (\psi A_r - A\psi_r)}{4AB\Lambda}, \quad (4.90e)$$

$$\Sigma^{(0)(2)(3)} = -\Sigma^{(0)(3)(2)} = -\frac{\cos \theta \cos \varphi (\psi A_r - A\psi_r)}{4AB\Lambda}, \quad (4.90f)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)(0)(1)} = -\Sigma^{(1)(1)(0)} = \\ \frac{B\Lambda F_t (1 + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) + F\Lambda B_t [1 + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] + BF\Lambda_t [1 + \sin^2 \varphi]}{2ABF\Lambda}, \end{aligned} \quad (4.90g)$$

$$\Sigma^{(1)(0)(2)} = -\Sigma^{(1)(2)(0)} = \frac{B\Lambda F_t \cos^2 \theta \sin 2\varphi + F \sin \theta (\psi A_{,r} - A\psi_{,r}) + F \sin 2\varphi (\Lambda B_t \sin^2 \theta - B\Lambda_t)}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90h)$$

$$\Sigma^{(1)(0)(3)} = -\Sigma^{(1)(3)(0)} = \frac{F \cos \theta \sin \varphi [\psi A_{,r} - A\psi_{,r}] + \cos \varphi \sin 2\theta (F\Lambda B_t - B\Lambda F_t)}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90i)$$

$$\Sigma^{(1)(1)(2)} = -\Sigma^{(1)(2)(1)} = \frac{[\Lambda\Lambda(B - F_{,r}) - F\Lambda A_{,r}] \sin \theta \sin \varphi + F \cos \varphi (\psi B_t \cos^2 \theta + B\psi_{,t}) + B\psi F_t \cos \varphi \sin^2 \theta}{2ABF\Lambda} \quad (4.90j)$$

$$\Sigma^{(1)(1)(3)} = -\Sigma^{(1)(3)(1)} = \frac{1}{2BF} \cos \theta \sin^2 \varphi (B - F_{,r}) + \frac{1}{2BF\Lambda} \cos^2 \varphi (B\Lambda_{,\theta} \sin \theta - F\Lambda_{,r} \cos \theta) - \frac{1}{8ABF\Lambda} \sin \theta \sin 2\varphi (F\psi B_t - B\psi F_t) - \frac{1}{2AB} A_{,r} \cos \theta, \quad (4.90k)$$

$$\Sigma^{(1)(2)(3)} = -\Sigma^{(1)(3)(2)} = \frac{-A \sin 2\varphi (B[\Lambda \cos \theta - \Lambda_{,\theta} \sin \theta] + \cos \theta [F\Lambda_{,r} - \Lambda F_{,r}]) + \psi \cos^2 \varphi \sin 2\theta (FB_t - BF_t)}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90m)$$

$$\Sigma^{(2)(0)(1)} = -\Sigma^{(2)(1)(0)} = \frac{(B\Lambda F_t \cos^2 \theta + F\Lambda B_t \sin^2 \theta - B\Lambda_t) \sin 2\varphi + F \sin \theta [A\psi_{,r} - \psi A_{,r}]}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90n)$$

$$\Sigma^{(2)(0)(2)} = -\Sigma^{(2)(2)(0)} = \frac{B\Lambda F_t (1 + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) + F\Lambda B_t (1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) + B\Lambda_t (1 + \cos^2 \varphi)}{2ABF\Lambda}, \quad (4.90o)$$

$$\Sigma^{(2)(0)(3)} = -\Sigma^{(2)(3)(0)} = \frac{F \cos \theta \cos \varphi [A\psi_{,r} - \psi A_{,r}] + \sin \varphi \sin 2\theta (F\Lambda B_t - B\Lambda F_t)}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90p)$$

$$\Sigma^{(2)(1)(2)} = -\Sigma^{(2)(2)(1)} = \frac{(FA_{,r} + AF_{,r})\Lambda \sin \theta \cos \varphi + \psi \sin \varphi (BF_t \sin^2 \theta + FB_t \cos^2 \theta) + BF\psi_{,t} \sin \varphi - AB\Lambda \sin \theta \cos \varphi}{4ABF\Lambda}, \quad (4.90q)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)(1)(3)} &= -\Sigma^{(2)(3)(1)} = \\ &= -\frac{A \sin 2\varphi (B[\Lambda \cos \theta - \Lambda_{,\theta} \sin \theta] + \cos \theta [F\Lambda_{,r} - \Lambda F_{,r}]) + \psi \sin^2 \varphi \sin 2\theta (FB_{,t} - BF_{,t})}{4ABF\Lambda},\end{aligned}\quad (4.90r)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)(2)(3)} &= -\Sigma^{(2)(3)(2)} = \frac{1}{2BF\Lambda} (\Lambda [B - F_{,r}] \cos \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi [B\Lambda_{,\theta} \sin \theta - \\ &F\Lambda_{,r} \cos \theta]) - \frac{\cos \theta}{2ABF\Lambda} (F\Lambda_{,r} + \frac{1}{2}\psi \sin 2\varphi \sin \theta [BF_{,t} - FB_{,t}]),\end{aligned}\quad (4.90s)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(3)(0)(1)} &= -\Sigma^{(3)(1)(0)} \\ &= \frac{F \sin \varphi \cos \theta [A\psi_{,r} - \psi A_{,r}] + \Lambda \sin 2\theta \cos \varphi [FB_{,t} - BF_{,t}]}{4ABF\Lambda},\end{aligned}\quad (4.90t)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(3)(0)(2)} &= -\Sigma^{(3)(2)(0)} \\ &= \frac{F \cos \varphi \cos \theta [\psi A_{,r} - A\psi_{,r}] + \Lambda \sin 2\theta \sin \varphi [FB_{,t} - BF_{,t}]}{4ABF\Lambda},\end{aligned}\quad (4.90u)$$

$$\Sigma^{(3)(0)(3)} = -\Sigma^{(3)(3)(0)} = \frac{2B\Lambda F_{,t} [1 + \sin^2 \theta] + F\Lambda B_{,t} [3 + \cos 2\theta] + 2BF\Lambda_{,t}}{4ABF\Lambda},\quad (4.90v)$$

$$\Sigma^{(3)(1)(2)} = -\Sigma^{(3)(2)(1)} = \frac{\psi \sin 2\theta [BF_{,t} - FB_{,t}]}{4ABF\Lambda},\quad (4.90x)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(3)(1)(3)} &= -\Sigma^{(3)(3)(1)} = \\ &= \frac{F \sin \theta \cos \varphi [\Lambda A_{,r} + A\Lambda_{,r}] + F \sin \varphi [B\psi_{,t} + \psi B_{,t} \sin^2 \theta] - AB \cos \varphi [F - \Lambda_{,\theta} \cos \theta]}{2ABF\Lambda},\end{aligned}\quad (4.90y)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(3)(2)(3)} &= -\Sigma^{(3)(3)(2)} = \frac{[\Lambda A_{,r} + A\Lambda_{,r}]}{2AB\Lambda} \sin \theta \sin \varphi - \frac{\psi}{2ABF\Lambda} \cos \varphi [BF_{,t} \cos^2 \theta + \\ &FB_{,t} \sin^2 \theta] - \frac{\psi_{,t}}{2A\Lambda} \cos \varphi - \frac{1}{2F\Lambda} \sin \varphi [F - \Lambda_{,\theta} \cos \theta].\end{aligned}\quad (4.90z)$$

Elde edilen sonuçlar ışığında ele aldığımız uzay-zaman modeline eşlik eden *Enerji-Momentum* (ya da 4'lü-momentum) Yoğunluğu için sıfırdan farklı olan bileşenler aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$\begin{aligned}\Pi^{(0)(1)} &= 2\kappa (-A \cos \varphi [B\{F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_{,\theta} \cos \theta\} - \sin \theta \{\Lambda F_{,r} + F\Lambda_{,r}\}] + \\ &\psi \sin \varphi [FB_{,t} + BF_{,t}]),\end{aligned}\quad (4.91a)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)(2)} = & -2\kappa(A \sin \varphi [B\{F + \Lambda \sin \theta - \Lambda_{,\theta} \cos \theta\} - \sin \theta \{\Lambda F_{,r} + F \Lambda_{,r}\}] + \\ & \psi \cos \varphi [FB_{,t} + BF_{,t}]), \end{aligned} \quad (4.91b)$$

$$\Pi^{(0)(3)} = 2\kappa A(\Lambda \cos \theta [F_{,r} - B] + F \Lambda_{,r} \cos \theta - B \Lambda_{,\theta} \sin \theta), \quad (4.91c)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)(1)} = & 2\kappa(B \Lambda F_{,t} [1 + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi] + F \Lambda B_{,t} [1 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] + \\ & B F \Lambda_{,t} [1 + \sin^2 \varphi]), \end{aligned} \quad (4.91d)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)(2)} = & \kappa(B \Lambda F_{,t} \cos^2 \theta \sin 2\varphi + F \sin \theta \{\psi A_{,r} - A \psi_{,r}\} \\ & + F \sin 2\varphi \{\Lambda B_{,t} \sin^2 \theta - B \Lambda_{,t}\}), \end{aligned} \quad (4.91e)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)(3)} = & \kappa F \sin \varphi \cos \theta \{\psi A_{,r} - A \psi_{,r}\} \\ & + \kappa \Lambda \sin 2\theta \cos \varphi \{FB_{,t} - BF_{,t}\}, \end{aligned} \quad (4.91f)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)(1)} = & \kappa(B \Lambda F_{,t} \cos^2 \theta \sin 2\varphi \\ & + F \sin \theta \{\psi A_{,r} - A \psi_{,r}\} + F \sin 2\varphi \{\Lambda B_{,t} \sin^2 \theta - B \Lambda_{,t}\}), \end{aligned} \quad (4.91g)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)(2)} = & 2\kappa(B \Lambda F_{,t} [1 + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] + F \Lambda B_{,t} [1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] + \\ & B F \Lambda_{,t} [1 + \cos^2 \varphi]), \end{aligned} \quad (4.91h)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)(3)} = & \kappa F \cos \varphi \cos \theta \{A \psi_{,r} - \psi A_{,r}\} \\ & + \kappa \Lambda \sin 2\theta \sin \varphi \{FB_{,t} - BF_{,t}\}, \end{aligned} \quad (4.91i)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)(1)} = & \kappa F \sin \varphi \cos \theta \{A \psi_{,r} - \psi A_{,r}\} \\ & + \kappa \Lambda \sin 2\theta \cos \varphi \{FB_{,t} - BF_{,t}\}, \end{aligned} \quad (4.91j)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)(2)} = & \kappa F \cos \varphi \cos \theta \{\psi A_{,r} - A \psi_{,r}\} \\ & + \kappa \Lambda \sin 2\theta \sin \varphi \{FB_{,t} - BF_{,t}\}, \end{aligned} \quad (4.91k)$$

$$\Pi^{(3)(3)} = \kappa(2B \Lambda F_{,t} \{1 + \sin^2 \theta\} + F \Lambda B_{,t} \{3 + \cos 2\theta\} + 2B F \Lambda_{,t}), \quad (4.91m)$$

Göz önünde bulundurulan uzay-zaman modeli için,

- kütle-çekiminden ileri gelen: enerji-momentum, toplam açısal momentum, enerji-momentum akısı, basınç,
- maddeden ileri gelen: enerji-momentum

gibi fiziksel niceliklerin doğrudan yazılabilmesini sağlayan tüm gerekli hesaplamalar tamamlanmıştır. Ele aldığımız genel uzay-zaman modeli özel durumlara indirildiğinde onlarca özel kara delik ve solucan deliği modelini vermektedir. Bu sebeple aslında bir çok model için hesabı doğrudan yapmış olduk. Tezin özgün tarafı ve literatüre katkısı bu noktadadır. Literatürde bazı özel modeller için *Genel Görelilik Kuramı*'nda enerji hesabı yapılmıştır. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların hem genel bir model için olması hem de Teleparalel Kütle-çekim kuramı olarak bilinen yeni ve alternatif bir kuramda *Hamilton Yaklaşımı* kullanılarak elde edilmiş olması literatürdeki en önemli problemlerden biri olan evrenin *Enerji Hesabı Problemi*'ni genişletmekte, çözümüne yönelik çalışmalara yeni bir bakış açısı kazandırmaktadır.

Elde edilen sonuçların önemini göstermek ve problemi örneklendirmek için bu aşamadan sonra özel durumları tartışırken uzay-zamana eşlik eden enerji üzerine yoğunlaşacağız. Buna göre kullandığımız genel uzay-zaman modeline eşlik eden teleparalel kütle-çekim kuramında Hamilton yaklaşımı kullanılarak elde edilen enerji yoğunluğu için,

$$\partial_{\mu}\Pi^{(0)\mu} = \partial_1\Pi^{(0)1} + \partial_2\Pi^{(0)2} + \partial_3\Pi^{(0)3}, \quad (4.92)$$

açılımını hesaplamamız gerekecektir. Burada $\Pi^{(0)1}$, $\Pi^{(0)2}$ ve $\Pi^{(0)3}$ terimlerine ihtiyacımız olacağı gözükmektedir. (4.18) denklemlerinde verilen sonuçlar ve tetrad bileşenlerini kullanarak bu bileşenleri hesaplamak kolaydır. İhtiyacımız olan ifade

$$\Pi^{(0)\mu} = h_{(i)}^{\mu}\Pi^{(0)(i)} \quad (4.92)$$

denklemdir. Buna göre,

$$\Pi^{(0)1} = -\frac{2\kappa A}{B}(BF \sin \theta + B\Lambda - \Lambda F_{,r} - F\Lambda_{,r}), \quad (4.94a)$$

$$\Pi^{(0)2} = -\frac{2\kappa AB}{F}(F \cos \theta - \Lambda_{,\theta}), \quad (4.94b)$$

$$\Pi^{(0)3} = \frac{2\kappa\psi}{\Lambda}(FB_{,t} + BF_{,t}) \quad (4.94c)$$

sonuçları elde edilir. Elde edilen bu hesaplamalar (4.19) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\Pi^{(0)\mu} &= \partial_r \left[\frac{A}{B}(BF \sin \theta + B\Lambda - \Lambda F_{,r} - F\Lambda_{,r}) \right] \\ &\quad + \partial_\theta \left[\frac{AB}{F}(F \cos \theta - \Lambda_{,\theta}) \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

sonucuna ulaşılmaktadır.

Artık elde edilen yukarıdaki sonucu (3.11) denklemini yardımıyla yazılan

$$P^0 = E = -\int_V \partial_\mu\Pi^{(0)\mu} d^3x \quad (4.96)$$

ifadesinde kullanarak enerji dağılımını hesaplamak mümkündür. Şimdi bazı özel uzay-zaman modelleri için elde ettiğimiz genel sonuçların limit durumlarını tartışalım.

4.3. Özel Durumlar ve Enerji'nin Tam Çözümleri

Bu kesimde bazı özel karadelik ve solucan deliği modelleri için enerji dağılımları hesaplanacak, sonuçlar (eğer yapılmışsa) daha önceden literatürde farklı kuramlar ve farklı yöntemler kullanılarak elde edilen enerji ifadeleri ile karşılaştırılacaktır.

4.3.1. Genişlemeyen-Dönmeyen Metrikler

Denklem (4.1)'de verdiğimiz genel modelde fonksiyonlar üzerinde yapacağımız şu yeni kısıtlamalar bizi istediğimiz uzay-zaman metriğine götürecektir:

$$A(t, r) \rightarrow A(r), \quad (4.97a)$$

$$B(t, r) \rightarrow B(r) , \quad (4.97b)$$

$$F(t, r, \theta) \rightarrow F(r, \theta), \quad (4.97c)$$

$$P(t, r, \theta) \rightarrow P(r, \theta), \quad (4.97d)$$

$$\xi(t, r) \rightarrow 0 , \quad (4.97e)$$

$$\psi(t, r) \rightarrow 0 , \quad (4.97f)$$

$$\Lambda(t, r, \theta) \rightarrow P(r, \theta) . \quad (4.97g)$$

Bu durumda elde edeceğimiz yeni çizgi elemanı

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - B^2(r)dr^2 - F^2(r, \theta)d\theta^2 - P^2(r, \theta)d\varphi^2 \quad (4.98)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda (4.22) ile verilen enerji yoğunluğu

$$-\frac{1}{2\kappa} \partial_\mu \Pi^{(0)\mu} = \partial_r \left[\frac{A}{B} (BF \sin \theta + BP - PF_{,r} - FP_{,r}) \right] + \partial_\theta \left[\frac{AB}{F} (F \cos \theta - P_{,\theta}) \right] \quad (4.99)$$

biçimini alacaktır. Bu limit durumuna uyan özel karadelik modelleri için enerji ifadeleri artık doğrudan yazılabilir.

- *Konformal skaler dyon kara deliği*: Bu model için A , B , F ve P fonksiyonlarının açık halleri;

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{Q_{CSD}}{r} \quad (4.100a)$$

$$F(r, \theta) \rightarrow r , \quad (4.100b)$$

$$P(r, \theta) \rightarrow r \sin \theta , \quad (4.100c)$$

şeklinde olduğundan, bu modele eşlik eden yerel enerji dağılımı

$$E_{CSD}(r) = Q_{CSD} \left(1 - \frac{Q_{CSD}}{r}\right) \quad (4.101)$$

biçiminde elde edilmektedir. Buradaki enerji ifadesi Radinschi'nin genel görelilik kuramında Möller gösterimini kullanarak yaptığı çalışmada aynı modeli göz önüne alarak yaptığı hesaplarda elde ettiği sonuçla (Radinschi 2000) tam olarak aynıdır. $r \rightarrow \infty$ (çok uzak mesafelerde) limitinde enerji

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_{CSD}(r) = Q_{CSD} = \sqrt{q_s^2 + q_e^2 + q_m^2} \quad (4.102)$$

denkleminde verildiği gibi yüke eşit olmaktadır.

- *Regular kara delik*: Modeli elde etmek için kullanılması gereken A , B , F ve P fonksiyonları şu biçimdedir:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + e^2)^{3/2}}. \quad (4.103a)$$

$$F(r, \theta) \rightarrow r, \quad (4.103b)$$

$$P(r, \theta) \rightarrow r \sin \theta, \quad (4.103c)$$

Bu modellerle asimptotik davranışı elde edebilmek için serisel açılım yönteminin kullanılması yerinde olacaktır. Kullanılacak olan matematiksel formül

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (4.104)$$

biçimindedir. Buna göre;

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{3me^2}{r^3} + \dots \quad (4.105)$$

olacaktır. Bu serisel açılım bize ilginç bir noktayı göstermektedir: $r \rightarrow \infty$ limiti alındığında yük Coulomb terimi (bu terim $\frac{1}{r^2}$ şeklindeydi) gibi sifıra gitmiyor, $\frac{1}{r^3}$ gibi sifıra gidiyor. Yani buradaki yük Coulomb yükü olarak algılanmamalıdır. Şimdi (4.27) denklemini kullanırsak, bu kara delik modeli için enerji ifadesi

$$E_{RBH}(r) = m - \frac{m^2}{4r} - \frac{3me^2}{2r^2} + \frac{3m^2e^2}{2r^3} - \dots \quad (4.106)$$

şeklinde olmaktadır. Bu sonucu kullanılarak $r \rightarrow \infty$ (çok uzak mesafelerde) limitinde enerji ifadesini incelediğimizde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_{RBH}(r) = m \quad (4.107)$$

olur. Bu sonuç Sharif'in (2004) genel görelilikte Möller gösterimini kullanarak elde ettiği değer ile aynıdır, dolayısıyla genel görelilikte elde edilen sonuç ile teleparalel kuramda elde edilen sonuç uyumludur. Uzak mesafelerde elde edilen bu sonuç (kısa mesafelerde yük sıfır seçildiğinde de aynı sonuç elde edilir) aynı zamanda Schwarzschild kara deliğinin enerjisidir.

- *Skaler alanlı solucan deliği*: Bu durağan solucan deliği modelini veren seçimler şöyledir:

$$A(r) = 1, \quad (4.108a)$$

$$B(r) = 1 - \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\rho}{r^2}, \quad (4.108b)$$

$$F(r, \theta) \rightarrow r, \quad (4.108c)$$

$$P(r, \theta) \rightarrow r \sin \theta. \quad (4.108d)$$

Bu ifadeler elde ettiğimiz genel enerji tanımında yerine yazıldığında ve gerekli serisel açılım yapıldığında elde edilecek sonuç şudur:

$$E_{WWSF}(r) = \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2r} \left(\rho - \frac{\xi^2}{4} \right) - \frac{\rho\xi}{4r^2} + \frac{Q^2}{8r^3} + \dots \quad (4.109)$$

Uzak mesafeler ($r \rightarrow \infty$) limitinde ise

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_{WWSF}(r) = \frac{\xi}{2} \quad (4.110)$$

sonucuna ulaşılır.

- *Yüklü regular kara delik*: Bu kara delik tipi ikinci bölümde tanıttığımız gibi küresel koordinatlardaki Anti-de Sitter-C metriğinden elde edilebilmektedir. Bu model için uygun fonksiyon seçimleri

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{q^6}{12m^2r^6} + \dots, \quad (4.111a)$$

$$F(r, \theta) \rightarrow r, \quad (4.111b)$$

$$P(r, \theta) \rightarrow r \sin \theta, \quad (4.111c)$$

biçimindedir. Bu durumda kara deliğin enerji dağılımını betimleyen matematiksel ifade şöyle olmaktadır:

$$E_{CRBH}(r) = M - \frac{q^2}{2r} - \frac{M^2}{2r} + \frac{Mq^2}{2r^2} - \frac{q^4}{8r^3} - \frac{q^6}{24M^2r^5} - \dots \quad (4.112)$$

Radinschi (2001) bir çalışmasında aynı modeli genel görelilikteki Einstein gösterimini kullanmak için göz önünde bulundurmuş ve aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

$$E(r) = M - \frac{q^2}{2r} - \frac{q^6}{24M^2r^3} - \frac{q^{10}}{240M^4r^5} - \dots \quad (4.113)$$

Her iki sonuç karşılaştırıldığında ilk iki terimin aynı olduğu görülmektedir. Her iki ifadeyi uzak mesafelerde ele aldığımızda ise aynı sonucu vermektedir. Elde edilecek sonuç,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_{CRBH}(r) = M \quad (4.114)$$

şeklindedir. (4.40) denklemindeki ilk iki terimden oluşan

$$E_{RN}(r) = M - \frac{q^2}{2r} \quad (4.115)$$

enerji ifadesi Reissner-Nordström enerjisi olarak bilinmekte olup aynı zamanda Penrose'un elde ettiği yarı-klasik kütle tanımına da karşılık gelmektedir (Penrose 1982).

4.3.2. Dönmeden Genişleyen Modeller

(4.1) denkleminde tanımladığımız genel çizgi elemanı kullanılarak şu seçimler yapıldığında genişleyen fakat dönmeyen metrikler elde edilmektedir:

$$\xi(t, r) \rightarrow 0, \quad (4.116a)$$

$$\psi(t, r) \rightarrow 0, \quad (4.116b)$$

$$\Lambda(t, r, \theta) \rightarrow P(t, r, \theta). \quad (4.116c)$$

Sonuç olarak elde edilecek yeni çizgi elemanı da

$$ds^2 = A^2(t, r)dt^2 - B^2(t, r)dr^2 - F^2(t, r, \theta)d\theta^2 - P^2(t, r, \theta)d\varphi^2 \quad (4.117)$$

biçiminde olacaktır.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa} \partial_\mu \Pi^{(0)\mu} = & \partial_r \left[\frac{A}{B} (BF \sin \theta + BP - PF_{,r} - FP_{,r}) \right] \\ & + \partial_\theta \left[\frac{AB}{F} (F \cos \theta - P_{,\theta}) \right] \end{aligned} \quad (4.118)$$

Burada ifade kapalı biçimde olduğu için enerji integralini çözemiyoruz, fakat verilecek olan özel örnekler bu aşamada göz önüne alındığında enerji yoğunlukları özel durumlar için elde edilebilir ve sonuçta da enerji integralini çözmek kolay hale gelir.

- *Vaidya kara delikleri:* Bu genel karadeliğin başlığı altında altı adet farklı limit durumu bulunmaktaydı. Vaidya tipi kara delikler genel olarak şu seçimle elde edilmektedir:

$$A(t, r) = e^{-\psi(t, r)} \sqrt{1 - \frac{2m(t, r)}{r}}, \quad (4.119a)$$

$$B(t, r) = \left(1 - \frac{2m(t, r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.119b)$$

$$F(t, r, \theta) = r, \quad (4.119c)$$

$$P(t, r, \theta) = r \sin \theta. \quad (4.119d)$$

Dolayısıyla Vaidya tipi kara deliklerine eşlik eden enerji yoğunluğunun matematiksel ifadesi

$$\partial_\mu \Pi^{(0)\mu} = -4\kappa \sin \theta \partial_r \left[r e^{-\psi(t, r)} \left(\sqrt{1 - \frac{2m(t, r)}{r}} - 1 + \frac{2m(t, r)}{r} \right) \right] \quad (4.120)$$

biçiminde elde edilir, böylece enerji dağılımı

$$E_V(t, r) = r e^{-\psi(t, r)} \left(\sqrt{1 - \frac{2m(t, r)}{r}} - 1 + \frac{2m(t, r)}{r} \right) \quad (4.121)$$

şeklinde olacaktır. Uzak mesafelerdeki davranışı tartışabilmek için bu ifadeyi seriye açmamız gerekecektir. Hatırlayalım! kütle fonksiyonu olarak adlandırılan $m(t, r)$ ifadesi yavaşça değişen bir fonksiyondur. Bu aşamada $\psi(t, r) = 0$ seçilerek çözümlerin limit durumu için iki tane özel model ele alınacaktır (bunlar tezin kaynak özetleri kısmında tanıtılmıştı).

- *I. Tip Vaidya modeli (monopol çözümü):*

Aslında bu alt model genişlemeyen bir kara delik tipine karşılık gelmektedir. Bu tip kara delikleri tanımlayan uygun seçim ise

$$m(t, r) = \frac{\varepsilon r}{2} \quad (4.122)$$

denklemleriyle verilir. Monopol çözümü matematiksel olarak Vaidya tipi kara delik verir, fakat genişlemeyen bir kara delik modelidir. Bu ifade (4.44) denkleminde yazıldığında enerji yoğunluğu

$$\partial_\mu \Pi^{(0)\mu} = -4\kappa \sin \theta \partial_r [r e^{-\psi(t,r)} (\sqrt{1-\varepsilon} - 1 + \varepsilon)] \quad (4.123)$$

olur. Buradan (4.45) denklemini bize

$$E_{V_1}(t, r) = r e^{-\psi(t,r)} (\sqrt{1-\varepsilon} - 1 + \varepsilon) \quad (4.124)$$

sonucunu verir. Keyfi parametre olan ε 'nin çok küçük değerleri için

$$E_{V_1}(t, r) = 0 \quad (4.125)$$

olacaktır. Yang (2006) genel görelilik kuramında Möller gösterimini kullanarak aynı sonucu elde etmiştir.

- *II. Tip Vaidya modeli (Yüklü Vaidya çözümü):*

Bu çözümler dönmeden genişleyen Vaidya tipi kara deliklerden birini tanımlar. Kütle fonksiyonu şu biçimde tanımlanmıştır:

$$m(t, r) = k(t) - \frac{q^2(t)}{2r}. \quad (4.126)$$

Bu seçim için (4.44) denkleminin davranışı

$$E_{V2}(t, r) = k - \frac{1}{r} \left(q^2 + \frac{k^2}{8} \right) + \frac{kq^2}{4r^2} - \frac{q^4}{8r^3} \quad (4.127)$$

biçiminde olmaktadır. Burada elde ettiğimiz sonuç Yang'ın (2006) elde ettiği sonuçlar ile uyumludur.

- *Ellis-Bronnikov-Morris-Thorne solucan deliği çözümü*: Genişleyen bu solucan deliği modelini tanımlayan metrik

$$A(t, r) = 1, \quad (4.128a)$$

$$B(t, r) = e^{\lambda(t, r)}, \quad (4.128b)$$

$$F(t, r, \theta) = e^{\frac{\eta(t, r)}{2}} \sqrt{r^2 + Q^2}, \quad (4.128c)$$

$$P(t, r, \theta) = e^{\frac{\eta(t, r)}{2}} \sqrt{r^2 + Q^2} \sin \theta \quad (4.128d)$$

seçimiyle buradaki hesaplamalarda göz önüne alınabilir. Böylece enerji yoğunluğu ve enerji dağılımını veren ifadeler şöyle olacaktır:

$$\partial_\mu \Pi^{(0)\mu} = -4\kappa \sin \theta \partial_r \left[e^{-\frac{\eta}{2}} \sqrt{r^2 + Q^2} - e^{\frac{2\eta - \lambda}{2}} \{ \eta' (r^2 + Q^2) + r \} \right] \quad (4.129)$$

$$E_{EBMT}(t, r) = e^{-\frac{\eta}{2}} \sqrt{r^2 + Q^2} - e^{\frac{2\eta - \lambda}{2}} \{ \eta' (r^2 + Q^2) + r \}. \quad (4.130)$$

4.3.3. Genişlemeden Dönen Modeller

Genel çizgi elemanı tanımladığımız (4.1) denkleminde şu seçimler göz önüne alındığında genişlemeden dönen metrikler elde edilmektedir.

$$A(t, r) \rightarrow A(r), \quad (4.131a)$$

$$B(t, r) \rightarrow B(r), \quad (4.131b)$$

$$F(t, r, \theta) \rightarrow F(r), \quad (4.131c)$$

$$P(t, r, \theta) \rightarrow P(r, \theta), \quad (4.131d)$$

$$\xi(t, r) \rightarrow \xi(r), \quad (4.131e)$$

$$\psi(t, r) \rightarrow \psi(r) = \frac{\xi}{A}, \quad (4.131f)$$

$$\Lambda^2(t, r, \theta) \rightarrow \Lambda^2(r, \theta) = \frac{\xi^2 + A^2 P^2}{A^2}. \quad (4.131g)$$

Bu durumda (4.1) metriğinin yeni biçimi şöyle olmalıdır:

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - B^2(r)dr^2 - F^2(r, \theta)d\theta^2 - P^2(r, \theta)d\varphi^2 + 2\xi(r)dtd\varphi. \quad (4.132)$$

Yeniden yazılan genel metrik için enerji yoğunluğu ise şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\Pi^{(0)\mu} = & \partial_\theta \left[\frac{AB}{F} (F \cos \theta - 2PP_{,\theta}) \right] \\ & + \partial_r \left[\frac{A}{B} \left(BF \sin \theta + (B - F_r) \frac{\xi^2 + A^2 P^2}{A^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2F \frac{\xi\xi_{,r}A^2 + A_rA^3P^2 + PP_{,r}A^4 - AA_r(\xi^2 + A^2P^2)}{A^4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.133)$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu doktora tez çalışmasında bazı özel Kara Delik ve Solucan Deliği modelleri *Teleparalel Kütle Çekim Kuramı*'nda göz önünde bulundurularak bu modellere eşlik eden enerji dağılımı hesaplanmış, elde edilen sonuçlar bazı limitlerde literatürde daha önceden bazı bilim insanları tarafından hesaplanmış özel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Başlangıçta birçok özel uzay-zaman metriğini içerisinde barındıran genel bir çizgi elemanı tanımlanmıştır

$$ds^2 = A^2(t, r)dt^2 - B^2(t, r)dr^2 - F^2(t, r, \theta)d\theta^2 - P^2(t, r, \theta)d\varphi^2 + 2\xi(t, r)dtd\varphi \quad (5.1)$$

ve ilgili hesaplamalar için bu genel metrik temel alınmıştır. Yukarıdaki denklemde ifade edilen bu metrik dönen ve genişleyen uzay-zaman modellerini betimlemektedir. Limit durumlarında bu metrik şu alt modellere indirgenmiştir:

- Dönmeden genişleyen modelleri ifade eden çizgi elemanı,
- Genişlemeden dönen modellerin çizgi elemanı,
- Hem dönmeyen hem de genişlemeyen modelleri betimleyen çizgi-elemanı,

Bu sınıflandırmaya uyan bazı özel kara delik ve solucan deliği modelleri örnek olarak verilmiş, bazıları için enerji yoğunluğu ve enerji dağılımı ifadeleri tezde edilen genel sonuçlar kullanılarak doğrudan elde edilmiştir. Sonuçlardan bazıları için genel görelilik kuramında da elde edilen sonuçlar bulunduğu buradan elde edilen sonuçların önceden elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. Yukarıdaki üç limit durumu için elde edilen enerji (yoğunluğu) dağılımı ifadeleri sırasıyla:

$$-\frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\Pi^{(0)\mu}(r, \theta) = \partial_r \left[\frac{A}{B}(BF \sin \theta + BP - PF_{,r} - FP_{,r}) \right] + \partial_\theta \left[\frac{AB}{F}(F \cos \theta - P_{,\theta}) \right], \quad (5.2)$$

$$-\frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\Pi^{(0)\mu}(t, r, \theta) = \partial_r \left[\frac{A}{B}(BF \sin \theta + BP - PF_{,r} - FP_{,r}) \right] + \partial_\theta \left[\frac{AB}{F}(F \cos \theta - P_{,\theta}) \right], \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\kappa}\partial_\mu\Pi^{(0)\mu}(r,\theta) &= \partial_\theta\left[\frac{AB}{F}(F\cos\theta - 2PP_{,\theta})\right] \\
&+ \partial_r\left[\frac{A}{B}\left(BF\sin\theta + (B - F_{,r})\frac{\xi^2 + A^2P^2}{A^2} - \right. \right. \\
&\left. \left. 2F\frac{\xi\xi_{,r}A^2 + A_{,r}A^3P^2 + PP_{,r}A^4 - AA_{,r}(\xi^2 + A^2P^2)}{A^4}\right)\right]. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Hesaplamalar tamamlandığında elde edilen sonuçların teleparalel kurama adını da veren üç önemli parametreden bağımsız olduğu gözlenmiştir. Teleparalel kuram adını veren bu üç parametre genel biçimde şöyledirler: $m_1 = -\frac{1}{\kappa}$, $m_2 = \frac{\lambda}{\kappa}$ ve $m_3 = \frac{1}{\kappa}(1 - 2\rho)$. Buradaki κ Einstein sabiti olup ρ ise boyutsuz bir parametredir. Bu sabitlere verilecek özel değerler ile farklı teleparalel kuramlar elde edilebilmektedir. Örneğin, teleparalel kuramın genel görelilik eşdeğeri için gerekli seçim şöyledir: $m_1 = -\frac{1}{4}$, $m_2 = \frac{1}{2}$ ve $m_3 = -1$. Elde edilen ifadelerin bu üç sabitten bağımsız olması, bu tezdeki sonuçların sadece teleparalel kuramın genel görelilik eşdeğeri için değil tüm teleparalel modellerde geçerli olduğunu göstermektedir.

Hesaplanmış sonuçlar genel görelilik daha önceden elde edilmiş sonuçlar ile karşılaştırıldığında, Genel gösterimdeki Möller gösterimiyle uyumlu ifadelerin bulunduğu görülmüştür. Böylece bu tezde elde edilen sonuçların Lessner'in (1996) ortaya attığı Möller gösteriminin genel görelilikteki en kuvvetli formülasyon olduğu iddiasını desteklediği görülmektedir.

Bu tezde Einstein'ın genel görelilik kuramı ile hem uyumlu hem de daha genel sonuçların elde edilmiş olması, bizi genel görelilik kuramında tartıştığımız ve çözümlerini elde etmekte zorlandığımız problemleri teleparalel gravite gibi alternatif kuramlarda tekrar ele almak konusunda motive etmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Aguirregabiria, J.M., Chamorro, A., Virbhadra, K.S. 1996. Energy and angular momentum of charged rotating black holes. *Gen. Relat. Grav.* 28, 1393-1400.
- Aldrovandi, R., Pereira, J.G. 1995. An introduction to geometrical physics. World Scientific, Sayfa: 629, Singapore.
- Aydogdu, O., Saltı, M., Korunur, M. 2005. Energy in Reboucas-Tiomno-Korotkii-Obukhov and Godel-type space-times in Bergmann-Thomson's formulations. *Acta Phys. Slovaca* 55: 537-548.
- Aydogdu, O., Saltı, M. 2006. Energy Density Associated with the Bianchi Type-II Space-Time. *Prog. Theor. Phys.* 115: 63-71.
- Baez, J.C., E. F. Bunn, E.F. 2006. The meaning of Einstein's equation. Erişim: [<http://physics.richmond.edu/faculty/ebunn/>], USA. 04.01.2006.
- Bardeen, J. 1968. Proceedings of the GR5 Meeting, Tiflis-USSR.
- Barriola, M., Vilenkin, A. 1989. Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.* 63: 341-343.
- Bassett, B., Edney, R. 2010. İzafiyet Teorisi (Çeviri: Duygu Akın), NTV yayınları, İstanbul, Sayfa: 24, Türkiye.
- Bergmann, P.G., Thomson, R. 1953. Spin and Angular Momentum in General Relativity. *Phys. Rev.* 89: 400-407.
- Blagojevic, M. 2002. Gravitation and Gauge Symmetries, IOP Publishing, Bristol, Sayfa: 213, UK.
- Bochicchio, I., Faraoni, V. 2010. Lemaître-Tolman-Bondi cosmological wormhole. *Physical Review D*, 82(4): 044040-044045.
- Borde, A. 1994. Open and closed universes, initial singularities, and inflation. *Physical Review D*, 50: 3692-3702.
- Bringley, T. 2002. Energy and Momentum of a Stationary Beam of Light. *Mod. Phys. Lett. A* 17: 157-162.

Buchdahl, H. A. 1959. Reciprocal Static Metrics and Scalar Fields in the General Theory of Relativity. *Physical Review*, 115: 1325-1328.

Chamorro, A., Virbhadra, K.S. 1995. A radiating dyon solution. *Pramana-J. Phys.* 45: 181-190.

Cheng, G-J., Lin, W-F., Hsu, R-R. 1994. Dyonic black holes in dilaton gravity. *J. Math. Phys.*, 35: 4839-4848.

de Andrade, V.C., Guillen, L.C.T., Pereira, J.G. 1997. Gravitational Lorentz force and the description of the gravitational interaction. *Phys. Rev. D* 56: 4689-4695.

de Lorenci, V. A., Figueiredo, N., Fliche, H. H., Novello, M. 2001. Dyadosphere bending of light. *Astron. Astrophys.*, 369: 690-694.

Dymnikova, I. G. 1992. Vacuum nonsingular black hole. *Gen. Rel. Grav.*, 24: 235-242.

Einstein, A. 1905. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, 17: 891–921.

Einstein, A. 1915. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsber. Preus. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 47: 778-786.

Ernst, F. J. 1974. Complex potential formulation of the axially symmetric gravitational field problem. *J. Math. Phys.* 15: 1409-1412.

Farley, A.N.St.J., D'Eath, P.D. 2006. Vaidya Space-Time in Black-Hole Evaporation. *Gen. Rel. Grav.* 38: 425-443.

Frolov, V.P., Novikov, I.D. 1998. Black hole physics: basic concepts and new developments. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Sayfa: 1. Netherlands.

Gad, R.M. 2004. Energy and momentum associated with a Static Axially Symmetric Vacuum Space-Time. *Mod. Phys. Lett. A* 19: 1847-1854.

Grafinkle, D., Horowitz, G.T., Strominger, A. 1991. Charged black holes in string theory. *Phys. Rev. D*, 43: 3140-3143.

Grammenos, T. 2005. Energy and Momentum Distributions of the Magnetic Solution to (2+1) Einstein-Maxwell Gravity. *Mod. Phys. Lett. A* 20: 1741-1751.

Goldberg, D., Blomquist, J. 2010. A User's Guide to the Universe: Surviving the Perils of Black Holes, Time Paradoxes, and Quantum Uncertainty. John Wiley&Sons Inc., New Jersey, Sayfa: 155, USA.

Halpern, P. 2006. Energy Distribution of Black Plane Solutions. Mod. Phys. Lett. A 21, 495-502.

Hammond, R.T. 1994. Spin, torsion, forces. Gen. Rel. Grav. 26: 247-263.

Hayashi, K., Shirafuji, T. 1979. New general relativity. Phys. Rev. D 19: 3524-3553.

Husain, V. 1996. Exact solutions for null fluid collapse. Phys. Rev. D 53: R1759-R1762.

Maluf, J.W. 1994. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. J. Math. Phys., 35: 335-343.

Maluf, J.W., da Rocha-Neto, J.F. 2001. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. Physical Review D, 64: 084014-084021.

Maluf, J.W., da Rocha-Neto, J.F., Toribio, T.M.L., Castello-Branco, K.H. 2002. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. Phys. Rev. D, 65: 124001-124012.

Maluf, J.W., Faria, F.F. 2004. On gravitational radiation and the energy flux of matter. Ann. Phys., 13: 604-616.

Kar, S. 1994. Evolving wormholes and the weak energy condition. Phys. Rev. D 49: 862-865.

Kehagias, A., Sfetsos, K. 2009. The black hole and FRW geometries of non-relativistic gravity. Phys. Lett. B, 678: 123-126.

Kim, S-W. 1996. Cosmological model with a traversable wormhole. Physical Review D, 53: 6889-6892.

Kim, S-W., Lee, H. 2001. Exact solutions of a charged wormhole. Physical Review D, 63: 064014-064019.

Landau, L.D., Lifshitz, E.M. 1977. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, Sayfa: 280, UK.

Lessner, G. 1996. Møller's energy-momentum complex - Once again. *Gen. Relat. Grav.* 28: 527-535.

Liddle, A. 2003. *An introduction to Modern Cosmology*. Wiley Inc., West Sussex, Sayfa: 36, England.

Lu, H., Mei, J., Pope, C. N. 2009. Solutions to Hoşava Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 103: 091301-091304.

Martinez, C., Staforelli, J. P. 2006. Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge. *Phys. Rev. D*, 74: 044028-044038.

Mikhail, F.I., Wanas, M.I., Hindawi, A., Lashin, E.I. 1993. . *Int. J. Theor. Phys.* 32, 1627-1642.

Morris, M.S., Thorne, K.S. 1998. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.* 56: 395-412.

Møller, C. 1958. On the Localization of the Energy of a Physical System in the General Theory of Relativity. *Ann. Phys. (NY)* 4: 347-371.

Møller, C. 1961. Tetrad Fields and Conservation Laws in General Relativity. *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, 19 Haziran-21 Temmuz 1961, New York, Academic Press. Sayfa: 252.

Nouri-Zonoz, M., Dadhich, N. ve Lynden-Bell, D. 1999. *Class. Quant. Grav.* 16: 1021.

Novikov, D.I., Doroshkevich, A. G., Novikov, I. D. ve Shatskiy, A. A. 2009. Stability of the Ellis-Bronnikov-Morris-Thorne Wormhole. *Astron. Rep.*53: 1079-1085.

Papapetrou, A. 1948. Einstein's theory of gravitation and flat space. *Proc. R. Irish Acad. A* 52: 11-23.

Patashnick, O. 2005. Energy-Momentum of a regular MMaS-class black hole. *Int. J. Mod. Phys. D* 14: 1607-1620.

Penrose, R. 1982. Quasi-local mass and angular momentum in general relativity. *Proc. R. Soc. London A* 381: 53-63.

Qadir, A., Sharif, M. 1992. General formula for the momentum imparted to test particles in arbitrary spacetimes. *Phys. Lett. A* 167: 331-334.

Radinschi, I. 1999. The Energy of a Dyonic Dilaton Black Hole. *Acta Physica Slovaca*. 49: 789-794.

Radinschi, I. 2000. The energy of a topological black hole. *Fizika B* 9: 43-48.

Radinschi, I. 2000. Energy of a Conformal Scalar Dyon Black Hole. *Mod. Phys. Lett. A* 15: 2171-2176.

Radinschi, I. 2001. Energy Distribution of a Charged Regular Black Hole. *Mod. Phys. Lett. A* 16: 673-679.

Robertson, H.P. 1932. Groups of Motion in Space Admitting Absolute Parallelism. *Ann. Math.* 33: 496-520.

Roman, T.A. 1993. Inflating Lorentzian wormholes. *Phys. Rev. D* 47: 1370-1379.

Rosen, N., Virbhadra, K.S. 1993. Energy and momentum of cylindrical gravitational waves. *Gen. Relat. Grav.* 25: 429-433.

Saltı, M., Havare, A. 2005. Energy-Momentum in viscous Kasner-type Universe in Bergmann-Thomson Formulations. *Int. J. Mod. Phys. A* 20: 2169-2177.

Saltı, M., Aydogdu, O. 2006. Energy in the Schwarzschild-de Sitter Spacetime. *Found. Phys. Lett.* 19: 269-276.

Schwarzschild, K. 1916. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1: 189-196.

Sen, A. 1992. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 69(7): 1006-1009.

Shankaranarayanan, S. 2003. Temperature and entropy of Schwarzschild-de Sitter space-time. *Physical Review D* 67: 084026-084038.

Sharif, M. 2004. Energy of a Regular Black Hole. *Nuovo Cimento B* 119: 463-469.

Sharif, M., Fatima, T. 2005. Energy-Momentum Distribution: A Crucial Problem in General Relativity. *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 4309-4337.

Sharif, M., Taj, S. 2010. Energy Contents of Gravitational Waves in Teleparallel Gravity. *Mod. Phys. Lett. A* 25: 221-232.

Tolman, R.C. 1934. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford University Press, London, Sayfa:227, England.

Ulhoa, S. C., da Rocha-Neto, J. F., Maluf, J. W. 2010. The Gravitational Energy Problem for Cosmological Models in Teleparallel Gravity. *International Journal of Modern Physics D* 19(12): 1925-1935.

Vagenas, E. C. 2003. Energy Distribution in 2d Stringy Black Hole Backgrounds. *Int. J. Mod. Phys. A* 18: 5781-5794.

Vaidya, P.C. 1951. Nonstatic Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluids Radiating Energy. *Phys. Rev.* 83: 10–17.

Vargas, T. 2004. The energy of the universe in teleparallel gravity. *Gen. Relat. Grav.* 36: 1255-1264.

Virbhadra, K.S. 1990. Energy associated with a Kerr-Newman black hole. *Phys. Rev. D* 41: 1086-1090.

Virbhadra, K.S., Parikh, J.C. 1993. Gravitational energy of a stringy charged black hole. *Phys. Lett. B* 317: 312-314.

Virbhadra, K. S. 1997. Janis-Newman-Winicour and Wyman solutions are the same. *Int. J. Mod. Phys. A* 12: 4831-4836.

Virbhadra, K.S. 1999. Naked singularities and Seifert's conjecture. *Phys. Rev. D* 60: 104041-104047.

Visser, M. 1995. *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*. AIP Press, New York, Sayfa: 115-118. USA.

Wang, A., Wu, Y. 1999. Letter: Generalized Vaidya Solutions. *Gen. Rel. Grav.* 31: 107-114.

Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons Inc., New York, Sayfa: 165, USA.

Weitzenböck, R. 1923. *Invariantentheorie*. University of Michigan Library, Gronningen, Sayfa:132, Netherland.

Xulu, S.S. 2000. Energy Associated with Schwarzschild Black Hole in a Magnetic Universe. *Int. J. Mod. Phys. A*, 15: 2979-2986.

Xulu, S.S. 2000. Møller Energy for the Kerr-Newman metric. *Mod. Phys. Lett. A* 15: 1511-1517.

Xulu, S.S. 2003. Møller energy of the nonstatic spherically symmetric Space-Time. *Astrophys. Space Sci.* 283: 23-32.

Yang, I.-C., Radinski, I. 2003. Energy associated with a static spherically symmetric nonsingular black hole. *Chin. J. Phys.* 41: 326-333.

Yang, I.-C. 2000. On the energy of the de Sitter-Schwarzschild black hole. *Chin. J. Phys.* 38: 1040-1043.

Yang, I.-C. 2006. On the Energy of Vaidya Space-time. *Chin. J. Phys.* 45: 497-507.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Adı Soyadı : Mustafa SALTI

Doğum yeri : MERSİN

Doğum tarihi : 13.01.1979

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise – İçel Gazi Lisesi

Lisans – Karadeniz Teknik Üniversitesi

– Mersin Üniversitesi (Yatay Geçiş)

Yüksek Lisans – Mersin Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü,
Araştırma Görevlisi, 2007-Devam Ediyor

SCI (Uluslararası) Yayınlar:

1. Korunur, M., Saltı, M. ve Açıkgöz I. 2010. *Finding Dirac Spin Effect in NUT Spacetime*. Commun. Theor. Phys. 53: 864–868.
2. Pirinççioğlu, N., Açıkgöz, I. ve Saltı, M. 2007. *The Momentum-4 Vector in Brans-Dicke Wormholes*. Int. J. Theor. Phys. 46(5): 1318.
3. Binbay, F., Pirinççioğlu, N., Saltı, M. ve Aydoğdu, O. 2007. *Electric and Magnetic Black Hole Solutions of Moller's Four-Momentum*. Int. J. Theor. Phys. 46: 2339.
4. Korunur, M., Saltı, M. ve Aydogdu, O. 2007. *An Assf and the Teleparallelism*. Eur. Phys. J. C 50: 101.
5. Korunur, M., Saltı, M. ve Aydogdu, O. 2007. *The Lukash Plane-Wave Attractor and Relative Energy*. Mod. Phys. Lett. A 22: 1601.

6. Saltı, M. ve Aydoğdu, O. 2006. *On the Moller Energy Associated with Black Holes*. Int. J. Theor. Phys. 45: 2481.
7. Saltı, M. ve Aydoğdu, O. 2006. *Energy of a Charged Wormhole*. Int. J. Theor. Phys. 45 (2006) 1891.
8. Saltı, M. 2006. *Teleparallel Gravitational Energy in the Gamma Metric*. Int. J. Mod. Phys. D 15: 695.
9. Saltı, M. ve Aydoğdu, O. 2006. *Energy Distribution in Reissner-Nordström anti-de Sitter Black Holes in Moller Prescriptio*. Eur. Phys. J. C 47: 247.
10. Saltı, M. ve Aydoğdu, O. 2006. *Energy in the Schwarzschild-de Sitter Spacetime*. Found. Phys. Lett. 19: 269.
11. Aydoğdu, O. ve Saltı, M. 2006. *Moller's Energy in the Dyadosphere of a Charged Black Hole*. Pramana 67 (2006) 239.
12. Saltı, M. 2006. *On the Energy-Momentum in Closed Universes*. Czech. J. Phys. 56: 177.
13. Aydoğdu, O. ve Saltı, M. 2006. *Energy Density Associated with the Bianchi-type II Space-time*. Prog. Theor. Phys. 115: 63.
14. Aydoğdu, O., Saltı, M., Korunur, M. ve Acikgoz, I. 2006. *Energy Associated with the Gibbons-Maeda Dilaton Space-Time*. Found. Phys. Lett. 19: 709.
15. Aydoğdu, O. ve Saltı, M. 2006. *The Momentum 4-Vector in Bulk Viscous Bianchi Type-V Space-time*. Czech. J. Phys. 56: 789.
16. Saltı, M. ve Havare, A. 2005. *On the Equivalence of the Massless DKP Equation and the Maxwell Equations in the Shuwer*. Mod. Phys. Lett. A 20: 451.
17. Havare, A., Korunur, M., Aydoğdu, O., Saltı, M. ve Yetkin, T. 2005. *Exact Solutions of the Photon Equation in Anisotropic Spacetimes*. Int. J. Mod. Phys. D14: 957.
18. Saltı, M. ve Havare, A. 2005. *Energy-Momentum in Viscous Kasner-type Universe in Bergmann-Thomson Formulations*. Int. J. Mod. Phys. A 20: 2169.
19. Saltı, M. 2005. *Energy and Momentum Associated with Kasner-type Universes*. Nuovo Cimento B120: 53.
20. Saltı, M. 2005. *Different Approaches for Möller's Energy in the Kasner-type Space-time*. Mod. Phys. Lett. A20 (2005) 2175.

21. Aydoğdu, O., Saltı, M. ve Korunur, M. 2005. *Energy in Reboucas–Tiomno–Korotkii–Obukhov and Gödel–type Space–times in Bergmann–Thomson’s Formulation.* Acta Phys. Slov. 55: 537.
22. Saltı, M. 2005. *Different Approaches to the Einstein Energy Associated with the de Sitter C-Space-time.* Acta Phys. Slov. 55: 563.

Diğer (Uluslararası) Yayınlar:

23. Saltı, M., Aydogdu, O., Havare, A. ve Korunur, M. 2006. *The Massless Spin-1 Particles in the Rotating Space-times.* Fizika B15(2): 71-84.
24. Havare, A., Yetkin, T. ve Saltı, M. 2001. *Dirac Equation in (1+1)-Dimensional Curved Space-Time.* Balkan Phys. Lett. special issue (2001) 152.

Bildiriler:

1. Havare, A., Yetkin, T. ve Saltı, M. 2001. *Dirac Equation in (1+1)-Dimensional Curved Space-time.* 1st Hellenic-Turkish International Physics Conference, Book of Abstracts, Bodrum-Turkey and Kos-Grece, (10-15 September 2001).
2. Havare, A., Saltı, M. ve Yetkin, T. 2002. *Differential Equations of the Scalar and Spinor Fields in the Background of Non-diagonal Metrics.* Türk Fizik Derneği 21. Fizik Kongresi, Isparta, (11-14 Eylül 2002).