

**T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN
İLERLEYEN DALGA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Mustafa MIZRAK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Aralık – 2013

T.C
DİCLE UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DIYARBAKIR

Mustafa MIZRAK tarafından yapılan“Lineer Olmayan Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri Üzerine”konulu bu çalışma, jürimiz tarafından MatematikAnabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

ÜnvanıAdı Soyadı

Başkan:Prof. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye :Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye : Doç. Dr. Necat POLAT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP

Üye : Yrd.Doç. Dr. Halis YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 20/12/2013

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../12/2013

Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, yüksek lisanstan beri beni yalnız bırakmayıp her konuda desteğini esirgemeyen, cesaretlendiren, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren ve bugünlere gelmemi sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Abdulkadir ERTAŞ'a sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Tez çalıőmam boyunca desteklerini hep hissettiğim, beni devamlı motive eden, sabırla yanımda olan ve sonsuz anlayıő gösteren aileme teşekkür ederim.

To True Believers

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
1. GİRİŞ	1
2. İLERLEYEN DALGALAR	7
2.1. İlerleyen Dalga Çözümleri.....	8
2.1.1. İlerleyen Dalga Çözüm Çeşitleri.....	9
2.1.1.1. Tek Dalgalar ve Solitonlar.....	9
2.1.1.2. Periyodik Çözümler.....	11
2.1.1.3. Kink Çözümler.....	12
2.1.1.4. Peakon.....	12
2.1.1.5. Cusponlar.....	13
2.1.1.6. Compacton.....	14
3. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK YÖNTEMLER	17
3.1. Dalga Denkleminin d' Alembert Çözümü.....	17
3.2. KdV Denkleminin Tam Çözümü.....	21
3.3. Direkt İntegral Yöntemi.....	23
3.4. Çarpanlara Ayırma Yöntemi.....	24
3.4.1 İkinci Mertebeden Bir ADD'in Çarpanlara Ayrılması.....	25
3.5. Hiperbolik Tanjant Yöntemi.....	25
3.6. Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi.....	28
3.7. Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi'nin Genişletilmesi.....	28

3.8.	Genişletilmiş Tanh Yöntemi.....	28
3.9.	Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh Yöntemi	30
3.10.	Genelleştirilmiş Genişletilmiş Tanh Yöntemi	31
3.11.	Geliştirilmiş Tanh Yöntemi	31
3.12.	Sin-Cos Yöntemi	32
3.13.	Tanh-Coth Yöntemi	34
3.14.	Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	36
3.15.	(G'/G) -Açılım Yöntemi	37
3.16.	Değiştirilmiş Basit Denklem Yöntemi	39
3.17.	Üstel Biçimindeki Rasyonel Fonksiyon Yöntemi	41
4.	İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLARIN UYGULAMALARI	43
4.1.	Direkt İntegral Yönteminin Sine-Gordon Denkleminde Uygulanması	43
4.2.	Çarpanlara Ayırma Yönteminin KdV-Burgers Denkleminde Uygulanması	46
4.3.	Hiperbolik Tanjant Yönteminin Burgers Denkleminde Uygulanması.....	50
4.4.	Sin-Cos Yönteminin Değiştirilmiş Kawachara Denkleminde Uygulanması.....	52
4.5.	Tanh-Coth Yönteminin Boyutsuz KdV Denkleminde Uygulanması.....	56
4.6.	Üstel Fonksiyon Yönteminin Değiştirilmiş KdV Denkleminde Uygulanması.....	61
4.7.	(G'/G) -Açılım Yönteminin Birleşik KdV-Burgers Denkleminde Uygulanması.....	63
4.8.	Değiştirilmiş Basit Denklem Yönteminin Konveksiyon Terimli Fisher Denkleminde Uygulanması.....	68
4.9.	Üstel Biçimindeki Rasyonel Fonksiyon Yönteminin Damping Terimli 6. mertebeden Boussinesq Denkleminde Uygulanması.....	72
5.	TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	77
6.	KAYNAKLAR.....	79
	ÖZGEÇMİŞ.....	87

ÖZET

LİNEER OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN İLERLEYEN DALGA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Mustafa MIZRAK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Bu tezin ilk bölümünde tek dalgaların kısa bir tarihi verilmiştir.

İkinci bölümde ilerleyen dalgalar betimlenmiştir.

Üçüncü bölümde ilerleyen dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı analitik yöntemlerin analizi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, bazı analitik yöntemlerin uygulamaları araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tek Dalga, İlerleyen Dalgalar, İlerleyen Dalga Çözümleri, Solitonlar.

ABSTRACT

ON TRAVELLING WAVE SOLUTIONS OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

PhD THESIS

Mustafa MIZRAK

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2013

This thesis contains five chapters.

In the first chapter, brief history of solitary waves are given.

In the second chapter , travelling waves are described.

In the third chapter chapter, some analytical methods for obtaining travelling wave solutions are analyzed.

In the fourth chapter, applications of some analytical methods are examined.

In the fifth chapter, results are discussed.

Keywords: Solitary wave, Travelling waves, Travelling waves solutions, Solitons.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Russell'in gördüğü olay.....	1
Şekil 1.2. Russel'in tek dalga elde etmek için yaptığı deney.....	1
Şekil 1.3. 1834 yılındaki Russel'in gözlemlediği tek su dalgalarının1995 yılında Edinburgh yakınlarındaki Union Kanal'da tekrar canlandırılması.....	2
Şekil 1.4. KdV denkleminin için periyodik sınır-değer probleminin çözümü	6
Şekil 2.1. Bir teli çekip bıraktığımızda oluşan zıt yönde hareket eden iki ilerleyen dalga.....	7
Şekil 2.2. İki solitonun birbiriyle etkileşimi.....	10
Şekil 2.3. $\text{sech}^2(x-t)$, $-3 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 3$ soliton çözümünün grafiği, sonsuz yan destek veya kuyruğa sahiptir.....	11
Şekil 2.4. $u = \cos(x-t)$, $-3 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 3$ periyodik çözümünün grafiği.....	11
Şekil 2.5. $u = 1 - \tanh(x-t)$, $-10 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 10$ kink çözümünün grafiği.....	12
Şekil 2.6. $u = e^{- x-t }$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$ bir peakon çözümünün grafiği.....	13
Şekil 2.7. $u = e^{-\frac{1}{6}(x-t)^6}$, $-1 \leq x \leq 1.1$, $0 \leq t \leq 1$ cuspon grafiği.....	13
Şekil 2.8. $u(x,t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x-t)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ compacton grafiği.....	15
Şekil 3.1. İki karakteristik.....	19
Şekil 3.2. Sağ ve sol ilerleyen dalgalar.....	20
Şekil 3.3. (3.2.10) denkleminin şok dalga profili.....	22
Şekil 3.4. (4.2.11) denkleminin dispersiyon dalga profili.....	23
Şekil 3.5. KdV denkleminin soliton dalga profili.....	23
Şekil 4.2.1 (4.2.16) çözümünün soliton dalga profili.....	49
Şekil 4.2.2. (4.2.17) çözümünün soliton dalga profili.....	49
Şekil 4.3.1. $u(x,t) = 2 - 2 \tanh(x-2t)$ çözümünün $-10 < x < 6$, $0 < t < 2$ için grafiği.....	51

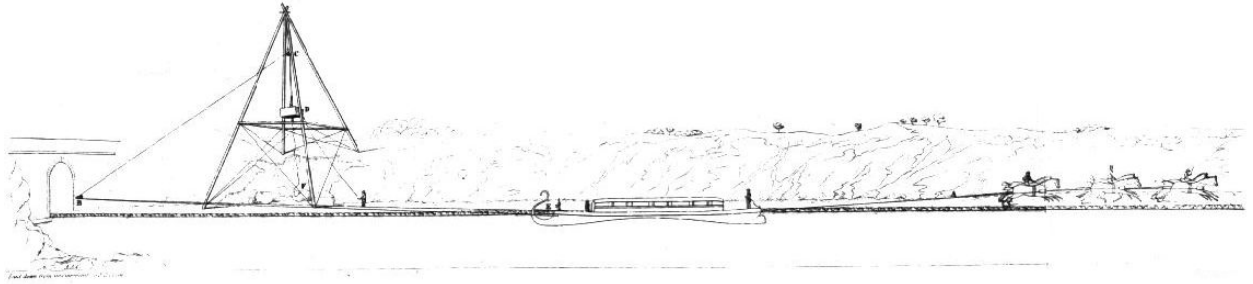
Şekil 4.4.1.	$\frac{3\sqrt{5}}{2} \sec^2 \frac{\sqrt{5}}{4}(x-3t)$, $-1 < x < 1$, $0 < t < 4$ çözümünün $c=3$, $p=-2$ için grafiği.....	54
Şekil 4.4.2.	$\frac{3\sqrt{5}}{2} \csc^2 \frac{\sqrt{5}}{4}(x-3t)$, $-1 < x < 1$, $0 < t < 5$ çözümünün $c=3$, $p=-2$ için grafiği.....	54
Şekil 4.4.3.	$\frac{3\sqrt{5}}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{10}}{4}(x-3t)$, $-8 < x < 8$, $0 < t < 1$ çözümünün $c=3$, $p=2$ için grafiği.....	55
Şekil 4.4.4.	$-\frac{3\sqrt{5}}{2} \operatorname{csch}^2 \frac{\sqrt{10}}{4}(x-3t)$, $-2 < x < 5$, $0 < t < 1$ çözümünün $c=3$, $p=2$ için grafiği. $a=4$, $c=-4$ için grafiği.....	55
Şekil 4.5.1	$3\operatorname{sech}^2(x-4t)$, $0 < x < 4$, $0 < t < 2$ soliton çözümünün $a=c=4$ için grafiği..	57
Şekil 4.5.2.	$1-3\tanh^2(x+4t)$, $-4 < x < 2$, $0 < t < 2$ soliton çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.....	57
Şekil 4.5.3.	$-3\operatorname{csch}^2(x-4t)$, $-1 < x < 3$, $0 < t < 1$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği,....	58
Şekil 4.5.4.	$1-3\operatorname{coth}^2(x+4t)$, $-3 < x < 1$, $0 < t < 1$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.....	58
Şekil 4.5.5.	$-3\csc^2(x+4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği....	59
Şekil 4.5.6.	$-1-3\cot^2(x-4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği.....	59
Şekil 4.5.7.	$-3\sec^2(x+4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.....	60
Şekil 4.5.8.	$-3-3\tan^2(x-4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği „.....	60
Şekil 4.6.1.	$u(x,t)=1+\frac{3}{e^{x-2t}+1+\frac{5e^{-x+2t}}{8}}$ çözümünün $-10 < x < 10$, $0 < t < 2$ için grafiği	63
	
Şekil 4.7.1.	U_1 çözümünün $-2 < x < 2$, $0 < t < 1$ için grafiği.....	65
Şekil 4.7.2.	U_3 çözümünün $-10 < x < 10$, $0 < t < 100$ için grafiği.....	66
Şekil 4.7.3.	U_5 çözümünün $-13 < x < 13$, $0 < t < 3$ için grafiği.	67

Şekil 4.8.1.	$u(x,t) = \frac{2\sqrt{6} \cosh\left(\frac{x-t}{\sqrt{6}}\right)}{1 + 2 \cosh\left(\frac{x-t}{\sqrt{6}}\right)}$ çözümünün $-20 < x < 20, 0 < t < 20$ için	
	grafığı.....	70
Şekil 4.8.2.	$u(x,t) = 2 - \frac{1}{1 + 2 \cosh(t-x)}$ çözümünün $-10 < x < 15, 0 < t < 10$ için	
	grafığı.....	71

1. GİRİŞ

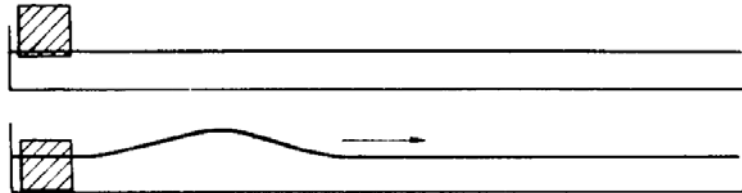
Lineer olmayan denklemlerin dalgalarla modellenmesi ilk defa 1834 yılında Edinburgh-Glasgow kanalında John Scott Russel tarafından tek (solitary) dalganın veya büyük dalganın yer değişiminin keşfi ile doğmuştur. Russel’ın tek dalgalarla ilk kez karşılaşması 1844 yılında the British Association’daki “Dalgalar Üzerine Rapor (Report on Waves)” adlı çalışmasında rapor edilmiştir (Russell 1844). John Scott Russel (1808-1882) bu olayı şöyle anlatır:

“Dar bir kanalda bir çift at tarafından çekilen bir botu izliyordum. Bot aniden durunca bir miktar su aniden ileriye doğru büyük bir hızla, yuvarlak düzgün ve iyi tanımlı bir su yığını şeklinde ve hızında bir azalma olmadan hareketini yol boyunca devam ettirdi. At sırtında bu dalgayı takip ettim. Saatte 8-9 mil hızla 30 feet uzunluğundaki ve 1,5 feet yüksekliğindeki ilk orijinal şeklini koruyarak yuvarlanıyordu. Yüksekliği giderek azalıyordu ve 1-2 millik bir takipten sonra onu kanalın dönemeçlerinde kaybettim.”



Şekil 1.1. Russel’in gördüğü olay.

Russel gözlemlediği bu fenomeni tekrar elde etmek ve özelliklerini araştırmak için 1844 yılında bir su tankı inşa eder (Bakınız Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Russel’in tek dalga elde etmek için yaptığı deney.

1. GİRİŞ

Russel yaptığı bu deney sonucunda büyük dalgaların yer değişimi veya tek dalga adını verdiği şeklini değiştirmeyen bu uzun su dalgasının a maksimum genlik (amplitude) ve h sonlu su derinliği arasında $c^2 = g(h + a)$ ilişkisini elde etti. Buradaki g yer çekimi ivmesi ve c dalga hızıdır. İkinci olarak, iki tek dalganın birbirinin içinden geçmesi durumunda dağılmadığını ve üçüncü olarak başlangıçta yeterince geniş bir su tepesiyle iki veya daha fazla tek dalga üretebileceğini buldu (Scott 2006).

Russel'ın yaptığı bu deney daha sonra, 1995 yılında İskoçya Edinburgh'taki Heriott-Watt üniversitesi tarafından tekrar canlandırılmıştır (Şekil 1.3)



Şekil 1.3. 1834 yılındaki Russel'ın gözlemlediği tek su dalgalarının 1995 yılında Edinburgh yakınlarındaki Union Kanal'da tekrar canlandırılması (Yang 2010).

Russel'ın tek dalga tanımı G. B. Airy ve G. G. Stokes'un su dalga teorileriyle çelişiyordu. Onlar Russel'ın tek dalga tanımını gündeme getirerek böyle dalgaların sıvı bir ortamda şeklini koruyarak ilerleyemeyeceğini öne sürdüler.

Matematik teorilerine rağmen deneyle ispatlanmış tek dalga modeli daha inandırıcıydı. Buna rağmen ancak 1870'lerde birbirinden bağımsız olarak Lord Rayleigh (1876) ve J. Boussinesq (1871) tarafından Russel'in öngörüsü ispatlandı. Suyun derinliğinden daha uzun olan bir tek dalga varsayılarak sıkıştırılmayan ideal akışkan bir sıvının hareket denklemini $Z = \psi(x, t)$, ortalama su seviyesinden yüksekliği

$$h, \beta^2 = \frac{3a}{4h^2(h+a)} \text{ ve her pozitif } a \text{ genliği için}$$

$$\psi(x, t) = a \operatorname{sech}^2 [\beta(x - ct)] \quad (1.1)$$

olarak elde edildi. Bununla beraber Boussinesq daha fazlasını yaptı. Eğer düzgün h yüksekliğine sahip düz tabanlı bir su kanalında ilerleyen çok büyük dalga uzunluğuna ve h 'ye bağlı olarak düşük bir genliğe sahip bir su dalgasının yaklaşık olarak

$$\eta_{tt} - g h \eta_{xx} - g h \left(\frac{3}{2h} \eta^2 + \frac{h^2}{3} \eta_{xx} \right)_{xx} = 0 \quad (1.2)$$

denklemini sağladığını keşfetti ($\eta = \eta(x, t)$), t zamanına bağlı olarak su yüksekliğinin x koordinatındaki yüksekliğini gösteren bir fonksiyon, g yer çekimi ivmesi ve \sqrt{gh} ise sığ su dalgasının hızıdır). Bu denklem İki Yönlü (Bidirectional) Boussinesq denklemi olarak bilinir. Bu denklemi kullanarak pozitif ve negatif x yönünde ilerleyen su dalgalarının açık gösterimini elde etti. Yani,

$$\eta_{sol}(x, t) = a \operatorname{sech}^2(x) \left[\sqrt{\frac{3a}{h^3}} (x \pm ct) \right] \quad (1.3)$$

Boussinesq (1.2) denkleminin çözümlerinin davranışını araştırırken bu günlerde tek dalga çözümlerinin tutarlılığı adı verilen teorinin kökenini buldu.

1895 yılında D. J. Korteweg ve G. de Vries Russel tarafından gözlemlenen fenomenin matematiksel modelini formüle ettiler. Onlar bunu yaparken açıkça Boussinesq'in çalışmalarından haberdar değillerdi. Onlar su yüzey yoğunluğunun ρ olduğu tek yönlü ilerleyen dalgalar için

$$v_t = \frac{\sqrt{gh}}{h} \left[\left(\varepsilon + \frac{3}{2}v \right) v_x + \frac{1}{2} \sigma v_{xxx} \right] \quad (1.4)$$

denklemini elde ettiler. Burada $v = v(x, t)$ hareket eden dalganın x koordinatı, ε çok küçük bir parametre ve $T(\leq \frac{1}{3}\rho h^2)$ yüzey gerilimi ihmal edilebilir olduğunda $\tau = h \left(\frac{h^2}{3} - \frac{T}{g\rho} \right) \sim \frac{1}{3}h^3$ tür. Aslında bu ifade Korteweg-de Vries denkleminin orijinal formudur. Bu denklem sonradan KdV denklemi olarak adlandırılacaktır. Dikkat edilirse bu denklemin bulunmasında kullanılan yaklaşık değer uzun dalganın x yönünde artan yayılımına göre bulunmuştur. (1.4) denklemi tek dalgalar için kullanılan en basit ve kullanışlı lineer olmayan model denklemlerinden biridir.

Yirminci yüzyılın ilk yarısına kadar tek dalgalar ve bağlı evolüsyon denklemler bilimsel konuşmaların ana başlıklarından biri değildir. Teorideki modern gelişmeler ve KdV tek dalgaların uygulamaları 1955 yılında Enrico Fermi, John Pasta ve Stanislaw Ulam'ın ayrık lineer olmayan kütle-yay sistemi üzerinde yayınladıkları Los Alamos Bilimsel Laboratuar çalışmasıyla başlar.

1941 yılında Debye harmonik olmayan latislerdeki sonlu termal iletkenliğin yaylardaki lineer olmayan kuvvetlerden kaynaklandığını iddia etti. Bu iddia Fermi, Pasta ve Ulam'ın düzgün bir başlangıç koşulu ile lineer olmamadan dolayı enerjinin tüm modlar arasında giderek eşit parçalanacağına inanmalarına sebep oldu. Fakat onların çalışmaları modlar arasında eşit bir enerji parçalanmasının olmayacağını açık bir şekilde ortaya çıkardı. Onların buluşu tam olarak ısı iletimine karşılık gelmiyordu. Bu basit kütle ve yay sisteminin başlangıç koşulları yakınındaki bir özelliği gibi gözüküyordu. Yani beklenenin aksine bir çeşit ısınma değildi. Buna rağmen tüm enerji başlangıçta en düşük modda iken sonraları farklı düşük modlarda gidip geliyordu. Sonunda en düşük moda dönüyordu ve bunlar bir seri tekrar aşamalarıydı. Bu ayırt edici gerçek, Fermi-Pasta-Ulam (FPU) tekrar yaklaşım (recurrence) aşamaları olarak adlandırıldı. Bir Los Alamos raporu tam zamanında oluşturulmuş fakat o zamanlarda yeterince aktif olmamıştır.

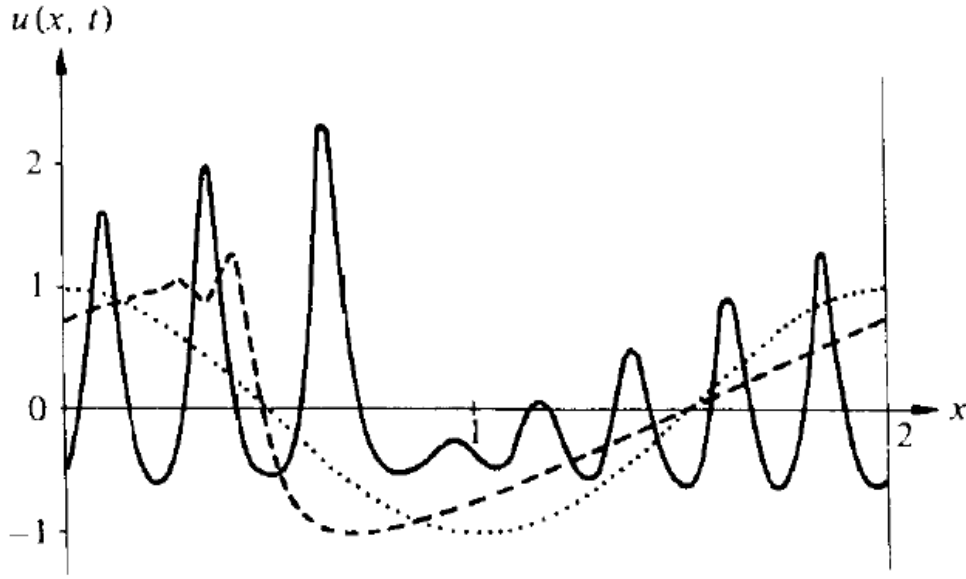
Birkaç yıl sonra Gardner ve Marikawa nükleer füzyondan kaynaklanan soğuk çarpışmalı bir plazmanın kararlılığı üzerine çalıştılar. Tam magneto-hidrokinamik denklemlerde çalışmaya başlayarak plazmanın hareketi üzerinde varsayımda bulunmaya başladılar. Sonuçta fiziksel içeriği farklı olmasına rağmen Boussinesq ve Kortewg-de Vries ile aynı formülü buldular. Daha sonraları Fermi, Pasta, Ulam, Gardner ve Marikawa'nın çalışmaları Kruskal ve Zabusky'e ilham vererek lineer olmayan kütle yay sisteminin sürekli bir modelini formüle etmelerini ve tekrarlayan oluşumları anlamalarını sağladı. Gerçekte, başlangıç değerli KdV denklemini

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

olarak ele almışlardı. Burada $\sigma > 0$ başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (1.6)$$

ve periyodik sınır koşulu 2 olarak alınmıştı. Yani tüm t değerleri için $u(x + 2, t) = u(x, t)$ dir. $\sqrt{\sigma} = 0.022$ alındığında nümerik çalışmalar değişik ve ilginç sonuçlar verdi. Gerçekte çözümler sonraları sekiz iyi dalga serisi geliştirildi (Bakınız Şekil 1.4). Her biri sech^2 fonksiyonuna benziyordu ve uzun (hızlı) dalgalar kısa (yavaş) dalgalara yetişerek geçiyordu. Bu dalgalar KdV denkleminde göre lineer olmayan etkileşimlerde bulunuyordu. Ve etkileşimden sonra genlik ve şekillerinde bir değişiklik olmuyor sadece fazlarında ufak bir değişim oluyordu. Sonuç olarak en ilgi çekici özellikleri bu dalgaların lineer olmayan bir etkileşimden sonra şekillerini korumalarıydı. Diğer bir dikkat çekici sonuçta, başlangıç profilleri FPU tekrar oluşum profiline çok benziyordu. Bu dalgaların şeklini koruması parçacık hareketini anımsattığından Kruskal ve Zabusky bu tek dalgalara solitonlar adını verdiler. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky'nin makalelerini yayınlamaları ile "Soliton" olarak adlandırılan yeni bir terim doğmuş ve bu terim parçacık gibi davranan büyüklüklere verilmiştir (Zabusky ve Kruskal 1965). Lax 1968 yılında KdV denklemi ile gösterilen iki farklı solitonun lineer olmayan etkileşiminin korunduğu analitik çözümünü verir. Bu keşifler teorik, deneysel ve bilgisayar destekli çalışmaların son yıllarda artmasına sebep olmuştur.



Şekil 1.4. KdV denkleminin periyodik sınır-değer probleminin çözümü. $t = 0$ başlangıç profili noktalı çizgi ile, $t = \frac{1}{\pi}$ profili kırık çizgi ile ve $t = \frac{3.6}{\pi}$ profili tam bir çizgi ile gösterilmiştir (Drazin ve Johnson 1989).

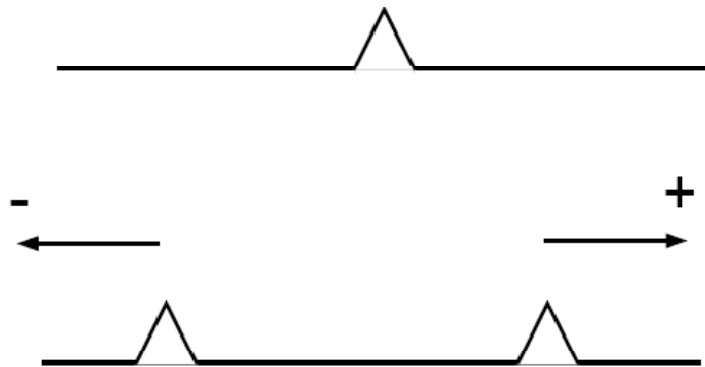
Örneğin, KdV denkleminin tam çözümünün çok akıllıca bir yöntemle oluşturulması Gardner, Kruskal, Greene ve Miura'nın Ters Saçılım Transformasyonu (Inverse Scattering Transform) veya Ters Saçılım Yöntemi (Method of Inverse Scattering) ile 1974 yılında elde edildi. Bu yöntem ile diğer birçok lineer olmayan denklem çözülmüştür (Pava 2009).

2. İLERLEYEN DALGALAR

Doğada çok farklı dalga tipleri bulabiliriz. Kesin bir dalga tanımını vermek oldukça güçtür. Bununla beraber içerdiği fiziksel olayları, nasıl bir matematiksel problemi formüle ettiği ve nasıl çözüldüğünü göstermeye örnek verilebilir. Bunlardan bir kaçını sayarsak: nehir veya okyanuslardaki su dalgaları, su üstündeki veya su altındaki akustik dalgalar, biyolojik dalgalar, kimyasal dalgalar ve hatta statlardaki dalgalar (Meksika Dalgası veya La Ola). Tüm bu dalgalar farklı yapıdadır. Fakat hepsinin ortak bir noktası vardır: Bir bilgi iletilmektedir. Örneğin Meksika dalgasını ele alalım. Burada iletilen bilgi ayağa kalkmak, kollarını kaldırmak ve oturmaktır. Etrafına bakarak bir kişi bu bilginin kendisine ulaştığını bilir. Böylece çok iyi tanımlı bir hızla ilerleyen çok iyi tanımlı bir dalga iletimini görürüz. Bu bilgi tüm stat etrafında sabit bir hız ve şekille hareket eder. Bu da bir ilerleyen dalgayı karakterize eder. Bu tüm dalgalarda oluşmaz. Dikkat edersek dalga ile bir şey taşınmaz fakat bilgi taşınır (Nachbin 1999).

İlerleyen bir dalga (Travelling wave) uzayda veya herhangi bir ortamda hareket eden sabit titreşimli bir şekil oluşturmeyen bir dalgadır. Böyle dalgaların varlığı hiperbolik denklemlerle gösterilen fenomenlerin tanımlanmasıyla başlamıştır. Sınır impulsların ilerlemesi, kimyasal yanma, genetiği değiştirilmiş (veya klonlanmış) organizmalar ve aerodinamikteki birçok olay bir ilerleyen dalga davranışı gösterir.

Bir teli çekip bıraktığımızda zıt yönde hareket eden iki ilerleyen dalga oluşur. Bu iki dalga da aynı şekle ve hıza sahiptir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Bir teli çekip bıraktığımızda oluşan zıt yönde hareket eden iki ilerleyen dalga (Ritzwoller 2005).

Tüm bu alanlardaki ortak nokta dalga ilerleyişi teriminin en basit bir boyutlu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

dalga denklemi ile modellenmesidir. Burada c pozitif bir sabittir.

3.1. İlerleyen Dalga Çözümleri

İlerleyen dalga çözümleri, $u(x, t) = f(x - ct)$ biçimindeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Burada $f: R \rightarrow V$ tanımlı bir dalga şekli oluşturan bir fonksiyon, x uzay değişkeni ve c sabiti de dalganın ilerleme hızıdır (Palais 2000).

Fisher denklemi, ilerleyen dalga çözümlerinin varlığı ispatlanan ilk lineer olmayan parabolik denklemdir. Fisher denklemi 1937 yılında R. A. Fisher tarafından avantajlı bir genin uzaydaki dağılımının modellenmesi için önerilmiştir. Böyle çözümlerin varlığını R. A. Fisher'in denklemini çalışan A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii ve N. S. Piskunov bulmuştur (Mbah ve Loth 2005).

Bu çözümler, $u(-\infty, t) = \text{sabit}$ ve $u(\infty, t) = \text{sabit}$ sınır koşullarını sağlar. $u(-\infty, t) = u(\infty, t)$ eşitliği durumunda ilerleyen dalgaya bir titreşim denir.

İlerleyen dalga çözümlerinin, tüm denklem çeşitleri için varlığını gösteren genel bir formül bulmak güçtür. Bu yüzden her sistem için ayrı ayrı çalışılır. Bununla beraber aşağıdaki prosedür uygulanabilir:

- Öncelikle kısmi diferansiyel denklemin $u(x, t) = f(x - ct)$ biçiminde bir çözümü olduğu kabul edilir.
- Bu önerme kullanılarak kısmi diferansiyel denklem $f(\xi)$, $\xi = x - ct$ dalga biçiminde bir adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

2.1.1. İlerleyen Dalga Çözüm Çeşitleri

Sıg su dalgalarından plazma fiziğine birçok bilim dalında hızla gelişen tek dalga teorisinde çok çeşitli ilerleyen dalga çözümleri vardır. Şimdi bu çeşitlerden bazılarını açıklayalım.

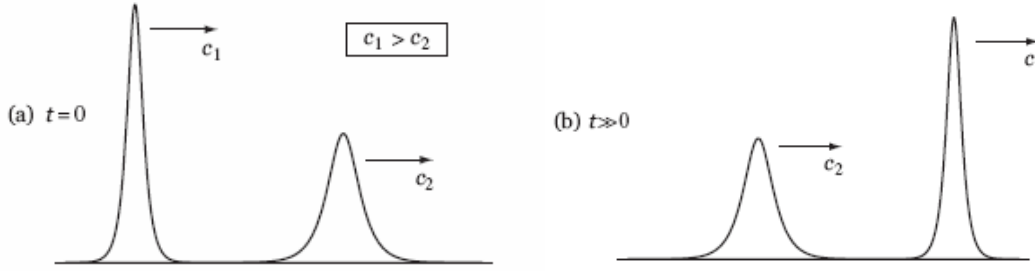
2.1.1.1. Tek Dalgalar ve Solitonlar

Tek dalgalar (Solitary waves) sabit hızlı ve şekilli olup sınırlı ilerleyen dalgalardır. Uzun mesafelerde asimptotik olarak sifıra yaklaşır.

Solitonlar da bir çeşit özel tek dalgalardır. Soliton çözümler boyutsal olarak sınırlı çözümlerdir. Yani, $\xi = x - ct$ için $\xi \rightarrow \pm\infty$ iken $u'(\xi), u''(\xi)$ ve $u'''(\xi) \rightarrow 0$ olur. Solitonların dikkate değer bir diğer özelliği diğer solitonlarla etkileşime girdiklerinde özelliklerini koruyabilmeleridir.

Solitonlar birçok fiziksel fenomende karşımıza çıkarlar. Solitonlar bir ortamdaki lineer olmayan ve dispersive etkiler arasındaki zarif bir dengeden kaynaklanır. Soliton ismi Zabusky ve Kruskal tarafından verilmiştir. Solitonlar sech^2 çan şekilli veya kink biçiminde olabilir. Solitonlar parçacıklar gibi hareket ederler yani bir çarpışmadan sonra özelliklerini korurlar. Solitonun kesin tanımını vermek zordur. Bununla beraber Drazin ve arkadaşları solitonu lineer olmayan bir denklem (veya sistemin) çözümü olarak tanımlamışlar ve aşağıdaki özelliklere sahip olması gerektiğini belirtmişlerdir:

- Sürekli formda bir tek dalga,
- Sınırlıdır, sonsuza yaklaşırken söner veya bir sabite yaklaşır,
- Diğer solitonlarla etkileşime girdiğinde kimliğini kaybetmez (Şekil 2.2),
- Lineer olmayan etki ile dispersive etki arasındaki zarif bir dengeden kaynaklanır.



Şekil 2.2. İki solitonun birbiriyle etkileşimi.

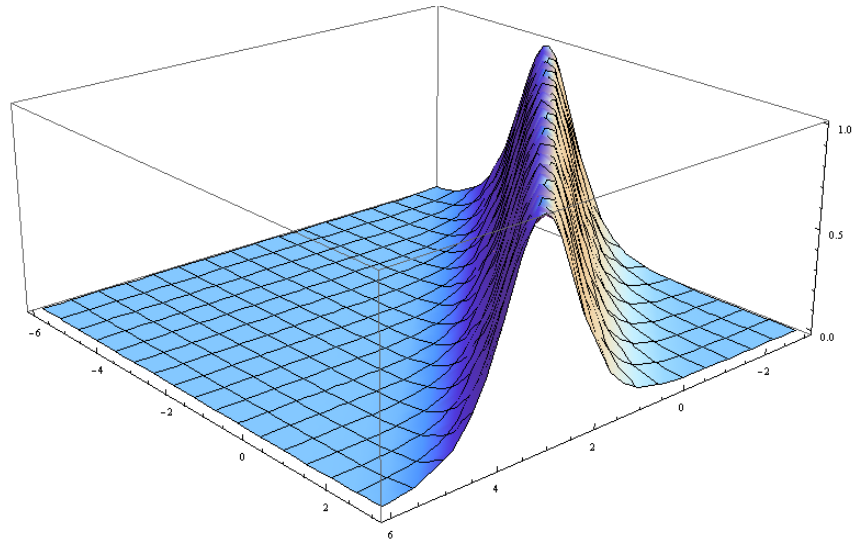
Fizik literatüründe tek dalga ile solitonlar genelde birbiriyle karıştırılır. Genellikle bir soliton çözüm bir tek dalga olarak gösterilirken, çözümde birden fazla soliton varsa soliton olarak adlandırılırlar (Wazwaz 2009).

Solitonlar $10^{-9}m$ 'den 10^9m ölçülerinde gözlemlenmiştir. Spiral galaksilerdeki yoğun dalgalar, Jüpiter'in atmosferindeki kırmızı nokta (Red Spot), çeşitli plazma dalgaları, sıg su dalgaları, sıvı kristaller, lazer atışları, akustik, yüksek ısıli süper iletkenler, moleküler sistemler, sinir atışları, popülasyon dinamiği vb. örnekler verilebilir.

Özel olarak, 1+1 boyuttaki (1 konum+1 zaman boyutu) lineer olmayan KDD'lerin solitonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (1) Konumsal olarak sınırlıdır.
- (2) Dalgalar sürekli formdadır.
- (3) Bir soliton diğeri bir soliton ile çarpıştığında her ikisi de özelliklerini ve hızlarını çarpışmadan sonra korur.

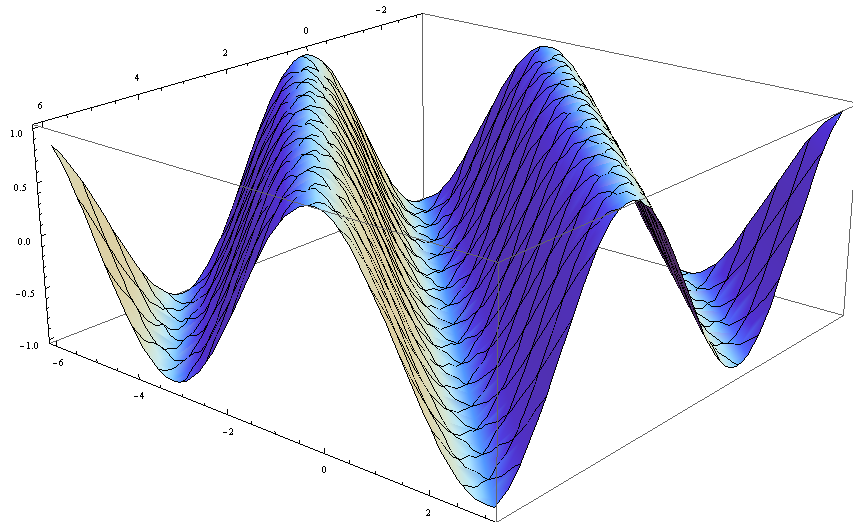
Genellikle matematikçiler yukarıdaki üç özelliği sağlayan çözümlere soliton olarak adlandırılırlar. Ve ilk iki özelliği sağlayan çözümlere de tek dalgalar (solitary wave) olarak adlandırılırlar. Üçüncü özellik lineer olmayan KDD'lerin integre edilebilirlikleri ile ilgilidir. Bununla beraber birçok fizik makalelerinde soliton kavramı çok geniş bir şekilde kullanılmıştır (İkinci ve üçüncü şartlar sağlamasa bile). Çünkü dünyamızda bu kavram o kadar çok yararlı ve verimlidir ki sadece soliton denklemlerin mükemmel matematik dünyasına bırakılmaması gerekir (Maccari 2006).



Şekil 2.3. $\text{sech}^2(x-t)$, $-3 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 3$ soliton çözümünün grafiği, sonsuz yan destek veya kuyruğa sahiptir.

2.1.1.2. Periyodik Çözümler

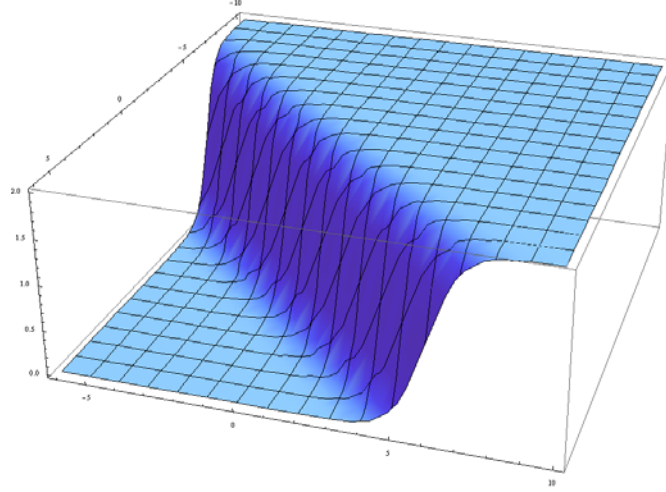
$\cos(x-t)$ şeklinde periyodik olan ilerleyen dalga çözümlerine Periyodik Çözümler denir.



Şekil 2.4. $u = \cos(x-t)$, $-3 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 3$ periyodik çözümünün grafiği.

2.1.1.3. Kink Çözümler

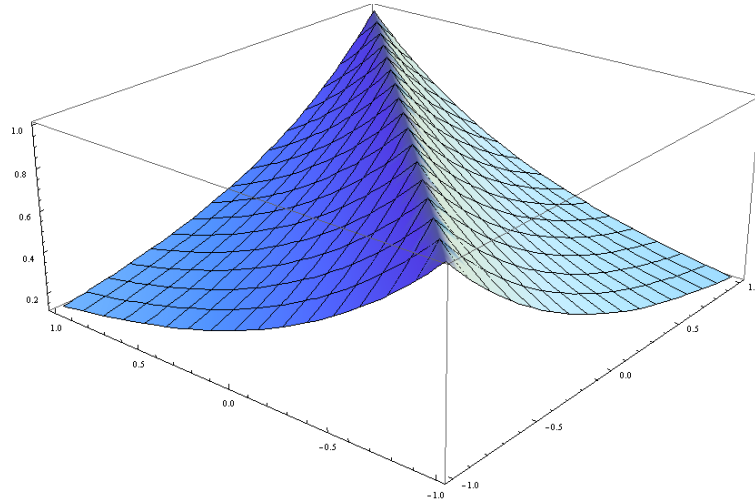
Kink çözümler (Kink solutions), bir asimptotik durumdan diğer bir asimptotik duruma geçerek alçalan veya yükselen ilerleyen dalga formundaki çözümlerdir. Kink çözümler sonsuzda bir sabite yaklaşır.



Şekil 2.5. $u = 1 - \tanh(x - t)$, $-10 \leq x \leq 6$, $-6 \leq t \leq 10$ kink çözümünün grafiği.

2.1.1.4. Peakon

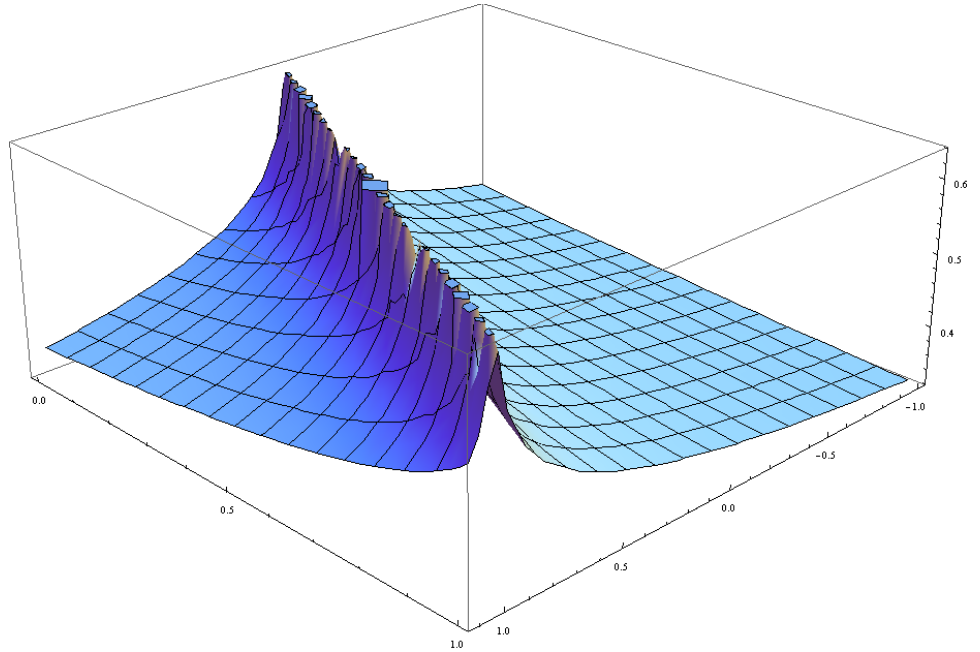
Peakon pik yapmış tek dalga çözümleridir. Bu durumda ilerleyen dalga çözümleri pikin zirve köşesi dışında her yerde düzgündür. Peakon boyutsal türevlerin işaret değiştirdiği noktalardır. Bu yüzden peakonlar $u(x, t)$ çözümünün birinci türevinde sonlu sıçrama noktasına sahiptir. Peakonlarda çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını koruyan solitonlardır. Peakonlar araştırmalar sonucu iki kısma ayrılmıştır: Üstel olarak sönen ve periyodik peakonlar.



Şekil 2.6. $u = e^{-|x-t|}$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$ bir peakon çözümünün grafiği.

2.1.1.5. Cusponlar

Cusponlar diğer bir çeşit soliton çözümler olup zirvelerinde cusponlar oluşur. Peakonlar tersine tepe noktasında türev sadece işaret değiştirir ve bir cuspon sıçrama noktasındaki türevler ıraksaktır.



Şekil 2.7. $u = e^{-(|x-t|)^{1/6}}$, $-1 \leq x \leq 1.1$, $0 \leq t \leq 1$ cuspon grafiği.

$u = (x, t)$ soliton çözümü $|x| \rightarrow \infty$ iken türevleri sifira yakınsar. Bu solitonun karakteristik özelliklerindedir.

2.1.1.6. Compacton

1993 yılında Rosenau ve Hyman yeni bir tek dalga sınıfı tanıttılar (Rosenau ve Hyman 1993). Bu tek dalga sınıfına “Compacton” adını verdiler. Compactonlar sonlu dalga uzunluğuna sahip solitonlar veya sonsuz bir kuyruğa sahip olmayan soliton olarak tanımlanabilir. Rosenau ve Hyman tek dalgaların lineer olmayan dispersiyon etkisiyle kompakt (yoğun) bir hale dönüştüğünü keşfettiler. Compacton’ların elastik olarak çarpıştıkları ve yeniden birleşerek eski yapılarına döndüğü ispatlanmıştır. Bu tip tek dalga çözümleri sonlu ana bir bölgenin dışında yok olurlar.

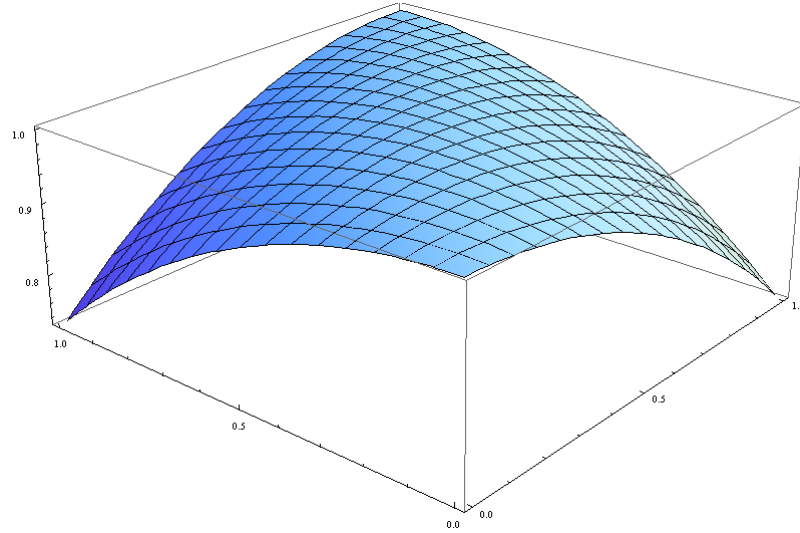
Solitonların aksine Compacton’lar analitik olmayan çözümlerdir. Analitik olmayan noktalar Compacton’un kenarındadır. Bu noktalar denklemin lineer olmayan noktalarına bağlıdır (Wazwaz 2009).

Compacton yeni bir soliton sınıfı olup kompakt boyutsal bir desteğe sahip olup öyle ki her bir Compacton sonlu bir merkeze sahiptir. Compacton’lar, önemli bir soliton özelliği olan, diğer bir Compacton ile çarpıştıktan sonra tekrar aynı şeklini koruyan tek dalgalar olarak da tanımlanmaktadır. Bu parçacık benzeri dalgalar soliton çarpışmalarına benzer elastik bir çarpışma gösterirler. Araştırmalar sonucu Compacton’ların kompakt bir desteğe sahip bir tek dalga olduğunu ve lineer olmayan dispersiyonun sonlu bir merkezi sınırladığından üstel kanatlarının olmadığını göstermiştir. Buradan Compacton’un sahip olduğu özellikleri şöyle özetleyebiliriz:

- Compacton’lar sonlu dalga boyuna sahip solitonlardır,
- Compacton’lar kompakt bir desteğe sahip solitonlardır,
- Compacton’lar üstel bir kuyruğu olmayan solitonlardır,
- Compacton’lar sonsuz kanatları olmayan solitonlar olarak karakterize edilir,
- Compacton’lar sağlam soliton-benzeri çözümlerdir.

Son birkaç yıldır Compacton'lar üzerindeki çalışmalar dikkate değer şekilde artmıştır. Compacton'ların bu saydığımız özelliklerinden en önemlisi şu ikisidir:

- 1- Standart KdV solitonlarının aksine $\xi \rightarrow \infty$ için $U(\xi) \rightarrow 0$ özelliğine sahip değildir, üstel kuyruk veya kanatlarının olmaması ile karakterize edilirler.
- 2- Standart KdV solitonlarının aksine genişlik azalınca genliği artmaz ve Compacton'ların genişliği genlikten bağımsızdır.



Şekil 2.8. $u(x,t) = \cos^2\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ compacton grafiği.

Compacton'lar üzerindeki araştırmalar süper deforme olmuş çekirdek, yerçekimsel füzyon vb. birçok bilimsel süreçlere yeni bir görüş katacaktır. Soliton ve Compacton kelimelerinin sonundaki -on takısı foton gibi parçacık özelliğine sahip olmasından dolayıdır (Wazwaz 2009).

3. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK YÖNTEMLER

Diferansiyel denklemler özellikle lineer olmayan karmaşık fiziksel süreçlerin açıklanmasının en etkili olanıdır. Fiziksel sistemlerin matematik modelleri genellikle lineer olmayan evolüsyon denklemleriyle gösterilir. Bu tür denklemlerin açık çözümleri, buna bağlı fiziksel problemlere bakış açışımızı değiştirdiğinden büyük bir öneme sahiptir (Meleshko 2005).

İlerleyen dalga çözümleri lineer olmayan bilimde önemli bir rol oynar. Bu çözümler titreşimler, solitonlar vb. doğadaki çok çeşitli fenomenlerin açıklanmasını ve fizik problemleri daha iyi anlamamızı sağlar.

Son yıllarda lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini elde etmek Mathematica, Maple vb. yazılım programları sayesinde oldukça dikkat çekmektedir. Bu programlar sayesinde oldukça karmaşık matematiksel işlemler kolaylıkla yapılabilmekte böylece lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin yeni çözümleri bulunabilmektedir.

Genel olarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü elde etmek için genel bir yöntem yoktur. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler genellikle çok çeşitli yöntemler ve sayısal çözümlerle çözümler. Fakat, tüm bu yöntemlerin ortak bir noktası vardır. Bu da verilen kısmi diferansiyel denklemin uygun dönüşümler yapılarak adi diferansiyel denkleme indirgenmesine dayanır.

3.1. Dalga Denkleminin d'Alembert Çözümü

Bir boyutlu dalga denklemini

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (3.1.1)$$

1752 yılında d'Alembert titreşen bir tele model olarak tanıttı ve analiz etti. Onun bu çalışması Euler (1759) ve sonra D. Bernoulli (1762) tarafından 2 ve 3 boyutlu dalga denklemlerine genişletildi (Brezis ve Browder 1998).

Şimdi bir boyutlu dalga denklemini çözümünü bir örnek üzerinde inceleyelim.

Bir violin telinin başlangıç pozisyonu

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.1.2)$$

olsun. Bu telin zaman bağı ve telin pozisyonu boyunca değişimini veren bir fonksiyon bulmak istiyoruz. Ayrıca, başlangıç hızını özelleştirmemiz gerekir:

$$u_t(x, 0) = g(x). \quad (3.1.3)$$

Böylece, bu bilgiler bize bir boyutlu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in R, t > 0 \quad (3.1.4)$$

dalga denkleminin

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \quad (3.1.5)$$

başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemini verir.

Dalga denkleminin başlangıç değer probleminde

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct \quad (3.1.6)$$

değişken dönüşümlerini yaparak

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x - ct, x + ct), \quad (3.1.7)$$

u 'nun ξ ve η 'ya göre türevleri zincir kuralından

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta, \\ u_{xx} &= (v_\xi)_\xi \xi_x + (v_\xi)_\eta \eta_x + (v_\eta)_\xi \xi_x + (v_\eta)_\eta \eta_x = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi (-c) + v_\eta (c), \\ u_{tt} &= -c(v_\xi)_\xi \xi_t + (-c)(v_\xi)_\eta \eta_t + c(v_\eta)_\xi \xi_t + c(v_\eta)_\eta \eta_t = c^2 (v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

bulunur. Bu dönüşümleri (3.1.4) denkleminde yerleştirdiğimizde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \quad (3.1.9)$$

denklemini de

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (3.1.10)$$

denkleminde indirgenir. Bu durumda (3.1.10) denklemini önce η 'ya göre sonrada ξ 'ye göre tekrar integre edersek,

$$v_{\xi} = F_1(\xi), \quad v(\xi, \eta) = \int F_1(\xi) d\xi + G(\eta) \quad (3.1.11)$$

denklemini elde edilir. Burada $F_1(\xi)$ ve $G(\eta)$ tek değişkenli keyfi fonksiyonlardır. F yine keyfi bir fonksiyon olmak üzere $F(\xi) = \int F_1(\xi) d\xi$ alınırsa

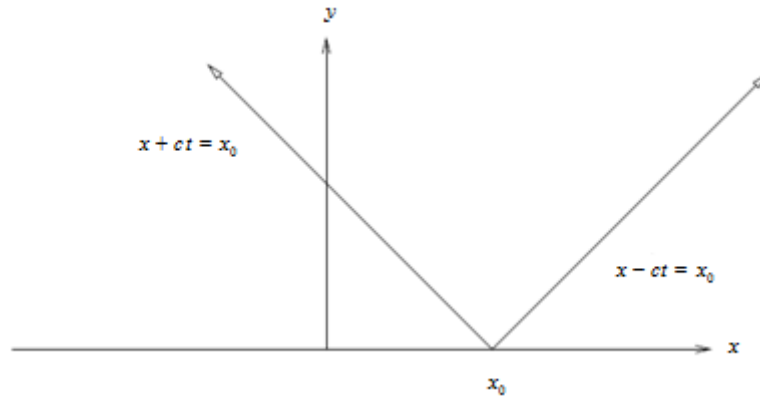
$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \quad (3.1.12)$$

ve böylece dalga denkleminin genel çözümü

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (3.1.13)$$

bulunur. Dikkat edersek $F(x - ct)$ ve $G(x + ct)$ fonksiyonlarının ikisi de dalga denkleminin çözümleridir. Bu çözüm aslında ilk dalga $F(x - ct)$ (sağa doğru hareket eder) ile ikinci dalganın $G(x + ct)$ (sola doğru hareket eder) toplamıdır. F ve G keyfi fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar başlangıç koşulları ile belirlenir.

$x - ct = \text{sabit}$, $c > 0$ için pozitif eğimli bir doğru belirtir. F bu doğru üzerinde sabittir. Benzer şekilde G , $x + ct = \text{sabit}$ doğrusu üzerinde bir sabittir (negatif eğimli). $x \mp ct = \text{sabit}$ doğrularına karakteristikler denir.



Şekil 3.1. İki karakteristik.

Böylece başlangıç koşullarını uygularsak

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad (3.1.14)$$

$$u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x) = g(x) \quad (3.1.15)$$

elde edilir. (3.1.15) denklemi sabit bir x_0 noktasına göre integrale edilirse C integral sabiti olmak üzere

$$-cF(x) + cG(x) + C = \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau \quad (3.1.16)$$

bulunur. (3.1.14) ve (3.1.16) denklemleri birlikte çözülürse

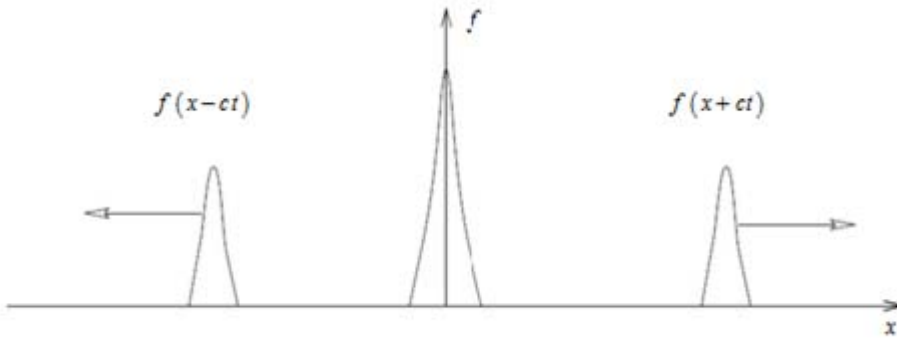
$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + \frac{C}{2c}, \quad (3.1.17)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{C}{2c} \quad (3.1.18)$$

elde edilir. Elde edilen F ve G fonksiyonları (3.1.13) denklemine yerleştirilirse

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (3.1.19)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüme dalga denkleminin d'Alembert çözümü adı verilir (Birnir 1998). Bu çözümler de sağa ve sola hareket eden iki ilerleyen dalga toplamıdır.



Şekil 3.2. Sağ ve sol ilerleyen dalgalar.

3.2. KdV Denklemine Tam Çözümü

KdV denklemini başlangıç veya sınır koşulu olmadan genel tam çözümlerini bulalım. Bu çözümler tek dalga veya soliton çözümler olarak da adlandırılır.

Bunun için KdV denklemini

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.2.1)$$

standart formunda ele alalım. Bu denklemin ilerleyen dalga çözümleri c bir sabit olmak üzere

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (3.2.2)$$

olsun. Bu dönüşümü (3.2.1) denklemine uygularsak

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0 \quad (3.2.3)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi bir kez integre edersek A integral sabiti olmak üzere

$$-cf - 3f^2 + f'' = A \quad (3.2.4)$$

denklemini elde edilir. (3.2.4) denklemini $2f'$ ile çarpıp bir kez integrallersek B bir integral sabiti olmak üzere

$$-cf^2 - 2f^3 + (f')^2 = 2Af + B \quad (3.2.5)$$

denklemini elde edilir. Bu aşamada $\xi \rightarrow \pm\infty$ iken $f, f', f'' \rightarrow 0$ 'a giden sınır koşullarını uygulayalım. Bu durumda A ve B sabitlerinin ikisi sıfır alınırsa

$$(f')^2 = f^2(2f + c) \quad (3.2.6)$$

eşitliği elde edilir. A ve B sabitleri sıfırdan farklı alınırsa bu durumda oluşan çözümler eliptik integraller şeklinde gösterilir.

Sadece $(f')^2 \geq 0$, $2f + c \geq 0$ ise reel çözümler oluşur.

(3.2.6) denklemini integrallenirse

$$\int \frac{df}{f\sqrt{(2f+c)}} = \pm \int d\xi \quad (3.2.7)$$

ve $f = -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2 \theta$ dönüşümü ($c \geq 0$) uygulanırsa

$$f = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} \xi \quad (3.2.8)$$

veya x_0 integral sabiti olmak üzere,

$$u(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \quad (3.2.9)$$

çözümü elde edilir. \pm seçimi keyfidir (ihmal edilebilir) çünkü çözüm çift fonksiyondur. Ayrıca x_0 değerinin çok önemli bir rolü yoktur (Bir faz ötelenmesidir).

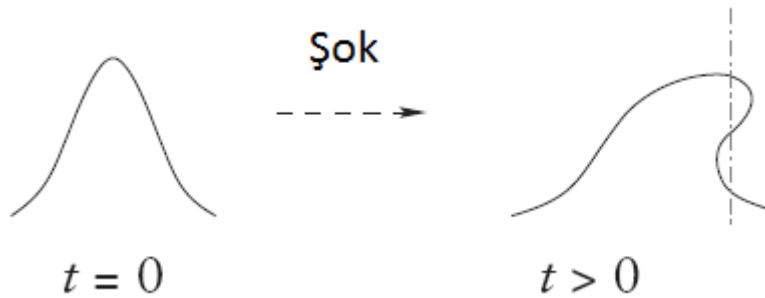
Sabit bir tek dalga oluşmasının sebebi lineer olmayan terim ile dispersiyon teriminin neden olduğu etkilerin birbirini yok etmesinin sonucudur.

Şayet dispersive terim olmasaydı denkleminiz

$$u_t - 6uu_x = 0 \quad (3.2.10)$$

formunda olurdu. Bu denklemin çözümünün birinci türevinde $t_0 > 0$ anında

bir süreksizlik noktası oluşur. Bunu sonucunda bir şok (shock) dalgası oluşur.

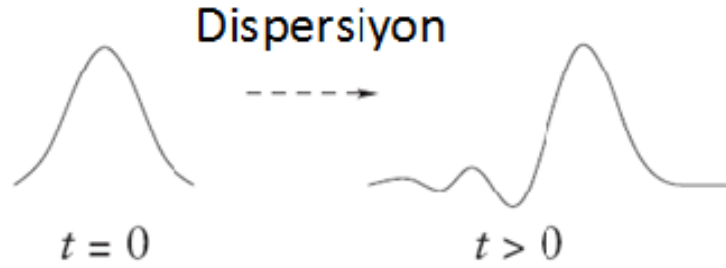


Şekil 3.3. (3.2.10) denkleminin şok dalga profili (Dunajski 2010).

Eğer lineer olmayan terim olmasaydı başlangıç dalga profili

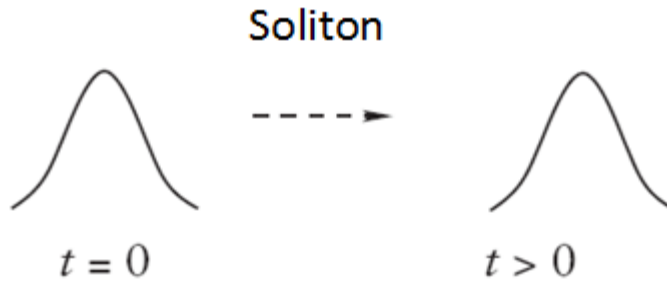
$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (3.2.11)$$

denkleminin evolüsyonu içerisinde saçılacaktır.



Şekil 3.4. (3.2.11) denkleminin dispersiyon dalga profili (Dunajski 2010).

Lineer olmayan terim ile dispersive terimin birlikte olması ile düzgün sınırlı soliton çözümler elde edilir (Dunajski 2010).



Şekil 3.5. KdV denkleminin soliton dalga profili (Dunajski 2010).

3.3. Direkt İntegral Yöntemi

Son on yılda lineer olmayan evolüsyon denklemlerin ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için birçok açılım yöntemi ortaya atılmıştır. Fakat bu yöntemlerin tamamı indirekt yöntemler olup çözümleri ele alınan bir denklemin çözümleri formundaki ön kabulüne dayanmaktadır. Bu indirekt yöntemler uygulanarak ele alınan denklemlerin tüm ilerleyen dalga çözümleri elde edilemez. Bununla beraber direkt integral yöntemi oldukça basit ve güçlü bir yöntemdir. Şayet lineer olmayan bir denklem direkt olarak

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{p_n(u)}} \quad (3.3.1)$$

integral formunda yazılabilirse, (3.3.1) denklemindeki integralin tüm çözümleri $p_n(u)$ n . derecedeki polinomun tam çarpanlarına ayrılması ile elde edilebilir (Liu 2008a).

3.4. Çarpanlara Ayırma Yöntemi

İlk zamanlarda linear olmayan evolüsyon denklemleri ilerleyen dalga dönüşümü ve integral alma ile çözülmüyordu. Bu yöntemler direkt ve etkili yöntemlerdi. Fakat bu yöntemlerle sadece bazı tip lineer olmayan evolüsyon denklemler çözülebiliyordu. Son zamanlarda ilerleyen dalga çözümlerini elde etmek için çok farklı yöntemler ortaya konmuştur.

Liu linear olmayan evolüsyon denklemlerinin tüm ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için direkt integral yöntemi ve polinom sistemlerinin tam ayrımı yöntemini ortaya koymuştur. Lineer olmayan evolüsyon denklemlerini adi diferansiyel denklem formuna indirgeyerek incelemiştir. Bu indirgemeyi ilerleyen dalga dönüşümü ve direkt integral olarak elde etmiştir. Daha sonra polinom sistemlerinin tam ayrımı ile tüm ilerleyen dalga çözümlerini elde ettiğini iddia etmiştir.

Resu ve Coninegü Perez ise bir kısım adi diferansiyel denklemleri çözmek için bir Çarpanlara Ayırma (Factorization) Yöntemi ortaya koymuştur. Fakat bu yöntem ile sadece ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Çarpanlara Ayırma Yöntemi'ni genellikle Schrödinger'e mal etseler de bu tekniği ilk kez P. A. M. Dirac'ın *The Principles of Quantum Mechanics* adlı kitabında rastlamaktayız. Dirac bir boyutlu kuantum salıngacı (osilatör) için oluşturulan spektral problemi çözmek için bu yöntemi kullanmıştır (Mielnik ve Rosas-Ortiz 2004).

3.4.1. İkinci Mertebeden Bir ADD'in Çarpanlara Ayrılması

Lineer olmayan ikinci mertebeden

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} - \frac{dU}{d\theta} + F(U) = 0 \quad (3.4.1)$$

ADD'lerin çarpanlara ayrılışı daha önceden çalışılmış ve bu denklem $D = \frac{d}{d\theta}$ olmak üzere

$$[D - f_2(U)][D - f_1(U)]U(\theta) = 0 \quad (3.4.2)$$

şeklinde çarpanlara ayrılmıştır. Rosu ve Perez ise bu ifadeyi

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} - \left(f_1 + f_2 + \frac{df_1}{dU}U \right) \frac{dU}{d\theta} + F(U) = 0 \quad (3.4.3)$$

olarak ele almışlardır. (3.4.1) ve (3.4.3) denklemlerini karşılaştırarak

$$f_1(U) f_2(U) = \frac{F(U)}{U}, \quad (3.4.4)$$

$$f_2(U) + \frac{d(f_1(U)U)}{dU} = 1 \quad (3.4.5)$$

koşullarını elde etmişlerdir (Cornejo-Pérez ve ark. 2006).

Bu yöntemi Deng-Shan Wang ve Hongbo Li genişleterek daha karmaşık denklemler ve denklem sistemlerinin tek dalga çözümlerini elde etmişlerdir (Wang ve Li 2008).

3.5. Hiperbolik Tanjant Yöntemi

Tanh yöntemi (Tanh Method) ilk kez Willy Malfliet tarafından 1992 yılında geliştirilmiştir (Malfliet 1992). Tanh fonksiyonu yöntemi çeşitli araştırmacılar tarafından kullanılmıştır. Bu araştırmacılar olası bir çözüm bulmak için tanh fonksiyonu şeklinde bir kuvvet serisini ele alarak bu açılımı direkt olarak denklemde yerine koyarak çözmeye çalışmışlardır. Fakat bu kuvvet serisinin katsayılarının ve hızının hesaplanabilmesi için çok sayıda cebirsel denklem çözümü gerekmektedir. Bu sebeble

G. C. Das ve Jnanjyoti Sarma (Das ve Sarma 1999) gibi araştırmacılar bu yönteme Tanh-Yöntemi denilmesine karşı çıkmışlardır.

Bu teknikte, hiperbolik tanjant fonksiyonunun türevleri de tekrar hiperbolik tanjant fonksiyonu olacağından tanh fonksiyonu şeklinde yeni bir değişken tanımlanmıştır. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= 1 - \tanh^2 x, \\(\tanh x)'' &= -2 \tanh x (\tanh x)' = -2 \tanh x + 2 \tanh^3 x \quad \text{vb.}\end{aligned}$$

Tanh Yöntemi'nin ana hatları şöyle sıralayabiliriz:

Bir boyutlu lineer olmayan evolüsyon denklemini

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) \quad (3.5.1)$$

ele alalım.

İlk adım olarak x ve t bağımsız değişkenlerini yeni bir $\xi = k(x - Vt)$ değişkeni ile birleştirelim. Bu dönüşümü yapıldığında $u(x, t)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = k(x - Vt) \quad (3.5.2)$$

şekline dönüşür. Buradaki $U(\xi)$, V hızıyla ilerleyen dalga çözümlerini gösterir. Genellikle, k dalga sayısı keyfi olarak alınır, fakat bazı durumlarda özel bir sabit değer olarak da alınabilir. Bu değişken hareketin ilerleme yönünü belirler. Buradaki k ilerleyen dalgaların dalga sayısını, V ilerleyen dalganın hızını göstermektedir. Her iki parametrede belirsiz olup, $k > 0$ durumunu ele alacağız. $u(x, t)$ bağımlı değişkeni $U(\xi)$ ile değiştirildiğinde (3.5.1) denklemi

$$-kV \frac{dU}{d\xi} = G\left(U, k \frac{dU}{d\xi}, k^2 \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots\right) \quad (3.5.3)$$

$U(\xi)$ şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Bizim ana amacımız bu adi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini hiperbolik tanjant fonksiyonu biçiminde bulmaktır. Bu amaçla da (3.5.3) adi diferansiyel denkleminde yeni bir $Y = \tanh(\xi)$ bağımsız değişkeni tanımlanarak gerekli dönüşüm yapıldığında $U(\xi)$ ifadesinin mümkün olabilecek sayıda integrali alınır.

Daha sonra

$$\xi \rightarrow \pm\infty \text{ için } U(\xi) \rightarrow 0 \text{ ve } \frac{d^n U(\xi)}{d\xi^n} \rightarrow 0 \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (3.5.4)$$

sınır koşulları göz önünde bulundurularak varsa tüm integral sabitleri sıfır olarak alınır.

İlerleyen dalga çözümlerinin $\tanh(\xi)$ şeklinde olduğu varsayılarak, $Y = \tanh(\xi)$ şeklinde yeni bir bağımlı değişken tanımlanır. $U(\xi) = F(Y)$ adi diferansiyel denklemindeki katsayılar yalnız Y değişkenine bağlı olup (3.5.3) denklemindeki $\frac{d}{d\xi}$ ifadesi $(1-Y^2)\frac{d}{dY}$, ...vb. ifadeler ile yer değiştirilir. Böylece

$$u(x,t) = U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^N a_n Y^n \text{ ve } Y = \tanh(\xi) = \tanh[k(x-Vt)] \quad (3.5.5)$$

şeklinde çözümler bulunur.

Buradaki N değeri, (3.5.5) denkleminin adi diferansiyel denkleme yerleştirilmesiyle elde edilen en yüksek dereceli lineer ve lineer olmayan terimlerin eşitlenmesi ile bulunur. Yapılan bu işleme Homojen Balans işlemi adı verilir.

3.6. Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi

1996 yılında Bo Tian ve Yi-Tian Gao Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi'ni (The Generalized Tanh Method) ortaya koydular (Tian ve Gao 1996). Bu yöntemde $u(x, y, t)$ tek dalga çözümleri

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^N a_m \tanh^m (bx + cy + dt) \quad (3.6.1)$$

formunda ele alınmıştır.

3.7. Genelleştirilmiş Tanh Yönteminin Genişletilmesi

1997 yılında Bo Tian ve Yi-Tian Gao Genişletilmiş Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi'ni ortaya koydular (Tian ve Gao 1997). Bu yöntemde $u(x, t)$ soliton benzeri çözümler, M bir tamsayı, $A_j(x, t)$ ve $\psi(x, t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^M A_j(x, t) \tanh^j [\psi(x, t)] \quad (3.7.1)$$

formunda ele alınmıştır.

3.8. Genişletilmiş Tanh Yöntemi

2000 yılında Engui Fan (Fan 2000) Tanh Yöntemi'nin başka bir versiyonu olan Genişletilmiş Tanh Fonksiyon Yöntemi'ni sunmuştur. Bu yöntem ile Malfliet tarafından ortaya konan Tanh Yöntemi arasındaki tek fark Tanh Yöntemi ile (3.5.1) denklemi için sadece $Y = \tanh(\xi)$ formunda hareket eden dalga çözümleri elde edilir iken Fan bu yöntem ile tan ve cot fonksiyonları cinsinden çözümler elde etmiştir.

Bunun için $Y = \tanh(\xi)$ formunda çözümler yerine

$$w' = b + w^2 \quad (3.8.1)$$

Riccati denkleminin çözümlerini kullanmıştır. Yani, $w(x,t) = \tanh(\xi)$ olarak alınmıştır.

Böylece Riccati denkleminin

$$w = \begin{cases} -\sqrt{-b} \tanh \sqrt{-b}\xi, \\ -\sqrt{-b} \coth \sqrt{-b}\xi, \end{cases} \quad b < 0, \quad (3.8.2)$$

$$w = -\frac{1}{\xi}, \quad b = 0, \quad (3.8.3)$$

$$w = \begin{cases} \sqrt{b} \tan \sqrt{b}\xi, \\ -\sqrt{b} \cot \sqrt{b}\xi, \end{cases} \quad b > 0, \quad (3.8.4)$$

çözümleri şeklinde (3.5.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir.

Engui Fan 2001 (Fan 2001) yılında yayınladığı bir başka makalesinde

$$w' = k(1 - w^2) \quad (3.8.5)$$

Riccati denklemini kullanarak (3.5.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini elde etmiştir. Fakat bu durumda sadece

$$w = \tanh(k\xi) \text{ ve } w = \coth(k\xi) \quad (3.8.6)$$

fonksiyonları şeklinde çözümler elde etmiştir.

Huaitang Chen ve Hongqing Zhang ise 2004 yılında yayınladıkları makalelerinde (Chen ve Zhang 2004) $Y = \tanh(\xi)$ formunda çözümler yerine

$$w' = A + Bw + Cw^2 \quad (3.8.7)$$

Riccati denkleminin çözümlerini kullanmıştır.

A. M. Wazwaz ise 2006 (Wazwaz 2006) yılında yayınladığı bir makalesinde Genişletilmiş Tanh Yöntemi adını verdiği yöntemde sonlu $Y = \tanh(\xi)$ seri çözümünü

$$u(\xi) = \sum_{p=-m}^m a_p Y^p \quad (3.8.8)$$

formunda ele almıştır.

3.9. Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh Yöntemi

2002 yılında S. A. Elwakil, S. K. El-labany, M. A. Zahran, R. Sabry Değiştirilmiş Tanh Yöntemi'ni (The Modified Extended Tanh-function Method) ortaya koydular (Elwakil ve ark. 2002) . Bu yöntemin diğer tanh yöntemlerinden farklı olan tek tarafı verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemde $u(x,t) = u(\zeta)$, $\zeta = x + \lambda t$ ilerleyen dalga dönüşümü yapıldıktan sonra çözümü

$$\omega' = b + \omega^2 \quad (3.9.1)$$

olmak üzere

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \omega^i + \sum_{i=0}^m b_i \omega^{-i} \quad (3.9.2)$$

formunda ele almasıdır. Burada b bulunması gereken parametre ve $\omega = \omega(\xi)$, $\omega' = \frac{d\omega}{d\xi}$

'dir. Ayrıca 2003 yılında Zhuo-Sheng Lü ve Hong-Qing Zhang tarafından ortaya konan başka bir Değiştirilmiş Tanh Yöntemi vardır (Lü ve Zhang 2003). Bu yöntemde çözümler

$$u(\xi) = a_0(x) + \sum_{i=0}^n a_i(x) \phi^i(\omega^i(x)) + \sum_{j=0}^n b_j(x) \phi^{-j}(\omega(x)) \quad (3.9.3)$$

formunda ele alınmıştır.

3.10. Genelleştirilmiş Genişletilmiş Tanh Yöntemi

2003 yılında Xuedong Zheng, Yong Chen ve Hongqing Zhang diğer tanh yöntemleriyle elde edilemeyen çözümleri Genelleştirilmiş Genişletilmiş Tanh Yöntemi (The Generalized Extended Tanh-function Method) adını verdikleri bir yöntemle bulmuşlardır (Zheng ve ark. 2003).

Bu yöntemde Tanh Yöntemi'ne benzer işlem basamaklarına sahiptir. Diğer yöntemlerden farklı yanı çözümleri aranan kısmi diferansiyel denklemde $u_i(x, t) = \phi_i(\xi)$, $\xi = x - \lambda t$ ilerleyen dalga dönüşümü yapıldıktan sonra çözümün

$$\phi_i(\xi) = a_{i0} + \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ a_{ij} \omega^j + b_{ij} \omega^{-j} + c_{ij} \omega^{j-1} \sqrt{R + \omega^2} + d_{ij} \frac{\sqrt{R + \omega^2}}{\omega^j} \right\} \quad (3.10.1)$$

formunda ele alınmasıdır. Burada $\omega = \omega(\xi)$ şeklinde olup

$$\omega' = \frac{d\omega}{d\xi} = R + \omega^2 \quad (3.10.2)$$

denkleminin çözümüdür.

4.11. Geliştirilmiş Tanh Yöntemi

2003 yılında Yong Chen, Biao Li ve Hongqing Zhang Genişletilmiş Tanh Yöntemi'ni geliştirerek yeni bir yöntem ortaya koydular (Chen ve ark. 2003). Bu yöntemde (3.5.3) denkleminin ilerleyen dalga çözümleri

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^m \omega^{i-1}(\xi) \left[A_i \omega(\xi) + B_i \sqrt{R + \omega^2(\xi)} \right] + A_0 \quad (3.11.1)$$

formunda ele alındı. Burada $\omega = \omega(\xi)$ şeklinde olup

$$\frac{d\omega}{d\xi} - (R + \omega^2) = 0 \quad (3.11.2)$$

denkleminin çözümüdür.

Bu yöntemlerin dışında Tanh Yöntemi'nden esinlenerek bazı araştırmacılar aşağıdaki yöntemleri ortaya koymuşlardır:

2002 yılında Xi-Qiang ve Liu Song Jiang Tanh Yöntemi'nden esinlenerek Secq-tanhq Yöntemi'ni geliştirmişlerdir (Liu ve Song 2002) .

S. A. Khuri 2004 yılında Schrödinger denklemi gibi kompleks değerli çözüme sahip lineer olmayan KDD'lerin çözümünü elde etmek için u çözüm fonksiyonunu

$$u(x,t) = u(i\xi) = \sum_{n=0}^N a_n \tanh^n(i\xi) \quad (3.11.3)$$

formunda ele almıştır (Khuri 2004).

3.12. Sin-Cos Yöntemi

Sin-Cos Yöntemi (Sine-cosine Method) Wazwaz tarafından 2004 (Wazwaz 2004) yılında geliştirilmiştir. Aslında literatüre baktığımızda daha öncede Sin-Cos Yöntemi (Yan 1996) ve geliştirilmiş Sin-Cos Yöntemi (Yan ve Zhang 1999) adı altında bazı yöntemler görmekteyiz. Fakat burada Wazwaz referans alınmıştır. Bu yöntemde Tanh Yöntemi'ne benzer çözüm basamaklarına sahiptir. Tek fark çözümleri tanh fonksiyonu yerine sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden almasıdır.

Yöntemin aşamaları şöyle sıralanır:

1. Öncelikle $\xi = x - ct$ dalga değişkeni ile

$$P(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.12.1)$$

KDD'i

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.12.2)$$

ADD'ine indirgenir. Burada $u(x,t) = u(\xi)$ bir ilerleyen dalga çözüdür ve $u' = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ 'i gösterir. (3.12.2) denklemi yeteri kadar integrallenir ve tüm integral sabitleri sıfır alınır.

2. $u(x,t)$ çözümleri

$$u(x,t) = \lambda \sin^\beta(\mu\xi), \quad |\xi| \leq \frac{\pi}{\mu} \quad (3.12.3)$$

ve

$$u(x,t) = \lambda \cos^\beta(\mu\xi), \quad |\xi| \leq \frac{\pi}{2\mu} \quad (3.12.4)$$

formlarında ele alınır. Burada μ , λ ve β bulunması gereken parametrelerdir. μ dalga sayısını ve c dalga hızını gösterir. (3.12.3) ve (3.12.4) eşitliklerinden

$$(u^n)'(\mu, \xi) = -n\beta\mu\lambda^n \cos^{n\beta-1}(\mu\xi) \sin(\mu\xi), \quad (3.12.5)$$

$$(u^n)''(\mu, \xi) = -n^2\beta^2\mu^2\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi)$$

ve

$$(u^n)'(\mu, \xi) = n\beta\mu\lambda^n \sin^{n\beta-1}(\mu\xi) \cos(\mu\xi), \quad (3.12.6)$$

$$(u^n)''(\mu, \xi) = -n^2\beta^2\mu^2\lambda^n \sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\sin^{n\beta-2}(\mu\xi)$$

bulunur. (3.12.5)-(3.12.6) eşitlikleri (3.12.2) denkleminde yerleştirildiğinde $\sin^R(\mu\xi)$ veya $\cos^R(\mu\xi)$ terimlerinden oluşan trigonometrik bir denklem elde edilir. Her denklem için homojen balanstan sinüs veya kosinüs fonksiyonları için R değeri bulunur. Daha sonra tüm aynı dereceli terimler kendi aralarında toplanarak katsayıları sıfıra eşitlenir. Böylece oluşan cebirsel denklem sisteminden μ , λ ve β bilinmeyenleri bulunarak istenen çözüm bulunmuş olur.

Tanh-Coth Yöntemi ile Sin-Cos yöntemlerinin ortak bir yanı da Pseudo Spectral Yöntemi, The Inverse Scattering Yöntemi, Hirota's Bilinear Yöntemi ve Truncated Painlevé Açılım Yöntemi gibi yöntemlere göre daha az matematiksel işlem içermesi ve çözümlerin Mathematica veya Maple gibi programlarla çok çabuk elde edilmesidir.

Literatürü araştırdığımızda bu yöntemden esinlenerek ortaya konan başka yöntemler de bulabiliriz. Örneğin 2006 yılında Yadong Shang (Shang 2006) tarafından geliştirilen Genişletilmiş Sinh-Cosh Yöntemi (The Extended Sinh-cosh Method) gibi.

3.13. Tanh-Coth Yöntemi

Bu yöntem ilk kez 2007 yılında A. M. Wazwaz tarafından ortaya konmuştur (Wazwaz 2007a,b). Bu yöntem de aslında Malfiet'in geliştirdiği Tanh Yöntemi'nin bir başka versiyonudur. Bu teknikte de, hiperbolik tanjant fonksiyonunun türevlerinin tekrar hiperbolik tanjant fonksiyonu olmasından yararlanılmıştır. Örneğin $T = \tanh(\xi)$ alınırsa

$$\begin{aligned} T &= \tanh(\xi), \\ T' &= 1 - T^2, \\ T'' &= -2T + 2T^3, \\ T''' &= -2 + 8T^2 - 6T^4, \\ T^{(4)} &= 16T - 40T^3 + 24T^5 \end{aligned} \quad (3.13.1)$$

olur. Yöntemin aşamaları şöyledir:

$$P(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.13.2)$$

KDD'i $\xi = x - ct$ dalga değişkeni ile

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.13.3)$$

ADD'ine indirgenir. (3.13.3) denkleminin tüm integral sabitleri sıfır alınarak yeteri kadar integrallenir. Diğer bir deyişle, μ dalga sayısı olmak üzere yeni bir

$$Y = \tanh(\mu\xi), \quad \xi = x - ct \quad (3.13.4)$$

bağımsız değişkeni tanımlanır, türevler

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi} &= \mu(1-Y^2) \frac{d}{dY}, \\
\frac{d^2}{d\xi^2} &= -2\mu^2 Y(1-Y^2) \frac{d}{dY} + \mu^2(1-Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2}, \\
\frac{d^3}{d\xi^3} &= 2\mu^3(1-Y^2)(3Y^2-1) \frac{d}{dY} - 6\mu^3 Y(1-Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + \mu^3(1-Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3}, \\
\frac{d^4}{d\xi^4} &= -8\mu^4 Y(1-Y^2)(3Y^2-2) \frac{d}{dY} + 4\mu^4(1-Y^2)^2(9Y^2-2) \frac{d^2}{dY^2} \\
&\quad - 12\mu^4 Y(1-Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} + \mu^4(1-Y^2)^4 \frac{d^4}{dY^4}
\end{aligned} \tag{3.13.5}$$

şeklinde olur. Tanh-Coth Yöntemi'nde

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k + \sum_{k=1}^M b_k Y^{-k} \tag{3.13.6}$$

sonlu açılımı kullanılır.

Bununla beraber bu yöntemde değişime uğramıştır. Örneğin Luwai Wazzan tarafından geliştirilen Değiştirilmiş Tanh-Coth Yöntemi vardır (Wazzan 2009). Bu yöntemde çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^n [a_j Y^j(\xi) + b_j Y^{-j}(\xi)] \tag{3.13.7}$$

açılımı ve

$$Y' = A + BY + CY^2 \tag{3.13.8}$$

Riccati denklemi ile elde edilir.

3.14. Üstel Fonksiyon Yöntemi

J. H. He ve X. H. Wu tarafından 2006 yılında geliştirilen bu yöntem sistematik olarak birçok araştırmacılar tarafından çalışılmış ve bu yöntem ile çok sayıda lineer olmayan evolüsyon denklem veya sistemi çözülmüştür (He ve Wu 2006). Bu yöntemin aşamaları şöyledir:

Öncelikle

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.14.1)$$

KDD'nde k ve w sabitler olmak üzere

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx + \omega t \quad (3.14.2)$$

dönüşümü yapılarak

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.14.3)$$

ADD'ine indirgenir. Buradaki türev sembolleri η 'ya göre türevleri göstermektedir.

Üstel fonksiyon yöntemi temel olarak ilerleyen dalga çözümlerinin

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\eta)}{\sum_{n=-p}^q b_m \exp(m\eta)} \quad (3.14.4)$$

formunda gösterilmesine dayanmaktadır. Buradaki c, d, p ve q keyfi pozitif tamsayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabitler olup daha sonra belirlenecektir. Buradaki c ve p sabitleri homojen balanstan belirlenir. Böylece (3.14.3) denkleminin çözümü

$$u(\eta) = \frac{a_c \exp(c\eta) + \dots + a_{-d} \exp(-d\eta)}{a_p \exp(p\eta) + \dots + a_{-q} \exp(-q\eta)} \quad (3.14.5)$$

formunda elde edilir.

Bu yöntem de farklı araştırmacılar tarafından farklı isimler adı altında değiştirilerek çalışılmıştır.

D. D. Ganji ve M. Abdollahzadeh tarafından Rasyonel Üstel Fonksiyon Yöntemi (The Rational Exp-function Method) olarak (Ganji ve Abdollahzadeh 2008), H. M. Fu ve Z. D. Dai tarafından İkili Üstel Fonksiyon Yöntemi (The Double Exp-function Method) olarak (Fu ve Dai 2009) ve A. T. Ali ve E. R. Hassan tarafından Genel Üstel Fonksiyon Yöntemi (General Exp_a-function Method) olarak çalışılmıştır (Ali ve Hassan 2010).

3.15. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi

2008 yılında M. Wang, X. Li ve J. Zhang tarafından ortaya konan son yıllardaki en etkili yöntemlerden biride $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion Method)'dir (Wang ve ark. 2008). Bu yöntemin aşamaları şu şekildedir :

x ve t bağımsız değişkenlerine sahip

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.15.1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. P denklemi, $u = u(x, t)$ şeklinde iki değişkenli, u ve u' nun kısmi türevlerini içeren lineer olmayan bir denklem olsun.

Adım 1. (3.15.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için $u(x, t) = U(\xi)$ dönüşümünü yapalım. Burada $\xi = x - Vt$ olmak üzere V dalganın hızını göstermektedir. Bu dönüşüm ile (3.15.1) denklemi

$$Q(U, U', -VU', U'', V^2U'', \dots) = 0 \quad (3.15.2)$$

denklemine dönüşür. Buradaki türev sembolleri ξ 'ye göre türevleri göstermektedir.

Adım 2. Mümkünse (3.15.2) denklemi birkaç kez integrallenir. Bu durumda oluşan integral sabitlerini kolaylık olsun diye sıfır alınır.

Adım 3. (3.15.2) denkleminin çözümü olan $U(\xi)$

$$U(\xi) = \sum_{m=0}^N a_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^m \quad (3.15.3)$$

şeklinde sonlu bir seri olarak ele alınır. Buradaki a_m sabitleri $a_N \neq 0$ olmak üzere reel sayılardır.

$G(\xi)$ fonksiyonu, λ ve μ reel sabitler olmak üzere

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \quad (3.15.4)$$

lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür ve bu denklem

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{G'}{G} \right) = - \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \lambda \left(\frac{G'}{G} \right) - \mu \quad (3.15.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Adım 4. N belirlenir. Bu genellikle (3.15.2) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ile lineer olmayan terimlerin dereceleri eşitlenerek belirlenir.

Adım 5. (3.15.3) ve (3.15.4) denklemleri (3.15.2) denklemine yerleştirildiğinde

$\left(\frac{G'}{G} \right)$ 'nin kuvvetleri elde edilir. $\left(\frac{G'}{G} \right)$ 'nin her teriminin sıfıra eşitlenmesi ile

a_i , λ , μ ve V terimlerinden oluşan cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Daha sonra bu denklem sistemi Mathematica veya Maple programı ile çözümlenerek bu sabitler belirlenir. Diğer taraftan, $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ determinantının işaretine göre (3.15.4) denkleminin çözümleri bulunur.

Bu yöntemde Tanh Yöntemi gibi farklı isimler adı altında çok değişikliklere uğramıştır. Bunlardan birkaçı; Jiao Zhang, Xiaoli Wei ve Yongjie Lu tarafından ortaya

konulan yeni bir Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G} \right)$ -Açılım Yöntemi (Zhang ve ark. 2008), Sheng

Zhang, Jing-Lin Tong ve Wei Wang tarafından ortaya konulan Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Zhang ve ark. 2008), Hai-Ling Lü, Xi-Qiang Liu ve Lei Niu tarafından ortaya konulan Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Lü ve ark. 2010), Guo and Zhou tarafından ilk kez ortaya konulan Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Guo ve Zhou 2010), Ling-xiao Li, Er-qiang Li ve Ming-liang Wang tarafından geliştirilen $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Li ve ark. 2010), Shimin Guo, Yubin Zhou ve Chenxia Zhao tarafından geliştirilen Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Guo ve ark.2010), Elsayed. M. E. Zayed tarafından ortaya konulan daha da Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Zayed 2011) , A. R. Shehata, E. M. E. Zayed ve K. A. Gepreel tarafından ortaya konulan yeni bir Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Shehata ve ark. 2011), Yanhong Qiu ve Baodan Tian tarafından ortaya konulan yine Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Qiu ve Tian 2011), Junchao Chen ve Biao Li tarafından ortaya konulan Çoklu $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yöntemi (Chen ve Li 2012)'dir. Daha fazla bilgi için referanslara bakılabilir.

3.16. Değiştirilmiş Basit Denklem Yöntemi

Değiştirilmiş Basit Denklem Yöntemi (The Modified Simple Equation Method) Anwar Ja'afar Mohamad Jawad ve ark. tarafından 2010 (Jawad ve ark. 2010) yılında geliştirilmiştir.

Yöntemin aşamaları şu şekildedir:

Lineer olmayan

$$F(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.16.1)$$

evolüsyon denklemi verilsin. Burada F , u ve u 'nun kısmi türevlerine bağlı bir polinomdur. (3.16.1) denklemini çözmek için aşağıdaki adımları uygulanır:

1. Adım.

$$u(x, t) = u(z), \quad z = x - t \quad (3.16.2)$$

dalga dönüşümü yapılır. Böylece (3.16.1) ve (3.16.2)'den

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.16.3)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada $u = u(z)$ bilinmeyen fonksiyonu P , u ve u 'nun türevlerine bağlı bir polinomdur.

2. Adım. (3.16.3) denkleminin $A_k = \text{sabit}$, $A_N \neq 0$ olmak üzere

$$u(z) = \sum_{k=0}^N A_k \left(\frac{\psi_z}{\psi} \right)^k \quad (3.16.4)$$

formunda sonlu bir seri açılımına sahip olduğu kabul edilir. Burada $\psi(z)$ bulunması gereken bilinmeyen bir fonksiyondur.

3. Adım. (3.16.3) denklemdeki en yüksek dereceli lineer terim ile lineer olmayan terim eşitlenerek (3.16.4) denklemindeki N pozitif tamsayısı bulunur.

4. Adım. (3.16.4) denklemi (3.16.3) denklemine yerleştirilir, $\psi(z)$ fonksiyonu dikkate alınarak gerekli olan tüm u', u'', \dots türevleri hesaplanır. Sonuç olarak, $\frac{\psi'}{\psi}$ ve onun türevlerine bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenir. Bu işlem sonucunda elde edilen denklem sisteminden A_k ve $\psi(z)$ bulunur. Böylece (3.16.1) denkleminin tam çözümü elde edilmiş olur.

3.17. Üstel Biçimindeki Rasyonel Fonksiyon Yöntemi

Üstel Fonksiyon Yöntemi ilk kez B. Q. Lu ve arkadaşları (B. Q. Lu ve arkadaşları 1993) tarafından ortaya konmuş ve sistematik olarak başarılı bir şekilde birçok denkleme uygulanmıştır.

Bu yöntemde çözümler a_0, a_1, \dots, a_m keyfi sabitler olmak üzere

$$U = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(1 + e^\xi)^k}$$

formunda ele alınmıştır.

Üstel biçimindeki rasyonel fonksiyon yöntemi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Kudryashov 2013, Liu 2008c, Yusufoglu ve Bekir 2008).

Bu yöntemin ana hatları şu şekildedir:

1. Genel lineer olmayan

$$P(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.17.1)$$

denklemini ele alalım. Öncelikle (3.17.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümleri elde etmek için

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \alpha(x - \beta t) \quad (3.17.2)$$

dönüşümü yapılır.

2. Bu dönüşüm ile (3.17.1) denklemi

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (3.17.3)$$

ADD'ine dönüşür. Burada $u(x, t) = U(\xi)$ bir ilerleyen dalga çözümdür ve $U' = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ 'i gösterir. (3.17.3) denklemi yeteri kadar integrallenir ve tüm integral sabitleri sıfır alınır.

3. $u(x, t)$ çözümleri

$$U = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(1 + e^\xi)^k} \quad (3.17.4)$$

formunda ele alınarak (3.17.3) denkleminde yerleştirilir. Homojen balanstan m değeri bulunur.

4. Aynı kuvvetteki tüm e^ξ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir. Oluşan denklem sisteminden a_0, a_1, \dots, a_m keyfi sabitler bulunarak (3.17.1) denkleminin üstel biçimindeki rasyonel çözümü elde edilir.

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde 3. Bölümde belirtilen bazı analitik yöntemlerin uygulamaları ele alınarak çözümlerin bazı özel değerleri için grafikleri elde edilmiştir.

4.1. Direkt İntegral Yönteminin Sine-Gordon Denkleminin Uygulanması

Sine-Gordon denkleminin

$$u_{xt} = a \sin u \quad (4.1.1)$$

tüm ilerleyen tek dalga çözümlerini sınıflandıralım. Bu denklem uygulamalı fizik ve mühendislikte çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu denklemin ilerleyen dalga çözümleri farklı yöntemlerle farklı fonksiyon formlarında elde edilmiştir. Fakat bu yöntem ile Sine-Gordon denkleminin tüm ilerleyen dalga çözümleri bulunabilir. Aşağıda da görüleceği gibi bunu yapmak için sadece temel integral yöntemlerine ihtiyacımız vardır.

Öncelikle $u = u(\xi)$, $\xi = kx + \omega t$ dönüşümü (4.1.1) denkleminin uygulanır ve bir kez integral alınırsa c integral sabiti olmak üzere

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{a}{k\omega}(\cos u - c)}} \quad (4.1.2)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra

$$u = \arccos \omega \quad (4.1.3)$$

değişken dönüşümü yapılırsa (4.1.2) denklemi

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{a}{k\omega}(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - c)}} \quad (4.1.4)$$

denkleminin dönüşür.

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

Öncelikle $\frac{a}{k\omega} > 0$ durumu ele alınacaktır. Bu halde üç durum olabilir:

1. Durum: $c=1$,

$$u = \arcsin \left\{ 2 \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) - 1 \right\} \quad (4.1.5)$$

ve

$$u = \arcsin \left\{ 2 \coth^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) - 1 \right\} \quad (4.1.6)$$

elde edilir.

2. Durum: $c=-1$,

$$u = \arcsin \left\{ -2 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) + 1 \right\} \quad (4.1.7)$$

elde edilir.

3. Durum: $c \neq \pm 1$,

durumunda $-1, 1$ ve c sayılarını tekrar sıralayarak $\alpha < \beta < \gamma$ ile gösterelim.

i) $\alpha < \omega < \beta$ olduğunda,

$$u = \arcsin \left\{ \alpha + (\beta - \alpha) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m \right\} \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

ii) $\omega > \gamma$ olduğunda, $m^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ olmak üzere

$$u = \arcsin \left\{ \frac{\gamma - \beta sn^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m}{cn^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m} \right\} \quad (4.1.9)$$

elde edilir.

$\frac{\alpha}{k\omega} < 0$ durumunda, $\omega = -v$ alınırsa (4.1.4) denklemi

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dv}{\sqrt{-\frac{a}{k\omega}(v-1)(v+1)(v+c)}} \quad (4.1.10)$$

denklemine dönüşür. Benzer şekilde üç durum oluşur:

1. Durum: $c=1$,

$$u = -\arcsin \left\{ 2 \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) - 1 \right\} \quad (4.1.11)$$

ve

$$u = -\arcsin \left\{ 2 \coth^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) - 1 \right\} \quad (4.1.12)$$

elde edilir.

2. Durum: $c=-1$,

$$u = -\arcsin \left\{ -2 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right) + 1 \right\} \quad (4.1.13)$$

elde edilir.

3. Durum: $c \neq \pm 1$ durumunda $-1, 1$ ve c sayılarını tekrar sıralayarak $\alpha < \beta < \gamma$ ile gösterelim.

i) $\alpha < \omega < \beta$ olduğunda,

$$u = \arcsin \left\{ \alpha + (\beta - \alpha) sn^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m \right\} \quad (4.1.14)$$

elde edilir.

ii) $\omega > \gamma$ olduğunda, $m^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ olmak üzere

$$u = -\arcsin \left\{ \frac{\gamma - \beta sn^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m}{cn^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2} \sqrt{-\frac{2a}{k\omega}} (\xi - \xi_0) \right), m} \right\} \quad (4.1.15)$$

elde edilir.

Sonuç olarak Direkt İntegral Yöntemi lineer olmayan KDD'in ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için kullanılan çok doğal ve basit bir yöntemdir. Tam ayırma sistemi Direkt İntegral Yöntemi'ni daha etkili ve güçlü bir yöntem yapar. Daha birçok lineer olmayan matematiksel fizik denkleminde Direkt İntegral Yöntemi uygulanabilir ve tüm ilerleyen dalga çözümleri sınıflandırılabilir. Bu tam sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilemez (Liu 2008b).

4.2. Çarpanlara Ayırma Yönteminin KdV-Burgers Denkleminde Uygulanması

Şimdi bu tekniği KdVB (KdV-Burgers) denkleminde

$$u_t = su_{xxx} - \mu u_{xx} - \alpha uu_x \quad (4.2.1)$$

uygulayalım. Burada s , μ ve α reel sabitlerdir. Bu denklem ion-akustik şok dalgalarının modellenmesinde karşımıza çıkar. Bu denklemin ilerleyen dalga çözümünü bulmak için öncelikle

$$u(x, t) = \phi(\xi), \quad \xi = x - vt \quad (4.2.2)$$

dönüşümünü uygulayalım. Burada v dalganın hızını verir. (4.2.2) dönüşümü (4.2.1) denkleminde uygulanırsa $s \neq 0$ koşuluyla

$$\frac{d^3\phi}{d\xi^3} - \frac{\mu}{s} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \left(\frac{v}{s} - \frac{\alpha}{s} \phi \right) \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad (4.2.3)$$

bulunur. Bu denklem üzerinde de

$$\xi = \frac{s}{\mu} \theta, \quad \phi(\xi) = \frac{2\mu^2}{\alpha s} \omega(\theta) \quad (4.2.4)$$

bağımlı ve bağımsız değişken dönüşümleri uygulanırsa $p = \frac{vs}{\mu^2}$ olmak üzere

$$\frac{d^3\omega}{d\theta^3} - \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + (p - 2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Bu denklemin bir kez integrali alınırsa k integral sabiti olmak üzere

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{d\omega}{d\theta} + (p\omega - \omega^2) = k \quad (4.2.6)$$

denklemini elde edilir. $k = 0$ olması durumunda (4.2.6) denklemini (3.4.1) formunda olur. Bu zorluğu aşmak için δ sonradan hesaplanacak bir sabit olmak üzere

$$\omega(\theta) = U(\theta) + \delta \quad (4.2.7)$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm ile (4.2.6) denklemini $k = p\delta - \delta^2$ olmak üzere

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} - \frac{dU}{d\theta} + ((p - 2\delta)U - U^2) = 0 \quad (4.2.8)$$

olur. Şimdi $F(U) = (p - 2\delta)U - U^2$ alınırsa (4.2.8) denklemini çarpanlarına ayırabiliriz.

(3.4.4)-(3.4.5) eşitlikleri göz önüne alınırsa $f_1(U)$ ve $f_2(U)$ fonksiyonlarının

$$A^2 = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{2}{5} \quad (4.2.9)$$

olmak üzere

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

$$f_1(U) = AU^{\frac{1}{2}} + B, \quad (4.2.10)$$

$$f_2(U) = 1 - B - \frac{3}{2}AU^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.11)$$

formunda olması gerekir. Bu durumda p ve δ sabitleri arasında

$$p = 2\delta + \frac{6}{25} \quad (4.2.12)$$

bağıntısı oluşur. Şayet bu p değerini (4.2.8) denkleminde yerleştirirsek bir çeşit genel çözüm elde edilir. (4.2.8) denkleminin özel çözümleri Bernoulli tipinde

$$\frac{dU}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}U^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}U} \quad (4.2.13)$$

denklemleri olur. Bunun çözümleri de

$$U^-(\theta) = \frac{3}{50} \left[1 + \tanh\left(\frac{\theta - \theta_0}{10}\right) \right]^2, \quad (4.2.14)$$

$$U^+(\theta) = \frac{3}{50} \left[1 + \coth\left(\frac{\theta - \theta_0}{10}\right) \right]^2 \quad (4.2.15)$$

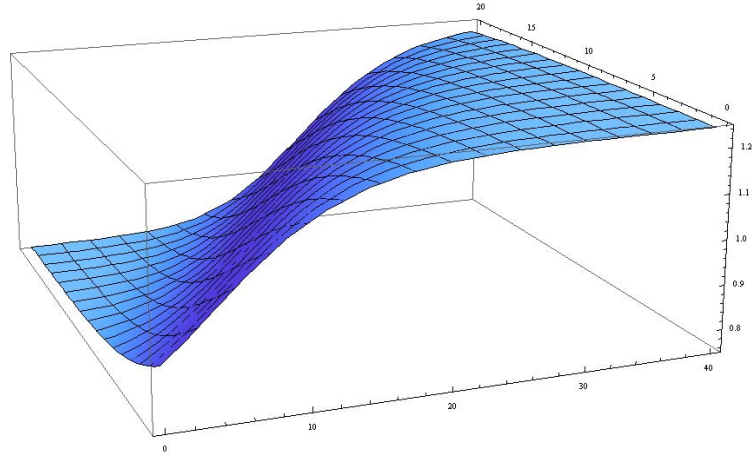
olur. Başlangıçtaki tüm dönüşümler yerine konulursa

$$u^-(x,t) = \frac{v}{\alpha} + \frac{3\mu^2}{25\alpha s} \left\{ \left[1 + \tanh\left(\frac{\mu(x - vt - \xi_0)}{10s}\right) \right]^2 - 2 \right\} \quad (4.2.16)$$

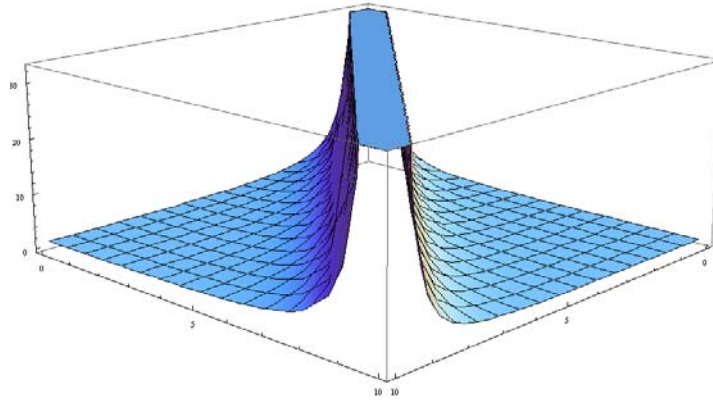
ve

$$u^+(x,t) = \frac{v}{\alpha} + \frac{3\mu^2}{25\alpha s} \left\{ \left[1 + \coth\left(\frac{\mu(x - vt - \xi_0)}{10s}\right) \right]^2 - 2 \right\} \quad (4.2.17)$$

çözümleri elde edilir (Cornejo-Pérez ve ark. 2006).



Şekil 4.2.1. (4.2.16) çözümünün soliton dalga profili.



Şekil 4.2.2. (4.2.17) çözümünün soliton dalga profili.

4.3. Hiperbolik Tanjant Yönteminin Burgers Denklemine Uygulanması

Tanh yöntemini çok bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

şeklinde ifade edilen Burgers denklemine uygulayalım. Burgers denklemi en önemli lineer olmayan yayılım denklemlerinden biridir. Bu denklem akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan denklem modelidir. İlk olarak Burger tarafından bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmıştır. Ayrıca bu denklem vizkositeli bir ortamdaki ses dalgaları, sıvı dolu vizkositeli elastik tüplerdeki dalgalar gibi birçok fiziksel problemlerde karşımıza çıkar (Debnath 2005).

Öncelikle $u(x,t) = U(\xi) = U[k(x - Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılarak kısmi diferansiyel denklem

$$-V \frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi) \frac{dU(\xi)}{d\xi} - k \frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad (4.3.2)$$

adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Bu denklemin bir defa integrali alınırsa,

$$-VU(\xi) + \frac{1}{2}U(\xi)^2 - k \frac{dU(\xi)}{d\xi} = C \quad (4.3.3)$$

elde edilir. Bu denklemde de integral sabiti $C = 0$ alınarak

$Y = \tanh(\xi) = \tanh[k(x - Vt)]$ olmak üzere $U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^N a_n Y^n$ değişken

değiştirmesi yapılırsa

$$-VS(Y) + \frac{1}{2}S(Y)^2 - k(1 - Y^2) \frac{dS(Y)}{dY} = 0 \quad (4.3.4)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme (3.5.5) açılımı yerleştirildiğinde

$$-V \sum_{n=0}^N a_n Y^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^2 Y^{2n} - k \sum_{n=0}^N n a_n Y^{n-1} + k \sum_{n=0}^N n a_n Y^{n+1} = 0 \quad (4.3.5)$$

ifadesine ulaşılır. Bundan sonra en yüksek dereceli Y terimlerini eşitlenir. Bu yerleştirmeden sonra, (4.3.2) denkleminde ikinci terimde Y^{2N} ve son terimde Y^{N+1} ifadeleri oluşur. $2N = N + 1$ eşitliğinden $N = 1$ bulunur. Buradan,

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y \quad (4.3.6)$$

şeklinde bir tek çözüm elde edilir. Bu çözüm (4.3.4) denkleminde yerine konursa en fazla Y^2 'nin ikinci kuvveti oluşur. Oluşan tüm Y terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$Y^0 \text{ terimli katsayılar: } \frac{1}{2}a_1^2 + ka_1 = 0 \text{ veya } a_1 = -2k, \quad (4.3.7)$$

$$Y^1 \text{ terimli katsayılar: } -Va_1 + a_0a_1 = 0 \text{ veya } a_0 = V, \quad (4.3.8)$$

$$Y^2 \text{ terimli katsayılar: } \frac{1}{2}a_0^2 - Va_0 - ka_1 = 0 \text{ veya } V^2 = 4k^2. \quad (4.3.9)$$

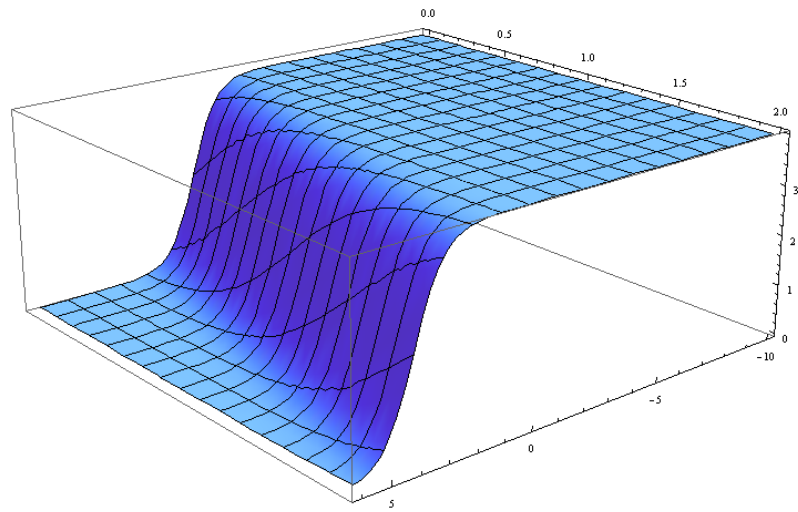
Bu denklem sisteminden

$$a_0 = V, \quad a_1 = -V, \quad k = \frac{V}{2} \quad (4.3.10)$$

bulunur. Buradan

$$u(x, t) = V \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{V}{2}(x - Vt) \right] \right\} \quad (4.3.11)$$

şok dalgası şeklinde (Şekil 4.3.1) bir çözüm bulunur (Malfliet 1992) .



Şekil 4.3.1. $u(x, t) = 2 - 2 \tanh(x - 2t)$ çözümünün $-10 < x < 6$, $0 < t < 2$ için grafiği.

4.4. Sin-Cos Yönteminin Değiştirilmiş Kawachara Denklemine Uygulanması

Bu yöntemi değiştirilmiş Kawachara (The modified Kawachara equation)

$$u_t + u_x + u^2 u_x + pu_{xxx} + qu_{xxxx} = 0 \quad (4.4.1)$$

denklemine uygulayalım. Burada p ve q sabitlerdir. Kawachara denklemi yüzey gerilimine sahip su dalgalarının hareketini betimler (Ruo-Xia ve Zhi-Bin 2002).

Şimdi bu denklemi Sin-Cos Yöntemi ile çözelim:

İlk olarak (4.4.1) denklemine $\xi = x - ct$ dalga dönüşümü uygulanarak

$$(1 - c)u' + u^2 u + pu''' + qu^{(5)} = 0 \quad (4.4.2)$$

ADD'i elde edilir. Bu denklem bir kez integre edilerek ve integral sabiti sıfır olarak alınarak

$$(1 - c)u + \frac{u^2}{3} + pu'' + qu^{(4)} = 0 \quad (4.4.3)$$

denklemini elde edilir. (4.4.3) denklemine kosinüs açılımı yerleştirilirse

$$\begin{aligned} (1 - c)\lambda \cos^\beta(\mu\xi) + \frac{\lambda^3}{3} \cos^{3\beta}(\mu\xi) - p\mu^2 \beta^2 \lambda \cos^\beta(\mu\xi) + p\lambda\mu^2 \beta(\beta - 1) \cos^{\beta-2}(\mu\xi) + \\ q\mu^4 \beta^4 \lambda \cos^\beta(\mu\xi) - 2q\mu^4 \lambda \beta(\beta - 1)(\beta^2 - 2\beta + 2) \cos^{\beta-2}(\mu\xi) + \\ q\mu^4 \lambda \beta(\beta - 1)(\beta - 2)(\beta - 3) \cos^{\beta-4}(\mu\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

elde edilir.

Kosinüs fonksiyonlarının üsleri ve benzer terimlerin katsayılarını toplayıp sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) &\neq 0, \\
\beta-4 &= 3\beta, \\
(1-c)\lambda - 4p\mu^2\lambda + 16q\mu^4\lambda &= 0, \\
6p\mu^2\lambda - 120q\mu^4\lambda &= 0, \\
\frac{\lambda^3}{3} + 120q\mu^4\lambda &= 0
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

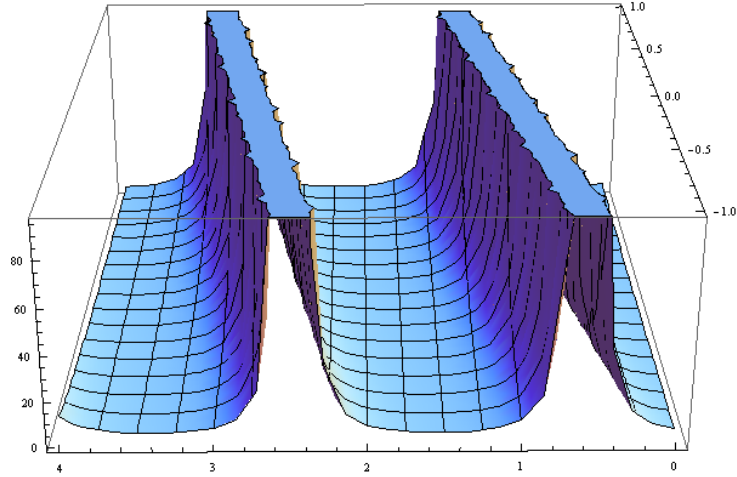
denklemler sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse

$$\begin{aligned}
\beta &= -2, \\
\mu &= \mp \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(1-c)}{p}}, \quad p \neq 0, \\
\lambda &= \mp \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(c-1)}{2}}, \\
c &= \frac{-4p^2 + 25q}{25q}, \quad q \neq 0
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar sinüs açılımı kullanılarak da bulunabilirdi. Bu sonuçlar ışığında $\frac{1-c}{p} > 0$ için

$$u_{1,2}(x,t) = \mp \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(c-1)}{2}} \sec^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(1-c)}{p}} (x-ct) \right) \tag{4.4.7}$$

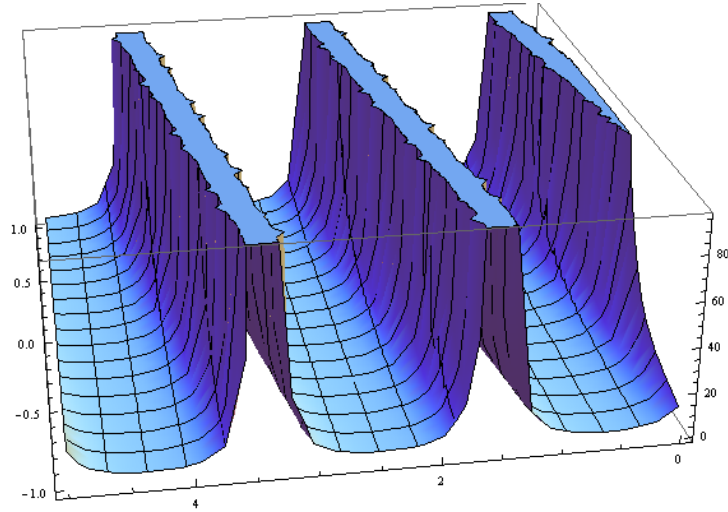
4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.



Şekil 4.4.1. $\frac{3\sqrt{5}}{2} \sec^2 \frac{\sqrt{5}}{4}(x-3t)$, $-1 < x < 1$, $0 < t < 4$ çözümünün $c=3$, $p=-2$ için grafiği.

ve

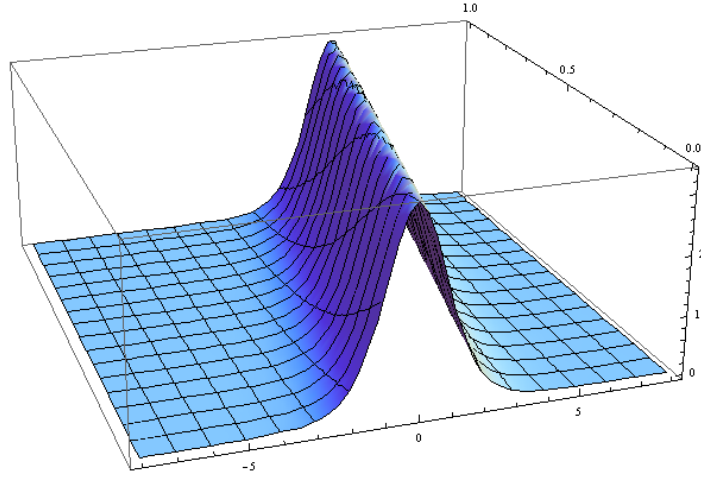
$$u_{3,4}(x,t) = \mp \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(c-1)}{2}} \csc^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(1-c)}{p}} (x-ct) \right) \quad (4.4.8)$$



Şekil 4.4.2. $\frac{3\sqrt{5}}{2} \csc^2 \frac{\sqrt{5}}{4}(x-3t)$, $-1 < x < 1$, $0 < t < 5$ çözümünün $c=3$, $p=-2$ için grafiği.

periyodik çözümleri elde edilir. Bununla beraber $\frac{1-c}{p} < 0$ için,

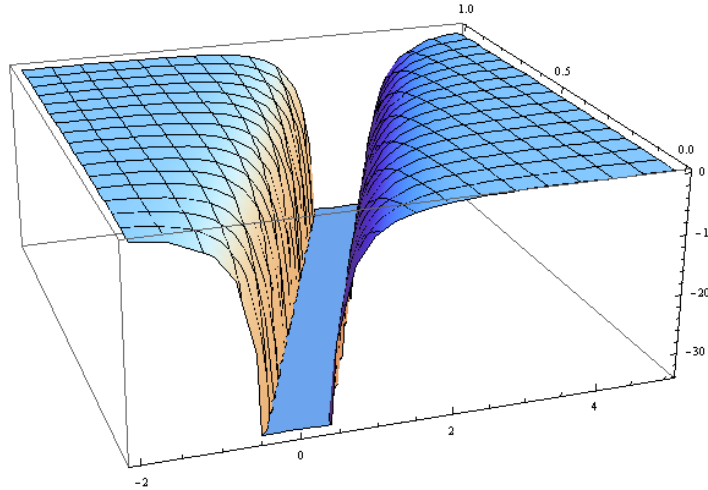
$$u_{5,6}(x,t) = \mp \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(c-1)}{2}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(c-1)}{p}} (x-ct) \right) \quad (4.4.9)$$



Şekil 4.4.3. $\frac{3\sqrt{5}}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{10}}{4} (x-3t)$, $-8 < x < 8$, $0 < t < 1$ çözümünün $c=3$, $p=2$ için grafiği.

soliton çözümleri ve

$$u_{7,8}(x,t) = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(c-1)}{2}} \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(c-1)}{p}} (x-ct) \right) \quad (4.4.10)$$



Şekil 4.4.4. $-\frac{3\sqrt{5}}{2} \operatorname{csch}^2 \frac{\sqrt{10}}{4} (x-3t)$, $-2 < x < 5$, $0 < t < 1$ çözümünün $c=3$, $p=2$ için grafiği.

ilerleyen dalga çözümleri elde edilir.

4.5. Tanh-Coth Yönteminin Boyutsuz KdV Denkleminin Uygulanması

Şimdi bu yöntemi boyutsuz KdV denklemi

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.5.1)$$

üzerine uygulayalım. Öncelikle $\xi = x - ct$ dalga değişkeni (buradaki c dalga hızıdır) (4.5.1) denkleminin yerleştirilir ve bir kez integre edilirse

$$-cu + \frac{a}{2}u^2 + u'' = 0 \quad (4.5.2)$$

elde edilir. u^2 ve u'' terimleri arasındaki homojen balanstan, yani u^2 teriminden gelen $2M$ ve u'' teriminden gelen $M+2$ ifadelerinin

$$2M = M + 2 \quad (4.5.3)$$

eşitliğinden

$$M = 2 \quad (4.5.4)$$

bulunur. Tanh-Coth Yöntemi'nden

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{j=0}^2 a_j Y^j + \sum_{i=1}^2 b_i Y^{-i} \quad (4.5.5)$$

elde edilir. (4.5.5) denklemi (4.5.2) denkleminin yerleştirilip elde edilen tüm Y^r kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenip, oluşan cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki çözüm kümeleri elde edilir:

$$(i) \quad a_0 = \frac{3c}{a}, \quad a_1 = a_2 = b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{3c}{a}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}, \quad c > 0, \quad (4.5.6)$$

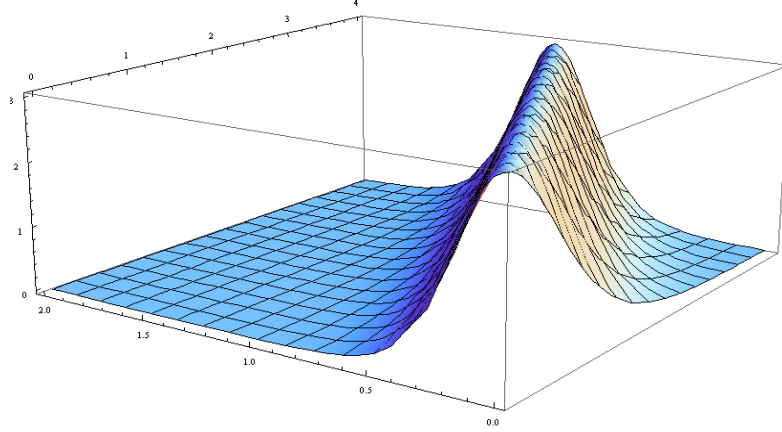
$$(ii) \quad a_0 = -\frac{c}{a}, \quad a_1 = a_2 = b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{3c}{a}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}, \quad c < 0, \quad (4.5.7)$$

$$(iii) \quad a_0 = \frac{3c}{a}, \quad a_1 = b_1 = b_2 = 0, \quad a_2 = -\frac{3c}{a}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}, \quad c > 0, \quad (4.5.8)$$

$$(iv) \quad a_0 = -\frac{c}{a}, \quad a_1 = b_1 = b_2 = 0, \quad a_2 = \frac{3c}{a}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}, \quad c < 0. \quad (4.5.9)$$

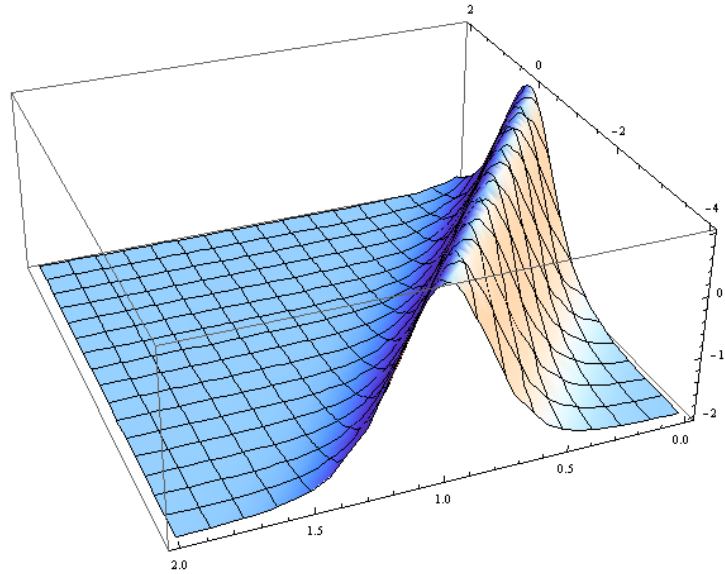
Sonuç olarak,

$$u_1(x,t) = \frac{3c}{a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) \right), \quad c > 0, \quad (4.5.10)$$



Şekil 4.5.1. $3\operatorname{sech}^2(x-4t)$, $0 < x < 4$, $0 < t < 2$ soliton çözümünün $a=c=4$ için grafiği.

$$u_2(x,t) = -\frac{c}{a} \left(1 - 3 \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{-c}}{2} (x-ct) \right) \right), \quad c < 0 \quad (4.5.11)$$



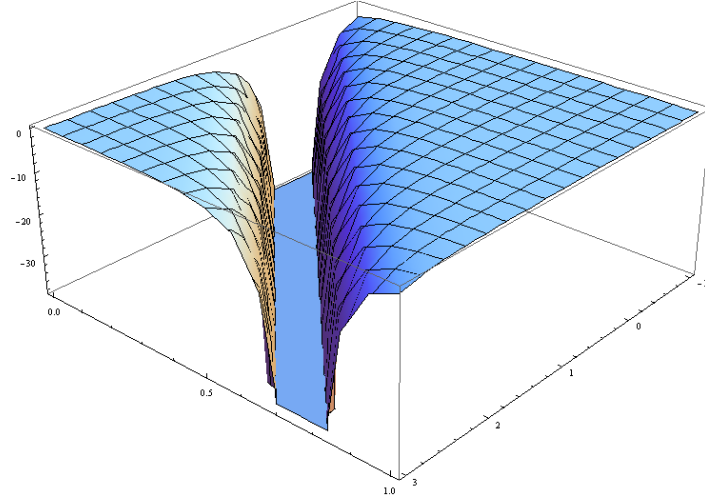
Şekil 4.5.2. $1-3 \tanh^2(x+4t)$, $-4 < x < 2$, $0 < t < 2$ soliton çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.

soliton çözümleri elde edilir. (Bakınız Şekil 4.5.1 ve Şekil 4.5.2)

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

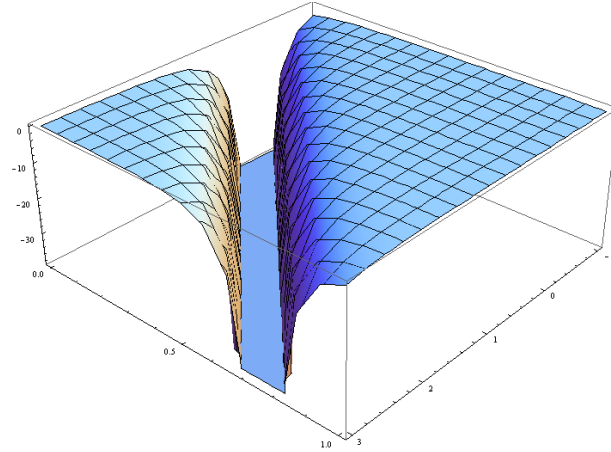
Ayrıca

$$u_3(x,t) = -\frac{3c}{a} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right), \quad c > 0, \quad (4.5.12)$$



Şekil 4.5.3. $-3\operatorname{csch}^2(x-4t)$, $-1 < x < 3$, $0 < t < 1$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği.

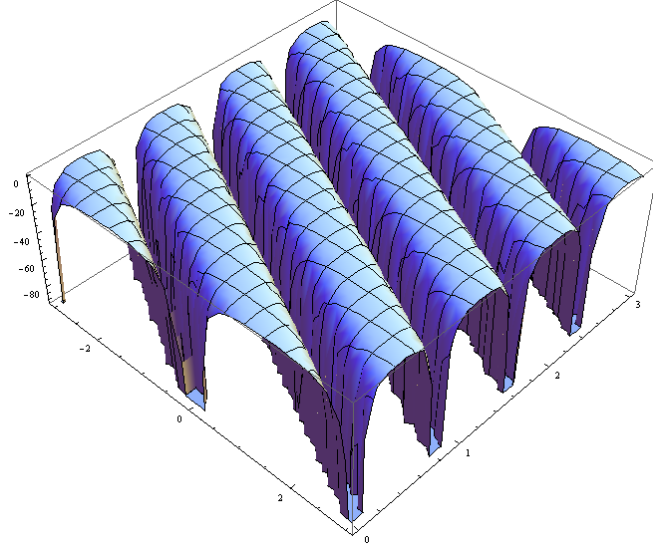
$$u_4(x,t) = -\frac{c}{a} \left(1 - 3 \operatorname{coth}^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}(x-ct)\right) \right), \quad c < 0 \quad (4.5.13)$$



Şekil 4.5.4. $1-3\operatorname{coth}^2(x+4t)$, $-3 < x < 1$, $0 < t < 1$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.

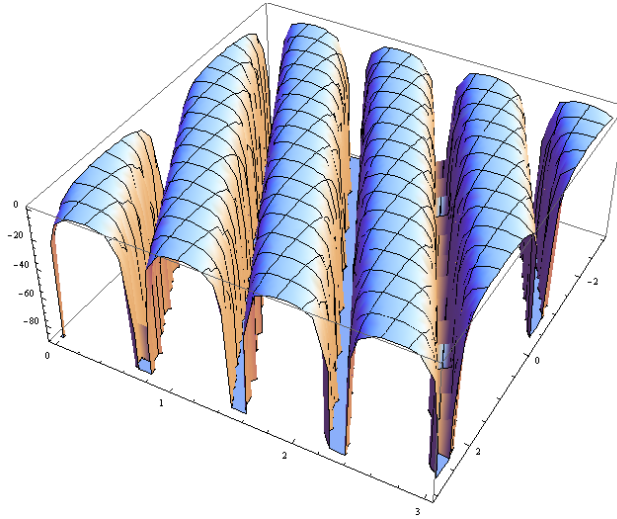
ilerleyen dalga çözümleri de elde edilir. (4.5.10) ve (4.5.11) çözümlerinin fiziksel yapıları tamamıyla c dalga hızının işaretine bağlıdır. Son olarak

$$u_5(x,t) = \frac{3c}{a} \csc^2 \left(\frac{\sqrt{-c}}{2} (x-ct) \right), \quad c < 0, \quad (4.5.14)$$



Şekil 4.5.5. $-3\csc^2(x+4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.

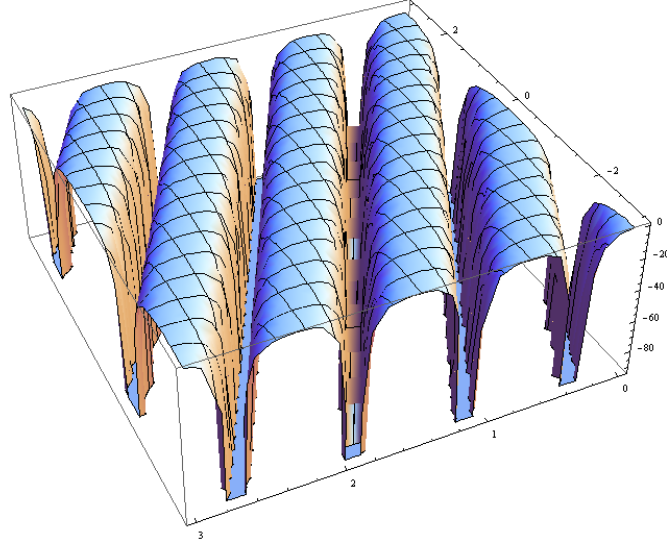
$$u_6(x,t) = -\frac{c}{a} \left(1 + 3 \cot^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) \right) \right), \quad c > 0, \quad (4.5.15)$$



Şekil 4.5.6. $-1-3\cot^2(x-4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği.

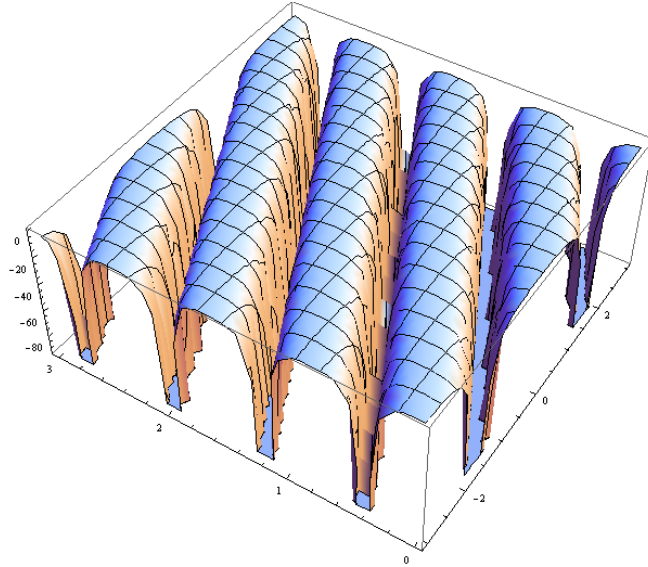
4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

$$u_7(x,t) = \frac{3c}{a} \sec^2 \left(\frac{\sqrt{-c}}{2} (x-ct) \right), \quad c < 0, \quad (4.5.16)$$



Şekil 4.5.7. $-3\sec^2(x+4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=4$, $c=-4$ için grafiği.

$$u_8(x,t) = -\frac{3c}{a} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) \right) \right), \quad c > 0 \quad (4.5.17)$$



Şekil 4.5.8. $-3-3\tan^2(x-4t)$, $-3 < x < 3$, $0 < t < 3$ çözümünün $a=c=4$ için grafiği.

düzlem periyodik çözümleri elde edilir (Wazwaz 2009).

4.6. Üstel Fonksiyon Yönteminin Değiştirilmiş KdV Denklemine Uygulanması

Bu yöntemin temel fikrini

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.6.1)$$

formundaki denklemi çözerek gösterelim. Bu denkleme Değiştirilmiş KdV denklemi denir. Lineer olmayan açılım ve sıvı damlaları gibi yapıların oluşmasında bu denklem karşımıza çıkar. Öncelikle η değişkenini

$$\eta = kx + \omega t \quad (4.6.2)$$

olarak tanımlıyoruz. Bu durumda (4.6.1) denklemi

$$\omega u' + ku^2 u' + k^3 u''' = 0 \quad (4.6.3)$$

denklemine dönüştür. Buradaki türevler η değişkenine göre alınmıştır. (4.6.3) denkleminin çözümünün

$$u(\eta) = \frac{a_c \exp(c\eta) + \dots + a_{-d} \exp(-d\eta)}{a_p \exp(p\eta) + \dots + a_{-q} \exp(-q\eta)} \quad (4.6.4)$$

formunda olduğunu varsayalım.

c ve p değerlerini bulmak için (4.6.3) denklemindeki en yüksek mertebeli terimleri eşitliyoruz. Basit bir hesaplama ile

$$u''' = \frac{c_1 \exp[(7p+c)\eta] + \dots + d_1 \exp[-(7q+d)\eta]}{c_2 \exp[8p\eta] + \dots + d_2 \exp[-8q\eta]} \quad (4.6.5)$$

ve

$$u^2 u' = \frac{c_3 \exp[(5p+3c)\eta] + \dots + d_3 \exp[-(5q+3c)\eta]}{c_4 \exp[8p\eta] + \dots + d_4 \exp[-8q\eta]} \quad (4.6.6)$$

bulunur. (4.6.5) ve (4.6.6) üstel fonksiyonların en yüksek dereceli terimlerini eşitlersek

$$7p + c = 5p + 3c \quad (4.6.7)$$

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

eşitliğinden $p=c$ bulunur. Benzer şekilde en düşük dereceli terimleri eşitlersek

$$-(7q + d) = -(5q + 3c) \quad (4.6.8)$$

eşitliğinden $q=d$ bulunur. Basit olması için $p=c=1$ ve $q=d=1$ alınırsa (4.6.4) denklemi

$$u(\eta) = \frac{a_1 \exp(\eta) + a_0 + a_{-1} \exp(-\eta)}{\exp(\eta) + b_0 + b_{-1} \exp(-\eta)} \quad (4.6.9)$$

şeklinde bulunur. (4.6.9) eşitliği (4.6.3) denkleminde yerleştirilip, Matlab yardımı ile hesaplanırsa

$$\frac{1}{A} \left[C_3 \exp(3\eta) + C_2 \exp(2\eta) + C_1 \exp(\eta) + C_0 + C_{-1} \exp(-\eta) + \right] = 0 \quad (4.6.10)$$
$$C_{-2} \exp(-2\eta) + C_{-3} \exp(-3\eta)$$

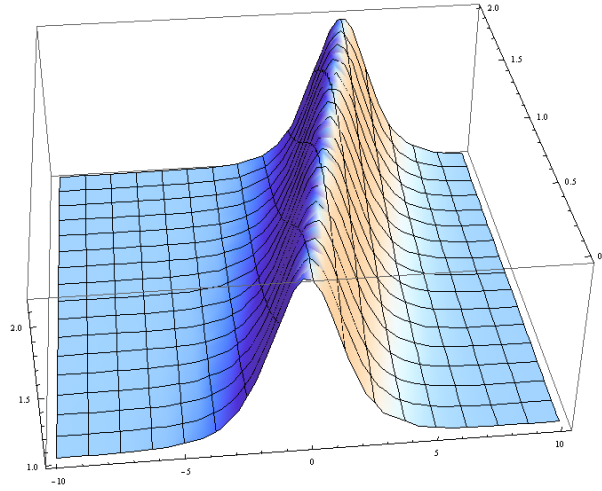
ifadesi elde edilir. Buradaki $\exp(n\eta)$ katsayıları sıfıra eşitlenip çözümlerse

$$a_0 = a_1 b_0 + \frac{3k^2 b_0}{a_1}, \quad a_{-1} = \frac{b_0^2 (3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1}, \quad b_{-1} = \frac{b_0^2 (3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2}, \quad \omega = -ka_1^2 - k^3 \quad (4.6.11)$$

olarak bulunur. Böylece

$$u(x, t) = a_1 + \frac{\frac{3k^2 b_0}{a_1}}{\exp[kx - (ka_1^2 + k^3)t] + b_0 + \frac{b_0^2 (3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2} \exp[-kx + (ka_1^2 + k^3)t]} \quad (4.6.12)$$

çözümü elde edilir. Genellikle a_1 , b_0 ve k reel sayılardır ve (4.6.12) denklemi bir genelleşmiş soliton çözümdür (He ve Wu 2006).



Şekil 4.6.1. $u(x,t) = 1 + \frac{3}{e^{x-2t} + 1 + \frac{5e^{-x+2t}}{8}}$ çözümünün $-10 < x < 10$, $0 < t < 2$ için grafiği.

4.7. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Yönteminin Birleşik KdV-Burgers Denklemine Uygulanması

Bu bölümde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım Yöntemi'ni bilenen birleşik KdV-Burgers denklemine uygulayalım.

Birleşik KdV-Burgers denklemi

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xx} - su_{xxx} = 0 \quad (4.7.1)$$

şeklindedir. p, q, r, s sabitlerdir. Bu denklem KdV, mKdV ve Burgers denklemlerinin birer genellemesidir. Bu denklemin kuantum alan teorisi, plazma fiziği ve katı hal fiziğinde uygulamaları mevcuttur (Kaya 2004).

Öncelikle $\xi = x - Vt$ şeklinde bir değişken dönüşümü yaparak $u(x,t) = U(\xi)$ ifadesinden, (4.7.1) denklemi

$$-VU' + pUU' + qU^2U' + rU'' - sU''' = 0 \quad (4.7.2)$$

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemi ζ 'ye göre bir kez integrallersek

$$-VU + \frac{p}{2}U^2 + \frac{q}{3}U^3 + rU' - sU'' + C = 0 \quad (4.7.3)$$

denkleme dönüşür. Buradaki C integral sabitidir. (4.7.3) denkleminin çözümünün (3.15.3) denklemi şeklinde olduğunu varsayalım. (3.15.4) denklemini de kullanarak (4.7.3) denklemini indirgersek, U^3 ve U'' terimleri eşitlenerek $3m = m + 2$ 'den $N = 1$ bulunur. Bu durumda (4.7.3) denkleminin çözümü

$$U = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right), \quad a_1 \neq 0 \quad (4.7.4)$$

şeklinde olur. (3.15.4) ve (4.7.4)'den

$$U'' = 2a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 + 3a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + (2a_1 \mu + a_1 \lambda^2) \left(\frac{G'}{G} \right) + a_1 \lambda \mu \quad (4.7.5)$$

olur. (4.7.4)–(4.7.5) ifadeleri (4.7.3) denkleme yerleştirilir, $(G'/G)^m$ ($m = 1, 2, \dots, 4$) terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^0 : C - Va_0 + \frac{pa_0^2}{2} + \frac{qa_0^3}{3} - r\mu a_1 - s\lambda\mu a_1,$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^1 : -Va_1 - r\lambda a_1 - s\lambda^2 a_1 - 2s\mu a_1 + pa_0 a_1 + qa_0^2 a_1,$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^2 : -ra_1 - 3s\lambda a_1 + \frac{pa_1^2}{2} + qa_0 a_1^2,$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^3 : -2sa_1 + \frac{qa_1^3}{3}.$$

Bu sistem Mathematica programından yararlanılarak çözümlerse iki sonuç elde edilir:

1. Durum:

$$s, q \neq 0, a_1 = \mp \sqrt{\frac{6s}{q}}, \lambda = \frac{-2r + pa_1 + 2qa_0a_1}{6s},$$

$$V = \frac{1}{6}(-4r\lambda - 12s\mu + 6pa_0 + 6qa_0^2 - p\lambda a_1 - 2q\lambda a_0a_1),$$

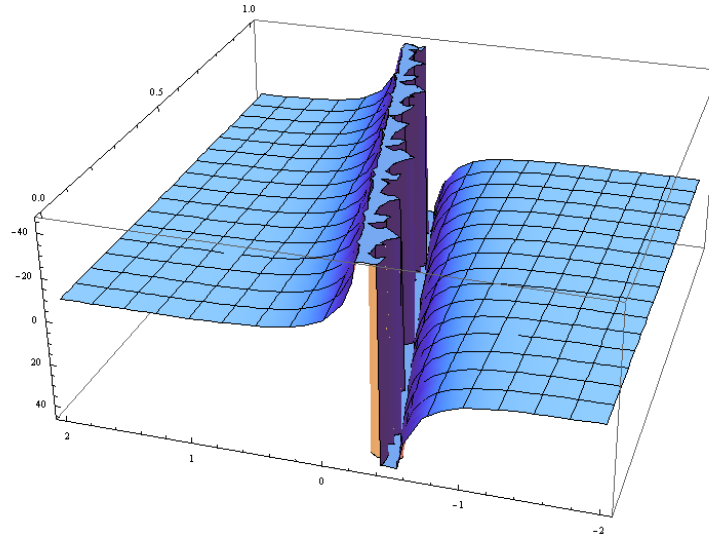
$$C = \frac{1}{6}(-4r\lambda a_0 + 3pa_0^2 + 4qa_0^3 + 4r\mu a_1 - p\lambda a_0a_1 - 2q\lambda a_0^2a_1 + p\mu a_1^2), \quad (4.7.6)$$

a_0 ve μ keyfi sabitlerdir. (4.7.6) ve (3.15.4) denklemlerini (4.7.4) denklemine

yerleştirirsek üç tip ilerleyen dalga denklemini çözümlerini bulunur:

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ için,

$$U_{1,2} = \pm \left[\begin{array}{l} \left(\frac{r\sqrt{6sq} - 3sp}{6sq} \right) \mp \\ \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)6sq}}{2q} \left(\begin{array}{l} C_1 \sinh \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}}{2} \xi + C_2 \cosh \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}}{2} \xi \\ C_1 \cosh \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}}{2} \xi + C_2 \sinh \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}}{2} \xi \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (4.7.7)$$



Şekil 4.7.1. U_1 çözümünü $-2 < x < 2$, $0 < t < 1$ için grafiği.

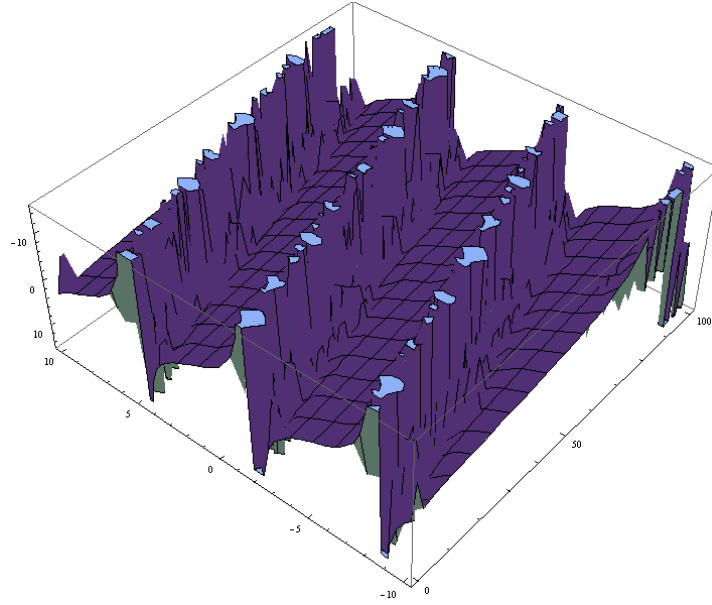
hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunur. Burada,

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

$$\xi = x - \left(\frac{-4r\lambda - 12s\mu + 6pa_0 + 6qa_0^2 - p\lambda a_1 - 2q\lambda a_0 a_1}{6} \right) t, \quad C_1 \text{ ve } C_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$ için,

$$U_{3,4} = \pm \left[\begin{array}{l} \left(\frac{r\sqrt{6sq} - 3sp}{6sq} \right) \mp \\ \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)6sq}}{2q} \left(\frac{C_1 \cos \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)} \xi}{2} - C_2 \sin \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)} \xi}{2}}{C_1 \cos \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)} \xi}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)} \xi}{2}} \right) \end{array} \right] \quad (4.7.8)$$



Şekil 4.7.2. U_3 çözümünün $-10 < x < 10$, $0 < t < 100$ için grafiği.

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunur. Burada,

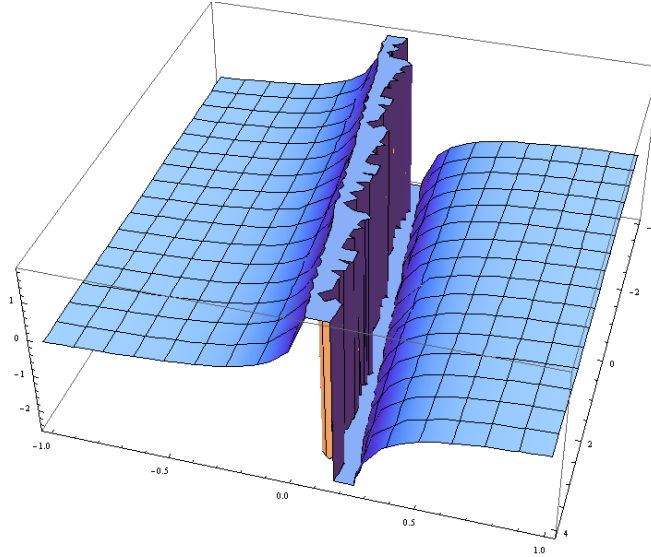
$$\xi = x - \left(\frac{-4r\lambda - 12s\mu + 6pa_0 + 6qa_0^2 - p\lambda a_1 - 2q\lambda a_0 a_1}{6} \right) t, \quad C_1 \text{ ve } C_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ için,

$$U_{5,6} = \pm \left[\left(\frac{r\sqrt{6sq} \mp 3sp}{6sq} \right) + \frac{\sqrt{6sq}}{q} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} \right) \right] \quad (4.7.9)$$

rasyonel çözümler elde edilir. Burada,

$$\xi = x - \left(\frac{-4r\lambda - 12s\mu + 6pa_0 + 6qa_0^2 - p\lambda a_1 - 2q\lambda a_0 a_1}{6} \right) t, \quad C_1 \text{ ve } C_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$



Şekil 4.7.3. U_5 çözümünün $-13 < x < 13$, $0 < t < 3$ için grafiği.

2. Durum:

$$s, q = 0, p, r \neq 0, a_1 = \frac{2r}{p}, V = -r\lambda + pa_0,$$

$$C = \frac{1}{2}(-2r\lambda a_0 + pa_0^2 + 2r\mu a_1), \quad (4.7.10)$$

a_0 , λ ve μ keyfi sabitlerdir. (4.7.10) ve (3.15.4) denklemlerini (4.7.4) denklemine yerleştirirsek üç tipte ilerleyen dalga çözümleri bulunur:

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ için,

$$U_7 = \frac{V}{p} + \frac{r\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{p} \left(\frac{C_1 \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + C_2 \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{C_1 \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + C_2 \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right), \quad (4.7.11)$$

$\xi = x - (pa_0 - r\lambda)t$, C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

$\lambda^2 - 4\mu < 0$ için,

$$U_8 = \frac{V}{p} + \frac{r\sqrt{(4\mu - \lambda^2)}}{p} \left(\frac{C_1 \cos \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)}}{2} \xi - C_2 \sin \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)}}{2} \xi}{C_1 \cos \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{(4\mu - \lambda^2)}}{2} \xi} \right), \quad (4.7.12)$$

$\xi = x - (pa_0 - r\lambda)t$, C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ için,

$$U_9 = \frac{V}{p} + \frac{2r}{p} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} \right), \quad (4.7.13)$$

$\xi = x - (pa_0 - r\lambda)t$, C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

Bu yöntemin diğer yöntemlere göre daha etkili ve kesin sonuçlar verdiği görülmektedir. Çok karışık ve cebirsel hesaplama gerektiren denklemler bilgisayar yardımıyla çözüldüğünden bu yöntem güvenilir olabilir. Matematik fizikteki birçok lineer olmayan evölüsyon denklemleri bu yöntemle çözülebilir (Mızrak ve Ertaş 2012a).

4.8. Değiştirilmiş Basit Denklem Yönteminin Konveksiyon Terimli Fisher Denklemine Uygulanması

Bu yöntemi konveksiyon terimli Fisher

$$u_t + kuu_x - u_{xx} - u(1-u) = 0 \quad (4.8.1)$$

denkleminde uygulayalım. (3.16.2) ilerleyen dalga dönüşümünü kullanarak (4.8.1) denklemini

$$-u_z + kuu_z - u_{zz} - u(1-u) = 0 \quad (4.8.2)$$

adi diferansiyel denkleminde indirgenir. uu_z ve u_{zz} terimleri arasındaki homojen balanstan $N=1$ bulunur. Dolayısıyla, (4.8.2) denkleminin çözümü

$$u(z) = A_0 + A_1 \left(\frac{\psi_z}{\psi} \right) \quad (4.8.3)$$

formundadır. Buradan,

$$u_z = A_1 \left(\frac{\psi_{zz}}{\psi} - \frac{\psi_z^2}{\psi^2} \right), \quad (4.8.4)$$

$$u_{zz} = A_1 \left(\frac{\psi_{zzz}}{\psi} - 3 \frac{\psi_{zz}\psi_z}{\psi^2} + 2 \frac{\psi_z^3}{\psi^3} \right) \quad (4.8.5)$$

olduğu kolayca görülür. (4.8.3), (4.8.4) ve (4.8.5) ifadeleri (4.8.2) denkleminde yerleştirilip ψ^0 , ψ^{-1} , ψ^{-2} ve ψ^{-3} terimli ifadelerin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$-A_0 + A_0^2 = 0, \quad (4.8.6)$$

$$(1 - kA_0)\psi_{zz} - \psi_{zzz} + (2A_0 - 1)\psi_z = 0, \quad (4.8.7)$$

$$(kA_1 + 3)\psi_{zz} + (-kA_0 + A_1 + 1)\psi_z = 0, \quad (4.8.8)$$

$$-2A_1 - kA_1^2 = 0 \quad (4.8.9)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.8.6) denkleminde $A_0 = 0$ ve $A_0 = 1$ bulunur. Böylece iki farklı çözüm söz konusu olur:

I. Durum: $A_0 = 0$ ise

(4.8.7) ve (4.8.8) denklemlerinden

$$\psi_{zzz} + \psi_{zz} + \psi_z = 0, \quad (4.8.10)$$

$$(kA_1 + 3)\psi_{zz} + (A_1 + 1)\psi_z = 0 \quad (4.8.11)$$

elde edilir. (4.8.10) ve (4.8.11) denklemlerinden

$$(kA_1 + 3)\psi_{zzz} + ((k-1)A_1 + 2)\psi_z = 0 \quad (4.8.12)$$

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü c_0, c_1 ve c_2 keyfi parametreler ve

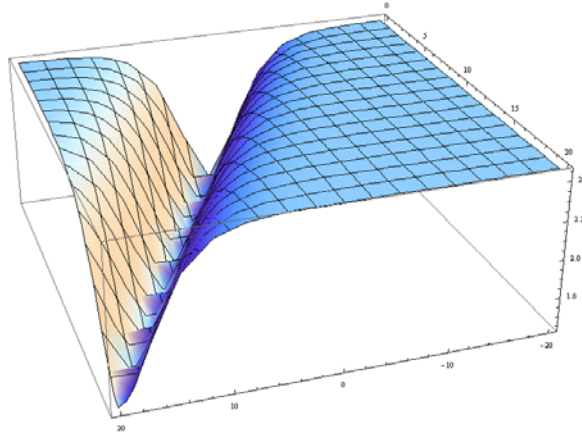
$$a = \pm \sqrt{\frac{(1-k)A_1 - 2}{kA_1 + 3}} \text{ olmak üzere}$$

$$\psi(z) = c_0 + c_1 e^{az} + c_2 e^{-az} \quad (4.8.13)$$

biçimindedir. (4.8.13) ifadesi (4.8.3) denkleminde yerleştirildiğinde

$$u(x, t) = A_1 a \frac{c_1 e^{a(x-t)} + c_2 e^{-a(x-t)}}{c_0 + c_1 e^{a(x-t)} + c_2 e^{-a(x-t)}} \quad (4.8.14)$$

tam çözümü elde edilir.



Şekil 4.8.1. $u(x, t) = \frac{2\sqrt{6} \cosh\left(\frac{x-t}{\sqrt{6}}\right)}{1 + 2 \cosh\left(\frac{x-t}{\sqrt{6}}\right)}$ çözümünün $-20 < x < 20, 0 < t < 20$ için grafiği.

II. Durum: $A_0 = 1$ ise

(4.8.7) ve (4.8.8) denklemlerinden

$$(1-k)\psi'' - \psi''' + \psi' = 0, \quad (4.8.15)$$

$$(k+3)\psi'' + (-k + A_1 + 1)\psi' = 0 \quad (4.8.16)$$

elde edilir. (4.8.16) denklemini (4.8.15) denkleminde yerleştirilirse

$$(k+3)\psi''' + (k^2 - k + (1-k)A_1 + 4)\psi' = 0 \quad (4.8.17)$$

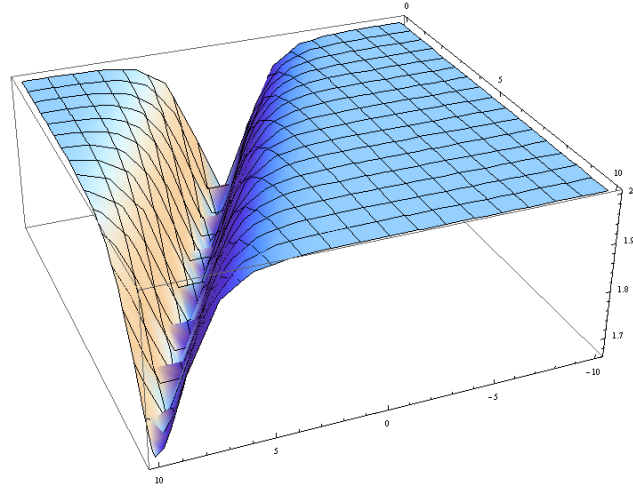
denklemi elde edilir. Bu durumda (4.8.17) denkleminin çözümü c_0 , c_1 ve c_2 keyfi

parametreler ve $b = \pm \sqrt{\frac{k^2 - k + (1-k)A_1 + 4}{k+3}}$ olmak üzere

$$\psi(z) = c_0 + c_1 e^{bz} + c_2 e^{-bz} \quad (4.8.18)$$

biçimindedir. (4.8.18) ifadesi (4.8.3) denklemine yerleştirildiğinde

$$u(x,t) = 1 + A_1 b \frac{c_1 e^{b(x-t)} + c_2 e^{-b(x-t)}}{c_0 + c_1 e^{b(x-t)} + c_2 e^{-b(x-t)}} \quad (4.8.19)$$



Şekil 4.8.2. $u(x,t) = 2 - \frac{1}{1 + 2 \cosh(t-x)}$ çözümünün $-10 < x < 15$, $0 < t < 10$ için grafiği.

tam çözümü elde edilir (Mızrak ve Ertuş 2012b).

4.9. Üstel Biçimindeki Rasyonel Fonksiyon Yönteminin Damping Terimli 6. mertebeden Boussinesq Denkleminin Uygulanması

Bu yöntemi damping terimli 6. mertebeden Boussinesq denkleminin

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} - u_{xxxxx} - au_{xxt} = b(u^2)_{xx} \quad (4.9.1)$$

uygulayalım. Burada a pozitif ve b bir reel sabittir. Bu denklem yüzey gerilimine sahip, küçük genlikli sığ suların yüzeyinde oluşan iki yönlü yerçekimi dalgalarını betimler (Daripa 2006).

Bu denklemin lokal, global ve asimptotik davranışı Polat ve Pişkin tarafından çalışılmıştır (Polat ve Pişkin 2013).

Öncelikle $u(x,t) = U(\xi) = U[\alpha(x - \beta t)]$ değişken değiştirilmesi yapılarak kısmi diferansiyel denklem

$$(\beta^2 - 1)U'' + a\alpha\beta U''' - \alpha^2\beta^2 U^{(4)} - \alpha^4 U^{(6)} = b(U^2)'' \quad (4.9.2)$$

adi diferansiyel denkleminin indirgenir.

Daha sonra homojen balanstan, yani en yüksek mertebeli terim $U^{(6)}$ ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin $(U^2)''$ eşitliğinden $m = 4$ bulunur. Bu yüzden

(4.9.2) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + \frac{a_1}{1 + e^\xi} + \frac{a_2}{(1 + e^\xi)^2} + \frac{a_3}{(1 + e^\xi)^3} + \frac{a_4}{(1 + e^\xi)^4} \quad (4.9.3)$$

formunda olur. Burada a_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) bulunması gereken sabitlerdir. Sonra (4.9.3) eşitliği (4.9.2) denkleminin yerleştirilir. Bu yerleştirmeden sonra aynı kuvvete sahip e^ξ terimleri toplanarak katsayıları sıfıra eşitlenir. Buradan aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$-a_1 - 2a_0a_1b - a_1\alpha^4 - aa_1\alpha\beta + a_1\beta^2 - a_1\alpha^2\beta^2 = 0, \quad (4.9.4a)$$

$$\begin{aligned} & -6a_1 - 12a_0a_1b - 4a_1^2b - 4a_2 - 8a_0a_2b + 54a_1\alpha^4 - 64a_2\alpha^4 - 2a_1\alpha\beta \\ & - 8aa_2\alpha\beta + 6a_1\beta^2 + 4a_2\beta^2 + 6a_1\alpha^2\beta^2 - 16a_2\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4b)$$

$$\begin{aligned} & -14a_1 - 28a_0a_1b - 22a_1^2b - 22a_2 - 44a_0a_2b - 18a_1a_2b - 9a_3 - 18a_0a_3b \\ & - 134a_1\alpha^4 + 818a_2\alpha^4 - 729a_3\alpha^4 + 8aa_1\alpha\beta - 26aa_2\alpha\beta - 27aa_3\alpha\beta + \\ & 14a_1\beta^2 + 22a_2\beta^2 + 9a_3\beta^2 + 34a_1\alpha^2\beta^2 + 2a_2\alpha^2\beta^2 - 81a_3\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4c)$$

$$\begin{aligned} & -14a_1 - 28a_0a_1b - 48a_1^2b - 48a_2 - 96a_0a_2b - 84a_1a_2b - 16a_2^2b - 42a_3 \\ & - 84a_0a_3b - 32a_1a_3b - 16a_4 - 32a_0a_4b - 434a_1\alpha^4 - 588a_2\alpha^4 + \\ & 4998a_3\alpha^4 - 4096a_4\alpha^4 + 34aa_1\alpha\beta - 12aa_2\alpha\beta - 78aa_3\alpha\beta \\ & - 64aa_4\alpha\beta + 14a_1\beta^2 + 48a_2\beta^2 + 42a_3\beta^2 + 16a_4\beta^2 + \\ & 46a_1\alpha^2\beta^2 + 132a_2\alpha^2\beta^2 - 42a_3\alpha^2\beta^2 - 256a_4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4d)$$

$$\begin{aligned} & -50a_1^2b - 50a_2 - 100a_0a_1b - 150a_1a_2b - 60a_2^2b - 75a_3 - 150a_0a_3b \\ & - 120a_1a_3b - 50a_2a_3b - 60a_4 - 120a_0a_4b - 50a_1a_4b - 2450a_2\alpha^4 \\ & - 3675a_3\alpha^4 + 21540a_4\alpha^4 + 50aa_1\alpha\beta + 50aa_2\alpha\beta - 45aa_3\alpha\beta \\ & - 140aa_4\alpha\beta + 50a_2\beta^2 + 75a_3\beta^2 + 60a_4\beta^2 + 190a_2\alpha^2\beta^2 + \\ & 285a_3\alpha^2\beta^2 - 60a_4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4e)$$

$$\begin{aligned} & 14a_1 + 28a_0a_1b - 20a_1^2b - 20a_2 - 40a_0a_2b - 120a_1a_2b - 80a_2^2b \\ & - 60a_3 - 120a_0a_3b - 160a_1a_3b - 140a_2a_3b - 36a_3^2b - 80a_4 \\ & - 160a_0a_4b - 140a_1a_4b - 72a_2a_4b + 434a_1\alpha^4 + 280a_2\alpha^4 \\ & - 5460a_3\alpha^4 - 25880a_4\alpha^4 + 34aa_1 + 80aa_2\alpha\beta + 60aa_3\alpha\beta \\ & - 40aa_4\alpha\beta - 14a_1\beta^2 + 20a_2\beta^2 + 60a_3\beta^2 + 80a_4\beta^2 \\ & - 46a_1\alpha^2\beta^2 + 40a_2\alpha^2\beta^2 + 300a_3\alpha^2\beta^2 + 520a_4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4f)$$

$$\begin{aligned} & 14a_1 + 28a_0a_1b + 6a_1^2b + 6a_2 + 12a_0a_2b - 30a_1a_2b - 40a_2^2b \\ & - 15a_3 - 30a_0a_3b - 80a_1a_3b - 120a_2a_3b - 66a_3^2b - 40a_4 - 80a_0a_4b \\ & - 120a_1a_4b - 132a_2a_4b - 98a_3a_4b + 134a_1\alpha^4 + 1086a_2\alpha^4 + \\ & 3585a_3\alpha^4 + 8360a_4\alpha^4 + 8aa_1\alpha\beta + 42aa_2\alpha\beta + 75aa_3\alpha\beta + \\ & 80aa_4\alpha\beta - 14a_1\alpha^2 - 6a_2\beta^2 + 15a_3\beta^2 + 40a_4\beta^2 - 34a_1\alpha^2\beta^2 \\ & - 66a_2\alpha^2\beta^2 - 15a_3\alpha^2\beta^2 + 200a_4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9.4g)$$

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

$$\begin{aligned}
 &6a_1+12a_0a_1b+8a_1^2b+8a_2+16a_0a_2b+12a_1a_2b+6a_3+12a_0a_3b \\
 &-20a_2a_3b-24a_3^2b-20a_1a_4b-48a_2a_4b-84a_3a_4b-64a_4^2b \\
 &-54a_1\alpha^4-172a_2\alpha^4-354a_3\alpha^4-600a_4\alpha^4-2aa_1\alpha\beta+ \\
 &4aa_2\alpha\beta+18aa_3\alpha\beta+40aa_4\alpha\beta-6a_1\beta^2-8a_2\beta^2-6a_3\beta^2 \\
 &-6a_1\alpha^2\beta^2-28a_2\alpha^2\beta^2-66a_3\alpha^2\beta^2-120a_4\alpha^2\beta^2=0,
 \end{aligned} \tag{4.9.4h}$$

$$\begin{aligned}
 &a_1+2a_0a_1b+2a_1^2b+2a_2+4a_0a_2b+6a_1a_2b+4a_2^2b+3a_3+6a_0a_3b+ \\
 &8a_1a_3b+10a_2a_3b+6a_3^2b+4a_4+8a_0a_4b+10a_1a_4b+12a_2a_4b+ \\
 &14a_3a_4b+8a_4^2b+a_1\alpha^4+2a_2\alpha^4+3a_3\alpha^4+4a_4\alpha^4-aa_1\alpha\beta \\
 &-2aa_2\alpha\beta-3aa_3\alpha\beta-4aa_4\alpha\beta-a_1\beta^2-2a_2\beta^2-3a_3\beta^2 \\
 &-4a_4\beta^2+a_1\alpha^2\beta^2+2a_2\alpha^2\beta^2+3a_3\alpha^2\beta^2+4a_4\alpha^2\beta^2=0.
 \end{aligned} \tag{4.9.4i}$$

Bu denklem sistemini b katsayısının iki durumu için incelersek, yani $b = 1$ için

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{-i\beta}{\sqrt{13}} \text{ veya } \alpha = \frac{-i\beta}{\sqrt{13}} \\
 a_0 &= \frac{-169+169\beta^2+36\beta^4}{338}, \\
 a_1 &= 0, \\
 a_2 &= \frac{-840\beta^4}{169}, \\
 a_3 &= -2a_2, \\
 a_4 &= a_2,
 \end{aligned} \tag{4.9.5}$$

ve

$b = -1$ için

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{-i\beta}{\sqrt{13}} \text{ veya } \alpha = \frac{i\beta}{\sqrt{13}} \\
 a_0 &= \frac{169-169\beta^2-36\beta^4}{338}, \\
 a_1 &= 0, \\
 a_2 &= \frac{840\beta^4}{169}, \\
 a_3 &= -2a_2, \\
 a_4 &= a_2,
 \end{aligned} \tag{4.9.6}$$

çözümleri elde edilir. Böylece (4.9.1) denkleminin

$$u_1(x,t) = \frac{-169+169\beta^2+36\beta^4}{338} - \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^2} + \frac{1680\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^3} - \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^4}, \quad (4.9.7)$$

$$u_2(x,t) = \frac{-169+169\beta^2+36\beta^4}{338} - \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^2} + \frac{1680\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^3} - \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^4}, \quad (4.9.8)$$

$$u_3(x,t) = \frac{169-169\beta^2-36\beta^4}{338} + \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^2} - \frac{1680\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^3} + \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{-i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^4}, \quad (4.9.9)$$

ve

$$u_4(x,t) = \frac{169-169\beta^2-36\beta^4}{338} + \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^2} - \frac{1680\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^3} + \frac{840\beta^4}{169\left(1+e^{\frac{i\beta}{\sqrt{13}}(x-\beta t)}\right)^4}, \quad (4.9.10)$$

4. İLERLEYEN DALGA PROBLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYG.

rasyonel üstel çözümleri elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmadan görüleceği üzere ilerleyen dalga çözümleri Fisher'ın denklemini araştıran Kolmogorov ve arkadaşlarından bu yana büyük ilerleme kat etmiştir. Ama ilerleyen dalga çözümleri özellikle 1965 yılında Kruskal ve Zabusky'nin makalelerini yayınlamalarından sonra önem kazanmıştır. Yani, 1834 yılında Edinburgh-Glasgow arasındaki Union kanalında John Scott Russel'in gözlemlediği ilk tek dalganın önemi bir asırdan fazla bir süre geçtikten sonra anlaşılmıştır.

İlerleyen dalga çözümleri, Mathematica, Maple vb. bilgisayarlı cebir programlarının gelişimi ile doksanlı yıllarda büyük bir artış göstermiştir.

Özellikle son on yılda lineer olmayan evolüsyon denklemlerin ilerleyen dalga çözümü için çok sayıda yöntem ortaya konulmuştur.

Tüm ilerleyen dalga çözümlerinin ortak noktası lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - vt$ dalga dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme indirgenmesidir. Daha sonra bu çözümler için uygun bir fonksiyon (ansatz) seçilerek çözüm basitleştirilmiştir.

Bu yöntemlerin tümünü karşılaştırdığımızda her bir yöntemin daha etkili olduğu bir denklem sınıfı olduğu görülmektedir. Özellikle Tanh Yöntemi, Üstel Açılım Yöntemi ve $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım Yöntemi ile çok sayıda denklemin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu üç yöntem matematiksel fizikteki birçok denkleme başarıyla uygulanmış ve halen uygulanmaya devam edilmektedir.

Lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin ilerleyen dalga çözümleri fizik, kimya ve biyoloji bilim insanları için ilerleyen yıllarda da çok faydalı olacaktır. Günümüzde de bu yöntemler hala çok ilginç ve önemli çalışma alanlarındandır. Bundan sonra da ortaya konabilecek yeni yöntemler bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

- Ali, A. T., Hassan, E. R. 2010. General Exp_a -function method for nonlinear evolution equations. Applied Mathematics Compu. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.06.025>.
- Bai, C. L., Zhao, H. 2006a. Generalized method to construct the solitonic solutions to (3+ 1)-dimensional nonlinear equation. Physics Letters A 354, 428-436.
- Bai, C. L., Zhao, H. 2006b. Complex hyperbolic-function method and its applications to nonlinear equations. Physics Letters A355, 32-38.
- Birnir, B. 1998. Elementary Partial Differential Equations and Applications. Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara.
- Brezis, H., Browder, F. 1998. Partial Differential Equations in the 20th Century. Advances in Mathematics 135, 76-144, Article No. AI971713.
- Chen, H., Zhang, H. 2004. New multiple soliton-like solutions to the generalized (2+1)-dimensional KP equation. Applied Mathematics and Computation 157. 765-773.
- Chen, J., Li, B. 2012. Multiple $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations in mathematical physics. PRAMANA-journal of physics. Vol. 78, No. 3, pp. 375-388.
- Cornejo-Pérez, O. , Negro, J. , Nieto, L. M., Rosu, H. C. 2006. Travelling-Wave Solutions for Korteweg-de Vries-Burgers Equations through Factorizations. In press at Foundations of Physics. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0604004v2>.
- Daripa, P. 2006. Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves. European Journal of Mechanics B/Fluids 25 (2006) 1008-1021.
- Das, G. C., Sarma, J. 1999. Response to “Comment on A new mathematical approach for finding the solitary waves in dusty plasma”. Phys. Plasmas 6, 4392 .
- Debnath, L. 2005. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhäuser, Boston.

Drazin, P. G., Johnson, R. S. 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

Dunajski, M. 2010. Solitons, Instantons and Twistors. Oxford University Press Inc., New York, The United States.

Elwakil, S. A., El-labany, S. K., Zahran, M. A., Sabry, R. 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, Physics Letters A 299, 179-188.

Fan, E. 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear Equations. Physics Letters A 277, 212-218.

Fan, E. 2001. Soliton solutions for the new complex version of a coupled KdV equation and a coupled MKdV equation. Physics Letters A, 285, 373-376.

Fu, H. M., Dai, Z. D. 2009. Double Exp-function method and application. Int. J. Nonlin. Sci. Num. 10 927-933.

Ganji, D. D., Abdollahzadeh, M. 2008. Exact travelling solutions for the Lax's seventh-order KdV equation by sech method and rational Exp-function method. Applied Mathematics and Computation 206, 438-444.

Guo, S., Zhou, Y., Zhao, C. 2010. The improved $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Broer-Kaup equations and approximate long water wave equations. Applied Mathematics and Computation 216, 1965-1971.

Guo, S., Zhou, Y. 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like equations and coupled Hirota-Satsuma KdV equations. Appl. Math. Compt. 215, 3214-3221.

He, J. H., Wu, X. H. 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals 30, 700-708.

Jawad, A. J. M., Petkovic, M. D., Biswas, A. 2010. Modified simple equation method for nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation* 217, 869-877, 2010.

Kaya, D. 2004. Solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers-type equations with nonlinear terms of any order. *Applied Mathematics and Computation* 152, 709-720.

Khuri, S. A. 2004. A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type. *Chaos, Solitons and Fractals* 20, 1037-1040.

Kudryashov, N. A. 2013. Quasi-exact solutions of the dissipative Kuramoto-Sivashinsky equation *Applied Mathematics and Computation* 219, 9213-9218.

Li, D. S., Zhang, H. Q. 2004a. A further extended tanh-function method and new soliton-like solutions to the integrable Broer–Kaup (BK) equations in (2+1) dimensional spaces. *Applied Mathematics and Computation* 147, 537-545.

Li, D. S., Zhang, H. Q. 2004b. A new extended tanh-function method and its application to the dispersive long wave equations in (2+1) dimensions. *Applied Mathematics and Computation*. 147, 789-797.

Li, L., Li, E., Wang, M. L. 2010. The $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations. *Appl. Math. J. Chinese Univ.* 25(4), 454-462.

Liu, C. 2008a. The classification of all single travelling wave solutions to Calogero-Degasperis-Focas equation. <http://arxiv.org/abs/nlin/0610028v1>.

Liu, C. 2008b. Direct integral method, complete discrimination system for polynomial and applications to classifications of all single traveling wave solutions to nonlinear differential equations: a survey. <http://arxiv.org/abs/nlin/0609058v1>.

Liu, C. 2008c. Rational expansion method of exponent function for solving exact solutions to nonlinear differential-difference equations. <http://arxiv.org/abs/nlin/0609058v1>.

Liu, X. Q., Song, J. 2002. The secq–tanhq-method and its applications. *Physics Letters A* 298, 253-258.

Lu, B. Q., Pan, Z. L., Qu, B. Z., Jiang, X. F. 1993. Solitary wave solutions for some systems of coupled nonlinear equations, *Physics Lett. A* 180, 61-64.

Lü, H. L., Liu, X. Q., Niu, L. 2010. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation* 215, 3811-3816.

Maccari, A. 2006. Nonlinear Field Equations and Solitons as Particles. *Electronic Journal of Theoretical Physics*. EJTP 3, No. 10, 39-88.

Malfliet, W. 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Am. J. Phys.* 60, 650-654.

Mbah, N., Loth, M. 2005. Travelling wave solutions for PDEs. *African Institute for Mathematical Sciences* 6, Melrose Road, 7945 Muizenberg, Cape Town, South Africa.

Meleshko, S. V. 2005. *Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to Engineering*. Springer Science+Business Media, Inc.

Mızrak, M., Ertaş, A. 2012a. Application of $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method to the compound KdV-Burgers-type equations *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 17, No. 1, pp.18-28.

Mızrak, M., Ertaş, A. 2012b. Modified simple equation method for solving some nonlinear evolution equations. *DUFED* 1(1), 39-45.

Mielnik, B., Rosas-Ortiz, O. 2004. Factorization: little or great algorithm? *J. Phys. A: Math. Gen.* 37, 10007-10035.

Nachbin, A. 1999. *Some mathematical models for wave propagation*. Rio de Janeiro, Brazil.

Palais, R. S. 2000. An Introduction to Wave Equations and Solitons. The Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing.

Pava, J. A. 2009. Nonlinear dispersive and equations: Existence of stability of solitary and periodic travelling wave solutions mathematical surveys and monographs volume 156. American mathematic society.

Polat, N., Pişkin, E. 2013. Existence and Asymptotic Behavior of Solution of Cauchy Problem for the Damped Sixth-order Boussinesq Equation. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. DOI: 10.1007/s10255-012-0174-2.

Qiu, Y., Tian, B. 2011. Generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method and its Applications. International Mathematical Forum, Vol. 6, no. 3, 147-157.

Ritzwoller, M. 2005. Physics 2140 Methods in Theoretical Physics. University of Colorado at Boulder.

Rosenau, P., Hyman, J. M. 1993. Compactons: Solitons with finite wavelengths. Phys. Rev. Lett. 70 (5), 564-567.

Ruo-Xia, Y., Zhi-Bin, L. 2002. New solitary wave solutions to for nonlinear evolution equations. Chinese Physics, 1009-1963/ 2002/ 11(09) / 0864-05.

Russell, J. S. 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.

Scott, A. 2006. Encyclopedia of Nonlinear Science. Taylor & Francis e-Library.

Shang, Y. 2006. New exact special solutions with solitary patterns for Boussinesq-like B(m,n) equations with fully nonlinear dispersion. App. Math. and Computation 173, 1137-1148.

Shehata, A. R., Zayed, E. M. E., Gepreel, K. A. 2011. Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Journal of Information and Computing Science, Vol. 6, No. 2, pp. 129-142.

Sirendaoreji. 2004. New exact travelling wave solutions to three nonlinear evolution equations. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B* 19(2): 178-186.

Tian, B., Gao, Y. 1996. Beyond travelling waves: a new algorithm for solving nonlinear evolution equations. *Computer Physics Communications* 95, 139-142.

Tian, B., Gao, Y. 1997. Extending the Generalized Tanh Method to the Generalized Hamiltonian Equations: New Soliton-Like Solution. *Appl. Math. Lett.* Vol. 10, No. 6. pp. 125-127.

Wang, D. S., Li, H. 2008. Single and multi-solitary wave solutions to a class of nonlinear evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.* 343 , 273-298.

Wang, M., Li, X., Zhang, J. 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A* 372, 417-423.

Wazwaz, A. M. 2004. A sine–cosine method for handling nonlinear wave equations. *Math. Comput. Model.* 40:499-508.

Wazwaz, A. M. 2006. New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations. *Applied Mathematics and Computation.* 82, 1642-1650.

Wazwaz, A. M. 2007a. New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations. *Applied Mathematics and Computation* 186, 130-141.

Wazwaz, A. M. 2007b. The tanh–coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations. *Applied Mathematics and Computation* 188, 1467-1475.

Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.

Wazwaz, L. 2009. A modified tanh–coth method for solving the KdV and the KdV-Burgers' equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14, 443-450.

Yan, C. T. 1996 . A Simple transformation for nonlinear waves. Physics Letter A 224, 77-82.

Yan, Z., Zhang, H. 1999. New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics. Physics Letters A 252, 291-296.

Yang, J. 2010. Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems. University of Vermont, The Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.

Yusufoğlu, E., Bekir, A. 2008. Symbolic computation and new families of exact travelling solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations. Computers and Mathematics with Applications 55, 1113-1121.

Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. 1965. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical Review Letters Volume 15, Number 6.

Zayed, E. M. E. 2011. A further improved $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - expansion method and the extended tanh-method for finding exact solutions of nonlinear PDEs. WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS Issue 2, Volume 10.

Zhang, S., Tong, J. L., Wang, W. 2008. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. Physics Letters A 372, 2254-2257.

Zhang, J., Wei, X., Lu, Y. 2008. Generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications. Physics Letters A 372, 3653-3658.

Zheng, X., Chen, Y., Zhang, H. 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation. Physics Letters A 311, 145-157.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Diyarbakır 'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır ' da tamamladım. 1992 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi bölümünü kazandım. 1997 yılında mezun olduktan sonra 18 Mart 1998 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nca Diyarbakır'a matematik öğretmeni olarak atandım. 2009 yılına kadar Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı çeşitli okullarda matematik öğretmeni olarak görev yaptım. 2009 yılından beri Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Eğitimi Anabilimdalı'nda öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim ve bir çocuğum var.