T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ BİR SINIFI

Meral SÜER

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran–2013

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Meral SÜER tarafından yapılan " Arf Sayısal Yarıgrupların Bir Sınıfı " konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof. Dr.	Halil İbrahim KARAKAŞ
Üye :	Prof. Dr.	Hasan İlhan TUTALAR
Üye :	Prof. Dr.	Sezai OĞRAŞ
Üye :	Prof. Dr.	Şemsettin OSMANOĞLU
Üye :	Doç. Dr.	Sedat İLHAN (Tez Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 27 / 06 / 2013

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20…

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması çok değerli hocam Sayın **Doç. Dr. Sedat İLHAN** danışmanlığında yapılmıştır. Bugünlere gelmemde en çok emeği geçenlerden biri olan sayın hocama, vermiş oldukları her türlü destekten, bilgi ve tecrübelerini paylaştıklarından ve bu çalışmayı yaparken her daim bana olan sonsuz güvenlerinden dolayı kendilerine şükran ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim süresince emeklerinden dolayı **Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR'a**, tez çalışmam esnasında her zaman manevi desteğini hissettiğim sevgili arkadaşım **Yrd. Doç. Dr. F. Müge SAKAR'a** teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca beni her yönden destekleyen eşim **Berat SÜER'e** ve bu günlere gelmemde maddi ve manevi büyük katkıları olan ve hayatını bana adayan çok kıymetli aileme saygı ve teşekkürlerimi sunmaktan onur duyarım. İyi ki varsınız…

Ayrıca TÜBİTAK-Yurt İçi Doktora Bursiyeri olarak tez çalışmalarımı gerçekleştirme ve bilime katkı sağlama yolunda doktora eğitimim boyunca sağladıkları maddi destek için **TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB)'na** sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ BİR SINIFI

DOKTORA TEZİ

Meral SÜER

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, sayısal yarıgrupların gelişimi hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan temel kavram ve tanımlardan söz edildi.

Üçüncü bölümde, iki, üç ve dört belirteçli sayısal yarıguruplarıın tip dizileri ile ilgili bazı sonuçlar verildi. Ayrıca bu sayısal yarıgrupların Arf sayısal yarıgrubu, maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgrublarla olan ilişkileri incelendi.

Dördüncü bölümde, Arf sayısal yarıgrubu ile ilgili var olan tanımlardan Arf sayısal yarıgrubunun özel bir sınıfı ve bu sınıfla ilgili bazı sonuçlar elde edildi.

Beşinci bölümde, Arf sayısal yarıgruplarının pozitif bir tamsayı ile bölümünün yine Arf sayısal yarıgrup olduğu gösterildi. Ayrıca dördüncü bölümde verilen Arf sayısal yarıgrubunun yarımı ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Arf sayısal yarıgrup, sayısal yarıgrup, tip dizisi, maximal uzunluk, Frobenius sayısı, Apery kümesi, Kunz koordinatları.

ABSTRACT

A CLASS OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS

PhD THESIS

Meral SÜER

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2013

This work consists of five chapters.

In the first chapter, the necessary knowledge about development of numerical semigroups are given.

In the second chapter, some basic terms and definitions are given which are the necessary for properly understanding of the following chapters.

In the third chapter, some results on type squences of numerical semigroups for cases of $n(S)=2$, $n(3)=3$ and $n(S)=4$ are given. In addition, the relationship between Arf semigroups and numrical semigoups of maximal (respectively almost-maximal) length of these numrical semigroups were examined.

In the fourth chapter, a special class of Arf numerical semigroups with definitions of what we know and some results on this specific Arf numerical semigroups were obtained.

In the fifth chapter was showed that the quotient of a Arf numerical semigroup by a positive integer is a Arf numerical semigroup. In addition, some results about the half of Arf numerical semigroups of what we know by the fifth chapter were obtained.

Key Words: Arf numerical semigroup, numerical semigroup, type sequence, maximal length, Frobenius number, Apery set, Kunz coortinates.

KISALTMA VE SİMGELER

$\langle n_1,...,n_p \rangle$	: $\{n_1,...,n_p\}$ ile üretilen sayısal yarıgrup
$obeb\{a,b\}$	: a ile b nin en büyük ortak böleni
$\#(A)$	: A kümesinin eleman sayısı
$Ap(S,m)$	: S deki $m \neq 0$ elemanının Apery kümesi
$e(S)$	: S sayısal yarıgrubunun gömmeboyutu
$F(S)$	: S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı
$FH(S)$	: S sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesi
$g(S)$	: S sayısal yarıgrubunun cinsi (genusu)
$H(S)$	: S sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesi
$K(S,k)$	: S sayısal yarıgrubunun k ya göre Kunz-koordinatlar vektörü
$m(S)$	: S sayısal yarıgrubunun katlılığı
MGD	: Maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgrup
$Maximals \leq_s (X)$	: $\leq_S$ sıralam bağıntısına göre X kümesinin maksimal elemanları
$a(\bmod b)$	: a nın b ile bölümünden kalan
$n(S)$	: S sayısal yarıgrubunun belirteç sayısı
$N(S)$	: S nin Frobenius sayısından küçük elemanlarının kümesi
$\mathbb{N}$	: Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$PF(S)$	: S sayısal yarıgrubunun pseudo-Frobenius sayılarının kümesi
S/d	: S sayısal yarıgrubunun d pozitif tamsayısı ile bölüm kümesi
$t(S)$	: S sayısal yarıgrubunun tipi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi

Canımdan çok sevdiğim çocuklarım Gülsüm ve Renas’a …

1. GİRİŞ

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ sırasıyla tamsayılar kümesi ve negatif olmayan tamsayılar kümesi olarak verilsin. $S \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, S, $\mathbb{N}$ de "+" ile gösterilen toplama işlemine göre kapalı ve $0 \in S$ oluyorsa S ye *sayısal yarıgrup* adı verilir. $n_1,...,n_p \in S$ için $n_1 < ... < n_p$ olmak üzere, $S = < n_1,...,n_p > = \left\{ \sum_{i=1}^{p} a_i n_i : a_i \in \mathbb{N} \right\}$ şeklinde yazılabildiği ve $\#(\mathbb{N} \backslash S) < \infty \Leftrightarrow obeb\left\{ n_1,...,n_p \right\} = 1$ olduğu bilinmektedir (Barucci ve ark. 1997).

Bu kavramın basitliği, anlaması kolay fakat çözümü aşikâr olamayan problemi ortaya çıkarır. Bu durum 19. Yüzyılın sonunda Frobenius ve Sylvester gibi bazı matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Sylvester (1884), $n_1, n_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ ve $obeb\left\{ n_1, n_2 \right\} = 1$ olmak üzere $n_1 s_1 + n_2 s_2 = g$ şekilde yazılamayan en büyük g tamsaysının nasıl bulunacağını göstermiştir. Sylvester'in probleminin genellemesi Frobenius tarafından tasarlandı: $< n_1,...,n_p >$ sayısal yarıgrubuna ait olmayan en büyük tamsayı $n_1,...,n_p$ cinsinden nasıl formüle edilebilir? Literatürde bu probleme Frobenius problemi denir. Brauer (1942) çalışmasında Frobenius problemine yer vermiş ve 1958-1978 yılları arasında bir çok bilim adamı bu konu üzerinde çeşitli araştırmalar yapmıştır (Fröberg ve ark 1987).

Son yüzyılın ikinci yarısında, sayısal yarıgruplar cebirsel geometrideki uygulamaları sebebiyle yeniden ilgi odağı olur. Bir boyutlu analitik indirgenemez Noetherian bölgelerin değer yarıgrubu belli koşullar altında sayısal yarıgruptur ve bu halkaların bir çok özellikleri ilgili sayısal yarıgruplar bakımından karakterize edilebilir. Bir K cismi için $K\left[\left[t^{s_1},...,t^{s_n} \right]\right]$ halkasının değer yarıgrubu tam olarak $< n_1,...,n_p >$ dir. Bu ilişki istenilen özellikli bir boyutlu Noetherian yerel bölgeleri oluşturmakta kullanılabilir ve tanımlanmış bir sayısal yarıgrupta bazı değişmezler için temel olarak sorumludur. Bu değişmezler; katlılık, gömme boyutu, cinsi, tip ve kondüktördür. Sayısal yarıgrupların bazı aileleri kısmen bu bağlantıdan dolayı ele alındı: simetrik sayısal yarıgruplar, pseudo-simetrik yarıgruplar, maksimal gömme boyutlu ve Arf özellikli yarıgruplar, saturated yarıgruplar ve tam kesişim yarıgruplar her birinin halka teorisinde bir karşılığı vardır. Barucci ve Dobbs yapmış oldukları çalışmalarda yarıgruplar ve halka teorileri arasındaki kavramlara iyi bir tercüman olmuşlardır. Bu yapıların sadece cebirsel geometriye uygulamalarının önemi dışında ayrıca onların tanımları sayısal yarıgruplar alanında doğal olarak ortaya çıktığından da söz etmek gerekir.

Lipman (1971) , Arf (1948) çalışmasından etkilenerek Arf halkası çalışmalarına giriş yapar ve Arf halkası çalışmalarını yeniden canlandırır. Onların değerler yarıgubu olan yarıgruplar yardımıyla bu halkaların tanımlanması sayısal yarıgruplar için Arf özelliğini ortaya çıkarır. Arf sayısal yarıgruplarının son yıllarda cebirsel hata düzeltme kodlarına uygulanması özel bir ilgi alanı oluşturmuştur.

Sayısal yarıgruplar çalışması, pozitif tamsayı katsayılı homojen olmayan lineer denklemin negatif olmayan çözümlerine denktir. Böylece sayısal yarıgruplar literatürde geniş ölçüde ele alınmış klasik bir problemdir. Bu klasik çizginin ardından iki değişmez, sayısal yarıgruplarda önemli rol oynar. Bunlar Frobenius sayısı ve cinstir. Ayrıca, birçok eserde bir boyutlu analitik indirgenemez yerel halkalarındeğerler yarıgruplarının ele alındığını görebiliriz. Bu anlamda önemli rol oynayan sayısal yarıgrupların bazı değişmezleri ortaya çıkar: katlılık, gömme boyutu, tekillik derecesi, tip, kondüktör, Apery kümesi, pseudo-Frobenius sayısı v.b.

Lineer Diophantine-Frobenius probleminin bir genelleştirmesi aşağıdaki şekilde ele alınabilir: $u_1,...,u_n$ ve d pozitif tamsayılar ve $obeb\{u_1,...,u_n\}=1$ olsun. $S=<u_1,...,u_n>$ ye ait olmayan d nin en büyük katı için bir formül bulma. Bu problem S/d yarıgrubunun Frobenius sayısının hesaplamasıyla denktir.

Günümüz matematikçileri simetrik, pseudo-simetrik ve Arf sayısal yarıgruplarının özellikleri, onların bölüm yarıgrublarını ve değişmezlerini bulmakla ilgilenmektedirler. Bu bağlamda biz de son zamanlarda yapılan birçok çalışmayı inceleyerek ve bu çalışmaların ışığında bir sayısal yarıgrubun Arf olması için gerekli koşulların tip dizisindeki elemanlar cinsinden nasıl yazılacağını göstereceğiz daha sonra yeni bir Arf sayısal yarıgrubu tanımlayacağız. Bu sayısal yarıgrubun özelliklerini inceleyerek bölüm yarıgrubunu ve değişmezlerini bularak bunlar arasındaki bağıntıları oluşturacağız.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kesim, çalışmamızın esasını oluşturan ve tezin iyi anlaşılması için gerekli temel tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1. İçinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli cebirsel yapılara *yarıgrup* denir.

Tanım 2.2. $\langle S,*\rangle$ bir yarıgrup olsun. $T \subseteq S$ olmak üzere $\forall a,b \in T$ için $a*b \in T$ oluyorsa *T ye S nin bir alt yarıgrubu* denir.

Tanım 2.3. S bir yarıgrup ve $A \subset S$ olsun. S nin A yı kapsayan en küçük alt yarıgrubuna *A nın ürettiği yarıgrup* denir. Bu durumda *A* kümesine de *S* nin üreteçler kümesi denir ve $S = \langle A \rangle$ yazılır. Özel olarak $A = \{n_1, n_2, ..., n_p\} \subset S$ alınırsa $S = \langle n_1, n_2, ..., n_p \rangle$ yazılır. Eğer $S = \langle n_1, n_2, ..., n_p \rangle$ olacak şekilde *S* nin $A = \{n_1, n_2, ..., n_p\}$ üreteç kümesinden daha küçük bir küme yoksa o zaman $A = \{n_1, n_2, ..., n_p\}$ kümesine *S nin minimal üreteç sistemi* denir (Rosales 1999).

Tanım 2.4. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $S \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. Eğer *S,* $\mathbb{N}$ deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve $0 \in S$ oluyorsa *S ye sayısal yarıgrup* denir. S bir sayısal yarıgup olmak üzere; $n_1 < n_2 < ... < n_p$ olacak şekilde $n_1, n_2, ..., n_p \in S$ için

$$S = \langle n_1, n_2, ..., n_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} n_i k_i : \ k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak yazılır ve özellikle

$$"obeb\{n_1, n_2, ..., n_p\} = 1 \Leftrightarrow (\mathbb{N} \backslash S) \ \textit{kümesi sonludur}"$$

önermesi doğrudur (Barucci ve ark. 1997).

Örnek 2.5. $S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{5k_1 + 6k_2 + 13k_3; \ \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\}$

$$= \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow ...\}$$

şeklinde yazılır. Burada "$\rightarrow$" 15 ten sonraki bütün tamsayıların S kümesinde olduğu anlamındadır.

Örnek 2.6. $S = \langle 5,12,13 \rangle = \{5k_1 + 12k_2 + 13k_3 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\}$

$$= \{0,5,10,12,13,15,17,18,20,22 \rightarrow ...\}$$

olup,

$$\mathbb{N} \backslash S = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,14,16,19,21\} \text{ sonludur } \Leftrightarrow (5,12,13) = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 2.7. $S = \langle 4,6 \rangle = \{4k_1 + 6k_2\} = \{0,4,6,8,10,12,...\}$ olsun. $(4,6) \neq 1$ olduğundan $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu değildir.

Tanım 2.8. S sayısal yarıgrubu $\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ ile minimal olarak üretilsin. O zaman n_1 ve p sayılarına sırasıyla *S nin katlılığı ve gömme boyutu* denir ve sırasıyla $m(S)$ ve $\mathrm{e}(\mathrm{S})$ ile gösterilir.

Önerme 2.9. S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

1. $m(S) = \min(S \backslash \{0\})$
2. $e(S) \leq m(S)$

olur (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Tanım 2.10. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $e(S) = m(S)$ ise S sayısal yarıgrubuna *(maksimal gömme boyutlu)* MGD-*yarıgrup* denir.

Tanım 2.11. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere *S nin Frobenius sayısı* S ye ait olmayan en büyük tamsayı olarak tanımlanır ve $F(S)$ ile gösterilir. Yani

$$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\}$$

olarak ifade edilir.

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısını hesaplamak zordur. Ancak, özel bazı sayısal yarıgruplar için bunu kolayca hesaplamak mümkündür.

Tanım 2.12. S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun.O zaman

$$n(S) = \#\left(\{0,1,2,...,F(S)\} \cap S\right)$$

sayısına *S nin belirteç sayısı* adı verilir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Tanım 2.13. $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla, S nin Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $S = \left\{0 = s_0, s_1, ..., s_{r-1}, s_r, ..., s_{n(S)} = F(S)+1, \to ...\right\}$ şeklinde verilsin. Burada $s_i < s_{i+1}$ olup "$\to$" $F(S)+1$ sayısından büyük olan her tamsayının S ye ait olduğunu gösterir. $F(S)+1$ tamsayısına S nin *ileticisi* denir (Barucci ve ark. 1997).

Tanım 2.14. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \backslash S$ kümesinin elemanlarına *S nin (gaps) boşlukları* denir. S nin bütün boşluklarının kümesi $H(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.15. Negatif olmayan tam sayıların kümesi $\mathbb{N}$ ve S sayısal yarıgrup olmak üzere $g(S) = \#(\mathbb{N} \backslash S)$ sayısına *S nin cinsi (genus)* denir. Yani, $H(S)$ kümesinin eleman sayısı S nin cinsidir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Örnek 2.16. $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\to ...\}$ sayısal yarıgrubunun cinsinin 8 olduğunu göstermek zor değildir: $H(S) = \{1,2,3,4,7,8,9,14\}$ ve $g(S) = \#(H(S)) = 8$ dir.

Tanım 2.17. $x \in H(S)$ için $\{2x, 3x\} \subset S$ oluyorsa, bu durumda x elemanına S nin *temel boşluğu* adı verilir ve S nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(S)$ ile gösterilir (Rosales ve ark. 2004).

Örnek 2.18. $S = \langle 5,6,8 \rangle = \{0,5,6,8,10,\to ...\}$ olsun. O zaman $FH(S) = \{4,7,9\}$ olur.

Tanım 2.19. S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olsun.

$$Ap(S,m)=\{s \in S : s-m \notin S\}$$

kümesine S *nin* m *ye göre Apery kümesi* denir. Daha açık bir ifadeyle S nin m ye göre Apery kümesi elemanları, $(\mathrm{mod}\, m)$ e göre kalan sınıflarının her birindeki en küçük pozitif tam sayılardan oluşmaktadır. Böylece $\#(Ap(S,m))=m$ olup $F(S)=\max(Ap(S,m))-m$ olur (Rosales 2000).

$S=\langle n_1,n_2,...,n_p\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda, $Ap(S,n_1)=\{s \in S :\ s-n_1 \notin S\}$ kümesi, S nin $(\mathrm{mod}\, n_1)$ e göre kalan sınıflarının her birinden bir eleman kapsar. Özel olarak $Ap(S,n_1)$ kümesi, $i=0,1,2,...,n_1-1$ için $(\mathrm{mod}\, n_1)$ ye göre i ye denk olan elemanlardan oluşur. Yani $Ap(S,n_1)$ kümesinin elemanlarını w_i ile gösteririz ki onlar $(\mathrm{mod}\, n_1)$ e göre i ye denktirler (Rosales 2000).

Tanım 2.20. S sayısal yarıgrubunun Apery kümesi Tanım 2.19 da olduğu gibi verilsin. S nin k ye göre Kunz-koordinatlar vektörü $K(S,k)=u \in \mathbb{N}^{k-1}$ şeklinde yazılan vektördür. $u=(u_i)$ olmak üzere bu vektörün bileşenleri $i=1,...,k-1$ için $u_i=\dfrac{w_i-i}{k}$ şeklindedir (Blanco ve Rosales 2011). Bu haliyle Kunz-koordinatlar vektörü Apery kümesinin bir modifikasyonudur.

Örnek 2.21. $S=\langle 4,7,9\rangle=\{0,4,7,8,9,11,\rightarrow\}$ olsun.

$Ap(S,4)=\{s \in S : s-4 \notin S\}=\{0,7,9,14\}$ şeklinde olup $i=0,1,2,3$ için

$Ap(S,4)=\{w_0,w_1,w_2,w_3\}=\{0,9,14,7\}$ ve $K(S,4)=u \in \mathbb{N}^3$ olmak üzere $i=1,2,3$ için

$$u_1=\frac{w_1-1}{4}=\frac{9-1}{4}=2$$

$$u_2=\frac{w_2-2}{4}=\frac{14-2}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$u_3=\frac{w_3-3}{4}=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$u=(2,3,1) \in \mathbb{N}^3$ olarak bulunur.

Tanım 2.22. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,

$$\forall s \in S \setminus \{0\} \text{ için } x + s \in S$$

oluyorsa, bu durumda x tam sayısına *S nin Pseudo-Frobenius sayısı* denir ve S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. Yani

$$PF(S) = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus S : \, x + s \in S, \; \forall s \in S \setminus \{0\} \right\}$$

olarak ifade edilir. $\#(PF(S))$ sayısına S nin tipi de denir (Rosales ve Branco 2002).

Örnek 2.23. $S = \langle 4,6,9 \rangle = \{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$ ve $F(S) = 11$ olur.

O zaman S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi;

$$PF(S) = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \; \forall s \in S \setminus \{0\} \right\} = \{11\}$$

olarak bulunur.

Tamsayılar kümesi üzerinde şu bağıntı tanımlanır:

“ $b - a \in S$ ise $a \leq_S b$ ”.

S bir sayısal yarıgrup olduğundan bu bağıntının sıralama bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir (yansıma, geçişli, ters simetrik).

Önerme 2.24. S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olsun.

$$PF(S) = \left\{ w - m : w \in Maximals \leq_s Ap(S,m) \right\}$$

olarak yazılır (Rosales ve Branco 2002).

Not 2.25. $S = \left\{ 0 = s_0, s_1, ..., s_{n-1}, s_n, ..., s_{n(S)} = F(S) + 1, \rightarrow ... \right\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, S_i ve $S(i)$ kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $0 \leq i \leq n(S) = k$ için

$$S_i = \{ x \in S : x \geq s_i \} \text{ ve } S(i) = \{ x \in \mathbb{N} : \, x + S_i \subset S \}.$$

Her bir $S(i)$ nin bir sayısal yarıgrup olduğu açıktır. Bu durumda aşağıdaki zinciri elde ederiz (D'Anna 1998):

$$S_k \subset S_{k-1} \subset ... \subset S_1 \subset S \subset S(1) \subset ... \subset S(k-1) \subset S(k) = \mathbb{N}$$

Tanım 2.26. $S=\left\{0=s_0,s_1,\ldots,s_{n-1},s_n,\ldots,s_{n(S)}=F(S)+1,\rightarrow\ldots\right\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $t=t(S)=\#\left(S(1)\backslash S\right)$ sayısına *S sayısal yarıgrubunun tipi* denir

Tanım 2.27. $S=\left\{0=s_0,s_1,\ldots,s_{n-1},s_n,\ldots,s_{n(S)}=F(S)+1,\rightarrow\ldots\right\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $1\leq i\leq n(S)$ için $t_i=t_i(S)=\#\left(S(i)\backslash S(i-1)\right)$ sayılarından yararlanarak $\left\{t_1,t_2,\ldots,t_{n(S)}\right\}$ kümesini elde ederiz. Bu kümeye de *S sayısal yarıgrubunun tip dizisi* adı verilir. Burada, $2\leq r\leq n(S)$ ve $t_1\geq t_r\geq 1$ olarak tanımlanır (D'Anna 1998).

Örnek 2.28. $S=\langle 4,6,9\rangle=\{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow\ldots\}$ ve $F(S)=11$ dir.

$$S(0)=S_0=\{x\in S:x\geq s_0\}=S$$
$$S_1=\{x\in S:x\geq s_1\}=\{4,6,8,9,10,12,\rightarrow\ldots\}$$

olup,

$$S(1)=\{x\in\mathbb{N}:x+S_1\subset S\}=\{0,4,6,8,\rightarrow,\ldots\}$$

yazılır. Bu durumda S nin tipi

$$t_1=t=\#\left(S(1)\backslash S\right)=\#\left(\{11\}\right)=1$$

olarak bulunur. Böylece S nin tip dizisi de

$$\{1,1,1,1,1,1\}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.29. $S=\langle 5,6,13\rangle=\{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow\ldots\}$ olup $F(S)=14$ tür. Bu durumda,

$$S(0)=S_0=\{x\in S:x\geq 0\}=S$$

$$S_1=\{x\in S:x\geq 5\}=\{5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow\ldots\}$$

ve

$$S(1)=\{x\in\mathbb{N}:x+S_1\subset S\}=\{0,5,6,7,10,11,12,13,14,15,\rightarrow\ldots\}$$

olur. Bununla birlikte,

$$t_1 = t = \#\left(S(1) \setminus S\right) = \#\left(\{7,14\}\right) = 2$$

$$S_2 = \{x \in S : x \geq 6\} = \{6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$$

olur. Öte yandan,

$$S(2) = \{x \in \mathbb{N} : x + S_2 \subset S\} = \{0,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,\rightarrow ...\}$$

olup

$$t_2 = \#\left(S(2) \setminus S(1)\right) = \#\left(\{9\}\right) = 1$$

elde edilir. Böylece ,

$$t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$$

bulunur. Yani, S nin tip dizisi

$$\{2,1,1,1,1,1\}$$

şeklinde olur.

Uyarı 2.30. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $g(S) + n(S) = F(S) + 1$ olduğu açıktır. Daha önceki çalışmalarda $g(S) \leq t(S)n(S)$ olduğu gösterilmiştir (Brown ve Curtis1991).

Tanım 2.31. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, eğer $F(S) + 1 - n(S) = t(S)n(S)$ ve $F(S) + 2 - n(S) = t(S)n(S)$ eşitlikleri sağlanıyorsa S ye sırasıyla, *maksimal uzunluklu* ve *hemen hemen maksimal uzunluklu* sayısal yarıgrup denir (Brown ve Curtis1991).

Tanım 2.32. $x \geq y \geq z$ olan her $x, y, z \in S$ için $x + y - z \in S$ oluyorsa S sayısal yarıgrubuna *Arf sayısal yarıgrubu* denir (Rosales 2003). Buna eşdeğer olarak; $s_1, s_2, s_3, ..., s_n \in S$ için $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n$ olmak üzere, Her bir $1 \leq i \leq n(S) = n$ ve $t_i = t_i(S)$ için $t_i = s_i - s_{i-1} - 1$ oluyorsa S Arf özelliklidir (D'Anna 1998).

Örnek 2.33. $S = \langle 7,11,13,15,16,17,19 \rangle = \{0,7,11,13,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubu Arf özelliklidir.

Tanım 2.34. S sayısal yarıgrup ve d pozitif bir tamsayı olsun. O zaman $S/d = \{x \in \mathbb{N} : dx \in S\}$ kümesi de aynı zamanda bir sayısal yarıgruptur ve *S nin d ile bölüm kümesi* olarak adlandırılır. Üstelik $S \subseteq S/d$ olup $d = 1$ için $S/d = S$ yazılır. Özel olarak $d = 2$ için $S/2$ yarıgrubuna S *nin yarımı* denir (Rosales 2008).

Örnek 2.35. $S=\langle 3,5\rangle=\{0,3,5,6,8,\rightarrow\ldots\}$ olsun. O zaman, $d=2$ için S/d kümesi,

$$S/2=\{x\in\mathbb{N}:2x\in S\}=\{0,3,4,5,6,7,8,\rightarrow\ldots\}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.36. S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Bu durumda

$$N(S)=\{\ s\in S:\ s<F(S)\ \}$$

kümesine *S nin minimal temsilcisi* denir.

Uyarı 2.37. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $n(S)=\#(N(S))$ olduğu açıktır.

3. MAKSİMAL VE HEMEN HEMEN MAKSİMAL UZUNLUKLU SAYISAL YARIGRUPLAR

Tezin bu bölümü iki kesimden oluşmaktadır. İlk kesimde verilen bir sayısal yarıgrubun, Maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu olması için gereken koşullar tip dizisinin elemanları cinsinden ifade edilecektir. İkinci kesimde ise bir Arf sayısal yarıgrubunun maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu olması için gereken koşullar tekrar Arf sayısal yarıgrubunun tip dizisinin elemanları cinsinden verilecektir.

3.1. Maksimal ve Hemen Hemen Maksimal Uzunluklu Sayısal Yarıgruplar İçin Bazı Koşulları

Bu kesimde $n(S) \leq 4$ olan bir sayısal yarıgrubun, maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu olması için gereken koşullar tip dizisinin elemanları cinsinden ifade edilecektir. Önce tip dizileri ile ilgili gerekli bazı bilinen sonuçları hatırlayacağız.

Teorem 3.1.1. $\{t_1, t_2\}$ pozitif tam sayılar dizisinin, $n(S) = 2$ ve Frobenius sayısı $F(S)$ olan $S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, \rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunun tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, $1 \leq t_2 \leq t_1$ ve $t_1 + t_2 = F(S) - 1$ olmasıdır (D'Anna 1998).

Teorem 3.1.2. $1 \leq t_i \leq t_1 \ (i = 2,3)$ olacak şekilde $\{t_1, t_2, t_3\}$ pozitif tam sayılar dizisinin, $n(S) = 3$ ve $t_i(S) = t_i \quad (her\ i = 1,2,3 \quad için)$ koşullarını sağlayan bir S sayısal yarıgrubunun tip dizisi olması aşağıdakilerden birine denktir (D'Anna 1998):

(i) $t_2 \leq t_3$ ve $t_1 \geq t_2 + t_3 - 1$

(ii) $t_2 \geq t_3$ ve $t_1 = t_2$

(iii) $t_2 \geq t_3$ ve $t_1 \geq t_2 + t_3 + 1$.

Burada, (i) koşulu sağlanıyorsa o zaman $S = \{0, t_1+2, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3 \rightarrow ...\}$ şeklindedir. Eğer (ii) yada (iii) koşulu sağlanıyorsa $S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3 \rightarrow ...\}$ şeklindedir.

Teorem 3.1.3. $1 \le t_i \le t_1 \left(i = 2,3,4\right)$ olmak üzere, $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ dört pozitif tam sayıdan oluşan dizinin, $n(S) = 4$ ve $t_i(S) = t_i$ $\left(her\ i = 1,2,3,4\ için\right)$ olacak şekilde bir S sayısal yarıgrubunun bir tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır (D'Anna 1998):

(i) $t_3 \le t_4$, $t_2 \le t_4$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4 - 2$;

(ii) $t_3 \le t_4$, $t_4 \le t_2 \le t_3 + t_4 - 1$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4$;

(iii) $t_3 \le t_4$, $t_4 \le t_2 \le t_3 + t_4 - 1$ ve $t_1 = t_2 + t_3 - 1$;

(iv) $t_3 \le t_4$, $t_3 + t_4 - 1 \le t_2$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4 + 2$;

(v) $t_3 \le t_4$, $t_3 + t_4 - 1 \le t_2$ ve $t_1 = t_2 + t_3 + 1$;

(vi) $t_3 \le t_4$, $t_3 + t_4 - 1 \le t_2$ ve $t_1 = t_2 + 1$;

(vii) $t_3 \ge t_4$, $1 < t_2 \le t_4 + 1$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4 - 2$;

(viii) $t_3 \ge t_4$, $t_4 + 1 \le t_2 \le t_3 + t_4 + 1$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4$;
$t_2 \ne t_3 + 1$

(ix) $t_3 \ge t_4$, $t_4 + 1 \le t_2 \le t_3 + t_4 + 1$ ve $t_1 = t_2 + t_3 - 1$;
$t_2 \ne t_3 + 1$

(x) $t_3 \ge t_4$, $t_3 + t_4 + 1 \le t_2$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4 + 2$

(xi) $t_3 \ge t_4$, $t_3 + t_4 + 1 \le t_2$ ve $t_1 = t_2 + t_3 + 1$

(xii) $t_3 \ge t_4$, $t_3 + t_4 + 1 \le t_2$ ve $t_1 = t_2$

(xiii) $t_3 \ge t_4$, $t_2 = t_3$ ve $t_1 \ge t_2 + t_3 + t_4 + 2$

(xiv) $t_3 \ge t_4$, $t_2 = t_3$ ve $t_1 = t_2 + t_3 + 1$

(xv) $t_3 \ge t_4$ ve $t_1 = t_2 = t_3$.

Not 3.1.4. Burada, $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ (i) koşulunu sağlayan dizi ise o zaman $S = \{0, t_1 + 3, t_1 + t_2 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4 \rightarrow ...\}$ kümesi,

eğer $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, (ii) yada (iii) koşullarından birini sağlayan dizi ise $S = \{0, t_1 + 2, t_1 + t_2 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4 \rightarrow ...\}$ kümesi,

eğer $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ (iv), (v), (vi) yada koşullarından birini sağlayan dizi ise $S = \{0, t_1 + 1, t_1 + t_2 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4 \rightarrow ...\}$ kümesi, eğer $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ (vii) koşulunu sağlayan dizi ise

$S=\{0,t_1+3,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow...\}$ kümesi,

eğer $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ ya (viii) veya (ix) koşullarından birini sağlayan dizi ise

$S=\{0,t_1+2,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow...\}$ kümesi

ve eğer $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ (x),…,(xv) koşullarından birini sağlayan dizi ise

$S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow...\}$ kümesi, tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ olan bir sayısal yarıgruptur.

Teorem 3.1.5. S, $n(S)=2$ olan sayısal yarıgrup ve onun tip dizisi $\{t_1,t_2\}$ olsun. $t_1=t_2$ ise S maksimal uzunluklu bir sayısal yarıgruptur.

İspat. Teorem 3.1.1. ile $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,\rightarrow...\}$ ve $t_1+t_2=F(S)-1$ olarak yazılır. Eğer $t_1=t_2$ ise $F(S)+1-n(S)=t_1+t_2+1+1-2=2t_1=t(S)n(S)$ olarak yazılır. Böylece S maksimal uzunlukludur. □

Teorem 3.1.6. S, $n(S)=3$ olan sayısal yarıgrup ve onun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3\}$ olsun. O zaman,

a) $2t_1=t_2+t_3$ ise S maksimal uzunluklu bir sayısal yarıgruptur,

b) $2t_1=t_2+t_3+1$ ise S hemen hemen maksimal uzunluklu bir sayısal yarıgruptur.

İspat. S, $n(S)=3$ olan sayısal yarıgrup ve $\{t_1,t_2,t_3\}$ onun tip dizisi olsun. Eğer $\{t_1,t_2,t_3\}$ için Teorem 3.1.2'deki (i) koşulu sağlanıyorsa o zaman $S=\{0,t_1+2,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3\rightarrow...\}$ şeklindedir. Öte yandan, eğer (ii) veya (iii) koşullarından herhangi biri sağlanıyorsa o zaman

$S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3\rightarrow...\}$ biçiminde yazılır.

a) $2t_1 = t_2 + t_3$ ise

$$F(S)+1-n(S) = t_1+t_2+t_3+2+1-3 = t_1+t_2+t_3 = t_1+2t_1 = 3t_1 = n(S)t(S)$$

olur. Yani, S maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

b) $2t_1 = t_2 + t_3 + 1$ ise

$$F(S)+2-n(S) = t_1+t_2+t_3+2+2-3 = t_1+t_2+t_3+1 = t_1+2t_1 = 3t_1 = n(S)t(S)$$

olarak bulunur. Böylece S hemen hemen maksimal uzunluklu bir sayısal yarıgruptur. □

Örnek 3.1.7. S sayısal yarıgrup ve onun tip dizisi $\{2,2,2\}$ olsun. O zaman $S=\{0,3,6,9,\rightarrow ...\}$ olarak yazılır. Böylece $F(S)=8$ ve $n(S)=3$ olup $F(S)+1-n(S)=8+1-3=6=2.3=t(S)n(S)$ elde edilir. Böylece S maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

Eğer S sayısal yarıgrup ve onun tip dizisi $\{2,1,2\}$ olsun. O zaman $S=\{0,4,5,8,\rightarrow ...\}$ ve $F(S)=7$, $n(S)=3$ olur. Buradan

$$F(S)+2-n(S)=7+2-3=6=2.3=t(S)n(S)$$

elde edilir. Böylece S hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

Teorem 3.1.8. $n(S)=4$ olmak üzere, S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ olsun. O zaman,

a) $3t_1 = t_2+t_3+t_4$ ise S maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

b) $3t_1 = t_2+t_3+t_4+1$ ise S hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

İspat. Teorem 3.1.6' nın ispatı ile benzerdir.

Örnek 3.1.9. S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{2,2,2,2\}$ ise, o zaman $S=\{0,3,6,9,12,\rightarrow ...\}$, $F(S)=11$ ve $n(S)=4$ tür. Aslında

$$F(S)+1-n(S)=11+1-4=8=2.4=t(S)n(S)$$

olarak bulunur. Böylece S sayısal yarıgrubu maksimal uzunlukludur.

Eğer S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{2,2,1,2\}$ ise, o zaman $S=\{0,4,7,8,11,\rightarrow ...\}$ olup $F(S)=10$ ve $n(S)=4$ tür.

$$F(S)+2-n(S)=10+2-4=8=2.4=t(S)n(S)$$

eşitliğinden S sayısal yarıgrubu hemen hemen maksimal uzunlukludur. □

3.2. Maksimal ve Hemen Hemen Maksimal Uzunluklu Arf Sayısal Yarıgrupları İçin Bazı Koşullar

Bu kesimde $n(S) \leq 4$ olan bir Arf sayısal yarıgrubunun maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu olması için gereken koşullar, tip dizisinin elemanları cinsinden verilecek.

Not 3.2.1. $n(S)=3$ ve tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3\}$ olan bir S sayısal yarıgrubu verilsin. Eğer, Teorem 3.1.2' de (ii) yada (iii) koşulu sağlanıyarsa

$$S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3\rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubu bir Arf yarıgruptur . Ayrıca, $n(S)=4$ için Teorem 3.1.3'te verilen (x), (xi), (xii), (xiii), (xiv) ya da (xv) koşullarından herhangi biri sağlanıyorsa

$$S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubu, Arf yarıgruptur (D'Anna 1998).

Teorem 3.2.2. S sayısal yarıgrubu, $n(S)=2$, $n(S)=3$ ya da $n(S)=4$ belirteçli tip dizisi ise $\{t_1,t_2,...,t_{n(S)}\}$ olsun. Eğer, $t_1=t_2=...=t_{n(S)}$ ise S maksimal uzunluklu Arf sayısal yarıgruptur.

İspat . $n(S)=2$ ve tip dizisi $\{t_1,t_2\}$ için $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,\rightarrow ...\}$ şeklindedir. Eğer, $t_1=t_2$ ise, $t_1=t_1+t_2+2-(t_1+1)-1=s_1-s_0-1$ yazılır. Yani, S Arf yarıgruptur. Öte yandan, Teorem 3.1.5. gereği S maksimal uzunlukludur.

Eğer $n(S)=3$ ise, o zaman S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3\}$ ve $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3\rightarrow ...\}$ olur. Eğer $\{t_1,t_2,t_3\}$ Teorem 3.1.2'nin (ii) ya da (iii) koşullarından birini sağlıyor ise, Not 3.2.1. ışığında S Arf yarıgruptur. Bu durumda $F(S)+1-n(S)=t_1+t_2+t_3+2+1-3=t_1+t_2+t_3=3t_1=n(S)t(S)$ olduğundan S maksimal uzunlukludur.

Eğer $n(S)=4$ ise, S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ ve $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow ...\}$ olarak yazılır. Eğer

$\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$, Teorem 3.1.3'ün (x), (xi), (xii), (xiii), (xiv) ya da (xv) koşullarından herhangi biri sağlıyorsa Not 3.2.1' e göre S Arf yarıgruptur. Son olarak

$$F(S)+1-n(S)=t_1+t_2+t_3+t_4+3+1-4=t_1+t_2+t_3+t_4=4t_1=n(S)t(S)$$

olduğu için S maksimal uzunlukludur. □

Teorem 3.2.3. S sayısal yarıgrubu, $n(S)=2$, $n(S)=3$ ya da $n(S)=4$ belirteçli, tip dizisi ise $\{t_1,t_2,...,t_{n(S)}\}$ olsun. Eğer, $t_1=t_2=...=t_{n(S)}+1$ ise S hemen hemen maksimal uzunluklu Arf sayısal yarıgruptur.

İspat. Eğer $n(S)=2$ ise, S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2\}$ ve $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,\rightarrow...\}$ olur. Böylece $t_1=t_2+1=t_1+t_2+2-(t_1+1)-1=s_1-s_0-1$ olup S Arf yarıgruptur. Diğer yandan,

$$F(S)+2-n(S)=t_1+t_2+1+2-2=t_1+t_2+1=2t_1=n(S)t(S)$$

olduğundan S, hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

Eğer $n(S)=3$ ise, o zaman S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3\}$ ve $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3\rightarrow...\}$ olur. Eğer $\{t_1,t_2,t_3\}$ Teorem 3.1.2'nin (i) ya da (ii) koşullarından birini sağlıyor ise S Arf yarıgruptur:

$t_1=(t_1+1)+0-1=s_1-s_0-1$,

$t_2=t_1+t_2+2-(t_1+1)-1=s_2-s_1-1$ ve

$t_3=t_1+t_2+t_3+3-(t_1+t_2+2)-1=s_3-s_2-1$ bulunur.

Aynı zaman da

$$F(S)+2-n(S)=t_1+t_2+t_3+2+2-3=t_1+t_2+t_3+1=3t_1=n(S)t(S)$$

olduğu için S hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgruptur.

Eğer $n(S)=4$ halinde S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ ise $S=\{0,t_1+1,t_1+t_2+2,t_1+t_2+t_3+3,t_1+t_2+t_3+t_4+4\rightarrow...\}$ olarak yazılır. Eğer $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$, Teorem 3.1.3'ün (x), (xi), (xii), (xiii), (xiv) ya da (xv) koşullarından herhangi birini sağlıyorsa, gösterilen benzer işlemlerle, S nin hemen hemen maksimal uzunluklu Arf sayısal yarıgrup olduğu gösterilebilir. □

4. ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ ÖZEL BİR SINIFI

Bir boyutlu analitik indirgenemez bölgeler ve onların değerler yarıgrubu literatürde önemli yer tutar. Bu yaklaşımı kullanarak çalışılmış halkaların biri de Arf özellikli halkalar ve onun değerler yarıgrubu ile elde edilmiş Arf yarıgruplarıdır. Bu bölümde Arf sayısal yarıgruplarının özel bir sınıfını tanımlayacağız. Bu sınıfın değişmezlerini bulup, bu sınıfla ilgili bazı önemli sonuçlar elde edeceğiz.

Önerme 4.1. Barucci ve ark. (1997) her Arf sayısal yarıgrubunun MGD-yarıgrup olduğunu tespit etmişlerdir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 4.2. $S=\langle 3,7,11\rangle=\{0,3,6,7,9,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubu MGD- yarıgrup olmasına rağmen Arf yarıgrup değildir. Çünkü $7+7-6=8\notin S$ dir.

Önerme 4.3. S, $\mathbb{N}$ nin öz alt kümesi olsun. S Arf yarıgruptur ancak ve ancak öyle $x_1,...,x_n$ tamsayıları vardır ki her $i\in\{1,...,n\}$ için

$x_i\in\{x_{i+1},\ x_{i+1}+x_{i+2},\ ....,\ x_{i+1}+...+x_n\rightarrow...\}$ ve $S=\{0,x_1,x_1+x_2,...,x_1+....+x_n\rightarrow...\}$

şeklindedir (Rosales 2003).

Örnek 4.4. $x_1=7$, $x_2=4$ ve $x_3=2$ olarak alalım. Bu dizi Önerme 4.3'ün koşullarını sağlar. O zaman $S=\{0,7,11,13,\rightarrow...\}$ Arf özellikli bir sayısal yarıgruptur.

Yukarıdaki önerme kullanılarak yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilebilir:

Teorem 4.5. $a\in\mathbb{Z}^+$ ve $a\geq 2$ olmak üzere genel terimi $a_n=\begin{cases}1; & n=1\ ise\\ a^{n-2}; & n\neq 1\ ise\end{cases}$

olan $(a_n)=(1,a^0,a^1,...,a^{n-2},...)$ dizisinin ilk n elemanının $t\in\mathbb{Z}^+$ tamsayı katları sırasıyla $x_n=t,\ x_{n-1}=a^0t,\ x_{n-2}=a^1t,...,x_1=a^{n-2}t$ olarak seçildiğinde

$$S=\{0,x_1,x_1+x_2,...,x_1+...+x_n\rightarrow...\}=\{0,a^{n-2}t,(a^{n-2}+a^{n-3})t,...,(a^{n-2}+...+a^0+1)t,\rightarrow...\}$$

bir Arf sayısal yarıgruptur.

İspat. $a,t\in\mathbb{Z}^+$ ve $a\geq 2$ olmak üzere

$x_n=t$

$x_{n-1}=a^0t\in\{t,\rightarrow...\}$

.

.

.

$x_1 = a^{n-2}t \in \left\{a^{n-3}t, \left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3}+...+a^0+1\right)t, \rightarrow ...\right\}$ olur. Çünkü

$$a^{n-3}+...+a^0 = a^{n-3}+...+a^0$$
$$(a-1)\left(a^{n-3}+...+a^0\right) \geq a^{n-3}+...+a^0, \qquad (a \geq 2)$$
$$a^{n-2}-1 \geq a^{n-3}+...+a^0$$
$$a^{n-2} \geq a^{n-3}+...+a^0+1$$
$$a^{n-2}t \geq \left(a^{n-3}+...+a^0+1\right)t, \quad \left(t \in \mathbb{Z}^+\right)$$

yazılır ve her $i \in \{1,....,n\}$ için $x_i \in \{x_{i+1}, x_{i+1}+x_{i+2}, ..., x_{i+1}+...+x_n \rightarrow ...\}$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $x_1,...,x_n$ Önerme 4.3. deki koşulları sağlar. Böylece

$S = \{0, x_1, x_1+x_2, ..., x_1+...+x_n, \rightarrow ...\} = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2}+...+a^0+1\right)t, \rightarrow ...\right\}$ sayısal yarıgrubu Arf özelliklidir. □

Not 4.6. $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \geq 2$ olmak üzere $t=1$ için

$S = \left\{0, a^{n-2}, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right), ..., \left(a^{n-2}+...+a^1\right), \rightarrow ...\right\}$ olarak yazılır.

Örnek 4.7. $a=3,\ n=5,\ t=7$ olsun. O halde $x_5=7, x_4=7, x_3=21,\ x_2=63$ ve $x_1=189$ olup $S=\{0,189,252,273,280,287,\rightarrow ...\}$ olarak elde edilir. S, Arf özellikli bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.8. $a=10,\ n=6,\ t=1$ olsun. $x_6=1,\ x_5=1,\ x_4=10, x_3=100,\ x_2=1000$ ve $x_1=10000$ olup $S=\{0,10000,11000,11100,11110,\rightarrow ...\}$ Arf özellikli sayısal yarıgruptur.

Önerme 4.9. $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \geq 2$ olsun. $t,n>1$ için

$S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2}+...+a^0+1\right)t, \rightarrow ...\right\}$ şeklinde verilen Arf sayısal yarıgrubunun boşuklarının kümesi $i=4,5,...,n-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H(S) = \Big\{&1,...,a^{n-2}t-1, a^{n-2}t+1, a^{n-2}t+2..., \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t-1, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t+1, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t+1,...,\\ &\left(a^{n-2}+...+a^{n-i}\right)t-1, \left(a^{n-2}+...+a^{n-i}\right)t+1, \left(a^{n-2}+...+a^{n-i}\right)t+2, ..., \left(a^{n-2}+...+a^{n-i-1}\right)t-1,\\ &\left(a^{n-2}+...+a^{n-i-1}\right)t+1, \left(a^{n-2}+...+a^{n-i-1}\right)t+2, ..., \left(a^{n-2}+...+a^0+1\right)t-1\Big\} \end{aligned}$$

olup sayısal yarıgrubunun cinsi $g(S) = \left(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^0+1\right)t-n$

İspat. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$ $a \geq 2$ ve $n,t > 1$ olmak üzere

$$A=\{1,...,a^{n-2}t-1,a^{n-2}t+1,a^{n-2}t+2...,(a^{n-2}+a^{n-3})t-1,(a^{n-2}+a^{n-3})t+1,(a^{n-2}+a^{n-3})t+1,...,$$
$$(a^{n-2}+...+a^{n-i})t-1,(a^{n-2}+...+a^{n-i})t+1,(a^{n-2}+...+a^{n-i})t+2,....,(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i-1})t-1,$$
$$(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i-1})t+1,(a^{n-2}+...+a^{n-i-1})t+2,...,(a^{n-2}+...+a^{0}+1)t-1\}$$

olsun.

$x \in A \Rightarrow 0 < x < a^{n-2}t \Rightarrow x \notin S \Rightarrow x \in H(S)$

$a^{n-2}t < x < (a^{n-2}+a^{n-3})t \Rightarrow x \notin S \Rightarrow x \in H(S)$

.

.

.

$i = 4,5,...,n-1$ için

$(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i})t < x < (a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i-1})t \Rightarrow x \notin S \Rightarrow x \in H(S)$

$(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{0})t < x < (a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{0}+1)t \Rightarrow x \notin S \Rightarrow x \in H(S)$

Dolayısıyla $A \subseteq H(S)$ elde edilir.

$y \in H(S)$ olsun. O halde $y \notin S$ olur.

$y \notin S \Rightarrow (a)$ $y \in A_1 = \{1,2,...,a^{n-2}t-1\}$ ya da

$(b)\, y \in A_2 = \{a^{n-2}t+1, a^{n-2}t+2,...,(a^{n-2}+a^{n-3})t-1\}$ ya da

$i = 4,5,...,n-1$ için

$$(c)\, y \in A_i = \{(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i})t+1,(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i})t+2,...,$$
$$,(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{n-i-1})t-1\}$$

ya da

$$(d)\, y \in A_n = \{(a^{n-2}+a^{n-3}+...a^{0})t+1(a^{n-2}+a^{n-3}+...a^{0})t+2,$$
$$...,(a^{n-2}+a^{n-3}+...a^{0}+1)t-1\}$$

$\Rightarrow y \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_i \cup ... \cup A_n = A$

Yani $H(S) \subseteq A$ olur. Böylece $H(S) = A$ elde edilir

Yine cinsin tanımı ile

$$g(S)=\#(H(S))=\left(a^{n-2}t-1\right)+\left[\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t-a^{n-2}t-1\right]+...+$$
$$\left[\left(a^{n-2}+...+a^{n-i-1}\right)t-\left(a^{n-2}+...+a^{n-i}\right)t-1\right]...+\left[\left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t-\left(a^{n-2}+...+a^{0}\right)t-1\right]$$
$$=\left(a^{n-2}t-1\right)+\left(a^{n-3}t-1\right)+...\left(a^{n-i-1}-1\right)+...+\left(a^{0}t-1\right)+\left(t-1\right)$$
$$=\left(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t+n(-1)$$
$$=\left(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t-n$$

olarak hesaplanır. □

Önerme 4.10. $a\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $a\geq 2$ olsun. $t>1$ için $S=\left\{0,a^{n-2}t,\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t,...,\left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t,\rightarrow...\right\}$ sayısal yarıgrubunun belirteç sayısı ve Frobenius sayısı sırasıyla $n(S)$, $F(S)$ olmak üzere

$$n(S)=n$$
$$F(S)=\left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t-1$$

olarak bulunur.

İspat. $t>1$, $a\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $a\geq 2$ olmak üzere

Belirteç sayısının tanımıyla,

$$n(S)=\#\left(\left\{0,1,...,F(S)\right\}\cap S\right)=\#\left(\left\{0,a^{n-2}t,\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t,...,\left(a^{n-2}+...+a^{0}\right)t\right\}\right)$$
$$=\left[(n-2)-0+1\right]+1=n$$

Frobenius sayısının tanımıyla,

$F(S)=\left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t-1$ olarak bulunur. □

Not 4.11. $a\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $a\geq 2$ olmak üzere $t=1$ için özel olarak $S=\left\{0,a^{n-2},\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right),...,\left(a^{n-2}+...+a^{1}\right),\rightarrow...\right\}$ sayısal yarıgrubunun belirteç sayısı, Frobenius sayısı ve cinsi sırasıyla $n(S),F(S)$ ve $g(S)$ olmak üzere

$$n(S)=n-2$$
$$F(S)=\left(a^{n-2}+...+a^{1}\right)-1$$
$$g(S)=\left(a^{n-2}+...+a^{1}\right)-(n-2)$$

şeklindedir.

Örnek 4.12. $a=5,\ n=4$ ve $t=2$ seçildiğinde

$S=\{0,50,60,62,64,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubu için

$$H(S)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,\\ 23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,\\ 42,43,44,45,46,47,48,49,51,52,53,54,55,56,57,58,59,61,63,\}$$

$g(S)=(5^2+5^1+5^0+1)2-4=64-4=60$

$n(S)=n=4$

$F(S)=(5^2+5^1+5^0+1)2-1=64-1=63$

Örnek 4.13. $a=4,\ n=4$ ve $t=1$ seçildiğinde

$S=\{0,16,20,\rightarrow ...\}$ yarıgrubu için

$H(S)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,19\}$

$g(S)=(4^2+4^1)-(4-2)=18$

$n(S)=n-2=4-2=2$ ve $F(S)=(4^2+4^1)-1=19$

olarak bulunur.

Önerme 4.14. $a,t,n\in\mathbb{Z}^+$ ve $a\geq 2$, $n>2$ olmak üzere

$S=\{0,a^{n-2}t,(a^{n-2}+a^{n-3})t,...,(a^{n-2}+...+a^0+1)t,\rightarrow ...\}=\{0,s_1,s_2,...,s_n,\rightarrow ...\}$ sayısal

yarıgrubunun $s_1=a^{n-2}t$ elemanına göre Apery kümesi $Ap(S,s_1)=\{w_i:0\leq i\leq s_1-1\}$ ise

$$w_i=\begin{cases} 0 & ,i=0 \\ a^{n-2}t+i & ,i=a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t \\ & \quad veya\ (a^{n-3}+...+a^0+1)t\leq i\leq a^{n-2}t-1 \qquad ise \\ 2a^{n-2}t+i & ,i\neq a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t \\ & \quad ve\ \ i<(a^{n-3}+...+a^0+1)t \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \geq 2, n > 2$ olmak üzere $K = \{0 = w_i, w_1, ..., w_{s_1 - 1}\}$ ve

$$w_i = \begin{cases} 0 & ,i = 0 \\ a^{n-2}t + i & ,i = a^{n-3}t, \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3} + ... + a^0\right)t \\ & \quad veya \ \left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t \leq i \leq a^{n-2}t - 1 \qquad ise \\ 2a^{n-2}t + i & ,i \neq a^{n-3}t, \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3} + ... + a^0\right)t \\ & \quad ve \ \ i < \left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t \end{cases}$$

olsun. Bu halde,

$x \in K$ ise

(a) $x = 0 \Rightarrow x \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ olduğu açıktır.

(b) $i = a^{n-3}t, \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3} + ... + a^0\right)$ veya $\left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t \leq i \leq a^{n-2}t - 1$ için $x = a^{n-2}t + i$ şeklinde olup $x - s_1 = a^{n-2}t + i - a^{n-2}t = i < a^{n-2}t$ olur. Dolayısıyla $x - s_1 = i \notin S$ ve $x \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ olur.

(c) $i \neq a^{n-3}t, \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3} + ... + a^0\right)t$ ve $i < \left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t$ için $x = 2a^{n-2}t + i$ şeklinde olup $x - s_1 = 2a^{n-2}t + i - a^{n-2}t = a^{n-2}t + i$ olur.

Eğer $i < a^{n-3}t \Rightarrow s_1 = a^{n-2}t < a^{n-2}t + i < a^{n-2}t + a^{n-3}t = s_2 \Rightarrow x - s_1 \notin S$

$a^{n-3}t < i < \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t \Rightarrow s_2 = a^{n-2}t + a^{n-3}t < a^{n-2}t + i < a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t = s_3 \Rightarrow x - s_1 \notin S$

.

.

.

$$\left(a^{n-3} + ... + a^0\right)t < i < \left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t \Rightarrow a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + ... + a^0\right)t < a^{n-2}t + i < a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + ... + a^0 + 1\right)t$$
$$\Rightarrow s_{r-1} < a^{n-2}t + i < s_n$$
$$\Rightarrow x - s_1 \notin S$$

Dolayısıyla $x \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ dir.

$(a),(b)$ ve (c) seçeneklerinden $K \subseteq Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ elde edilir.

$y \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(a) $y = m.a^{n-2}t$ $\left(m \in \mathbb{Z}^{+}\right)$ olamaz. Aksine $y - s_1 = m.a^{n-2}t - a^{n-2}t = (m-1)a^{n-2}t \in S$ çıkar ki $y \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ oluşu ile çelişir.

(b) $i, m \in \mathbb{Z}^{+}$, $m > 2$ için $y = m.a^{n-2}t + i$ şeklinde de olamaz. Çünkü

$y - s_1 = m.a^{n-2}t + i - a^{n-2}t = (m-1)a^{n-2}t + i$ olup

$$\left(a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1\right)t \le a^{n-2}t$$

$$a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1\right)t \le 2a^{n-2}t$$

$$\left(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1\right)t \le (m-1)a^{n-2}t < (m-1)a^{n-2}t + i$$

çıkar. Yani $(m-1)a^{n-2}t + i > s_n$ olur ki $y - s_1 \in S$ çelişkisi elde edilir.

(c) Yukarıda verilenlerden anlaşılacağı üzere $Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ kümesinin elamanları $i \in \mathbb{Z}^{+}, i < a^{n-2}t$ için $0, a^{n-2}t + i$ veya $2a^{n-2}t + i$ şeklindedir.

$0 \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right) \Rightarrow 0 \in K$ olduğu açıktır.

$i = a^{n-3}t$ için $y = a^{n-2}t + a^{n-3}t = a^{n-2}t + i \in K$ aksi halde

$y = 2a^{n-2}t + a^{n-3}t$ olsa $y - s_1 = 2a^{n-2}t + a^{n-2}t - a^{n-2}t = a^{n-2}t + a^{n-3}t = s_2 \in S$ olur ki bu da $y \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ oluşu ile çelişir. Benzer şekilde

$i = (a^{n-3} + a^{n-4})t$ için $y = a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t = a^{n-2}t + i \in K$

$y = 2a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t$ olsa

$y - s_1 = 2a^{n-2}t + \left(a^{n-3} + a^{n-4}\right)t - a^{n-2}t = \left(a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4}\right)t = s_3 \in S$ olur ki bu da $y \in Ap\left(S, a^{n-2}t\right)$ oluşu ile çelişir.

.

.

.

$i = (a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1)t$

$i = (a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1)t$ için $y = a^{n-2}t + (a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1)t = a^{n-2}t + i \in K$ dir.

Çünkü $y = 2a^{n-2}t + (a^{n-3} + \ldots + a^{0} + 1)t$ olsa

$y-s_1=2a^{n-2}t+\left(a^{n-3}+...+a^0+1\right)t-a^{n-2}t=\left(a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^0+1\right)t=s_n\in S$ olur bu da $y\in Ap\left(S,a^{n-2}t\right)$ oluşu ile çelişir.

$\left(a^{n-3}+...+a^0+1\right)t<i<a^{n-2}t$ için $y=a^{n-2}t+i\in K$ olur. Çünkü $y=2a^{n-2}t+i$ olsa $y-s_1=2a^{n-2}t+i-a^{n-2}t=a^{n-2}t+i\in S$ olur ($a^{n-2}t+i>s_n$). Bu da $y\in Ap\left(S,a^{n-2}t\right)$ oluşu ile çelişir.

$i<\left(a^{n-3}+...+a^0+1\right)t$ ve $i\neq a^{n-3}t,\left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t,...,\left(a^{n-3}+...+a^0\right)t$ için $y=2a^{n-2}t+i\in K$ şeklindedir. Çünkü $y=a^{n-2}t+i\in S$ olur ki buda Apery Kümesinin tanımı ile çelişir.

Dolayısıyla $y\in K$ olur.

$(a),(b)$ ve (c) seçeneklerinden $Ap\left(S,a^{n-2}t\right)\subseteq K$ elde edilir.

Sonuç olarak $Ap\left(S,a^{n-2}t\right)=K$ elde edilir. □

Örnek 4.15. $a=3,\ n=4$ ve $t=3$ için

$x_4=3,\ x_3=3,\ x_2=9,\ x_1=27$ olup $S=\{0,27,36,39,42,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubuna ait

$$w_i=\begin{cases}0 & ,i=0\\ 27+i & ,i=9,12 \quad veya\ 15\leq i\leq 26 \quad ise\\ 54+i & ,i\neq 9,12 \quad ve\ i<15\end{cases}$$

olup, Apery kümesi

$$Ap(S,27)=\{0,36,39,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,\\ 55,56,57,58,59,60,61,62,64,65,67,68\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 4.16. S sayısal yarıgrubu $\{n_1<...<n_p\}$ ile minimal olarak üretilsin. S maksimal gömme boyutludur ancak ve ancak $Ap(S,n_1)=\{0,n_2,...,n_p\}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Önerme 4.17. $a,t\in\mathbb{Z}^{+}$, $a>2$ ve $t>1$ olmak üzere $S=\{0,a^{n-2}t,(a^{n-2}+a^{n-3})t,...,(a^{n-2}+...+a^{0}+1)t,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunun katlılığı olan $m(S)=a^{n-2}t$ ye göre Kunz-koordinatlar vektörü, $K(S,m(S))=K(S,a^{n-2}t)=u$ aşağıdaki şekildedir:

$n=1$ için $1\leq i\leq t-1$ olmak üzere $u=(u_i)$ ve $u_i=1$ şeklindedir.

$n=2$ için $1\leq i\leq t-1$ olmak üzere $u=(u_i)$ ve $u_i=2$ şeklindedir.

ve $n>2$ için

$$u=(u_i) \text{ olup } \quad u_i=\begin{cases} 1; & ,i=a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^{0})t \\ & \textit{veya } (a^{n-3}+...+a^{0}+1)t\leq i\leq a^{n-2}t-1 \\ 2 & ,i\neq a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^{0})t \\ & \textit{ve } \ i<(a^{n-3}+...+a^{0}+1)t \end{cases} \quad \textit{ise}$$

olarak yazılır.

İspat. $n=1$ için sayısal yarıgrup $S=\{0,t,\rightarrow...\}=\langle t,t+1,...,t+(t-1)\rangle$ olup Önerme 4.16'dan $Ap(S,t)=\{0,t+1,t+2,....,t+(t-1)\}$ dir. Her $i=1,...,t-1$ için $w_i=t+i$ şeklindedir. Dolayısıyla Kunz-koordinatlar vektörünün tanımından $u_i=\dfrac{w_i-i}{t}=\dfrac{(t+i)-i}{t}=1$ olup $u=(u_i)=\left(\underbrace{1,...,1}_{t-1\tan e}\right)\in\mathbb{N}^{t-1}$ yazılır.

Benzer şekilde $n=2$ için sayısal yarıgrubumuz $S=\{0,t,2t\rightarrow...\}=\langle t,2t+1,...,2t+(t-1)\rangle$ olup Önerme 4.16'dan $Ap(S,t)=\{0,2t+1,2t+2,....,2t+(t-1)\}$ dir. Her $i=1,...,t-1$ için $w_i=2t+i$ şeklindedir. Kunz-koordinatlar vektörünün tanımından $u_i=\dfrac{w_i-i}{t}=\dfrac{(2t+i)-i}{t}=2$ olup $u=(u_i)=\left(\underbrace{2,...,2}_{t-1\tan e}\right)\in\mathbb{N}^{t-1}$ yazılır.

$n>2$ için $S=\{0,a^{n-2}t,(a^{n-2}+a^{n-3})t,...,(a^{n-2}+...+a^0+1)t,\to...\}$ sayısal yarıgrubunun Apery kümesi Önerme 4.14' den

$$w_i=\begin{cases}0 & ,i=0\\ a^{n-2}t+i & ,i=a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t\\ & \quad veya\ (a^{n-3}+...+a^0+1)t\le i\le a^{n-2}t-1 \qquad ise\\ 2a^{n-2}t+i & ,i\neq a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t\\ & \quad ve\ \ i<(a^{n-3}+...+a^0+1)t\end{cases}$$

olmak üzere $Ap(S,s_1)=\{w_i:0\le i\le s_1-1\}$ dir. Benzer şekilde Kunz-koordinatlar vektörünün tanımından

$i=a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t$ ve $(a^{n-3}+...+a^0+1)t\le i\le a^{n-2}t-1$ için

$$u_i=\frac{w_i-i}{a^{n-2}t}=\frac{(a^{n-2}t+i)-i}{a^{n-2}t}=1$$

$i<(a^{n-3}+...+a^0+1)t$ ve $i\neq a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0+1)$ için

$$u_i=\frac{w_i-i}{a^{n-2}t}=\frac{(2a^{n-1}t+i)-i}{a^{n-2}t}=2$$ olarak yazarız. Dolayısıyla

$K(S,m(S))=K(S,a^{n-2}t)=u$ ve

$u=(u_i)\in\mathbb{N}^{m(S)-1}$ olmak üzere,

$$u_i=\begin{cases}1; & ,i=a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t\\ & \quad veya\ (a^{n-3}+...+a^0+1)t\le i\le a^{n-2}t-1\\ & \qquad\qquad ise\\ 2 & ,i\neq a^{n-3}t,(a^{n-3}+a^{n-4})t,...,(a^{n-3}+...+a^0)t\\ & \quad ve\ \ i<(a^{n-3}+...+a^0+1)t\end{cases}$$

olarak elde ederiz. □

Örnek 4.18. $a=3,\ n=4$ ve $t=3$ için $S=\{0,27,36,39,42,\to...\}$ sayısal yarıgrubunun Kunz-koordinatlar vektörünü bulalım.

$$u_i=\begin{cases}1 & ,i=9,12 \quad veya\ 15\le i\le 26\\ 2 & ,i\neq 9,12 \quad ve\ i<15\end{cases}\quad ise$$

$u=(u_i)=(2,2,2,2,2,2,2,2,1,2,2,1,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\in\mathbb{N}^{26}$ olarak elde edilir.

Önerme 4.19. $a,t,n \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $a \geq 2$, $n > 2$ olmak üzere $S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t, \rightarrow ...\right\}$ sayısal yarıgrubunun Pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $i = 1,2,...,s_1 = a^{n-2}t-1$ için

$$f_i = \begin{cases} i; & ,i = a^{n-3}t, \left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3}+...+a^{0}\right)t \\ & veya\ \left(a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t \leq i \leq a^{n-2}t-1 \\ a^{n-2}t+i & ,i \neq a^{n-3}t, \left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3}+...+a^{0}\right)t \\ & ve\ \ i < \left(a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t \end{cases} \quad ise$$

olmak üzere $PF(S) = \left\{f_1, f_2, ..., f_{s_1-1}\right\}$ şeklindedir.

İspat. S sayısal yarıgrubu MGD- yarıgrup olduğundan $Ap(S,s_1)$ in sıfırdan farklı tüm elemanları $\leq_S$ bağıntısına göre maksimaldir. O halde $PF(S)$ kümesinin tanımından bu kümenin elemanlarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$PF(S) = \left\{w - s_1 : w \in \max imal \leq_S Ap(S,s_1)\right\}$$

$$w_i - s_1 = \begin{cases} a^{n-2}t+i-s_1 = i & ,i = a^{n-3}t, \left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3}+...+a^{0}\right)t \\ & veya\ \left(a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t \leq i \leq a^{n-2}t-1 \\ 2a^{n-2}t+i-s_1 = a^{n-2}t+i & ,i \neq a^{n-3}t, \left(a^{n-3}+a^{n-4}\right)t, ..., \left(a^{n-3}+...+a^{0}\right)t \\ & ve\ \ i < \left(a^{n-3}+...+a^{0}+1\right)t \end{cases} \quad ise$$

□

Önerme 4.20. $a,t,n \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $a \geq 2$, $n > 2$ olmak üzere $S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t, \rightarrow ...\right\}$ sayısal yarıgrubunun tipi $t(S) = a^{n-2}t-1$ olur.

İspat. Önerme 4.19'den S sayısal yarıgrubunda $Ap(S,s_1)$ in 0 dan farklı tüm elemanlarının "$\leq_S$" bağıntısına göre maksimal olduğunu biliyoruz. O halde $PF(S) = \left\{w - s_1 : w \in \max imal \leq_S Ap(S,s_1)\right\} = \left\{w - s_1 : w \in Ap(S,s_1) \setminus \{0\}\right\}$ olacaktır. $t(S) = \#\left(PF(S)\right) = \#\left(Ap(S,s_1)\right) - 1 = s_1 - 1 = a^{n-2}t-1$ olarak elde edilir. □

Örnek 4.21 $a=5,\ n=4$ ve $t=2$ için $S=\{0,50,60,62,64\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunda

$$f_i=\begin{cases} i; & ,i=10,12\ \ veya\ \ 14\le i\le 49 \\ 50+i & ,i\ne 10,12\ \ ve\ \ i<14 \end{cases}\quad ise$$

$$PF(S)=\{10,12,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,$$
$$38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,51,52,53,54,55,56,57,58,59,61,63,\}$$

olup $t(S)=\#(PF(S))=5^{4-2}2-1=49$ olarak elde edilir.

Teorem 4.22. $a,n,t\in\mathbb{Z}^+$, $a,n>2$ ve t pozitif çift tamsayı olmak üzere

$$S=\{0,a^{n-2}t,(a^{n-2}+a^{n-3})t,...,(a^{n-2}+...+a^0)t,(a^{n-2}+...+a^0+1)t\rightarrow...\}=\{0,s_1,s_2,...,s_{n-1},s_n,\rightarrow...\}$$

olan sayısal yarıgrubu verilsin. S sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesi $i=2,3,...,n-1$ için

$$FH(S)=\left\{\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_n}{2},\frac{s_n}{2}+1,\frac{s_n}{2}+2,...,s_1-1,s_1+1,s_1+2...,s_2-1,...,s_i+1,...,s_{i+1}-1,s_{i+1}+1,...,s_n-1\right\}$$

şeklindedir.

İspat. $a,n,t\in\mathbb{Z}^+$, $a,n>2$ ve t pozitif çift tamsayı olmak üzere

$$K=\left\{\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_n}{2},\frac{s_n}{2}+1,\frac{s_n}{2}+2,...,s_1-1,s_1+1,s_1+2...,s_2-1,...,s_i+1,...,s_{i+1}-1,s_{i+1}+1,...,s_n-1\right\}$$

olsun.

Öncelikle $K\subset FH(S)$ olduğunu gösterelim.

$x\in K$ ve $x\ge s_1$ ise

$$a^{n-3}+...+a^0=a^{n-3}+...+a^0$$
$$(a-1)(a^{n-3}+...+a^0)>a^{n-3}+...+a^0\qquad (a>2)$$
$$a^{n-2}-1>a^{n-3}+...+a^0$$
$$a^{n-2}>a^{n-3}+...+a^0+1$$
$$a^{n-2}+a^{n-2}>a^{n-2}+a^{n-3}+...+a^0+1$$
$$2a^{n-2}>a^{n-2}+...+a^0+1$$
$$2a^{n-2}t>(a^{n-2}+...+a^0+1)t\qquad (t\in\mathbb{Z}^+)$$
$$2s_1>s_n$$

ve benzer şekilde $3s_1>s_n$ olduğu da görülebilir. Dolayısıyla $x\in K$ ve $x\ge s_1$ ise $2x,3x>s_n$ olup $2x,3x\in S$ ve $x\in FH(S)$ elde edilir.

$x \in K$ ve $\frac{s_1}{2} \le x \le \frac{s_n}{2}$ ise $j = 1,...,r$ için $x = \frac{s_j}{2}$ biçimindedir.

$2x = 2\frac{s_j}{2} = s_j \in S$

ve

$$\begin{aligned}
3x = 3\frac{s_j}{2} = s_j + \frac{s_j}{2} &= \left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1}\right)t + \frac{\left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1}\right)t}{2} \\
&> \left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1}\right)t + \frac{\left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1}\right)t}{a} \quad , \quad (a > 2) \\
&= \left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1}\right)t + \left(a^{n-3} + ... + \underbrace{a^{n-j-1}}_{a^{n-j-1} > a^{n-j-2} + ... a^0 + 1} + a^{n-j-2}\right)t \\
&> \underbrace{\left(a^{n-2} + ... + a^{n-j-1} + a^{n-j-2} + ... a^0 + 1\right)t}_{s_n} + k = s_n + k > s_n, \left(k \in \mathbb{Z}^+\right)
\end{aligned}$$

$3\frac{s_j}{2} \in S$ olur. Dolayısıyla $x \in FH(S)$ elde edilir.

Eğer $x \in K$ ve $\frac{s_n}{2} < x < s_1 - 1$ ise

$x \ge \frac{s_n}{2} + 1, \Rightarrow 2x \ge s_n + 2$ olup $2x \in S$ ve $3x \ge 3\frac{s_n}{2} + 3 = s_n + \underbrace{\frac{s_n}{2}}_{\in \mathbb{Z}^+} + 3 > s_n$ olup $3x \in S$ ve

$x \in FH(S)$ dir. Yani $K \subset FH(S)$ olur.

Şimdi $FH(S) \subset K$ olduğunu gösterelim. $x \in FH(S)$ ve $x \notin K$ olsun. $x \notin K$ ise ya $x \in H(S)$ ya da $x \notin H(S)$ dir. $x \notin H(S)$ ise $x \in S$ olur. Bu da $x \in FH(S)$ oluşu ile çelişir. O halde $x \in H(S)$ dir.

$x \in FH(S) \Rightarrow$ ya $i \le n$ olmak üzere $2x = s_i$ dir ya da $x > \frac{s_n}{2}$ dir.

Eğer $2x = s_i$, $i \le n$ ise, $x \in K$ olur. $x > \frac{s_n}{2}$ ise $\frac{s_n}{2} \le s_i - 1$ olduğundan,

ya $x \in \left\{\frac{s_n}{2} + 1, \frac{s_n}{2} + 2, ..., s_i - 1\right\}$ ya da $x \in \{y \in \mathbb{N} : s_1 \le y \le s_n\} \setminus \{s_1, ..., s_n\}$

olmalıdır. Böylece, $FH(S) \subset K$ olur.

Sonuç olarak $FH(S) = K$. □

Sonuç 4.23. $a,n,t \in \mathbb{Z}^{+}$, $a,n > 2$ için

$$S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2}+...+a^{0}\right)t, \left(a^{n-2}+...+a^{0}+1\right)t \to ...\right\} = \left\{0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n, \to ...\right\}$$

sayısal yarıgrubu verilsin. S sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesi $i = 2,3,...,n-1$ için

- a pozitif çift ve t pozitif tek tamsayı olmak üzere,

  $$FH(S) = \left\{\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, ..., \frac{s_{n-2}}{2}, \frac{s_n}{2}, \frac{s_n}{2}+1, \frac{s_n}{2}+2, ..., s_1-1, s_1+1, s_1+2 ..., s_2-1, ..., s_i+1, ..., s_{i+1}-1, s_{i+1}+1, ..., s_n-1\right\}$$

  şeklindedir.

- a, t pozitif tek tamsayı ise

  1) n çift olması durumunda,

  $$FH(S) = \left\{\frac{s_2}{2}, \frac{s_4}{2}, ..., \frac{s_{n-2}}{2}, \frac{s_n}{2}, \frac{s_n}{2}+1, \frac{s_n}{2}+2, ..., s_1-1, s_1+1, s_1+2 ..., s_2-1, ..., s_i+1, ..., s_{i+1}-1, s_{i+1}+1, ..., s_n-1\right\}$$

  şeklindedir.

  2) n tek olması durumunda

  $$FH(S) = \left\{\frac{s_2}{2}, \frac{s_4}{2}, ..., \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n+1}}{2}, \frac{s_{n+1}}{2}+1, \frac{s_{n+1}}{2}+2, ..., s_1-1, s_1+1, s_1+2 ..., s_2-1, ..., s_i+1, ..., s_{i+1}-1, s_{i+1}+1, ..., s_n-1\right\}$$

  biçimindedir.

Örnek 4.24. $a = 3$, $n = 6$ ve $t = 6$ için $S = \{0, 162, 216, 234, 240, 242, 244, \to ...\}$ olan sayısal yarıgrubun temel boşluklarının kümesi

$$\begin{aligned} FH(S) = \{&81,108,117,120,121,122,123,124,125,126,127,128,129,130,131,132,133, \\ &134,135,136,137138,139,140,141,142,143,144,145,146,147,148,149,150, \\ &151,152,153,154,155,156,157,158,159,160,161,163,164,165,166,167,168, \\ &169,170,171,172,173,174,175,176,177,178,179,180,181,182,183,184,185, \\ &186,187,188,189,190,191,192,193,194,195,196,197,198,199,200,201,202, \\ &203,204,205,206,207,208,209,210,211,212,213,214,215,217,218,219, \\ &220,221,222,223,224,225,226,227,228,229,230,231,232,233,235,236 \\ &237,238,239,241,243\} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5. ARF SAYISAL YARIGRUBUNUN BÖLÜMÜ

S bir sayısal yarıgrup ve k pozitif tamsayı olmak üzere S nin k ile bölümünü $\frac{S}{k}=\{x\in\mathbb{N}:kx\in S\}$ ile tanımlarız. $\frac{S}{k}$ nın bir sayısal yarıgrup olduğunu göstermek kolaydır. Aslında $\frac{S}{k}$, S yi kapsayan bir üst sayısal yarıgruptur. Gerçekten de $x\in S$ ise $kx\in S$ olup, tanımdan $x\in\frac{S}{k}$ olduğu çıkar.

a,b ve c pozitif tamsayı olamak üzere $ax(\bmod b)\leq cx$ formundaki bir ifadeye orantılı modular diophantine eşitsizlik denir. $\frac{S}{k}$ formundaki sayısal yarıgruplarla ilk olarak Rosales ve ark. (2003) te çalışmışlar ve $\frac{S}{k}$ sayısal yarıgrubunun orantılı modular diophantine eşitsizliklerin çözüm kümesi olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölünde Arf sayısal yarıgrupların bölümü ile ilgili bir teorem verip, 4. Bölümde oluşturmuş olduğumuz Arf sayısal yarıgrubunun yarımını üreteçleri cinsinden ifade edeceğiz ve bu yarımın bazı değişmezlerini bulacağız.

5.1. Arf Sayısal Yarıgruplarının Bölümü

Bu kesimde Arf saısal yarıgruplarının herhangi bir p pozitif tamsayısı ile bölümünü vereceğiz.

Teorem 5.1.1. $p\in\mathbb{Z}^{+}$ ve S bir Arf sayısal yarıgrup olmak üzere $\frac{S}{p}$ sayısal yarıgrubu da Arf özelliklidir.

İspat. Her $x,y,z\in\frac{S}{p}$ ve $x\geq y\geq z$ olsun. Bölümün tanımından $px,py,pz\in S$ olur. S Arf sayısal yarıgrup olduğu için $px+py-pz\in S$ olacaktır.

Buradan $p(x+y-z)\in S$ ve yine bölümün tanımından $x+y-z\in\frac{S}{p}$ yazılır. Böylece $\frac{S}{p}$ sayısal yarıgrubu da Arf özelliklidir. □

Örnek 5.1.2. $S=\{0,7,14,21,27,\rightarrow\ldots\}$ sayısal yarıgrubu Arf özellikli bir sayısal yarıgruptur. $\frac{S}{5}=\{0,6,\rightarrow\ldots\}$ olup $\frac{S}{5}$ sayısal yarıgrubu da Arf özelliklidir.

5.2. Özel Bir Arf Sayısal Yarıgrubunun Yarımı

Bu kesimde 4. Bölümde oluşturduğumuz $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \geq 2$ olmak üzere genel terimi $a_n = \begin{cases} 1; & n = 1 \ ise \\ a^{n-2}; & n \neq 1 \ ise \end{cases}$ olan $(a_n) = (1, a^0, a^1, ..., a^{n-2}, ...)$ dizisinin ilk n elemanının $t \in \mathbb{Z}^+$ tamsayı katları sırasıyla $x_n = t,\ x_{n-1} = a^0 t,\ x_{n-2} = a^1 t, ..., x_1 = a^{n-2} t$ olarak seçilerek elde edilen

$$S = \{0, a^{n-2}t, (a^{n-2} + a^{n-3})t, ..., (a^{n-2} + ... + a^0 + 1)t, \rightarrow ...\} = \{0, s_1, s_2, ..., s_n, \rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubunun yarımı bulacağız. Sonra elde ettiğimiz bu yarımın Frobenius sayısını ve belirteç sayısını S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı cinsinden ifade edeceğiz.

Teorem 5.2.1. $a, t, n \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq 2$ ve t pozitif çift tamsayı olmak üzere $(a_n) = (1, a^0, a^1, ..., a^{n-2}, ...)$ dizisinin ilk n elemanının $t \in \mathbb{Z}^+$ tamsayı katları sırasıyla $x_n = t, x_{n-1} = t, ..., x_1 = a^{n-2} t$ olarak seçilerek elde edilen

$$S = \{0, a^{n-2}t, (a^{n-2} + a^{n-3})t, ..., (a^{n-2} + ... + a^0 + 1)t, \rightarrow ...\} = \{0, s_1, s_2, ..., s_n, \rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubunun yarımı $\frac{S}{2} = \left\{0, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, ..., \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_n}{2}, \rightarrow ...\right\}$ şeklinde bir sayısal yarıgrubudur.

İspat. $a, t, n \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq 2$ ve t pozitif çift tamsayı olmak üzere $A = \left\{0, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, ..., \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_n}{2}, \rightarrow ...\right\}$ olarak alınsın. Bu durumda,

$x \in A \Rightarrow i = 1, 2, ..., n$ için $x = \frac{s_i}{2}$ veya $k = 1, 2, ...$ için $x = \frac{s_n}{2} + k$

$$\Rightarrow 2x = 2\frac{s_i}{2} = s_i \in S \text{ veya } 2x = 2\left(\frac{s_n}{2} + k\right) = s_n + 2k \in S$$

$$\Rightarrow 2x \in S$$

$$\Rightarrow x \in \frac{S}{2}$$

Dolayısıyla $A \subset \frac{S}{2}$ olur.

$x \in \frac{S}{2}$ ise $2x \in S$ dir. $2x \leq s_n$ için, t pozitif çift tamsayı olduğundan $i = 1,2,...,n$ için $s_i \in S$ lerin herbiri çift tamsayıdır, dolayısıyla $x = \frac{s_i}{2} \in \frac{S}{2}$ ve $x = \frac{s_i}{2} \in A$ olur. $2x > s_n$ için $2x = s_n + 2k \in S$ olacak şekilde $\exists k \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $x = \frac{s_n}{2} + k \in \frac{S}{2}$ ve $x = \frac{s_n}{2} + k \in A$ olur. Dolayısıyla $\frac{S}{2} \subset A$ olur.

Sonuç olarak $A = \frac{S}{2}$ elde edilir. □

Örnek 5.2.2. $a = 7,\ n = 7$ ve $t = 2$ için

$x_7 = 2,\ x_6 = 2,\ x_5 = 14,\ x_4 = 98,\ x_3 = 686,\ x_2 = 4802,\ x_1 = 33614$ olup

$S = \{0, 33614, 38416, 39102, 39200, 39214, 39216, 39218, \rightarrow ...\}$ şeklindedir ve

$\frac{S}{2} = \{0, 16807, 19208, 19551, 19600, 19607, 19608, 19609, \rightarrow ...\}$ olarak elde edilir.

Sonuç 5.2.3. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \geq 2$ olmak üzere ,

$S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2} + a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2} + ... + a^0 + 1\right)t, \rightarrow ...\right\} = \{0, s_1, s_2, ..., s_n, \rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunun yarımı

i. a çift tamsayı ve t tek tamsayı olduğunda $\frac{S}{2} = \left\{0, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, ..., \frac{s_{n-2}}{2}, \frac{s_n}{2}, \rightarrow ...\right\}$

ii. a,t tek tamsayı ve n çift tamsayı olduğunda $\frac{S}{2} = \left\{0, \frac{s_2}{2}, \frac{s_4}{2}, ..., \frac{s_{n-2}}{2}, \frac{s_n}{2}, \rightarrow ...\right\}$

iii. a,n,t tek tamsayı olduğunda, $\frac{S}{2} = \left\{0, \frac{s_2}{2}, \frac{s_4}{2}, ..., \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n+1}}{2}, \rightarrow ...\right\}$ dır.

Teorem 5.2.4. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$ **,** $a,n,t \geq 2$ olmak üzere

$S = \left\{0, a^{n-2}t, \left(a^{n-2} + a^{n-3}\right)t, ..., \left(a^{n-2} + ... + a^0 + 1\right)t, \rightarrow ...\right\} = \{0, s_1, s_2, ..., s_n, \rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunun yarımı olan sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı;

$$F\left(\frac{S}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{F(S)}{2} \quad ; & a,n,t \ \textit{pozitif tek tamsayı iken} \\ \dfrac{F(S)-1}{2} \quad ; & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$, $a,n,t \geq 2$ olmak üzere Sonuç 5.2.3'den a,n ve t pozitif tek tamsayı olduğunda $\frac{S}{2}=\left\{0,\frac{s_2}{2},\frac{s_4}{2},...,\frac{s_{n-1}}{2},\frac{s_{n+1}}{2},\rightarrow...\right\}$ olup Frobenius sayısının tanımından $F\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{s_{n+1}}{2}-1=\frac{s_n+1}{2}-1=\frac{s_n-1}{2}=\frac{F(S)}{2}$ diğer durumlarda ise sayısal yarıgrup $\frac{S}{2}=\left\{0,\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_{n-1}}{2},\frac{s_n}{2},\rightarrow...\right\}$, $\frac{S}{2}=\left\{0,\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_{n-2}}{2},\frac{s_n}{2},\rightarrow...\right\}$ veya $\frac{S}{2}=\left\{0,\frac{s_2}{2},\frac{s_4}{2},...,\frac{s_{n-2}}{2},\frac{s_n}{2},\rightarrow...\right\}$ şeklinde yazılacağından her üç durumda da $F\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{s_n}{2}-1=\frac{s_n-2}{2}=\frac{(s_n-1)-1}{2}=\frac{F(S)-1}{2}$ olarak elde edilir. □

Teorem 5.2.5. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$, $a,n,t \geq 2$ olmak üzere $S=\left\{0,a^{n-2}t,\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t,...,\left(a^{n-2}+...+a^0+1\right)t,\rightarrow...\right\}=\left\{0,s_1,s_2,...,s_n,\rightarrow...\right\}$ sayısal yarıgrubunun yarımı olan sayısal yarıgrubun belirteç sayısı;

a) t pozitif çift tamsayı ise $n\left(\frac{S}{2}\right)=n(S)$

b) a çift tamsayı ve t tek tamsayı ise $n\left(\frac{S}{2}\right)=n(S)-1$

c) a,t tek tamsayı ve n çift tamsayı ise $n\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{n(S)}{2}$

d) a,n,t tek tamsayı ise $n\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{n(S)+1}{2}$ şeklindedir.

İspat. $a,t,n \in \mathbb{Z}^+$, $a,n,t \geq 2$ olmak üzere $S=\left\{0,a^{n-2}t,\left(a^{n-2}+a^{n-3}\right)t,...,\left(a^{n-2}+...+a^0+1\right)t,\rightarrow...\right\}=\left\{0,s_1,s_2,...,s_n,\rightarrow...\right\}$ sayısal yarıgrubunun yarımı Teorem 5.2.1. ve Sonuç 5.2.3' e göre

a) t pozitif çift tamsayı ise $\frac{S}{2}=\left\{0,\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_{n-1}}{2},\frac{s_n}{2},\rightarrow...\right\}$ olup

$$n\left(\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,1,...,F\left(\frac{S}{2}\right)\right\}\cap\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},...,\frac{s_{n-1}}{2}\right\}\right)$$
$$=\left[(n-1)-0\right]+1=n=n(S)$$

bulunur.

b) a çift tamsayı ve t tek tamsayı ise $\dfrac{S}{2}=\left\{0,\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2},\ldots,\dfrac{s_{n-2}}{2},\dfrac{s_n}{2},\rightarrow\ldots\right\}$ olup

$$n\left(\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,1,\ldots,F\left(\frac{S}{2}\right)\right\}\cap\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,\frac{s_1}{2},\frac{s_2}{2},\ldots,\frac{s_{n-2}}{2}\right\}\right)$$
$$=\left[(r-2)-0\right]+1=n-1=n(S)-1$$

elde edilir.

c) a,t tek tamsayı ve n çift tamsayı ise $\dfrac{S}{2}=\left\{0,\dfrac{s_2}{2},\dfrac{s_4}{2},\ldots,\dfrac{s_{n-2}}{2},\dfrac{s_n}{2},\rightarrow\ldots\right\}$ olup

$$n\left(\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,1,\ldots,F\left(\frac{S}{2}\right)\right\}\cap\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,\frac{s_2}{2},\frac{s_4}{2},\ldots,\frac{s_{n-2}}{2}\right\}\right)$$
$$=\left[\frac{(n-2)-0}{2}\right]+1$$
$$=\frac{n}{2}=\frac{n(S)}{2}$$

olur.

d) a,n,t tek tamsayı ise $\dfrac{S}{2}=\left\{0,\dfrac{s_2}{2},\dfrac{s_4}{2},\ldots,\dfrac{s_{r-1}}{2},\dfrac{s_{r+1}}{2},\rightarrow\ldots\right\}$ olup

$$n\left(\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,1,\ldots,F\left(\frac{S}{2}\right)\right\}\cap\frac{S}{2}\right)=\#\left(\left\{0,\frac{s_2}{2},\frac{s_4}{2},\ldots,\frac{s_{n-1}}{2}\right\}\right)$$
$$=\left[\frac{(n-1)-0}{2}\right]+1$$
$$=\frac{n+1}{2}=\frac{n(S)+1}{2}$$

olarak bulunur. □

Örnek 5.2.6. $a=3,\ n=7$ ve $t=5$ için

$S=\{0,1215,1620,1755,1800,1815,1820,1825,\rightarrow\ldots\}$ olup $F(S)=1824$ ve $n(S)=7$ dir.

$\dfrac{S}{2}=\{0,810,900,910,913,\rightarrow\ldots\}$ olduğundan $F\left(\dfrac{S}{2}\right)=912=\dfrac{F(S)}{2}$ ve

$n\left(\dfrac{S}{2}\right)=4=\dfrac{n(S)+1}{2}$ yazılır.

Örnek 5.2.7. $a=2, n=3$ ve $t=4$ için $S=\{0,8,12,16,\rightarrow ...\}$ olup $F(S)=15$ ve $n(S)=3$ tür. $\frac{S}{2}=\{0,4,6,8,\rightarrow ...\}$ olduğundan $F\left(\frac{S}{2}\right)=7=\frac{F(S)-1}{2}$ ve $n\left(\frac{S}{2}\right)=3=n(S)$ şeklinde bulunur.

6. KAYNAKLAR

Arf, C. 1948. Une interpr´etation alg´ebrique de la suite des ordres de multiplicit´e d'une branche alg´ebrique. Proc. London Math. Soc., 50 :256–287.

Barucci, V., Dobbs, D. E., Fontana, M. 1997. Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analyticalle irreducible local domain. Memoirs of the Amer .Math.Soc., 598:13-25.

Blanco, V., Rosales, J.C. 2011. The tree of irreducible numerical semigroups. Erişim: [http://arxiv.org/pdf/1105.2147.pdf].Erişim Tarihi: 11.05.2011

Brauer, A. 1942. On a problem of partitions. Amer. J. Math. 64:2999-312.

Brown, W.C., Curtis F. 1991. Numerical semigroups of maximal and almost maximal length. Semigroup Forum, 42: 219-235.

D'Anna M. 1998.Type sequences of numerical semigroups. Semigroup Forum, 56: 1-31.

Fröberg, R., Gottlieb, C., Haggkvist, R. 1987. On numerical semigroups. Semigroup Forum, 35:63-83.

Lipman, J. 1971. Stable ideals and Arf rings. Amer. J. Math., 93: 649–685.

Rosales, J.C. 2000. Numerical semigroups with apery sets of unique expression. Journal of Algebra, 226: 479-487.

Rosales J. C. 2003. Principal ideals of numerical semigroups. Bull. Belg. Math. Soc.Simon Stevin, 10 (3): 329-343.

Rosales J.C.2008. One half of a pseudo-symetric numerical semigroup. London Mathematical Society,40(2): 347-352

Rosales J. C., Branco M. B. 2002. Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups. J. Pure Appl. Algebra, 171 (2–3): 303–314.

Rosales J. C., Garcia-Sanchez P. A. 1999. Finitelly generated commutative monoids, Nova Science Publishers, 185, New York.

Rosales J.C., Garcia-Sanchez P.A. 2009. Numerical semigroups. Springer,181, New York.

Rosales J.C., Garcia-Sanchez P.A., Garcia-Garcia J.I., Jimenez Madrid J.A. 2004. Fundamental gaps in numerical semigroups. Journal of pure and applied algebra,189: 301-313.

Rosales J. C., Garcia-Sanchez P.A., Garcia-Garcia J.I., Urbano- Blanco J.M. 2003. Proportionally modular diophantine inequalities. J.Number Theory, 103: 281-294

Sylvester, J.J.1884. Mathematical questions with their solutions. Educational Times, 41:21

ÖZGEÇMİŞ

1980 Elbistan doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elbistan'da tamamladım. 2001 yılında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans, 2009 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi'nde yüksek lisans öğrenimimi tamamladıktan sonra aynı yıl içerisinde doktora öğrenimime başladım. 2001-2010 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı farklı okullarda öğretmenlik yaptım. 2010 yılından bu yana Batman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim ve iki çocuğum var.

Meral SÜER