T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI VE PATLAMASI

Erhan PİŞKİN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran–2013

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Erhan PİŞKİN tarafından yapılan "Doğrusal Olmayan Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Azalması ve Patlaması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı   Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye : Prof. Dr. Doğan KAYA

Üye : Doç. Dr. Necat POLAT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Halis YILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hatice TAŞKESEN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28/06/2013

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20…

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Doç. Dr. Necat Polat**'a şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca vermiş olduğu 2211 Yurt içi doktora bursu ile bu tezin hazırlanmasında maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (12–FF–150) teşekkür ederim.

Çocuklarım; M. Eray ve Enes'e…

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI VE PATLAMASI

DOKTORA TEZİ

Erhan PİŞKİN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

Bu tezin ilk bölümünde çözümlerin azalması ve patlaması ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezde kullanılan çözümlerin azalması ve patlaması ile ilgili lemmalar ispatları ile birlikte verilmiştir.

Dördüncü bölümde doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren dalga denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı, enerji azalması ve patlaması çalışılmıştır.

Beşinci bölümde yüksek mertebeden zayıf damping terimli denklem sisteminin çözümlerinin enerji azalması ve patlaması çalışılmıştır.

Altıncı bölümde ise güçlü damping, doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren doğrusal olmayan yüksek mertebeden denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lokal Varlık, Global Varlık, Enerji Azalması, Patlama, Doğrusal Olmayan Damping, Güçlü Damping, Evolüsyon Denklem Sistemi, Nakao Eşitsizliği, Komornik Lemması.

ABSTRACT

DECAY AND BLOW UP OF SOLUTIONS OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

PhD THESIS

Erhan PİŞKİN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2013

In the first chapter of this thesis the historical developments of the decay and blow up of solutions are investigated.

In the second chapter, basic definitions, theorems and inequalities that will be used throughout the thesis are given.

In the third chapter, some basic lemmas about the decay and blow up of solutions, used in the thesis, are given with their proofs.

In the fourth chapter, local and global existence, energy decay and blow up of solutions are studied for a system of wave equation with nonlinear damping and source terms.

In the fifth chapter, the energy decay and blow up of solutions for a higher order system with weak damping term are studied.

In the sixth chapter, global existence, energy decay and blow up of solutions are studied for a higher order systems with strong damping, nonlinear damping and source terms.

Keywords: Local Existence, Global Existence, Energy Decay, Blow up, Nonlinear Damping, Strong Damping, System of Evolution Equations, Nakao Inequality, Komornik Lemma.

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n - boyutlu Euclid Uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$C_w(\Omega)$	: Zayıf Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\|u\|$	: u 'nun Normu
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$	: Lebesque Uzayı
$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
$E(t)$	: Enerji Fonksiyoneli

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. GİRİŞ

Bu tezin esas amacı, dördüncü bölümde ele alınan doğrusal olmayan damping ve kaynak terimli

$$\begin{cases} u_{tt} + |u_t|^{p-1} u_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) + f_1(u,v), \\ v_{tt} + |v_t|^{q-1} v_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right) + f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.1}$$

denklem sisteminin, beşinci bölümde ele alınan zayıf damping terimli

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\triangle)^m u + u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + (-\triangle)^m v + v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.2}$$

denklem sisteminin ve altıncı bölümde ele alınan güçlü damping, doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\triangle)^m u - \triangle u_t + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + (-\triangle)^m v - \triangle v_t + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.3}$$

denklem sisteminin çözümlerinin enerji azalması (energy decay) ve patlamasını (blow up) incelemektir. Fen ve mühendislikteki bir çok problem diferansiyel denklem sistemi olarak modellenmektedir. Örneğin; saçılma (scattering) teorisi, kuantum alan teorisi, elektromanyetik alanda yüklü mezonların hareketi tanımlanırken ve bazı mekanik uygulamalarda diferansiyel denklem sistemleri ortaya çıkmaktadır (Rammaha ve Sakuntasathien 2010, Fei ve Hongjun 2011).

$E(t)$ denklem sisteminin enerji fonksiyoneli olmak üzere; $\forall t > 0$ için

i) $\alpha > 0$ ve $M > 0$ iken $E(t) \leq Me^{-\alpha t}$ oluyorsa buna üstel enerji azalması,

ii) $\beta > 0$ ve $M > 0$ iken $E(t) \leq Mt^{-\beta}$ oluyorsa buna polinomal enerji azalması denir.

Çözümün azalmasına adi diferansiyel denklemler için bir örnek verelim;

$$\begin{cases} u'(t) = -u^p(t), \quad t > 0, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ise } u(t) = e^{-t}, \\ p = 2 \text{ ise } u(t) = (1+t)^{-1} \end{cases}$$

dir. Görüldüğü gibi her iki durumda da $t \longrightarrow \infty$ iken $u \longrightarrow 0$ olur. Burada $p = 1$ için üstel azalma, $p = 2$ için polinomal azalma vardır.

Şimdi çözümün patlamasına adi diferansiyel denklemler için basit bir örnek verelim;

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t), & t > 0, \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = \frac{1}{2-t}$ dir. Bu örnek doğrusal olmayan denklemlerin büyük bir sınıfı için ortak olan bir özelliği göstermesi açısından önemlidir, yani çözüm sonlu zamanda sonsuz olur (bu örnekte $t \longrightarrow 2^-$ için $u(t) \longrightarrow \infty$ dır), buna çözümün patlaması (blow up) denir. Buradan başlanarak çözümlerin patlaması kavramı genelleştirilebilir ki adi diferansiyel denklemler için ilk adım olarak $p > 1$ için $u'(t) = u^p(t)$ denklemini verebiliriz. Daha genel olarak

$$u'(t) = f(u)$$

denklemini verebiliriz ki burada f pozitif ve

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

koşulu altında süreklidir. Bu koşul adi diferansiyel denklemler teorisinde 1898 de tespit edilen Osgood koşulu olarak bilinmektedir. Bu koşul pozitif başlangıç verili herhangi bir çözümün sonlu zamanda patlaması için gerekli ve yeterlidir (Polat 2005, Hu 2011).

Şimdi evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalara kısaca değineceğiz.

Çözümlerin azalması özellikle 1980 'lerde incelenmeye başlanmıştır. Bu denklemlerdeki enerjiyi azaltan terime damping terim denir.

Patlama konusunun matematiksel teorisi ise 1960 'larda; Kaplan (1963), Friedman (1965), Fujita (1966) ve diğer bazı yazarlar tarafından genel bir yaklaşım verildikten sonra aktif olarak araştırmacılar tarafından çalışılmıştır.

İlk olarak

$$u_{tt} - \triangle u + g(u_t) = f(u) \tag{1.4}$$

şeklindeki damping ve kaynak terim içeren denklemlerin patlamasını Levine (1973, 1974), Kalantarov ve Ladyzhenskaya (1978) incelemiştir. Levine $g(u_t) = u_t$ şeklindeki doğrusal damping için denklemin patlamasını "Konkavlık metodu" olarak bilinen kendi metodu ile ele almıştır. Konkavlık metodunun temel fikri, problemin lokal çözümünün varlığı koşulu altında tanımlanan, denklemi ve sınır koşullarını temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyonelini inşa etmek ve daha sonra $\gamma > 0$ sayısı için t zamanına bağlı bir $F^{-\gamma}(t)$ konkav fonksiyonu göstermektir. Bunun için

$$\frac{d^2F^{-\gamma}(t)}{dt^2} = -\gamma F^{-\gamma-2}(t)\left[FF'' - (1+\gamma)F'^2\right] \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

olmalıdır. Bu da $\forall t \geq 0$ için

$$FF'' - (1+\gamma)F'^2 \geq 0$$

olması ile mümkündür. Fakat bu metot doğrusal olmayan damping ($g(u_t) = u_t|u_t|^{p-1}$) ve kaynak terim ($f(u) = u|u|^{q-1}$) içeren denklemlere uygulanamamaktır (Houari 2010). Ayrıca doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren denklemlerin çözümlerini incelemek oldukça zordur (Agre ve Rammaha 2006). Georgiev ve Todorova (1994), doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren denklemler için yeni bir metot geliştirdiler. Georgiev ve Todorova çalışmalarında (1.4) denkleminde $g(u_t) = u_t|u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u|^{q-1}$ iken $p \geq q > 1$ için çözümün global olduğunu, $1 < p < q \leq \frac{n}{n-2}$ için de çözümün patladığını gösterdiler. Daha sonra Levine ve Serrin (1997) ve Levine ve ark. (1998) bu sonuçları sınırlı olmayan bölgede ve soyut denklemler için geliştirdiler. Daha sonra Messaoudi (2001) de (1.4) denkleminin patlamasını çalıştı, Runzhang ve Jihong (2009) ise uygun başlangıç ve sınır koşulları ile Galerkin metodunu kullanarak (1.4) denkleminin çözümünün global varlığını elde ettiler. Ayrıca (1.4) denkleminde $g(u_t)$ nin yerine $G(u_t, \triangle u_t) = -\triangle u_t + u_t|u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u|^{q-1}$ alınarak Yu (2009), Chen ve Liu (2013) te çözümün varlığını, patlamasını ve azalmasını çalıştılar.

Messaoudi (2002) de, Petrovsky denklemi olarak adlandırılan

$$u_{tt} + \triangle^2 u + g(u_t) = f(u)$$

denkleminde $g(u_t) = u_t|u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u|^{q-1}$ iken çözümünün varlığını ve patlamasını, Wu ve Tsai (2009) da çözümün azalması ve patlamasını çalıştılar. Daha sonra Li ve ark. (2012) de, $g(u_t)$ nin yerine $G(u_t, \triangle u_t) = -\triangle u_t + u_t|u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u|^{q-1}$ alarak çözümün azalması va patlamasını çalıştılar.

Ye (2010) da $m \geq 1$ için

$$u_{tt} + (-\triangle)^m u + u_t |u_t|^{p-1} = u |u|^{q-1}$$

denkleminin global varlığını ve asimptotik davranışını çalıştı. Daha sonra Zhou ve ark. (2012) de Ye (2010) un sonuçlarını geliştirdiler.

Son zamanlarda denklem sistemleri oldukça fazla çalışılmaktadır. Agre ve Rammaha (2006) da uygun koşulları sağlayan $f_1(u,v) = (p+1)\left[|u+v|^{r-1}(u+v) + |u|^{\frac{r-3}{2}} |v|^{\frac{r+1}{2}} u\right]$ ve $f_2(u,v) = (p+1)\left[|u+v|^{r-1}(u+v) + |v|^{\frac{r-3}{2}} |u|^{\frac{r+1}{2}} v\right]$ fonksiyonları için

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \triangle v + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.5}$$

denklem sisteminin zayıf lokal ve global çözümünün varlığını ve patlamasını çalıştılar. Burada Agre ve Rammaha, $r \leq \max\{p,q\}$ iken çözümün global, $r > \max\{p,q\}$ iken çözümün patladığını gösterdiler. Houari (2010) da (1.5) denklem sisteminin patlamasını ve Houari (2012) de ise Nakao eşitsizliğinden faydalanarak çözümün azalmasını göstermiştir.

Li ve ark. (2011) de

$$\begin{cases} u_{tt} + \triangle^2 u + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + \triangle^2 v + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.6}$$

Petrovsky denklem sisteminin çözümlerinin azalması ve patlamasını çalıştılar.

Wu ve ark. (2010) da (1.1) denklem sisteminin patlamasını başlangıç enerjisi negatif iken çalıştılar. Daha sonra Fei ve Hongjun (2011) de Wu ve ark. sonuçlarını pozitif başlangıç enerjiye geliştirdiler.

Ye (2012) de (1.3) denklem sisteminde $p = q$ ve $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$ yi de özel seçerek çözümün global varlığı ve asimptotik davranışı çalışıldı.

Pişkin ve Polat (2013) te (1.1) denklem sisteminin çözümlerinin lokal ve global varlığını, azalmasını ve patlamasını çalıştılar.

Ayrıca, bir çok denklemi kapsayan (1.2) ve (1.3) denklem sistemlerinin azalma ve patlamaları Pişkin ve Polat (2012a), Pişkin ve Polat (2012b) ve Polat ve Pişkin (2012) tarafından çalışılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler verilecektir (Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011).

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|.\| : X \to R^{+}$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(N_2) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Her $\|x\|$ normu, $d : X \times X \longrightarrow R^{+}$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Bununla birlikte, bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanan norm altında vektör uzayı belirtir.

Tanım 2.1.2. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.3. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A > 0$, $B > 0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir. Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|.\|_1(\|.\|_2)$ normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisi ise, $\|.\|_2(\|.\|_1)$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (burada $\overline{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(iii) $(ax + by, z) = a\,(x,z) + b\,(y,z)$.

$K = R$ halinde $(x,y) = (y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.1.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.1.8. $n-$boyutlu R^n ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x = (x_1, ..., x_n)$ ve bu noktanın normu $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ şeklindedir.

Tanım 2.1.9. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.10. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

(a)

$$\|f_n - f\| \to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır.

(b) her $x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.13. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya çoklu-indis denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,\ldots,0)}u = u$ olur.

Tanım 2.1.14. Eğer $G \subset R^n$ ise R^n de G nin kapanışı $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, R^n in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonun desteği

$$supp\ u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $supp\ u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe sahiptir* denir.

Tanım 2.1.15. Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olur. $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarına ait ve kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir. $C_B^m(\Omega)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.17. Eğer $\phi \in C(\Omega)$, Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. (Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar; örneğin, $\overline{R^n} = R^n$ olsa bile $C^m\left(\overline{R^n}\right) \neq C^m(R^n)$ dır.) $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı da

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

aynı norm ile bir Banach uzayıdır.

2.2. Lebesque Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 2.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $ess\sup\limits_{x\in\Omega}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ *uzayı* denir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.2.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X, \qquad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.2.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L_q(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.2.6. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(.)\|_X \in L^p(a, b)$ koşulunu sağlayan (a, b) den X e tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonları uzayına $L^p(a, b; X)$ *uzayı* denir. $L^p(a, b; X)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t \in (a,b)}{ess \sup} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c, d; X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a, b; X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.2.8. Her $t \in [0, T]$ için $[0, T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0, T]; X)$ *uzayı* denir. $C^m([0, T]; X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{t \in [0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 2.3.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 2.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 2.3.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$$

olur.

Bir $\Omega \subset R^n$ bölgesinde tanımlanan Sobolev uzaylarının özelliklerinin çoğu ve özellikle bu uzaylarda verilen gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne (regularity) bağlıdır. Bu tür özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik ya da analitik koşullar türünden ifade edilir. Aşağıda bu geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

Tanım 2.3.5. R^n de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z-x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine tepe noktası x olan bir *sonlu koni* adı verilir. Ω, R^n de açık bir bölge olmak üzere, eğer Ω nın her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω bölgesi *koni özelliğini sağlar* denir.

Tanım 2.3.6. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_{B}^{j}(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^{*}$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^{*}$$

gömülmesi elde edilir. Burada

$$p^{*} = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 2.3.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 2.3.8. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

2.4. Operatörler

Tanım 2.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \to Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elemana götürüyorsa A ya *operatör*, D_A ya da A operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 2.4.2. $D_A \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne her $x, y \in D_A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

koşuluyla birlikte *doğrusal operatör* denir.

Tanım 2.4.3. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörüne her $x, y \in D_A$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği ile birlikte *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.4.4. $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_A$ için

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte *sınırlı operatör* denir.

Tanım 2.4.5. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal, simetrik bir A operatörüne her $x \in D_A \subset H$

$$(Ax, x) \geq 0$$

eşitsizliği ile birlikte *negatif olmayan operatör* denir. Negatif olmayan A operatörü için

$$(Ax, x) > 0 \Rightarrow x = 0$$

ile *pozitif operatör* denir.

Tanım 2.4.6. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$ de Y uzayının iç çarpımı ve $A : X \to Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^* y)$$

koşulunu sağlayan $A^* : Y \to X$ operatörüne, A operatörünün *eş operatörü* denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre *öz-eşlenik (self-adjoint) operatör* denir.

Tanım 2.4.7. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal ve öz-eşlenik bir A operatörüne her $x \in H$ için

$$(Ax, x) \geq C \|x\|_H^2, \qquad C > 0$$

ile birlikte pozitif belirli bir operatör denir.

2.5. Eşitsizlikler

Lemma 2.5.1. Cauchy Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.5.2. Young Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 2.5.3. Hölder Eşitsizliği. $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess \sup\limits_{\Omega} |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 2.5.4. İnterpolasyon Eşitsizliği. $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 2.5.5. Minkowski Eşitsizliği. $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.5.6. Sobolev Eşitsizliği. $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.5.7. Sobolev-Poincare eşitsizliği. p sayısı $2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ şeklinde olsun. Bu durumda $C_* = C_*(\Omega,\ p)$ sabit sayısı ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.5.8. Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x))$ vektörü $i = 1, ..., n$ olmak üzere $A_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $\operatorname{div} A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_\Omega \operatorname{div} A(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\, n(x)\, dS$$

olup, burada $n(x)$; Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül, Ostrogradsky formülü olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $v(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradsky formülüne göre

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

Lemma 2.5.9. Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form).

$\eta(t)$ negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\,\eta(t) + \psi(t)$$

eşitizliği sağlanıyorsa. Bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$$

olur.

Lemma 2.5.10. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form).

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

3. ÇÖZÜMLERİN AZALMASI VE PATLAMASI İLE İLGİLİ BAZI LEMMA VE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde çözümlerin azalmasını ve patlamasını gösterirken kullanacağımız bazı önemli lemma ve eşitsizlikleri vereceğiz.

3.1. Çözümlerin Azalması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

3.1.1. Komornik Lemması

Lemma 3.1.1.1. $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ artmayan bir fonksiyon ve $c > 0$ sabit sayısı $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h(\tau)\,d\tau \leq ch(t) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0)\,e^{1-\frac{t}{c}} \tag{3.1.2}$$

dır (Komornik 1994).

İspat. $\forall x \geq 0$ için

$$f(x) = e^{\frac{x}{c}} \int_x^\infty h(\tau)\,d\tau \tag{3.1.3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f lokal mutlak sürekli ve (3.1.1) den dolayı artmayandır. (3.1.3) eşitsizliğinin türevi alınır ve (3.1.1) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{c}e^{\frac{x}{c}} \int_x^\infty h(\tau)\,d\tau + e^{\frac{x}{c}}\left(-h(x)\right) \\ &= \frac{1}{c}e^{\frac{x}{c}} \left(\int_x^\infty h(\tau)\,d\tau - ch(x)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

olur. f artmayan olduğundan $\forall x \geq 0$ için $f(x) \leq f(0)$ dır. Bu gerçeğin göz önünde bulundurulması ve (3.1.1) den

$$e^{\frac{x}{c}} \int_x^\infty h(\tau)\,d\tau = f(x) \leq f(0) = \int_0^\infty h(\tau)\,d\tau \leq ch(0)$$

bulunur. Buradan

$$\int_x^\infty h(\tau)\,d\tau \leq ch(0)\,e^{-\frac{x}{c}} \tag{3.1.4}$$

olur.

Diğer taraftan h negatif olmayan ve artmayan olduğundan

$$\int_x^\infty h(\tau)\,d\tau \geq \int_x^{x+c} h(\tau)\,d\tau \geq \min_{\tau\in[x,x+c]} h(\tau)\int_x^{x+c} d\tau = ch(x+c) \tag{3.1.5}$$

dır.

(3.1.4) ve (3.1.5) ten $\forall x \geq 0$ için

$$h(x+c) \leq h(0)\,e^{-\frac{x}{c}}$$

olur. Buradan da $x+c=t$ olarak seçilmesiyle

$$h(t) \leq h(0)\,e^{1-\frac{t}{c}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.1.2. $h:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ artmayan bir fonksiyon, $\alpha>0$ ve $c>0$ sabit sayıları, $\forall t\geq 0$ için

$$\int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \leq ch^\alpha(0)\,h(t) \tag{3.1.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0)\left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.1.7}$$

dır (Komornik 1994).

İspat. Eğer $h(0)=0$ ise $h(t)=0$ olur. Bu durumda (3.1.7) eşitsizliği doğrudan sağlanır. Kabul edelim ki $h(0)\neq 0$ olsun. Bu durumda $\frac{h(t)}{h(0)}$ tanımlıdır. Şimdi $h(t)$ nin yerine $\frac{h(t)}{h(0)}$ ve genelliği bozmadan $h(0)=1$ olarak alırsak, böylece $\forall t\geq c$ için

$$h(t) \leq \left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliğinin ispatlanması gerekir.

$F:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ olmak üzere

$$F(t) = \int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \tag{3.1.9}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda F lokal mutlak sürekli ve artmayandır.

(3.1.9) eşitsizliğinin türevi alınırsa

$$F'(t) = -h^{\alpha+1}(t) \tag{3.1.10}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.6) ve $h(0) = 1$ kabulü göz önünde bulundurulursa

$$F(t) = \int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \leq ch^\alpha(0)\, h(t) = ch(t)$$

bulunur. Buradan da

$$h(t) \geq \frac{F(t)}{c} \tag{3.1.11}$$

yazılır. (3.1.10) ve (3.1.11) den hemen hemen bütün $(0,\infty)$ aralığında

$$-F' \geq c^{-\alpha-1} F^{\alpha+1}$$

olur. Burada $B = \sup\{t : h(t) > 0\}$ olmak üzere, hemen hemen bütün $(0,B)$ aralığında

$$\left(F^{-\alpha}\right)' \geq \alpha c^{-\alpha-1} \tag{3.1.12}$$

yazılabilir ($F^{-\alpha}(t)$ nın $t < B$ için tanımlı olduğuna dikkat ediniz). $\forall s \in [0,B)$ için (3.1.12) eşitsizliğinin $[0,s]$ aralığında integrali alınırsa

$$F^{-\alpha}(s) - F^{-\alpha}(0) \geq \alpha c^{-\alpha-1} s$$

bulunur. Buradan $\forall s \in [0,B)$ için

$$F(s) \leq \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.1.13}$$

olur. $s \geq B$ iken $F(s) = 0$ olduğundan (3.1.13) eşitsizliği aslında $\forall s \geq 0$ için sağlanır. (3.1.6) dan $F(0) \leq ch^{\alpha+1}(0) = c$ dır. Böylece (3.1.13) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} &\leq \left(c^{-\alpha} + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (c + \alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

olur. Diğer taraftan h negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olduğundan (3.1.13) eşitsizliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_s^{\infty} h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \\ &= \int_s^{c+(\alpha+1)s} h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau + \int_{c+(\alpha+1)s}^{\infty} h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \\ &\geq \int_s^{c+(\alpha+1)s} h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \\ &\geq (c+\alpha s)\, h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

olur. Böylece (3.1.13)-(3.1.15) ten

$$(c+\alpha s)\, h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) \leq c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (c+\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) &\leq c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (c+\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}-1} \\ &= \left(1+\frac{\alpha s}{c}\right)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $c+(\alpha+1)s = t$ olarak seçilirse

$$h(t) \leq \left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Not 3.1.1.3. (3.1.2) ve (3.1.7) eşitsizlikleri $0 \leq t < c$ için de sağlanır. Bu durumda $h(t) \leq h(0)$ olur.

Not 3.1.1.4. Lemma 3.1.1.2 de $\alpha \longrightarrow 0$ olursa Lemma 3.1.1.1 elde edilir.

3.1.2. Genelleştirilmiş Komornik Lemması

Lemma 3.1.2.1. $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ artmayan bir fonksiyon, $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ artan C^1 sınıfından bir fonksiyon,

$$\phi(0) = 0 \text{ ve } t \longrightarrow \infty \quad \text{için } \phi(t) \longrightarrow \infty$$

olsun. Ayrıca $\alpha \geq 0,\ \omega > 0$ ve $\forall S \geq 0$ için

$$\int_S^\infty h^{\alpha+1}(t)\,\phi'(t)\,dt \leq \frac{1}{\omega} h^\alpha(0)\,h(S) \tag{3.1.16}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \text{Eğer } \alpha &= 0 \text{ ise } h(t) \leq h(0)\,e^{1-\omega\phi(t)}, && (3.1.17)\\ \text{Eğer } \alpha &> 0 \text{ ise } h(t) \leq h(0)\left(\frac{1+\alpha}{1+\omega\alpha\phi(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} && (3.1.18) \end{aligned}$$

dır (Martinez 1999).

İspat. $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ olmak üzere

$$f(\tau) = h\left(\phi^{-1}(\tau)\right)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f artmayandır ve $\forall 0 \leq S \leq T < \infty$ için

$$\begin{aligned} \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} f^{1+\alpha}(\tau)\,d\tau &= \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} h^{1+\alpha}\left(\phi^{-1}(\tau)\right)d\tau \\ &= \int_S^T h^{1+\alpha}(t)\,\phi'(t)\,dt \\ &\leq \frac{1}{\omega} h^\alpha(0)\,h(S) \\ &= \frac{1}{\omega} f^\alpha(0)\,f(\phi(S)) \end{aligned}$$

dır. $s = \phi(S)$ olsun ve $\lim\limits_{T\longrightarrow\infty} \phi(T) = \infty$ olduğundan $\forall s \geq 0$ için

$$\int_s^\infty f^{1+\alpha}(\tau)\,d\tau \leq \frac{1}{\omega} f^\alpha(0)\,f(s) \tag{3.1.19}$$

olur. (3.1.19) ifadesi Gronwall tipli eşitsizliktir böylece Komornik eşitsizliklerinden (Lemma 3.1.1.1 ve Lemma 3.1.1.2), $\forall s \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \text{Eğer } \alpha &= 0 \text{ ise } f(s) \leq f(0)\,e^{1-\omega s}, \\ \text{Eğer } \alpha &> 0 \text{ ise } f(t) \leq f(0)\left(\frac{1+\alpha}{1+\omega\alpha s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

bulunur. $h(t) = f(\phi(t))$ olduğundan (3.1.17) ve (3.1.18) elde edilir.

Not 3.1.2.2. Lemma 3.1.2.1 de $\forall t \geq 0$ için $\phi(t) = t$ alınırsa Lemma 3.1.1.1 ve Lemma 3.1.1.2 elde edilir.

3.1.3. Nakao Eşitsizliği

Lemma 3.1.3.1. $\phi(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, artmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere; $w_0 > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$\phi^{1+\alpha}(t) \leq w_0 \left(\phi(t) - \phi(t+1)\right), \ t \geq 0 \tag{3.1.20}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0)\, e^{-w_1[t-1]^+}, & \alpha = 0, \\ \phi(t) \leq \left(\phi(0)^{-\alpha} + w_0^{-1}\alpha\,[t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

dır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0 - 1}\right)$ dır (Nakao 1977, Nakao 1978).

İspat. i) $\alpha > 0$ için

$$y(t) = \phi^{-\alpha}(t)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\left[\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)\right]^{-\alpha} d\theta \\ &= \int_0^1 -\alpha\left[\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)\right]^{-\alpha-1}\left[\phi(t+1) - \phi(t)\right] d\theta \\ &\geq \alpha \int_0^1 \left[\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)\right]^{-\alpha-1} w_0^{-1}\phi^{1+\alpha}(t)\, d\theta \\ &= \alpha w_0^{-1}\phi^{1+\alpha}(t) \int_0^1 \left[\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)\right]^{-\alpha-1} d\theta \\ &\geq \alpha w_0^{-1}\phi^{1+\alpha}(t)\,\phi^{-1-\alpha}(t) \\ &= \alpha w_0^{-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$y(t+1) \geq y(t) + \alpha w_0^{-1}$$

ve

$$y(t+1) \geq y(0) + \alpha w_0^{-1} t$$

yazılabilir. $y(t)$ nin tanımından

$$\phi^{-\alpha}(t+1) \geq \phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1} t$$

ve

$$\phi^{-\alpha}(t) \geq \phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1}[t-1]^+$$

elde edilir. Böylece

$$\phi(t) \leq \left(\phi^{-\alpha}(0) + \alpha w_0^{-1}[t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

bulunur.

ii) Şimdi $\alpha = 0$ olsun. (3.1.20) eşitsizliğinden

$$\phi(t+1) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)\phi(t)$$

dır. Ayrıca eğer $t \geq 1$ alınırsa n tamsayısı için $n \leq t \leq n+1$ dir. Buradan

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)\phi(t-1)$$

yazılabilir. Böylece

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^2 \phi(t-2) \leq ... \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n) \\
&\leq \phi(0)\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{[t-1]^+} \\
&= \phi(0)\, e^{-[t-1]^+ \ln\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{-1}} \\
&= \phi(0)\, e^{-w_1[t-1]^+}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0 - 1}\right)$ dır.

3.2. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

Lemma 3.2.1. $\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0,\infty)$ negatif olmayan fonksiyonu, $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0 \tag{3.2.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. $r_2 = 2(\delta+1) - 2\sqrt{\delta(\delta+1)}$ olmak üzere; eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0 \tag{3.2.2}$$

ise, bu durumda $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ dır. Burada K_0 sabit sayıdır (Li ve Tsai 2003).

İspat.

$$r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0$$

denkleminin kökleri $r_1 = 2(\delta+1) + 2\sqrt{\delta(\delta+1)}$ ve $r_2 = 2(\delta+1) - 2\sqrt{\delta(\delta+1)}$ dir. Bu durumda (3.2.1) diferansiyel eşitsizliği

$$\left(\frac{d}{dt} - r_1\right)\left(\frac{d}{dt} - r_2\right)B(t) \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{(B'(t) - r_2 B(t))'}{B'(t) - r_2 B(t)} \geq r_1 \tag{3.2.3}$$

olur. (3.2.3) ifadesinin 0 dan t ye integrali alınırsa

$$B'(t) \geq r_2 B(t) + (B'(0) - r_2 B(0))\, e^{r_1 t}$$

bulunur. (3.2.2) den $B'(t) > K_0$ dır.

Lemma 3.2.2. Eğer $H(t)$, $[t_0,\infty)$ aralığında artmayan ve $t \geq t_0$ için

$$[H'(t)]^2 \geq a + b\,[H(t)]^{2+\frac{1}{\delta}} \tag{3.2.4}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\lim_{t \longrightarrow T^{*-}} H(t) = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0,\ b \in R$ dir.

T^* ın üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

(i) Eğer $b < 0$ ve $H(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{-\frac{a}{b}}\right\}$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \tag{3.2.5}$$

dır.

(ii) Eğer $b = 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{3.2.6}$$

dır.

(iii) Eğer $b > 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}}\right] \tag{3.2.7}$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır (Li ve Tsai 2003).

İspat. (i) $c \geq d > 0$ için $\sqrt{c^2 - d^2} \geq c - d$ olduğundan, (3.2.4) ten $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} H(t)^{1+\frac{1}{2\delta}} \\ &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} H(t) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$H(t) \leq \left(H(t_0) - \sqrt{-\frac{a}{b}}\right) e^{(t-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

bulunur. Böylece burada $\lim\limits_{t \longrightarrow T^*-} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^* sayısının üst sınırı (3.2.5) te verildiği gibidir.

(ii) $b = 0$ ise, (3.2.4) ten $t \geq t_0$ için

$$H(t) \leq H(t_0) - \sqrt{a}(t - t_0)$$

olur. Böylece burada $\lim\limits_{t \longrightarrow T^*-} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^* sayısının üst sınırı (3.2.6) da verildiği gibidir.

(iii) $b > 0$ ise, (3.2.4) ten

$$H'(t) \leq -\sqrt{a\left(1 + (cH(t))^{2+\frac{1}{\delta}}\right)} \tag{3.2.8}$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır.

$m, n > 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$m^q + n^q \geq 2^{1-q} (m+n)^q$$

eşitsizliği göz önünde bulundurulursa, $q = 2 + \frac{1}{\delta}$ olarak seçilirse (3.2.8) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} 2^{\frac{-1-\delta}{2\delta}} (1 + cH(t))^{1+\frac{1}{2\delta}}$$

diferansiyel eşitsizliği bulunur. Bu diferansiyel eşitsizlik çözülürse

$$H(t) \leq \frac{1}{c} \left\{ -1 + \left[(1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}} + \frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{-\frac{3\delta+1}{2\delta}} (t - t_0) \right]^{-2\delta} \right\}$$

bulunur. Böylece burada $\lim\limits_{t \longrightarrow T^{*-}} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^* sayısının üst sınırı (3.2.7) de verildiği gibidir.

Lemma 3.2.3. $\psi(t)$, iki defa sürekli diferansiyellenebilen ve

$$\begin{cases} \psi''(t) + \psi'(t) \geq C_0 \psi^{1+\alpha}(t), \quad t > 0, \ C_0 > 0, \ \alpha > 0, \\ \psi(0) > 0, \qquad \psi'(0) \geq 0 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\psi(t)$ çözüm fonksiyonu sonlu zamanda patlar. Ayrıca patlama zamanı açıkça tahmin edilebilir ((3.2.12) ye bakınız) (Zhou 2005).

İspat. $\psi'(0) > 0$ olarak alabileceğimizi kolayca görebiliriz. Gerçekten (3.2.9) eşitsizliğinden $\psi'(t_0) > 0$ olacak şekilde bazı t_0 sayıları vardır. Bu durumda (3.2.9) da $t > t_0$ için başlangıç verilerini $\psi(t_0) > 0$ ve $\psi'(t_0) > 0$ olacak şekilde kaydırabiliriz.

$$\phi'(t) = \delta \phi^{1+\frac{\alpha}{2}}(t), \ \phi(0) = \psi(0) > 0 \tag{3.2.10}$$

olsun. Burada δ daha sonra belirlenecek bir sabittir. (3.2.10) değişkenlerine ayrılabilir adi diferansiyel denklemi çözülürse

$$\phi(t) = \left(\psi^{-\frac{\alpha}{2}}(0) - \frac{\delta\alpha}{2} t \right)^{-\frac{2}{\alpha}} \tag{3.2.11}$$

bulunur. $\phi(t)$ ifadesinin artan olduğu açıktır ve

$$t \longrightarrow T_0 = \frac{2}{\delta\alpha}\psi^{-\frac{\alpha}{2}}(0) \tag{3.2.12}$$

için $\phi(t) \longrightarrow \infty$ olur.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\phi''(t) + \phi'(t) &= \delta^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\phi^{1+\alpha}(t) + \delta\phi^{1+\frac{\alpha}{2}}(t) \\
&= \left[\delta^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \delta\phi^{-\frac{\alpha}{2}}(t)\right]\phi^{1+\alpha}(t) \\
&\leq \left[\delta^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \delta\phi^{-\frac{\alpha}{2}}(0)\right]\phi^{1+\alpha}(t) \\
&= \left[\delta^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \delta\psi^{-\frac{\alpha}{2}}(0)\right]\phi^{1+\alpha}(t) \\
&\leq C_0\phi^{1+\alpha}(t) \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\delta > 0$ sayısı,

$$\delta^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \delta\psi^{-\frac{\alpha}{2}}(0) \leq C_0$$

şartını sağlayan yeterince küçük bir sayıdır. Ayrıca δ yı

$$\phi'(0) = \delta\psi^{1+\frac{\alpha}{2}}(0) < \psi'(0) \tag{3.2.14}$$

olacak şekilde seçebiliriz.

Şimdi her $0 \leq t \leq T_0$ için

$$\psi'(t) > \phi'(t) \tag{3.2.15}$$

olduğunu kabul edelim. (3.2.9) un çözümünün sürekliliğinden ve (3.2.14) e bağlı olarak yeterince küçük $t > 0$ sayıları için $\psi'(t) > \phi'(t)$ olmasın. Bu durumda $0 < t_0 < T_0$ olacak şekilde öyle bir t_0 sayısı vardır ki

$$\psi'(t) > \phi'(t),\ 0 \leq t < t_0 \text{ ve } \psi'(t_0) = \phi'(t_0) \tag{3.2.16}$$

olur. Böylece, $0 \leq t < t_0$ aralığında $\psi - \phi$ için

$$\psi''(t) - \phi''(t) + \psi'(t) - \phi'(t) \geq C_0\left(\psi^{1+\alpha}(t) - \phi^{1+\alpha}(t)\right) \geq 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözülmesiyle

$$\psi'(t_0) - \phi'(t_0) \geq e^{-t_0} \left(\psi'(0) - \phi'(0)\right) > 0$$

bulunur. Bu (3.2.16) ile çelişmektedir. Böylece (3.2.15) doğrudur, yani (3.2.9) un çözümü sonlu zamanda patlar.

4. DOĞRUSAL OLMAYAN DAMPİNG VE KAYNAK TERİM İÇEREN DALGA DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, AZALMASI VE PATLAMASI

Bu bölümde (4.1.1) denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığını, global varlığını, enerji azalmasını ve patlamasını elde edeceğiz (Pişkin ve Polat 2013).

4.1. Giriş

Bu bölümde doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren dalga denklem sistemi için

$$\begin{cases} u_{tt}+\left|u_t\right|^{p-1}u_t=\operatorname{div}\left(\rho\left(\left|\nabla u\right|^2\right)\nabla u\right)+f_1\left(u,v\right), & \left(x,t\right)\in\Omega\times\left(0,T\right), \\ v_{tt}+\left|v_t\right|^{q-1}v_t=\operatorname{div}\left(\rho\left(\left|\nabla v\right|^2\right)\nabla v\right)+f_2\left(u,v\right), & \left(x,t\right)\in\Omega\times\left(0,T\right), \\ u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)=0, & \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right), \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), & x\in\Omega, \\ v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right),\ v_t\left(x,0\right)=v_1\left(x\right), & x\in\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $n=1,2,3;$ $p,q\geq 1$ olup $f_i\left(.\,,.\right):R^2\longrightarrow R$ $\left(i=1,2\right)$ fonksiyonlarını daha sonra vereceğiz.

ρ fonksiyonu $s>0$ için

$$\rho\left(s\right)\in C^1,\ \rho\left(s\right)>0,\ \rho\left(s\right)+2s\rho'\left(s\right)>0$$

şatlarını sağlasın. Bu çalışmada ρ fonksiyonunu özel olarak

$$\rho\left(s\right)=b_1+b_2s^m,\ m\geq 0 \tag{4.1.2}$$

şeklinde seçeceğiz. Burada b_1,b_2 negatif olmayan sabitler ve $b_1+b_2>0$ dır.

(**A1**) $a,b>0$ sabit sayılar olmak üzere $F\left(u,v\right)=a\left|u+v\right|^{r+1}+2b\left|uv\right|^{\frac{r+1}{2}}$ olsun. Burada $n=1,2$ için $r\geq 3$ ve $n=3$ için $r=3$ tür. $f_1\left(u,v\right)=\frac{\partial F}{\partial u},\ f_2\left(u,v\right)=\frac{\partial F}{\partial v}$ ve $n=1,2$ için $p,q\geq 1$,$n=3$ için $1\leq p,q\leq 5$ dır.

Burada, $\forall\left(u,v\right)\in R^2$ için

$$u\ f_1\left(u,v\right)+vf_2\left(u,v\right)=\left(r+1\right)F\left(u,v\right) \tag{4.1.3}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 4.1.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$c_0\left(|u|^{r+1}+|v|^{r+1}\right)\leq F\left(u,v\right)\leq c_1\left(|u|^{r+1}+|v|^{r+1}\right) \tag{4.1.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari 2010).

İspat. (4.1.4) eşitsizliğinin sağ tarafının doğruluğu açıktır. Sol tarafta eğer $u=v=0$ ise doğrudur. Şimdi genelliği kaybetmeden $v\neq 0$ ve $|u|\leq|v|$ veya $|u|>|v|$ durumlarını ele alalım.

$|u|\leq|v|$ için,

$$F\left(u,v\right)=|v|^{r+1}\left[a\left|1+\frac{u}{v}\right|^{r+1}+2b\left|\frac{u}{v}\right|^{\frac{r+1}{2}}\right]$$

yazılabilir. Şimdi $[-1,1]$ aralığında

$$j\left(s\right)=a\left|1+s\right|^{r+1}+2b\left|s\right|^{\frac{r+1}{2}}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\min j\left(s\right)\geq 0$ dır. Eğer $\min j\left(s\right)=0$ olursa, bazı $s_0\in[-1,1]$ sayıları için

$$j\left(s_0\right)=a\left|1+s_0\right|^{r+1}+2b\left|s_0\right|^{\frac{r+1}{2}}=0$$

olur. Buradan $|1+s_0|=|s_0|=0$ olması gerekir, bu da imkansızdır. Yani $\min j\left(s\right)=2c_0>0$ dır. Bu nedenle

$$F\left(u,v\right)\geq 2c_0\left|v\right|^{r+1}\geq 2c_0\left|u\right|^{r+1}$$

dır. Sonuç olarak

$$F\left(u,v\right)\geq c_0\left(|u|^{r+1}+|v|^{r+1}\right)$$

olur.

Eğer $|u|>|v|$ ise, benzer şekilde

$$\begin{aligned}F\left(u,v\right) &= |u|^{r+1}\left[a\left|1+\frac{v}{u}\right|^{r+1}+2b\left|\frac{v}{u}\right|^{\frac{r+1}{2}}\right]\\ &\geq 2c_0\left|u\right|^{r+1}\geq 2c_0\left|v\right|^{r+1}\end{aligned}$$

olur. Buradan da istenen sonuç elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamanlanır.

4.2. Lokal Varlık

Bu kısımda (4.1.1) probleminin lokal çözümünün varlığını Faedo-Galerkin Metodundan faydalanarak elde edeceğiz.

Tanım 4.2.1. (u,v) ikilisi $[0,T]$ aralığında aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (4.1.1) probleminin bir zayıf çözümü olur:

$$
\begin{aligned}
u,v &\in C\left([0,T]\,; W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\cap L^{r+1}(\Omega)\right), \\
u_t &\in C\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right)\cap\ L^{p+1}(\Omega\times(0,T)), \\
v_t &\in C\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right)\cap L^{q+1}(\Omega\times(0,T)).
\end{aligned}
$$

Ayrıca $\phi\in W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$, $\varphi\in W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)$ test fonksiyonları için hemen hemen bütün $t\in[0,T]$ aralığındaki (u,v) ikilileri

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u'(t)\,\phi dx-\int_\Omega u_1(t)\,\phi dx+\int_\Omega\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right)\nabla\phi dx+\int_0^t\int_\Omega|u'|^{p-1}u'\phi dxd\tau \\
=\ &\int_0^t\int_\Omega f_1(u(\tau),v(\tau))\,\phi dxd\tau, \qquad (4.2.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega v'(t)\,\varphi dx-\int_\Omega v_1(t)\,\varphi dx+\int_\Omega\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right)\nabla\varphi dx+\int_0^t\int_\Omega|v'|^{q-1}v'\varphi dxd\tau \\
=\ &\int_0^t\int_\Omega f_2(u(\tau),v(\tau))\,\varphi dxd\tau \qquad (4.2.2)
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 4.2.2 (Lokal varlık**).** (A1) deki koşullar sağlansın. Bazı $[0,T]$, $T>0$ aralığında tanımlı $u_0,v_0\in W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\cap L^{r+1}(\Omega)$ ve $u_1,v_1\in L^2(\Omega)$ başlangıç verileri için (4.1.1) probleminin bir tek (u,v) lokal zayıf çözümü vardır ve bu çözüm

$$
E(t)+\int_0^t\left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1}\right)d\tau=E(0) \qquad (4.2.3)
$$

enerji özdeşliğini sağlar. Burada $E(t)$, (4.3.3) te tanımlanmıştır.

İspat. İspatı Faedo-Galerkin metodu ile yapacağız.

Yaklaşık çözüm:

$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)$ için bir baz ve $k\geq 1$ için $V_k=span\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. Problemimizin

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{k}u_{k,j}(t)\,w_j,\;\; v_k(t)=\sum_{j=1}^{k}v_{k,j}(t)\,w_j \tag{4.2.4}$$

formunda yaklaşık çözümünü arayalım. Burada $u_{k,j}(t)$ ve $v_{k,j}(t)$ aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümleridir:

$$\int_\Omega\left\{u_k''-\operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla u_k|^2\right)\nabla u_k\right)+|u_k'|^{p-1}u_k'\right\}w_j dx=\int_\Omega f_1(u_k,v_k)\,w_j dx, \tag{4.2.5}$$

$$\int_\Omega\left\{v_k''-\operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla v_k|^2\right)\nabla v_k\right)+|v_k'|^{q-1}v_k'\right\}w_j dx=\int_\Omega f_2(u_k,v_k)\,w_j dx \tag{4.2.6}$$

başlangıç koşulları

$$u_k(0)=u_{0k};\;u_k'(0)=u_{1k},\;v_k(0)=v_{0k};\;v_k'(0)=v_{1k} \tag{4.2.7}$$

dır. Burada $u_{0k},\ u_{1k},\ v_{0k},v_{1k}$ lar V_k da aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmiştir:

$$W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\ \text{ da } u_{0k}\longrightarrow u_0,\ v_{0k}\longrightarrow v_0 \tag{4.2.8}$$

ve

$$L^2(\Omega)\ \text{ de } u_{1k}\longrightarrow u_1,\ v_{1k}\longrightarrow v_1. \tag{4.2.9}$$

Doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin standart teorisinden biliniyor ki (4.2.5)-(4.2.7) probleminin bazı $[0,t_m)$ aralıklarında çözümü vardır. Öyleki bu çözüm aşağıdaki önsel tahminler kullanılarak $[0,T]$ kapalı aralığına genişletilebilir.

Önsel tahmin I:

(4.2.5) denklemini $u_{k,j}'(t)$ ile (4.2.6) denklemini de $v_{k,j}'(t)$ ile çarpıp $j=1,...,k$ için toplarsak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_k'(t)\|^2+b_1\|\nabla u_k(t)\|^2+\frac{b_2}{m+1}\|\nabla u_k(t)\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)+\int_\Omega|u_k'(t)|^{p+1}dx$$
$$=\int_\Omega f_1(u_k,v_k)\,u_k'dx, \tag{4.2.10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_k'(t)\|^2+b_1\|\nabla v_k(t)\|^2+\frac{b_2}{m+1}\|\nabla v_k(t)\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)+\int_\Omega|v_m'(t)|^{q+1}dx$$
$$=\int_\Omega f_2(u_k,v_k)\,v_k'dx \tag{4.2.11}$$

buluruz. (4.2.10) ve (4.2.11) i toplayıp 0 dan t ye integral alırsak

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(\left\|u_k'(t)\right\|^2+\left\|v_k'(t)\right\|^2+b_1\left\|\nabla u_k(t)\right\|^2+b_1\left\|\nabla v_k(t)\right\|^2\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{m+1}\left\|\nabla u_k(t)\right\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\frac{b_2}{m+1}\left\|\nabla v_k(t)\right\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right) \\
& +\int_0^t \int_\Omega\left|u_k'(\tau)\right|^{p+1} dx d\tau+\int_0^t \int_\Omega\left|v_k'(\tau)\right|^{q+1} dx d\tau \\
\leq\ & C_0+\int_0^t \int_\Omega\left(f_1\left(u_k, v_k\right) u_k'+f_2\left(u_k, v_k\right) v_k'\right) dx d\tau
\end{aligned}
\tag{4.2.12}
$$

olur. Şimdi (4.2.12) nin sağ tarafındaki terimler için kestirime ihtiyacımız var. Bunun için (A1), Hölder eşitsizliği, Sobolev gömülme teoremi ve Young eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_0^t \int_\Omega f_1\left(u_k(\tau), v_k(\tau)\right) u_k'(\tau)\, dx d\tau\right| \\
\leq\ & C \int_0^t \int_\Omega\left(\left|u_k(\tau)\right|^r+\left|v_k(\tau)\right|^r+\left|u_k(\tau)\right|^{\frac{r-1}{2}}\left|v_k(\tau)\right|^{\frac{r+1}{2}}\right)\left|u_k'(\tau)\right| dx d\tau \\
\leq\ & C \int_0^t\left(\left\|u_k(\tau)\right\|_{2r}^r+\left\|v_k(\tau)\right\|_{2r}^r+\left\|u_k(\tau)\right\|_{3(r-1)}^{\frac{r-1}{2}}\left\|v_k(\tau)\right\|_{\frac{3(r+1)}{2}}^{\frac{r+1}{2}}\right)\left\|u_k'(\tau)\right\| d\tau \\
\leq\ & C \int_0^t\left(\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^r+\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^r+\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^{\frac{r-1}{2}}\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^{\frac{r+1}{2}}\right)\left\|u_k'(\tau)\right\| d\tau \\
\leq\ & C \int_0^t\left(\left\|u_k'(\tau)\right\|^2+\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^{2r}+\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^{2r}+\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^{r-1}\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^{r+1}\right) d\tau
\end{aligned}
\tag{4.2.13}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_0^t \int_\Omega f_2\left(u_k(\tau), v_k(\tau)\right) v_k'(\tau)\, dx d\tau\right| \\
\leq\ & C \int_0^t\left(\left\|v_k'(\tau)\right\|^2+\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^{2r}+\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^{2r}+\left\|\nabla u_k(\tau)\right\|^{r+1}\left\|\nabla v_k(\tau)\right\|^{r-1}\right) d\tau
\end{aligned}
\tag{4.2.14}
$$

bulunur. Bu durumda (4.2.12)-(4.2.14) ten

$$
y_k(t)+2\int_0^t \int_\Omega\left|u_k'(\tau)\right|^{p+1} dx d\tau+2\int_0^t \int_\Omega\left|v_k'(\tau)\right|^{q+1} dx d\tau \leq C_0+C\int_0^t y_k(\tau)^r d\tau
\tag{4.2.15}
$$

yazılabilir. Burada $y_k(t)=1+\left\|u_k'(t)\right\|^2+\left\|v_k'(t)\right\|^2+\int_\Omega\left(P\left(\left|\nabla u_k(t)\right|^2\right)+P\left(\left|\nabla v_k(t)\right|^2\right)\right) dx$ dır. Yani özel olarak Gronwall tipli

$$
y_k(t) \leq C_0+C\int_0^t y_k(\tau)^r d\tau
$$

eşitsizliğine sahibiz. Bu eşitsizlik çözülürse

$$y_k(t) \leq [C_0 - (r-1)\,Ct]^{-\frac{1}{r-1}} \tag{4.2.16}$$

bulunur. Böylece (4.2.16) dan bir $T > 0$ zamanı vardır ki $\forall t \in [0, T]$ için

$$y_k(t) \leq C_1 \tag{4.2.17}$$

dır. Burada C_1, k dan bağımsız pozitif sabittir.

(4.2.15) ve (4.2.17) den $\forall t \in [0, T]$ için

$$\int_0^t \int_\Omega |u_k'(\tau)|^{p+1}\, dx d\tau + 2\int_0^t \int_\Omega |v_k'(\tau)|^{q+1}\, dx d\tau \leq C_2 \tag{4.2.18}$$

ifadesi kolayca yazılabilir. (4.2.17) ve (4.2.18) den

$$u_k,\ v_k;\ L^\infty\left([0,T]\,; W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\right), \tag{4.2.19}$$

$$u_k',\ v_k';\ L^\infty\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right), \tag{4.2.20}$$

$$u_k';\ L^2\left([0,T]\,; L^{p+1}(\Omega)\right), \tag{4.2.21}$$

$$v_k';\ L^2\left([0,T]\,; L^{q+1}(\Omega)\right),$$

da sınırlıdır. Şimdi $A : W_0^{1,2(m+1)}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\right)'$ sınırlı operatör olmak üzere, $A\omega = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla\omega|^2\right)\nabla\omega\right)$ olsun. (4.2.19) dan

$$A(u_k),\ A(v_k);\ L^\infty\left([0,T]\,; \left(W_0^{1,2(m+1)}(\Omega)\right)'\right) \text{ da} \tag{4.2.22}$$

sınırlıdır.

Önsel tahmin II için (Sango 2009) dakine benzer işlemler yapılırsa;

$u, v \in L^\infty\left([0,T]\,; W_0^{1,2(m+1)}(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)\right)$, $u_t \in L^\infty\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0,T))$ ve $v_t \in L^\infty\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^{q+1}(\Omega \times (0,T))$ bulunur. (Lions ve Magenes 1972) teki Lemma 8.1-8.2 kullanılırsa $u, v \in C_w\left([0,T]\,; W_0^{1,2(m+1)}(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)\right)$, $u_t \in C_w\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0,T))$ ve $v_t \in C_w\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^{q+1}(\Omega \times (0,T))$ olur. Sonuç olarak düzgünlük (regularity) (Rammaha ve Sakuntasathien 2010) daki Lemma 2.11 gibi yapılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.3. Global Varlık ve Enerji Azalması

Bu kısımda (4.1.1) probleminin çözümlerinin global varlığını ve enerji azalmasını göstereceğiz. Bunun için önce aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım;

$$J(t) = J(u(t), v(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right) + P\left(|\nabla v|^2\right)\right) dx - \int_\Omega F(u,v)\, dx \qquad (4.3.1)$$

ve

$$I(t) = I(u(t), v(t)) = \int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right) + P\left(|\nabla v|^2\right)\right) dx - (r+1)\int_\Omega F(u,v)\, dx \qquad (4.3.2)$$

dır. Ayrıca (4.1.1) probleminin $E(t) = E(t, u(t), v(t))$ enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right) + P\left(|\nabla v|^2\right)\right) dx - \int_\Omega F(u,v)\, dx \qquad (4.3.3)$$

şeklindedir. Burada $s \geq 0$ için $P(s) = \int_0^s \rho(\xi)\, d\xi$ dır.

Son olarak

$$W = \left\{(u,v) : (u,v) \in W_0^{1,2(m+1)}(\Omega) \times W_0^{1,2(m+1)}(\Omega),\ I(u,v) > 0\right\} \cup \{(0,0)\} \qquad (4.3.4)$$

olsun.

Lemma 4.3.1. $E(t)$ fonksiyoneli $t \geq 0$ için artmayandır. Yani

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|u_t(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|v_t(t)\|_{q+1}^{q+1} \leq 0 \qquad (4.3.5)$$

dır.

İspat. (4.1.1) denklem sisteminin birinci denklemini u_t ile ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinden integral aldıktan sonra kısmi integrasyon uygularsak, $t \geq 0$ için

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1}\right) d\tau \qquad (4.3.6)$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2. Kabul edelim ki

$$\begin{cases} r \geq 3, & n = 1, 2 \ \text{ ise} \\ r = 3, & n = 3 \ \text{ ise} \end{cases} \qquad (4.3.7)$$

olsun. Ayrıca $(u_0, v_0) \in W$ ve $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega)$ için

$$\beta = c_1 C_*^{p+1}(r+1)\left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}E(0)\right)^{\frac{r-1}{2}} < 1 \tag{4.3.8}$$

oluyorsa, bu durumda $\forall t \geq 0$ için $(u, v) \in W$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $u(t)$ ve $v(t)$ nin sürekliliğinden $t = 0$ ın komşuluğundaki bazı aralıklarda $\forall t \in [0, T_m]$ için $T_m > 0$ maksimum zamanı vardır ve

$$I(t) > 0$$

dır. (4.3.1) ve (4.3.2) den

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{r-1}{2(r+1)}\int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right) + P\left(|\nabla v|^2\right)\right)dx + \frac{1}{r+1}I(t) \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)}\int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right) + P\left(|\nabla v|^2\right)\right)dx \\ &= \frac{r-1}{2(r+1)}\left[b_1\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) + \frac{b_2}{m+1}\left(\|\nabla u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} + \|\nabla v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 &\leq \frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}J(t) \\ &\leq \frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}E(t) \\ &\leq \frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}E(0) \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

olur. Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (4.3.8) göz önüne alınırsa $t \in [0, T_m]$ için

$$\begin{aligned} c_1(r+1)\|u\|_{r+1}^{r+1} &\leq c_1 C_*^{r+1}(r+1)\|\nabla u\|^{r+1} \\ &\leq c_1 C_*^{r+1}(r+1)\|\nabla u\|^{r-1}\|\nabla u\|^2 \\ &\leq c_1 C_*^{r+1}(r+1)\left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}E(0)\right)^{\frac{r-1}{2}}\|\nabla u\|^2 \\ &< \|\nabla u\|^2 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

olur. Benzer şekilde

$$c_1(r+1)\|v\|_{r+1}^{r+1} < \|\nabla v\|^2$$

olur. Sonuç olarak (4.3.2) nin kullanılmasıyla bütün $t \in [0, T_m]$ için $I(t) > 0$ yazılır. Bu adımları tekrarlayarak T_m yi T ye genişletebiliriz. Böylece lemma ispatlanır.

Lemma 4.3.3. Kabul edelim ki Lemma 4.3.2 nin koşulları sağlansın. Bu durumda

$$\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx\leq\frac{1}{1-c_{1}C_{*}^{r+1}\left(r+1\right)\left(\frac{2(r+1)}{b_{1}(r-1)}E\left(0\right)\right)^{\frac{r-1}{2}}}I\left(t\right)\quad(4.3.12)$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat. (4.3.2), (4.1.4), (4.3.10) ve (4.3.11) den

$$\begin{aligned}
I\left(t\right) &= \int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx-\left(r+1\right)\int_{\Omega}F\left(u,v\right)dx\\
&\geq \int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx-c_{1}\left(r+1\right)\left(\|u\|_{r+1}^{r+1}+\|v\|_{r+1}^{r+1}\right)\\
&\geq \int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx\\
&\quad -c_{1}C_{*}^{r+1}\left(r+1\right)\left(\frac{2\left(r+1\right)}{b_{1}\left(r-1\right)}E\left(0\right)\right)^{\frac{r-1}{2}}\left(\|\nabla u\|^{2}+\|\nabla v\|^{2}\right)\\
&\geq \left[1-c_{1}C_{*}^{r+1}\left(r+1\right)\left(\frac{2\left(r+1\right)}{b_{1}\left(r-1\right)}E\left(0\right)\right)^{\frac{r-1}{2}}\right]\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen elde edilir.

Teorem 4.3.4. Kabul edelim ki (4.3.7) sağlansın. $(u_0, v_0)\in W$, (4.3.8) i sağlıyorsa, bu durumda (4.1.1) probleminin çözümü global olur.

İspat. Çözümün global olduğunu göstermek için $\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+$ $\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx$ ifadesinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu yapmak için (4.3.4) ve (4.3.6) yı kullanırsak $I\left(t\right)\geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
E\left(0\right) &\geq E\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^{2}+\|v_t\|^{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx-\int_{\Omega}F\left(u,v\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^{2}+\|v_t\|^{2}\right)+\frac{r-1}{2\left(r+1\right)}\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx+\frac{1}{r+1}I\left(t\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^{2}+\|v_t\|^{2}\right)+\frac{r-1}{2\left(r+1\right)}\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\|u_t\|^{2}+\|v_t\|^{2}+\int_{\Omega}\left(P\left(|\nabla u|^{2}\right)+P\left(|\nabla v|^{2}\right)\right)dx\leq CE\left(0\right)$$

bulunur. Burada $C=\max\left\{2,\frac{2(r+1)}{r-1}\right\}$ dır. Sonuç olarak Teorem 4.2.2 den çözüm global olur.

Teorem 4.3.5. Kabul edelim ki (A1), (4.1.4), (4.3.8) ve $(u_0, v_0) \in W$ sağlansın. Böylece

$$E(t) \leq \begin{cases} E(0)\, e^{-w_1[t-1]^+}, & \text{eğer } p = q = 1, \\ \left(E(0)^{-\alpha} + C_9^{-1}\alpha\,[t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \text{eğer } p, q > 1 \end{cases}$$

enerji kestirimi yazılabilir. Burada $w_1,\ \alpha$ ve C_9 daha sonra belirlenecek olan pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\left\|u_t(t)\right\|_{p+1}^{p+1} - \left\|v_t(t)\right\|_{q+1}^{q+1} \tag{4.3.13}$$

ifadesinin $t > 0$ için $[t, t+1]$ üzerinde integralin alınmasıyla

$$\begin{aligned} E(t) - E(t+1) &= \int_t^{t+1} \left(\left\|u_\tau(\tau)\right\|_{p+1}^{p+1} + \left\|v_\tau(\tau)\right\|_{q+1}^{q+1}\right) d\tau \\ &= D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

bulunur. (4.3.14) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_\Omega |u_t|^2\, dxdt &\leq \int_t^{t+1} \left[\left(\int_\Omega |u_t|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p+1}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\right] dt \\ &= |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}} \int_t^{t+1} \left\|u_\tau\right\|_{p+1}^2 = CD_1^2(t) \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\int_t^{t+1} \int_\Omega |v_\tau|^2\, dxdt \leq |\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}} D_2^2(t) = CD_2^2(t) \tag{4.3.16}$$

olur.

$t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4}\right]$ ve $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t+1\right]$ olmak üzere (4.3.15) ve (4.3.16) dan

$$\left\|u_t(t_i)\right\| \leq CD_1(t)\,,\ i = 1, 2 \tag{4.3.17}$$

ve

$$\left\|v_t(t_i)\right\| \leq CD_2(t)\,,\ i = 1, 2 \tag{4.3.18}$$

yazılır.

(4.1.1) denklem sisteminin birinci denklemini u ile, ikinci denklemini v ile çarpıp

$\Omega \times [t_1, t_2]$ üzerinde integral alırsak

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}[uu_{tt}+vv_{tt}]\,dxdt \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|u_t|^{p-1}u_tudxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|v_t|^{q-1}v_tvdxdt \qquad (4.3.19)\end{aligned}$$

olur.

(4.3.19) un sağ tarafındaki ilk terime kısmi integrasyon ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt &\leq \left|\int_{\Omega}uu_tdx\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|^2\,dt\right|+\left|\int_{\Omega}vv_tdx\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\|v_t(t)\|^2\,dt\right| \\ &\leq \|u_t(t_1)\|\,\|u(t_1)\|+\|u_t(t_2)\|\,\|u(t_2)\| \\ &\quad +\|v_t(t_1)\|\,\|v(t_1)\|+\|v_t(t_2)\|\,\|v(t_2)\| \\ &\quad +\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|^2\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\|v_t(t)\|^2\,dt \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|u_t|^{p-1}u_tudxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|v_t|^{q-1}v_tvdxdt \qquad (4.3.20)\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi amacımız (4.3.20) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son iki terim için kestirim elde etmektir. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|u_t|^{p-1}u_tudxdt &\leq \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\int_{\Omega}|u_t|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_{\Omega}|u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{p+1}^{p}\,\|u(t)\|_{p+1}\,dt \qquad (4.3.21)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|v_t|^{q-1}v_tvdxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\|v_t(t)\|_{q+1}^{q}\,\|v(t)\|_{q+1}\,dt \qquad (4.3.22)$$

olur.

Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (4.3.10) dan

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_{p+1}^{p} \|u\|_{p+1} dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_{p+1}^{p} \|\nabla u\| dt \\
&\leq C_* \left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_{p+1}^{p} E^{\frac{1}{2}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_{p+1}^{p} dt \\
&= C_* \left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_1^p(t) \qquad (4.3.23)
\end{aligned}$$

buluruz. Ayrıca (4.3.10), (4.3.17) ve Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\|u_t(t_i)\| \|u(t_i)\| \leq C_1 D_1(t) \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \qquad (4.3.24)$$

buluruz. Burada $C_1 = 2C_*\sqrt{\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}C}$ dır. Benzer şekilde

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v_t(t)\|_{q+1}^{q} \|v(t)\|_{q+1} dt \leq C_* \left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_2^q(t), \qquad (4.3.25)$$

$$\|v_t(t_i)\| \|v(t_i)\| \leq C_2 D_2(t) \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \qquad (4.3.26)$$

yazılır. Burada $C_2 = 2C_*'\sqrt{\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}C}$ dır. Böylece (4.3.23)-(4.3.26) dan

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \leq\; & C_3 \Bigg[\sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)(D_1(t) + D_2(t)) + D_1^2(t) + D_2^2(t) \\
& + C_*\sqrt{\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}} \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)(D_1^p(t) + D_2^q(t))\Bigg] \qquad (4.3.27)
\end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan (4.3.12) eşitsizliğinin göz önüne alınmasıyla

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + C_4 I(t) \qquad (4.3.28)$$

yazılabilir. Burada $C_4 = \frac{r-1}{2(r+1)\left[1-c_1C_*^{r+1}(r+1)\left(\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}E(0)\right)^{\frac{r-1}{2}}\right]} + \frac{1}{r+1}$ dır.

(4.3.28) in $[t_1, t_2]$ aralığında integralini alırsak

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \leq \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left[\|u_t\|^2 + \|u_t\|^2\right] dt + C_4 \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

olur. Böylece (4.3.9), (4.3.10) ve (4.3.27) den

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt &\leq \frac{1}{2}CD_1^2(t)+\frac{1}{2}CD_2^2(t)\\ &+C_4C_3\left[\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)\left(D_1(t)+D_2(t)\right)+D_1^2(t)+D_2^2(t)\right.\\ &\left.+C_*\sqrt{\frac{2(r+1)}{b_1(r-1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)\left(D_1^p(t)+D_2^q(t)\right)\right] \qquad (4.3.29)\end{aligned}$$

dır.

$\frac{d}{dt}E(t)$ ifadesinin $[t,t_2]$ aralığında integralini alırsak

$$E(t)=E(t_2)+\int_t^{t_2}\left[\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1}\right]d\tau \qquad (4.3.30)$$

olur.

Ayrıca $t_2-t_1\geq\frac{1}{2}$ olduğundan (4.3.30) dan

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt &\geq \int_{t_1}^{t_2}E(t_2)\,dt\\ &= (t_2-t_1)E(t_2)\\ &\geq \frac{1}{2}E(t_2)\end{aligned}$$

yazılır. Yani

$$E(t_2)\leq 2\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt \qquad (4.3.31)$$

dır.

Sonuç olarak (4.3.14), (4.3.29), (4.3.30), (4.3.31) ve $t_1,t_2\in[t,t+1]$ olduğundan

$$\begin{aligned}E(t) &\leq 2\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt+\int_t^{t+1}\left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1}\right)d\tau\\ &= 2\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt+D_1^{p+1}(t)+D_2^{q+1}(t) \qquad (4.3.32)\end{aligned}$$

dır. Böylece (4.3.29) dan

$$\begin{aligned}E(t) &\leq \left(\frac{1}{2}C+C_4C\right)\left(D_1^2(t)+D_2^2(t)\right)+D_1^{p+1}(t)+D_2^{q+1}(t)\\ &+C_5\left[D_1(t)+D_2(t)+D_1^p(t)+D_2^q(t)\right]E^{\frac{1}{2}}(t)\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak Young eşitsizliğinden

$$E(t) \leq C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) + D_1^{2p}(t) + D_2^{2q}(t)\right] \tag{4.3.33}$$

elde edilir.

1. Durum: Eğer $p = q = 1$ ise (4.3.33) ifadesi

$$E(t) \leq 3C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t)\right] = 3C_6 \left[E(t) - E(t+1)\right]$$

olur. Lemma 3.1.3.1 den

$$E(t) \leq E(0)\, e^{-w_1[t-1]^+}$$

bulunur. Burada $w_1 = \ln \frac{3C_6}{3C_6-1}$ dır.

2. Durum: Eğer $p, q > 1$ ise (4.3.33) ifadesi

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_6 D_1^2(t)\left(1 + D_1^{p-1}(t) + D_1^{2(p-1)}(t)\right) + C_6 D_2^2(t)\left(1 + D_2^{q-1}(t) + D_2^{2(q-1)}(t)\right) \\ &\leq C_6\left(1 + D_1^{p-1}(t) + D_1^{2(p-1)}(t) + D_2^{q-1}(t) + D_2^{2(q-1)}(t)\right)\left(D_1^2(t) + D_2^2(t)\right) \end{aligned}$$

olur.

$\forall t \geq 0$ için $E(t) \leq E(0)$ olduğundan ve (4.3.14) ten

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_6\left(1 + E^{\frac{p-1}{p+1}}(0) + E^{\frac{2(p-1)}{p+1}}(0) + E^{\frac{q-1}{q+1}}(0) + E^{\frac{2(q-1)}{q+1}}(0)\right)\left(D_1^2(t) + D_2^2(t)\right) \\ &\leq C_7\left(D_1^2(t) + D_2^2(t)\right) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} E(t)^{1+\max\left\{\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right\}} &\leq \left[C_7\left(D_1^2(t) + D_2^2(t)\right)\right]^{1+\max\left\{\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right\}} \\ &\leq C_8\left(D_1^{\max\{p+1,q+1\}}(t) + D_2^{\max\{p+1,q+1\}}(t)\right) \qquad (4.3.34) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\alpha = \max\left\{\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right\}$ olarak seçersek, (4.3.34) ifadesi

$$\begin{aligned} E(t)^{1+\alpha} &\leq C_8\left(D_1^{p+1}(t)\, D_1^{2\alpha-p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)\, D_2^{2\alpha-q+1}(t)\right) \\ &\leq C_8\left(D_1^{p+1}(t)\, E^{\frac{2\alpha-p+1}{p+1}}(0) + D_2^{q+1}(t)\, E^{\frac{2\alpha-q+1}{q+1}}(0)\right) \\ &\leq C_9\left(D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)\right) \\ &= C_9\left[E(t) - E(t+1)\right] \qquad (4.3.35) \end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. Burada $C_9 = C_8 \max\left\{E^{\frac{2\alpha-p+1}{p+1}}(0), E^{\frac{2\alpha-q+1}{q+1}}(0)\right\}$ dır. Böylece (4.3.35) ve Lemma 3.1.3.1 den

$$E(t) \le \left(E(0)^{-\alpha} + C_9^{-1}\alpha\,[t-1]^{+}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.4. Çözümün Patlaması

Bu kısımda (4.1.1) probleminin $p = q = 1$ için çözümünün patlaması ile ilgileneceğiz.

Eğer (4.1.1) probleminde $p = q = 1$ alınırsa

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) + f_1(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} + v_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right) + f_2(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.4.1}$$

denklem sistemi elde eilir.

Tanım 4.4.1. (4.4.1) probleminin bir (u,v) çözümü için

$$\lim_{t \longrightarrow T^{*-}} \left\{\int_\Omega \left(u^2+v^2\right)dx + \int_0^t \int_\Omega \left(u^2+v^2\right)dxds\right\} = \infty \tag{4.4.2}$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı varsa buna çözümün patlaması denir.

$t \ge 0$ için

$$a(t) = \int_\Omega \left(u^2+v^2\right)dx + \int_0^t \int_\Omega \left(u^2+v^2\right)dxds \tag{4.4.3}$$

olsun.

Lemma 4.4.2. Kabul edelim ki (A1) sağlansın ve $\frac{m}{2} \le \delta \le \frac{r-1}{4}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} a''(t) \ \ge\ & 4(\delta+1)\int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx + (-4-8\delta)E(0) \\ & + (4+8\delta)\int_0^t \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right)dt \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

dır.

İspat. (4.4.3) ten

$$a'(t) = 2\int_\Omega (uu_t + vv_t)\,dx + \|u\|^2 + \|v\|^2 \tag{4.4.5}$$

yazılır. (4.4.1) ve diverjans teoreminin kullanılması ile

$$\begin{aligned} a''(t) &= 2\int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx + 2\int_\Omega \left(uu_{tt}+vv_{tt}\right)dx + 2\int_\Omega \left(uu_t+vv_t\right)dx \\ &= 2\int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx - 2\int_\Omega \left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)|\nabla u|^2+\rho\left(|\nabla v|^2\right)|\nabla v|^2\right)dx \\ &\quad +2(r+1)\int_\Omega F(u,v)\,dx \qquad (4.4.6) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (4.3.6) ve (4.4.6) dan

$$\begin{aligned} a''(t) &= 4(\delta+1)\int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx + (-4-8\delta)E(0) + (4+8\delta)\int_0^t \left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)dt \\ &\quad +(4\delta+2)\int_\Omega \left(P\left(|\nabla u|^2\right)+P\left(|\nabla v|^2\right)\right)dx \\ &\quad -2\int_\Omega \left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)|\nabla u|^2+\rho\left(|\nabla v|^2\right)|\nabla v|^2\right)dx \\ &\quad +(2r-8\delta-2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &= 4(\delta+1)\int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx + (-4-8\delta)E(0) + (4+8\delta)\int_0^t \left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)dt \\ &\quad +4\delta b_1\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right) + b_2\left(\frac{4\delta+2}{m+1}-2\right)\left(\|\nabla u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\|\nabla v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right) \\ &\quad +(2r-8\delta-2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \end{aligned}$$

yazılır. $\frac{m}{2}\le\delta\le\frac{r-1}{4}$ olduğundan $4\delta b_1\ge 0$, $b_2\left(\frac{4\delta+2}{m+1}-2\right)\ge 0$ ve $2r-8\delta-2\ge 0$ olur. Böylece (4.4.4) elde edilir.

Lemma 4.4.3. (A1), $\frac{m}{2}\le\delta\le\frac{r-1}{4}$ ve aşağıdaki durumlardan biri sağlansın:

(i) $E(0)<0$,

(ii) $E(0)=0$ ve $\int_\Omega (u_0u_1+v_0v_1)\,dx>0$,

(iii) $E(0)>0$ ve

$$a'(0) > r_2\left[a(0)+\frac{K_1}{4(\delta+1)}\right]+\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right). \qquad (4.4.7)$$

Bu durumda $t>t^*$ için $a'(t)>\|u_0\|^2+\|v_0\|^2$ bulunur. Burada, (i) durumunda $t_0=t^*$ ve (ii), (iii) durumlarında da $t_0=0$ dır. Ayrıca K_1 ve t^* sırasıyla (4.4.13) ve (4.4.8) de tanımlanmıştır.

İspat. (i) Eğer$E(0) < 0$ ise, (4.4.4) ten

$$a'(t) \geq a'(0) - 4(1+2\delta) E(0) t, \ t \geq 0$$

yazılır. Böylece, $t > t^*$ için $a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2$ olur. Burada

$$t^* = \max \left\{ \frac{a'(0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{4(1+2\delta) E(0)}, 0 \right\} \tag{4.4.8}$$

dır.

(ii) Eğer $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$ ise, bu durumda $t \geq 0$ için $a''(t) \geq 0$ dır. Böylece $t \geq 0$ için $a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2$ dır.

(iii) Eğer $E(0) > 0$ ise, önce

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \int_\Omega u u_t dx dt &= \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial t} dx dt \\ &= \int_\Omega u^2 dx \bigg|_0^t \\ &= \|u\|^2 - \|u_0\|^2 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

olduğunu not edelim. (4.4.9) a Hölder eşitsizliği ve Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u\|^2 dt + \int_\Omega \|u_t\|^2 dt \tag{4.4.10}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\|v\|^2 \leq \|v_0\|^2 + \int_0^t \|v\|^2 dt + \int_\Omega \|v_t\|^2 dt \tag{4.4.11}$$

dır. Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği, (4.4.10) ve (4.4.11) den

$$a'(t) \leq a(t) + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \int_\Omega \left(u_t^2 + v_t^2\right) dx + \int_0^t \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) dt \tag{4.4.12}$$

bulunur. Böylece (4.4.4) ve (4.4.12) den

$$a''(t) - 4(\delta+1) a'(t) + 4(\delta+1) a(t) + K_1 \geq 0$$

bulunur. Burada

$$K_1 = (4+8\delta) E(0) + 4(\delta+1) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) \tag{4.4.13}$$

dır. $t > 0$ için

$$b(t) = a(t) + \frac{K_1}{4(\delta+1)}$$

olsun. Bu durumda $b(t)$, Lemma 3.2.1 i sağlar. Sonuç olarak, (4.4.7) den $a'(t) > \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)$, $t > 0$ olur. Burada r_2, Lemma 3.2.1 de verildiği gibidir.

Teorem 4.4.4. Kabul edelim ki (A1) ve $\frac{m}{2} \leq \delta \leq \frac{r-1}{4}$ sağlansın. Aşağıdaki durumlarda

(i) $E(0) < 0$,

(ii) $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega (u_0u_1 + v_0v_1)\,dx > 0$,

(iii) $0 < E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right)^2}{8\left[a(t_0)+(T_1-t_0)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right]}$, (4.4.7) sağlandığında,

(u, v) çözümü (4.4.2) anlamında sonlu bir T^* zamanında patlar.

(i) durumunda,

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)} \tag{4.4.14}$$

dır. Ayrıca, eğer $H(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{-\frac{a}{b}}\right\}$ ise,

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \tag{4.4.15}$$

dır. Burada

$$a = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0)\left[\left(a'(t_0) - \|u_0\|^2 - \|v_0\|^2\right)^2 - 8E(0)\,H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0)\right] > 0 \tag{4.4.16}$$

$$b = 8\delta^2 E(0) \tag{4.4.17}$$

dır.

(ii) durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{4.4.18}$$

dır.

(iii) durumunda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}}\left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} \frac{\delta}{\sqrt{a}} \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} H(t_0)\right]^{-\frac{1}{2\delta}}\right\} \tag{4.4.19}$$

dır. Burada a ve b, (4.4.16) ve (4.4.17) de verildiği gibidir.

İspat. $t \in [0, T_1]$ için

$$H(t) = \left[a(t) + (T_1 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right]^{-\delta} \tag{4.4.20}$$

olsun. Burada $T_1 > 0$ daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. Buradan

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\delta\left[a(t) + (T_1 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right]^{-\delta-1}\left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right] \\ &= -\delta H^{1+\frac{1}{\delta}}(t)\left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right], \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

$$\begin{aligned} H''(t) &= -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t)\, a''(t)\left[a(t) + (T_1 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right] \\ &\quad +\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t)(1+\delta)\left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

ve

$$H''(t) = -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t)\, V(t) \tag{4.4.23}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} V(t) &= a''(t)\left[a(t) + (T_1 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right] \\ &\quad -(1+\delta)\left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

dır. Hesaplamalarda kolaylık olsun diye

$$\begin{aligned} &P_u = \textstyle\int_\Omega u^2 dx, \quad R_u = \int_\Omega u_t^2 dx, \quad Q_u = \int_0^t \|u\|^2 dt, \quad S_u = \int_0^t \|u_t\|^2 dt, \\ &P_v = \textstyle\int_\Omega v^2 dx, \quad R_v = \int_\Omega v_t^2 dx, \quad Q_v = \int_0^t \|v\|^2 dt, \quad S_v = \int_0^t \|v_t\|^2 dt \end{aligned}$$

gösterimlerini kullanalım. (4.4.5), (4.4.9) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2\int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + 2\int_0^t\int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dxdt \\ &\le 2\left(\sqrt{R_uP_u} + \sqrt{Q_uS_u} + \sqrt{R_vP_v} + \sqrt{Q_vS_v}\right) + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

olur.

Eğer (i) ve (ii) durumları sağlanıyorsa, (4.4.4) ten

$$a''(t) \ge (-4 - 8\delta)\, E(0) + 4(1+\delta)(R_u + S_u + R_v + S_v) \tag{4.4.26}$$

yazılır. Böylece (4.4.20) ve (4.4.24)-(4.4.26) dan

$$\begin{aligned} V(t) &\ge \left[(-4 - 8\delta)\, E(0) + 4(1+\delta)(R_u + S_u + R_v + S_v)\right] H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad -4(1+\delta)\left(\sqrt{R_uP_u} + \sqrt{Q_uS_u} + \sqrt{R_vP_v} + \sqrt{Q_vS_v}\right)^2 \end{aligned}$$

yazılır. (4.4.3) ten

$$a(t) = \int_\Omega \left(u^2+v^2\right) dx + \int_0^t \int_\Omega \left(u^2+v^2\right) dxds = P_u + P_v + Q_u + Q_v$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik ve (4.4.20) den

$$\begin{aligned} V(t) &\geq (-4-8\delta) E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad +4(1+\delta)\left[(R_u+S_u+R_v+S_v)(T_1-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\Theta(t)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= (R_u+S_u+R_v+S_v)(P_u+Q_u+P_v+Q_v) \\ &\quad -\left(\sqrt{R_uP_u}+\sqrt{Q_uS_u}+\sqrt{R_vP_v}+\sqrt{Q_vS_v}\right)^2 \end{aligned}$$

dır. Schwarz eşitsizliğinden $\Theta(t)$ negatif değildir. Böylece

$$V(t) \geq (-4-8\delta) E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t), \ t \geq t_0 \tag{4.4.27}$$

dır. Ayrıca, (4.4.23) ve (4.4.27) den

$$H''(t) \leq 4\delta(1+2\delta) E(0) H^{1+\frac{1}{\delta}}(t), \ t \geq t_0 \tag{4.4.28}$$

dır. (4.4.21) ve Lemma 4.4.3 ten, $t \geq t_0$ için $H'(t) < 0$ olduğunu biliyoruz. (4.4.28) i $H'(t)$ ile çarpıp t_0 dan t ye integrallersek, $t \geq t_0$ için

$$H'^2(t) \geq a + bH^{2+\frac{1}{\delta}}(t)$$

buluruz. Burada a, b sırasıyla (4.4.16) ve (4.4.17) deki gibidir.

Eğer (iii) sağlanıyor ise, (i) deki adımlara benzer olarak, $a > 0$ ancak ve ancak

$$E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right)^2}{8\left[a(t_0)+(T_1-t_0)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right]}$$

dır. Böylece Lemma 3.2.2 den $\lim_{t\longrightarrow T^{*-}} H(t) = 0$ şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı vardır ki T^* ın üst sınırları $E(0)$ nin işaretine göre belirlenir.

5. DOĞRUSAL OLMAYAN YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI VE PATLAMASI

Bu bölümde, (5.1.1) denklem sisteminin çözümlerinin enerji azalmasını ve patlamasını elde edeceğiz (Pişkin ve Polat 2012a).

5.1. Giriş

Bu bölümde yüksek mertebeden başlangıç sınır değer

$$\begin{cases} u_{tt} + Pu + u_t = f_1(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} + Pv + v_t = f_2(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = \frac{\partial^i v}{\partial \nu^i} = 0,\ i = 0,1,...,m-1, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

problemi çalışılacaktır. Burada $P = (-\triangle)^m$ ve $m \geq 1$ doğal sayıdır. Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve ν dış normalidir.

$f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ fonksiyonlarını

$$f_1(u,v) = \left[k|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + l|u|^r u|v|^{r+2}\right],$$

$$f_2(u,v) = \left[k|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + l|u|^{r+2}|v|^r v\right]$$

şeklinde seçelim. Burada $k, l > 0$ sabit sayılar ve r

$$\begin{cases} -1 < r, & n \leq 2m \text{ ise} \\ -1 < r \leq \frac{3m-n}{n-2m}, & n > 2m \text{ ise} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitliklerden $\forall (u,v) \in R^2$ için

$$u\ f_1(u,v) + v f_2(u,v) = 2(r+2) F(u,v) \tag{5.1.3}$$

yazılabilir. Burada

$$F(u,v) = \frac{1}{2(r+2)}\left[k|u+v|^{2(r+2)} + 2l|uv|^{r+2}\right] \tag{5.1.4}$$

dır.

Lemma 5.1.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$c_0\left(|u|^{2(r+2)}+|v|^{2(r+2)}\right)\leq 2\left(r+2\right)F\left(u,v\right)\leq c_1\left(|u|^{2(r+2)}+|v|^{2(r+2)}\right) \tag{5.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari 2010).

İspat. Lemma 4.1.1 dekine benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi, bazı fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$J\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)-\int_\Omega F\left(u,v\right)dx, \tag{5.1.6}$$

$$I\left(t\right)=\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2-2\left(r+2\right)\int_\Omega F\left(u,v\right)dx. \tag{5.1.7}$$

Enerji fonksiyoneli

$$E\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)-\int_\Omega F\left(u,v\right)dx \tag{5.1.8}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$W=\left\{(u,v):(u,v)\in H_0^m\left(\Omega\right)\times H_0^m\left(\Omega\right),\ I\left(u,v\right)>0\ \right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$$

olsun.

Lemma 5.1.2. $E\left(t\right)$ enerji fonksiyoneli $t\geq 0$ için artmayandır. Yani,

$$E'\left(t\right)=-\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\leq 0 \tag{5.1.9}$$

dır.

İspat. (5.1.1) denklem sisteminin birinci denklemini u_t ile ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinden integral aldıktan sonra kısmi integrasyon uygularsak, $t\geq 0$ için

$$E\left(t\right)-E\left(0\right)=-\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau \tag{5.1.10}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.3 (Lokal varlık). Kabul edelim ki (5.1.2) sağlansın, ayrıca $(u_0, v_0) \in H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$, $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda (5.1.1) problemi

$$u, v \in C\left([0,T); H_0^m(\Omega)\right),$$

$$u_t \in C\left([0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^2(\Omega \times [0,T)) \text{ ve } v_t \in C\left([0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^2(\Omega \times [0,T))$$

lokal çözümüne sahiptir.

Ayrıca, aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur:

i) $T = \infty$,

ii) $t \longrightarrow T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \longrightarrow \infty$.

İspat. Teoremin ispatı Agre ve Rammaha (2006) çalışmasına benzer olarak yapılabilir.

5.2. Enerji Azalması

Bu kısımda (5.1.1) probleminin çözümlerinin üstel olarak sıfıra azaldığını göstereceğiz.

Teorem 5.2.1. Kabul edelim ki (5.1.2) sağlansın. Ayrıca $c_1 C_*^{2(r+2)} \left(\frac{2(r+2)}{r+1} E(0)\right)^{r+1} < 1$ ve $(u_0, v_0) \in W$ olsun. Bu durumda $t \geq 0$ için

$$E(t) \leq K e^{-kt} \tag{5.2.1}$$

dır. Burada K ve k daha sonra belirlenecek pozitif sabitlerdir.

İspat. $\epsilon > 0$ için

$$F(t) = E(t) + \epsilon \int_\Omega (u u_t + v v_t)\, dx \tag{5.2.2}$$

olsun. Basit bir hesaplama ile $F(t)$ ve $E(t)$ nin denk olduğu gösterilebilir. Yani ϵ na bağlı α_1, $\alpha_2 > 0$ sayıları için

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t) \tag{5.2.3}$$

dır.

$F(t)$ nin t ye göre türevi alındıktan sonra, (5.1.1) denklem sistemi, kısmi integral, (5.1.9) ve (5.1.5) teki $2(r+2)F(u,v) \leq c_1\left(|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}\right)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} F'(t) &= E'(t) + \epsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \epsilon\int_\Omega (uu_{tt} + vv_{tt})\,dx \\ &= -\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \epsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \epsilon\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad -\epsilon\int_\Omega (uu_t + vv_t)\,dx + 2(r+2)\epsilon\int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &\leq (\epsilon-1)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \epsilon\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad -\epsilon\int_\Omega (uu_t + vv_t)\,dx + \epsilon c_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\delta > 0$ için Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq \left(\epsilon - 1 + \frac{\epsilon}{4\delta}\right)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \epsilon\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad +\epsilon\delta\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) + \epsilon c_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \end{aligned}$$

olur.

Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\left[1 - \epsilon\left(1 + \frac{1}{4\delta}\right)\right]\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \epsilon(1 - C_*\delta)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad +\epsilon c_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

yazılır.

Diğer taraftan $I(t) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{r+1}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + \frac{1}{2(r+2)}I(t) \\ &\geq \frac{r+1}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \leq \frac{2(r+2)}{r+1}J(t) \leq \frac{2(r+2)}{r+1}E(t) \leq \frac{2(r+2)}{r+1}E(0)$$

olur.

Sobolev-Poincare eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} &\leq C_*^{2(r+2)} \left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(r+2)} \\ &= C_*^{2(r+2)} \left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(r+1)} \left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2} \\ &\leq C_*^{2(r+2)} \left(\frac{2(r+2)}{r+1} E(0) \right)^{r+1} \left\| P^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

ve benzer şekilde

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \leq C_*^{2(r+2)} \left(\frac{2(r+2)}{r+1} E(0) \right)^{r+1} \left\| P^{\frac{1}{2}} v \right\|^{2} \tag{5.2.6}$$

olur.

(5.2.5) ve (5.2.6) eşitsizlikleri (5.2.4) te yazılırsa

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\left[1-\epsilon\left(1+\frac{1}{4\delta}\right)\right]\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-\epsilon\left(1-C_*\delta\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad +\epsilon c_1 C_*^{2(r+2)}\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &= -\left[1-\epsilon\left(1+\frac{1}{4\delta}\right)\right]\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ &\quad +\epsilon\left(C_*\delta+c_1 C_*^{2(r+2)}\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}-1\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

bulunur.

Teoremdeki varsayımdan

$$c_1 C_*^{2(r+2)}\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}-1<0$$

dır. Şimdi

$$C_*\delta+c_1 C_*^{2(r+2)}\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}-1<0$$

olacak şekilde δ yı yeterince küçük seçelim. (5.2.7) den sadece δ ya bağlı bir $\eta>0$ sayısı vardır ki

$$F'(t) \leq -\left[1-\epsilon\left(1+\frac{1}{4\delta}\right)\right]\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-\epsilon\eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \tag{5.2.8}$$

olur.

Sonuç olarak (5.1.8) enerji özdeşliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\epsilon E(t) + \left[\epsilon\left(1+\frac{1}{4\delta}+\frac{1}{2}\right)-1\right]\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ &\quad +\epsilon\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

olur. Şimdi $\eta \geq \frac{1}{2}$ ve $\epsilon \leq \frac{4\delta}{1+6\delta}$ olarak seçersek, (5.2.9) dan

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\epsilon E(t) \\ &\leq -\epsilon\alpha_1 F(t) \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

ifadesi elde edilir. (5.2.10) dan integralin alınmasıyla $\forall t \geq 0$ için

$$F(t) \leq F(0)\, e^{-kt}$$

bulunur. Burada $k = \epsilon\alpha_1$ dır. (5.2.3) eşitsizliği göz önünde bulundurulursa $\forall t \geq 0$ için

$$E(t) \leq K e^{-kt}$$

olur. Burada $K = \alpha_2 F(0)$ dır. Böylece teorem ispatlanır.

5.3. Çözümün Patlaması

Bu kısımda (5.1.1) probleminin çözümünün patlamasını üçüncü bölümde verdiğimiz Lemma 3.2.3 ten faydalanarak göstereceğiz.

Teorem 5.3.1. Teorem 5.1.3 teki koşullara ek olarak

$$E(0) \leq 0, \quad \int_\Omega (u_0 u_1 + v_0 v_1)\, dx \geq 0$$

olsun. Bu durumda (5.1.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar. Diğer bir ifade ile $\lim\limits_{t\longrightarrow T^*}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)=\infty$ olacak şekilde pozitif bir T^* sayısı vardır.

İspat. Lemma 3.2.3 ü uygulamak için

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u|^2+|v|^2\right) dx \tag{5.3.1}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\psi'(t) = \int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dx \tag{5.3.2}$$

ve

$$\psi''(t) = \int_\Omega \left(u_t^2 + v_t^2\right) dx + \int_\Omega (uu_{tt} + vv_{tt})\, dx \tag{5.3.3}$$

olur.

(5.3.3) te (5.1.1) denklem sistemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \int_\Omega \left(u_t^2 + v_t^2\right) dx - \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\ &\quad - \int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dx + 2(r+2)\int_\Omega F(u,v)\, dx \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

bulunur.

Şimdi (5.1.8) deki enerji özdeşliğinden $\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2$ ifadesini (5.3.4) te yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \psi''(t) + \psi'(t) &= 2\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2E(t) + 2(r+1)\int_\Omega F(u,v)\, dx \\ &\geq 2\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2E(t) + c_0\frac{r+1}{r+2}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\ &\geq \gamma\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

bulunur. Burada $\gamma = c_0\frac{r+1}{r+2}$ dır.

Şimdi $\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}$ ve $\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}$ ifadeleri için kestirim elde etmek için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{2(r+2)} dx\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{r+1}{r+2}}$$

olur. W_n, Ω bölgesinin hacmini göstermek üzere

$$\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \geq \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{r+2} (W_n)^{-(r+1)} \tag{5.3.6}$$

olur. Benzer şekilde

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \geq \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{r+2} (W_n)^{-(r+1)} \tag{5.3.7}$$

dır. Sonuç olarak

$$\psi''(t) + \psi'(t) \geq \gamma (W_n)^{-(r+1)} \left[\left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{r+2} + \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{r+2} \right] \tag{5.3.8}$$

bulunur.

(5.3.8) in sağ tarafındaki ifadeye $X, Y \geq 0$, $1 \leq \rho < \infty$ olmak üzere

$$(X+Y)^\rho \leq 2^{\rho-1} (X^\rho + Y^\rho)$$

eşitsizliği uygulanırsa

$$2^{-(r+1)} \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{r+2} \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{r+2} + \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{r+2}$$

bulunur.

Sonuç olarak (5.3.8) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \psi''(t) + \psi'(t) &\geq 2^{-(r+1)} \gamma (W_n)^{-(r+1)} \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{r+2} \\ &= 2\gamma (W_n)^{-(r+1)} \psi^{r+2}(t) \end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. Burada $C_0 = 2\gamma (W_n)^{-(r+1)} > 0$ ve $\alpha = r+1 > 0$ olarak alınırsa Lemma 3.2.3 ün şartları sağlanır. Böylece $\psi(t)$ sonlu zamanda patlar.

6. GÜÇLÜ DAMPİNG TERİMLİ YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI VE PATLAMASI

Bu bölümde, (6.1.1) denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını, enerji azalmasını (Pişkin ve Polat 2012b), negatif başlangıç enerjisi için (Polat ve Pişkin 2012) ve pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını elde edeceğiz.

6.1. Giriş

Bu çalışmada yüksek mertebeden başlangıç sınır değer

$$\begin{cases} u_{tt} + Pu - \triangle u_t + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} + Pv - \triangle v_t + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x), \ v_t(x,0) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ D^\alpha u(x,t) = D^\alpha v(x,t) = 0, \ |\alpha| \le m-1, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1.1}$$

problemi çalışılacaktır. Burada $P = (-\triangle)^m$, $m \ge 1$ doğal sayı ve $p, q \ge 1$ reel sayılardır. Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dır.

$f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ fonksiyonlarını $a, b > 0$ sabit sayılar olmak üzere

$$f_1(u,v) = \left[a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|u|^r u |v|^{r+2} \right],$$

$$f_2(u,v) = \left[a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|u|^{r+2} |v|^r v \right]$$

biçiminde seçelim. Burada r

$$\begin{cases} -1 < r, & n \le 2m \text{ ise} \\ -1 < r \le \frac{3m-n}{n-2m}, & n > 2m \text{ ise} \end{cases} \tag{6.1.2}$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitliklerden $\forall (u,v) \in R^2$ için

$$u \, f_1(u,v) + v f_2(u,v) = 2(r+2) F(u,v) \tag{6.1.3}$$

yazılabilir. Burada

$$F(u,v) = \frac{1}{2(r+2)} \left[a|u+v|^{2(r+2)} + 2b|uv|^{r+2} \right] \tag{6.1.4}$$

dır.

Lemma 6.1.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$c_0\left(|u|^{2(r+2)}+|v|^{2(r+2)}\right)\leq 2\left(r+2\right)F\left(u,v\right)\leq c_1\left(|u|^{2(r+2)}+|v|^{2(r+2)}\right) \tag{6.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari 2010).

İspat. Lemma 4.1.1 dekine benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi bazı fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$J\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)=J\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)-\int_\Omega F\left(u,v\right)dx \tag{6.1.6}$$

ve

$$I\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)=I\left(t\right)=\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2-2\left(r+2\right)\int_\Omega F\left(u,v\right)dx. \tag{6.1.7}$$

Ayrıca enerji fonksiyoneli

$$E\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)-\int_\Omega F\left(u,v\right)dx \tag{6.1.8}$$

dır.

Lemma 6.1.2. $E\left(t\right)$ enerji fonksiyoneli $t\geq 0$ için artmayandır. Yani,

$$E'\left(t\right)=-\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)-\left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1}+\|v_t\|_{q+1}^{q+1}\right)\leq 0 \tag{6.1.9}$$

dır.

İspat. (6.1.1) denklem sisteminin birinci denklemini u_t ile ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinden integral aldıktan sonra kısmi integrasyon uygularsak, $t\geq 0$ için

$$E\left(t\right)-E\left(0\right)=-\int_0^t\left(\|\nabla u_\tau\|^2+\|\nabla v_\tau\|^2+\|u_\tau\|_{p+1}^{p+1}+\|v_\tau\|_{q+1}^{q+1}\right)d\tau \tag{6.1.10}$$

elde edilir.

Ayrıca, $0\leq s\leq t<T$ için

$$E\left(t\right)+\int_s^t\left(\|\nabla u_\tau\|^2+\|\nabla v_\tau\|^2+\|u_\tau\|_{p+1}^{p+1}+\|v_\tau\|_{q+1}^{q+1}\right)d\tau\leq E\left(s\right) \tag{6.1.11}$$

enerji eşitsizliği sağlanır.

Teorem 6.1.3 (Lokal varlık). Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın. Ayrıca p, q

$$\begin{cases} 1 \leq p, q; \quad n \leq 2m \text{ ise} \\ 1 \leq p, q \leq \frac{n+2m}{n-2m}; \quad n > 2m \text{ ise} \end{cases} \tag{6.1.12}$$

şeklinde verilsin ve $(u_0, v_0) \in H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$, $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda (6.1.1) problemi

$$u, v \in C([0, T); H_0^m(\Omega)),$$

$$u_t \in L^2\left([0, T); H_0^1(\Omega)\right) \cap L^{p+1}(\Omega \times [0, T)) \text{ ve}$$

$$v_t \in L^2\left([0, T); H_0^1(\Omega)\right) \cap L^{q+1}(\Omega \times [0, T))$$

lokal çözümüne sahiptir. Ayrıca aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

i) $T = \infty$,

ii) $t \longrightarrow T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \longrightarrow \infty$.

İspat. Teoremin ispatı Agre ve Rammaha (2006) çalışmasına benzer olarak yapılabilir.

6.2. Global Varlık ve Enerji Azalması

Bu bölümde, (6.1.1) probleminin global varlığı ve enerji azalmasını inceleyeceğiz.

Lemma 6.2.1. Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın. Bu durumda $(u, v) \in H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$ için $\eta > 0$ sayısı vardır ki

$$\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2} \leq \eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \tag{6.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari 2010).

İspat. Minkowski ve Sobolev-Poincare eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{2(r+2)}^2 &\leq 2\left(\|u\|_{2(r+2)}^2 + \|v\|_{2(r+2)}^2\right) \\ &\leq 2C\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca Hölder, Young ve Sobolev-Poincare eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|uv\|_{r+2} &\leq \|u\|_{2(r+2)} \|v\|_{2(r+2)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|u\|_{2(r+2)}^2 + \|v\|_{2(r+2)}^2\right) \\ &\leq C\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned}$$

olur. Son iki eşitsizlikten (6.2.1) elde edilir.

İspatlarımızda genelliği bozmadan (6.1.4) te $a = b = 1$ olarak alabiliriz. Ayrıca

$$B = \eta^{\frac{1}{2(r+2)}},\ \alpha_* = B^{-\frac{r+2}{r+1}},\ E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(r+2)}\right)\alpha_*^2 \tag{6.2.2}$$

olarak tanımlayalım. Burada η, (6.2.1) i sağlayan en iyi sabittir. Şimdi ifade ve ispat edeceğimiz lemma Vitillaro'nun (Vitillaro 1999) daki çalışmasına benzerdir.

Lemma 6.2.2. Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın. (u, v), (6.1.1) denklem sisteminin çözümü olsun. Ayrıca $E(0) < E_1$ ve

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_* \tag{6.2.3}$$

durumunda $\forall t \in [0, T)$ için

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_* \tag{6.2.4}$$

dır.

İspat. Önce (6.1.8), (6.2.1) ve B nin tanımından

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{1}{2(r+2)}\left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{1}{2(r+2)}\eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{B^{2(r+2)}}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

yazılabilir. Bu durumda $t \geq 0$ için

$$E(t) \geq G\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \tag{6.2.6}$$

olur. Burada $G(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{B^{2(r+2)}}{2(r+2)}\alpha^{2(r+2)}$ dır. $G(\alpha)$, maksimum değerini $\alpha_* = \frac{1}{B^{\frac{r+2}{r+1}}}$ noktasında alır ve bu maksimum değer

$$E_1 = G(\alpha_*) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(r+2)}\right)\alpha_*^2 \tag{6.2.7}$$

dır.

Şimdi (6.2.4) ü çelişki yoluyla elde edelim. Kabul edelim ki (6.2.4) sağlanmasın, bu durumda $(u(t), v(t))$ nin sürekliliğinden

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u(t_0)\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v(t_0)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha_* \tag{6.2.8}$$

olacak şekilde $t_0 \in (0, T)$ vardır. (6.2.5) ten

$$E(t_0) \geq G\left[\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u(t_0)\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v(t_0)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = G(\alpha_*) = E_1 \tag{6.2.9}$$

olduğu görülüyor. Bu $t \geq 0$ için $E(t) \leq E(0) < E_1$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle (6.2.4) sağlanır.

Teorem 6.2.3 (Global varlık ve enerji azalması). Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın. Eğer başlangıç verileri $(u_0, u_1) \in H_0^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $(v_0, v_1) \in H_0^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ve $E(0) < E_1$,

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_* \tag{6.2.10}$$

ise (6.1.1) probleminin çözümü globaldır. Yani $T = \infty$ dur. Burada α_* ve E_1 sabitleri (6.2.2) de tanımlandığı gibidir.

Ayrıca, eğer ε_1, ε_2 yeterince küçük sayıları için

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \eta\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}\right) \quad > \quad & \frac{2(r+2)}{r+1}\left[C^{p+1}\varepsilon_1\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{\frac{p-1}{2}}\right. \\ & \left. + C^{q+1}\varepsilon_2\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{\frac{q-1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

ise, bu durumda her $t \geq \frac{C_5}{b}$ için

$$E(t) \leq E(0)\, e^{1-bC_5^{-1}t} \tag{6.2.12}$$

eşitsizliği vardır. Burada C_5 pozitif sabittir.

İspat. Önce $T = \infty$ olduğunu ispatlayalm. $E(0) < E_1$ ve

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_*$$

olduğundan Lemma 6.2.2 den

$$\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 < \alpha_*^2 = \eta^{-\frac{1}{r+1}}$$

olur. Bu $t \in [0,T)$ için

$$\begin{aligned} I(t) &= \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 - 2(r+2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &= \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 - \left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\ &\geq \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 - \eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \\ &= \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)\left[1 - \eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+1}\right] \\ &\geq \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)\left[1 - \eta\left(\eta^{-\frac{1}{r+1}}\right)^{r+1}\right] \geq 0 \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Ayrıca, (6.1.6) ve (6.1.7) den

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{r+1}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + \frac{1}{2(r+2)}I(t) \\ &\geq \frac{r+1}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (6.1.8) ve $E(t) \leq E(0)$ den $t \in [0,T)$ için

$$\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 \leq \frac{2(r+2)}{r+1}J(t) \leq \frac{2(r+2)}{r+1}E(t) \leq \frac{2(r+2)}{r+1}E(0) \tag{6.2.13}$$

olur. (6.2.13) ve Lemma 6.1.2 den $\forall t \in [0, T)$ için

$$\begin{aligned} \frac{r+1}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) &\leq J(t) + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ &= E(t) \leq E(0) < E_1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 < C'E_1 \tag{6.2.14}$$

olur. Burada $C' = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2(r+2)}{r+1}\right\}$ dır. Böylece, Teorem 6.1.3 ten global varlık elde edilmiş olur.

Şimdi, (6.1.1) probleminin enerji azalmasını gösterelim. (6.1.1) denklem sisteminin birinci denklemini u ile ikinci denklemini v ile çarpıp, $\Omega \times [t_1, t_2]$ $(0 \leq t_1 \leq t_2)$ bölgesinde integral aldıktan sonra kısmi integrasyon uygulayıp elde ettiğimiz ifedeleri toplarsak

$$\begin{aligned} & \int_\Omega uu_t dx\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt + \int_\Omega vv_t dx\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla v \nabla v_t dxdt \\ & + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u|u_t|^{p-1} u_t dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega v|v_t|^{q-1} v_t dxdt \\ = & \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega [uf_1(u,v) + vf_2(u,v)]\, dxdt \end{aligned}$$

elde edilir. (6.1.8) den

$$\begin{aligned} & 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)\, dt - 2(r+1)\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega F(u,v)\, dxdt \\ = & -\int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dx\Big|_{t_1}^{t_2} + 2\int_{t_1}^{t_2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) dt \\ & -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (\nabla u \nabla u_t + \nabla v \nabla v_t)\, dxdt \\ & -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(u|u_t|^{p-1} u_t + v|v_t|^{q-1} v_t\right) dxdt \\ = & \ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

yazılabilir.

Şimdi (6.2.15) deki $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ için kestirimler elde edelim. Hölder, Young ve Sobolev-Poincare eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|uu_t| + |vv_t|\right) dx &\leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|v(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2 \\ &\leq \frac{C}{2}\left\|P^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{C}{2}\left\|P^{\frac{1}{2}}v(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda (6.2.14) ten

$$A_1 \leq \int_\Omega \left(|uu_t| + |vv_t|\right) dx\Big|_{t_1}^{t_2} \leq 2C_1E(t_1) \tag{6.2.16}$$

elde edilir.

(6.2.15) teki A_2 için, Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (6.1.9) dan $\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \leq -E'(t)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}A_2 &= 2\int_{t_1}^{t_2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) dt \\ &\leq 2C\int_{t_1}^{t_2}\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) dt \leq 2C_2E(t_1) \qquad (6.2.17)\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir.

(6.2.15) teki A_3 için basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}A_3 &= \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(\nabla u \nabla u_t + \nabla v \nabla v_t\right) dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t_2)\|^2 - \|\nabla u(t_1)\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|\nabla v(t_2)\|^2 - \|\nabla v(t_1)\|^2\right) \\ &\leq \frac{2(r+2)}{r+1}E(t_1) = C_3E(t_1) \qquad (6.2.18)\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak A_4 için, Young eşitsizliği, Sobolev-Poincare eşitsizliği (6.1.9) ve (6.2.13) ten

$$\begin{aligned}
A_4 &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(u\left|u_t\right|^{p-1}u_t+v\left|v_t\right|^{q-1}v_t\right)dxdt \\
&\le \int_{t_1}^{t_2}\left(\varepsilon_1\left\|u\right\|_{p+1}^{p+1}+C\left(\varepsilon_1\right)\left\|u_t\right\|_{p+1}^{p+1}\right)dt \\
&\quad +\int_{t_1}^{t_2}\left(\varepsilon_2\left\|v\right\|_{q+1}^{q+1}+C\left(\varepsilon_2\right)\left\|v_t\right\|_{q+1}^{q+1}\right)dt \\
&\le C^{p+1}\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_2}\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^{p+1}dt+C\left(\varepsilon_1\right)\int_{t_1}^{t_2}\left\|u_t\right\|_{p+1}^{p+1}dt \\
&\quad +C^{q+1}\varepsilon_2\int_{t_1}^{t_2}\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^{q+1}dt+C\left(\varepsilon_2\right)\int_{t_1}^{t_2}\left\|v_t\right\|_{q+1}^{q+1}dt \\
&\le \frac{2\left(r+2\right)}{r+1}C^{p+1}\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{2\left(r+2\right)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{\frac{p-1}{2}}E\left(t\right)dt+C\left(\varepsilon_1\right)\int_{t_1}^{t_2}\left\|u_t\right\|_{p+1}^{p+1}dt \\
&\quad +\frac{2\left(r+2\right)}{r+1}C^{q+1}\varepsilon_2\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{2\left(r+2\right)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{\frac{q-1}{2}}E\left(t\right)dt+C\left(\varepsilon_2\right)\int_{t_1}^{t_2}\left\|v_t\right\|_{q+1}^{q+1}dt \\
&\le a\int_{t_1}^{t_2}E\left(t\right)dt+C_4E\left(t_1\right) \qquad (6.2.19)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $a=\frac{2(r+2)}{r+1}\left(C^{p+1}\varepsilon_1\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{\frac{p-1}{2}}+C^{q+1}\varepsilon_2\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{\frac{q-1}{2}}\right)$ dır.

(6.2.16)-(6.2.19) daki kestirimleri (6.2.15) te yazarsak

$$2\int_{t_1}^{t_2}E\left(t\right)dt-2\left(r+1\right)\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega F\left(u,v\right)dxdt\le C_5E\left(t_1\right)+a\int_{t_1}^{t_2}E\left(t\right)dt \qquad (6.2.20)$$

eşitsizliği bulunur. Burada $C_5=2C_1+2C_2+C_3+C_4$ dır.

Diğer taraftan (6.2.1) ve (6.2.13) ten

$$\begin{aligned}
2\left(r+1\right)\int_\Omega F\left(u,v\right)dx &= \frac{r+1}{r+2}\left(\left\|u+v\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+2\left\|uv\right\|_{r+2}^{r+2}\right) \\
&\le \frac{r+1}{r+2}\eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \\
&\le 2\eta\left(\frac{2\left(r+2\right)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{r+1}E\left(t\right)
\end{aligned}$$

olup buradan da hemen

$$2\int_{t_1}^{t_2}E\left(t\right)dt-2\left(r+1\right)\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega F\left(u,v\right)dxdt\ge 2\left(1-\eta\left(\frac{2\left(r+2\right)}{r+1}E\left(0\right)\right)^{r+1}\right)\int_{t_1}^{t_2}E\left(t\right)dt \qquad (6.2.21)$$

bulunur.

Böylece (6.2.20) ve (6.2.21) den

$$2\left(1-\eta\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}\right)\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt \leq C_5E(t_1)+a\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt$$

yani

$$b\int_{t_1}^{t_2}E(t)\,dt \leq C_5E(t_1) \tag{6.2.22}$$

olur. Burada $b=2\left(1-\eta\left(\frac{2(r+2)}{r+1}E(0)\right)^{r+1}\right)-a$ dır.

(6.2.22) yi yeniden her $t\in[0,\infty)$ için

$$b\int_{t}^{\infty}E(t)\,dt \leq C_5E(t) \tag{6.2.23}$$

şeklinde yazabiliriz.

$b>0$ olduğundan Lemma 3.1.1.1 den her $t\geq\frac{C_5}{b}$ için

$$E(t)\leq E(0)\,e^{1-bC_5^{-1}t}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.3. Negatif Başlangıç Enerjisi için Çözümün Patlaması

Bu kısımda (6.1.1) probleminin çözümünün patlamasını başlangıç enerjisi negatif iken elde edeceğiz.

Önce bu kısımda bize gerekli olacak bir eşitsizliği verelim.

Lemma 6.3.1. Kabul edelim ki

$$p\leq 2\frac{n-1}{n-2},\ n\geq 3$$

olsun. $C>1$ sabiti sadece Ω ya bağlı olmak üzere, $u\in H_0^1(\Omega)$, $2\leq s\leq p$ için

$$\|u\|_p^s\leq C\left(\|\nabla u\|^2+\|u\|_p^p\right)$$

dır (Messaoudi 2001).

İspat. Eğer $\|u\|_p\leq 1$ ise $\|u\|_p^s\leq\|u\|_p^2$ olur. Sobolev gömme teoreminden de $\|u\|_p^s\leq\|u\|_p^2\leq C\|\nabla u\|^2$ bulunur. Eğer $\|u\|_p>1$ ise, bu durumda $\|u\|_p^s\leq\|u\|_p^p$ olur. Böylece lemma ispatlanır.

Teorem 6.3.2. Kabul edelim ki $2(r+2) > \max\{p+1, q+1\}$ ve $E(0) < 0$ olsun. Bu durumda denklem sisteminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar. Burada

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi\sigma\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. $\Psi(t)$ ve σ sırasıyla (6.3.1) ve (6.3.2) de tanımlanmıştır.

İspat. Çözümün bütün zamanlar için var olduğunu kabul edip buradan çelişki elde edeceğiz. Bu amaçla $H(t) = -E(t)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda teoremdeki $E(0) < 0$ kabulünden ve (6.1.9) dan $H(t) \geq H(0) > 0$ dır. ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\left(\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right) \tag{6.3.1}$$

ve

$$0 < \sigma \leq \min\left\{\frac{2(r+2)-(p+1)}{2p(r+2)}, \frac{2(r+2)-(q+1)}{2q(r+2)}, \frac{r+1}{2(r+2)}\right\} \tag{6.3.2}$$

olsun.

Burada amacımız $\Psi(t)$ nin

$$\Psi'(t) \geq \xi\Psi^\zeta(t),\ \zeta > 1$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Bu da çözümün sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir.

(6.3.1) in türevini alıp (6.1.1) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \varepsilon\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \\
&\quad -\varepsilon\left(\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx + \int_\Omega \nabla v\nabla v_t dx\right) + 2\varepsilon(r+2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\
&\quad -\varepsilon\left(\int_\Omega uu_t|u_t|^{p-1}dx + \int_\Omega vv_t|v_t|^{q-1}dx\right)
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

bulunur.

$H(t)$ nin tanımından

$$\int_\Omega F(u,v)\,dx = H(t) + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \tag{6.3.4}$$

dır.

(6.3.4) ü (6.3.3) te yazarsak

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon(r+3)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ &+ \varepsilon(r+1)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + 2\varepsilon(r+2) H(t) \\ &- \varepsilon\left(\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_\Omega \nabla v \nabla v_t dx\right) \\ &- \varepsilon\left(\int_\Omega u u_t |u_t|^{p-1} dx + \int_\Omega v v_t |v_t|^{q-1} dx\right) \qquad (6.3.5)\end{aligned}$$

bulunur. (6.3.5) in son terimi için kestirim elde etmek için, $X, Y \geq 0,\ \delta > 0,\ k, l \in R^+$ ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} Y^l}{l}$$

şeklindeki Young eşitsizliği kullanılır; $k = p+1$ ve $l = \frac{p+1}{p}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\int_\Omega u u_t |u_t|^{p-1} dx &\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} H'(t)\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\int_\Omega v v_t |v_t|^{q-1} dx &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\|v_t\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} H'(t)\end{aligned}$$

olur. (6.3.5) sondan bir önceki terimi için de Lemma 2.5.2 deki Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx &\leq \frac{1}{4\tau}\|\nabla u\|^2 + \tau\|\nabla u_t\|^2 \\ &\leq \frac{C_*}{4\tau}\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \tau H'(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v \nabla v_t dx &\leq \frac{1}{4\tau}\|\nabla v\|^2 + \tau\|\nabla v_t\|^2 \\ &\leq \frac{C_*}{4\tau}\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2 + \tau H'(t)\end{aligned}$$

kestirimleri elde edilir. Burada $\delta_1,\ \delta_2$ daha sonra belirlenecek t ye bağlı sabitlerdir. Böylece (6.3.5) ten

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon(r+3)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\ &+\varepsilon(r+1)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)+2\varepsilon(r+2)H(t)\\ &-\frac{\varepsilon C_*}{4\tau}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)-2\varepsilon\tau H'(t)\\ &-\varepsilon\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}-\varepsilon\frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1}-\varepsilon\left(\frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}+\frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\right)H'(t)\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

olur.

Böylece $k_1,\ k_2,\ k_3>0$ olmak üzere $\delta_1,\ \delta_2$ ve τ yu $\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}=k_1H^{-\sigma}(t)\,,\ \delta_2^{-\frac{q+1}{q}}=k_2H^{-\sigma}(t)\,,\ \tau=k_3H^{-\sigma}(t)$ olacak şekilde seçersek, $H(t)=-E(t)\leq\int_\Omega F(u,v)\,dx\leq\frac{c_1}{2(r+2)}\left(|u|^{2(r+2)}+|u|^{2(r+2)}\right)$ olduğundan

$$\delta_1^{p+1}=k_1^{-p}H^{\sigma p}(t)\leq k_1^{-p}C_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)^{\sigma p} \tag{6.3.7}$$

ve

$$\delta_2^{q+1}=k_2^{-q}H^{\sigma q}(t)\leq k_2^{-q}C_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)^{\sigma q} \tag{6.3.8}$$

olur.

(6.3.7) ve (6.3.8) i (6.3.6) da yazarsak

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & \left(1-\sigma-\frac{\varepsilon pk_1}{p+1}-\frac{\varepsilon qk_2}{q+1}-2\varepsilon k_3\right)H^{-\sigma}(t)H'(t)+2\varepsilon(r+2)H(t)\\ &+\varepsilon\left(r+1-\frac{C_*}{4\tau}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)+\varepsilon(r+3)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\ &-\frac{\varepsilon k_1^{-p}C_1}{p+1}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)^{\sigma p}\|u\|_{p+1}^{p+1}\\ &-\frac{\varepsilon k_2^{-q}C_1}{q+1}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)^{\sigma q}\|v\|_{q+1}^{q+1}\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

bulunur.

$2(r+2)>\max\{p+1,q+1\}$ olduğundan

$$\|u\|_{p+1}^{p+1}\leq C\|u\|_{2(r+2)}^{p+1}\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}\right)^{p+1}$$

ve

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} \leq C\|v\|_{2(r+2)}^{q+1} \leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}\right)^{q+1}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left(1-\sigma-\frac{\varepsilon p k_1}{p+1}-\frac{\varepsilon q k_2}{q+1}-2\varepsilon k_3\right) H^{-\sigma}(t) H'(t)+2\varepsilon(r+2) H(t) \\
& +\varepsilon\left(r+1-\frac{C_*}{4\tau}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}} u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}} v\right\|^2\right)+\varepsilon(r+3)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\
& -\frac{\varepsilon k_1^{-p} C_1 C}{p+1}\left(\|u\|_{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}\right)^{2\sigma(r+2)p+p+1} \\
& -\frac{\varepsilon k_2^{-q} C_1 C}{q+1}\left(\|u\|_{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}\right)^{2\sigma(r+2)q+q+1} \qquad (6.3.10)
\end{aligned}$$

olur. Burada $(a+b)^\lambda \leq C\left(a^\lambda+b^\lambda\right)$, $a,b>0$ eşitsizliği kullanıldı.

(6.3.2) den $2 \leq 2\sigma p(r+2)+p+1 \leq 2(r+2)$, $2 \leq 2\sigma q(r+2)+q+1 \leq 2(r+2)$ dır. Lemma 6.3.1 ve Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+p+1} & \leq C\left(\|\nabla u\|^2+\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
& \leq C'\left(\left\|P^{\frac{1}{2}} u\right\|^2+\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+q+1} & \leq C\left(\|\nabla v\|^2+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
& \leq C'\left(\left\|P^{\frac{1}{2}} v\right\|^2+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)
\end{aligned}$$

dır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left(1-\sigma-\frac{\varepsilon p k_1}{p+1}-\frac{\varepsilon q k_2}{q+1}-2\varepsilon k_3\right) H^{-\sigma}(t) H'(t)+2\varepsilon(r+2) H(t) \\
& +\varepsilon\left(r+1-\frac{C_*}{4\tau}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}} u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}} v\right\|^2\right)+\varepsilon(r+3)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\
& +\varepsilon\left(-\frac{k_1^{-p} C_1 C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q} C_1 C'}{q+1}\right)\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
& +\varepsilon\left(-\frac{k_1^{-p} C_1 C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q} C_1 C'}{q+1}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}} u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}} v\right\|^2\right) \qquad (6.3.11)
\end{aligned}$$

olur.

$$H(t) = -\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + \int_\Omega F(u,v)\,dx$$

ve (6.3.11) de $2(r+2)\varepsilon = 2\varepsilon r + 4\varepsilon$ yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & \left(1-\sigma-\frac{\varepsilon p k_1}{p+1}-\frac{\varepsilon q k_2}{q+1}-2\varepsilon k_3\right) H^{-\sigma}(t)\,H'(t) + 2\varepsilon r H(t) \\ & +\varepsilon(r+1)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ & +\varepsilon\left(\frac{2c_0}{r+2}-\frac{k_1^{-p}C_1C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q}C_1C'}{q+1}\right)\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\ & +\varepsilon\left(r-1-\frac{C_*}{4\tau}-\frac{k_1^{-p}C_1C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q}C_1C'}{q+1}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)\end{aligned} \quad (6.3.12)$$

olur.

k_1 ve k_2,

$$\frac{2c_0}{r+2}-\frac{k_1^{-p}C_1C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q}C_1C'}{q+1} > \frac{c_0}{r+2}$$

ve

$$r-1-\frac{C_*}{4\tau}-\frac{k_1^{-p}C_1C'}{p+1}-\frac{k_2^{-q}C_1C'}{q+1} > \frac{r-1}{2}-\frac{C_*}{8\tau}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde yeterince büyük seçilsin.

Ayrıca ε da $1-\sigma-\frac{\varepsilon p k_1}{p+1}-\frac{\varepsilon q k_2}{q+1}-2\varepsilon k_3 \geq 0$ olacak şekilde yeterince küçük seçilsin. Böylece (6.3.12) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & \varepsilon(r+1)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\varepsilon r H(t) \\ & +\varepsilon\left(\frac{r-1}{2}-\frac{C_*}{8\tau}\right)\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)+\varepsilon\frac{c_0}{r+2}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\ \geq\ & \eta\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+H(t)+\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2+\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)\end{aligned} \quad (6.3.13)$$

olur. Burada $\eta = \min\left\{\varepsilon(r+1),\ 2\varepsilon r,\ \varepsilon\left(\frac{r-1}{2}-\frac{C_*}{8\tau}\right),\ \varepsilon\frac{c_0}{r+2}\right\}$ dır. Sonuç olarak $\forall t \geq 0$ için

$$\Psi(t) \geq \Psi(0) = H^{1-\sigma}(0) + \varepsilon\left(\int_\Omega u_0 u_1\,dx + \int_\Omega v_0 v_1\,dx\right) > 0 \quad (6.3.14)$$

olur.

Diğer taraftan Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq \|u\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

olur.

$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ olmak üzere Young eşitsizliğinden

$$\left|\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + \|v\|_{2(r+2)}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|v_t\|^{\frac{\theta}{1-\sigma}}\right) \quad (6.3.16)$$

olur. $\theta = 2(1-\sigma)$ olarak alınırsa $\mu = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}$ olur. Böylece (6.3.16),

$$\left|\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|v\|_{2(r+2)}^{\frac{2}{1-2\sigma}}\right) \quad (6.3.17)$$

şeklinde yazılır.

(6.3.2) den $0 < \sigma \leq \frac{r+1}{2(r+2)}$ olduğundan $\frac{2}{1-2\sigma} \leq 2(r+2)$ olur. Böylece Lemma 6.3.1 den

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ \leq\ & C\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

olur.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\left(\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}\left|\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \\ &\leq C\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

bulunur.

(6.3.13) ve (6.3.19) den ξ pozitif sabit olmak üzere

$$\Psi'(t) \geq \xi \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (6.3.20)$$

olur.

(6.3.20) nin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa; $\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)-\frac{\xi\sigma t}{1-\sigma}}$ bulunur. Burada çözüm sonlu T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi\sigma\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

6.4. Pozitif Başlangıç Enerjisi için Çözümün Patlaması

Bu kısımda (6.1.1) probleminin çözümünün patlamasını başlangıç enerjisi pozitif iken elde edeceğiz.

İspatlarımızda genelliği bozmadan $a=b=1$ olarak alabiliriz. Ayrıca

$$B=\eta^{\frac{1}{2(r+2)}},\ \alpha_1=B^{-\frac{r+2}{r+1}},\ E_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(r+2)}\right)\alpha_1^2 \tag{6.4.1}$$

olarak tanımlayalım. Burada η, (6.2.1) i sağlayan en iyi sabittir. Şimdi ifade ve ispat edeceğimiz lemma Vitillaro'nun (Vitillaro 1999) daki çalışmasına benzerdir.

Lemma 6.4.1 Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın ve (u,v), (6.1.1) denklem sisteminin çözümü olsun. Ayrıca $E(0)<E_1$ ve

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}>\alpha_1 \tag{6.4.2}$$

olsun. Bu durumda $\alpha_2>\alpha_1$ olacak şekilde bir α_2 sabiti vardır ve $\forall t\in[0,T)$ için

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq\alpha_2, \tag{6.4.3}$$

$$\left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right)^{\frac{1}{2(r+2)}}\geq B\alpha_2 \tag{6.4.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (6.1.8), (6.2.1) ve (6.4.1) de B nin tanımından

$$\begin{aligned}
E(t) &\geq \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \int_\Omega F(u,v)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{1}{2(r+2)}\left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{1}{2(r+2)}\eta\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) - \frac{B^{2(r+2)}}{2(r+2)}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{r+2} \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{B^{2(r+2)}}{2(r+2)}\alpha^{2(r+2)} = G(\alpha) \qquad (6.4.5)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha = \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ dır. G, $0 < \alpha < \alpha_1$ aralığında artan ve $\alpha > \alpha_1$ aralığında azalandır. Ayrıca $\alpha \longrightarrow \infty$ için $G(\alpha) \longrightarrow -\infty$ ve

$$G(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{B^{2(r+2)}}{2(r+2)}\alpha_1^{2(r+2)} = E_1 \qquad (6.4.6)$$

dır. $E(0) < E_1$ olduğundan $G(\alpha_2) = E(0)$ olacak şekilde $\alpha_2 > \alpha_1$ sabiti vardır.

Şimdi $\alpha_0 = \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (6.4.5) ten $G(\alpha_0) \leq E(0) = G(\alpha_2)$ yazılabilir. Bu da $\alpha_0 \geq \alpha_2$ olmasını gerektirir. Ayrıca kabul edelim ki (6.4.3) doğru olmasın yani bazı $t_0 > 0$ için

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_2$$

olsun. $\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ nin sürekliliğinden

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} > \alpha_1$$

olacak şekilde t_0 sayısı seçebiliriz. Tekrar (6.4.5) i kullanırsak

$$E(t_0) \geq G\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^2\right) > G(\alpha_2) = E(0)$$

olur. Bu da $\forall t \in [0,T)$ için $E(t) \leq E(0)$ olduğundan mümkün değildir. Böylece (6.4.3) sağlanır.

Şimdi (6.4.4) ü göstermek için (6.1.8) den

$$\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2}+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^{2}\right)\leq E\left(0\right)+\frac{1}{2\left(r+2\right)}\left(\left\|u+v\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+2\left\|uv\right\|_{r+2}^{r+2}\right)$$

yazabiliriz. Sonuç olarak (6.4.3) ten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\left(r+2\right)}\left(\left\|u+v\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+2\left\|uv\right\|_{r+2}^{r+2}\right) &\geq \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2}+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^{2}\right)-E\left(0\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_2^2-E\left(0\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_2^2-G\left(\alpha_2\right)\\ &= \frac{B^{2(r+2)}}{2\left(r+2\right)}\alpha_2^{2(r+2)} \qquad (6.4.7)\end{aligned}$$

olur. Böylece (6.4.7) ve (6.4.1) den istenen elde edilir.

Teorem 6.4.2. Kabul edelim ki (6.1.2) sağlansın. Ayrıca $2\left(r+2\right)>\max\left\{p+1,q+1\right\}$,

$$\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^{2}+\left\|P^{\frac{1}{2}}v_0\right\|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\alpha_1 \text{ ve } E\left(0\right)<E_1$$

olsun. Bu durumda (6.1.1) denklem sisteminin çözümü sonlu bir zamanda patlar. Burada α_1 ve E_1, (6.4.1) de tanımlandığı gibidir.

İspat. Çözümün bütün zamanlar için var olduğunu kabul edip buradan çelişki elde edeceğiz.

Bu amaçla

$$H\left(t\right)=E_1-E\left(t\right) \qquad (6.4.8)$$

olarak tanımlayalım. (6.1.8) ve (6.4.8) in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}0 &< H\left(0\right)\leq H\left(t\right)=E_1-\frac{1}{2}\left(\left\|u_t\right\|^{2}+\left\|v_t\right\|^{2}\right)\\ &-\frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2}+\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^{2}\right)+\int_{\Omega}F\left(u,v\right)dx \qquad (6.4.9)\end{aligned}$$

olur. (6.1.5) ve (6.4.3) ten

$$\begin{aligned}
& E_1 - \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + \int_\Omega F(u,v)\,dx \\
\leq\ & E_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{c_1}{2(r+2)}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
\leq\ & -\frac{1}{2(r+2)}\alpha_1^2 + \frac{c_1}{2(r+2)}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
\leq\ & \frac{c_1}{2(r+2)}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \qquad (6.4.10)
\end{aligned}$$

olur. (6.4.9) ve (6.4.10) dan

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{c_1}{2(r+2)}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \qquad (6.4.11)$$

olur. ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\int_\Omega (uu_t + vv_t)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) \qquad (6.4.12)$$

ve

$$0 < \sigma \leq \min\left\{\frac{2(r+2)-(p+1)}{2p(r+2)}, \frac{2(r+2)-(q+1)}{2q(r+2)}, \frac{r+1}{2(r+2)}\right\} \qquad (6.4.13)$$

olsun.

(6.4.12) nin türevini alıp (6.1.1) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) =\ & (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
& -\varepsilon\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) + 2\varepsilon(r+2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\
& -\varepsilon\left(\int_\Omega uu_t|u_t|^{p-1}\,dx + \int_\Omega vv_t|v_t|^{q-1}\,dx\right) \qquad (6.4.14)
\end{aligned}$$

bulunur.

$H(t)$ nin tanımından

$$-\left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|^2\right) = 2H(t) - 2E_1 + \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2\int_\Omega F(u,v)\,dx \qquad (6.4.15)$$

dır. (6.4.15) i (6.4.14) te yazarsak

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + 2\varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ &+2\varepsilon H(t) - 2\varepsilon E_1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{r+2}\right) \left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\ &-\varepsilon \left(\int_\Omega u u_t |u_t|^{p-1} dx + \int_\Omega v v_t |v_t|^{q-1} dx\right) \qquad (6.4.16)\end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra (6.4.4) ten

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + 2\varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ &+2\varepsilon H(t) + \varepsilon c' \left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\ &-\varepsilon \left(\int_\Omega u u_t |u_t|^{p-1} dx + \int_\Omega v v_t |v_t|^{q-1} dx\right) \qquad (6.4.17)\end{aligned}$$

olur. Burada $c' = 1 - \frac{1}{r+2} - 2E_1 (B\alpha_2)^{-2(r+2)}$ dır. $\alpha_2 > \alpha_1 = B^{-\frac{r+2}{r+1}}$ olduğundan $c' > 0$ olduğu açıktır. (6.4.17) nin son terimine ilişkin olarak kestirim elde etmek için; $X, Y \geq 0,\ \delta > 0,\ k, l \in R^+$ ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} Y^l}{l}$$

şeklindeki Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_\Omega u u_t |u_t|^{p-1} dx &\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} H'(t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_\Omega v v_t |v_t|^{q-1} dx &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} \|v_t\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} H'(t)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta_1,\ \delta_2$ daha sonra belirlenecek t ye bağlı sabitlerdir. Böylece (6.4.17)

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ & +2\varepsilon H(t) + \varepsilon c'\left(\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right) \\ & -\varepsilon\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} - \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon\left(\frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\right)H'(t) \qquad (6.4.18)\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür.

$k_1,\ k_2 > 0$ daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere δ_1 ve δ_2 yi

$$\delta_1^{-\frac{p+1}{p}} = k_1 H^{-\sigma}(t),\ \delta_2^{-\frac{q+1}{q}} = k_2 H^{-\sigma}(t) \qquad (6.4.19)$$

olacak şekilde seçelim. Böylece (6.1.5) ve (6.4.19) nin kullanılmasıyla (6.4.18) ifadesi

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \geq\ & ((1-\sigma)-\varepsilon K)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ & +2\varepsilon H(t) + \varepsilon C'\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\ & -\varepsilon\frac{k_1^{-p}}{p+1}H^{\sigma p}(t)\|u\|_{p+1}^{p+1} - \varepsilon\frac{k_2^{-q}}{q+1}H^{\sigma q}(t)\|v\|_{q+1}^{q+1} \qquad (6.4.20)\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Burada $C' = c'c_0$ pozitif sabit ve $K = \frac{pk_1}{p+1} + \frac{qk_2}{q+1}$ dır.

$2(r+2) > \max\{p+1, q+1\}$ olduğundan, ayrıca (6.1.5) ve (6.4.11) den c_3 ve c_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$H^{\sigma p}(t)\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq c_3\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+p+1} + \|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right), \qquad (6.4.21)$$

$$H^{\sigma q}(t)\|v\|_{q+1}^{q+1} \leq c_4\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+q+1} + \|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)}\|v\|_{q+1}^{q+1}\right) \qquad (6.4.22)$$

olur. (6.4.13) ün göz önünde bulundurulması ve

$$z^{\upsilon} \leq z+1 \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)(z+a),\ \forall z \geq 0,\ 0 < \upsilon \leq 1,\ a \geq 0 \qquad (6.4.23)$$

cebirsel eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+p+1} &\leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0)\right) \\ &\leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t)\right) \qquad (6.4.24)\end{aligned}$$

yazılır. Burada $d=1+\frac{1}{H(0)}$ dır. Benzer şekilde

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+q+1}\leq d\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H\left(t\right)\right) \tag{6.4.25}$$

dır. Ayrıca

$$(a+b)^{\lambda}\leq C\left(a^{\lambda}+b^{\lambda}\right),a,b\geq 0,\ \lambda>0$$

eşitsizliği, (6.4.13) kabulü ve (6.4.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|u\|_{p+1}^{p+1} &\leq C\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|u\|_{p+1}^{2(r+2)}\right)\\ &\leq C\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right),\end{aligned} \tag{6.4.26}$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)}\|v\|_{q+1}^{q+1} &\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{q+1}^{2(r+2)}\right)\\ &\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)\end{aligned} \tag{6.4.27}$$

olur. Burada C pozitif sabittir. (6.4.21)-(6.4.27) ifadelerini (6.4.20) de yazarsak

$$\begin{aligned}\Psi'\left(t\right) &\geq ((1-\sigma)-\varepsilon K)\,H^{-\sigma}\left(t\right)H'\left(t\right)+2\varepsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\ &+\varepsilon\left(C'-Ck_1^{-p}-Ck_2^{-q}\right)\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)\\ &+\varepsilon\left(2-Ck_1^{-p}-Ck_2^{-q}\right)H\left(t\right)\end{aligned} \tag{6.4.28}$$

bulunur. Burada yeterince büyük k_1 ve k_2 sayıları için pozitif κ_1 ve κ_2 sabitleri bulunabilir ki (6.4.28) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\Psi'\left(t\right) &\geq ((1-\sigma)-\varepsilon K)\,H^{-\sigma}\left(t\right)H'\left(t\right)+2\varepsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\ &+\varepsilon\kappa_1\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)+\varepsilon\kappa_2 H\left(t\right)\end{aligned} \tag{6.4.29}$$

şeklinde yazılır. ε nu $(1-\sigma)-\varepsilon K\geq 0$ olacak şekilde yeterince büyük seçersek

$$\Psi\left(0\right)=H^{1-\sigma}\left(0\right)+\varepsilon\left(\int_{\Omega}u_0u_1dx+\int_{\Omega}v_0v_1dx\right)>0 \tag{6.4.30}$$

olur. $H'\left(t\right)\geq 0$ olduğundan, $\kappa>0$ sayısı vardır ki (6.4.29) ifadesi

$$\Psi'\left(t\right)\geq\varepsilon\kappa\left(H\left(t\right)+\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \tag{6.4.31}$$

şeklinde yazılır. Buradan $\forall t \geq 0$

$$\Psi(t) \geq \Psi(0) \tag{6.4.32}$$

olur.

Şimdi $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ için Hölder ve Young eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq \|u\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
&\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + \|v\|_{2(r+2)}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|v_t\|^{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right)
\end{aligned} \tag{6.4.33}$$

olur. $\theta = 2(1-\sigma)$ olarak alınırsa $\mu = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}$ olup. (6.4.13) ve (6.4.23) ten

$$\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-2\sigma}} \leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t) \right),$$

$$\|v\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-2\sigma}} \leq d\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t) \right)$$

elde edilir. Bu yüzden, (6.4.33) ifadesi $\forall t \geq 0$ için

$$\left| \int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(H(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \tag{6.4.34}$$

şekline dönüşür.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\left(\int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \right) \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left| \int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
&\leq C\left(H(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)
\end{aligned} \tag{6.4.35}$$

eşitsizliği yazılabilir. (6.4.31) ve (6.4.35) in birlikte değerlendirilmesiyle

$$\Psi'(t) \geq \xi \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \tag{6.4.36}$$

olur. Burada ξ pozitif sabittir.

(6.4.36) nın $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa, $\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)-\frac{\xi\sigma t}{1-\sigma}}$ bulunur. Buradan çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi\sigma\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan son üç bölümünde farklı tipten denklem sistemleri ele alınmış, bu denklem sistemlerinin çözümlerinin lokal ve global varlığı, azalması ve patlaması çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde ele alınan

$$\begin{cases} u_{tt} + |u_t|^{p-1} u_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) + f_1(u,v), \\ v_{tt} + |v_t|^{q-1} v_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right) + f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin varlığı Faedo-Galerkin yaklaşımı ile azalması Nakao eşitsizliği ve patlaması ise Li ve Tsai (2003) nin lemmasından faydalanılarak gösterilmiştir. Çözümlerin azalması Komornik lemması kullanılarak, patlaması ise $p = q = 1$ için Zhou (2005) nun lemmasından faydalanılarak gösterilebilir.

Beşinci bölümde ele alınan

$$\begin{cases} u_{tt} + Pu + u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + Pv + v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin azalması üstel çarpım metodu ile, patlaması ise Zhou (2005) nun lemmasından faydalanarak elde edildi. Çözümlerin azalması ve patlaması farklı metotlar ile çalışılabilir.

Altıncı bölümde ele alınan

$$\begin{cases} u_{tt} + Pu - \triangle u_t + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} + Pv - \triangle v_t + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin azalmasını ve patlaması farklı metotlar ile çalışılabilir.

Beşinci ve altıncı bölümdeki denklem sistemleri $P = (-\triangle)^m$ ve $m \geq 1$ olmak üzere çalışılmıştır. Bu denklemler $0 < m < 1$ için yani kesirli mertebeden türevler için çalışılabilir.

Ayrıca dördüncü ve altıncı bölümde çalışılan denklemler doğrusal olmayan damping terimler içermektedir. Çalışmalarımızda damping terimlerin kuvvetleri birden büyük olarak seçilmiştir, bu damping terimlerin kuvvetleri $(0,1)$ aralığında iken bu denklem sistemleri tekrar çalışılabilir.

Tez de $\Omega \subset R^n$ sınırlı bölgede yapılan işlemler sınırsız bölgeye genişletilebilir.

8. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Agre, K., Rammaha, M. A. 2006. Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. Diff. Integral Eqns., 19 (11): 1235–1270.

Brezis, H. 2011. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Chen, H., Liu, G. 2013. Global existence, uniform decay and exponential growth for a class of semilinear wave equation with strong damping. Acta Math. Sci., 33B(1): 41–58.

Evans, L. C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Fei, L., Hongjun, G. 2011. Global nonexistence of positive initial-energy solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. Abstr. Appl. Anal., 1–14.

Fujita, H. 1966. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 13: 109–124.

Friedman, A. 1965. Remarks on nonlinear parabolic equations, applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. Amer. Math. Soc., 3–23.

Georgiev, V., Todorova, G. 1994. Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Diff. Eq., 107: 295–308.

Houari, B. S. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with damping and source terms. Diff. Integral Eqns., 23 (1–2): 79–92.

Houari, B. S. 2012. Global existence and decay of solutions of a nonlinear system of wave equations. Appl. Anal., 91 (3): 475–489.

Hu, B. 2011. Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Springer.

Kalantarov, V. K., Ladyzhenskaya, O. A. 1978. The occurance of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type. J. Soviet Math., 10: 53–70.

Kaplan, S. 1963. On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math., 16: 305–330.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India.

Komornik, V. 1994. Exact controllability and stabilization: The Multiplier Method. RAM: Research in Applied Mathematics, Masson-John Wiley, Paris.

Levine, H. A. 1973. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ .Arch. Rational Mech. Anal., 51(5): 371–386.

Levine, H. A. 1974. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$. Trans. Amer. Math. Soc., 192: 1–21.

Levine, H. A., Serrin, J. 1997. Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equation with dissipation. Arch. Rational Mech. Anal., 137: 341–361.

Levine, H. A., Park, S. R., Serrin, J. 1998. Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolutions equations of formally parabolic type. J. Diff. Eq., 142: 212–229.

Li, G., Sun, Y., Liu, W. 2011. Global existence, uniform decay and blow-up of solutions for a system of Petrovsky equations, Nonlinear Anal., 74: 1523–1538.

Li, G., Sun, Y., Liu, W. 2012. Global existence and blow-up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping. Appl. Anal., 91(3): 575–586.

Li, M. R., Tsai L. Y. 2003. Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations. Nonlinear Anal., 54 (8): 1397–1415.

Lions, J. L., Magenes, E. 1972. Non-homogeneous boundary value problems and applications I, Springer-Verlag. New York Heidelberg, Berlin.

Martinez, P. 1999. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 4: 419–444.

Messaoudi, S. A. 2001. Blow up in a nonlinearly damped wave equation. Math. Nachr., 231: 105–111.

Messaoudi, S. A. 2002. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky. J. Math. Anal. Appl., 265 (2): 296–308.

Messaoudi, S. A., Houari B. S. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. J. Math. Anal. Appl., 365: 277–287.

Nakao, M. 1977. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. J. Math. Anal. Appl., 58 (2): 336–343.

Nakao, M. 1978. A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. J. Math. Soc. Japan, 30(4): 747–762.

Pişkin E., Polat N. 2012a. Exponential decay and blow up of a solution for a system of nonlinear higher-order wave equations. AIP Conf. Proc., 1470: 118–121.

Pişkin E., Polat N. 2012b. Global existence and exponential decay of solutions for a class of system of nonlinear higher-order wave equations with strong damping. J. Adv. Res. Appl. Math., 4(4): 26–36.

Pişkin, E., Polat, N. 2013. Global existence, decay and blow up solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. Turk. J. Math., 37(4): 633–651.

Polat, N., Pişkin, E. 2012. Blow up of a solution for a system of nonlinear higher-order wave equations with strong damping terms. AIP Conf. Proc., 1470: 203–206.

Polat, N. 2005. Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Rammaha, M. A., Sakuntasathien, S. 2010. Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. Nonlinear Anal., 72: 2658–2683.

Runzhang, X., Jihong, S. 2009. Some generalized results for global well-posedness for wave equations with damping and source terms. Math. Comput. Simulat., 80: 804–807.

Sango, M. 2009. On a nonlinear hyperbolic equation with anisotropy: Global existence and decay of solution. Nonlinear Anal., 70: 2816–2823.

Vitillaro, E. 1999. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. Arch. Ration. Mech. Anal., 149: 155–182.

Wu, J., Li, S., Chai, S. 2010. Existence and nonexistence of a global solution for coupled nonlinear wave equations with damping and source. Nonlinear Anal., 72: 3969–3975.

Wu, S. T., Tsai, L. Y. 2009. On global solutions and blow-up of solutions for a nonlinearly damped Petrovsky system. Taiwanese J. Math., 13 (2A): 545–558.

Ye, Y. 2010. Existence and asymptotic behavior of gobal solutions for a class of nonlinear higher-order wave equation. J. Ineq. Appl., 1–14.

Ye, Y. 2012. Global existence and asymptotic behaviour for systems of nonlinear hyperbolic equations. Appl. Anal., (doi: 10.1080/00036811.2012.742184) (Baskıda): 1–14.

Yu, S. 2009. On the strongly damped wave equation with nonlinear damping and source terms. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 39: 1–18.

Zhou, J., Wang, X., Song, X., Mu, C. 2012. Global existence and blowup of solutions for a class of nonlinear higher-order wave equations. Z. Angew. Math. Phys, 63(3): 461–473.

Zhou, Y. 2005. Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms, Math. Nachr., 278(11):1341–1358.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi, 2009 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansımı tamamladım. 2005–2009 tarihleri arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda öğretmenlik yaptım. 2009 yılından beri Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim ve iki çocuğum var.