T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL OPERATÖRLER KULLANILARAK TANIMLANMIŞ MEROMORFİK HARMONİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

F. Müge SAKAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Aralık–2012

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

F. Müge SAKAR tarafından yapılan **"Genelleştirilmiş Diferansiyel Operatörler Kullanılarak Tanımlanmış Meromorfik Harmonik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları"** konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

Üye : Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR

Üye : Doç. Dr. H. Özlem GÜNEY (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28/12/2012

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.........

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yaşama dair her konuda bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli Hocam Sayın **Doç. Dr. H. Özlem GÜNEY**'e,

Tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen Hocam Sayın **Prof. Dr. Muhammet KAMALİ**'ye,

Tezimi oluştururken bana verdikleri, değer, destek ve anlayışlarıyla hep yanımda olan *anneme, babama, sevgili eşime ve çocuklarıma*,

Bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (DUBAP–11-FF-11) sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL OPERATÖRLER KULLANILARAK TANIMLANMIŞ MEROMORFİK HARMONİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

DOKTORA TEZİ

F. Müge SAKAR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, analitik ve harmonik yalınkat fonksiyonların gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, ayrıca yalınkat fonksiyonlar ve bazı alt sınıflarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde harmonik fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlar ile ilgili temel kavram, tanım ve teoremler verilmiş, ayrıca harmonik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları ve subordinasyon kavramından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, birim diskin dışı olan $\widetilde{U} = \{z : |z| > 1\}$ bölgesinde, yeni genelleştirilmiş bir diferansiyel operatör yardımıyla tanımlanan harmonik meromorfik yıldızıl fonksiyonların yeni sınıfları verilmiştir. Ayrıca bu sınıflar için katsayı eşitsizlikleri, büyüme sınırları ve ekstrem noktaları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, birim diskin dışı olan $\widetilde{U} = \{z : |z| > 1\}$ bölgesinde, yeni genelleştirilmiş bir Al-Oboudi diferansiyel operatörünün yardımıyla tanımlanan çok değerli harmonik meromorfik ve yön koruyan fonksiyonların yeni bir sınıfı verilmiştir. Ayrıca bu sınıf için katsayı sınırları, büyüme sınırları, ekstrem noktaları ve konveks birleşim özelliği belirlenmişir.

Anahtar Kelimeler: Analitik, Harmonik yalınkat fonksiyonlar, Meromorfik fonksiyonlar, Al-Oboudi diferansiyel operatörü, Katsayı eşitsizlikleri, Ekstrem noktalar.

ABSTRACT

SOME SUBCLASSES OF MEROMORPHIC HARMONIC FUNCTIONS DEFINED BY USING GENERALIZED DIFFERENTIAL OPERATORS

PhD THESIS

F. Müge SAKAR

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2012

This work consists of five chapters.

In the first chapter the necessary knowledge about development of the analytic and harmonic univalent functions are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given which are the necessary for properly understanding of the following chapters. Moreover, univalent functions and some of subclasses are mentioned.

In the third chapter, harmonic functions and the related basic concepts, definitions and theorems are given. Furthermore, some subclasses of harmonic univalent functions and subordination concept are mentioned.

In the fourth chapter, new classes of meromorphic harmonic starlike functions defined by a new generalized differential operator in outside of the unit disc $\widetilde{U} = \{z : |z| > 1\}$ are given. Furthermore, coefficients inequalities, distortion theorems and extreme points for the functions belonging to these classes are obtained.

In the fifth chapter, new classes of multivalent meromorphic harmonic and orientation preserving functions are defined by a new generalized Al-Oboudi differential operator in outside of the unit disc $\widetilde{U} = \{z : |z| > 1\}$ are given. Furthermore, coefficient bounds, distortion theorems, extreme points and convex combinations for the functions in these classes are determined.

Key Words: Analytic, Harmonic univalent functions, Meromorphic functions, Al-Oboudi differential operator, Coefficient inequalities, Extreme point.

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
U	: $\{z : \lvert z\rvert < 1\}$, birim disk
$\overline{U}$	: U nun kapanışı
U^*	: $\{z : 0 < \lvert z\rvert < 1\} = U - \{0\}$
$\widetilde{U}$	: Birim diskin dışı olan $\{z : \lvert z\rvert > 1\}$ bölgesi
$f(U)$	: U nun f fonksiyonu altındaki resmi
$E(C)$	: C kümesinin tüm ekstrem noktalarının kümesi
F	: Normal aile
$k(z)$	: Koebe fonksiyonu
$k_\theta(z)$	: Koebe fonksiyonunun rotasyon fonksiyonu
$k_0(z)$	: Harmonik Koebe fonksiyonu
$\operatorname{Re} f$	: f fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f$	: f fonksiyonunun sanal kısmı
$f \prec g$	: f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu
Δ_u	: u fonksiyonunun Laplasiyeni
$f = h + \overline{g}$	: f fonksiyonunun standart (kanonik) gösterimi
$f \circ g$	: f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
D_f	: f fonksiyonunun genişlemesi
μ_f	: f fonksiyonunun birinci genişlemesi
$\omega = \nu_f$	: f fonksiyonunun ikinci genişlemesi
J_f	: f fonksiyonunun Jakobiyeni
S	: U birim diskinde, analitik yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı
S^*	: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
P	: Pozitif reel kısımlı fonksiyonlar sınıfı

K	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
C	: Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
$K(\alpha)$	: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H	: Yön koruyan, normalize edilmiş harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı
S_H^0	: $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar sınıfı
K_H	: Konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı
K_H^0	: $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı
C_H	: Konvekse yakın harmonik fonksiyonlar sınıfı
C_H^0	: $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş konvekse yakın harmonik fonksiyonlar sınıfı
S_H^*	: Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H^{0*}	: $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S_H^*(\alpha)$	: α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$K_H(\alpha)$	: α mertebeli konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı
P_H	: Pozitif reel kısımlı harmonik fonksiyonlar sınıfı
PR_H	: Pozitif reel kısımlı ve reel katsayılı harmonik fonksiyonlar sınıfı
P_H^0	: $b_1 = 0$ özelliğindeki tüm pozitif reel kısımlı harmonik fonksiyonlar sınıfı
$H(p)$	: U birim diskinde, çok değerli ve yön koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfı
$S_H^*(p)$	: Çok değerli yıldızıl harmonik fonksiyonlar sınıfı
$K_H(p)$	: Çok değerli konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı
$S_H^*(p,\alpha)$	: α mertebeli çok değerli yıldızıl harmonik fonksiyonlar sınıfı
$K_H(p,\alpha)$	: α mertebeli çok değerli konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı

Σ : $U-\{0\}$ da 1 rezidülü ve orijinde basit kutba sahip yalınkat meromorfik fonksiyonlar sınıfı

Σ_s : Yalınkat meromorfik fonksiyonlar sınıfı

$\Sigma^*(\alpha)$: α mertebeli meromorfik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\Sigma_K(\alpha)$: α mertebeli meromorfik konveks fonksiyonlar sınıfı

Σ'_H : Birim diskin dışında, yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı

Σ_H : Birim diskin dışında, logaritmik singüleritesi kaldırılmış yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı

Σ_H^0 : $\left\{ f-c : f\in\Sigma'_H \ ve \ c\notin f(\widetilde{U})\right\}$, Σ'_H sınıfında sıfırı olmayan fonksiyonlar sınıfı

Σ^*_H : Σ_H sınıfında ve orijine göre yıldızıl olan fonksiyonlar sınıfı

Σ^*_{RH} : Σ^*_H sınıfına ait, $h(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{-k}$ ve $g(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-k}$; $a_k\geq 0$, $b_k\geq 0$ olmak üzere $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf

$clcoM$: M kümesini kapsayan en küçük kapalı konveks küme

1. GİRİŞ

En basit anlamda geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu, karmaşık değerli fonksiyonların resim bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitik özelliklerini incelemektir. Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi yalınkat fonksiyonlardır. Bu teorinin ortaya çıkma nedenleri, Koebe (1907) tarafından yayınlanan Riemann Dönüşüm Teoremi'nin genelleştirilmesi ile ilgili çalışma, Gronwall (1914/1915)'ın Alan Teoremi ispatı, Bieberbach (1916)'ın ortaya koyduğu, normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların katsayıları için tahminler ve bu tahminlerin sonuçlarıdır. Analitik olarak, bir yalınkat fonksiyon sıfırdan farklı bir türeve sahip iken, geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de yalınkat fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür.

Harmonik yalınkat fonksiyonlar, analitik yalınkat fonksiyonlarla yakından ilişkilidir. Ancak analitik yalınkat fonksiyonların tersine, harmonik fonksiyonlar resim bölgeleri ile belirlenemezler. Ayrıca harmonik bir fonksiyonun birim diskin sınır aralığı üzerinde oluşturulabilmesi, harmonik fonksiyonlar ile analitik fonksiyonlar arasındaki bir diğer önemli farktır. Harmonik fonksiyonlar bir anlamda, analitik fonksiyonların bir genellemesi olarak görülebilir.

Harmonik fonksiyonlar teorisi, matematiğin birçok alanında uygulaması olan bir dalıdır. Özellikle mühendislik, tıp, yön eylem araştırması, fizik ve uygulamalı matematiğin alanlarında harmonik fonksiyonlardan yararlanılır. Örneğin, mühendislik ve fizikte bir harmonik fonksiyon potansiyel fonksiyon olarak adlandırılır ve termal kararlı sistemler, ideal akışkanlar, elektromanyetik teori gibi alanlarda önemli bir yere sahiptir.

Son yıllarda, harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisi, oldukça popüler bir araştırma konusu haline gelmiştir. Özellikle, analitik yalınkat (konform) fonksiyonlar hakkında bilinen klasik sonuçların, harmonik dönüşümlere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği, karmaşık analiz alanında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir.

Düzlemdeki harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinin gelişiminde, diferansiyel geometri önemli bir rol oynar. 1920 li yılların başlarında diferansiyel geometri çalışanlar, minimal yüzey teorisinde harmonik yalınkat fonksiyonlar ile çalışmışlardır. Daha sonra karmaşık analizciler analitik yalınkat fonksiyonların bir genelleştirilmesi olarak, harmonik yalınkat fonksiyonların özel bir durumu olan, yön koruyan harmonik fonksiyonlar teorisini incelemeye başlamışlardır. Buradaki asıl problem analitik yalınkat fonksiyonlar ile yön koruyan harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Clunie ve Sheil-Small (1984), teorinin bu problemine yanıt olabilecek çalışmalarını yayınlamışlardır. Çalışmalarında, analitik yalınkat fonksiyonlar için iyi bilinen genişleme, büyüme-bükülme, örtülüş teoremleri ve katsayı eşitsizlikleri gibi problemlerin yön koruyan harmonik fonksiyonlar teorisinde benzerlerini göstermişlerdir. Bununla beraber verilen sonuçların pek çoğu hala kesinlik kazanmış değildir. Teoride merak uyandıran bir diğer beklenti, Riemann Dönüşüm Teoremi'nin yön koruyan harmonik fonksiyonlar için benzerini ortaya koyma problemidir. Hengartner ve Schober (1986), bu problemi çözüme kavuşturmuşlardır. Bu çalışmalar sayesinde, teori popüler bir alan haline gelmiştir ve üzerinde pek çok araştırma yapılmaktadır.

Düzlemdeki harmonik fonksiyonlar, reel ve sanal kısımları birbirinin eşleniği olmayan yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyonlardır, yani bu fonksiyonlar Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasını gerektirmeyen fonksiyonlardır. Bu nedenle yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyonların analitik olması gerekmez.

Fonksiyonlarla ilgili yapılan çalışmalarda sınır belirleme, bilinen bir durumdur. Yalınkat fonksiyonlar teorisinde incelenen fonksiyonların katsayı sınırlarını, modülünün alt ve üst sınırlarını bulma problemi, bizi harmonik dönüşümler teorisinde ele alınan fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini bulmaya, büyüme-bükülme ve ekstrem teoremlerinin kesin formlarını elde etmeye yönlendirir. Birçok durumda analitik yalınkat fonksiyonların bazı özellikleri, harmonik dönüşümlerle yapılan genelleştirmelerde önemli rol oynarlar. Ancak bazı özellikler, sadece analitik durumlar için geçerli olup, harmonik dönüşümlere genelleştirilemezler. Diğer taraftan harmonik dönüşümler için elde edilen sonuçların bazıları, konform dönüşümler için elde edilen sonuçlara benzemeyebilir. Düzlemdeki harmonik dönüşümler, birçok önemli özelliğe sahip olmasına rağmen bu özellikler daha yüksek boyutlu uzaylara genişletilemez. Hatta bu klasik sonuçları genelleştirme çabası üç boyutlu uzaylar için bile başarısız olmuştur.

2. YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, tez kapsamında bilinmesi gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte yalınkat fonksiyonlar ve bazı alt sınıfları verilecektir.

2.1. Ön Bilgiler

Karmaşık düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* adı verilir. Eğer bir bölgenin tümleyeni Riemann küresinde açık ve bağlantılı ise bu bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir *yay* veya *eğri* denir. Eğer , $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ eğrisine *kapalı eğri* denir. Kendi kendini kesmeyen eğrilere *basit eğri*, hem basit hem de kapalı eğrilere de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisi tarafından sınırlanan bölgeye de *Jordan bölgesi* denir.

Bir f fonksiyonunun $z_0\in\mathbb{C}$ noktası için

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* denir. Bir D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu, D nin her noktasında diferansiyellenebilir ise verilen bölgede analitiktir denir. Bir $D\subseteq\mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında türevlenebilen fonksiyonlara D bölgesinde *analitik fonksiyon* denir (Palka 1991). f fonksiyonunun z_0 noktasında analitik olması durumunda, f fonksiyonunun z_0 noktasında her mertebeden türevi vardır ve

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

şeklinde bir Taylor serisine açılabilir. Bu açılım tektir (Palka 1991).

$D\subset\mathbb{C}$ açık kümesinde tanımlı bir $f=u+iv$ fonksiyonu D bölgesinin her noktasında u_x,u_y,v_x,v_y sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f fonksiyonunun D bölgesinde analitik olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$u_x = v_y \qquad ve \qquad u_y = -v_x$$

Şeklindeki Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır. Bu durumda $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$ dir.

f fonksiyonu, z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun *singüler noktası* denir. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değil fakat bir $r > 0$ sayısı için $0 < |z - z_0| < r$ bölgesinde analitik ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *ayrık singüler noktası* denir. z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktası ise f fonksiyonu $0 < |z - z_0| < r$ bölgesinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{2.1}$$

şeklindeki Laurent açılımına sahiptir. Eğer (2.1) ifadesinin bütün a_{-n} katsayıları sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kaldırılabilir singüler noktası,* eğer sonlu sayıda a_{-n} dışında diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kutup noktası* , eğer sonsuz sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *esas singüler noktası denir.* f fonksiyonunun bir bölgedeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna bu bölgede *meromorf fonksiyon* denir.

f , $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa), yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde *yalınkat (univalent veya schlicht) fonksiyon* denir (Duren 1983). Eğer f fonksiyonu D bölgesinin bir z_0 noktasının belli bir komşuluğunda yalınkat ise bu durumda f fonksiyonuna z_0 noktasında *yerel (lokal) yalınkat fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.1. Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

$f'(z_0) \neq 0$ koşulu f fonksiyonunun yalınkatlığı için gerekli fakat yeterli değildir, yani f analitik fonksiyonu yalınkat ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Fakat tersi daima doğru olmaz.

Bir bölgede yerel yalınkat olan analitik fonksiyonlar verilen bölgede yalınkat olmak zorunda değildir. Örneğin; $f(z)=z^2$ fonksiyonu $D=\left\{z:1<|z|<2,\,0<\arg z<3\pi/2\right\}$ bölgesinde yerel yalınkat olduğu halde bu bölgede yalınkat değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, D bölgesinde analitik ve her $z_0\in D$ için $f'(z_0)\neq 0$ koşulu sağlandığından yerel yalınkattır. Fakat

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}+i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}-i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=i\frac{9}{4}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu verilen bölgede yalınkat değildir.

Eğer $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel yalınkat ise, bu durumda $z\in D$ noktasında $f'(z)$ türevi, f fonksiyonunun yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme ve yerel dönmenin birer ölçüsüdür.

Bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme verilen noktada *konformdur* denir. Eğer f dönüşümü D bölgesindeki bütün noktalarda konform ise, f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve yalınkat bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Mobius dönüşümüdür. Bu dönüşüm a,b,c,d karmaşık sabitler olmak üzere

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\,;\quad ad-bc\neq 0$$

dönüşümü genişletilmiş karmaşık düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\right)$ kendi üzerine resmeder.

Yalınkat fonksiyon teorisinin en önemli sonuçlarından biri de Riemann dönüşüm teoremidir. z-düzlemindeki $D_1\underset{\neq}{\subset}\mathbb{C}$ bölgesini, w-düzlemindeki D_2 bölgesi üzerine resmeden analitik bir f fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Bernard Riemann tarafından doktora tezinde ortaya atılmıştır (Ahlfors 1979). *Riemann Dönüşüm Teoremi* olarak bilinen bu teorem, *Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin* doğmasına neden olmakla birlikte, Koebe (1907) tarafından konform fonksiyonlara genişletilerek daha kullanışlı bir hale getirilmiştir.

Teorem 2.1.3. (Riemann Dönüşüm Teoremi) $D \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini U birim diski üzerine birebir ve konform olarak resmeden $z_0 \in D$ için $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991).

2.2. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Yalınkat fonksiyonlar teorisi çok geniş ve karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak gerekir. Ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi ile D bölgesi yerine U birim diskini alabiliriz. U birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş, yani $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonlara *normalize edilmiş analitik fonksiyonlar* denir ve bu şekildeki fonksiyonların kümesi S ile gösterilir.

Her $f \in S$ fonksiyonu

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıdaki gibidir.

i. $w=f(z)=z$ birim fonksiyon.

ii. $w=f(z)=z(1-z)^{-1}=z+z^2+z^3+\ldots,$ U birim diskini $\operatorname{Re}\{w\}>-1/2$ bölgesi üzerine resmeder.

iii. $w=f(z)=z(1-z^2)^{-1}=z+z^3+z^5+\ldots,$ U birim diskini tüm karmaşık düzlemden

$(-\infty,-\frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2},\infty)$ yarı doğrularının çıkarılması ile elde edilen bölge üzerine resmeder.

iv. $\log z = \log|z| + i\arg z$ şeklinde tanımlanan $\log z$ fonksiyonu, $\arg z$ nin sonsuz sayıda değeri olması nedeniyle, diğer bir ifade ile iki değeri arasındaki fark $2\pi i$ nin bir katı olduğundan *çok değerli* bir fonksiyondur. Dolayısıyla her bir z değerine $\log z$ fonksiyonunun sonsuz sayıda değerleri karşılık gelebilir. $\arg z$ nin verilen bir değerine karşılık gelen $\log z$ ye *logaritmanın bir dalı* denir. $\arg z$ nin $-\pi < \arg z \leq \pi$ aralığındaki dalına $\log z$ nin *esas değeri* denir. Buna göre $\log z$ fonksiyonu, her biri *tek değerli* sonsuz sayıda dala sahiptir. Dolayısıyla $\log z$ fonksiyonu seçilen sabit bir dal üzerinde tek değerli olur. Bu koşul altında $w = f(z) = \frac{1}{2}\log[(1+z)/(1-z)]$ fonksiyonu, U birim diskini $-\pi/4 < Imw < \pi/4$ bölgesi üzerine resmeder.

v. $w = f(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\left[1-(1-z)^2\right]$, U birim diskini bir kardioidin içine resmeder.

Yalınkat iki fonksiyonun toplamı yalınkat olmak zorunda değildir. Bu nedenle, S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı S sınıfında olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \quad ve \quad f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları S sınıfında olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2} \text{ ise } f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

toplam fonksiyonu $z = \frac{1+i}{2}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olur, yani S sınıfında olmaz. Fakat S sınıfının sağladığı özellikler birçok dönüşüm altında korunur.

Bu dönüşümlerden bazıları aşağıdaki şekildedir.

- *Eşlenik alma:* $h \in S$ ve $g(z) = \overline{h(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^2 + \ldots$ ise $g \in S$ olur.
- *Döndürme:* $h \in S$ *ve* $g(z) = e^{-i\theta}h(e^{-i\theta}z)$ ise $g \in S$ olur.
- *Genişleme:* $h \in S$ *ve* $0 < r < 1$ *olmak üzere* $g(z) = r^{-1}h(rz)$ ise $g \in S$ olur.

- *Disk otomorfizması:* $h \in S$ *ve* $\alpha < 1$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{h\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) - h(\alpha)}{\left(1-|\alpha|^2\right)h'(\alpha)}$$

  ise $g \in S$ olur.

- *Değer bölgesi dönüşümü*: $h \in S$ ve ψ fonksiyonu h fonksiyonunun görüntü bölgesinde analitik, yalınkat, $\psi(0) = 0$ ve $\psi'(0)$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ h \in S$ olur.
- *İhmal edilmiş değer dönüşümü:* $h \in S$ ve $h(z) \neq w$ ise $g = (wh)/(w-h) \in S$ olur.
- *Karekök dönüşümü:* $h \in S$ ve $g(z) = \sqrt{h(z^2)}$ ise $g = (wh)/(w-h) \in S$ olur.

Sınırlı bir D bölgesinde analitik ve sınırında sürekli bir f fonksiyonunun maksimum modülünü D bölgesinin sınırında aldığını söyleyen *Maksimum Modül Teoreminin* önemli bir sonucu, $f(z)/z$ fonksiyonuna maksimum modül teoremi uygulanarak elde edilen Schwarz Lemmasıdır.

Teorem 2.2.1. (Schwarz Lemma) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise, o halde $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ olur. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir (Ponnusamy ve Silverman 2006).

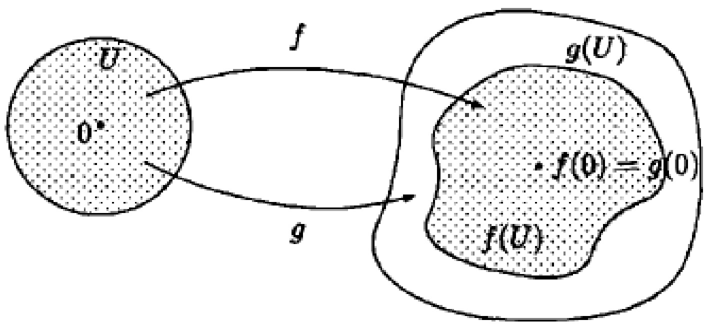
U birim diskinde analitik olan ve Schwarz Lemmasını sağlayan fonksiyonlara *Schwarz fonksiyonu* denir (Graham ve Kohr 2003). Schwarz fonksiyonları, subordinasyon prensibinin temel elemanlarıdır.

Subordinasyon prensibi, karmaşık analizde önemli rol oynamaktadır. Subordinasyon kavramı ilk olarak Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmış ancak temel bağıntılar Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından bulunmuştur. Subordinasyon prensibi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

f ve g birim diskte analitik iki fonksiyon olsun. U birim diskinde

$$f(z) = g(w(z))$$

olacak şekilde $w(z) \leq 1$ ve $w(0) = 0$ koşullarını sağlayan analitik (yalınkat olmak zorunda olmayan) bir w fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *subordinedir* denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun yalınkat olması durumunda $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ önermeleri sağlanır (Miller ve Mocanu 2000). f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordine oluşu Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu

Subordinasyon ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.2.2. f ve g fonksiyonları, U birim diskinde analitik ve g U da yalınkat olsun. $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = g(w(z))$$

olacak şekilde Schwarz Lemmasını sağlayan bir w fonksiyonunun bulunmasıdır (Goodman 1983).

Yalınkat fonksiyonlardaki önemli teoremlerden birisi de fonksiyonların ve türevlerinin modüllerinin alt ve üst sınırlarının belirlendiği büyüme (growth), bükülme (distortion) ve örtülüş teoremleridir.

Teorem 2.2.3. $f \in S$ ise her $|z| = r < 1$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \qquad \textit{(BüyümeTeoremi)}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad \textit{(Bükülme Teoremi)}$$

$$f(U) \supset D(0,1/4) \qquad \textit{(Örtülüş Teoremi)}$$

ifadeleri sağlanır. Burada $D(0,1/4)$ orijin merkezli ve $1/4$ yarıçaplı açık diski göstermektedir (Duren 1983).

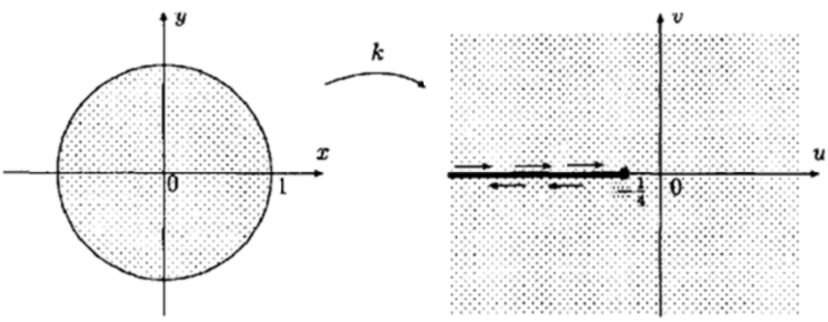
S sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklindeki *Koebe Fonksiyonu*dur. Koebe fonksiyonu U da

$$k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n \tag{2.2}$$

şeklinde bir Taylor serisi açılımına sahip olup, U birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ üzerine konform olarak resmeder (Şekil 2.2). Koebe fonksiyonu, S sınıfındaki fonksiyonlar içinde U birim diskini en geniş bölge üzerine yalınkat olarak resmeden fonksiyondur. Eğer γ belli bir w_0 için $|w_0| \ge 1/4$ noktasından sonsuza uzanan herhangi basit bir eğri ise bu durumda, U birim diskini γ eğrisinin tümleyenine dönüştüren, S sınıfına ait bir fonksiyonu bulmak mümkündür.



Şekil 2.2. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

Her bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}, \qquad (z \in U)$$

fonksiyonuna Koebe fonksiyonunun *rotasyon fonksiyonu* denir.

Koebe (1907) aşağıdaki sonucu ortaya koymuştur.

Teorem 2.2.4. $\bigcap_{f \in S} f(U) \supset \{w : |w| \le c\}$ şartını sağlayan pozitif bir c sabiti vardır**.**

Bu teoremde Bieberbach (1916) $c = 1/4$ olarak bulmuştur. Fakat teorem 1916 yılına kadar pek bir uygulama bulamamıştır. $c = 1/4$ olması demek, birim diskin $f \in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $|w| < 1/4$ açık diskini örttüğü anlamına gelir. Ayrıca k, (2.2) ile verilen Koebe fonksiyonu olmak üzere $k(U)$ içinde kalan en büyük diskin yarıçapı $1/4$ olur.

Koebe fonksiyonunun birim diski resmettiği bölgenin maksimal özelliği, simetrik oluşu ve katsayılarının ölçüsü bizi Bieberbach (1916) tarafından ortaya atılmış ve uzun yıllar kestirim olarak kalmış aşağıda verilen Bieberbach Kestirimine götürür.

Bieberbach Kestirimi, $f \in S$ olması durumunda, her $n \ge 2$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliğinin olduğunu söyler ve her $n \ge 2$ için $|a_n| = n$ olması durumu f fonksiyonunun (2.2) ile verilen Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması halinde elde edilir (Bieberbach 1916).

Gerçekte Bieberbach, $|a_2| \le 2$ olduğunu ispatlamış ve bu sonucun yukarıdaki gibi genelleştirilebileceğini bir öneri olarak belirtmiştir. Daha sonraki yıllarda Lowner (1923) bu şekildeki fonksiyonların parametrik gösterimlerini geliştirmiş ve $|a_3| \le 3$ olduğunu ispatlamıştır. Dördüncü katsayı için eşitsizlik ise 1955 yılına kadar bulunamamıştır. Daha sonra, Garabedian ve Schiffer (1955) varyasyonel bir metod kullanarak $|a_4| \le 4$ olduğunu oldukça uzun ve zor bir ispat yoluyla ispatlamışlardır. Charzyński ve Schiffer (1960) bu katsayı için birbiri ile bağlantılı iki basit ispat vermişlerdir. Pederson (1968/1969) ve Ozowa (1969), $|a_4| \le 4$ olduğunu ispatlamışlardır.

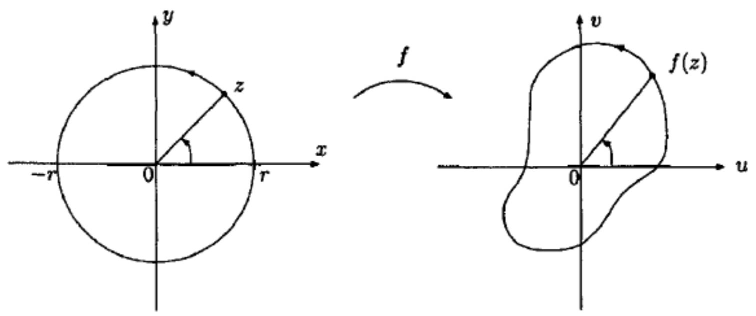
Bir eşitsizlikte, eşitliği veren fonksiyona *ekstremal fonksiyon* denir.

(2.2) ile verilen Koebe fonksiyonu ekstremal bir fonksiyon olduğundan buradaki katsayılara bakılarak $|a_n| \le n$ olduğunu tahmin etmek mümkündür.

Bieberbach kestirimi ile S sınıfındaki fonksiyonların katsayı problemi üzerine, birbiri ile bağlantılı altı tane önemli kestirim verilmiştir. Bieberbach kestiriminin doğruluğu 79 yıl sonra, Branges (1985) tarafından ispatlanmıştır. Bu kestirimin ispatı, S sınıfının birçok alt sınıfının ortaya çıkmasına neden olmuştur.

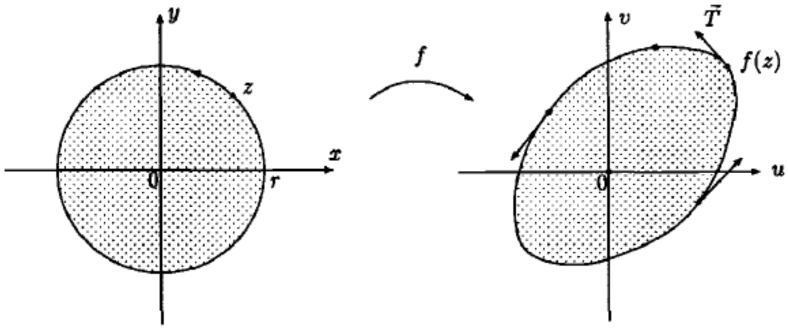
S sınıfının önemli bir alt sınıfı yıldızıl fonksiyonlardan oluşur. Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve bir $z_0 \in D$ noktasını ele alalım. z_0 noktasını, her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine z_0 *noktasına göre yıldızıl* denir. Orijine göre yıldızıl olan bölgelere de sadece *yıldızıl* denir. Geometrik olarak, D kümesinin yıldızıl küme olması demek, her noktasının z_0 noktasından görünebilmesi demektir. f fonksiyonu yalınkat ve görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl ise, f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir (Şekil 2.3). Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Yıldızıl fonksiyonlara $k(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonundan elde edilen $\log k'(z)$ fonksiyonunu örnek olarak verebiliriz.



Şekil 2.3. Yıldızıl bölge

S sınıfının diğer önemli bir alt sınıfı da konveks fonksiyonların sınıfıdır. Her noktasına göre yıldızıl olan D kümesine *konveks küme* denir. Diğer bir ifade ile, D kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinin içinde kalıyorsa, D kümesine *konvekstir* denir. Genel olarak, bir f fonksiyonu yalınkat ve görüntü bölgesi konveks ise, f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir (Şekil 2.4) (Pommerenke 1973). Konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.



Şekil 2.4. Konveks bölge

Teorem 2.2.5. (Noshiro-Warschawski Teoremi) f fonksiyonu, konveks bir D bölgesinde analitik ve bu bölgede $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise, f fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır (Goodman 1983).

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde bir diğer önemli sınıf ise $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşulları ile U birim diskinde analitik ve

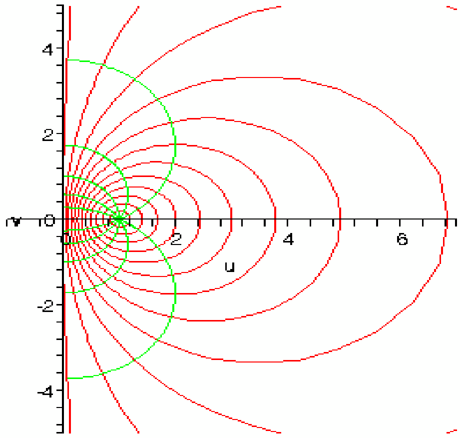
$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan *pozitif reel kısımlı fonksiyonlar* sınıfıdır. Bu fonksiyonların sınıfı *Caratheòdory sınıfı* olarak da bilinir ve P ile gösterilir. P sınıfındaki fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin; $n \geq 2$ tamsayısı için $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen U da yalınkat değildir.

U da analitik

$$\wp(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + ... = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu P sınıfında olup, U birim diskini $\Omega = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ üzerine birebir ve analitik (konform) olarak resmeder. $\wp$ fonksiyonu P sınıfındaki bu özelliğe sahip tek fonksiyon değildir. Ancak bu fonksiyon P sınıfındaki fonksiyonlar içinde önemlidir. $\wp$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü Şekil 2.5. de gösterilmiştir.



Şekil 2.5. $\wp(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Yıldızıl ve konveks fonksiyonları, pozitif reel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlamak mümkündür. U birim diskinde analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$f\in S^{*}\Leftrightarrow\frac{zf'(z)}{f(z)}\in P$$

$$f\in K\Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in P$$

özellikleri sağlanır (Duren ve ark 1996).

Aşağıda verilen *Alexander Teoremi,* konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 2.2.6. (Alexander Teoremi) f fonksiyonu, U birim diskinde $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\in K\Leftrightarrow zf'\in S^{*}$$

önermesi doğrudur (Alexander 1915).

S^{*} sınıfını kapsayan, S sınıfının diğer bir alt sınıfı da konvekse yakın fonksiyon sınıfıdır. Bu sınıf Kaplan (1952) tarafından geliştirilmiştir.

Bir f fonksiyonu $|z|<1$ bölgesinde analitik olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0$$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya eşdeğer olarak

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\}>0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna *konvekse yakın fonksiyon* denir. $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalleştirilmiş konvekse yakın f fonksiyonlarının sınıfı C ile gösterilir. Burada f fonksiyonunun yalınkat olması öncelikli koşul değildir. Ayrıca g fonksiyonunun da $g(0)=g'(0)-1=0$ şeklindeki normalizasyon koşullarını sağlaması gerekmez.

D herhangi bir bölge olsun. Eğer D bölgesinin tümleyeni, birbiri ile kesişmeyen doğru parçalarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, D bölgesine *konvekse yakın bölge* denir.

Yukarıda verilen sınıflar için

- Her konveks fonksiyon konvekse yakındır.
- Her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır.
- Her konvekse yakın fonksiyon yalınkattır.

özellikleri sağlanır. Buna göre,

$$K\subset S^{*}\subset C\subset S$$

şeklindeki kapsama bağıntısı yazılabilir.

Robertson (1936), α *mertebeli konveks* ve α *mertebeli yıldızıl* fonksiyonları tanımlamıştır.

S sınıfındaki bir f fonksiyonu her $z \in U$ için,

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona α *mertebeli konveks fonksiyon* denir ve bu fonksiyonların kümesi $K(\alpha)$ ile gösterilir.

S sınıfındaki bir f fonksiyonu, her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona da α *mertebeli yıldızıl fonksiyon* denir ve bu fonksiyonların kümesi $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

$$\left.\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|_{z=0} = 1+\left.\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0} = 1$$

olduğundan $\alpha \le 1$ olması gerekir. Aksi halde $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri boş olacaktır. Ayrıca $\alpha = 1$ olması durumunda $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri sadece $f(z) = z$ şeklindeki bir fonksiyona sahip olurlar. Genellikle $0 \le \alpha < 1$ koşulu göz önüne alınır. Buradaki α değeri büyüdükçe $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir.

Bu sınıflar için Alexander Teoremini,

$$f(z) \in K(\alpha) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in S^*(\alpha)$$

önermesi ile verebiliriz.

3 . HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, reel ve sanal kısımlarının eşlenik olması gerekmeyen karmaşık değerli harmonik yalınkat fonksiyonlar ve bazı alt sınıfları hakkında genel bilgiler verilecektir. Bu fonksiyonlar analitik olmadığı için analitik yalınkat fonksiyonlarda görülmeyen bazı zorlukları harmonik yalınkat fonksiyonlarda görmek mümkündür. Konform dönüşümlerin bir genellemesi olarak bilinen bu fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından yapılmıştır. Yapılan bu ilk çalışma ile harmonik yalınkat dönüşümler aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Ayrıca birçok matematikçi bu alanda farklı araştırmalar yapmaya başlamışlardır. Bu bölümde verilen bilgilerin ayrıntılarına Duren (2004) kaynağından ulaşılabilir.

3.1. Karmaşık Harmonik Dönüşümler

Bir D bölgesinde tanımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$\Delta_u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

şeklindeki Laplace denklemini sağlıyorsa, u fonksiyonuna D de *reel harmonik dönüşüm* denir. Eğer $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ fonksiyonları bir D bölgesinde reel harmonik iki dönüşüm ise $f = u + iv$ fonksiyonuna D de *karmaşık harmonik dönüşüm* denir. $f = u + iv$ karmaşık harmonik dönüşümünün birebir olması durumunda da f fonksiyonuna D de *harmonik yalınkat dönüşüm* denir. Genellikle, harmonik dönüşüm denildiğinde karmaşık değerli harmonik yalınkat fonksiyon düşünülür.

Buna göre karmaşık değerli harmonik yalınkat bir fonksiyon, reel ve sanal kısımları reel harmonik olan ve bir bölgeyi birebir harmonik olarak dönüştüren bir fonksiyondur. Karmaşık değerli harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikleri harmonik yalınkat fonksiyonlara taşımak mümkün değildir. Örneğin; $w = f(z) = -2xy + i(y^2 - x^2)$ fonksiyonu karmaşık düzlemde harmonik olmasına rağmen hiçbir yerde analitik değildir. Ayrıca D bölgesinde tanımlı fonksiyonların analitikliği, bileşke ve çarpım kuralları altında korunmasına rağmen bu kurallar harmonik fonksiyonlarda geçerli değildir. Örneğin; $f(x)=x$ ve $g(x)=x^2$ fonksiyonları iki harmonik fonksiyonun çarpımının harmonik olması gerekmediğini gösterir. Ayrıca $f:D\to\mathbb{C}$ ve $g:D\to\mathbb{C}$ fonksiyonları için, $g\circ f$ bileşke fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Benzer bir şekilde $f:D\to\mathbb{C}$ harmonik bir fonksiyon ve $g:f(D)\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ise $g\circ f$ bileşke fonksiyonu harmonik olmayabilir. Ancak $f:D\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun analitik ve $g:f(D)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun harmonik olması durumunda $g\circ f$ bileşke fonksiyonu harmoniktir. Analitik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmaz. Hatta f harmonik ise, $1/f$ ve f^{-1} fonksiyonları harmonik olmayabilir. Üstelik harmonik dönüşümlerin sınır davranışlarının analitik yalınkat fonksiyonlarınkinden çok daha karmaşık olduğunu söyleyebiliriz. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisini bir şekilde harmonik dönüşümlere taşımak mümkündür (Duren 2004).

Konform dönüşümlerde olduğu gibi düzlemde basit bağlantılı herhangi bir bölgede harmonik yalınkat dönüşümleri çalışmak yerin birim diskte çalışmak daha kullanışlıdır. Çünkü f, basit bağlantılı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik yalınkat bir dönüşüm ve φ de U birim diskini D bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşüm ise $F=f\circ\varphi$, U birim diskini G üzerine resmeden harmonik yalınkat bir dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise, $f=F\circ\varphi^{-1}$ şeklindedir.

Konformal olması gerekmeyen harmonik yalınkat dönüşümlerin en basit örnekleri, $|\alpha|\neq|\beta|$ olmak üzere,

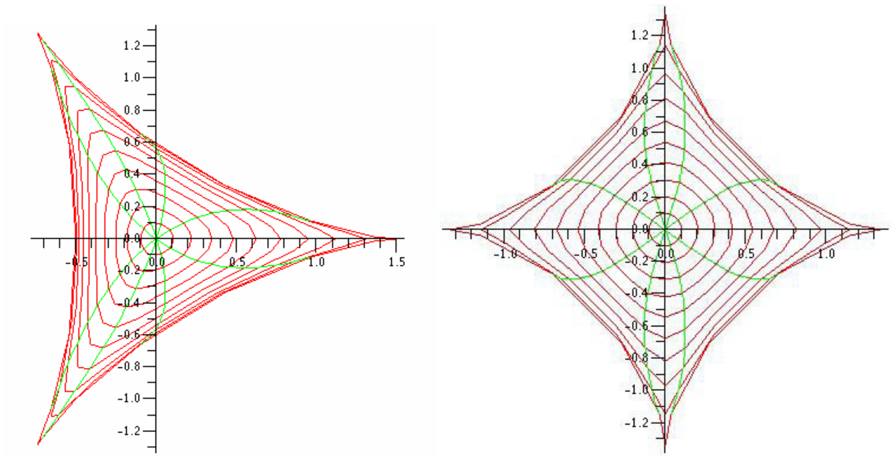
$$f(z)=\alpha z+\gamma+\beta\overline{z}$$

şeklindeki afin dönüşümleridir. $\gamma=0$ olduğunda bu dönüşüm, doğrusal dönüşüm haline gelir. Harmonik dönüşümler bir afin dönüşümdür ve bu dönüşümlerin her bileşkesi harmoniktir, yani f harmonik ise $\alpha f+\gamma+\beta\overline{f}$ şeklinde yazılabilir.

Diğer bir önemli örnek, U birim diskini $|w|=3/2$ çemberi ile çevrelenmiş üç uçlu bir eğrisel üçgen (hypocycloid) içine resmeden $f(z)=z+\frac{1}{2}\overline{z}^2$ dönüşümüdür (Şekil 3.1a). Bu fonksiyonun yalınkat olduğunu göstermek için birim disk içinde bulunan z_1 ve z_2 noktaları için $f(z_1)=f(z_2)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right).\left(\overline{z}_1-\overline{z}_2\right)=2\left(z_2-z_1\right)$$

eşitliği bulunur. $\left|z_1+z_2\right|<2$ olduğundan yukarıdaki eşitlik sadece $z_1=z_2$ olması durumunda sağlanır. Böylece f fonksiyonu yalınkat olur. $n=2$ ve $n=3$ için $f(z)=z+\frac{1}{2}\overline{z}^2$ dönüşümü altında birim diskin görüntüleri sırasıyla Şekil 3.1. a ve b ile gösterilmiştir. Şekildeki eğriler eşmerkezcil çemberler ve merkezcil ışınların görüntülerinden oluşmaktadır.



(a) n=2 (b) n=3

Şekil 3.1. Birim diskin $f(z)=z+\frac{1}{2}\overline{z}^2$ dönüşümü altındaki görüntüsü

Karmaşık analizde $\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ operatörleri oldukça önemlidir. $z=x+iy$ ve $\overline{z}=x-iy$ karmaşık eşlenik çifti olmak üzere

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}\ ,\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

şeklinde alındığında $\partial/\partial z$ ve $\partial/\partial \overline{z}$ operatörlerini

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $f(x+iy)$ fonksiyonunu z ve $\overline{z}$ değişkenleri cinsinden

$$f(x+iy)=u\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle sürekli kısmi türevlere sahip $f=u+iv$ fonksiyonu için

$$f_x=u_x+iv_x \text{ ve } f_y=u_y+iv_y$$

gösterimleri kullanılabilir. Böylece kısmi türevlerle

$$f_z=\frac{1}{2}\left(f_x-if_y\right)=\frac{1}{2}\left[\left(u_x+v_y\right)-i\left(u_y-v_x\right)\right],\qquad f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(f_x+if_y\right)=\frac{1}{2}\left[\left(u_x-v_y\right)+i\left(u_y+v_x\right)\right]$$

ve $\left|f_z\right|^2-\left|f_{\overline{z}}\right|^2=u_xv_y-u_yv_x$ eşitliklerini yazabiliriz. Karmaşık bir f fonksiyonu için $\overline{f_z}=0$ durumunda

$$u_x=v_y \text{ ve } u_y=-v_x$$

şeklindeki Cauchy-Riemann denklemlerini elde edebiliriz. Ayrıca

$$\Delta f=4\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}=4f_{z\overline{z}}$$

şeklindeki Laplace denkleminin karmaşık formunu gösterebiliriz. Böylece karmaşık değerli bir f fonksiyonunun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$\Delta f=4f_{z\overline{z}}$$

şeklindeki Laplace denklemlerini sağlamasıdır. Ayrıca z ve $\overline{z}$ arasındaki türev ilişkisini

$$\overline{\left(f_z\right)}=\left(\overline{f}\right)_{\overline{z}}$$

eşitliğinden görebiliriz.

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan (u,v) fonksiyon çifti *eşlenik çift* olarak adlandırılır. v, u fonksiyonunun *harmonik eşleniği* ve dolayısıyla $-u$ fonksiyonu da v fonksiyonunun harmonik eşleniği olur.

$u(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde harmonik olsun. Bu fonksiyon yardımıyla $g=u_x-iu_y$ fonksiyonunu tanımlayalım. $U=u_x$ ve $V=-u_y$ olarak tanımlarsak

$g = U + iV$ olarak yazabiliriz. u harmonik fonksiyonunun verilen bölgede her mertebeden türevi olduğundan U fonksiyonu, benzer şekilde V fonksiyonu ve bu fonksiyonların birinci mertebeden türevleri de süreklidir, yani $U_x = u_{xx}$ ve $V_y = -u_{yy}$ fonksiyonları da D bölgesinde süreklidir. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan

$$u_{xx} = U_x = -u_{yy} = V_y \Rightarrow U_x = V_y \qquad \text{ve} \qquad u_{xy} = U_y = u_{yx} = -V_x \Rightarrow U_y = -V_x$$

eşitlikleri sağlanır. g fonksiyonu, D bölgesinde Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından bu bölgede analitik olur. Böylece basit bağlantılı bir D bölgesinde $f' = g$ olacak şekilde analitik bir f fonksiyonu bulunabilir. Buradan

$$U + iV = \left(\operatorname{Re} f\right)_x + i\left(\operatorname{Im} f\right)_x = -i\left(\left(\operatorname{Re} f\right)_y + i\left(\operatorname{Im} f\right)_y\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradaki $\operatorname{Im} f$, u fonksiyonunun harmonik eşleniği olarak bilinir. Böylece her harmonik fonksiyonun analitik bir fonksiyonun reel kısmı olarak yazılabileceğini gösteren

$$\left(\operatorname{Re} f\right)_x = U = u_x,\ \left(\operatorname{Re} f\right)_y = -V = u_y \Rightarrow \operatorname{Re} f = u + c$$

ifadesini elde edebiliriz.

u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik bir fonksiyon olmak üzere, $f = u + iv$ harmonik fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda

$$u = \operatorname{Re} F = \frac{F + \overline{F}}{2}, \quad v = \operatorname{Im} G = \frac{G - \overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere,

$$f = \frac{F + \overline{F}}{2} + \frac{G - \overline{G}}{2} = \left(\frac{F + G}{2}\right) + \left(\frac{\overline{F} - \overline{G}}{2}\right) = h + \overline{g}$$

olarak yazılabilir. Buradaki

$$f = h + \overline{g}$$

gösterimine f fonksiyonunun *kanonik (standart) gösterimi* denir ve bu yazılım tektir. h fonksiyonuna f fonksiyonunun analitik, g fonksiyonuna da *eş-analitik kısmı (co-analytic part)* denir. Ayrıca $h' = f$ ve $g' = \overline{f_{\bar{z}}}$ fonksiyonları f fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgede analitiktir.

Harmonik fonksiyonlar teorisinde, aşağıda verilen Jakobiyen kavramı oldukça önemli bir yere sahiptir.

$D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f : D \to \mathbb{C}$ ve $f = u + iv$ olsun. $z \in D$ olmak üzere

$$J_f = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

sayısına f fonksiyonunun z noktasındaki *Jakobiyeni* denir. $f = u + iv$ fonksiyonunun,

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + i f_y\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x + u_y\right) \text{ ve } f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

şeklindeki kısmi türevleri ile J_f Jakobiyeni arasında

$$J_f = \left|f_z\right|^2 - \left|f_{\bar{z}}\right|^2$$

şeklinde bir ilişki vardır. Eğer f fonksiyonu analitik ise f fonksiyonunun jakobiyeni $J_f(z) = \left|f'(z)\right|^2$ şeklinde yazılabilir. Analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul $J_f(z) \neq 0$ olmasıdır (Clunie ve Sheil-Small 1984). Lewy (1936) bu durumun harmonik dönüşümler için de doğru olduğunu aşağıdaki teoremle göstermiştir.

Teorem 3.1.1. (Lewy Teoremi) Bir harmonik dönüşümün z_0 noktasının bir komşuluğunda yerel olarak yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul z_0 noktasında $J_f(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Lewy 1936).

Lewy bu teoreme ek koşullar ekleyerek $\mathbb{R}^3$ için de bu teoremin doğru olduğunu göstermiştir.

Bir D bölgesinde harmonik yalınkat bir f fonksiyonu için $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise *yön çeviren* denir. $J_{\overline{f}} = -J_f$ olduğundan f fonksiyonu yön koruyan ise $\overline{f}$ eşlenik fonksiyonu da yönü ters çevirendir. Sonuç olarak, $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ olduğu yerlerde f fonksiyonu yerel olarak yalınkat ve yön koruyan, $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ olduğu yerlerde ise f yönü ters çeviren bir fonksiyondur. Eğer f fonksiyonu yön koruyan ise

$$\left(|f_z| - |f_{\bar{z}}|\right)|d_z| \le |dw| \le \left(|f_z| + |f_{\bar{z}}|\right)|d_z|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik geometrik olarak; f fonksiyonunun sonsuz küçük bir çemberi, büyük eksenin küçük eksene oranı

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olan sonsuz küçük elipslere dönüştürdüğünü söyler. $D_f = D_f(z),\ \ 1 \le D_f(z) < \infty$ oranına f fonksiyonunun z noktasındaki *genişlemesi (dilatation)* denir.

$K,\ 1 \le K < \infty$ şeklindeki sabit bir sayı olmak üzere, eğer yön koruyan bir f homeomorfizması verilen bir bölgede $|D_f(z)| \le K$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümüne *kuasikonform* veya *K-kuasikonform dönüşüm* denir. Buna göre $K = 1$ için $f_{\bar{z}} = 0$ olacağından f konform bir dönüşüm olur.

$\mu_f = f_{\bar{z}} / f_z$ oranına f fonksiyonunun *birinci karmaşık genişlemesi* denir. Eğer f yön koruyan bir dönüşüm ise $0 \le |\mu_f| < 1$ olur. Ayrıca $|D_f(z)| \le K$ olması için gerekli ve yeterli koşul $|\mu_f(z)| = (K-1)/(K+1)$ olmasıdır. Bu durumda bir yön koruyan homeomorfizmanın kuasikonform olması için gerekli ve yeterli koşul, bir bölgede onun karmaşık genişlemesinin $|\mu_f(z)| \le K < 1$ olmasıdır. f dönüşümünün konform olması için gerekli ve yeterli koşul ise, $\mu_f = 0$ olmasıdır (Lehto, Vırtanen 1973 ve Ahlfors 1966).

Harmonik fonksiyonlar teorisinde $\nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ oranına *ikinci karmaşık genişleme* denir. Harmonik dönüşümler teorisinde ν_f ikinci karmaşık genişlemesi ile μ_f birinci karmaşık genişlemesine göre daha kullanışlı sonuçlar elde etmek mümkündür. $|\nu_f| = |\mu_f|$ olduğundan f fonksiyonunun kuasikonform olması için gerekli ve yeterli koşul $|\nu_f(z)| \leq k < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 3.1.2. f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olsun. Bu durumda f fonksiyonunun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul, $\omega = \nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun D bölgesinde analitik olmasıdır (Hengartner ve Schober 1986).

Bu teorem özellikle yön koruyan f harmonik yalınkat dönüşümünün ikinci karmaşık genişlemesi olan $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun analitik ve modülünün 1 den daha küçük olduğunu gösterir. Bu nedenle $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *analitik genişlemesi* veya kısaca *genişlemesi* denir. Ayrıca $\omega = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun analitik olmasıdır. Bu teoreme bir uygulama olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

$$f(z) = z - \frac{1}{n}\bar{z}, \qquad n \geq 2$$

fonksiyonunu alalım. Her bir $n \geq 2$ değeri için f fonksiyonu harmoniktir ve $\omega(z) = -z^{n-1}$ şeklinde ikinci karmaşık genişlemesi vardır. $z_1, z_2 \in U$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

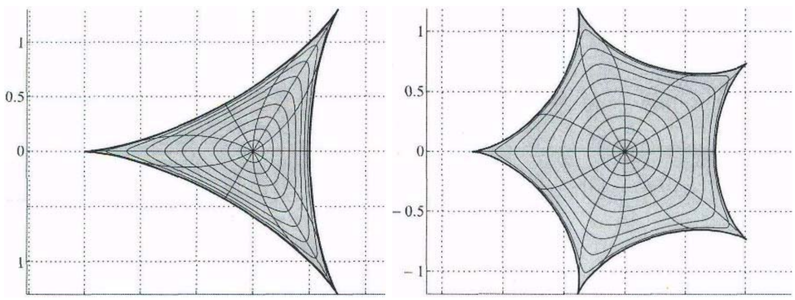
$$n(z_1 - z_2) = \bar{z}_1^{\,n} - \bar{z}_2^{\,n} = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2).(\bar{z}_1^{\,n-1} \bar{z}_2^{\,n-2}.z_2 + ... + \bar{z}_2^{\,n-1})$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın mutlak değerinin alınması ile

$$\left|\bar{z}_1^{\,n-1} + \bar{z}_1^{\,n-2}.z_2 + ... + \bar{z}_2^{\,n-1}\right| \leq n$$

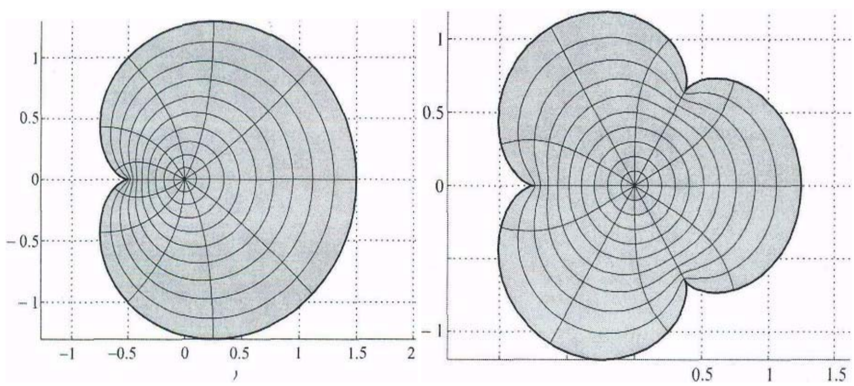
Olduğundan yukarıdaki eşitlik $z_1 = z_2$ dışında mümkün olmaz. Böylece f fonksiyonunun yalınkat olduğunu görebiliriz. Bu durumda f fonksiyonu, birim diski $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ kanatlı bir hiposikloid tarafından sınırlanan bölge üzerine resmeden bir harmonik dönüşümdür. Ayrıca $F(z) = z + \dfrac{1}{n}\overline{z}^n$ fonksiyonu, birim diskteki her nokta için $|F'(z) - 1| < 1$ olduğundan analitik ve yalınkattır. Böylece $F,$ birim diskte normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyondur.

$n = 2$ ve $n = 4$ değerleri için f ve F fonksiyonlarının görüntüleri sırası ile Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



(a) n=2 (b) n=4

Şekil 3.2. Birim diskin $f(z) = z - \dfrac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altındaki görüntüsü



(a) n=2 (b) n=4

Şekil 3.3. Birim diskin $F(z) = z + \dfrac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altındaki görüntüsü

3.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H ve S_H^0 Sınıfları

Bu kesimde, analitik yalınkat fonksiyonların genellemesi olarak harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfa ait bazı önemli özellikler verilecektir.

U birim diskinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \text{ ve } g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$

olmak üzere U da yön koruyan $f=h+\overline{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonu için $|g'(z)|<|h'(z)|$ eşitsizliği sağlanır. Bu durum $h'(z)\neq 0$ olduğunu gösterir. Böylece $h(0)=0$ ve $h'(0)=1$ koşulları ile normalize edebiliriz. U birim diskinde tüm yön koruyan, normalize edilmiş harmonik ve yalınkat dönüşümlerin sınıfı S_H ile tanımlanır. Bu sınıftaki bir f fonksiyonu, h ve g U birim diskinde analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n} \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir.

S ile S_H sınıfları arasında $S\subset S_H$ şeklindeki kapsama bağıntısını yazabiliriz.

F, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer F ailesindeki her (f_n) dizisi A bölgesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahip ise, F ailesine *normal aile* denir. S_H ailesi normal bir ailedir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

$f=h+\overline{g}\in S_H$ fonksiyonunun analitik kısmı olan h fonksiyonu yerel olarak yalınkat olmasına rağmen U birim diskinde yalınkat olması gerekmez. Diğer taraftan S_H sınıfına ait bir fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu harmonik olmasına rağmen yalınkat olmak zorunda olmadığından S_H kompakt değildir. Buna örnek olarak,

$$f_n(z)=z+\frac{n}{n+1}\overline{z}$$

şeklinde tanımlanan $f_n \in S_H$ afin dönüşümlerin bir dizisini verebiliriz. $z = x + iy$ için $f_n(z) \to f(x) = 2x$ yakınsaması U birim diskinde düzgündür ancak limit fonksiyonu yalınkat değildir.

Her bir $f \in S_H$ fonksiyonu için $|b_1| < |a_1| = 1$ olduğundan

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1 w}}{1 - |b_1|^2} \tag{3.2}$$

fonksiyonu yön koruyan bir afin dönüşümdür. Böylece

$$f_0 = \varphi \circ f = h_0 + \overline{g}_0$$

fonksiyonu

$$h_0(0) = g_0(0) = 0,\ h'(0) = 1\ ve\ g'(0) = 0$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat bir dönüşümdür. Bu nedenle, $f_0 \in S_H$ fonksiyonuna ek olarak $g'(0) = 0$ özelliğindeki bütün $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı eklenerek S_H^0 alt sınıfı elde edilir.

Bu sınıflar arasında $S \subset S_H \subset S_H^0$ şeklinde bir bağıntı vardır.

Eğer $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ ise $g'(0) = 0$ ve $|g'(z)/h'(z)| < 1$ olup Schwarz lemması gereği $|g'(z)| \le |z||h'(z)|$ olduğu görülebilir. Buna göre $f \in S_H^0$ ise $\omega = \overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ genişlemesi için $|\omega(z)| \le |z|$ eşitsizliği vardır.

Eğer $f \in S_H$ fonksiyonunu $f_0 \in S_H^0$ fonksiyonuna taşıyan $f \to f_0 = \vartheta \circ f$ dönüşümünün tersi alınırsa $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ elde edilir. Böylece $|b_1| < 1$ özelliğindeki belli bir $g'(0) = b_1$ sayısı için S_H sınıfı ile S_H^0 sınıfı arasında birebir bağıntı kurulmuş olur. Böylece S_H sınıfında çözümü zor olan bir problemi S_H^0 sınıfında çözerek tekrar S_H sınıfına taşımak mümkündür. Aşağıdaki teorem ekstremal problemlerin çözümünde önemli bir yere sahiptir.

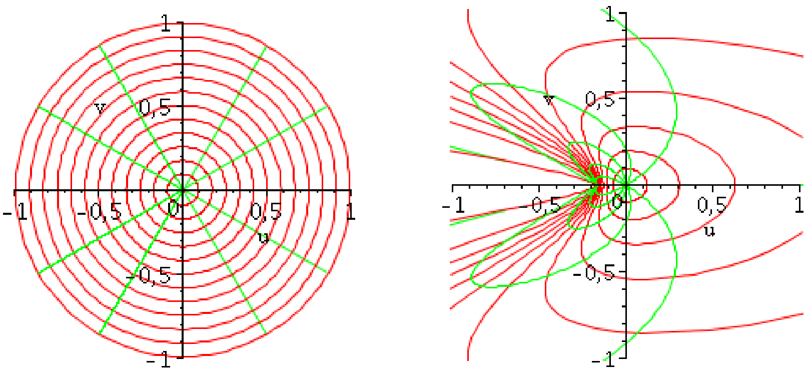
Teorem 3.2.1. S_H^0 sınıfı normal ve kompakttır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Teorem 3.2.2. $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için $|b_2| \leq 1/2$ olur (Duren 2004).

Clunie ve Sheil-Small (1984), analitik yalınkat fonksiyonlar için tanımlanan Koebe fonksiyonunun benzerini S_H^0 harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı için aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \qquad ve \qquad G(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $k_0 = H + \overline{G} \in S_H^0$ fonksiyonuna *Harmonik Koebe Fonksiyonu* denir. Harmonik Koebe fonksiyonu, U birim diskini harmonik olarak, negatif reel eksenden $(-\infty, -1/6]$ reel aralığı çıkarılmış tüm karmaşık düzlem üzerine birebir olarak dönüştürür (Şekil 3.4). $z = 1$ noktası hariç birim disk üzerindeki her z değeri için $k_0(z) = -1/6$ olur.



Şekil 3.4. Harmonik Koebe fonksiyonunun görüntüsü

Branges (1985) , 1984 yılında S sınıfı için Bieberbach kestiriminin ispatını yaptıktan sonra, S ailesi ve onun alt sınıfları için buldukları sonuçların harmonik yalınkat fonksiyonların S_H ve S_H^0 ailelerine de genişletilip genişletilemeyeceğini araştırmıştır. Clunie ve Sheil-Small (1984), bu genişletmenin mümkün olduğunu ancak bazı değişiklikler yapılarak bu sınıflardaki harmonik dönüşümler için benzer tahminler yapılabileceğini ortaya koymuşlardır. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda $|b_2|$ katsayısı için kesin sınır elde edilmiş olmasına rağmen $|a_2|$ katsayısı için henüz ispatlanmamış olan $|a_2| \le 5/2$ tahmini yapılmıştır (Sheil-Small 1990).

$f \in S_H$ olması durumunda $|z|$ değerine bağlı tüm $|f(z)|$ değerleri için pozitif bir alt sınır yoktur. Buna örnek olarak, $\varepsilon < 1$ olmak üzere tüm ε değerleri için $f(z) = z + \varepsilon\overline{z}$ fonksiyonunun S_H sınıfında olması verilebilir. Ayrıca Clunie ve Sheil-Small (1984), S_H^0 sınıfı için aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Teorem 3.2.3. $f \in S_H^0$ ise

$$|f(z)| \ge \frac{1}{4}\frac{|z|}{\left(|1+z|\right)^2}$$

eşitsizliği her $z \in U$ için geçerlidir. Böylece $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/16\} \subset f(U)$ kapsaması yazılır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Teorem 3.2.3 ile verilen sonuçlar kesin değildir, yani eşitliği sağlayan ekstremal bir fonksiyon bulunamamıştır. Yalınkat fonksiyonlardaki Koebe fonksiyonunun ekstremal özelliğinden dolayı $k_0(z)$ harmonik Koebe fonksiyonunun $1/16$ yarıçapı $1/6$ olarak genişletilebilir. Böylece aşağıdaki kestirimi verebiliriz.

Sonuç 3.2.4. Her $f \in S_H$ için $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/6\} \subset f(U)$ kapsaması sağlanır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Sonuç 3.2.5. $k_0(z) = H + \overline{G} \in S_H^0$ harmonik Koebe fonksiyonu için eşitlik

$$|a_n| \le \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \ |b_n| \le \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) \ \ ve \ \ \big||a_n| - |b_n|\big| \le n \tag{3.3}$$

katsayı tahminleri ile sağlanır. Clunie ve Sheil-Small'ın bu tahmini, Bieberbach kestiriminin S_H^0 sınıfına ait foksiyonlar için bir benzeridir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

$f_0 \in S_H^0$, $|b_1| < 1$ olmak üzere $f = h + \overline{g} \in S_H$ sınıfına ait fonksiyonlar $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ olarak yazılabileceğinden

$$|a_n| \le \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \ |b_n| \le \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

eşitsizliklerinin $f = h + \overline{g} \in S_H$ için

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \quad ve \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

olduğu görülür. Böylece S_H^0 sınıfı için $|a_2| \le 5/2$ ve S_H sınıfı için de $|a_2| < 3$ tahminleri elde edilir. Sheil-Small (1990), yukarıdaki tahmini geliştirip aşağıdaki şekilde verilen Bieberbach kestiriminin bir genellemesini elde etmiştir.

Sonuç 3.2.6. Eğer

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

fonksiyonu S_H sınıfında ise,

$$|a_n| \le \frac{2n^2+1}{3} \qquad (|n| = 2,3,...)$$

eşitsizliği geçerlidir (Sheil-Small 1990).

Clunie ve Sheil-Small (1984) tüm $f \in S_H$ fonksiyonları için $|a_2| < 12{,}173$ olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra bu kestirim tüm $f \in S_H$ fonksiyonları için $|a_2| < 57{,}05$ olarak bulunmuştur. (Sheil-Small 1990).

Teorem 3.2.7. $f \in S_H$ fonksiyonlarına ait $|a_2|$ katsayılarının en küçük üst sınırı (supremumu) α olsun. Bu durumda her $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \le |f(z)| \le \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha} - 1\right] \qquad ,(r = |z| < 1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca her $f \in S_H^0$ fonksiyonunun görüntüsü, $|w| < 1/2\alpha$ diskini kapsar (Sheil-Small 1990). Eğer $|a_2| = \alpha = 3$ olarak alınırsa, Teorem 3.2.7 nin sınırlarının mümkün olan en iyi sınırlar olduğu görülür. Ayrıca $k_0(z)=H+\overline{G}$ harmonik Koebe fonksiyonu için $0\le r<1$ olmak üzere

$$k_0(r)=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^3-1\right] \qquad ve \qquad k_0(-r)=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^3-1\right]$$

olduğu görülebilir.

3.3. Konveks Harmonik ve Konvekse Yakın Harmonik Fonksiyonlar

Bu kesimde, birim diskin konveks ve konvekse yakın bölgeler üzerinde harmonik yalınkat dönüşümlerin genel özellikleri verilecektir. Özellikle bu dönüşümlerin yapısal özellikleri ile ilgili Rado-Kneser-Choquet teoremi ve katsayı eşitsizliklerinden söz edilecektir.

$f\in S_H$ ve görüntü bölgesi $f(U)$ konveks bir bölge ise, f fonksiyonuna U birim diskinde *konveks harmonik fonksiyon* denir. Konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı K_H ile gösterilir. Konveks harmonik fonksiyonlar, analitik olarak $z=re^{i\theta},\ 0\le\theta<2\pi,\ 0\le r\le 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})\right)\right\}>0 \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem bir konveks bölgenin birim disk üzerine harmonik yalınkat bir fonksiyonun temsilini gösterir.

Teorem 3.3.1. (Rado-Kneser-Choquet Teoremi) $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, Γ Jordan eğrisi tarafından sınırlandırılmış konveks bir bölge, φ de ∂U den Γ üzerine bir homeomorfizm olsun. Bu durumda

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\varphi\left(e^{it}\right)dt$$

fonksiyonu U diskinden Ω bölgesi üzerine bir konveks harmonik yalınkat dönüşümdür (Duren 2004) .

Özel olarak $\theta=\theta(t)$, $\theta(2\pi)-\theta(0)=2\pi$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan sürekli bir fonksiyon ise, U diskinde kendi üzerine yön koruyan harmonik bir dönüşüm

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}e^{i\theta(t)}dt \tag{3.5}$$

şeklindedir. Tersine, (3.5) şeklindeki her fonksiyon $\overline{U}$ kapanışında sürekli ve $f\left(e^{it}\right)=e^{i\theta(t)}$ fonksiyonuna sahiptir.

Konveks konform dönüşümlerle ilgili bazı sonuçlar konveks harmonik yalınkat dönüşümlere genişletilebilir. Konveksliği ve yönü koruyan (3.2) afin dönüşümü ile $f=h+\overline{g}\in K_H$ fonksiyonunun bileşkesi olan $\varphi\circ f$ fonksiyonları da konveks olup bu fonksiyonların sınıfı K_H^0 ile gösterilir. Böylece

$$f\in K_H \text{ ve } f_0=\frac{\left(f-\overline{b_1 f}\right)}{\left(1-|b_1|^2\right)}\in K_H^0$$

ise $f=f_0+\overline{b_1 f_0}\in K_H$ olur.

Teorem 3.3.2. Her bir $f\in K_H^0$ fonksiyonunun $f(U)$ görüntü bölgesi tüm $|w|<1/2$ diskini kapsar (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Teorem 3.3.3. $f=h+\overline{g}\in K_H$ ise her $z\in U$ için,

$$\operatorname{Re}\left\{\left(e^{i\alpha}h'(z)+e^{-i\alpha}g'(z)\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}z^2\right)\right\}>0$$

olacak şekilde α ve β açıları vardır (Duren 2004).

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.3.3 ün bir sonucudur.

Teorem 3.3.4. $f\in K_H^0$ ise $f=h+\overline{g}$ fonksiyonunun katsayıları $n=2,3,...$ için,

$$|a_n|\le\frac{n+1}{2},\ |b_n|\le\frac{n-1}{2} \qquad ve \qquad \big||a_n|-|b_n|\big|\le 1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir. Eşitlik hali

$$L(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + i\operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$$

fonksiyonu için sağlanır (Duren 2004). Bu fonksiyon birim diski, yön koruyan harmonik yalınkat olarak $\operatorname{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemin tamamı üzerine dönüştürür.

Sonuç 3.3.5. K_H sınıfındaki her bir f fonksiyonunun katsayıları, $n = 2,3,...$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2} + |b_1|\frac{n-1}{2} < n, \qquad |b_n| \leq \frac{n-1}{2} + |b_1|\frac{n+1}{2} < n$$

şeklindedir (Duren 2004).

$f \in S_H\,(veya\ S_H^0)$ dönüşümü altında U birim diskin, $f(U)$ görüntüsü konvekse yakın bir bölge ise, f dönüşümüne *konvekse yakın dönüşüm* denir ve konvekse yakın harmonik dönüşümler sınıfı C_H $(veya\ C_H^0)$ ile gösterilir.

Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından aşağıda verilen teoremle, konvekse yakın analitik yalınkat fonksiyonlar ile konvekse yakın harmonik yalınkat fonksiyonlar arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur.

Teorem 3.3.6. U birim diskinde h ve g analitik fonksiyonlar olsun ve $|g'(0)| < |h'(0)|$ eşitsizliği sağlansın. Eğer $|\varepsilon| = 1$ olacak şekilde her ε için $h + \varepsilon g$ konvekse yakın bir fonksiyon ise, bu durumda $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu konvekse yakın harmonik yalınkat bir fonksiyon olur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Konveks harmonik yalınkat fonksiyonlar ile konvekse yakın harmonik yalınkat fonksiyonlar arasındaki ilşkiyi de aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 3.3.7. $f = h + \overline{g}$, U birim diskinde yerel yalınkat ve en az bir $|\varepsilon| \leq 1$ için $h + \varepsilon g$ konveks olsun. Bu durumda f fonksiyonu konvekse yakın ve yalınkat bir fonksiyon olur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Teorem 3.3.8. C_H sınıfındaki bir $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun katsayıları, $n = 1,2,3...$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \qquad ve \qquad |b_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \tag{3.6}$$

şeklindedir. Eşitlik durumu

$$k(z) = 2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{3z - z^3}{3(1-iz)^3}\right) \in \partial C_H$$

fonksiyonu için sağlanır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

3.4 Yıldızıl Harmonik Fonksiyonlar

Birim diskin $f \in S_H$ fonksiyonu altında görüntüsü orijine göre yıldızıl bir bölge ise, f fonksiyonuna *yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon* denir ve bu fonksiyonların sınıfı S_H^* ile gösterilir. Yıldızıl olan $f \in S_H^0$ fonksiyonlarının sınıfı da S_H^{0*} ile gösterilir. Geometrik olarak bu durum; $f(U)$ görüntü bölgesinin tümünün orijinden görünebilir olduğu anlamına gelir. Başka bir deyişle, $w_0 = f(z_0)$ noktası f fonksiyonunun görüntü kümesine ait ise orijin ile w_0 noktasını birleştiren doğru parçası da görüntü kümesine aittir. Orijine göre yıldızıl bir bölgenin sınır eğrisine *yıldızıl eğri* adı verilir. Eğer f birim diski yıldızıl bir eğriye dönüştürüyora, $\arg\left\{f\left(e^{i\theta}\right)\right\}$ fonksiyonu θ fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyonu olur, yani

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{f\left(e^{i\theta}\right)\right\} \geq 0 \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 3.4.1. Her bir $f \in S_H^{0*}$ fonksiyonu, eşitliğin $k_0(z)$ harmonik Koebe fonksiyonu için geçerli olduğu (3.3) ile verilmiş olan katsayı eşitsizliklerini sağlar. Ayrıca her bir yıldızıl $f \in S_H$ fonksiyonu (3.6) katsayı eşitsizliklerini sağlar (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Sonuç 3.4.2. Her bir $f \in S_H^{0*}$ fonksiyonu için,

$$|f(z)| \le \frac{1}{3}\frac{3r+r^3}{(1-r)^3}, \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik hali harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır. Gerçekten Teorem 3.4.1 gereği,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| r^n \\ &\le \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(n+1)r^n + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(n-1)r^n \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2+1)r^n = \frac{1}{3}\frac{3r+r^3}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem, analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan Alexander teoremini harmonik yalınkat fonksiyonlara kısmen genelleştirerek, harmonik yıldızıl fonksiyonlar ile harmonik konveks fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi gösterir.

Teorem 3.4.3. $f = h + \overline{g} \in S_H$ yıldızıl bir fonksiyon ise H ve G,

$$zH'(z) = h(z), \quad zG'(z) = -g(z), \quad H(0) = G(0) = 0$$

özelliğindeki analitik fonksiyonlar olmak üzere $F = H + \overline{G}$, K_H sınıfına ait konveks bir fonksiyondur (Duren 2004).

Bu teoremin tersi genelde doğru olmadığından Alexander Teoremini, harmonik fonksiyonlar için tam olarak genelleştiremeyiz, yani $F = H + \overline{G}$ konveks harmonik bir fonksiyon iken $h(z) = zH'(z)$ ve $g(z) = -zG'(z)$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu yıldızıl ve yalınkat olmak zorunda değildir.

Örneğin; $L(z)=\operatorname{Re}\{z/(1-z)\}+i\operatorname{Im}\{z/(1-z)^2\}$ konveks fonksiyonu için

$$H(z)=\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad G(z)=\frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}$$

olmak üzere $F=H+\overline{G}$ formunda olur. Böylece

$$h(z)=zH'(z)=\frac{z}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g(z)=-zG'(z)=\frac{z^2}{(1-z)^3}$$

olur. Buradan da

$$h'(z)=\frac{1+2z}{(1-z)^4} \quad \text{ve} \quad g'(z)=\frac{2z+z^2}{(1-z)^4}$$

yazılır. $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu birim diskte

$$J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$$

jakobiyene sahiptir. Örneğin, $J(0)>0$ ve $J(-1/2)<0$. Böylece Lewy Teoreminden

$f=h+\overline{g}$ fonksiyonunun yalınkat olmadığı anlaşılır.

S sınıfı için yapılan işlemlere benzer olarak, harmonik konveks ve harmonik yıldızıl fonksiyonların analitik gösterimleri olan (3.4) ve (3.7) eşitsizliklerinin sağ taraflarındaki “0” değeri yerine α $(0\le\alpha<1)$ alınarak, $K_H(\alpha)$ ile gösterilen *α mertebeli harmonik konveks* ve $S_H^*(\alpha)$ ile gösterilen *α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon* sınıflarını tanımlayabiliriz. Bu sınıflar için

$$S_H^*(0)\equiv S_H^* \quad \text{ve} \quad K_H(0)\equiv K_H$$

denklikleri yazılabilir. Ayrıca her $f=h+\overline{g}$ harmonik dönüşümünün eş-analitik kısmı olan g fonksiyonu sıfır olduğunda $S_H^*(\alpha)\equiv S^*(\alpha)$ ve $K_H(\alpha)\equiv K(\alpha)$ denklikleri yazılabilir.

3.5. Pozitif Reel Kısımlı Harmonik Fonksiyonlar

Bu kesimde, birim diski sağ yarı düzlem üzerine dönüştüren ve yalınkat olması gerekmeyen karmaşık değerli harmonik fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın bazı alt sınıfları incelenecektir. Ayrıca bu fonksiyonların pozitif reel kısımlı analitik fonksiyonlar ile ilişkisi verilecektir.

U da analitik, h ve g fonksiyonları

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad ve \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{3.8}$$

şeklinde ise $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf P_H ile gösterilir. P_H sınıfındaki herhangi bir fonksiyona U da *pozitif reel kısımlı harmonik fonksiyon* denir. P_H sınıfında, reel katsayılı fonksiyonların alt sınıfı olan fonksiyona *pozitif reel kısımlı ve reel katsayılı harmonik fonksiyon* denir ve PR_H ile gösterilir.

U da pozitif reel kısımlı analitik fonksiyonların P sınıfı ile pozitif reel kısımlı harmonik fonksiyonların P_H sınıfları arasında

$$P \subset P_H$$

şeklindeki kapsama bağıntısı vardır. Aşağıdaki teoremde P ile P_H sınıfları arasındaki ilişkiyi görebiliriz.

Teorem 3.5.1. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise $p = h + g \in P$ olur. Tersine, h ve g U diskinde analitik, $h(0) - 1 = g(0)$ ve $p = h + g \in P$ ise $f = h + \overline{g} \in P_H$ olur **(**Jakubowski ve ark. 1993) .

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.5.1 ve P sınıfının özelliklerinden elde edilmiştir (Goodman 1983).

Sonuç 3.5.2. P_H konveks ve kompakttır.

Sonuç 3.5.3. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise $z \in U$ için

$$h(z) + g(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z} d\mu(\eta)$$

olacak şekilde $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerine bir tek μ olasılık ölçümü vardır (Goodman 1983).

Sonuç 3.5.4. $f = h + \overline{g} \in PR_H$ ise

$$h(z) + g(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1-z^2}{1-2z\operatorname{Re}\eta + z^2} d\mu(\eta)$$

olacak şekilde $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerine bir tek μ olasılık ölçümü vardır.

Sonuç 3.5.5 D konveks bir bölge olmak üzere, $f = h + \overline{g}$ ve $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = h' + \overline{g}' \in P_H$ ise $h + g$ yalınkat olur.

Sonuç 3.5.6. $f \in P_H$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}$$

olur.

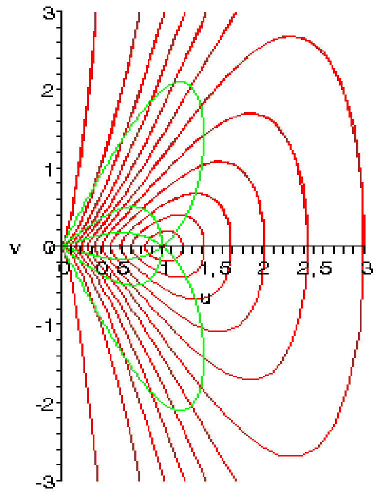
Sonuç 3.5.7. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ve h, g fonksiyonları (3.8) ile verilmiş olsun. Bu durumda $n = 1, 2, ...$ için

$$\big||a_n| - |b_n|\big| \leq 2$$

eşitsizliği vardır ve eşitlik durumu

$$f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{1+3z}{1-z}\right) \quad ,(z \in U)$$

fonksiyonu için sağlanır. $f(z) = \operatorname{Re}\big((1+z)/(1-z)\big) + i\operatorname{Im}\big((1+3z)/(1-z)\big)$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü Şekil (3.5) de gösterilmiştir.



Şekil 3.5. $f(z)=\operatorname{Re}\left((1+z)/(1-z)\right)+i\operatorname{Im}\left((1+3z)/(1-z)\right)$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Teorem 3.5.8. $f\in P_H$ ise $z\in U$ için

$$F(z)=\frac{1}{z}\int_0^z f(\varsigma)d\varsigma$$

fonksiyonu da P_H sınıfındadır (Jakubowski ve ark. 1993).

(3.8) ile verilen $f=h+\overline{g}\in P_H$ fonksiyonunda $b_1=0$ özelliğindeki tüm f fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf P_H^0 ile gösterilir ve

$$P_H^0\subset P_H$$

kapsama bağıntısı yazılır.

Teorem 3.5.9. $f\in P_H$ ve $J_f(z)\neq 0$ olsun. (3.8) ile verilen $f=h+\overline{g}\in P_H$ fonksiyonundaki a_1 ve b_1 katsayıları reel ise,

$$f_0(z)=\frac{a_1 f(z)-b_1\overline{f(z)}}{a_1-b_1} \tag{3.9}$$

fonksiyonu P_H^0 sınıfına aittir. Tersine, eğer $f_0\in P_H^0$ fonksiyonu (3.9) şeklinde ise

$$f(z)=\frac{a_1 f_0(z)-b_1\overline{f_0(z)}}{a_1-b_1}$$

fonksiyonu P_H sınıfına aittir (Jakubowski ve ark 1993).

Aşağıdaki teorem P_H^0 sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizliklerini gösterir.

Teorem 3.5.10. $f=h+\overline{g}\in P_H$ ve f fonksiyonu U birim diskinde yön koruyan olsun. Bu durumda $|z|=r<1$ ve $n=1,2,...$ için,

$$|h(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^2},\qquad |g(z)|\leq\frac{r^2}{(1-r)^2}\tag{3.10}$$

$$\left|h^n(z)\right|\leq\frac{(n+1)!}{(1-r)^{n+2}}\quad ve\quad \left|g^n(z)\right|\leq\frac{n!(n+2r-1)}{(1-r)^{n+2}}$$

şeklindedir. Eşitlik durumu

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}-\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}$$

fonksiyonu için geçerlidir (Jakubowski ve ark 1993). Bu teoremde $z=0$ alınırsa, aşağıdaki katsayılar elde edilir.

Sonuç 3.5.11. $f=h+\overline{g}\in P_H$ ve f fonksiyonu yön koruyan ise, $n=1,2,...$ için

$$|a_n|\leq n+1\qquad ve\qquad |b_n|\leq n+1$$

olur.

Sonuç 3.5.12. $f=h+\overline{g}\in PR_H$ ve f fonksiyonu yön koruyan ise

$$|a_n|\leq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k|\cos k\theta|\qquad ve\qquad |b_n|\leq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k|\cos k\theta|$$

eşitsizlikleri sağlanır.

3.6. Çok Değerli Harmonik Fonksiyonlar

Son yıllarda, özellikle birim diskteki çok değerli harmonik fonksiyonlar üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Çok değerli harmonik fonksiyonun tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

$p \geq 1$ için h ve g fonksiyonları

$$h(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p-1} z^{n+p-1} \qquad , |b_p| < 1 \qquad (3.11)$$

olmak üzere $f = h + \overline{g}$ şeklindeki fonksiyona *çok değerli harmonik fonksiyon* denir. U birim diskindeki bütün çok değerli harmonik ve yön koruyan fonksiyonların sınıfı $H(p)$ ile gösterilir. Ahuja ve Jahangiri (2001), $H(p)$ sınıfının belirli alt sınıflarını çalışmışlardır.

$p \geq 1$ olmak üzere, $H(p)$ sınıfının $|z| = r < 1$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştüren fonksiyonlardan oluşan altsınıfına *çok değerli harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı* denir ve $K_H(p)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $p \geq 1$ olmak üzere, $H(p)$ sınıfının $|z| = r < 1$ diskini orijine göre yıldızıl olan kapalı bir eğri üzerine dönüştüren fonksiyonlardan oluşan altsınıfına da *çok değerli harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı* denir ve $S_H^*(p)$ ile gösterilir.

Teorem 3.6.2. Eğer (3.11) ile verilen $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu, $a_p = 1$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+p-1)\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right) \leq 2p \qquad (3.12)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f, U da harmonik yön koruyan ve $f \in S_H^*(p)$ olur (Ahuja ve Jahangiri 2001).

S ve S_H sınıfları için yapılan işlemlere benzer olarak, harmonik konveks ve harmonik yıldızıl fonksiyonların analitik gösterimleri olan (3.4) ve (3.7) eşitsizliklerinin sağ taraflarındaki “0” değeri yerine α $(0 \leq \alpha < 1)$ alınması ile $K_H(p,\alpha)$ ile gösterilen α

mertebeli, çok değerli harmonik konveks ve $S_H^*(p,\alpha)$ ile gösterilen α *mertebeli, çok değerli harmonik yıldızıl fonksiyon* sınıflarını tanımlayabiliriz. Bu sınıflar için

$$S_H^*(1,0)\equiv S_H^* \quad \text{ve} \quad K_H(1,0)\equiv K_H$$

denklikleri yazılabilir.

3.7. Harmonik Fonksiyonlar İçin Subordinasyon Prensibi

Bu kesimde, daha önceki bölümlerde analitik yalınkat fonksiyonlar için tanımladığımız subordinasyon prensibini harmonik fonksiyonlar için vereceğiz.

f , U birim diskinde harmonik yalınkat bir fonksiyon olsun. w fonksiyonu da U da analitik olsun ve $|w(z)|\leq 1$, $w(0)=0$, $w'(0)>0$ koşullarını sağlasın. Eğer $z\in U$ için,

$$f(z)=F(w(z))$$

yazılabiliyorsa f fonksiyonu F fonksiyonuna *Subordinedir* denir ve $f\prec F$ şeklinde gösterilir.

Eğer D, $f(0)\in D\subseteq f(U)$ özelliğinde basit bağlantılı bir bölge ise, $f(U)=D$ bağıntısını sağlayan ve F fonksiyonuna subordine olan tek bir f fonksiyonu vardır. Riemann Dönüşüm Teoremini dikkate aldığımızda gerçekten, w fonksiyonu U dan $F^{-1}(D)$ bölgesi üzerine $w(0)=0$, $w'(0)>0$ şartlarını sağlayan konform bir dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Subordinasyon kavramı içerisinde fonksiyonun kendisi ve türevlerini içeren bir ifade varsa bu şekildeki ifadelere *Diferensiyel Subordinasyon* adı verilir (Miller ve Mocanu 1985). Diferensiyel subordinasyon kavramı birinci, ikinci ve n-inci mertebeden diferensiyel subordinasyon şeklinde gruplanabilir.

4. YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR DİFERANSİYEL OPERATÖR İÇEREN MEROMORFİK HARMONİK YILDIZIL FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

Yalınkat fonksiyonlar birim diskin içinde olduğu gibi birim diskde veya birim diskin dışında da önemlidir. Bu bölümde, ilk olarak birim diskin dışında tanımlı yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfları ile ilgili yapılan çalışmalar verilecektir. Daha sonra, birim diskin dışında tanımlı yeni genelleştirilmiş bir diferansiyel operatör içeren meromorfik harmonik yıldızıl fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanacaktır. Bunun yanında, bu sınıf ve alt sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, büyüme sınırları ve ekstrem noktaları elde edilecektir.

4.1 Temel Kavramlar

Bu kesimde, öncelikle birim diskin dışı olan $\widetilde{U}=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde tanımlı yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı ve onun alt sınıfları hakkında genel bilgiler verilecektir.. Meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonlar ilk olarak Hengartner ve Schober (1987) tarafından çalışılmıştır. Diğer yazarlar tarafından da farklı alt sınıfları ve bu sınıfların bazı özellikleri incelenmiştir. İlk olarak Hengartner ve Schober (1987) tarafından bulunan ve gelecek bölümlerde kullanacağımız, birim diskin dışında tanımlı yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonların genel yapısını ve bazı özelliklerini verelim.

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

şeklindeki düzgün, $U^*=\{z:0<|z|<1\}=U-\{0\}$ da 1 rezidülü ve orijinde basit kutba sahip yalınkat meromorfik fonksiyonların sınıfları genellikle Σ ile gösterilir.

Σ_S, $\Sigma^*(\alpha)$ ve $\Sigma_K(\alpha)$, $(0\le\alpha<1)$, sınıfları ise sırasıyla yalınkat, α mertebeli meromorfik yıldızıl ve α mertebeli meromorfik konveks olan Σ sınıfının alt sınıflarını göstersin.

$f\in\Sigma$ fonksiyonunun α mertebeli meromorfik yıldızıl, yani $\Sigma^*(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul

$$-\mathrm{Re}\left\{\frac{z f'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad , \quad z \in U^*$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Benzer şekilde, $f \in \Sigma$ fonksiyonunun α mertebeli meromorfik konveks, yani $\Sigma_K(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul

$$-\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad , \quad z \in U^*$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\Sigma^*(\alpha)$ sınıfı ve benzer diğer sınıflar Pommerenke (1963), Clunie (1959), Miller (1970), Royster (1963) ve diğer bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır.

Mogra ve ark. (1985) tarafından verilen β tipli α mertebeli meromorfik yıldızıl fonksiyonların sınıfları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$f \in \Sigma$ fonksiyonunun α, β $(0 \le \alpha < 1,\ 0 < \beta \le 1)$ ve $z \in U^*$ iken β tipli α mertebeli meromorfik yıldızıl fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} + 1 \right| < \beta \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} + 2\alpha - 1 \right|$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.1.1. $\widetilde{U}$ da karmaşık değerli yön koruyan harmonik yalınkat ve $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ özelliğini sağlayan bir f fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A\log|z| \tag{4.1}$$

şeklinde gösterilebilir. Buradaki h ve g fonksiyonları $0 \le |\beta| < |\gamma|$, $A \in \mathbb{C}$ ve $z \in \widetilde{U}$ olmak üzere,

$$h(z) = \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{ve} \quad g(z) = \beta z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Bununla beraber $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ analitik ve $|\omega(z)| < 1$ şartı sağlanır (Hengartner ve Schober 1987).

Jahangiri ve Silverman (1999), bu teoremin bir sonucu olarak $f(z) = a_1 f_0(z) + \overline{b_1 f_0(z)}$ şeklindeki fonksiyonların aşağıdaki katsayı eşitsizliğini sağlaması durumunda yalınkat olduklarını göstermişlerdir.

Teorem 4.1.2. (4.1) ve (4.2) ile verilen f fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n| + |b_n|\right) \le |\gamma| - |\beta| - A$$

eşitsizliğini sağlarsa, f, $\widetilde{U}$ da yön koruyan ve yalınkat olur (Jahangiri ve Silverman 1999).

(4.1) ile verilen f fonksiyonuna

$$w \to \frac{\overline{\alpha} w - \overline{\beta w} - \overline{\alpha} a_0 + \overline{\beta a_0}}{|\gamma|^2 - |\beta|^2}$$

afin dönüşümü uygulandığında $\gamma = 1, \beta = 0$ ve $a_0 = 0$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu normalize edilmiş olur ve

$$h(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{4.3}$$

olmak üzere $\widetilde{U}$ da yön koruyan meromorfik harmonik yalınkat fonksiyonların (4.1) ile verilen f fonksiyonu için Σ'_H sınıfı elde edilir. Ayrıca Σ'_H sınıfındaki logaritmik singüleriteyi kaldırarak Σ_H ile gösterilen alt sınıf elde edilir. Buna göre $\sum_H = \left\{ f \in \Sigma'_H : A = 0 \right\}$ olur. Analitik yalınkat fonksiyonlarda olduğu gibi S_H ve Σ'_H sınıfları arasında tam bir geçiş yoktur.

Σ'_H sınıfındaki sıfırı olmayan fonksiyonların sınıfı olan Σ^0_H sınıfı

$$\Sigma^0_H = \left\{ f - c : f \in \Sigma'_H \ ve\ c \notin f(\widetilde{U}) \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Hengartner ve Schober (1987) Teorem 4.1.1 ve Schwarz lemmasını kullanarak aşağıdaki bazı önemli sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 4.1.3. **(a)** Eğer $f \in \Sigma'_H$ ise $|A| \le 2$ ve $|b_1| \le 1$ olur.

(b) Eğer $f \in \Sigma_H$ ise $|b_1| \le 1$ ve $|b_2| \le \frac{1}{2}\left(1-|b_1|^2\right) \le \frac{1}{2}$

şeklindedir (Hengartner ve Schober 1987).

İspat. $\widetilde{U}$ da analitik ve $|w(z)| \le 1$ özelliğindeki bir $w(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + \ldots$ fonksiyonu için $|w_0| \le 1$ ve $|w_1| \le 1-|w_0|^2$ eşitsizlikleri sağlanır. $f \in \Sigma'_H$ ise f fonksiyonu (4.3) ile verilen fonksiyonlar için (4.1) formunda olup

$$\alpha(z) = \frac{2zg'(z)+\overline{A}}{2zh'(z)+A} = \frac{1}{2}\overline{A}z^{-1} - \left(b_1 + \frac{1}{4}|A|^2\right)z^{-2} - \left(2b_2 - \frac{1}{2}\overline{A}a_1 - \frac{1}{2}Ab_1 - \frac{1}{8}A|A|^2\right)z^{-3} + \ldots$$

fonksiyonu $\widetilde{U}$ da analitik ve f fonksiyonu yön koruyan olduğundan $|a(z)| < 1$ olur. Maksimum Prensibi gereği $w(z) = za(z)$ fonksiyonu için $|w(z)| \le 1$ eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\left|\frac{1}{2}\overline{A}\right| \le 1 \text{ ve } \left|b_1 + \frac{1}{4}|A_2|^2\right| \le 1 - \left|\frac{1}{2}\overline{A}\right|^2$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durum $|b_1| \le 1$ olmasını gerektirir. Eğer $f \in \Sigma_H$ ise bu durumda $A = 0, a(z) = -b_1 z^{-2} - 2b_2 z^{-3} + \ldots$ ve $w(z) = z^2 a(z)$ olup $|w(z)| \le 1$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $|b_1| \le 1$ ve $|b_2| \le 1/2\left(1-|b_1|^2\right) \le 1/2$ eşitsizlikleri elde edilir. Her iki eşitsizlik de kesin olup eşitlik

$$f(z) = z - \frac{1}{\overline{z}} + 2\log|z| \text{ ve } f(z) = z + \frac{1}{\left(2\overline{z}^2\right)}$$

fonksiyonları için geçerli olur.

Şimdi vereceğimiz teorem ise büyüme sınırları ile ilgilidir.

Teorem 4.1.4. Eğer $f-c\in\Sigma_H^0$ ise bu durumda her $z\in\widetilde{U}$ için

$$\left|f(z)\right|\geq\frac{|z|}{\left[4(1+|z|^2)\right]}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $f(\widetilde{U})$, $\left\{w:|w|>16\right\}$ kümesini kapsar ve $|c|<16$ olur (Hengartner ve Schober 1987).

Teorem 4.1.4 deki c sabiti için elde edilen sınır aşağıdaki sonucun ortaya çıkış nedeni olmuştur.

Sonuç 4.1.5. Eğer $f\in\Sigma_H$ ise bu durumda $f(\widetilde{U})\supset\left\{w:|w|>16\right\}$ olur.

Aşağıdaki teorem söz konusu sınıfların kompaktlığı ile ilişkilidir.

Teorem 4.1.6. Σ_H^0,Σ_H' ve Σ_H sınıfları yerel düzgün yakınsaklık topolojisine göre kompaktırlar (Hengartner ve Schober 1987).

Düzlemde konveks bir bölgenin sınır noktalarından çizilen teğetlerden karşılıklı olarak paralel olanlar arasındaki uzaklığın en büyüğüne *bölgenin çapı* denir. Aşağıdaki teorem $\mathbb{C}\setminus f(\widetilde{U})$ atlanmış kümesinin alt sınırının b_1 katsayısına bağlı olarak elde edilebileceğini gösterir.

Teorem 4.1.7. $f\in\Sigma_H'$ olsun. $\mathbb{C}\setminus f(\widetilde{U})$ kümesinin d_f çapı için

$$d_f\geq 2\left|1+b_1\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik $|b_1|<1$, $|A|\leq\left(1-|b_1|^2\right)\Big/\left|1+b_1\right|$, $|b_1|=1$ ve $A=0$ veya $b_1=-1$ ve $|A|\leq 2$ olduğunda

$$f(z)=z+\frac{b_1}{\overline{z}}+A\log|z|$$

fonksiyonu için geçerlidir (Hengartner ve Schober 1987).

Teorem 4.1.8. (4.1) ile verilen $f \in \Sigma'_H$ fonksiyonu (4.3) seri açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(|a_k|^2 - |b_k|^2\right) \le 1 + 2\operatorname{Re} b_1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbb{C} \setminus f(\widetilde{U})$ alanının sıfır olmasıdır (Hengartner ve Schober 1987).

Σ_H sınıfına ait ve orijine göre yıldızıl olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf Σ^*_H ile gösterilir. Ayrıca Σ^*_H sınıfına ait olan ve

$$h(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{ve} \quad g(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}; \qquad a_k \ge 0, \;\; b_k \ge 0$$

olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf Σ^*_{RH} ile gösterilir. Σ^*_H ve Σ^*_{RH} sınıfları ile bunların alt sınıfları Jahangiri ve Silverman (1999) tarafından çalışılmıştır. Özellikle, $f \in \Sigma^*_{RH}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right) \le 1$ olmasıdır. Ayrıca benzer sonuçlar fonksiyonun konveks olması durumu için de verilmiştir. Bu sonuçlar Ahuja ve Jahangiri (2002) tarafından daha genel olarak

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(z)}{\frac{\partial}{\partial\theta} z}\right\} > \alpha;\; 0 \le \alpha < 1,\; \lambda \ge 0 \text{ ve } z \in \widetilde{U}$$

koşulunu sağlayan $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\sum_H R(\alpha, \lambda)$ sınıfına genelleştirilmiştir. Ayrıca Ahuja ve Jahangiri (2003), Thompson (2003), Rosy ve ark. (2002) bu konuda çalışmışlardır. Bununla beraber, Jahangiri ve Silverman (1999), Jahangiri (2000), Murugusundaramoorthy (2003,2004), meromorfik harmonik fonksiyonların farklı sınıflarını çalışmışlardır.

4.2. $GS(n)$, $\overline{GS(n)}$ Sınıfları ve D^n Operatörü

Bu kesimde, ilk olarak birim diskin dışı olan $\widetilde{U}=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde, meromorfik harmonik fonksiyonlar için yeni bir D^n operatörü tanımlayarak bu operatör yardımıyla $GS(n)$ ve $\overline{GS(n)}$ sınıflarını oluşturacağız. Daha sonra bu sınıfların katsayı tahminleri, büyüme sınırları gibi diğer önemli bazı özelliklerini araştıracağız.

h ve g fonksiyonları (4.2) formundaki gibi ve $\lambda-\alpha\geq 1, \alpha\geq 0, \lambda\geq 0$ olmak üzere, $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ harmonik fonksiyonu için aşağıdaki yeni D operatörünü

$$D^0 f(z)=f(z)$$

$$D^1 f(z)=(\lambda-\alpha)\frac{\overline{\left(z^{\frac{\lambda-\alpha+1}{\lambda-\alpha}}g(z)\right)'}}{z^{\frac{1}{\lambda-\alpha}}}-(\lambda-\alpha)z^{\frac{2\lambda-2\alpha+1}{\lambda-\alpha}}\left(\frac{h(z)}{z^{\frac{\lambda-\alpha+1}{\lambda-\alpha}}}\right)'$$

ve $n=2,...,$ için

$$D^n f(z)=D(D^{n-1}f(z))$$

olarak tanımlayalım. Böylece , $n=0,1,...,$ için

$$D^n f(z)=\gamma z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n a_k z^{-k}+\overline{(2\lambda-2\alpha+1)\beta z-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n b_k z^{-k}}$$

elde ederiz. Bu operatörü kullanarak da aşağıda verilen $GS(n)$ ve $\overline{GS(n)}$ sınıflarını tanımlayalım.

$GS(n)$ sınıfı, $z\in\widetilde{U}$, $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ için yön koruyan harmonik meromorfik ve

$$\operatorname{Re}\left\{2-\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right\}>0 \tag{4.4}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir sınıfı göstersin.

$\overline{GS(n)}$ sınıfı da $\gamma > \beta \geq 0,\ a_k \geq 0,\ b_k \geq 0$ olmak üzere,

$$f_n(z) = h(z) + \overline{g_n(z)} = -\gamma z - \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} + \overline{\beta z - (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}} \tag{4.5}$$

şeklindeki harmonik meromorfik fonkisiyonlardan oluşan $GS(n)$ sınıfının bir alt sınıfı olsun. (4.1) ile verilen f fonksiyonunun $\widetilde{U}$ da yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul, her $z, |z| = r > 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg(f(re^{i\theta})) = \operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\} \geq 0, \qquad z \in \widetilde{U} \tag{4.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Harmonik yalınkat fonksiyonlar için (4.6) ile verilen bu ifade, ilk olarak Jahangiri (1998) tarafından kullanılmıştır. (4.4) eşitsizliğinde $n = 0$ alınırsa (4.6) eşitsizliğini ve $\widetilde{U}$ da yön koruyan harmonik yalınkat ve meromorfik yıldızıl f fonksiyonunu elde etmek mümkündür.

4.3. $GS(n)$ ve $\overline{GS(n)}$ sınıflarının Katsayı Eşitsizlikleri

Bu kesimde, katsayı eşitsizlikleri kullanılarak elde edilen $GS(n)$ ve $\overline{GS(n)}$ sınıflarına ait f fonksiyonu için yeterli şartları elde edeceğiz.

Teorem 4.3.1. Eğer $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $\lambda - \alpha \geq 1, \alpha \geq 0, \lambda \geq 0$ için h ve g fonksiyonları (4.2) formundaki gibi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]|a_k|$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]|b_k|+|b_1| \leq |\gamma| - (2\lambda-2\alpha+1)^n(2\lambda-2\alpha-1)|\beta| \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlarsa, f fonksiyonu $\widetilde{U}$ da yön koruyan harmonik yalınkat bir fonksiyondur ve $GS(n)$ sınıfında olur.

İspat. (4.7) eşitsizliğinin sağlanması durumunda, f fonksiyonunun $GS(n)$ sınıfında olduğunu göstermeliyiz. Böylece pozitif reel kısımlı harmonik fonksiyonların sınıfından oluşan $P_n(z)$ nin $GS(n)$ sınıfında olduğunu göstermek veya buna denk olarak

$$P_n(z)=\frac{2D^n f(z)-D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}$$

olmak üzere,

$$\left|P_n(z)+1\right|>\left|P_n(z)-1\right|,\quad z\in\widetilde{U} \tag{4.8}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (4.8) eşitsizliğinden

$$\frac{\left|3D^n f(z)-D^{n+1}f(z)\right|}{\left|D^n f(z)\right|}-\frac{\left|D^n f(z)-D^{n+1}f(z)\right|}{\left|D^n f(z)\right|}>0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|3D^n f(z)-D^{n+1}f(z)\right|-\left|D^n f(z)-D^{n+1}f(z)\right|$$

$$=\Bigg|2\gamma z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\left[-k(\lambda-\alpha)+(-\lambda+\alpha+2)\right]a_k z^{-k}$$

$$+(2\lambda-2\alpha+1)^n(2-2\lambda+2\alpha)\beta z-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-2\right]b_k z^{-k}\Bigg|$$

$$-\Bigg|\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\left[-k(\lambda-\alpha)-(\lambda-\alpha)\right]a_k z^{-k}$$

$$+(2\lambda-2\alpha+1)^n(-2\lambda+2\alpha)\beta z-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\left[(k-1)(\lambda-\alpha)\right]b_k z^{-k}\Bigg|$$

$$\geq 2|\gamma||z|-\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\right|\left|\left[-k(\lambda-\alpha)-(\lambda-\alpha-2)\right]a_k z^{-k}\right|-\left|(2\lambda-2\alpha+1)^n(2-2\lambda+2\alpha)\beta z\right|-2|b_1||z^{-k}|$$

$$-\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-2\right]b_k z^{-k}\right|-\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\left[-k(\lambda-\alpha)-(\lambda-\alpha)\right]a_k z^{-k}\right|$$

$$-\left|(2\lambda-2\alpha+1)^n(-2\lambda+2\alpha)\beta z\right|-\left|\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\left[(k-1)(\lambda-\alpha)\right]b_k z^{-k}\right|$$

$$\geq 2|\gamma||z|-\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\right|\left|\left[-k(\lambda-\alpha)-(\lambda-\alpha-2)\right]\right||a_k||z^{-k}|-\left|(2\lambda-2\alpha+1)^n\right|\left|(2-2\lambda+2\alpha)\right||\beta||z|$$

$$-2|b_1|-\sum_{k=2}^{\infty}\left|\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^n\right|\left|\left[-k(\lambda-\alpha)-(\lambda-\alpha)\right]\right||a_k||z^{-k}|-\left|(2\lambda-2\alpha+1)^n\right|\left|(-2\lambda+2\alpha)\right||\beta||z|$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\left|\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^n\right|\left|\left[(k-1)(\lambda-\alpha)\right]\right||b_k||z^{-k}|$$

$$\geq 2\left\{|\gamma|-\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^{n}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]|a_k|-(2\lambda-2\alpha+1)^{n}(2\lambda-2\alpha-1)|\beta|+|b_1|\right.$$
$$\left.-\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^{n}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]|b_k|\right\}\geq 0 \tag{4.10}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 4.3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıda vereceğimiz teorem (4.7) ile verilen katsayı şartının yeterli olmanın yanı sıra $\overline{GS(n)}$ sınıfı için bir gerekli koşul olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.2. $f_n(z)=h(z)+\overline{g_n(z)}$ olsun. $f_n\in\overline{GS(n)}$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^{n}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]a_k$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^{n}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]b_k+b_1\leq\gamma-(2\lambda-2\alpha+1)^{n}(2\lambda-2\alpha-1)\beta \tag{4.11}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $\overline{GS(n)}\subset GS(n)$ olduğu dikkate alındığında Teorem 4.3.1 in gerekli kısmı ispatlanmış olur. Yeterli kısmı ispatlamak için $f_n\in\overline{GS(n)}$ olduğunu kabul edelim. z karmaşık bir sayı olsun. Eğer $\operatorname{Re}(z)>0$ ise $\operatorname{Re}(1/z)>0$ olur. (4.5) ile verilen f_n fonksiyonu kullanılarak ve

$$A=\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^{n},\quad B=\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]$$
$$C=\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^{n}\ ve\ D=\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]$$

kısaltmaları yapılarak

$$0<\operatorname{Re}\left\{\frac{D^{n}f(z)}{2D^{n}f(z)-D^{n+1}f(z)}\right\}\leq\left|\frac{D^{n}f(z)}{2D^{n}f(z)-D^{n+1}f(z)}\right|$$

$$=\left|\frac{-\gamma z-\sum_{k=1}^{\infty}Aa_kz^{-k}+(2\lambda-2\alpha+1)^{n}\beta z-(-1)^{n}\sum_{k=2}^{\infty}Cb_kz^{-k}-b_1z^{-1}}{-\gamma z+\sum_{k=1}^{\infty}ABa_kz^{-k}+(2\lambda-2\alpha+1)^{n}(-2\lambda+2\alpha+1)\beta z-(-1)^{n}\sum_{k=2}^{\infty}CDb_kz^{-k}+b_1z^{-1}}\right|$$

$$\leq \frac{\gamma\left|z\right|+\sum_{k=1}^{\infty}Aa_k\left|z^{-k}\right|+\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\beta\left|z\right|+\sum_{k=2}^{\infty}Cb_k\left|z^{-k}\right|+b_1\left|z^{-1}\right|}{\gamma\left|z\right|-\sum_{k=1}^{\infty}ABa_k\left|z^{-k}\right|-\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\beta\left|z\right|-\sum_{k=2}^{\infty}CDb_k\left|z^{-k}\right|+b_1\left|z^{-1}\right|}$$

$$< \frac{\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}Aa_k+\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\beta+\sum_{k=2}^{\infty}Cb_k+b_1}{\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}ABa_k-\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\beta-\sum_{k=2}^{\infty}CDb_k+b_1} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.12) ile verilen eşitsizlikten de

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]a_k$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]b_k+b_1\leq\gamma-\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\beta$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 4.3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

4.4. $\overline{GS(n)}$ Sınıfının Büyüme Sınırları

Bu kesimde, $\overline{GS(n)}$ sınıfındaki fonksiyonlar için büyüme sınırlarını elde edeceğiz.

Teorem 4.4.1 f_n fonksiyonu $\overline{GS(n)}$ sınıfında olsun. $0<\left|z\right|=r<1$ için

$$\left|f_n(z)\right|\leq\left(\gamma+\beta\right)r+\left[\gamma-\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\beta\right]r^{-1}$$
$$ve \tag{4.13}$$
$$\left|f_n(z)\right|\geq\left(\gamma-\beta\right)r-\left[\gamma-\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\beta\right]r^{-1}$$

sınırları elde edilir.

İspat. Teorem 4.3.2 dikkate alındığında**,** $0<\left|z\right|=r<1$ için (4.7) ile verilen katsayı eşitsizliğinden

$$\left|f_n(z)\right|=\left|-\gamma z-\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^{-k}+\overline{\beta z-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^{-k}}\right|$$

$$\leq\gamma r+\beta r+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)r^{-k}\leq\gamma r+\beta r+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)r^{-1}$$

$$\leq \gamma r+\beta r+r^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^{n}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]a_k\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^{n}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]b_k+b_1\right)$$

$$\leq(\gamma+\beta)r+\left[\gamma-(2\lambda-2\alpha+1)^{n}(2\lambda-2\alpha-1)\beta\right]r^{-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$|f_n(z)|=\left|-\gamma z-\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{-k}+\overline{\beta z-(-1)^{n}\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-k}}\right|$$

$$\geq \gamma r-\beta r-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)r^{-k}\geq \gamma r-\beta r-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)r^{-1}$$

$$\geq \gamma r-\beta r-r^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha+1)\right]^{n}\left[k(\lambda-\alpha)+(\lambda-\alpha-1)\right]a_k\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)-1\right]^{n}\left[(k-1)(\lambda-\alpha)+1\right]b_k+b_1\right)$$

$$\leq(\gamma-\beta)r-\left[\gamma-(2\lambda-2\alpha+1)^{n}(2\lambda-2\alpha-1)\beta\right]r^{-1}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4.1 de verilen sınırlar (4.5) ile verilen $f_n=h+\overline{g}_n$ fonksiyonları için sağlanır. Eğer (4.7) ile verilen katsayı şartı sağlanırsa bu sınırların h ve g fonksiyonları (4.2) ile verilmek üzere $f=h+\overline{g}$ şeklindeki fonksiyonlar için de sağlandığı sonucu elde edilir.

Bir vektör uzayında m ve n noktalarını birleştiren $L(m,n)$ doğru parçası, $0\leq t\leq 1$ olmak üzere $s=tm+(1-t)n$ şeklindeki tüm s noktalarının kümesidir. m ve n noktalarına $L(m,n)$ doğru parçasının *uç noktaları* denir. Eğer $0<t<1$ ise, s noktası $L(m,n)$ doğru parçasının bir *iç noktası* olur.

Konveks bir C kümesindeki bir s noktası, C kümesinde kapsanan herhangi bir $L(m,n)$ doğru parçasının bir iç noktası değil ise, bu noktaya C kümesinin bir *ekstrem noktası* denir. C kümesinin tüm ekstrem noktalarının kümesi $E(C)$ ile gösterilir. Eğer bir M kümesi konveks değilse, konveks bir kümeye genişletilebilir. Bir M kümesinin kapalı konveks hull'u M kümesini kapsayan en küçük kapalı konveks kümedir. Bu küme $clcoM$ ile gösterilir. Böyle bir küme daima vardır. Çünkü kapalı konveks bir

$M \subset X$ kümesi için M kümesini kapsayan kapalı konveks kümelerin arakesiti olan $clcoM$, M kümesinin kapalı konveks hull'udur.

4.5. $\overline{GS(n)}$ Sınıfının Ekstrem Noktaları

Bu kesimde, $clco\overline{GS(n)}$ ile gösterilen $\overline{GS(n)}$ sınıfının kapalı konveks hull'unun ekstrem noktalarını belirleyeceğiz.

Teorem 4.5.1. $f_n = h + \overline{g}_n$ fonksiyonu (4.5) ile verildiği formda olsun. $\lambda - \alpha \geq 1$ kabul edelim. $f_n \in clco\overline{GS(n)}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x_k \geq 0,\ y_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k + y_k\right) = \gamma$ ve

$$h_{n,0}(z) = -z, \qquad g_{n,0}(z) = -z + \frac{\overline{z}}{\left(2\lambda - 2\alpha + 1\right)^n (2\lambda - 2\alpha - 1)}, \qquad g_{n,1}(z) = -z - (-1)^n \overline{z}^{-1},$$

$$h_{n,k}(z) = -z - \frac{1}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]} z^{-k}, \quad k \geq 1$$

$$g_{n,k}(z) = -z - \frac{(-1)^n}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]} \overline{z}^{-k}, \quad k \geq 2$$

fonksiyonları olmak üzere, f_n fonksiyonunun

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x_k h_{n,k}(z) + y_k g_{n,k}(z)\right]$$

şeklinde yazılabilmesidir.

Özellikle $\overline{GS(n)}$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_{n,k}\}$ ve $\{g_{n,k}\}$ fonksiyonları olur.

İspat. $\lambda - \alpha > 1$ için, $x_k \geq 0,\ y_k \geq 0$ ve $\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k + y_k\right) = \gamma$ olmak üzere, f_n fonksiyonunun

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x_k h_{n,k}(z) + y_k g_{n,k}(z)\right]$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Buradan aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x_k h_{n,k}(z)+y_k g_{n,k}(z)\right]$$

$$=x_0h_{n,0}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}x_k\left[-z-\frac{1}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]}z^{-k}\right]$$

$$+y_0g_{n,0}(z)+y_1g_{n,1}(z)+\sum_{k=2}^{\infty}y_k\left[-z-\frac{(-1)^n}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]}\overline{z}^{-k}\right]$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}(x_k+y_k)z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]}z^{-k}$$

$$+\frac{y_0}{\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\right]}\overline{z}-(-1)^ny_1\overline{z}^{-1}-(-1)^n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{y_k}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]}\overline{z}^{-k}$$

$$=-\gamma z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]}z^{-k}$$

$$+\frac{y_0}{\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\right]}\overline{z}-(-1)^ny_1\overline{z}^{-1}-(-1)^n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{y_k}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]}\overline{z}^{-k}.$$

Böylece Teorem 4.3.2 den

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]\frac{x_k}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]\frac{y_k}{\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]}+y_1$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k+y_1+\sum_{k=2}^{\infty}y_k\right)$$

$$=\gamma-y_0-x_0\leq\gamma-\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\right]\frac{y_0}{\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n\left(2\lambda-2\alpha-1\right)\right]}$$

eşitliği elde edilir, yani $f_n\in clco\overline{GS(n)}$ olur.

Aksine, $f_n\in clco\overline{GS(n)}$ olsun. $\gamma>\beta\geq 0$, $a_k\geq 0$, $b_k\geq 0$ olmak üzere

$$f_n(z)=h(z)+\overline{g_n(z)}=-\gamma z-\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^{-k}+\overline{\beta z-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^{-k}}$$

olarak yazılabilir.

$$a_k=\frac{x_k}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]},\quad k=1,2,...,$$

$$\beta = \frac{y_0}{\left[\left(2\lambda - 2\alpha + 1\right)^n \left(2\lambda - 2\alpha - 1\right)\right]}, \qquad b_1 = y_1 \quad \text{ve}$$

$$b_k = \frac{y_k}{\left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n \left[\left(k-1\right)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]}, \quad k = 2, ..., .$$

değerleri yerlerine yazılırsa

$$f_n(z) = h(z) + \overline{g_n(z)} = -\gamma z - \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} + \overline{\beta z - (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k + y_k\right)z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n \left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]} z^{-k}$$

$$+ \frac{y_0}{\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n \left(2\lambda-2\alpha-1\right)\right]} \overline{z} - (-1)^n y_1 \overline{z}^{-1} - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_k}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n \left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]} \overline{z}^{-k}$$

$$= x_0(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left[-z - \frac{1}{\left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha+1\right)\right]^n \left[k\left(\lambda-\alpha\right)+\left(\lambda-\alpha-1\right)\right]} z^{-k}\right]$$

$$+ y_0 \left(-z + \frac{\overline{z}}{\left[\left(2\lambda-2\alpha+1\right)^n \left(2\lambda-2\alpha+1\right)\right]}\right) + y_1\left(-z - (-1)^n \overline{z}^{-1}\right)$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} y_k \left[-z - \frac{(-1)^n}{\left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)-1\right]^n \left[(k-1)\left(\lambda-\alpha\right)+1\right]} \overline{z}^{-k}\right]$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_k h_{n,k}(z) + y_k g_{n,k}(z)\right]$$

olarak elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

$\lambda - \alpha = 1$ alınırsa Bostancı ve Öztürk (2010) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 6 nın sonuçlarını elde etmek mümkündür. Bu nedenle, $\lambda - \alpha = 1$ durumu için Teorem 4.5.1 in ispatını vermekten kaçındık. Böylece Teorem 4.5.1 in ispatı tamamlanmış olur.

$\lambda = 1$ ve $\alpha = 0$ alınması durumunda ise Bostancı ve Öztürk (2010) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları elde etmek mümkündür. Ayrıca $n = 0$ için Jahangiri ve Silverman (1999) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçlara ulaşılabilir.

5. YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR AL-OBOUDI DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA TANIMLANAN ÇOK DEĞERLİ HARMONİK MEROMORFİK FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

Bu bölümde, ilk olarak iyi bilinen bazı operatörler yardımıyla yeni genelleştirilmiş bir Al-Oboudi diferansiyel operatörünü tanımlayacağız. Daha sonra tanımlanan bu yeni genel diferansiyel operatörünün yardımıyla birim diskin dışı olan $\widetilde{U}=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde yön koruyan çok değerli harmonik meromorfik fonksiyonların yeni bir sınıfını vereceğiz. Ayrıca bu sınıf için katsayı sınırları, büyüme sınırları, ekstrem noktaları ve konveks birleşim özelliği elde edilecektir.

5.1. Yeni Genelleştirilmiş Bir Al-Oboudi Diferansiyel Operatörü

Sălăgean (1983)'ın kendi doktora tezinde tanımladığı ve kendi ismini verdiği Sălăgean operatöründen sonra Al-Oboudi (2004) tarafından genelleştirilmiş Sălăgean operatörü tanımlanmıştır. Bunun üzerine birçok matematikçi bu operatörden yararlanıp, farklı parametreler kullanarak yeni operatörler elde etmiş ve bu operatörler yardımıyla önemli bazı teoremler ile sonuçlar bulmuşlardır. Biz de bu kesimde, ilk olarak analitik fonksiyonlar için tanımlanan Al-Oboudi diferansiyel operatörünü genelleştirerek harmonik fonksiyonlar için yeni bir diferansiyel operatör elde edeceğiz.

Tanım 5.1.1. A**,** $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \tag{5.1}$$

şeklindeki tüm fonksiyonların sınıfını göstersin.

$f\in A$ için Al-Oboudi (2004) tarafından aşağıda verilen Al-Oboudi diferansiyel operatörü tanımlanmıştır.

$$D^0 f(z) = f(z) \tag{5.2}$$

$$D^1 f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z) = D_\lambda f(z), \qquad \lambda \geq 0 \tag{5.3}$$

$$\vdots$$

$$D^m f(z) = D_\lambda (D^{m-1} f(z)) \qquad ,\left(m \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}\right). \tag{5.4}$$

Eğer f , (5.1) formundaki gibi ise (5.3) ve (5.4) ifadelerinden

$$D^m f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[1 + \lambda(k-1)\right]^m a_k z^k \qquad ,\left(m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right) \tag{5.5}$$

olduğu görülür.

$\lambda = 1$ alındığında Sălăgean diferansiyel operatörü elde edilir (Sălăgean 1983).

Biz burada, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ formundaki harmonik fonksiyon için modifiye edilmiş $D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta}$ diferansiyel operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$\beta, \lambda, \delta, \gamma, l \geq 0$, $\lambda > \delta, \beta > \gamma$, $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sigma_{k-n} = \left[\frac{p + (\lambda - \delta)(\beta - \gamma)(k - (n+p)) + l}{p + l}\right]$$

olmak üzere

$$D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta} h(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma^m_{k-n} a_{k-n} z^{-(k-n)}, \quad D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta} g(z) = \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma^m_{k-n} b_{k-n} z^{-(k-n)} \tag{5.6}$$

ve

$$D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta} f(z) = D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta} h(z) + (-1)^n \overline{D^{m,\gamma}_{\lambda,l,p,\delta,\beta} g(z)} \tag{5.7}$$

olur.

5.2. $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ ve $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ Sınıfları

Bu kesimde, sonraki bölümlerde kullanacağımız ve birçok önemli özelliğini inceleyeceğimiz $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ ve $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıflarının tanımlarını vereceğiz.

Sabit pozitif p tamsayısı için

$$h(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_{k-n}z^{-(k-n)} \text{ ve } g(z)=\sum_{k=n+p}^{\infty}b_{k-n}z^{-(k-n)}, \qquad |b_p|<1$$

olmak üzere

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \tag{5.8}$$

fonksiyonlarından oluşan çok değerli meromorfik harmonik fonksiyonların $\sum_H(p)$ sınıfını göz önünde bulunduralım.

(5.6) ile verilen $D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}h$ ve $D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}g$ (5.7) formundaki gibi olmak üzere $0\le\alpha<1,\ t\ge 0$, $0\le\theta\le 2\pi$ için $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfı

$$Re\left\{\left(1+te^{i\theta}\right)\left(\frac{z(D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}f(z))'}{D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}f(z)}\right)-pte^{i\theta}\right\}\ge p\alpha, \tag{5.9}$$

koşulunu sağlasın. Bununla beraber

$$h(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_{k-n}|z^{-(k-n)} \quad ve \quad g(z)=-\sum_{k=n+p}^{\infty}|b_{k-n}|z^{-(k-n)}, \qquad |b_p|<1 \tag{5.10}$$

şeklinde olmak üzere $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarından oluşan $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfının alt sınıfı da $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olsun.

Çok değerli harmonik meromorfik fonksiyonların sınıfları, Ahuja ve Jahangiri (2003) tarafından çalışılmıştır. Aynı zamanda parametrelerin bazı özel durumları için farklı yazarlar tarafından çalışılan alt sınıfları elde edebiliriz (Al Shaqsi, Darus 2006 ve Murugusundaramoorthy 2003).

5.3. $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ ve $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ Sınıflarının Katsayı Eşitsizlikleri

Bu kesimde, $MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ ve $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıflarındaki fonksiyonlar için yeterli katsayı sınırlarını ispatlayacağız.

Teorem 5.3.1. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (5.8) ile verilsin. Eğer

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|a_{k-n}|+\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|b_{k-n}|\right\}\leq p(1-\alpha) \quad (5.11)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olur.

İspat. (5.11) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r < 1$, $t \geq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f \in MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olduğunu göstermek için

$$Re\left\{\left(1+te^{i\theta}\right)\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}h(z)\right)'-(-1)^{n}\overline{z\left(D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}g(z)\right)'}}{D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}h(z)+(-1)^{n}\overline{D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}g(z)}}\right)-pte^{i\theta}\right\}\geq p\alpha \quad (5.12)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz. $A(z)$ ve $B(z)$

$$A(z) = pz^{p} - \sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)(k-n)+pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}+(-1)^{n}\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)(k-n)-pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}} \quad (5.13)$$

$$B(z) = z^{p} + \sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}+(-1)^{n}\sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}} \quad (5.14)$$

şeklinde olmak üzere, $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\left|A(z)+p(1-\alpha)B(z)\right|-\left|A(z)-p(1+\alpha)B(z)\right|\geq 0 \quad (5.15)$$

eşitsizliğinin olduğunu göstermek yeterlidir. (5.13) ve (5.14) ifadelerinden

$$\left|A(z)+p(1-\alpha)B(z)\right|$$

$$=\Bigg|pz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)+pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}+(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)-pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}$$

$$+p(1-\alpha)z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}p(1-\alpha)\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}+(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}p(1-\alpha)\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}\Bigg|$$

$$=\Bigg|pz^p(2-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)+pte^{i\theta}-p(1-\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}$$

$$+(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)-pte^{i\theta}+p(1-\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}\Bigg|$$

ve

$$\left|A(z)-p(1+\alpha)B(z)\right|$$

$$=\Bigg|pz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)+pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}+(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)-pte^{i\theta}\right]\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}$$

$$-p(1+\alpha)z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}p(1+\alpha)\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}-(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}p(1+\alpha)\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}\Bigg|$$

$$=\Bigg|pz^p(-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)+pte^{i\theta}+p(1+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)}$$

$$+(-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+te^{i\theta}\right)\left(k-n\right)-pte^{i\theta}-p(1+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}\Bigg|$$

olarak bulunur. Daha sonra gerekli matematiksel hesaplamalar yapılırsa

$$\left|A(z)+p(1-\alpha)B(z)\right|-\left|A(z)-p(1+\alpha)B(z)\right|$$

$$\geq p(2-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)+pt-p(1-\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)-pt+p(1-\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}$$

$$=-p\alpha-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)+pt+p(1+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)-pt-p(1+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}$$

$$=2\left\{p(1-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right|\left|z\right|^{-(k-n+p)}\right\}$$

$$\geq 2\left\{p(1-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right|-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(1+t\right)\left(k-n\right)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right|\right\}\geq 0$$

olarak bulunur. Bu da istenilen sonucu verir, yani $f \in MH_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olur.

Aşağıdaki teoremde (5.11) ile verilen katsayı eşitsizliğinin $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfındaki fonksiyonlar için yeterli olmanın yanı sıra gerekli bir koşul olduğunu göstereceğiz.

Teorem 5.3.2. (5.10) ile verilen h ve g fonksiyonları için $f = h + \overline{g}$ olsun. $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olması için gerekli ve yeterli koşul (5.11) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 5.3.1 ışığında, eğer (5.11) ile verilen katsayı şartı sağlanmazsa sadece $f \notin \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olduğunu ispatlamamız yeterli olacaktır. $z \in \widetilde{U}$ olmak üzere $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olması için (5.12) ile verilen eşitsizliğin sağlanması gerektiğine dikkat edelim. (5.12) ile verilen ifadede $D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}h(z)$, $D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}g(z)$, $\left(D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}h(z)\right)'$, $\left(D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}g(z)\right)'$ değerleri yerlerine yazılırsa ve $z = r > 1$ olmak üzere reel eksen üzerindeki z değerleri seçilirse,

$$\psi(r) = p(1-\alpha) - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left\{ \left[(1+t)(k-n) + p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right| r^{-(k-n+p)} + \left[(1+t)(k-n) - p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right| r^{-(k-n+p)} \right\}$$

ve

$$\Omega(r) = 1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n}\right| r^{-(k-n+p)} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n}\right| r^{-(k-n+p)}$$

olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\psi(r)}{\Omega(r)}\right\} \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) \leq \left|e^{i\theta}\right| = 1$ için $\mathrm{Re}\left\{\frac{\psi(r)}{\Omega(r)}\right\} \geq 0$ gereklilik şartı aşağıdaki ifadeye denktir.

$$\frac{p(1-\alpha)-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|a_{k-n}|r^{-(k-n+p)}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|b_{k-n}|r^{-(k-n+p)}}{1+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}|a_{k-n}|r^{-(k-n+p)}+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}|b_{k-n}|r^{-(k-n+p)}}\geq 0. \tag{5.16}$$

Eğer (5.11) ile verilen eşitsizlik sağlanmıyor ise, bu durumda (5.16) ifadesi 1'e yeteri kadar yakın r değeri için negatif olur. Buradan (5.16) ile verilen eşitsizliği negatif yapacak bir $z_0 = r_0 > 1$ değeri vardır. Bu durum $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olması için istenilen şart ile çelişir. O halde (5.11) ile verilen eşitsizlik sağlanmıyor demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.4. $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ Sınıfının Büyüme Sınırları

Bu kesimde, $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfındaki fonksiyonlar için büyüme sınırlarını belirleyeceğiz.

Teorem 5.4.1. $0 \leq \alpha < 1$ ve $|z| = r > 1$ için eğer $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ oluyorsa

$$r^p - p(1-\alpha)r^{-p} \leq \left|D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}f(z)\right| \leq r^p + p(1-\alpha)r^{-p} \tag{5.17}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olsun.

$$\left|D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma}f(z)\right| = \left|z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}a_{k-n}z^{-(k-n)} - (-1)^n\sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}\overline{b_{k-n}z^{-(k-n)}}\right|$$

$$\leq r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}\left(|a_{k-n}|+|b_{k-n}|\right)r^{-(k-n)}$$

$$\leq r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty}\sigma_{k-n}^{m}\left(|a_{k-n}|+|b_{k-n}|\right)r^{-p}$$

$$\leq r^p + r^{-p}\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|a_{k-n}|+\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}|b_{k-n}|\right\}$$

$$\leq r^p + p(1-\alpha)r^{-p}$$

ve
$$\left|D_{\lambda,l,p,\delta,\beta}^{m,\gamma} f(z)\right| = \left| z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^m a_{k-n} z^{-(k-n)} - (-1)^n \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^m \overline{b_{k-n} z^{-(k-n)}} \right|$$

$$\le r^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^m \left(|a_{k-n}| + |b_{k-n}|\right) r^{-(k-n)}$$

$$\le r^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \sigma_{k-n}^m \left(|a_{k-n}| + |b_{k-n}|\right) r^{-p}$$

$$\le r^p - r^{-p} \sum_{k=n+p}^{\infty} \left\{ \left[(1+t)(k-n) + p(t+\alpha)\right] \sigma_{k-n}^m |a_{k-n}| + \left[(1+t)(k-n) - p(t+\alpha)\right] \sigma_{k-n}^m |b_{k-n}| \right\}$$

$$\le r^p - p(1-\alpha) r^{-p}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

5.5. $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ Sınıfının Ekstrem Noktaları

Bu kesimde, $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfının $clco\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ ile gösterilen kapalı konveks hull'unun ekstrem noktalarını belirleyeceğiz.

Teorem 5.5.1. $f \in \overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, f fonksiyonunun $z \in \widetilde{U}$, $h_{p-1}(z) = z^p$, $g_{p-1}(z) = z^p$, olmak üzere

$$f(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \left[X_{k-n} h_{k-n}(z) + Y_{k-n} g_{k-n}(z) \right] \tag{5.18}$$

şeklinde yazılabilmesidir. Burada

$$h_{k-n}(z) = z^p + \frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n) + p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m} z^{-(k-n)}, \ (k = 2n+p, 2n+p+1, ...)$$

$$g_{k-n}(z) = z^p - \frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n) - p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m} \overline{z}^{-(k-n)}, \ (k = 2n+p, 2n+p+1, ...)$$

$$\sum_{k=n+p-1}^{\infty} \left(X_{k-n} + Y_{k-n}\right) = 1, \quad X_{k-n} \ge 0 \ \ ve \ \ Y_{k-n} \ge 0$$

şeklindedir.

Özellikle $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_{k-n}\}$ ve $\{g_{k-n}\}$ fonksiyonları olur.

İspat. (5.18) ile verilen f fonksiyonu için

$$f(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left[X_{k-n}h_{k-n}(z)+Y_{k-n}g_{k-n}(z)\right]$$

$$=X_{p-1}h_{p-1}(z)+Y_{p-1}g_{p-1}(z)+\sum_{k=n+p}^{\infty}X_{k-n}\left(z^p+\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}z^{-(k-n)}\right)$$
$$+\sum_{k=n+p}^{\infty}Y_{k-n}\left(z^p-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}\overline{z}^{-(k-n)}\right)$$

$$=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(X_{k-n}+Y_{k-n})z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}X_{k-n}z^{-(k-n)}-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}Y_{k-n}\overline{z}^{-(k-n)}\right\}$$

yazılabilir. Teorem 5.3.2 de verilen katsayı eşitsizliğinden

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m\left[\dfrac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}X_{k-n}\right]\\ \qquad+\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m\left[\dfrac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}Y_{k-n}\right]\end{array}\right\}$$

$$=p(1-\alpha)\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(X_{k-n}+Y_{k-n}\right)\le p(1-\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur. Aksine $f\in\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}\left|a_{k-n}\right|+\frac{p(1-\alpha)}{\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}\left|b_{k-n}\right|\right\}\le 1$$

yazılabildiğinden

$$X_{k-n}=\frac{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}{p(1-\alpha)}\quad\text{ve}\quad Y_{k-n}=\frac{\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^m}{p(1-\alpha)},$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece

$$0 \le X_{p-1} \le 1 \ \ ve \ Y_{p-1} = 1 - X_{p-1} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(X_{k-n} + Y_{k-n} \right)$$

olur. Buradan da

$$f(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \left[X_{k-n} h_{k-n}(z) + Y_{k-n} g_{k-n}(z) \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.6. . $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ Sınıfının Konveks Lineer Birleşim Özelliği

Bu kesimde, $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfının konveks lineer birleşim altında kapalı olduğunu göstereceğiz.

f_j fonksiyonu her $j = 1, 2, ...$ için

$$f_j(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_{k-n,j} z^{-(k-n)} - \sum_{k=n+p}^{\infty} b_{k-n,j} \left(\overline{z}\right)^{-(k-n)}, \qquad a_{k-n,j} \ge 0, \ b_{k-n,j} \ge 0 \tag{5.19}$$

şekilde tanımlansın.

Teorem 5.6.1. (5.19) ile tanımlanan f_j fonksiyonu her $j = 1, 2, ...$ için $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfında olsun. O halde $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1$ olmak üzere,

$$t(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j(z) \qquad\qquad (0 \le c_j \le 1) \tag{5.20}$$

şeklinde tanımlı t fonksiyonu $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfında olur.

İspat. t'nin tanımına göre ,

$$t(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j a_{k-n,j} \right) z^{-(k-n)} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j b_{k-n,j} \right) \left(\overline{z}\right)^{-(k-n)} \tag{5.21}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca f_j, $\overline{MH}_{\lambda,l,\delta}^{m,\gamma,\beta}(p,\alpha,t)$ sınıfındadır. Bu durumda (5.12) de verilen bağıntıdan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_j a_{k-n,j}\right)+\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_j b_{k-n,j}\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left\{\sum_{k=n+p}^{\infty}\left\{\left[(1+t)(k-n)+p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|a_{k-n,j}\right|+\left[(1+t)(k-n)-p(t+\alpha)\right]\sigma_{k-n}^{m}\left|b_{k-n,j}\right|\right\}\right\}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{\infty}c_j p(1-\alpha)$$

$$=p(1-\alpha)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6. KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. 1966. Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, Princeton, N. J.

Ahlfors, L. V. 1979. Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Variable, McGraw-Hill Inc. New York., pp. 30.

Ahuja, O. P., Jahangiri, J. M. 2001. Multivalent Harmonic Starlike Functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 55, 1-13.

Ahuja, O. P, Jahangiri, J. M. 2002. Certain meromorphic harmonic functions. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 25(1):1-10.

Ahuja, O. P, Jahangiri, J. M. 2003. Multivalent meromorphic harmonic functions. Adv. Stud. Contemp. Math., 7(2):179-187.

Al-Oboudi, F. M. 2004. On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operatör. Int. J. Math. Math. Sci., 27, 1429-1436.

Alexander, J. W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math., 17,12-22.

Al Shaqsi, K., Darus, M. 2006. New subclass of p-valently harmonic meromorphic functions. Int. Math. Forum., 1(34):1659-1667.

Bieberbach, L. 1916. Uber Die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welche Eine Schlichte Abbildung des Einheitskreises Vernitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math., 940-955.

Bostancı, H., Öztürk, M. 2010. A new subclass of the meromorphic harmonic starlike functions, Appl. Math. Let.23, pp:1027-1032.

Branges, L. De. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. 154 , 137-152.

Charzyński, Z., Schiffer, M. 1960. A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient., Arch. Rational Mech. Anal., 5, 187–193.

Charzyński, Z., Schiffer, M. 1960. A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Scpta Math., 25, 173–181.

Clunie, J. 1959. On meromorphic schlicht functions. J. London Math. Soc. 34:215-216.

Clunie, J., Sheil-Small, T. 1984. Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Al. Math. 9:3-25.

Duren, P. 1983. Univalent Functions, Springer-Verlag, New York.

Duren, P., Hengartner, W., Laugesen, R.S. 1996. The argument principle for harmonic functions, Amer. Math. Monthly, 103, 411-415.

Duren, P. 2004. Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press, New York, pp: 1-89.

Garabedian, R., Schiffer, M. 1955. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Rational Mech. Anal., 4, 427–465.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Graham, I., Kohr, G. 2003. Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker, Inc.

Gronwall, T. H. 1914\1915. Some Remarks on Conformal Representation , Ann. Math., 16. 72-76.

Hengartner, W., Schober, G. 1986. Harmonic mappings with given dilatation, J. London Math. Soc. 33, 473-483.

Hengartner, W., Schober, G. 1987. Univalent harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 299, 1-31.

Jahangiri, J. M. 1998. Coefficients bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sec. A. 52(2), pp:57-66.

Jahangiri, J. M., Silverman, H. 1999. Meromorphic univalent harmonic functions with negative coefficients, Bull. Korean Math. Soc. 36, pp: 763-770.

Jahangiri, J. M. 2000. Harmonic meromorphic starlike functions, Bull. Korean Math. Soc. 37, pp: 291-301.

Jakubowski, Z. J. , Majchrzak, W. and Skalska, K. 1993. Harmonic Mappings with a Positive Real Part. Materialy XIV Konferencji Szkoleniowej Z Theory Zagadnien Ekstremalny. pp. 17-23.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math.J., 1, 169-185.

Koebe, P. 1907. Uber Die Uniformisierung Beliebiger Analytischer Kurven, Nachr. Akad. Wiss., Gottingen Phys- Math. KI., 191-210.

Lehto, O., Vırtanen, K.I. 1973. Quasiconformal mappings in the plane, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Lewy, H. 1936. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 42, 689-692.

Lindelöf, E. 1909. Mèmoire sur certaines inegualitès dans la thèorie des fonctions onogènes et sur quelques propriètes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel. Aacta. Soc. Sci. Fenn. 35(7):1-35.

Littlewood, J. E. 1925. On inequalities in the theory of functions. Proc. London Math. Soc. 23:481-519.

Lowner, C . 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Ein- heitskreises. I., Math. Ann. 89, 103–121.

Miller, J. E. 1970. Convex meromorphic mappings and related functions. Proc. Amer. Math Soc. 25:220-228.

Miller, S.S., Mocanu, P.T. 1985. On Some Classes of first order Differential Subordinations, Machigan Math. J., 32, 185-195.

Miller, S.S., Mocanu, P.T. 2000. Differential subordinations theory and applications, 225, CRC, New York, USA, pp. 459.

Mogra, M. L., Reddy, T. R., Juhega, O. P. 1985. Meromorphic univalent functions with positive coefficients. Bull. Aust. Math. Soc. Vol. 32:161-176.

Murugusundaramoorthy, G. 2003. Starlikeness of multivalent meromorphic harmonic functions, Bull. Ko- rean Math. Soc. 40(4), pp: 553-564.

Murugusundaramoorthy, G. 2004. Harmonic meromorphic convex functions with missing coefficients, J.Indones. Math. Soc. (MIHMI), 10(1), pp: 15-22.

Ozowa, M. 1969. On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Kodi Math. Sem. Rep., 21, 97–128.

Palka, B. P. 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, New York, pp. 560.

Pederson, R.N. 1968/1969. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient Arch. Rational Mech. Anal., 31, 331–351.

Pommerenke, C. H. 1963. On meromorphic starlike functions. Pacific J. Math., 13:221-235.

Pommerenke, C. H., 1973. Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

Ponnusamy, S., Silverman, H. 2006. Complex Variables with Applications, Birkhäuser. Boston.

Robertson, M. S. 1936. Analytic functions starlike in one direction, Amer. J. Math. 58, 456-472.

Rogosinski, W. 1943. On the coefficients of suburdinate functions. Proc. London Math. Soc., 2(48):48-82.

Rosy, T., Stephan, B. A., Subramanian, K.G ve Jahangiri, J.M. 2002. A class of harmonic meromorphic functions. Tamkang J. Math. 33(1):5-9.

Royster, W. C. 1963. Meromorphicstarlike multivalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 107:300-308.

Sălăgean, G. S. 1983. Subclasses of univalent functions. Complex Analysis-Fifthy Romanian-Finnish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1013, Springer, Berlin, pp., 362-372.

Sheil-Small, T. 1990. Constants for planar harmonic mappings, J. London Math. Soc. 42 237-248.

Thompson, J.W. 2003. A family of meromorphic harmonic mappings. Complex Variables. 48(8):627-648.

ÖZGEÇMİŞ

1983 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans, 2008 yılında yüksek lisans öğrenimimi tamamladıktan sonra aynı yıl içerisinde doktora öğrenimime başladım. Evliyim ve iki çocuğum var.

F. Müge SAKAR