T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLASİK LEBESGUE UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Fatma İÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran 2013

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Fatma (İÇER) ÇAPA tarafından yapılan "KLASİK LEBESGUE UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ
Üye :	Prof. Dr. Selahattin GÖNEN
Üye :	Doç. Dr. Aziz HARMAN (Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28/06/2013

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

28/06/2013

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her alanında bana değerli vaktini ayırıp beni yönlendiren, sabır ve anlayışını esirgemeyen, bana güç veren tez danışmanım Doç. Dr. Aziz HARMAN' a,aramızda olduğu süre boyunca tecrübelerini bizim ile paylaşan ve bize yakın ilgi gösteren Prof. Dr. Farman MAMADOV'a, bana çalışmam boyunca verdiği destek ve yaptığı rehberlikten dolayı M. Özgür KELEŞ'e ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ... i

İÇİNDEKİLER ... ii

ÖZET ... v

ABSTRACT ... vi

ŞEKİL LİSTESİ ... vi

1. GİRİŞ ... 1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ... 3

2.1 Küme ve yuvar kavramları ... 3
2.1.1 İç nokta ... 3
2.1.2 Açık küme ... 3
2.1.3 Kapalı küme ... 3
2.1.4 Kümenin kapanışı ... 3
2.1.5 Yoğun küme ... 3
2.1.6 Kümelerin sınırlılığı ... 3
2.1.7 Yuvarlar ... 4
2.2 Metrik ve Metrik Uzay Kavramları ... 4
2.2.1 Metrik ... 4
2.2.2 Metrik Uzay ... 4
2.2.3 Kompakt Küme ... 5
2.2.4 Metrik Uzayda Yakınsama ve Cauchy Dizisi ... 5
2.2.5 Tam Metrik Uzay ... 6
2.2.6 Metrik uzayın tamlaması ... 6
2.2.7 Denk Metrikler ... 6
2.3 Vektör uzayı ... 7
2.3.1. Vektör alt Uzayı ... 8
2.3.2. Lineer Bağımlılık ... 8
2.3.1 Sıfır Uzayı ... 9
2.4 Normlu Uzaylar ... 9
2.4.1 Norm ve normlu uzay ... 9
2.4.2 Denk normlar ... 10
2.4.3 Zayıf yakınsaklık ve Kuvvetli Yakınsaklık ... 10
2.4.4 Mutlak Yakınsaklık ... 10
2.4.5 Banach Uzayı ... 11
2.4.6 Sınırlılık ... 11
2.4.7 Süreklilik ve Düzgün Süreklilik ... 11
2.4.8 Mutlak Süreklilik ... 12
2.5 İç çarpım ve İç Çarpım Uzayları ... 12
2.5.1 İç Çarpım ... 12
2.5.2 İç Çarpım Uzayı ... 12
2.5.3 Hilbert Uzayı ... 12

2.5.4 Adjoint Operatörü……………………………………………………………………13
2.5.5 Kompact Uzay………………………………………………………………………13
2.6 Operatör kavramı 14
2.6.1 Operatör 14
2.6.2 Ters operatör 14
2.6.3 Lineer Fonksiyonel…………………………………………………………….14
2.7 Ölçüm ve Lebesgue Ölçümü.. 15
2.7.1 Ölçü 15
2.7.2 Dış Ölçü.. 15
2.7.3 σ-cebir 15
2.7.4 Borel Fonksiyonu 16
2.7.5 Kümenin açık örtüsü……………………………………………………………16
2.7.6 Lebesgue Ölçümü.. 17
2.7.7 Lebesgue Ölçülebilir Küme... 18
2.8 Riemann İntegrali 19
2.9 Lebesgue İntegrali... 21
2.9.1 Fubini Teoremi 25
2.9.2 Fatou Lemma... 26
2.9.3 Beppo- Levi Teoremi 26
2.9.4 Levi Teoremi 26
2.9.5 Monoton Yakınsaklık Teoremi 27
2.9.6 Lebesgue Yakınsaklık Teoremi.. 27
2.9.7 L^p 'de Yakınsaklık 27
2.9.8 Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi... 27
2.9.9 Ölçüsel Yakınsaklık 28
2.9.10 Riesz-Fisher Teoremi 28
2.9.11 Lebesgue İntegrali ve Riemann İntegrali Arasındaki İlişki............................. 29

2.10 Stieltjes İntegrali……………………………………………………..……...30

2.11 Bazı Önemli Eşitsizlikler.. 31

2.11.1 Young Eşitsizliği 31

2.11.2 Cauchy Eşitsizliği... 31

2.11.3 Cauchy-Schwartz Eşitsizliği... 32

3. KLASİK LEBESGUE UZAYLARI.. 33

3.1 $L_p(0,\infty)$ Lebesgue Uzayı 33
3.2 $L_p(a,b)$ Lebesgue uzayının temel özellikleri 34
3.3 Hölder Eşitsizliği 34
3.4 Minkowski Eşitsizliği 34
3.5 İntegraller için Minkowski Eşitsizliği... 34
3.6 Ağırlıklı Lebesgue Uzayı.. 35
3.7 L^p nin Duali 35

4. L^p UZAYINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI.. 37

4.1. Kesikli Hardy Operatörü 37

4.2. Sürekli Hardy Operatörü 37

4.3. Hardy Eşitsizliğinin Diferansiyel Formu... 38

4.4. Hardy Ortalama (averaging) Operatörü.. 40

4.5. N Boyutlu Hardy Operatörü 41

4.6. Teoremler 42

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 63

6. KAYNAKLAR.. 65

ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

KLASİK LEBESGUE UZAYLARINDA

HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ÇAPA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

Bu tezin giriş bölümünden sonra ikinci bölümünde analizde önemli bir yeri olan fonksiyonel ve reel analizin temel kavramlarından; küme ve yuvar kavramları, metrik ve metrik uzay, vektör uzayı, normlu uzay, iç çarpım ve iç çarpım uzayı, operatör, ölçüm, Riemann ve Lebesgue integralleri gibi tez konusu ile alakalı temel kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde $p>1$ olmak üzere ,

$L^p_{(0,\infty)} = \left\{ f \text{ ölçülebilir;} \int_0^\infty |f|^p\,dx < \infty \right\}$ ile tanımlanan Klasik Lebesgue uzayında; $H(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

ile gösterilen Hardy operatörü, duali ve L^p uzayının özellikleri tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, $1<p\le q\le\infty$ ve $1\le q<p<\infty$ durumlarında

$\|v(x)Hf(x)\|_{L^q_{(0,\infty)}} \le C\|w(x)f(x)\|_{L^p_{(0,\infty)}}$ ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı araştırılmıştır. Ayrıca

üst fonksiyonu $(0,l)$ aralığında azalan iken $\|x^{\beta(x)-1}Hf\|_{L^p_{(0,l)}} \le C\|x^{\beta(x)}f(x)\|_{L^p_{(0,l)}}$ eşitsizliğinin

sağlanması için $\beta(x)$ fonksiyonunun sıfırın bir komşuluğunda Lipschitz –Dini koşulunu sağlaması gerektiği gösterilmiştir.

ABSTRACT

THEBOUNDEDNESS OF HARDY OPERATOR IN CLASSICAL LEBESGUE SPACES

MASTER THESIS

Fatma ÇAPA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE
2013

In the second section of this thesis after the introduction we give basic concepts in functional analysis and real analysis and some important concepts which are necessary for the purpose of this thesis such as sets and neighborhoods, metric and metric spaces, vector spaces, normed spaces, inner products and inner product spaces, operators, measure, Riemann and Lebesgue integrals. In the third section, we introduce the Hardy operator $H(f)=\int_0^x f(t)\,dt$ in the classical Lebesgue Space $L^p_{(0,\infty)}=\left\{ f \text{ measurable}; \int_0^\infty |f|^p\,dx<\infty \right\}$ its dual and the properties of L^p space. In the fourth section the boundedness of weighted Hardy operator $\|v(x)Hf(x)\|_{L^q_{(0,\infty)}} \le C\|w(x)f(x)\|_{L^p_{(0,\infty)}}$ where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ and $1<p\le q\le\infty$ ve $1\le q<p<\infty$ is investigated**.** Furthermore, when the upper function is decreasing in the interval (0,l**)** we show that the inequality $\left\|x^{\beta(x)-1}Hf\right\|_{L^p_{(0,l)}} \le C\left\|x^{\beta(x)}f(x)\right\|_{L^p_{(0,l)}}$ holds only when the function $\beta(x)$ satisfies the Lipschits-Dini property in a neighborhood of zero.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
Şekil.2.8.1	Riemann integralinin geometrik yorumu	20
Şekil.2.9.1	Lebesgue integralinin geometrik yorumu	21

1.GİRİŞ

1920'de $a_m \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \text{ serisi yakınsaktır}$$

ifadesi ile özdeş olan ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2}$$

ile gösterilen Hilbert eşitsizliğini daha basit bir şekilde ispatlamak için 19.y.y. başlarında araştırmalara başlayan G.H. Hardy, süreklilik durumunda $a > 0$ için

$$\int_a^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt \right)^2 dx \leq 4 \int_a^{\infty} f^2(x)\,dx$$

eşitsizliğini ispatlamış ve günümüze kadar yapılan çok sayıda bilimsel çalışmaya temel oluşturmuştur.

$p > 1$ ve f fonksiyonu; $(0,\infty)$aralığında tanımlı negatif olmayan p-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere ;f fonksiyonu $x > 0$ için herhangi $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\,dx$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin ilk ağırlıklı halini tüm negatif olmayan ölçülebilir f fonksiyonları $p > 1$ve $\varepsilon < p-1$için $\left(\frac{p}{p-\varepsilon-1} \right)$en iyi sabitiyle,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p x^{\varepsilon} dx \leq \left(\frac{p}{p-\varepsilon-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\varepsilon}\,dx$$

şeklinde ifade eden Hardy; $p > 1$ve $\varepsilon < p-1$için $\left(\frac{p}{\varepsilon+1-p} \right)$ en iyi sabiti ile

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_x^{\infty} f(t)\,dt \right)^p x^{\varepsilon} dx \leq \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p} \right) \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\varepsilon}\,dx$$

dual eşitsizliğini elde etmiştir.

$p > 1,\ f(x) \geq 0$ ve $f^{p}, (0,\infty)$ da integrallenebilir olması durumunda ;

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

eşitsizliği Hardy eşitsizliğinin orjinal formu olarak bilinir.

Hardy eşitsizliğinin bir çok alanda uygulaması bulunmaktadır.Adi diferansiyel denklemler teorisi,Sturm-Liouville problemleri,fonksiyonel analiz,kompleks fonksiyonlar teorisi uygulama alanlarının başlıcalarındandır. Hardy eşitsizliği ile ilgili olarak bir çok kitap yazılmıştır.. Günümüzde Hardy operatörü ve eşitsizlikleri ilgili çalışmalar devam etmektedir.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sabit üstlü Hardy eşitsizliğinin sınırlılığı incelenirken gerekli olacak temel ölçüm teorisi ve fonksiyonel analiz kavramları ve ilgili bazı eşitsizlikler tanıtılacaktır.

2.1. Küme ve yuvar kavramları:

2.1.1 İç nokta: $x_0 \in A$ noktası için $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x_0 'a A ' nın bir iç noktası denir ve A ' nın bütün iç noktalarının kümesi $\overset{o}{A}$ ile gösterilir.

2.1.2 Açık Küme: Her bir $x_0 \in A$ noktası için $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa (yani A ' nın her noktası bir iç nokta ise) A 'ya bir açık kümedir denir.

2.1.3 Kapalı Küme: $A \subset M$ ve $M \setminus A$ kümesi açık küme ise, A kümesine kapalı küme denir.

2.1.4 Kümenin Kapanışı: $A \subset M$ ve $x_0 \in M$ olmak üzere x_0 'ın $\varepsilon > 0$ komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa x_0 'a A 'nın kapanış noktasıdır denir.(yığılma noktası)

2.1.5 Yoğun Küme: $\overline{A} = M$ ise A 'ya(M içinde) yoğundur denir. Eğer $\overline{A}$ hiç iç noktaya sahip değil ise(yani Y 'nin kapanışının içi boş ise, başka bir yazılışla $\overset{o}{\overline{A}} = \varnothing$ ise) A, M içinde hiçbir yerde yoğun değildir denir.

2.1.6 Kümelerin sınırlılığı: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x \in A$ için $x \geq a$ olacak şekilde bir a reel sayısı varsa, A kümesine alttan sınırlıdır denir, a reel sayısına da A 'nın alt sınırı denir. Alttan sınırlı bir A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\forall x \in A$ için $x \leq b$ olacak şekilde $b \in \mathbb{R}$ varsa A kümesine üstten sınırlıdır, b reel sayısına da A 'nın üst sınırı denir.Üstten sınırlı bir A kümesinin üst sınırının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir.Alttan ve üstten sınırlı olan kümeye kısaca sınırlı küme denir.Yani, $\forall x, y \in A$ için , $d(x,y) < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa A kümesi sınırlıdır ifadesini kullanırız.

2.1.7 Yuvarlar: $M \subset \square$ olsun. Herhangi $x_0 \in M$ noktası ve herhangi $r > 0$ sayısı için ,

$$B_r(x_0) = \{y \in M : |y - x_0| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar (açık top)

$$B_r[x_0] = \{y \in M : |y - x_0| \le r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar (kapalı top) ve

$$S_r(x_0) = \{y \in M : |y - x_0| = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı küre yüzeyi (sphere) denir. Eğer $r = 1$ ve $x_0 = 0$ ise $B_1(0)$ kümesine açık birim yuvar ve $B_1[0]$ kümesine kapalı birim yuvar adı verilir

$B_r(x_0), B_r[x_0]$ ve $S_r(x_0)$ gösterimleri için sırasıyla $B(x_0;r), B[x_0;r]$ ve $S(x_0;r)$ gösterimleri de kullanılır.

2.2 Metrik ve Metrik Uzay kavramları

2.2.1. Metrik: Bir M kümesi üzerinde tanımlı, her $x, y, z \in M$ için

a) $d(x,y) \ge 0;$

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x);$

d) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan $d : M \times M \to \square$ fonksiyonuna metrik denir.

2.2.2 Metrik uzay: Eğer d, M üzerinde bir metrik ise o zaman (M,d) çiftine bir metrik uzay denir. Verilen herhangi bir M kümesi (M kümesi bir elemanlı bir küme olmadıkça) birden çok metriğe sahip olabilir. Genellikle hangi metriğin kullanıldığı açık olarak biliniyorsa "(M,d) metrik uzayı" yerine "M metrik uzayı" yazılır.

(M,d) bir metrik uzay ve $A,B;M$ 'nin boş olmayan alt kümeleri olsun. A 'nın B 'ye uzaklığı $d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}$ dir. Her bir $x\in M$ için x 'in A ' ya,uzaklığı $d(x,A)=\inf\{d(x,y): y\in A\}$ dir.Her bir $x\in M$ için $|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$ olduğu ve buradan $x\to d(x,A)$ fonksiyonunun M üzerinde sürekli olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 2.2.1 Herhangi bir $k\ge 1$ tamsayısı için ,

$$d_2(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k}|x_j-y_j|^2\right)^{1/2}$$

İle tanımlı $d_2:\mathrm{F}^k\times\mathrm{F}^k\to\mathbb{R}$ fonksiyonu F^k üzerinde bir metriktir. Bu metrik F^k üzerinde standart metrik olarak adlandırılır.

2.2.3 Kompakt Küme: (M,d) bir metrik uzayı olsun. Bir $A\subset M$ kümesindeki her $\{x_n\}$ dizisi A ' nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A 'ya bir kompakt küme denir. Bir $A\subset M$ kümesi verildiğinde $\overline{A}$ kapanışı kompakt ise A 'ya relatif (göreceli) kompakt denir.

2.2.4 Metrik uzayda yakınsama: Eğer $\{x_n\}$, M kümesinde bir dizi ise $\{x_n\}$`e (M,d) metrik uzayında bir dizidir denir. (M,d) metrik uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

a) $x\in M$ olmak üzere her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\ge N$ için, $d(x,x_n)<\varepsilon$ olacak biçimde bir $N\in\mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi $x\in M$ ye yakınsar (yada $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ veya } x_n\to x$$

yazılır.

b) her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $m,n\ge N$ için

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Reel sayıların bir dizisinin yakınsaklığının fikrini kullanarak yukarıdaki tanımların sırasıyla

$$n \to \infty \text{ için } d(x, x_n) \to 0$$

ve

$$m, n \geq N \text{ için } d(x_m, x_n) \to 0$$

ifadelerinin denk oldukları görülür.

Teorem 2.2.1 $\{x_n\}$, (M, d) metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun. O zaman

a) $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ limiti tektir.

b) $\{x_n\}$' nin herhangi bir alt dizisi de x 'e yakınsar ve $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

2.2.5 Tam Metrik Uzay: (M, d) metrik uzayında ki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa, bu uzaya tamdır denir.

2.2.6 Metrik Uzayın Tamlaması: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere bir (X^*, d^*) metrik uzayı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (X, d) metrik uzayının tamlamasıdır denir.

$a) X : X^*$ ın bir alt uzayıdır.

$b) X^*$ tamdır.

$c) X, X^*$ içinde yoğundur..(X^*' ın her noktası , X içindeki bir dizinin limitidir.)

Örnek 2.2.2 $\left(L^p[a,b], d_p\right)$ uzayı $\left(C[a,b], d_p\right)$ uzayının tamlamasıdır,

2.2.7 Denk Metrikler: d_1 ve d_2 aynı X kümesi üzerindeki metrikler olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri varsa d_1 ve d_2 metriklerine denktirler denir.

Örnek 2.2.3: $\mathbb{R}^n$ de

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$
$$d_2(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$
$$d_\infty(x,y)=\max_{1\le x\le n}|x_i-y_i|$$

metrikleri denktir.

2.3 Vektör Uzayı

Tanım 2.3.1 V boş olmayan bir küme olsun. Her $x,y\in V$ ve $\alpha\in\mathrm{F}$ için $V\times V\to V$ şeklinde tanımlı

$$+:(x,y)\to x+y$$

fonksiyonu (işlemi) ve $\mathrm{F}\times V\to V$ şeklinde tanımlı

$$\cdot:(\alpha,x)\to\alpha\cdot x$$

fonksiyonu (işlemi) aşağıdaki aksiyomları sağlarsa V kümesine F üzerinde bir **vektör uzayı** denir.($\alpha\cdot x$ yerine kısaca αx yazarız.)

Her $\alpha,\beta\in\mathrm{F}$ ve her $x,y,z\in V$ için ,

a) $x+y=y+x$,

b) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

c) $x+0=x$ olacak şekilde (x den bağımsız)bir tek $0\in V$ vardır;

d) $x+(-x)=0$ olacak şekilde bir tek $-x\in V$ vardır;

e) $1x=x$ olacak şekilde bir tek $1\in V$ vardır.

f) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

g) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, .

h) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

Eğer $\mathrm{F}=\mathbb{R}$ (yada $\mathrm{F}=\mathbb{C}$)ise, V 'ye reel (yada kompleks) vektör uzayı, F ' nin elemanlarına skaler ve V ' nin elemanlarına vektör denir. $x+y$ işlemine vektör toplamı, αx işlemine skaler çarpım denir. Vektör uzayları ile ilgili bir çok sonuç reel ve kompleks uzayların her ikisi içinde geçerlidir. Bu nedenle eğer uzayın tipi reel veya kompleks şeklinde kesin olarak belirtilmemişse vektör uzayı terimini kullanırız. Vektör uzayı yerine bazen “lineer uzay” veya “doğrusal uzay” terimleri de kullanılır. Eğer V bir vektör uzayı , $x\in V$, $A,B\subset V$ ve $\beta\in\mathrm{F}$ ise

$$
\begin{aligned}
x+A &=\{x+a: a\in A\},\\
A+B &=\{a+b: a\in A, b\in B\}\\
\beta A &=\{\beta a: a\in A\}
\end{aligned}
$$

notasyonları kullanılır.

2.3.1 Vektör Alt Uzayı: V bir vektör uzayı ve $\varnothing\neq U\subset V$ olsun. Eğer U ' nun kendisi bir vektör uzayı (vektör toplamı ve skaler çarpım V deki ile aynı olmak üzere) ise U 'ya V 'nin lineer alt uzayı(veya lineer manifold, vektör alt uzayı)denir. Bu tanım her $\alpha,\beta\in\mathrm{F}$ ve $x,y\in U$ için,

$$\alpha x+\beta y\in U$$

olmak koşulu ile denktir.(Bu alt uzay testi olarak bilinir.)

2.3.2 Lineer Bağımlılık: V bir vektör uzay, $k\geq 1$ için $v=\{v_1,......,v_k\}\subset V$ sonlu bir küme ve $A\subset V$ boş kümeden farklı rastgele seçilen bir küme olsun.

a) Skalerlerin herhangi bir $\{\alpha_1,......,\alpha_k\}$ kümesi için , v ' nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu

$$\alpha_1 v_1+...+\alpha_k v_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i\in V$$

şeklinde bir vektördür.

b) $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$

gerektirmesi doğru ise , v 'ye "lineer bağımsız" denir. $i = 1, 2, ..., k$ için α_i 'lerden en az biri sıfırdan farklı iken eşitlik sağlanıyorsa , v 'ye lineer bağımlıdır denir.

c) Eğer A ' nın sonlu her alt kümesi lineer bağımsız ise A 'ya lineer bağımsızdır denir. A lineer bağımsız değil ise A 'ya lineer bağımlıdır denir.

2.3.3 Sıfır Uzayı: V, W vektör uzayları ve $T \in L(V,W)$ {V 'den W 'ye lineer dönüşümlerin kümesi} olsun.

a) T 'nin görüntü kümesi $\operatorname{Im} T = T(V)$ alt uzayıdır, T 'nin rankı $r(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$ sayısıdır.

b) T ' nin kerneli (çekirdeği) (T ' nin sıfır uzayı olarak ta söylenir.) $\ker T = \{x \in V : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$ alt uzayıdır ve T nin sıfırlılığı A sayısıdır. r(T) rankı ve n(T) sıfırlılığı ∞ değerine sahip olabilir.

c) r(T) sonlu ise T sonlu ranka sahiptir denir; yani bir sonlu ranka sahip lineer bir dönüşüm görüntü kümesi sonlu boyutlu olan bir lineer dönüşümdür. r(T) $=\infty$ ise , T sonsuz ranka sahiptir denir.

2.4 Normlu Uzaylar:

2.4.1 Norm ve Normlu Uzay: X , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümüdür. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in$ F için,

$a) \|x\| \geq 0;$

$b) \|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0;$

$c) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$

$d) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına **normlu vektöruzay** ya da sadece **normlu uzay** adı verilir ve $(X,\|\cdot\|)$ ile gösterilir. X bir normlu uzay ise $\|x\|=1$ eşitliğini sağlayan bir $x\in X$ vektörüne **birim vektör** adı verilir.

2.4.2 Denk Normlar: Bir X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|'$ normları tanımlı olsun. Eğer her $x\in X$ için

$$m\|x\|\le\|x\|'\le M\|x\|$$

olacak biçimde $m,M>0$ sayıları varsa $\|\cdot\|'$ normu $\|\cdot\|$ normuna denktir denir.

2.4.3 Zayıf Yakınsaklık ve Kuvvetli Yakınsaklık: X bir vektör uzay olsun. X içindeki bir $\{x_n\}$ dizisi, eğer her $f\in X$ için

$$f(x_n)\to f(x)$$

yani $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\to f(x)$ özelliğini sağlarsa $\{x_n\}$ dizisi $x\in X$ 'e zayıf yakınsar (yada zayıf olarak yakınsaktır) denir ve $x\in X$ elemanına $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti denir.

Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı için norm içinde

$$\{x_n\}\to x\Leftrightarrow\|x_n-x\|\to 0\left(n\to\infty\right)$$

ile verilen yakınsaklığı **kuvvetli yakınsaklık** olarak adlandırırız.

2.4.4 Mutlak Yakınsak Seri: X bir normlu vektör uzay ve $\{x_k\}$, X içinde bir dizi olsun. Her pozitif n tamsayısı için

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$$

e dizinin n inci kısmi toplamı adı verilir. Eğer X içinde $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ varsa $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ serisinin yakınsak olduğu söylenir ve kısaca $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k<\infty$ olarak gösterilir ve bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

olarak yazılır.

Eğer X içindeki bir $\{x_k\}$ dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ serisi □ içinde yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir.

2.4.5 Banach Uzayı: $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı olsun.Bu uzaydanalınan her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise, yani $(X,\|\cdot\|)$ uzayı tamsa, bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir.(Bir normlu vektör uzayı ,normdan indirgenen metriğe göre tam ise ,bir Banach uzayı olarak adlandırılır.)

Tanım 2.4.1 X bir Banach uzayı ve X^* da duali olsun.Bu durumda X^*'in duali $(X^*)^* = X^{**}$ olarak tanımlayabiliriz. Eğer $X^{**} = X$ ise bu durumda X ' e refleksivdir denir.

2.4.6 Sınırlılık: $(X,\|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve bir $f:$ □ $\to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu □ düzleminin tamamı üzerinde analitik ise f 'ye tam integral veya entire fonksiyon denir. Eğer $M>0$ sabiti ve her $z\in$ □ için $\|f(z)\|\le M$ ise f 'ye □ üzerinde sınırlıdır denir.

2.4.7 Süreklilik ve Düzgün Süreklilik: $(X,\|.\|_X)$ ve $(Y,\|.\|_Y)$ normlu vektör uzayları ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $x\in X$ olsun. Eğer her $y\in X$ için, her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$\|x-y\|_X<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_Y<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta>0$ varsa , f ' ye x noktasında süreklidir denir(yani δ sayısı hem $x\in X$ 'e hem de ε'a bağlı olabilir).

b) Eğer f fonksiyonu X 'in her noktasında sürekli ise , f (X üzerinde) süreklidir denir.

c) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in X$ için ,

$$\|x-y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde sadece ε 'a bağlı bir $\delta > 0$ varsa , f e (X üzerinde) düzgün süreklidir denir

2.4.8 Mutlak süreklilik: $f(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde, $[a,b]$ aralığının sonlu sayıdaki her $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ ayrık alt aralıkları için;

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa , f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

2.5 İç çarpım ve iç çarpım uzayları

2.5.1 İç çarpım: X bir reel vektör uzayları olsun. X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

a) $\langle x, x \rangle \geq 0;$

b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

c) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = |\alpha| \langle x, z \rangle + |\beta| \langle y, z \rangle;$

d) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$

2.5.2 İç çarpım uzayı: X bir kompleks veya reel vektör uzay olmak üzere , $\langle .,. \rangle$, X üzerinde bir iç çarpım ise $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı adı verilir.

2.5.3 Hilbert Uzayı: Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise, bu uzaya bir Hilbert uzayı adı verilir.

R^n de kare integrallenebilen fonksiyonların sınıfı bir Hilbert uzayıdır.

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f(x) : \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\,dx < \infty \right\}$$

$f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için $\langle f, g \rangle = \langle \overline{g, f} \rangle = \int f.\overline{g}dx$, $\langle f, f \rangle = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$L^2(\mathbb{R}^n)$, ayrılabilir tam bir vektör uzayıdır.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan H kümesine Hilbert uzayı denir.

1. $H, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.sabitlenmiş $g \in H$ için $f \to \langle f, g \rangle, H$ üzerinden lineerdir. $\langle f, g \rangle = \langle \overline{g, f} \rangle$

$\forall f \in H$ için $\langle f, f \rangle = \| f \|^2 \geq 0$

3. $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

4. $|\langle f, g \rangle| \leq \| f \| . \| g \|$ Schwartz eşitsizliği $\forall f, g \in H$ için $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

5. $d(f, g) = \| f - g \|$ metriğine göre H tam sayıdır.

6. H ayrılabilirdir.

Örnek 2.5.1 $(l^2, \mathbb{R})$ bir Hilbert uzayıdır.

2.5.4 Adjoint Operatörü: $T : H \to H$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. H üzerinde sınırlı T^* lineer dönüşümü

1. $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle$

2. $\| T \| = \| T^* \|$

3. $(T^*)^* = T$

özelliklerini sağlıyorsa $T^* : H \to H$ lineer T operatörünün Adjoint operatörüdür. $T^* = T$ ise T^* a T 'nin self Adjoint operatörü denir.

2.5.5 Kompakt Uzay: H bir Hilbert uzayı ve $X \subset H$ olsun. Eğer X 'deki her $\{ f_n \}$ dizisinin X 'teki bir elemana yakınsayan $\{ f_{n_k} \}$ gibi bir alt dizisi varsa X kompakttır denir.

Sonlu boyutlu Euclid uzayındaki kapalı ve sınırlı her küme kompacttır.

Sonsuz boyutlu bir uzayın bu özelliği yoktur.

2.6 Operatör ve Fonksiyonel:

2.6.1 Operatör: V ve W ,aynı F skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun.Bir $T:V \to W$ dönüşümü, her $\alpha, \beta \in$ F ve $x, y \in V$ için ,

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

özelliğini sağlarsa veya buna denk olarak her $\alpha \in$ F ve $x, y \in V$ için

$$T(x+y)=T(x)+T(y) \text{ ve } T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

özelliğini sağlarsa T 'ye bir **lineer dönüşüm** adı verilir.

H_1, H_2 iki Hilbert uzayı olmak üzere, eğer $\alpha, \beta \in$ skalerleri ve $\forall f, g \in H_1$ için ,

$T(\alpha f+\beta g)=\alpha T(f)+\beta T(g)$ koşulu sağlanıyorsa $T: H_1 \to H$ dönüşümüne Lineer operatör denir.

$\|T(f)\|_{H_2} \leq C\|f\|_{H_1}$ olacak şekilde $C>0$ varsa T ye sınırlı operatör denir.

Burada $\|T\|=\inf\left\{C:\|Tf\|_{H_2} \leq C\|f\|_{H_1}\right\}$ veya $\sup\limits_{\|f\|_{H_1}\neq 1} \dfrac{\|T_f\|_{H_2}}{\|f\|_{H_1}}=C$ dir.

Lineer dönüşüm aynı zamanda sürekli (bu nedenle sınırlı) ise bu durumda lineer dönüşüm yerine **lineer operatör** veya kısaca operatör ifadesi kullanılır.

2.6.2 Ters Operatör: X bir normlu vektör uzay ve X üzerinde sınırlı operatörlerin kümesi $B(X)$ olmak üzere ,$T \in B(X)$ için, $ST=I=TS$ olacak şekilde $S \in B(X)$ varsa T ye terslenebilirdir denir.Bu durumda S operatörüne T operatörünün tersi denir ve T^{-1} ile gösterilir. Eğer koşullar sağlanmıyorsa o zaman bu dönüşüme terslenemez denir.

2.6.3 Lineer Fonksiyonel: H Hilbert uzayından skalerler kümesine tanımlı l dönüşümüne bir fonksiyonel denir.

$\forall f \in H, \|lf\| \leq C\|f\|$ olacak şekilde $C>0$ varsa l ye H üzerinde sınırlı lineer fonksiyonel denir.

Ayrıca $T:V \to$ F lineer dönüşümüne de lineer fonksiyonel denir.(Soykan 2008)

2.7 Ölçüm, Lebesgue ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar:

2.7.1 Ölçü: U , X 'in alt kümelerinin bir sınıfı omak üzere , (X,U) ölçülebilir uzayında $\mu : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa μ fonksiyonuna U üzerinde bir ölçüdür denir.

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\forall A \in U$ için $\mu(A) \geq 0$

c) $\forall i \in \mathbb{N}$ için, $A_i \in U$ ve $i \neq j$ için $A_i \bigcap A_j = \emptyset,$ olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

dir.

(X,U,μ) üçlüsünede bir ölçüm uzayı denir.

2.7.2 Dış ölçü: X bir küme , $P(X)$, X 'in tüm alt kümelerinin kümesi (kuvvet kümesi) olmak üzere; $\mu^* : P(X) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) $\forall E \in p(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

c) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

d) $\forall n \in N$ için $A_n \in P(X)$ olduğunda

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir.

2.7.3 $\boldsymbol{\sigma}$ −cebir Bir X kümesinin alt kümelerinin bir U sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlarsa , U ya bir σ −cebir denir.

$a) X \in U$

$b) \forall S \in U$ için, $X \setminus S = S' \in U$;

$c) n = 1, 2, \ldots$ için $S_i \in U$ iken, $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_i \in U$

2.7.4 Borel fonksiyonu: $B(R^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon veya Borel fonksiyonu adı verilir.

2.7.5Kümenin Açık Örtüsü: Sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda$\left\{\alpha_j = \left(p_j, q_j\right), j \in J\right\}$ açık aralıklar ailesi verilsin. Eğer bu aralıkların tümünün birleşimi E kümesini kapsıyorsa ,yani $E \subset \bigcup_J \alpha_j$ ise $\left\{\alpha_j : j \in J\right\}$ ailesine E kümesinin açık örtüsü veya örtüsü denir. J sonlu ise, sonlu örtü denir.

$\left\{\alpha_j : j \in J\right\}$ açık aralıklarının uzunluklarının toplamı , $\sum_{j \in J}\left(q_j - p_j\right) > 0$ dır. E kümesinin bütün açık örtülerinin kümesi alttan sınırlı olup infimumu,yani en büyük alt sınırı $\inf \sum_{j \in J}\left(q_j - p_j\right)$ vardır. Bir tek E kümesine bağlı olan en büyük alt sınıra , E ' nin dış öşçüsü denir. $m^* E$ ile gösterilir. Bu tanımdan $\varepsilon > 0$ için E ' nin öyle bir $\left\{\alpha_j : j \in J\right\}$ örtüsü vardır ki, $m^* E \leq \sum_{j \in J}\left(q_j - p_j\right) \leq m^* E + \varepsilon$ dır.

$S = [0,1]$ kapalı aralığının uzunluğu ile S içindeki E^c tümleyeninin dış ölçüsünün farkına E ' nin iç ölçüsü denir. $m_* E = 1 - m^* E^c$ ile gösterilir.

Herhangi bir kümenin iç ve dış ölçüleri negatif olamaz.

İç ölçüsü dış ölçüden büyük olamaz.

$E_1 \subset E$ ise $m_* E_1 \leq m_* E$ ve $m^* E_1 \leq m^* E$ dir.

Tanım 2.7.1Eğer E kümesinin iç ve dış ölçüleri eşit ise , E ' ye Lebesgue anlamında ölçülebilir küme denir. $m_*(E) = m^*(E) = m(E)$ ile gösterilir.

E ölçülebilir ise , E^c ölçülebilirdir. Yani

$m(E) = m_*(E) = 1 - m^*(E)^c$ ve

$m_*\left(E^c\right) = 1 - m^*(E)$ olduğundan $m(E) = m^*(E) = 1 - m_*\left(E^c\right) \Rightarrow m^*\left(E^c\right) = m_*\left(E^c\right)$ dir.

Sonlu veya sayılabilir sonsuz elemanlı kümeler ölçülebilirdir ve ölçümü sıfırdır.

$[0,1]$ aralığındaki irrasyonel sayıların kümesi ölçülebilir olup ölçümü 1 dir.

Açık bir küme ölçülebilirdir.

Tanım 2.7.2 Bir E kümesinin dış ölçümü E 'yi kapsayan bütün açık kümeler için $m^*(E) = \inf L(O)$ ile tanımlıdır.

Bir E kümesinin iç ölçümü E 'nin kapsadığı bütün kapalı □ kümeleri için $m_*(E) = \sup L(C)$ ile tanımlıdır.

Bütün T kümeleri için $m^*(T) = m^*(T_n(E)) + m^*(T_n(E^c))$ ise E 'ye ölçülebilirdir denir. $m(E) = m^*(E)$ ye E 'nin ölçümü denir. E 'nin $m^*E = m^*(E)$ dış ölçümüne Lebesgue ölçümü denir.

Eğer I bir aralık ise $m(I) = L(I)$

Eğer O bir açık küme ise $m(O) = L(O)$

Eğer □ bir kapalı küme ise $m(C) = L(C)$ dir.

Açık veya kapalı kümelerin sayılabilir birleşimine veya kesimine Borel kümelerinin sınıfı denir.

Örnek 2.7.1 Reel sayıların $a_1, a_2, a_3, ...$ elemanlarından oluşan bir E kümesi için, bu noktaları sırasıyla bulunduran açık kümelerin (aralıkların) uzunlukları $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}, ...$ ise $m^*(E) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + ... = \varepsilon$, ε yeterince küçük olduğundan $z = 0$ ve $m^*(E) = 0$ olur.(Harman 2012)

2.7.6. Lebesgue ölçümü: □ içinde bir $U_L \sigma$ -cebiri ve U_L üzerinde bir μ_L ölçümü vardır öyle ki, herhangi sonlu $I = [a,b]$ aralığı için, $I \in U_L$ ve $\mu_L(I) = l(I)$ dır. Bu uzay içinde ölçümü 0 olan kümeler kesinlikle aşağıdaki özellikleri sağlayan A kümeleridir.

Herhangi $\varepsilon > 0$ için $I_j \subset$ □ , $j = 1, 2, ...,$ aralıklarının bir dizisi vardır öyle ki ,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) < \varepsilon$$

dır. Bu ölçüm Lebesgue ölçümü adını alır ve U_L içindeki kümelere Lebesgue ölçülebilirdir denir.(Soykan 2008)

2.7.7 Lebesgue ölçülebilir küme: $\forall A \subset \mathbb{R}$ kümesi için;

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A \bigcap E\right) + \mu^*\left(A \bigcap E^c\right)$$

eşitliği gerçekleşiyorsa $E \subset \mathbb{R}$ ve $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ olmak üzere E kümesine (Lebesgue)ölçülebilir küme ya da μ^* 'ye göre ölçülebilir küme denir.

Aşağıdaki özelliklere dikkat etmekte fayda vardır;

a)Kümenin ölçülebilirliğini göstermek için

$$\mu^*(A) \leq \mu^*\left(A \bigcap E\right) + \mu^*\left(A \bigcap E'\right)$$

koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir.

b) $\mu*(E) = 0$ ise, E kümesi ölçülebilirdir.

c) E_1 ve E_2 ölçülebilir ise, $E_1 \bigcup E_2$ kümesi de ölçülebilirdir.

d) E_1 ve E_2 ölçülebilir ise, $E_1 \bigcap E_2$ kümesi de ölçülebilirdir.

e) $A \subset \mathbb{R}$ herhangi bir küme olmak üzere $E_1, E_2, ..., E_n$ ölçülebilir kümelerin sonlu bir dizisi için

$$\mu^*\left[A \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu^*\left(A \bigcap E_i\right)$$

dir.

f) E kümesi ölçülebilirse E^c kümesi de ölçülebilirdir.

g) $\forall a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) ölçülebilirdir.

Tanım 2.9.2 f ,ölçülebilir bir E kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere , $\forall k \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) > k\}$ kümesi ölçülebilir ise, f ' e ölçülebilir fonksiyon denir.

$E = [a,b]$ olmak üzere $f(x) = x \; : x \in E$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

Bir A kümesi için

$$\chi_A = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. χ_A fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul A 'nın ölçülebilir olmasıdır.(Balcı 2009)

Ayrıca f ,kapalı E kümesinde sürekli ise ölçülebilirdir.

Tanım 3.1.2 E ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ bu küme üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $c \in \mathbb{R}$ sayısı için $f(x) > c$ olan $x \in E$ noktalarının kümesi $\left(E\left[f(x) > c\right]\right)$ ölçülebilir ise $f(x)$ 'e Lebesgue ölçülebilir ya da sadece ölçülebilir fonksiyon denir. Bu tanımdan ve E kümesinin ölçülebilir olmasından faydalanarak, $\left(E\left[f(x) < c\right]\right)$, $\left(E\left[f(x) \le c\right]\right), \left(E\left[f(x) \ge c\right]\right)$ kümelerinden herhangi birinin her $c \in \mathbb{R}$ sayısı için ölçülebilir olmasının $\left(E\left[f(x) > c\right]\right)$ ile eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.(Murray 1990)

2.8. Riemann İntegrali: a,b reel sayılar ve $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir reel fonksiyon olsun. $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$ olmak üzere sonlu bir $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesine $[a,b]$ nin bir parçalanışı denir. Bu P parçalanışı, her $i \le n$ için $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

ve

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

olmak üzere sırasıyla üst ve alt Riemann toplamları adı verilen

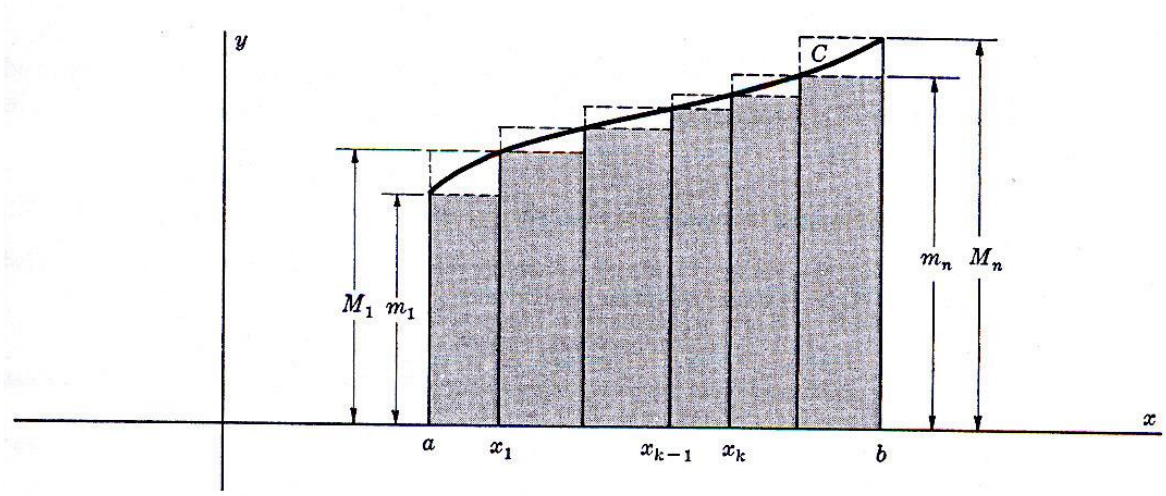
$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

ve

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

toplamlarını verir.

Üst Riemann toplamları dizisi azalan, alt Riemann toplamları dizisi ise artan olup bunların $\|p\| \to 0$ veya $n \to \infty$ için limitleri sırasıyla $\overline{\int_a^b} f$ ve $\underline{\int_a^b} f$ ile gösterilir. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ olduğunda , f fonksiyonu $[a,b]$'da Riemann integrallenebilirdir denir ve bu genel olarak $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.



Şekil 2.8.1: Riemann integralinin Geometrik yorumu

Tanım 2.8.1 f ,$\left[a,b\right]$ da tanımlı bir fonksiyon olsun. $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ noktalarından oluşan $p=\{x_0,x_1,...x_n\}$ parçalanışı için,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]\leq M$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa, f 'e $\left[a,b\right]$ da değişimi veya varyasyonu sınırlı fonksiyon denir.

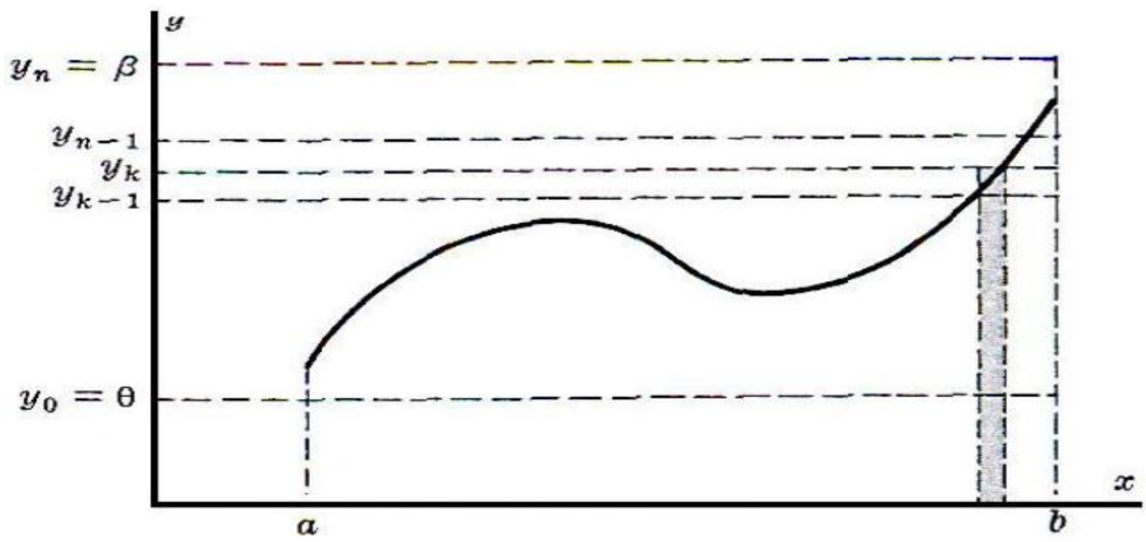
$\forall x_i,x_j\in\left[a,b\right]$ için,

$$\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_j\right)\right|\leq L\left|x_i-x_j\right|$$

olacak şekilde L sabiti varsa f Lipschitz koşulunu sağlar denir. Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyon varyasyonu sınırlıdır.

2.9. Lebesgue İntegrali: $f\left(x\right)$,$\left[a,b\right]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun.

Farz edelim ki $\alpha<f\left(x\right)<\beta$ olan α,β sayıları var. (α , β) aralığında $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ değerlerini $\alpha=y_0<y_1<y_2<...<y_{n-1}<y_n=\beta$ olacak şekilde seçip aralığı n alt aralığa bölelim.Bu noktalar şekildede görüldüğü gibi geometrik olarak y eksenindeki noktalara karşılık gelmektedir.



Şekil 2.9.1:Lebesgue İntegralinin Geometrik Yorumu

$E_k\left(k=1,2,...,n\right), y_{k-1} \leq f\left(x\right) < y_k$ olan tüm x 'lerin kümesi yani;

$E_k = \left\{x : y_{k-1} \leq f\left(x\right) < y_k\right\}, k=1,2,...,n$ olsun.

$f\left(x\right)$ ölçülebilir olduğundan bu kümelerde ölçülebilirdir ve kolayca görülebileceği gibi ayrıktır.

$S=\sum_{k=1}^{n} y_k.\mu\left(E_k\right)$ ve $s=\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}.\mu\left(E_k\right)$ şeklinde tanımlanan üst ve alt toplamları göz önünde bulunduralım. Parçalanmayı çeşitlendirerek S ve s'nin farklı değerlerinin kümesini elde ederiz.Mümkün olan tüm parçalanmalar için $I=\inf S$ ve $J=\sup s$ olsun.Her zaman var olan bu değerler $f(x)$ fonksiyonunun $\left[a,b\right]$ aralığındaki alt ve üst Lebesgue integralleri olarak adlandırılır ve $I=\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx, J=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ ile gösterilir.

Eğer $I=J$ ise $f(x)$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir denir ve bu değer $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ile gösterilir. S azalan s artan olup bunların $\|p\|=\max\left\{\Delta y_n\right\}\rightarrow 0$ veya $n\rightarrow\infty$ iken limit değerleri sırasıyla I ve J dir.

Tanım 2.9.1Eğer E üzerinde f 'e düzgün yakınsayan integrallenebilir basit fonksiyonların bir $\left(f_n\right)$ dizisi varsa ölçülebilir f fonksiyonuna E kümesi üzerinden integrallenebilir veya toplanabilir denir.

$\lim_{n\rightarrow\infty}\int_{E} f_n\left(x\right)d\mu=\int_{E} f\left(x\right)d\mu$ limitine f in E üzerinden Lebesgue integrali denir.

Tanım2.9.3 $S=\sum_{i=1}^{n-1} y : mE\left(y_i \leq f \leq y_{i+1}\right)$ Lebesgue toplamının $\alpha\rightarrow 0$ için limitine f in E kümesindeki Lebesgue anlamındaki integrali denir.

$\left(L\right)\int_{E} f\left(x\right)dx$ veya $\int_{E} f\left(x\right)dx$ ile gösterilir.

Burada f ölçülebilir E kümesi üzerinde tanımlı sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olup , $m\leq f\left(x\right)\leq M$, oy ekseni üzerindeki $\left[m,M\right]$ kapalı aralığı $\left\{y_i\right\}$, $İ=0,1,2,...,n$ ayırım noktaları yardımıyla parçalara bölünür, $m=y_0<y_1<...<y_n=M, \alpha=\max\left|y_{i+1}-y_i\right|$ iken , $S_\alpha=\sum_{i=0}^{n-1} y_i mE\left(y_i \leq f \leq y_{i+1}\right)$ toplamı Lebesgue anlamında integral toplamıdır.

$mE\left(y_i \le f \le y_{i+1}\right)$ değeri , E kümesinin $y_i \le f \le y_{i+1}$ eşitsizliğini sağlayan kısmının ölçümüdür. E , $y_i \le f \le y_{i+1}$ olan X noktalarının kümesidir.

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i mE\left(y_i \le f \le y_{i+1}\right) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i\left[mE\left(y_{i+1} > f\right) - mE\left(y_i > f\right)\right]$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i\left[g\left(y_{i+1}\right) - g\left(y_i\right)\right] = \int\limits_m^M y\,dg\left(y\right)$ dir.

2. Eğer mE ise $\int\limits_E f\left(x\right)dx = 0$ dır.

3. Eğer E kümesinde tanımlanmış f ve g fonksiyonları için $m\left(f \ne g\right) = 0$ ise $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_E g\,dx$ dir.

4. $f\left(x\right)$ fonksiyon $\left[a,b\right]$ da Riemann integrallenebilir ise Lebesgue anlamında integrallenebilir.

$$\left(L\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \left(R\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right)$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n\left(x\right)dx = \int\limits_a^b\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right)\right)dx = \int\limits_E f\left(x\right)dx$ dir.

6. $E = E_1 \bigcup E_2$ ve $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$ ise $\int\limits_E f\left(x\right)dx = \int\limits_{E_1} f\left(x\right)dx + \int\limits_{E_2} f\left(x\right)dx$ dir.

7. $f\left(x\right)$ sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon ise

$a)\int\limits_E f\left(x\right)dx = C\int\limits_E f\left(x\right)$

$b)\int\limits_E C\,dx = C.m\left(E\right)$

$c)\,m\left(E\right) = 0$ ise $\int\limits_E f\left(x\right)dx = 0$ dır.

$d)$ Eğer $A \le f\left(x\right) \le B$ ise $A.m\left(E\right) \le \int\limits_E f\left(x\right)dx \le B.m\left(E\right)$ dır.

$e)$ Eğer $E = E_1 \bigcup E_2$ ve $E_1 \bigcap E_2 \ne \varnothing$ ise

$\int\limits_{E} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx, E$ ‘ler

ikişer ikişer ayrık ve $E = \bigcup\limits_{i} E_i \Rightarrow \int\limits_{E} f(x)\,dx = \sum\limits_{i} \int\limits_{E_i} f(x)dx$ dır.

$f) \int\limits_{E} \left[f(x) + g(x) \right] dx$ ise $, \int\limits_{E} f(x)dx + \int\limits_{E} g(x)dx$ dir.

$g)$ Eğer f ve g sınırlı ve ölçülebilir ise $, \int\limits_{E} f(x).g(x)\,dx < \infty$ dir.

$h) f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_{E} f(x)dx \leq \int\limits_{E} g(x)\,dx$ dir.

$k) f, E$ de sınırlı va ölçülebilir ise, $\left| \int\limits_{E} f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_{E} \left| f(x) \right| dx$ dir.

$l) E$ de h.h.h(hemen hemen her) yerde $f(x) = g(x)$ ise $\int\limits_{\mathrm{E}} f(x) = \int\limits_{E} g(x)dx$ dir.

Örnek 2.9.1 C bir sabit olmak üzere $\int\limits_{a}^{b} C = C(b-a)$

$$f(x) = \begin{cases} -1; 0 < x < 3 \\ 4; 3 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{0}^{5} f(x)dx = \int\limits_{0}^{3} -1dx + \int\limits_{3}^{5} 4dx = -3 + 8 = 5$$

Tanım2.9.4 $f(x) \geq 0$ sınırsız ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere , p bir doğal sayı ise

$$\left[f(x) \right]_p = \begin{cases} f(x); f(x) \leq p & \text{koşulunu sağlayan bütün } x \in E \text{ ler için} \\ p \quad ; f(x) > p & \text{koşulunu sağlayan bütün } x \in E \text{ ler için} \end{cases}$$

şeklindeki $\left[f(x) \right]_p$ fonksiyonu her p için sınırlı ve ölçülebilir olacağından Lebesgue integrallenebilir ve $f(x)$ in E üzerinden Lebesgue integrali $\int\limits_{E} f(x)dx = \lim\limits_{p \to \infty} \int\limits_{E} \left[f(x) \right]_p dx$

şeklinde tanımlanabilir. Bu limit negatif olmayan bir sayı veya sonsuz olabilir, sonlu olan bu limite ise $f(x)$ in E üzerinden Lebesgue integrali denir.

Eğer $f(x) \leq 0$ ise $f(x)$ in Lebesgue integrali, $\int\limits_{E} f(x)dx = -\int\limits_{E} \left| f(x) \right| dx$ olarak tanımlanabilir.

Genel olarak , $f^{+}(x)=\begin{cases} f(x); f(x)\geq 0, \forall x\in E \text{ için} \\ 0 \quad ; f(x)<0, \forall x\in E \text{ için} \end{cases}$

$$f^{-}(x)=\begin{cases} -f(x); f(x)<0, \forall x\in E \text{ için} \\ 0 \quad ; f(x)\geq 0, \forall x\in E \text{ için} \end{cases}$$

ise f^{+} ve f^{-} birlikte negatif değildir. $f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$ olacağından , $\int_E f(x)dx=\int_E f^{+}(x)dx-\int_E f^{-}(x)dx$ olur.

Eğer $f(x)\geq 0$ ise , (a,∞) sınırsız aralığında Lebesgue integrali , $\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)dx$ ile tanımlıdır. $f(x)$ keyfi işaretli ise $\int_a^{\infty} f(x)dx=\int_a^{\infty} f^{+}(x)-\int_a^{\infty} f^{-}(x)dx$ dir.

$f(x), E$ üzerinde integrallenebilirdir. $\Leftrightarrow$ $f(x)$ mutlak integrallenebilirdir. E nin sınırlılığına veya sınırsızlığına bakmaksızın $\int_E \left| f(x)dx\right| \leq \int_E \left| f(x)\right| dx$ dir.

Örnek 2.9.2 $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralini hesaplarken,

$$\left[f(x)\right]_p=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ ; f(x)\leq p, \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\leq p \Rightarrow x>\frac{1}{p^3} \\ p \quad ; x<\frac{1}{p^3} \end{cases}$$

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_0^{\frac{1}{p^3}} pdx+\int_{\frac{1}{p^3}}^{8} x^{-\frac{1}{3}}=p\left(\frac{1}{p^3}-0\right)+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\frac{1}{p^3}}^{8}$$

$$\frac{1}{p^2}+6-\frac{3}{2}p^{-2}\Rightarrow \lim_{p\to\infty}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{3}}dx=6=\square\left(\int_0^{8} x^{-\frac{1}{3}}dx\right)$$

Örnek 2.9.3 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\in L^1[0,8]$ fakat $f(x)\notin L^3[0,8]$

2.9.1 Fubini Teoremi: E ve $F, \mathbb{R}$ içinde aralık olsunlar ve k: $E \times F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $L^1(E \times F)$'ye ait olsun. O zaman

a) Hemen hemen her(h.h.h) $s \in E$ için $t \to k(s,t), L^1(F)$'nin bir elemanını tanımlar.

b) $s \to \int_F k(s,t)dt, L^1(E)$'nin bir elemanını tanımlar.

c) Hemen hemen her $t \in F$ için $s \to k(s,t), L^1(E)$'nin bir elemanını tanımlar.

d) $t \to \int_E k(s,t)ds, L^1(F)$'nin bir elemanını tanımlar.

e) $\int_E \left\{ \int_F k(s,t)dt \right\} ds = \int_F \left\{ \int_E k(s,t)ds \right\} dt = \int_{E\times F} k(s,t)dsdt.$

Fubini teoreminin temel pratik kullanılışı (e) parçasıdır.

2.9.2 Fatou Lemması: (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n)de Ω de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ İntegrallenebilirdir ve

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

dır.

2.9.3 Beppo-Levi Teoremi: (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun.Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ serisi her X için yakınsak ve $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k|$ sonlu ise

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

dır.

2.9.4 Levi Teoremi: $\{f_n\}$,ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, öyleki h.h.h $x \in \Omega$ için $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \ldots$ ve $\int_\Omega f_1(x)dx > -\infty$ olsun. Bu durumda h.h.h $x \in \Omega$ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limiti vardır, f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f\left(x\right)dx$$

olur.

2.9.5 Monoton Yakınsaklık Teoremi: $\left(X, U, \mu\right)$ bir ölçüm uzayı ve $\left(f_n\right)_1^\infty$ negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer genel terimi f_n olan monoton artan dizi f fonksiyonuna yakınsar yani her X için $f_n \to f$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(X)d\mu = \int_X fd\mu$$

dır.

2.9.6 Lebesgue Yakınsaklık Teoremi: (X, A, μ) bir ölçü uzayı, $g : X \to \left[0, +\infty\right]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2.....$ de X üzerinde $A-$ ölçülebilir $\left[-\infty, +\infty\right]-$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer hemen hemen her x için

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

b) $\forall n \in N$ için $\left|f_n(x)\right| \le g(x)$

ise f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim \int_x f_n d\mu = \int_x f d\mu$$

dir.

2.9.7 L^p de Yakınsaklık: f_n ve f fonksiyonları μ uzayının elemanları olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna p-inci mertebeden ortalama yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \ge n_0$ için $\left\|f_n - f\right\| < \varepsilon$ dir.Bu yakınsaklık çeşidine L^p ’de yakınsaklık denir. Burada $p \ge 1$ olup

$$\left\|f_n - f\right\|_p = \left(\int_x \left|f_n - f\right|^p d\mu\right)^{1/p}$$

dir. Buna göre (f_n) dizisi f fonksiyonuna L^p de yakınsaktır $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|f_n - f\right\|_p = 0$

2.9.8 Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi: (X, A, μ) bir ölçüm uzayı olsun. $\{f_n\}, X$ üzerinde (kompleks)ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun ve her $x \in X$ için

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

tanımlı olsun. Eğer $|f_n(x)| \leq g(x)$ $(n = 1, 2, 3, ...; x \in X)$

olacak şekilde bir $g \in L^1(X)$ fonksiyonu varsa o zaman $f \in L^1(X)$ dir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

dır ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dır.

2.9.9 Ölçüsel Yakınsaklık: (X, A, μ) bir ölçü uzayı , f_n ve f ’ler X üzerinde tanımlı , reel değerli ve A –ölçülebilir fonksiyonlar olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna ölçüsel yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon|\right\}\right) = 0$$

dır.

Bu tanıma göre verilen bir dizinin yakınsaklığı tanımlanan ölçüye bağlıdır. Ölçü değişince yakınsaklık bozulabilir.Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna μ ölçüsüne göre yakınsak ise bu, $(f_n) \xrightarrow{\mu} f$ biçiminde gösterilir.

2.9.10 Riesz-Fisher Teoremi: (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < +\infty$ olsun. $L_p(X, A, \mu)$ uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

normu altında tamdır.(Balcı 2009)

2.9.11 Lebesgue İntegrali ile Riemann İntegrali Arasındaki İlişki

f , bir (a,b) da Riemann integrallenebilir ise bu aralıkta Lebesgue anlamında da integrallenebilir, bunun tersi genelde doğru değildir.

Riemann integrallenebilir fonksiyonlar, oldukça katı olan süreklilik koşulu altında tanımlı iken Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar, süreklilik yerine ölçülebilirlik koşulu altında tanımlıdır. Lebesgue integrali daha geniş bir fonksiyon sınıfına uygulanabilir.

Riemann integrali sadece sınırlı fonksiyonlar için tanımlı iken Lebesgue integrali ,hem sınırlı hem de sınırsız fonksiyonlar için tanımlıdır.

Lebesgue yakınsaklık teoreminden integral işareti altında limit alma, ölçülebilir fonksiyonlar yardımıyla mümkün iken, Riemann integralinde bu durum sürekliliği bozabilir.

Eğer $f,[a,b]$ da Riemann integrallenebilir ve bu iki integralin değeri aynıdır.

$(R)\int_a^b f(x)dx = \left(L\int_a^b f(x)\,dx \right) = \int_E fd\mu^*$ dir. Burada $E=[a,b]$ ve μ^* Lebesgue ölçüsüdür.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \infty, (-\infty,+\infty)$ da Lebesgue integrali ıraksaktır.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$, f in improper(has olmayan) Riemann integrali vardır.

Riemann integrali ölçülebilir fonksiyonlar için kullanılamaz. Örneğin İrrasyonel noktalarda sıfır, rasyonel noktalarda bir olan Dirichlet fonksiyonu ölçülebilirdir. Bu fonksiyonun Riemann anlamında integrali yoktur.Yani Riemann integrali ölçülebilir fonksiyonlar için pek de kullanışlı değildir.Bunun nedeni Riemann integralinin tanımından kaynaklanmaktadır.Bir f fonksiyonunun Riemann integralinin olması için f ’nin tanım aralığında sürekli olması ya da süreksiz olduğu noktalar kümesinin sayılabilir sonsuzlukta elemana sahip olması gerekir.Yani f ,integrallenme bölgesinde sınırlı salınımlı olmalıdır.Sınırlı fonksiyonlarında Riemann anlamında integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart süreksiz olduğu noktaların kümesinin ölçümünün sıfır olmasıdır. Lebesgue integralinde ise Riemann integralinin tersine X noktalarının X ekseni üzerindeki yakınlıkları ile değil fonksiyonların değerinin bu noktalardaki yakınlıkları ile ilgilidir. Ayrıca Lebesgue integrali herhangi bir ölçüm uzayında tanımlanabilir ama Riemann integrali için bu geçerli değildir.

Aşağıdaki özelliklere dikkat etmekte de fayda vardır;

a) f Riemann anlamında integrallenebilir ancak ve ancak f , $[a,b]$ kapalı aralığının hemen hemen her noktasında süreklidir.

b) f Riemann anlamında integrallenebiliyorsa Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir ve her iki integral birbirine eşittir.

2.10 Stieltjes integrali

Stieltjes integrali, Riemann integralinin genişletilmesidir. $f(x)$ ve $\alpha(x)$, $[a,b]$ da tanımlı sınırlı fonksiyonlar ve $p=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ de $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olsun.

$a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$ için

$$\sigma(x_i,\zeta_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\left[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right]:\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$$

toplamına Stieltjes toplamı denir. Eğer keyfi seçilen $\varepsilon>0$, her p parçalanışı ve ζ_i noktaları için $\mu(p)<\delta$ iken $|I-\delta|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulunabiliyorsa $\mu(p)\to 0$ iken $\sigma(x_i,\zeta_i)$ ile verilen toplamın limiti I dir denir.

Tanım2.10.1 Eğer $\mu(p)\to 0$ iken $\sigma(x_i,\zeta_i)$ toplamının sonlu bir I limiti varsa , $f(x)$ fonksiyonuna , $\alpha(x)$ fonksiyonuna göre $[a,b]$ da Stieltjes anlamında integrallenebilirdir denir.

$$I=\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

ile gösterilir. $\alpha(x)=x+c$ (c sabit) alınarak Riemann toplamı ve integrali elde edilir. $\alpha(x)$ monoton artandır.

$$\Delta\alpha(x_i)=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})>0:i=1,2,3,...,n$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha(x),s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i;M_i=\underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{Sup}\{f(x)\},m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$$

Her bir p parçalanışı için $s(p)\le\sigma(x_i,\zeta_i)\le S(p)$

Stieltjes anlamında s alt toplar dizisi artan, S üst toplamlar dizisi azalandır.
$s(p)\le I_*\le I^*\le S(p)$ olup $I_*=\sup_p s(p), I^*=\inf_p S(p), \lim_{\mu\to 0} s(p)=I_*,\ \lim_{\mu(p)\to 0} S(p)=I^*$

dır.

Teorem 2.10.1 $f,[a,b]$ da Riemann anlamında integrallenebilir ve $\alpha(x)$ Lipschitz koşulunu sağlıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $\alpha(x)$ fonksiyonuna göre Stieltjes anlamında integrallenebilirdir.

2.11 Bazı önemli eşitsizlikler:

2.11.1 Young Eşitsizliği: $\varphi:[0,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$,sürekli, monoton artan, $\varphi(0)=0$ ve $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=+\infty$, özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1}=\psi$ olsun. $\forall x\in \mathbb{R}$ için

$$\varnothing(x)=\int_0^x \varphi(u)\,du, \qquad \psi(x)=\int_0^x \psi(u)du$$

denirse, her $a,b\in[0,+\infty)$ için

$$a.b\leq \varnothing(a)+\psi(b)$$

dir. Eşitlik sadece $b=\varphi(a)$ olması halinde geçerlidir.

$\varphi(u)=u^{p-1}$ alındığında, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$a.b\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

olur. Bu da Young Eşitsizliği olarak bilinir.

2.11.2 Cauchy Eşitsizliği: $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ reel veya kompleks sayılar olmak üzere ,

$$\sum_{i=1}^{n}|X_iY_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n}|X_iY_i|\leq\|X\|_2.\|Y\|_2$$

dır.

2.11.3 Cauchy-Schwartz Eşitsizliği: X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun.

O zaman

$$\left|\left(x, y\right)\right|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

dir. Eşitlik sağlanır ancak ve ancak bazı $\alpha \in F$ için $y - \alpha x = 0$ dır. (Balcı 2009)

3.KLASİK LEBESGUE UZAYLARI

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L^p = \left\{ f \in M(X, A) : |f|^p \in L(X, A, \mu) \right\}$$

kümesine p .kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

Yukarıdaki tanıma göre $L^1 = L$ dir,zira f 'nin integrallenebilir olması ile $|f|$'nin integrallenebilir olması aynı şeydir. $f \in L^p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in L^p$ dir,çünkü $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha|^p . |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilir.Ayrıca $f, g \in L^p$ ise,

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2.\text{maks}\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

olacağından $|f+g|^p$ intregrallenebilir ve dolayısıyla $f + g \in L^p$ olur.Şu halde L^p kümesi bir vektör uzayıdır.

L^p de $p \geq 1$ olmak üzere , norm

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlıdır.

3.1 $L_p(0,\infty)$ Lebesgue Uzayı:

$$L_p(0,\infty) = \{ f : (0,\infty) \to \mathbb{R} \, ; \, f \text{ ölçülebilir}, \int_0^\infty |f(x)|^p \, dx < \infty \}$$

ile tanımlıdır.

3.2 $L_p(0,\infty)$ Lebesgue uzayının temel özellikleri:

a) $L_p(0,\infty)$ Tam bir normlu uzaydır(Banach Uzayı).Burada norm

$$\|f\|_{L_p(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlıdır.

b) $L_p(0,\infty)$ uzayının duali $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olmak üzere $L_{p'}(0,\infty)$ uzayıdır.

c) $L_p(0,\infty)$ uzayı reflexivdir(dualinin duali kendisidir).

d) $L_p(0,\infty)$ uzayı bir vektör uzayıdır.

e) Bu uzaydaki düzgün fonksiyonlar $\left(C^\infty(0,\infty)\right)$ her yerde yoğundur.

$\forall f \in L_{p(0,\infty)}$ için $\exists \{\varphi_j\} \subset C^\infty(0,\infty)$ vardır öyleki $j \to \infty$ için, $\|f-\varphi_j\|_{L_p(0,\infty)} \to 0$

dır.

3.3 Hölder Eşitsizliği: $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. $f \in L^p, g \in L^q$ ise $f.g \in L^1$ .Ve

$$\|f.g\|_1 \le \|f\|_p . \|g\|_q$$

dir.

3.4 Minkowski Eşitsizliği: Eğer $p \ge 1$, $f, g \in L^p$ ise $f+g \in L^p$ dir ve

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_q$$

dir. (Balcı 2009)

3.5 İntegraller için Minkowski eşitsizliği:

$$\left\| \int_c^d K(x,y)\,dy \right\|_{L_r(a,b)} \le \int_c^d \|K(.,y)\|_{L_r(a,b)} \, dy \text{ dir.}$$

Yani,

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d K(x,y)\,dy\right)^r dx\right)^{1/r} \leq \int_c^d\left(\int_a^b K^r(x,y)\,dx\right)^{1/r} dy$$

r=1 için eşitlik Fubini teoremine dönüşür.

3.6 Ağırlıklı Lebesgue Uzayı: $0 < p \leq \infty$ ve $w,(a,b)$ üzerinde ağırlıklı fonksiyon olmak üzere $L^p(a,b;w) = L^p(w)$ ile gösterilen ağırlıklı Lebesgue uzayı, (a,b) üzerinde ölçülebilir bütün $f = f(x)$ fonksiyonlarından oluşur. Öyle ki,

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} < \infty; \qquad 0 < p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty,w} := ess \sup_{a<x<b} |f(x)| < \infty$$

dır.(Kufner 2007)

3.7 $L^p(w)'$ **nin Duali:** $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^p(w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayının duali iç çarpım ile tanımlıdır. Öyle ki;

$$< g, f >= \int_a^b g(x) f(x)dx : f \in L^p(w)$$

dir. $q = \dfrac{p}{p-1}, \hat{w} = w^{1-q}$ olmak üzere $(L^p(w))^* = L^{q'}(w^{1-q})$ dir.

$$|< g, f >| \leq \int_a^b |g(x)| w^{-1/p}(x) |f(w)| w^{1/p}(x)dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |g(x)|^q w^{-q/p}(x)dx\right)^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} = \|f\|_{p,w} \cdot \|g\|_{q,w^{1-q}}$$

dir. (Hölder Eşitsizliğinden)

H Hardy operatörü, $\tilde{H}$ ise eşlenik Hardy operatörü olmak üzere ,
$p \to q', q \to p', v \to w^{1-q'}, w \to v^{1-p'}$ alınarak

$H : L^p(v) \to L^q(w); \qquad 1 < p, q < \infty$
$(H)^* = \tilde{H} : L^{q'}(w^{1-q'}) \to L^{p'}(v^{1-p'})$

bulunur.Fubini teoreminden ise;

$$< g, Hf >= \int_a^b g(x) \int_a^x f(t)dtdx = \int_a^b f(t) \int_t^b g(x)dxdt = < f, \tilde{H}g >$$

elde edilir. (Kufner 2007)

4. L^p UZAYINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

4.1 Kesikli Hardy Operatörü

$\left(a_n\right)$ negatif olmayan terimli bir dizi ve $p>1$ olmak üzere ,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N}a_n^p$$

Klasik Hardy eşitsizliğinin kesikli formu olarak bilinir. Burada $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = H\left(a_n\right)$ kesikli Hardy operatörüdür ve ağırlıklı hali ise ,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^q \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}w_n a_n^p\right)^{1/p}$$

dir.

4.2 Sürekli Hardy Operatörü

$\left(a,b\right)$ üzerinde f fonksiyonları için tanımlı H operatörü $Hf(x)=\int_a^x f(t)dt$ ile tanımlı olup

bu integral veya Hardy operatörü olarak bilinir. Bunun dual operatörü $H^* f(x)=\int_x^b f(t)dt$ dir.

$H: L_w^p\left(a,b\right)\to L_v^q\left(a,b\right)$ süreklidir ve $\left\|Hf\right\|_{q,v} \le C_{p,q}\left\|f\right\|_{p,w}$ ve $\left\|g\right\|_{q,v} \le C\left\|g'\right\|_{p,w}$ dir.

$K\left(x,t\right),\left(a,b\right)\times\left(a,b\right)$ üzerinde tanımlanmış bir kernel olmak üzere

$\left(Kf\right)(x)=\int_a^x K\left(x,t\right) f(t)dt$ şeklindeki operatöre Voltera operatörü denir.Hardy operatörü bu operatörün özel halidir. (Kufner 2007)

4.3 Hardy Eşitsizliğinin Diferansiyel Formu

$K \in \mathbb{N}$ için $K-1$ inci mertebeden mutlak sürekli bütün fonksiyonların kümesi AC^{K-1} olsun.

Her $g \in AC^0$ için $g(a)=0$ veya $g(b)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan g fonksiyonları tarafından sağlanan

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |g^{'}(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizlik, Differansiyel Hardy eşitsizliği olarak bilinir. Bu durumda $\|g'(x)\|_{p,w} < \infty$ olup

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt = H\left(f(x)\right)$$

veya

$$g(x) = \int_x^b f(t)dt = \tilde{H}(f(x))$$

dir.

$\|g\|_{q,v} \le C\|g\|_{p,w} \Leftrightarrow 1 < p \le q < \infty$ için

$$\sup_{1<p\le q<\infty}\left(\int_x^b v^q(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_x^a w^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'}$$

dir.

Bazı yazarların çalışmalarında (modiffied) değiştirilmiş ağırlık Hardy operatörü olarak adlandırılan

$H(f(x)) := v(x)\int_a^x f(t)w(t)$ de kullanılarak $\|H(f(x))\|_q \le C\|f(x)\|_p$ eşitsizliği

$$1 < p \le q < \infty \text{ için sağlanır } \Leftrightarrow \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b v^q(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x w^{p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty$$

$$p > q \text{ için sağlanır } \Leftrightarrow \left(\int_a^b\left(\int_x^b v^q(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x w^{p'}(t)dt\right)^{r/p'}dx\right)^{1/r} < \infty \text{ dur.}$$

Benzer durum $\tilde{H}(f(x) = v(x)\int_x^b f(t)w(t)dt$ operatörü için geçerlidir.

$g(x) = H(f(x))$ için $g(a) = 0$ ve $g'(x) = f(x)$
$g(x) = \tilde{H}(f(x))$ için $g(b) = 0$ ve $g'(x) = f(x)$

alındığında, H ve $\tilde{H}$ operatörlerin ağırlıklı Lebesgue uzayları arasında sınırlılığı görülür.

$(a,b) = (0,\infty)$ ise $f \geq 0$ ve v, w ağırlıklı fonksiyonları için ağırlıklı Hardy eşitsizliği,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt \right)^q v(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(x) w(x)dx \right)^{1/p}$$

ve $g(0) = 0$ ile $1 < p \leq q < \infty$ için

$$\left(\int_0^\infty \int_0^x |g(x)|^q v(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty |g'(x)|^p w(x)dx \right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sup_{x>0} \left(\int_x^\infty v(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_0^x w(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} < \infty$$

dur. $(a,b) = (-\infty,\infty)$ ise,

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^x f(t)dt \right)^q v(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{-\infty}^\infty f^p(x) w(x)dx \right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin negatif olmayan f fonksiyonları tarafından sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^\infty v(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^x w(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} < \infty$$

dur.

$\mathbb{R}$ de $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2|x|} \int_{-|x|}^{|x|} f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{-\infty}^\infty f^p(x)dx$$

eşitsizliği;

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx$$

eşitsizliğine karşılık gelir.

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^{1/p}(t)dt\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)$$

olarak verilen f 'nin geometrik ortalaması ve Klasik Hardy eşitsizliğinde f yerine $f^{1/p}$ alındığında

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^{1/p}(t)dt\right)^p dx\le\frac{p}{p-1}\int_0^\infty f(x)dx\Rightarrow\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\right)dx\le e\int_0^\infty f(x)dx$$

Şeklinde Knopp eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik bulunur.

Benzer limit yöntemiyle Klasik Hardy eşitsizliğinin kesikli hali olan ve Carleman eşitsizliği olarak bilinen

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\le e\sum_{n=1}^\infty a_n$$

eşitsizliği bulunur. (Kufner 2007, Opic ve Kufner 1990)

Ayrıca ağırlıklı Hardy eşitsizliğinin sağlanması ,

$$J(y)=\int_0^\infty\left[\left(y'(x)\right)^p w(x)-y(x)^p v(x)\right]dx$$

fonksiyoneli için

$$\frac{d}{dx}\left(w(x)\left(\frac{dy}{dx}(x)\right)^{p-1}\right)+w(x)y(x)^{p-1}=0$$

Euler-Lagrange genel lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin bir pozitif y çözümünün varlığına eşdeğerdir. (Muckenhoupt 1972),(Opic ve Kufner 1990)

4.4 Hardy Ortalama (averaging) operatörü:

$$\left(H_a f\right)(x):\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

aritmetik ortalama operatörü olarak bilinir. f 'nin geometrik ortalama operatörü ise

$$G\left(f\right)(x):=\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right);\ f\ge 0$$

olarak bilinir. $G(f)(x)\le(H_a f)(x)$ dir.(Kufner 2007)

4.5. N Boyutlu Hardy Operatörü

$X \in \mathbb{R}^n$ için $B(x)=\{y \in \mathbb{R}^n : |y|<|x|\}$ yuvarının hacmi $|B(x)|$ olmak üzere, H_N ile gösterilen N boyutlu Hardy operatörü,

$$\left(H_N f\right)(x)=\frac{1}{|B(x)|}\int_{B(x)} f(y)dy, x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlı olup

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(H_N f\right)(x)\right|^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx; 1<p<\infty$$

eşitsizliği N boyutlu Hardy eşitsizliğidir.

v, w N boyutlu ağırlıklar ve $1<p\le q<\infty$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(H_N f\right)(x)\right|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(x)} v(y).|y|^{-q} dy\right)^{1/q} \le C\left(\int_{B(x)} w^{1-p'}(y)dy\right)^{1/p'} < \infty$$

dur.

1<p<∞ için $\int_{\mathbb{R}^n} |H_N f(x)|^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx,$

eşitsizliği $c=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ en iyi sabiti ile sağlanır. $1<p\le q<\infty$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |H_N f(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$$

dir ancak ve ancak

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(x)} v(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_{B(x)} w(t)^{1-p'}dt\right)^{r/p'} w(x)^{1-p'}dx\right]^{1/r} < \infty$$ dır.(Kufner 2007)

4.6. Teoremler

Teorem 1 : v, w ağırlık fonksiyonları olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty (Gf)^q(x)v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(1)}$$

eşitsizliğinin bütün negatif olmayan f fonksiyonları tarafından sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$i) 0 < p \le q < \infty$ iken

$$\sup_{t>0}\left[\int_0^t \left[G\left(\frac{1}{w(x)}\right)\right]^{q/p} v(x)\right] t^{-1/p} < \infty \qquad \textbf{(2)}$$

$ii) 0 < q < p < \infty$ iken

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x \left(G\left(\frac{1}{w(t)}\right)\right)^{q/p} dt\right)^{r/q} \left[G\left(\frac{1}{w(x)}\right)\right]^{q/p} dx\right) < \infty \qquad \textbf{(3)}$$

Dur.(Person ve ark. 2002)

$$(H_2 f)(x,y) = \int_a^x \int_a^y f(s,t)\,dtds \qquad \textbf{(4)}$$

iki boyutlu Hardy operatörü olarak bilinir.

$v, w; (0,\infty)\times(0,\infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\left[\int_0^\infty\int_0^\infty (H_2 f)^q(x,y)v(x,y)dxdy\right]^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty\int_0^\infty f^p(x,y)w(x,y)dydx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(5)}$$

eşitsizliğinin $1 < p \le q < \infty$ ve negatif olmayan bütün $f(x,y)$ fonksiyonları tarafından sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sup_{x>0,\,y>0}\left(\int_x^\infty\int_y^\infty v(s,t)dtds\right)^{1/q}\left(\int_0^x\int_0^y w^{1-p'}(s,t)dtds\right)^{1/p'} < \infty \qquad \textbf{(6)}$$

dur.(Muckenhoupt 1972)

Teorem 2: $p>1, \frac{r+1}{p}<1$ için,.

$$\left(\int_0^\infty x^r\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx\right)^{1/p} \le \left(\frac{p}{p-r-1}\right)\left(\int_0^\infty f(t)^p\, t^r\,dt\right)^{1/p} \tag{7}$$

dir.

İspat:

$t=xs$ ile $t\to s$ için $dt=xds$ ve $0<s<1$ olduğundan

$$\left(\int_0^\infty x^r\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty x^{r-p}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx\right)^{1/p}$$

$$=\left(\int_0^\infty x^{r-p}\left(\int_0^1 f(xs)\,ds\right)^p x^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty x^{r}\left(\int_0^1 f(xs)\,ds\right)^p dx\right)^{1/p} = \left\|\int_0^1 f(xs)ds\right\|_{L_p(x^r;(0,\infty))}$$

(İntegraller için minkowski eşitsizliği)

$$\le \int_0^1 \|f(xs)\|_{L_p(x^r;(0,\infty))}\, ds = \int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(xs)x^r dx\right)^{1/p} ds$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(t)\left(\frac{t}{s}\right)^r \frac{1}{s}dx\right)^{1/p} ds \qquad \begin{pmatrix} x\to t \text{ için} \\ xs=t \text{ ise} \\ dx=s^{-1}dt \\ 0<t<\infty \end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1 s^{-\frac{r+1}{p}}\left(\int_0^\infty f^p(t)t^r dt\right)^{1/p} ds = \frac{p}{p-r-1}\left(\int_0^\infty f^p(t)t^r dt\right)^{1/p}$$

(Kufner 2007)

Teorem 3 :

$1<p\le q<\infty$ ve

$$B=\sup_{a<x<b}\left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt\right)^{-1/p}\left(\int_a^x v(t)\left(\int_a^t w^{1-p'}ds\right)^q dt\right)^{1/q} \tag{8}$$

olmak üzere, negatif olmayan f fonksiyonlarının

$$\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right]^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(9)}$$

şeklindeki Hardy eşitsizliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul,

$B<\infty$ ve $B \leq C \leq p'B$ dir. **(10)**

Burada , $W(x)=\int_a^x w^{1-p^1}(t)dt$ dir.

İspat:

Gereklilik:

(9) eşitsizliğinin $C<\infty$ bir sabit ile bütün $f \geq 0$ fonksiyonları için sağlandığını kabul edelim. $t \in (a,b)$ keyfi bir sabit $f_t(x)=\chi_{(a,t)}(x)w^{1-p'}(x)$ olmak üzere ,**(9)** eşitsizliğinin sol yanı ,

$$\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right]^{1/q} = \left[\int_a^t\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx + \int_t^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right]^{1/q} \qquad \textbf{(11)}$$

şeklinde yazılabileceğinden ve (**10)'**nun doğruluğunun kabulünden ,

$$\left[\int_a^t\left(\int_a^x w^{1-p'}(s)ds\right)^q v(x)dx\right]^{1/q} \leq C\left(\int_a^t w^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^t W^q(x)v(x)dx\right)^{1/q} \leq C.W^{1/p}(t) \Rightarrow B \leq C < \infty \qquad \textbf{(12)}$$

bulunur.

Yeterlilik:

(9) eşitsizliğinin duali, aynı C sabiti ile $g \geq 0$ için,

$$\left(\int_a^b\left(\int_x^b g(t)dt\right)^{p'} w^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p'} \leq C\left(\int_a^b g^{q'}(x)v^{1-q'}(x)dx\right)^{1/q'} \qquad \textbf{(13)}$$

yazılabilir.

Kısmi integrasyon ve Hölder eşitsizliğinden,

$$J := \int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{p'} w^{1-p'}(x)dx \; = p' \int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{p'-1} g(x) \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right) dx$$

$$= p' \int_a^b g(x) v^{(1-q')/q'}(x) \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{p'-1} \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right) v^{(q'-1)/q'}(x)dx$$

$$\leq p' \left(\int_a^b g^{q'}(x) v^{1-q'}(x) \right)^{1/q'} \left[\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{q(p'-1)} \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right)^q v(x)dx \right]^{1/q}$$

$h(x) := \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{q(p'-1)}$ olmak üzere Fubini teoremini uygularsak,

$$J_1 = \int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{q(p'-1)} \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right)^q v(x)dx$$

$$= \int_a^b h(x) \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right)^q v(x)dx = \int_a^b h(x) W^q(x) v(x)dx$$

$$= \int_a^b \int_x^b \left[-h'(t) \right] dt W^q(x) v(x)dx$$

$$= \int_a^b \int_a^t \left[-h'(t) W^q(x) v(x) \right] dxdt = \int_a^b \left[-h'(t) \right] \int_a^t v(x) W^q(x)dxdt$$

$B = W^{-1/p} \left(\int_a^x v(t) W^q(t)dt \right)^{1/q}$ ise

$$B^q = \int_a^x v(t) W^q(t)dt \left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt \right)^{-q/p} \tag{14}$$

olacağından ,

$$J \leq B^q \int_a^b \left[-h'(t) \right] \left(\int_a^t w^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} \tag{15}$$

bulunur. Minkowski integral eşitsizliğinden sağ yanın integrali kestirilerek ,

$$J_1 \leq B^q \left(\int_a^b \int_x^b \left[-h'(t)dt \right]^{p/q} w^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p}$$

$$= B^q \left(\int_a^b h^{p/q}(x) w^{1-p'}(x) dx \right)^{q/p}$$

$$= B^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{(p'-1)p} w(x)^{1-p'} dx \right)^{q/p}$$

$$= B^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{p'} w(x)^{1-p'} dx \right)^{q/p} = B^q J^{q/p}$$

$$\Rightarrow J^{1/p'} \le p' B \left(\int_a^b g^{q'}(x) v^{1-q'}(x) dx \right)^{1/q'} \tag{16}$$

Dual eşitsizlikten , $C \le p' B$ bulunur.(Kufner ve Person 2003)

Teorem 4: $0 < q < p < \infty,\ p > 1,\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, $W(x) := \int_a^x w^{1-p'}(t)dt$ için

$$B = \left(\int_a^b \left(\int_a^t v(s) W^q(s) ds \right)^{r/q} W^{-r/q}(t) dW(t) \right)^{1/r} \tag{17}$$

olmak üzere,negatif olmayan bütün f fonksiyonlarının 1 ile verilen Hardy eşitsizliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $B < \infty$ dur ve Hardy eşitsizliğindeki C sabiti,

$$qp^{-1/r} (p')^{1/q'} r^{-1/r'} 2^{-1/q} B \le C \le q^{1/q} p' B \tag{18}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

Yeterlilik:

$$J := \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q v(x)dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q v(x) W^q(x) W^{-q}(x) dx$$

$$= q\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q v(x)W^q(x)\int_x^b W^{-q-1}(s)dW(s)dx$$

$$= q\int_a^b W^{-q-1}(s)\left(\int_a^s \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q v(x)W^q(x)dx \right) dW(s)$$

$$\leq q\int_a^b \left[\left(\int_a^s f(t)dt \right)^q W^{-q}(s) \right] \left[\left(\int_a^s v(x)W^q(x)dx \right) W^{-1}(s) \right] dW(s)$$

Burada $x \leq s$ için $\int_a^x \leq \int_a^s$ ve Fubini teoremi kullanılmıştır.

$\frac{p}{q}$ ve $\left(\frac{p}{q} \right) = \frac{r}{q'}$ parametreleri ile Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$J \leq q\left(\int_a^b \left(\int_a^s f(t)dt \right)^p \frac{dW(s)}{W^q(s)} \right)^{q/p} B^q \tag{19}$$

dur. Bir önceki teoremden ,

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^s f(t)dt \right)^p \frac{dW(s)}{W^p(s)} \right)^{1/p} \leq p'\left(\int_a^b f^p(s)w(s)ds \right)^{1/p} \tag{20}$$

yazılabilir. Böylece , $C \leq q^{1/q} p' B < \infty$ ile **(10)** eşitsizliği sağlanmış olur.

Gereklilik:

$C < \infty$ ile **(10)** eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim.**(18)**deki alt sınır ,

$$B_0 = \left(\int_a^b \left(\int_x^b v(t)dt \right)^{r/q} W^{r/q'}(x)dW(x) \right)^{1/r} \tag{21}$$

olmak üzere $C \geq q^{1/q}(p')^{1/q'} \frac{q}{r} B_0$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için , $w^{1-p'}(x) = \sigma(x)$ olsun ve $0 \leq v_1 < v$, $0 \leq w \leq w_1$, v_1 ve $\sigma_1(x) = w_1^{1-p'}(x)$ integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Ayrıca ,

$$B=\left[\left(\int_a^b\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q} W_1^{r/q'}(x)dV_1(x)\right]^{1/r}$$

$$W_1(x)=\int_a^x w_1^{1-p'}(t)dt=\int_a^t \sigma_1(t)dt \text{ ile } B_1:=\left(\int_a^b\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q} W_1^{r/q'}(x)dW_1(x)\right)^{1/r}$$

olmak üzere eğer,

$f(x)=\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/pq}\left(\int_a^x \sigma_1(t)dt\right)^{r/pq'}\sigma_1(x)$ şeklinde bir f fonksiyonu seçersek,

$$\int_a^x f(t)dt \geq \left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/pq}\int_a^x\left(\int_a^t \sigma_1(s)ds\right)^{r/pq'}\sigma_1(t)dt$$

$$=\frac{p'q}{r}\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/pq}\left(\int_a^x \sigma_1(s)ds\right)^{r/p'q}$$

Kısmi integrasyon , son kestirim ve **(9)** eşitsizliğinden ,

$$\frac{p'q}{r}\left(\frac{q}{p'}\right)^{1/q} B_1^{r/q}$$

$$=\left(\int_a^b\left(\frac{p'q}{r}\right)^q\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/p}\left(\int_a^x \sigma_1(t)dt\right)^{r/p'} v_1(x)dx\right)^{1/q}$$

$$\leq\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v_1(x)dx\right]^{1/q} \leq\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right]^{1/q}$$

$$\leq C\left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p}$$

$$=C\left(\int_a^b\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x \sigma_1(t)dt\right)^{r/q'}\sigma_1^{1-p}(x)\sigma_1^p dx\right)^{1/p}$$

$$=C\left(\int_a^b\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x \sigma_1(t)dt\right)^{r/q'}\sigma_1(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\leq C\left(\left(\int_a^b\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x \sigma_1(t)dt\right)^{r/q'}\sigma_1(x)dx\right)^{1/p}$$

$$= C\left(\int_a^b\left(\int_x^b v_1(t)dt\right)^{r/q} W_1^{r/q'}dW_1(x)\right)^{1/p} = CB_1^{r/p} \qquad \textbf{(22)}$$

bulunur.

Böylece , $q^{1/q}(p')^{1/q'}\dfrac{q}{r}B_1 \leq c$ elde edilir. **(18)'**in alt sınırının $B \leq (2q)^{1/q}\left(\dfrac{p}{r}\right)^{1/r} B_0$

olduğunu göstermek için ,

$$B^r = \int_a^b\left(\int_a^x W^q(t)d\left(-\int_t^x v(s)ds\right)\right)^{r/q} W^{-r/q}(x)dW(x)$$

ve

$$J_1 = \int_a^x W^q(t)d\left(-\int_t^x v(s)ds\right) = q\int_a^x\left(\int_t^x v(s)ds\right)W^{q-1}(t)dW(t)$$

$$= q\int_a^x\left[\left(\int_t^x v(s)ds\right)W^{q-1+\frac{q}{2p}}(t)\right]W^{-q/2p}(t)dW(t)$$

$\dfrac{r}{q}$ ve $\left(\dfrac{r}{q}\right)' = \dfrac{p}{q}$ parametreleri ile Hölder eşitsizliğinden,

$$J_1 \leq q\left(\int_a^x\left(\int_t^x v(s)ds\right)^{r/q} W(t)^{\left(q-1+\frac{q}{2p}\right)\frac{r}{q}}dW(t)\right)^{q/r}\left(\int_a^x W(t)^{-1/2}dW(t)\right)^{q/p} \qquad \textbf{(23)}$$

yazılabilir. Fubini teoreminden,

$$B^r \leq q^{r/q}2^{r/p}\int_a^b\left(\int_a^x\left(\int_t^b v(s)ds\right)^{r/q} W^{\left(q-1+\frac{q}{2p}\right)\frac{r}{q}}dW(t)\right) . W^{r/2p-r/q}(x)dW(x)$$

$$= q^{r/q}2^{r/p}\int_a^b\left(\int_t^b v(s)ds\right)^{r/q} W^{\frac{r}{q'}+\frac{r}{2p}}(t) \ . \ \int_t^b W^{\frac{r}{2p}-\frac{r}{q}}(x)dW(x)dW(t)$$

$$=\frac{q^{\frac{r}{q}}p.2^{\frac{r}{p+1}}}{r}\int_a^b\left(\int_t^b v(s)ds\right)^{r/q}W^{\frac{r}{q'}}(t)dW(t)$$

$$=\frac{(2q)^{\frac{r}{q}}.p}{r}B_0^{\ r} \qquad \textbf{(24)}$$

bulunur.(Kufner ve Person 2003)

Teorem 5: $1<p\le q<\infty$ ve $s\in(1,p)$ olmak üzere, eğer

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}\le C\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(25)}$$

eşitsizliği sağlanması için:

$$A(s,p,q)=\sup_{t>0}W(t)^{\frac{s-1}{p}}\left(\int_t^\infty v(x)W(x)^{\frac{q}{p}(p-s)}dx\right)^{1/q}<\infty \qquad \textbf{(26)}$$

dır.Burada $W(t)=\int_0^t w(x)^{1-p'}dx$, eğer C en iyi sabit ise ,

$$\sup_{1<s<p}\left(\frac{\left(\frac{p}{p-s}\right)^p}{\left(\frac{p}{p-s}\right)^p+\frac{1}{s-1}}\right)^{\frac{1}{p}}A(s,p,q)\le C\le\inf_{1<s<p}\left(\frac{p-1}{p-s}\right)^{\frac{1}{p'}}A(s,p,q) \qquad \textbf{(27)}$$

dır.

İspat: $f^p(x)w(x)=g(x)$ alındığında (**26**) eşitsizliği:

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x g(t)^{\frac{1}{p}}w(t)^{\frac{-1}{p}}dt\right)^q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^\infty g(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(28)}$$

şeklinde yazılabilir.

$$DW(t)=w(t)^{1-p'}=w(t)^{1-\frac{p}{p-1}}=w(t)^{\frac{-1}{p-1}}=w(t)^{-\frac{p'}{p}}$$

dır. (Hölder ve Minkowski eşitsizliğinden)

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x g(t)^{\frac{1}{p}}w(t)^{-\frac{1}{p}}dt\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}$$

$$=\left[\int_0^\infty\left(\int_0^x g(t)^{\frac{1}{p}}W(t)^{\frac{s-1}{p}}.W(t)^{-\frac{s-1}{p}}w(t)^{-\frac{1}{p}}dt\right)^q v(x)dx\right]^{1/q}$$

$$\leq\left[\int_0^\infty\left(\int_0^x g(t)W^{s-1}(t)dt\right)^{q/p}\left(\int_0^x W(t)^{-\frac{s-1}{p}.p'}w(t)^{-\frac{p'}{p}}dt\right)^{q/p'}v(x)dx\right]^{1/q}$$

$$=\left(\frac{p-1}{p-s}\right)^{1/p'}\left[\int_0^\infty\left(\int_0^x g(t)W^{s-1}(t)dt\right)^{q/p}W(x)^{\frac{p-s}{p-1}.\frac{q}{p'}}v(x)dx\right]^{1/q}$$

$$\leq\left(\frac{p-1}{p-s}\right)^{1/p'}\left[\int_0^\infty g(t)W(t)^{s-1}\left(\int_t^\infty W^{\frac{p-s}{p}.q}(x)v(x)dx\right)^{\frac{p}{q}}dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\frac{p-1}{p-s}\right)^{1/p'}A(s,p,q)\left(\int_0^\infty g(t)dt\right)^{1/p}\tag{29}$$

bulunur. Böylece (**27)'**nin sağ yanındaki sabit ile (**28)** ve (**26)** denklemleri sağlanır.

$$g(x)=\left(\frac{p}{p-s}\right)^p W(t)^{-s}w(x)^{1-p'}\chi_{(0,t)}(x)+W(x)^{-s}w(x)^{1-p'}\chi_{(t,\infty)}(x)$$

test fonksiyonu seçildiğinde,(**26)** ve dolayısıyla (**28)'** in sağlandığını kabul edelim. Burada t pozitif bir sabit sayıdır.

$$\left(\int_0^\infty g(t)dt\right)^{1/p}=\left[\int_0^t\left(\frac{p}{p-s}\right)^p W(t)^{-s}w(x)^{1-p'}dx+\int_t^\infty W(x)^{-s}w(x)^{1-p'}dx\right]^{1/p}$$

$$\leq\left(\left(\frac{p}{p-s}\right)^p W(t)^{1-s}-\frac{1}{1-s}W(t)^{1-s}\right)^{1/p}\tag{30}$$

ve

$$\left(\int_t^\infty\left(\int_0^t\left(\frac{p}{p-s}\right)W(t)^{-\frac{s}{p}}w(y)^{1-p'}dy+\int_t^x W(y)^{-\frac{s}{p}}w(y)^{1-p'}dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\int_t^\infty\left(\frac{p}{p-s}\right)^q W(x)^{\left(1-\frac{s}{p}\right)q}v(x)dx\right)^{1/q}\tag{31}$$

İfadesi (**30)'**un sol yanından küçüktür. Böylece (**28)** den

$$\left(\frac{p}{p-s}\right)\left(\int_t^{\infty} W(x)^{\left(1-\frac{s}{p}\right)^q} v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\left(\frac{p}{p-s}\right)^p + \frac{1}{s-1}\right)^{1/p} W(t)^{\frac{1-s}{p}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{p}{p-s}\right)\left(\left(\frac{p}{p-s}\right)^p + \frac{1}{s-1}\right)^{-1/p} W(t)^{\frac{s-1}{p}} \left(\int_t^{\infty} W(x)^{\left(1-\frac{s}{p}\right)q} v(x)dx\right)^{1/q} \le C \qquad \textbf{(32)}$$

veya özdeş olarak ,

$$\left(\frac{\left(\frac{p}{p-s}\right)^p}{\left(\frac{p}{p-s}\right)^p + \frac{1}{s-1}}\right)^{1/p} W(t)^{\frac{s-1}{p}} \left(\int_t^{\infty} W(x)^{\left(\frac{p-s}{p}\right)q} v(x)dx\right)^{1/q} \le C$$

(33)

Böylece **(27)'**nin sol yanı kestirilmiş oldu.(Kufner ve Person 2003)

Lemma 1 : $1 < p \le q < \infty$ ve $v, w \in W(a,b)$ olmak üzere,

$$B_L(a,b,v,w,p,q) = \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b v(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x w^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} \qquad \textbf{(34)}$$

ve

$$\left(\int_x^b v(t)dt = V(x) \;\text{ ve }\; \int_a^x w^{1-p'}(t)dt = W(x) \;\text{ olmak üzere }\; \sup_{a<x<b} V^{1/q}.W^{1/p'} < \infty\right) \qquad \textbf{(35)}$$

ise,

$$\left(\int_a^b |Hf(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(36)}$$

eşitsizliği her $Hf(x) - \int_a^x f(t)dt \in AC_L(a,b)$ için sağlar ve C_L en iyi sabiti

$C_L \le \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{1/q}\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{1/p'} B_L$ kestirimini sağlar.

$\left(C_L \le K(q,p).B_L\right)$

İspat: $B_L < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $s > 1$ sabit olmak üzere,

$\forall t \in (a,b)$ için $\int_a^t w(y)^{1-p'}dy < \infty$ olacağından , $h(t) = \left(\int_a^t w^{1-p'}(y)dy\right)^{1/p's}$ fonksiyonu

$\forall t \in (a,b)$ için $0 < h(t) < \infty$ olur. $f \in M^{+}(a,b)$ olsun. Hölder eşitsizliğinden,

$$Hf\left(x\right)=\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)w(t)^{1/p}h(t)w(t)^{-1/p}h(t)^{-1}dt$$

$$\leq\left(\int_a^x f^{p}(t)w(t)h^{p}\left(t\right)dt\right)^{1/p}\left(\int_a^x h^{-p'}(t)w(t)^{-\frac{p'}{p}}dt\right)^{1/p'} \quad \textbf{(37)}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\int_a^x h^{-p'}(t)w(t)^{1-p'}dt=\int_a^x\left(\int_a^t w^{1-p'}(y)dy\right)^{-1/s}w(t)^{1-p'}dt$$

$$=\frac{s}{s-1}\left(\int_a^x w^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{s-1}{s}}=\frac{s}{s-1}h(x)^{(s-1)p'} \quad \textbf{(38)}$$

olduğundan,

$$\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^{q}v(x)dx\right]^{p/q}\leq\left(\frac{s}{s-1}\right)^{p/p'}\left[\int_a^b\left(\int_a^x f^{p}(t)w(t)h^{p}(t)dt\right)^{q/p}h^{(s-1)q}(x)v(x)dx\right]^{p/q} \quad \textbf{(39)}$$

[(integraller için Minkowski eşitsizliğinden) $\varnothing,\psi \in M^{+}\left(a,b\right)$ ve $r=\dfrac{p}{q}$ için

$$\left(\int_a^b\varnothing(x)\left(\int_a^x\psi(y)dy\right)^{r}dx\right)^{1/r}\leq\int_a^b\psi(y)\left(\int_y^b\varnothing(x)dx\right)^{1/r}dy\ ]$$

$$\left[\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^{q}v(x)dx\right]^{p/q}\leq\left(\frac{s}{s-1}\right)^{p/p'}\int_a^b f^{p}(t)w(t)h^{p}(t)\left(\int_t^b h^{(s-1)q}(x)v(x)dx\right)^{p/q}dt \quad \textbf{(40)}$$

bulunur. B_L sayısının tanımından,

$$h^{(s-1)q}(x)=h^{s}(x)^{(s-1)q/s}\leq B_L^{\,(s-1)q/s}\left(\int_x^b v(y)dy\right)^{\frac{-(s-1)}{s}} \quad \textbf{(41)}$$

olup ,

$$\int_t^b h^{(s-1)q}(x)v(x)dx\leq B_L^{\frac{(s-1)q}{s}}\int_t^b\left(\int_x^b v(y)dy\right)^{-1+\frac{1}{s}}v(x)dx$$

$$=sB_L^{(s-1)\frac{q}{s}}\left(\int_t^b v(y)dy\right)^{1/s}\Rightarrow$$

$$\left[\int_t^b h^{(s-1)q}(x)v(x)dx\right]^{p/q} \le s^{p/q} B_L^{(s-1)p/s}\left(\int_t^b v(y)dy\right)^{p/qs}$$

$$\le s^{p/q} B_L^{(s-1)\frac{p}{s}}\left[B_L\left(\int_a^t w^{1-p'}(y)dy\right)^{-1/p'}\right]^{p/s} = s^{p/q} B_L{}^p h^{-p}(t) \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right)^{1/q} \le \left(\frac{s}{s-1}\right)^{1/p'} s^{1/q} B_L\left[\int_a^b f^p(t)w(t)h^p(t)h^{-p}(t)dt\right]^{1/p}$$

$$= g(s)B_L\left[\int_a^b f^p(t)w(t)dt\right]^{1/p} \qquad \textbf{(42)}$$

Burada, $g(s) = s^{1/q}\left(\dfrac{s}{s-1}\right)^{1/p'}$ ve $s > 1$ keyfi

sabittir. $\inf\limits_{s>1} g(s) = g(1+\dfrac{q}{p'}) = k(q,p)$ alındığında

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right)^{1/q} \le k(q,p)B_L\left[\int_a^b f^p(t)w(t)dt\right]^{1/p} \qquad \textbf{(43)}$$

bulunur.(Kufner ve Person 2003, Kufner ve Opic 1990)

Teorem 6 : $1 \le p \le q < \infty$ reel sayılar ve $v, w : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ pozitif ölçülebilir ağırlık fonksiyonları ve a>0 için

$$\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1\left(B(0,a)\right),\ v(x) \in L^1\left(\mathbb{R}^n / B(0,a)\right), v(0) = \infty, w(\infty) = \infty \text{ koşullarını}$$

sağlamak üzere, herhangi bir $f \ge 0$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|<|x|\}} f(y)dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x)\right)^p w(x)dx\right)^{1/p} \qquad \textbf{(44)}$$

eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak

$$C_{pq} = \sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n / B(0,t)} v(x)dx\right)\left(\int_{B(0,t)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{q/p'} < \infty,\ C \approx C_{pq}{}^{1/q} \text{ dır.} \qquad \textbf{(45)}$$

İspat:(yeterlilik) : $F(x)=\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|<|x|\}} f(y)dy$ olmak üzere , $F(x)$ bir radyal fonksiyondur.

$\tilde{F}(|x|)=F(x)$ ve $\tilde{F}(t)$ tek reel değişkenli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir

$\lambda\in\left(0,\limsup\limits_{t\to\infty}\tilde{F}(x)\right)$ için ve $t>\delta_\lambda$ için $\tilde{F}(t)\geq\lambda$ olacak şekilde $\sigma_\lambda>0$ gibi bir minimal

vardır. $\lambda=\int\limits_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} f(x)dx$ ise Hölder eşitsizliğinden

$$\int\limits_{|x|>\sigma_{2\lambda}} v(x)dx\leq\left(\int\limits_{|x|\geq\sigma_{2\lambda}} v(x)dx\right).\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} f(x)dx\right)^q \tag{46}$$

yeterlilikten

$$\left(V.W^{q/p}<C_{pq}\right)\leq\frac{1}{\lambda^q}\left(\int\limits_{|x|>\sigma_{2\lambda}} v(x)dx\right).\left(\int\limits_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} f^p(x)w(x)dx\right)^{q/p}.\left(\int\limits_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} w(x)^{-\frac{p'}{p}}dx\right)^{q/p'}$$

$$\leq\frac{C_{pq}}{\lambda^q}\left(\int\limits_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} f(x)^p w(x)dx\right)^{q/p} \tag{47}$$

$$|x|>\sigma_{2\lambda}\Rightarrow\left\{x:\tilde{F}(|x|)\geq 2\lambda\right\}\Rightarrow 0<\lambda<\frac{\tilde{F}(|x|)}{2}$$

$$\int_0^\infty\left(\int\limits_{|x|>\sigma_{2\lambda}} v(x)dx\right)d\lambda^q=\int_0^\infty v(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi(x)d\lambda^q dx,\ \ 0<\lambda<\frac{\tilde{F}(|x|)}{2}$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\int_0^{\frac{\tilde{F}(|x|)}{2}} d\lambda^q dx=2^{\frac{1}{q}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\tilde{F}(|x|)\right)^q v(x)dx$$

$$=\int_0^\infty\left(\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n:F(x)>2\lambda} v(x)dx\right)d\lambda^q$$

$$=C_{pq}\int_0^\infty \frac{d\lambda^q}{\lambda^q}\left(\int_{\sigma_\lambda<|x|<\sigma_{2\lambda}} f^p(x)w(x)dx\right)^{q/p}$$

$$=qC_{pq}\int_0^\infty\left(\int_{\lambda<F|x|<2\lambda} f^p(x)w(x)dx\right)^{q/p}\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad \text{(Minkowski eşitsizliğinden)}$$

$$\leq qC_{pq}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\frac{F(x)}{2}}^{F(x)}\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{p/q} f^p(x)w(x)dx\right]^{q/p}$$

$$=qC_{pq}\ln 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)w(x)dx\right)^{q/p} \tag{48}$$

bulunur. Böylece eşitsizlik , $C=\left(2^q.qC_{pq}\ln 2\right)^{1/q}$ sabiti ile sağlanmış olur.

Gereklilik:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leq|x|\}} f(y)dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p} \tag{49}$$

eşitsizliği $f\geq 0$ için doğru olsun. $f_t(x)=w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\chi_{B(0,t)}(x): t>0$ test fonksiyonu için de eşitsizlik sağlanır. Yani,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leq|x|} w(y)^{-\frac{1}{p-1}}\chi_{B(0,t)}(y)dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^{-\frac{p}{p-1}}\chi_{B(0,t)}(x)w(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(0,t)} v(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_{B(0,t)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right).\left(\int_{B(0,t)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{-\frac{1}{p}}\leq C$$

$$\Rightarrow\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(0,t)} v(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_{B(0,t)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\leq C$$

$$\Rightarrow \sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(0,t)} v(x)dx\right).\left(\int_{B(0,t)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{q/p'} < \infty \tag{50}$$

bulunur.

Sonuç: Eğer yukarıdaki eşitsizlik , $0 \le a < b \le \infty$ olmak üzere $f(x)\chi_{a\le|x|\le b}(x)$ test fonksiyonu için sağlanıyorsa,

$$\left(\int_{B(0,b)/B(0,a)} v(x)\left(\int_{B(0,|x|)} f(t)dt\right)^q dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{B(0,b)/B(0,a)} w(x) f^p(x)dx\right)^{1/p} \tag{51}$$

dir. Burada,

$$C \approx \sup_{a\le x\le b}\left(\int_{B(0,b)/B(0,a)} v(x)dx\right)\left(\int_{B(0,x)/B(0,a)} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{q/p'} \tag{52}$$

dir.(Harman ve Mamedov 2009)

Teorem 7: **i)** Eğer $1 \le p \le q \le \infty$ ise

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{1/p} \tag{53}$$

eşitsizliğini (a,b) da ölçülebilir negatif olmayan $f(x)$ fonksiyonlarının sağlaması için gerekli ve yeterli koşul

$$A := \underset{x\in(a,b)}{Sup}\left(\int_x^b v(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x w(t)^{1-p'}dt\right)^{1/p'} < \infty \tag{54}$$

dir. Ayrıca C en iyi sabiti $1 < p < \infty$ için

$$A \le C \le \min\left(p^{1/p}.(p')^{1/p'}, q^{1/q}.(q')^{1/q'}\right)A \tag{55}$$

dır. $p = 1$ için , $C = A$dır.

ii) Eğer $1 \le q \le p \le \infty$ ise(**53**)in sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$A_1 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b v(t)\,dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x w(t)^{1-p'}\,dt \right)^{r/p'} w(x)^{1-p'}\,dx \right)^{1/r} < \infty \tag{56}$$

dır.

Ayrıca, $\left(\frac{p-q}{p} \right)^{1/q'} A_1 \le C \le \left(p' \right)^{1/pp'} q^{1/q} A_1$ dir.

iii) Eğer $0<q<1<p<\infty$ ise **(53)**ün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$A_2 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b v(t)\,dt \right)^{r/p} \left(\int_a^x w(t)^{1-p'}\,dt \right)^{r/p'} v(x)\,dx \right)^{1/r} < \infty \tag{57}$$

dır.Ayrıca $q^{1/p} A_2 \le C \le \left(p' \right)^{1/r} q^{1/p} A_2$ dir.

iv) Eğer $0<q<1=p$ ise **(53)**ün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$A_3 := \left(\int_a^b \left[\int_x^b v(t)\,dt\, \underline{w}(x)^{-1} \right]^{q/(1-q)} v(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}-1} < \infty \tag{58}$$

Burada $\underline{w}(x) = ess \inf_{a<t<x} w(t)$ dir.Ayrıca,

$$q(1-q) A_3 \le C \le (1-q)^{1-1/q} A_3 \tag{59}$$

(Kufner 2007)

Teorem 8 : $(a_n),(v_n)$ ve (w_n) pozitif terimli diziler olmak üzere,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^q v_n \right)^{1/q} \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p w_n \right)^{1/p} \tag{60}$$

Ağırlıklı kesikli Hardy eşitsizliği

i) $1<p<q<\infty$ için sağlanır ancak ve ancak

$$A_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{1-p'}\right)^{1/p'} < \infty \tag{61}$$

veya

$$A_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{1-p'}\right)^{-1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\left(\sum_{m=1}^{k} w_m^{1-p'}\right)^{q}\right)^{1/q} < \infty \tag{62}$$

veya

$$A_3 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{-1/q'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} w_k^{1-p'}\left(\sum_{m=k}^{\infty} v_m\right)^{p'}\right)^{1/p'} < \infty \tag{63}$$

dur.

ii) $0 < p \le 1,\ p \le q < \infty$ için sağlanır ancak ve ancak

$$A_4 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{1/q} w_n^{-1/p} < \infty \tag{64}$$

iii) $1 < p < \infty, 0 < q < p, \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ için sağlanır ancak ve ancak

$$A_5 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{r/p}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{1-p'}\right)^{r/p'}\right) < \infty \quad \text{dır.} \tag{65}$$

iv) $q < p = 1$ için sağlanır ancak ve ancak

$$A_6 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{\frac{q}{1-q}} \max_{1\le k\le n} w_k^{\frac{q}{q-1}}\right) < \infty \quad \text{dir.} \tag{66}$$

v) $0 < q < 1 < p < \infty, \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ için sağlanır ancak ve ancak

$$A_7 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{r/q}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{1-p'}\right)^{r/p'} w_k^{1-p'}\right)^{1/r} < \infty \quad \text{dir} \tag{67}$$

.(Kufner ve ark. 2007)

Teorem 9: $p\in\square$ ve $\beta:(0,l)\to\square$ fonksiyonu $(0,\delta)$ aralığında azalan ,
$\lim_{x\to 0}\beta(x)=\beta(0)$ ve $\beta(0)<1-\dfrac{1}{p}$ olsun.

$Hf(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ olmak üzere , $\left\| |x|^{\beta(x)-1}Hf\right\|_{L^p:(0,l)}\le C\left\| |x|^{\beta(x)} f\right\|_{L^p;(0,l)}$ eşitsizliğinin sağlanması için $\beta(x)$ fonksiyonunun

$\Lambda=\left\{g(x):|g(2x)-g(x)|\ln\dfrac{1}{x}\le C,0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$ koşulunun sağlaması gerekir.

İspat: $k\in\square$, $\delta_k=\varepsilon 4^{-k}$ ve $f_k(x)=x^{-\frac{1}{p}-\beta(x)}\chi_{(\delta_k,2\delta_k)}(x)$, $x\in(0,l)$ için

$$I_p\left(x^{\beta(x)}f_k(x)\right)=\int_{\delta_k}^{2\delta_k}\left(t^{\beta(x)}.t^{-\frac{1}{p}-\beta(t)}\right)^p dt=\int_{\delta_k}^{2\delta_k}t^{-1}dt=\ln 2<1 \text{ olur.}$$

$$I_p\left(x^{\beta(x)-1}H\left(f_k(x)\right)\right)=\int_0^l\left(x^{\beta(x)-1}\int_{\delta_k}^{2\delta_k}t^{-\frac{1}{p}-\beta(t)}dt\right)^p dx\ge\int_{3\delta_k}^{4\delta_k}\left(x^{\beta(x)-1}\int_{\delta_k}^{2\delta_k}t^{-\frac{1}{p}-\beta(x)}dt\right)^p dx$$

$$\ge\int_{3\delta_k}^{4\delta_k}\left(x^{\beta(x)-1}\int_{\delta_k}^{2\delta_k}t^{-\frac{1}{p}-\beta(2\delta_k)}dt\right)^p dx\ge C_1\int_{3\delta_k}^{4\delta_k}\left(x^{\beta(x)-1}.\delta_k^{1-\frac{1}{p}-\beta(2\delta_k)}\right)^p dx$$

$$=C_1\int_{3\delta_k}^{4\delta_k}\left(x^{\beta(x)-1}.x^{1-\frac{1}{p}-\beta(2\delta_k)}\right)^p dx$$

$$=C_1\int_{3\delta_k}^{4\delta_k}x^{(\beta(x)-\beta(2\delta_k))p-1}dx=C_2.\delta_k^{[\beta(3\delta_k)-\beta(2\delta_k)]p}=C_2 e^{p|\beta(2\delta_k)-\beta(2\delta_k)|\ln\frac{1}{\delta_k}}>\infty \text{ için } \beta\in\Lambda \text{ olması}$$

gerekir.

(61) de ki A_1 **(54)** deki A ya,**(65)** deki A_5 **(56)** da ki A_1’e, **(67)** deki A_7 **(57)** deki A_2 ye ve **(66)** da ki A_6 **(58)** de ki A_3 ‘e karşılık gelir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

v ve w ağırlık fonksiyonları olmak üzere $Hf(x)=\int_a^x f(t)dt$ ile tanımlı Hardy operatörünün sınırlılığı ve Hardy eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşullar incelenmiş, bu şartlar altında Hardy operatörünün sınırlılığı gösterilmiştir.

İspatı verilen , $p\in\mathbb{R}$ ve $\beta:(0,l)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,\delta)$ aralığında azalan, $\lim_{x\to 0}\beta(x)=\beta(0)$ ve $\beta(0)<1-\frac{1}{p}$ olsun. $Hf(x)=\int_0^x f(t)dt$ olmak üzere, $\left\| |x|^{\beta(x)-1} Hf \right\|_{L^p:(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(x)} f \right\|_{L^p;(0,l)}$ eşitsizliğinin sağlanması için $\beta(x)$ fonksiyonunun $\Lambda=\left\{ g(x): \left|g(2x)-g(x)\right| \ln\frac{1}{x} \leq C, 0<x<\frac{1}{2} \right\}$ koşulunun sağlaması gerektiği gösterilmiştir. Bununla birlikte $\beta(x)$ üst fonksiyonu sıfırın bir komşuluğunda Lipschitz-Dini koşulunu sağlamazsa operatör sınırsız olacak şekilde bir fonksiyon dizisinin bulunabileceği incelenebilir. p ve q, x'in fonksiyonları iken Ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı araştırılabilir.

Ayrıca matematiğin yanında ekonomi ve mühendislik gibi dallarda kullanılan Hardy eşitsizliğinin farklı dallarda kullanılıp kullanılmayacağı bir araştırma konusu olabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

6. KAYNAKLAR

Alois Kufner and Lars-Eric Persson, (2003).Weighted inequalities of Hardy Type, World Scientific Publishing Co.,Singapore/New Jersey/London/Hong Kong,376 pp.

Alois Kufner ,Lech Maligranda and Lars-Eric Persson ,(2007).The Hardy inequality About its history and Some Related Results, pilsen

Alois Kufner ,Oldrich John and Svatopluk Fucik ,(2007).Function Spaces,Prague, Academia publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences

Aziz Harman (2012)on necessary for the Variable exponent Hardy inequality Research Article,Journal of Function Spaces and Applications 385925 6 pages

Aziz Harman and Farman Mamedov (2010) on Boundedness of Weighted Hardy Operator in $L^{p(\cdot)}$ and Reqularity Condition. Journal of inequality and Applications 837951-14 pages. Resarch Article

B.Muckenhoupt,(1972).Hardy's inequality with weights,studia Math.44/31-38

B.Opic and A.Kufner Hardy –type Inequalities ,Pitman Research Notes in Mathematics 219,Longman Scientific and Technical Harlow,1990A

Balcı Mustafa,(2009).Reel Analiz,Balcı Yayınları,Ankara,141 syf.

Farman I.Mamedov and Aziz Harman,(2009). on a weighted inequality of Hardy type in spaces $L^{p(\cdot)}$ Journal of Mat.An. and Appl. 353 / 521-530

Farman I.Mamedov and Aziz Harman ,(2010).On a Hardy Type General Weighted Inequalty in Spaces $L^{p(\cdot)}$ integr. Equ.Oper. Theory 66/ 565-592

G.H.Hardy, J.E Littlewood and G. $p\acute{o}Lya$,(1952).Inequalities,2nd ed. Cambridge unv.press.(first ed. 1934)

G.H.Hardy ,(1920).Not on a theorem of Hilbert,Math.Z.6/314-317

G.H.Hardy,J.E.Littlewod and G.Polya ,(1964).Inequalities,Cambridge at the university pres 1964

G.Sinnamon and V.D.Stepanov,(19 August 1994).The Weighted Hardy inequality,New Proofs and the casep=1,J.London Math.soc.54(1)89-101

H.P.Heining ,(1979/80).Variations of Hardy's inequality, Real Anal. Exchange 5/61-81

H.P.Heinig and Stepanov V.D. ,(1993).Weighted Hardy inequality for increasing functions ,studia Math.45,104-116

J.E.Mitrinović,J.E.Pećarić and A.M.Fink,(1991).Inequalities Involving Functions and Their integrals and Derivatives,Kluwer Academic publishers Group,MR.93m:26036

K.Andersen and H.Heining ,(1983).Weighted Norm Inequalities For Certain Integral Operators,SIAM J.Math Anal.14,834-844

Murray R.Spiegel.(1990).Theory and Problems Of Real Variables Schaum`s outline series.

Muckenhoupt B.,(1972).Hardy’s inequality with weights,studia Math.44/31-38

Persson,L.E.and Stepanıw V.D,(2002).Weighted integral inequalities with the geometrik mean operator J.inequality and Appl. 7(5),727-746

P.Gurka,(1984).Generalized Hardy ineguality,$\tilde{C}$asopies p$\tilde{e}$st. Mat.109/194-203

P.R.Beesack, (1961)Hardy inequality and its extensions,pasific J.Math.11/39-61

R.Mashiyev.B.Çekiç,F.I.Mamedov and S.Oğraş,(2007).Hardy’s İnequality in power-type weighted $L^{p(.)}$ spaces.J.Math.Anal.Appl.334(1) 289/298

Sawyer,(1985).E.Weighted inequalities fort he two-dimensional Hardy operator,Studia Math,82(1),1-16

Sever Yurdal,2006.Çift dizi ve seri uzayları üzerine,İnönü üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yükseklisans tezi

Soykan Yüksel ,(Ekim 2008),Fonksiyonel Analiz,Ankara,Nobel Yayın Dağ.Tic.Ltd.Şti.

Stepanov V.D., (1994).Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators,J.London Math.soc.50/105-120

Tuncel Altan , Haziran 2007.Lebesgue İntegrali ve bazı istatistiksel uygulamaları,Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,Yüksek Lisans Tezi.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Bismil de doğdum. İlköğretimi 1984-1989 yılları arasında Gaziantep Ahmet Çelebi İlköğretim okulunda, ortaöğretimi 1989-1996 yılları arasında Gaziantep Anadolu Lisesinde, yükseköğretimi 1997-2001yılları arasında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik bölümünde okudum. İMKB Kayapınar Lisesinde müdür yardımcısı olarak çalışmaktayım. Evli ve 2 çocuk annesiyim.