T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI VE KARARSIZLIĞI

Nurhan DÜNDAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Şubat–2014

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Nurhan DÜNDAR tarafından yapılan "Doğrusal Olmayan Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılığı ve Kararsızlığı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Doç. Dr. M. Enver AYDIN
Üye :	Doç. Dr. Necat POLAT
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Asıf YOKUŞ
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Hatice TAŞKESEN
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Erhan PİŞKİN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28/02/2014

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20...

Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Doç. Dr. Necat Polat**'a şükranlarımı sunuyorum.

Öğrenim hayatım boyunca her daim sevgi ve destekleri ile yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca vermiş olduğu 2211 Yurt içi doktora bursu ile bu tezin hazırlanmasında maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (13–FF–46) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI VE KARARSIZLIĞI

DOKTORA TEZİ

Nurhan DÜNDAR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

Bu tezin ilk bölümünde doğrusal olmayan evolüsyon denklemleri, onların matematiksel davranışları ve tez çalışmasının temelini oluşturan kararlılık konusu ele alınmıştır.

İkinci bölümde sığ su dalgaları ve tek dalgalar ele alınmış ve bu dalga modellerinin tarihi gelişimine ve literatür çalışmasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca Kato teoremi, tek dalgalar için yörüngesel kararlılık ve sığ su dalga modelleri için bir blow-up oluşumu olan dalga kırılması ele alınmıştır.

Dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmıdır ve üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda, güçlü dispersif terim içeren integrallenebilir genelleştirilmiş bir sığ su dalga denkleminin çözümlerinin lokal iyi konumluluğu çalışılmıştır. Bunun yanı sıra aynı denklemin tek dalga çözümlerinin varlığı ve kararlılığı çalışılmıştır. İkinci kısımda, genelleştirilmiş Dullin-Gottwald-Holm denklemi için dalga kırılması ve tek dalga çözümlerinin kararlılığı çalışılmıştır. Üçüncü kısımda ise bir genelleştirilmiş KdV-BBM tipli denklemin çözümlerinin lokal varlığı, tek dalga çözümlerinin varlığı ve kararlılığı çalışılmıştır.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lokal İyi Konumluluk, Kato Teoremi, Evolüsyon Denklem, Sığ Su Dalgaları, Tek Dalgalar, Yörüngesel Kararlılık, Dalga Kırılması, Patlama.

ABSTRACT

STABILITY AND INSTABILITY OF SOLUTIONS OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

PhD THESIS

Nurhan DÜNDAR

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2014

In the first chapter of this thesis nonlinear evolution equations, their mathematical behavior and stability, which constitute the main subject of this thesis, are considered.

In the second chapter, shallow water waves and solitary waves are investigated, and historical development of these models and related literature are given.

In the third chapter, basic definitions, theorems and inequalities that will be used throughout the thesis are given. Moreover, Kato's theorem, orbital stability and wave breaking, which is a blow-up phenomena for shallow water wave models, are given.

The fourth chapter is the original part of this thesis and consists of three subsections. In the first part, local well-posedness of an integrable generalized shallow water wave equation with strong dispersive term is studied. Moreover, existence and stability of solitary wave solutions of this equation is studied. In the second part, wave breaking and stability of solitary wave solutions are studied for the generalized Dullin-Gottwald-Holm equation. In the third part, local existence, existence and stability of solitary waves are studied for solutions of a generalized KdV-BBM type equation.

In the fifth chapter, the obtained results are summarized and suggestions are presented.

Keywords: Local Well-Posedness, Kato's Theorem, Evolution Equation, Shallow Water Waves, Solitary Waves, Orbital Stability, Wave Breaking, Blow-up.

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n - boyutlu Euclid Uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\|u\|$	: u 'nun Normu
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$	: Lebesque Uzayı
$\|u\|_s = \|u\|_{H^s(\Omega)}$	: $u \in H^s(\Omega)$ için norm
$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$	: $u \in L^\infty(\Omega)$ için norm

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan evolüsyon denklemler, bağımsız değişkenlerinden biri t zamanı olan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Isı iletimini tanımlayan ısı denklemi ve bir telin titreşimini tanımlayan dalga denklemi evolüsyon denklemlerine en basit iki örnek olarak verilebilir. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemler sadece matematiğin bazı alanlarında değil aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji ve malzeme bilimi gibi bilim dallarında da ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Örneğin; Navier-Stokes ve Euler denklemleri akış mekaniğinde, doğrusal olmayan reaksiyon-difüzyon (reaction-diffusion) denklemi ısı transferinde ve biyoloji biliminde, doğrusal olmayan Klein Gordon denklemi ve doğrusal olmayan Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinde ve Cahn-Hilliard denklemi malzeme biliminde ortaya çıkan doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerden sadece birkaçıdır (Zheng 2004).

Görüldüğü gibi uygulamalı bilimlerde birçok işlem evolüsyon denklemlerle veya böyle denklemlerin sistemleriyle modellenebilmektedir. Bu durum doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerini ve bu denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışlarını araştırma konusunda birçok araştırmacıyı büyük bir çaba sarf etmeye itmiştir.

Evolüsyon denklemlerle ilgili birçok soru sorulabilir: Denge çözümleri, ilerleyen dalgalar, self-similar çözümler, zaman-periyodik çözümler gibi özel çözümlerin varlığı; bu çözümlerin dinamik kararlılığı; çözümlerin uzun zaman asimptotik davranışı; kaotik dinamikler; tam integrallenebilirlik; çözümler için singüler pertürbasyon ifadesi; rasgele çözümlerin evolüsyonu; nümerik şemaların yakınsaklığı v.b.

Şüphesiz ki en temel soru ise çözümlerin varlığı ve tekliği ile ilgilidir. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemler için çözümlerin varlığı, tekliği ve çözümlerin verilere sürekli bağımlılığı yani çözümün iyi konumluluğu birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bunun yanı sıra çözümlerin sonlu zamandaki singulariteleri (yani çözümün tekilliği), çözümlerin kararlılığı, çözümlerin zamanda asimptotik davranışı gibi sorular da evolüsyon denklemlerini incelerken ele alınan en temel problemler arasına girmiştir.

Bu tez çalışmasında bağımsız değişkenlerinden biri t zamanı olduğundan dolayı birer evolüsyon denklemi olan bazı sığ su dalga denklemlerinin matematiksel davranışları ele alınmıştır. Burada kastedilen matematiksel davranışlar, sözü geçen denklemler için lokal iyi konumluluk (local well-posedness) dalga kırılması (wave-breaking) formunda blow-up, tek dalga (solitary wave) çözümleri ve bu tek dalga çözümleri için kararlılık gibi davranışlardır.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığını ve kararlılığın özelliklerini tespit etmek bazen çok zor olabilir. Matematiksel tanımlamalar çoğu zaman çok kurallı olabilir. Çalışılan probleme göre farklı tanımlamalar kullanılır. Bu durumdan dolayı çalışacağımız problemin kararlılığını incelerken karşımıza literatürde çok fazla kararlılık çeşidi çıkacaktır. Literatürde yaygın olarak kullanılan kararlılık çeşitleri Lyapunov kararlılık (Lyapunov stability), asimptotik kararlılık (asymptotic stability), üstel kararlılık (exponentially stability) ve yörüngesel kararlılıktır (orbital stability). Basit bir örnekle bu kararlılık çeşitlerinin matematiksel tanımını verelim.

$\dot{x} = f\left(x\left(t\right)\right),\ x\left(0\right) = x_0$ doğrusal olmayan dinamik sistemi düşünelim. Burada $x\left(t\right) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, D orijini içeren açık bir küme ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $f\left(x_e\right) = 0$ olacak şekilde f fonksiyonunun bir x_e denge noktasına sahip olduğunu kabul edelim.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için $\left\|x\left(0\right) - x_e\right\| < \delta$ iken, her $t \geq 0$ için $\left\|x\left(t\right) - x_e\right\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$ var ise sistemin dengesi Lyapunov kararlıdır denir.

(ii) Sistemin dengesi Lyapunov kararlı ve eğer $\left\|x\left(0\right) - x_e\right\| < \delta$ iken $\lim_{t\to\infty} \left\|x\left(t\right) - x_e\right\| = 0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise sistemin dengesi asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Sistemin dengesi asimptotik kararlı ve eğer $\left\|x\left(0\right) - x_e\right\| < \delta$ iken, her $t \geq 0$ için

$$\left\|x\left(t\right) - x_e\right\| \leq \alpha\ \left\|x\left(0\right) - x_e\right\| e^{-\beta t}$$

olacak şekilde bir $\alpha, \beta, \delta > 0$ var ise sistemin dengesi üstel kararlıdır denir.

Kavramsal olarak, yukarıdaki ifadeleri aşağıdaki şekilde anlamlandırabiliriz:

(i) Lyapunov kararlılık başlangıç çözümleri denge noktasına yeterince yakınsa sonsuza kadar yeterince yakındır anlamına gelir.

(ii) Asimptotik kararlılıkta çözümler sadece yeterince yakın kalmaz sonunda dengeye yakınsar.

(iii) Üstel kararlılık ise çözümlerin yakınsama ile birlikte daha hızlı ya da en azından bilinen belli bir oran kadar hızlı yakınsadığı anlamına gelir.

Yörüngesel kararlılık ise doğrusal olmayan dalga denklemlerinin tek dalga çözümlerinin kararlığını incelemek için kullanılan bir kavramdır. Lokalize ilerleyen bir dalgayı temsil eden bir tek dalganın küçük bir pertürbasyonu, bir diğerini farklı hız ve faz kaymasıyla oluşturacağından kararlılık için uygun kavram yörüngesel kararlılıktır.

Yani, bir tek dalgaya yakın başlayan bir dalga, diğer bütün zamanlarda daima bu dalganın bazı ötelemelerine yakın kalır; bir tek dalganın bütün ötelemelerinin kümesi onun yörüngesidir. Böylece dalganın şekli tüm zamanlar için yaklaşık olarak aynı kalır.

Sığ su dalga denklemlerinin çözümleri için blow-up oluşumu da son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çeken bir konu olmuştur. Tekilliğin basit bir çeşidi sonlu bir zamanda çözümün kendisi sınırsız iken oluşan tekilliktir. Su dalgalarını tanımlayan denklem modelleri için ise çözüm (dalga temsil eder) sınırlı ise çözümün eğimi sonlu zamanda sınırsız olduğunda dalga kırılması meydana gelir. Dalga kırılması su dalga modelleri için bir blow-up oluşumudur.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Önceki Çalışmalar adını alan ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

Materyal ve Metot olarak adlandırılan üçüncü bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, tanımlara, uzaylara, eşitsizliklere ve teoremlere yer verilmiştir. Yine bu bölümde Kato teoremi, tek dalgalar için kararlılık yöntemleri ve sığ su dalgaları için blow-up oluşumu yer almıştır.

Araştırma Bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, matematiksel analizin ispat tekniklerini kullanarak gerçekleştirmek istediğimiz esas amaç güçlü dispersif terimli genelleştirilmiş bir sığ su dalga denklemi olan

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + (g(u))_x + \gamma \left(u - \alpha^2 u_{xx}\right)_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u)\, u_{xx}\right)_x \qquad (1.1)$$

denkleminin bazı matematiksel davranışlarını incelemektir. Bu kısımda ilk olarak (1.1) denklemi için bir başlangıç değer probleminin lokal iyi konumluluğu çalışılmıştır. Bunun için denklem uygun formatta yazıldıktan sonra Kato teoremi kullanılmıştır. Daha sonra (1.1) denklemin tek dalga çözümlerinin varlığı Konsantrasyon-Kompaktlık (Concentration-Compactness) lemması (Lions 1984) uygulanarak elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak da tek dalga çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir.

Araştırma Bulguları bölümünün ikinci alt bölümü ise başka bir sığ su dalga denklemi olan genelleştirilmiş Dullin-Gottwald-Holm

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + (h(u))_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{g'(u)}{2} u_x^2 + g(u)\, u_{xx}\right)_x \qquad (1.2)$$

denkleminin dalga kırılmasını (blow-up) ve tek dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığını içermektedir.

Dördüncü bölümde son olarak tek yönlü dalga yayılımını modelleyen ve doğrusal olmayan bir dispersif kısmi diferansiyel denklem olan genelleştirilmiş KdV-BBM tipli

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxt} + f\left(u\right)_x = 0 \tag{1.3}$$

denklemi ele alınmıştır. (1.3) denkleminin çözümlerinin lokal varlık teorisi elde edildikten sonra tek dalga çözümlerinin varlığı ve yokluğu çalışılmıştır. Daha sonra da tek dalga çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, tezde elde edilen temel sonuçlar verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Dünya yüzeyinin %70'inden fazlası sularla kaplıdır. Rüzgarlı bir günde bir botla küçük bir gezi yapıldığında suyun durgun bir yapıya sahip olmadığı görülür. Deniz altındaki depremlerin oluşturduğu dalgalar veya bir okyanusa düşen bir meteor, kıyılarda 5 000 kilometreden daha uzağa ciddi zararlar verebilir. Yanlış hızla giden bir geminin oluşturduğu neredeyse sürekli formdaki dalgalar kıyıya ulaştığında çok yıkıcı olabilirler. Tüm bu örnekler, yüzeydeki su dalgalarının davranışlarının gözlemlenmesinin günlük hayat açısından ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Dalgaların yıkıcı etkilerinin dışında, sağladığı faydalar açısından da gözlemlenmeleri ve formüle edilerek davranışlarının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Şöyle ki, dalgalar kontrol altına alınamamış çok büyük enerji barındırmaktadırlar. Günümüzde de yenilenebilir enerji kaynakları büyük önem taşıdığından, bu enerjinin en azından bir bölümü kontrol altına alınabilirse, dünyanın günlük elektrik ihtiyacını (bazı tahminlere göre dünya enerji tüketiminin %10'unu) karşılayabilir. Bu kapsamda Portekiz'de Pelamis aygıtları kullanılarak dünyanın ilk dalga çiftliği kurulmuş. İngiltere, İrlanda, Norveç gibi ülkelerde de dalga enerjisinin önemi anlaşılmış, santraller kurulmuş, devlet desteğiyle pilot çalışmalar başlatılmış ya da konu, enerji planlamalarında yakın hedef olarak yer almıştır. Norveç'in kuzey sahillerinde, Endonezya-Avustralya arasında dalga enerjisi ile çalışan santraller de hizmettedir (Taşkesen 2012).

Fiziki olduğu kadar matematiksel problemler de su dalgaları ve onların sahil üzerine kırılmaları, nehirlerdeki su taşkınlarından oluşan dalgalar, okyanuslardaki fırtınalardan oluşan dalgalar, sulardaki gemi dalgaları, göller ve limanlar gibi kapalı sulardaki serbest salınımlarla ilgilenmişlerdir (Debnath, 1994).

Bu çalışmada sığ su dalgaları üzerinde durulacaktır. Sığ su dalgaları, yer çekimi kuvveti altındaki sığ su kütlelerinin serbest yüzeylerindeki akışa veya bir akışkanın yatay basınç yüzeyinin altındaki akışa karşılık gelir. Sığ su dalga denklemleri sığ su dalgalarını tanımlayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir kümesidir.

Her ne kadar sığ su dalgalarının matematiksel modellenmesinin tarihçesi 18. yüzyıl ve 19. yüzyılın başlarında Fransız ve İngiliz matematikçilere (Craik 2004) kadar gitse de George Gabriel Stokes (1847) hidrodinamiğin öncülerinden biri olarak kabul edilir (Craik 2005). Alttan geçirimsiz bir taban ve üstten serbest bir yüzeyle sınırlandırılmış, sabit düşey bir yer çekimi kuvvetine maruz kalan sıkıştırılamaz, invisid bir akışkanın hareketi için denklemler türetmiştir. Bu temel denklemlerden başlayarak ve daha basitleştirerek, varsayımlar yaparak çeşitli sığ su dalga modelleri elde edilebilir. Bu sığ su modelleri yaygın olarak oşinografi ve atmosfer bilimlerinde kullanılır.

İlerleyen dalga çözümleri sığ su dalga denklemlerinde de büyük öneme sahiptir. İlerleyen dalgalar, kısmi diferansiyel denklemlerin kendi şeklini koruyarak sabit $c \in \mathbb{R}$ hızı ile hareket eden çözümleridir. Diğer bir ifade ile denklemin

$$u(t,x) = \varphi_c(\xi), \qquad \xi = x - ct$$

formundaki çözümleridir. $\varphi_c(\xi)$ fonksiyonu, $|\xi| \to \infty$ iken sıfıra yaklaşan bir tek tümsek şeklinde ilerliyor ise tek dalga olarak adlandırılır.

Sığ sularda sonlu genlik ve sabit hızda şeklini koruyarak yayılan tek dalgalar için ilk gözlem, John Scott Russell tarafından yapıldı. Scott Russell, 1834 de Edinburgh ve Glasgow şehirlerini birbirine bağlayan kanalda bir gemi şirketi için araştırmalar yaparken, hız ve şekil değişikliğine uğramadan ilerleyen ve hızı genliğine bağlı olan tek dalgaları keşfetmiş ve 1844 teki "Reports on waves" isimli çalışmasında bu dalgalar için matematiksel bir bağıntı vererek, akışkanlardaki, plazmalardaki ve elastik ortamlardaki dalgaların modellenmesine öncülük etmiştir. Russell evinde dalga tankları inşa ederek ve bir su kanalının bir ucunda bir ağırlık bırakıp tek dalgalar üreterek bazı deneysel çalışmalar yapmıştır. Özellikle Russell'ın bu çalışmalarındaki iki sonuç akışkan modeller için doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişiminin ilerlemesinde çok önemliydi:

1. Tek dalgaları gözlemleyip böylece onların varlığı sonucuna varması,

2. a dalganın genliği, h suyun bozulmamış derinliği ve g yerçekimi ivmesi olmak üzere tek dalganın yayılım hızı c için

   $$c^2 = g(h+a)$$

   şeklindeki eşitliği elde etmesi.

Ancak Scott Russell, tek dalgaların önemini anlamakta çağının çok ötesindeydi. Russell'ın deneysel çalışmaları Isaac Newton ve Daniel Bernoulli'nin hidrodinamik teorileri ile çelişkili görünüyordu. George Biddell Airy ve George Gabriel Stokes, Russell'ın gözlemlerini kabul etmek istemiyorlardı çünkü onlar lineer su dalga teorisi ile açıklanamıyordu. Çağdaşları teoriyi geliştirmek için uzun bir süre harcamasına rağmen Diederik Korteweg ve Gustav de Vries'in 1895 deki teorik bir açıklaması öncesine kadar ciddi bir ilerleme kaydedilemedi.

Ayrıca bu tip dalgaların varlığı ve başka sonuçlar çok tartışılan konulardı. Airy, Russell'ın dalga teorisinin var olamayacağı sonucuna vardı. Bu arada, Stokes doğru denklemi kullandı ama yanlış sonuçlar elde etti. Diğer taraftan Rayleigh ve Boussinesq birbirlerinden bağımsız benzer sonuçlar buldular. Boussinesq sonuçlarını elde etmek için bir boyutlu lineer olmayan evolüsyon denklemini türetmiştir. Onların çalışmaları invisid su dalgası denklemlerinin böylesi kesin çözümler üretip üretemeyeceği konusunda büyük bir tartışma yarattı. Nitekim bu tartışmalar uzun yıllar sonra en nihayetinde 1895 de Korteweg-de Vries tarafından doğru temellere oturtulabildi. Onlar küçük genlikli ve dalga boyu uzun sığ su dalgalarını tanımlayan meşhur KdV denklemini

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

modellediler. Burada yaygın olarak $\alpha = \pm 1$ ya da $\alpha = \pm 6$ olarak alınır. u_t terimi bir yöndeki dalga yayılımının zaman evolüsyonunu tanımlar. Bundan dolayı KdV denklemi bir evolüsyon denklemidir. Doğrusal olmayan $\alpha u u_x$ terimi dalganın dikleşmesini açıklar ve dispersif u_{xxx} terimi dalganın yayılmasını tanımlar. Bu denklem, sığ su dalgaları, iyon akustik plazma dalgaları, kabarcık-sıvı karışımları, uyumsuz kristallerde dalga olayı gibi birçok fiziksel olayın modellenmesinde kullanılır. KdV denkleminin tek dalgaları solitondur. Solitonlar elastik saçılma özelliğine sahip tek dalgalardır yani birbirleriyle çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını korurlar.

Tek dalgaların varlığını kapsamlı olarak gösteren ve doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemle modelleyen KdV denkleminin erken gelişimine rağmen ne yazık ki doğrusal olmayan dalgalar alanında tek dalgalar uzun bir süre önemsiz olarak algılandı. 1965 yılına kadar da KdV denkleminin herhangi bir yeni uygulaması bulunmamıştır. Zabusky ve Kruskal (1965), termalizasyonu incelemek için Fermi ve ark. (1955) tarafından kullanılan tek boyutlu harmonik olmayan bir latisin sürekli limiti olarak KdV denkleminin ortaya çıktığını farkettiler. Zabusky ve Kruskal'ın 1965 deki bu bulguları bir yandan soliton kavramını (Scott Russel'ın tek dalgası aslında bir solitondur) ve en nihayetinde integrallenebilirlik kavramını ortaya çıkarırken, diğer yandan da Hamilton kaosunun ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. 1970 lerden beri tek dalgalar ve soliton çözümler KdV denkleminin ve başka denklemlerin yoğun bir çalışma konusu olmuştur.

KdV denkleminden önce elde edilen, sığ suların yüzeyindeki uzun dalgaların yayılımını modelleyen ve Scott Russell'ın deneysel gözlemlerini destekleyen diğer bir denklem de Boussinesq denklemidir. 1872 de Joseph Valentin Boussinesq'in (Boussinesq, 1872) yayılma ve doğrusal olmama etkilerini de hesaba katarak Euler'in hareket denklemlerinden oluşturduğu bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_{tt} = u_{xx} - \alpha u_{xxxx} + \beta \left(u^2\right)_{xx}. \tag{2.2}$$

Burada $u(t,x)$ akışkanın serbest yüzeyindeki yükselti (genlik), α, β $(\alpha < 0)$ akışkanın derinliğine ve uzun dalgaların karakteristik hızına bağlı olan sabitlerdir. (2.2) denklemi, sığ su dalgalarının dışında, serbest yüzeyli ince akışmaz tabaka dinamikleriyle ilgili çalışmalarda, doğrusal olmayan şeritlerde, şekil-koruyan alaşımlarda, elastik çubuklardaki dalgaların yayılımında, birleştirilmiş elektrik devreleri gibi birçok yerde karşımıza çıkmaktadır (Denklemin özellikleri ve detaylı literatür bilgisi için bkz. Polat ve Ertaş 2009, Taşkesen 2012).

Başka bir ünlü denklem de Benjamin, Bona ve Mahony (1972) tarafından bulunan ve BBM veya düzenlenmiş uzun dalga denklemi (regularized long wave (RLW)) olarak adlandırılan aşağıdaki denklemdir:

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - u_{xxt} = 0. \tag{2.3}$$

BBM denklemi KdV denklemine alternatif bir model olarak önerilmiştir ve doğrusal olmayan dispersif dalga sistemlerinde tek yönlü uzun dalgaların yayılımını tanımlar. Bona ve ark. (1980), nümerik çalışmalarında BBM denkleminin tek dalgalarının soliton olmadığını göstermişlerdir.

Camassa ve Holm (1993, 1994) tarafından su dalgalarını modelleyen doğrusal olmayan, integrallenebilen ve dispersif terimli bir denklem

$$u_t + 2\omega u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{2.4}$$

olarak verilmiştir. Burada ω kritik sığ su dalga hızı ile ilgili bir sabittir. (2.4) Camassa-Holm denklemi yerçekimi etkisi altında sığ su serbest yüzeyinde, bir-boyutlu yüzey dalgalarını tanımlamak için ortaya çıkan bir modeldir. (2.4) Camassa-Holm denklemi global çözümlere ve sonlu zamanda blow-up olan çözümlere sahiptir (Constantin ve Escher 1998a, 1998b, Yin 2004). Camassa-Holm denklemi

$$u(t,x) = \varphi(x - ct)$$

formundaki tek dalga çözümlerine sahiptir. $\omega > 0$ durumunda çözümler düzgün tek dalgalardır ve bu tek dalgaların kararlılığı Girillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teoremi kullanılarak Constantin ve Strauss (2002) tarafından çalışıldı. $\omega = 0$ durumunda tek dalgalar

$$u(t,x) = c\varphi(x-ct)$$

formunda olup burada $\varphi(x) = exp(-|x|)$ şeklindedir. Bu tek dalgalar zirvede sivrileşen ve peakon olarak adlandırılan tek dalgalardır. Bunların kararlılığı Constantin ve Strauss (2000a) tarafından çalışıldı. Ayrıca Camassa-Holm denkleminin tek dalgaları solitondur. Bunların dışında Camassa-Holm denklemi ve onun çeşitli genelleştirilmiş modelleri bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Constantin 1997, Molinet 2004, Yin 2004, 2007, Hakkaev ve Kirchev 2005, Tian ve ark. 2011).

Doğrusal olmayan sığ su dalgalarını modelleyen başka bir denklemde aşağıdaki Degasperis- Procesi denklemidir (Degasperis ve Procesi 1999, Degasperis ve ark. 2002):

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{2.5}$$

(2.5) denkleminin çözümlerinin matematiksel davranışları geniş bir şekilde bir çok yazar tarafından çalışılmıştır (Escher ve ark. 2006, Wu ve Yin 2010, Chen 2011).

Doğrusal olmayan evolüsyon denklemi,

$$y_t + c_0 u_x + uy_x + 2yu_x + \gamma u_{xxx} = 0 \tag{2.6}$$

düz bir taban üzerindeki tek yönlü sığ su dalgaları için bir modeldir. Burada $y = u - \alpha^2 u_{xx}$ momentum değişkeni, α^2 ve $\frac{\gamma}{c_0}$ uzunluk ölçeklerinin kareleri, $c_0 = \sqrt{gh} > 0$ ($c_0 = 2\omega$) uzamsal sonsuzda dinlenme halindeki su için lineer dalga hızı, h ortalama akışkan derinliği ve g yerçekimi sabitidir. Dullin ve ark. (2001) (2.6) denklemini sığ su rejiminde Euler denklemleri için Hamiltonian da asimptotik açılımları direkt kullanarak türetmişlerdir. Bi-Hamiltonian formundadır. (2.6) Dullin-Gottwald-Holm denklemi (kısaca DGH denklemi olarak adlandırılacaktır) ters saçılma dönüşümü (inverse scatterring transform (IST)) metoduyla integrallenebilir bir sistemdir ve hem Korteweg-de Vries (KdV) hem de Camassa-Holm (CH) denklemlerini (Johnson 2002) limit durumu olarak içerir.

$y = u - \alpha^2 u_{xx}$ notasyonunu kullanarak (2.6) denklemi

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 (2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. (2.7) su dalgaları için iki ayrı integrallenebilir soliton denklem ile ilgilidir. $\alpha = 0$ ve $\gamma \neq 0$ olduğu zaman bu denklem KdV denklemine dönüşür. $\alpha = 1$ ve $\gamma = 0$ için Camassa-Holm denklemine dönüşür.

Son zamanlarda DGH denklemi bir çok çalışmanın konusu olmuştur. Tian ve ark. (2005) DGH denklemi için Cauchy probleminin iyi konumluluğunu ve saçılma problemini çalıştılar. DGH denkleminin global çözümleri ve blow-up çözümleri de bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Yin 2005, Zhou 2007, Zhang ve Yin 2008). DGH denklemi $\gamma = -2\alpha^2\omega$ iken zirvede sivrileşen (pik olan) tek dalga çözümlerine ve $\gamma \neq -2\alpha^2\omega$ iken ise düzgün tek dalga çözümlerine sahiptir. DGH denkleminin pik olan tek dalgaları da düzgün tek dalgaları da yörüngesel kararlıdır (Tian ve ark. 2005, Hakkaev 2006). (2.7) DGH denkleminin bir genelleştirilmişi olan

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + h(u)_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{g'(u)}{2} u_x^2 + g(u) u_{xx} \right)_x \tag{2.8}$$

denklemi Liu ve Yin (2011) tarafından çalışıldı. (2.8) de $h(u) = 2\omega u + \frac{3}{2}u^2$ ve $g(u) = u$ olarak alınırsa (2.7) DGH denkleminin elde edildiği kolayca görülür. Liu ve Yin (2011) çalışmalarında Kato teoremini kullanarak (2.8) denklemi için bir başlangıç değer probleminin lokal iyi konumluluğunu çalışmışlardır. Ayrıca aynı çalışmada yazarlar $h(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2}u^{p+1}$ ve $g(u) = u^p$ için (2.8) in pik olan tek dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığını incelemişlerdir.

(2.7) de zayıf dispersif terim γu_{xxx} yerine güçlü dispersif terim $\gamma(u - \alpha^2 u_{xx})_{xxx}$ yazılırsa denklem

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma\left(u - \alpha^2 u_{xx}\right)_{xxx} = \alpha^2 \left(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}\right) \tag{2.9}$$

denklemine dönüşür. Güçlü dispersif terim $\gamma(u - \alpha^2 u_{xx})_{xxx}$, türbülans için Lagrangian ortalamalı Navier-Stokes alfa denklemine karşılık gelir ve çözümler üzerinde analitik kontrol sağlayabilir (Tian ve ark. 2006). Tian ve ark. (2006) Kato'nun yarıgrup yaklaşımını kullanarak (2.9) denklemi için bir başlangıç değer probleminin lokal iyi konumluluğunu çalışmışlardır. Ayrıca, kesin blow-up senaryosunu elde etmiş ve daha genel başlangıç verileriyle (2.9) denkleminin güçlü çözümlerinin patlama kriterini vermişlerdir. Açıktır ki (2.9) denkleminde $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ ve $\omega = 0$ olarak alınırsa

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

şeklindeki Camassa-Holm denkleminin yüksek mertebeden bir modifikasyonu olan aşağıdaki beşinci mertebeden sığ su denklemi

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxx} + 3uu_x - u_{xxxxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.10) denklemi için Cauchy probleminin iyi konumluluğu Sobolev uzaylarında çalışılmıştır (Himonas ve Misiolek 2000a, 2000b).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler yer almaktadır (Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011). Ayrıca tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|.\| : X \to \mathbb{R}^{+}$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(N_2) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Her $\|x\|$ normu, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Bununla birlikte, bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanan norm altında vektör uzayı belirtir.

Tanım 3.1.2. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.3. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A > 0$, $B > 0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir. Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|.\|_1(\|.\|_2)$ normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisi ise, $\|.\|_2(\|.\|_1)$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (burada $\overline{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(iii) $(ax + by, z) = a(x,z) + b(y,z)$.

$K = \mathbb{R}$ halinde $(x,y) = (y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.1.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.8. $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x = (x_1, ..., x_n)$ ve bu noktanın normu $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ şeklindedir.

Tanım 3.1.9. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.10. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.11. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \overset{z}{\to} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.12. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

(a)

$$\|f_n - f\| \to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır.

(b) her $x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.13. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya çoklu-indis denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \le j \le n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,\dots,0)}u = u$ olur.

Tanım 3.1.14. Eğer $G \subset \mathbb{R}^n$ ise $\mathbb{R}^n$ de G nin kapanışı $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, $\mathbb{R}^n$ in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonun desteği

$$supp\ u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $supp\ u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe sahiptir* denir.

Tanım 3.1.15. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha\phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$ olur. $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarına ait ve kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.16. Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir. $C_B^m(\Omega)$ ile $0 \le |\alpha| \le m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha\phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\phi(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.17. Eğer $\phi \in C(\Omega)$, Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ile $0 \le |\alpha| \le m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha\phi$ lerin sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. (Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar; örneğin, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ olsa bile $C^m\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right) \neq C^m(\mathbb{R}^n)$ dır.) $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı da

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

aynı norm ile bir Banach uzayıdır.

3.2. Lebesque Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.2.1. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ *uzayı* denir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 3.2.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X, \qquad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 3.2.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.6. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.2.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(.)\|_X \in L^p(a, b)$ koşulunu sağlayan (a, b) den X e tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonları uzayına $L^p(a, b; X)$ *uzayı* denir. $L^p(a, b; X)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c, d; X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a, b; X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.2.8. Her $t \in [0, T]$ için $[0, T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0, T]; X)$ *uzayı* denir. $C^m([0, T]; X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{t \in [0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.3.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 3.3.2. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 3.3.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$$

olur.

Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlanan Sobolev uzaylarının özelliklerinin çoğu ve özellikle bu uzaylarda verilen gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne (regularity) bağlıdır. Bu tür özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik ya da analitik koşullar türünden ifade edilir. Aşağıda bu geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.5. $\mathbb{R}^n$ de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z-x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine tepe noktası x olan bir *sonlu koni* adı verilir. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olmak üzere, eğer Ω nın her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω bölgesi *koni özelliğini sağlar* denir.

Tanım 3.3.6. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, $\mathbb{R}^n$ de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi elde edilir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.3.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 3.3.8. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

3.4. Operatörler

Tanım 3.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \to Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elemana götürüyorsa A ya *operatör*, D_A ya da A operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 3.4.2. $D_A \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne her $x, y \in D_A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

koşuluyla birlikte *doğrusal operatör* denir.

Tanım 3.4.3. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörüne her $x, y \in D_A$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği ile birlikte *simetrik operatör* denir.

Tanım 3.4.4. $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_A$ için

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte *sınırlı operatör* denir.

Tanım 3.4.5. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal, simetrik bir A operatörüne her $x \in D_A \subset H$

$$(Ax, x) \geq 0$$

eşitsizliği ile birlikte *negatif olmayan operatör* denir. Negatif olmayan A operatörü için

$$(Ax, x) > 0 \Rightarrow x = 0$$

ile *pozitif operatör* denir.

Tanım 3.4.6. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$ de Y uzayının iç çarpımı ve $A : X \to Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^* y)$$

koşulunu sağlayan $A^* : Y \to X$ operatörüne, A operatörünün *eş operatörü* denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre *öz-eşlenik (self-adjoint) operatör* denir.

Tanım 3.4.7. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal ve öz-eşlenik bir A operatörüne her $x \in H$ için

$$(Ax, x) \geq C \|x\|_H^2, \qquad C > 0$$

ile birlikte pozitif belirli bir operatör denir.

3.5. Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1. Cauchy Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.5.2. Young Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.5.3. Hölder Eşitsizliği. $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess \sup\limits_{\Omega} |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.5.4. İnterpolasyon Eşitsizliği. $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.5.5. Minkowski Eşitsizliği. $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.5.6. Sobolev Eşitsizliği. $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n,p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.5.7. Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x))$ vektörü $i = 1, ..., n$ olmak üzere $A_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $\operatorname{div} A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\, n(x)\, dS$$

olup, burada $n(x)$; Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül, Ostrogradsky formülü olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $v(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradsky formülüne göre

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

Tanım 3.5.8. Daralma Dönüşümü. X bir metrik uzay olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer

$$d(T(x), T(y)) \leq c d(x,y), \qquad x, y \in X$$

olacak şekilde bir $0 \leq c < 1$ sabit sayısı varsa, T daralma dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 3.5.9. Daralma Dönüşümü Prensibi. X tam bir metrik uzay olsun. $T : X \to X$, c daralma sabiti ile verilmiş bir daralma dönüşümü olsun. $x_0 \in X$ olsun ve tümevarımsal olarak

$$x_{n+1} = T\left(x_n\right), \qquad n \geq 0$$

tanımlansın. Bu durumda T bir tek a sabit noktasına sahip, x_n dizisi a ya yakınsak ve

$$d\left(a, x_n\right) \leq c^n d\left(a, x_0\right)$$

dır.

Lemma 3.5.10. Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form).

$\eta\left(t\right)$ negatif olmayan, $[0, T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi\left(t\right)$ ve $\psi\left(t\right)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'\left(t\right) \leq \phi\left(t\right)\eta\left(t\right) + \psi\left(t\right)$$

eşitizliği sağlanıyorsa. Bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta\left(t\right) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta\left(0\right) + \int_0^t \psi\left(s\right)ds\right)$$

olur.

Lemma 3.5.11. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form).

(i) $\xi\left(t\right)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi\left(t\right) \leq C_1 \textstyle\int_0^t \xi\left(s\right)ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi\left(t\right) \leq C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi\left(t\right) \leq C_1 \textstyle\int_0^t \xi\left(s\right)ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi\left(t\right) = 0$ dır.

Tanım 3.5.12. X ve Y Banach uzaylar ve $F : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $A : X \to Y$ doğrusal sınırlı operatörü varsa F ye $x \in X$ noktasında *türevlenebilirdir* denir. A operatörüne F nin $x \in X$ noktasındaki *Fréchet türevi* denir ve $F'(x)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.13. Bir $u(x,t)$ fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ değişkenine göre *Fourier dönüşümü* $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(k,t)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,t)\, dx$$

integrali ile tanımlıdır. Burada k bir reel sayıdır ve dönüşüm değişkeni olarak adlandırılır. Ters Fourier dönüşümü $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{u}(k,t)\} = u(x,t)$ şeklinde gösterilir ve

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{u}(k,t)\} = u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{u}(k,t)\, dk$$

integrali ile tanımlıdır.

Teorem 3.5.14. Konvolüsyon Teoremi. Eğer $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(k)$ ise, o zaman

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(k)\, G(k)$$

veya

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\, G(k)\} = f(x) * g(x)$$

sağlanır. Burada $f(x) * g(x)$, integrallenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonudur ve

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

ile tanımlıdır.

$f * g$ süreklidir. Buradan iki fonksiyonun konvolüsyonu olan $f * g$ nin f ve g den daha düzgün olduğu anlaşılmaktadır, çünkü f ve g sadece integrallenebilir (Riemann anlamında) fonksiyonlardır.

3.6. Kato Teoremi

Araştırma Bulguları bölümünde (1.1) denklemi için bir başlangıç değer probleminin lokal iyi konumluluğu Kato teoremi kullanılarak çalışılacaktır. Bu amaçla Kato teoremini amacımıza uygun bir biçimde ifade edelim. Aşağıdaki soyut yarı-lineer evolüsyon denklemi düşünelim:

$$\frac{dv}{dt} + A(v)v = f(v), \qquad t \geq 0, \qquad v(0) = v_0. \tag{3.6.1}$$

Y sürekli ve yoğun olarak X 'e gömülecek şekilde X ve Y Hilbert uzayları ve $Q : Y \to X$ bir topolojik izomorfizm olsun. $L(Y, X)$, Y den X e bütün sınırlı lineer operatörlerin uzayı olsun. Eğer $X = Y$ ise bu uzayı $L(X)$ ile belirtiriz. β bir reel sayı olmak üzere lineer operatör $A \in G(X, 1, \beta)$, yani $-A$, X üzerinde $T(t)$ C_0-yarıgrup üretir ve her $t \geq 0$ için $\|T(t)\|_{L(X)} \leq e^{t\beta}$ olur.

Farzedelim ki:

(I)

$$\|(A(y) - A(z))\,\omega\|_X \leq \kappa_1 \|y - z\|_X \|\omega\|_Y, \qquad y, z, \omega \in Y$$

eşitsizliği ile $y \in Y$ için $A(y) \in L(Y, X)$ ve $A(y) \in G(X, 1, \beta)$, (yani $A(y)$ yarı-m-accretive), Y içindeki sınırlı kümeler üzerinde düzgündür.

(II) Sınırlı, Y içindeki sınırlı kümeler üzerinde düzgün $B(y) \in L(X)$ için $QA(y)Q^{-1} = A(y) + B(y)$ dir. Ayrıca

$$\|(B(y) - B(z))\,\omega\|_X \leq \kappa_2 \|y - z\|_Y \|\omega\|_X, \qquad y, z \in Y, \ \omega \in X$$

olur.

(III) $f : Y \to Y$ ve ayrıca X den X içine bir dönüşüme genişler. f , Y deki sınırlı kümeler üzerinde sınırlıdır ve

$$\begin{aligned} \|(f(y) - f(z))\|_Y &\leq \kappa_3 \|y - z\|_Y, \qquad y, z \in Y, \\ \|(f(y) - f(z))\|_X &\leq \kappa_4 \|y - z\|_X, \qquad y, z \in Y \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Burada $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 sadece $\max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$ bağlı sabitlerdir.

Teorem 3.6.1. (I), (II) ve (III) sağlansın. $v_0 \in Y$ başlangıç verisi ile (3.6.1) in sadece bir tek v çözümü ve $\|v_0\|_Y$ ye bağlı bir $T > 0$ zamanı vardır öyle ki;

$$v = v(., v_0) \in C([0, T); Y) \cap C^1([0, T); X)$$

olur. Ayrıca, $v_0 \to v(., v_0)$ dönüşümü Y den $C([0,T);Y) \cap C^1([0,T);X)$ e bir sürekli dönüşümdür (Kato 1975).

3.7. Tek Dalgalar İçin Kararlılık

Grillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teorisi:

Bir X uzayında lokal iyi konumlu; E bir enerji fonksiyoneli; J

$$u, v \in D(J) \text{ için } \langle Ju, v \rangle = -\langle u, Jv \rangle$$

olacak şekilde bir skew-simetrik lineer operatör olmak üzere

$$\frac{du}{dt} = JE'(u(t)) \tag{3.7.1}$$

formunda ki Hamiltonian sistemini düşünelim.

(3.7.1) denkleminin X üzerinde bir grubun bir $T(.)$ temsili altında değişmezliğini varsayalım. Tek dalga, (3.7.1) denkleminin $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u(t) = T(\omega t)\varphi_\omega$$

şeklindeki bir çözümüdür.

Temel varsayımlar aşağıdaki gibi sıralanır:

(i) $B^* = B$ olacak şekilde $B : X \to X^*$ bir sınırlı lineer operatör ve

$$Q(u) = \frac{1}{2}\langle Bu, u \rangle$$

şeklinde tanımlanan bir $Q : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli vardır.

(ii) (Çözümlerin varlığı). Her $u_0 \in X$ için $t_0 > 0$ ve $[0, t_0)$ aralığında (3.7.1) denkleminin bir u çözümü vardır öyle ki;

(a) $u(0) = u_0$ ve

(b) $t \in [0, t_0)$ için $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$.

(iii) (Tek dalgaların varlığı). $\omega_1 < \omega_2$ olmak üzere

(a) her $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ için (ω_1, ω_2) açık aralığından X e $\omega \to \varphi_\omega$ dönüşümü C^1 dedir ve

(b) $E'(\varphi_\omega) = \omega Q'(\varphi_\omega)$,

(c) $T'(0)\varphi_\omega \neq 0$

dir.

(iv) Her $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ için, $H_c = E''(\varphi_\omega) - \omega Q''(\varphi_\omega)$ kesin olarak bir negatif basit özdeğere sahiptir ve çekirdeği $T'(0)\varphi_\omega$ tarafından gerilir ve spektrumunun kalanı sıfırdan uzakta pozitif ve sınırlıdır.

Teorem 3.7.1. (i)-(iv) varsayımları altında eğer

$$d(\omega) = E(\varphi_\omega) - \omega Q(\varphi_\omega)$$

skaler fonksiyonu ω nin bir komşuluğunda konveks bir fonksiyon yani $d''(\omega) > 0$ ise φ_ω yörüngesel kararlıdır (Grillakis ve ark. 1987).

Bu yörüngesel kararlılık analizi sayesinde bir çok denklemin tek dalga çözümlerinin kararlılığı çalışılmıştır. Constantin ve Strauss (2000b) sıkıştırılabilir esnek çubuklar içindeki tek dalgaların bir sınıfının kararlılığını bu yöntemle çalışmışlardır. Tian ve ark. (2005) Dullin-Gottwald-Holm denkleminin, Hakkaev ve Kirchev (2005) genelleştirilmiş Camassa-Holm denkleminin, Zhang ve Liu (2010) iki bileşenli Camassa-Holm sisteminin, Liu ve Yin (2013) iki bileşenli Dullin–Gottwald-Holm sisteminin tek dalga çözümlerininin kararlılığını çalışırken Grillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teorisinden faydalanmışlardır.

Hamilton dalga denklemlerinde tek dalgaların kararlılığını kanıtlamak için kullanılan bir diğer yöntemde varyasyonel yöntemlerdir. Spektral şartlara bağlı olmayan bu yöntem Lions'un (1984) Konsantrasyon-Kompaktlık prensibi kullanılarak Cazenave ve Lions (1982) tarafından geliştirildi. Bu yaklaşımda, kısıtlanmış varyasyonel problemle başlanır ve global minimize ediciler aranır. Metot çalıştığında, sadece global minimize edicilerin varlığını göstermez aynı zamanda her minimize edici dizinin ötelemelere kadar nispeten kompakt olduğunu da gösterir. Sonuç olarak global minimize edicilerin kümesi ilgili başlangıç değer problemi için kararlı bir kümedir, yani kümenin yanında başlayan bir çözüm her zaman yanında kalır. Cazenave ve Lions (1982) çalışmalarında doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinin tek dalga çözümlerinin kararlılığını ispatladılar. Benzer bir yöntem dispersif evolüsyon denklemlerinin büyük bir aralığındaki denklemlerin tek dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığını kanıtlamak için birçok yazar tarafından uygulandı (Albert 1999, Levandosky 1999, Angulo 2006, Bhattarai 2012).

3.8. Dalga Kırılması ve Blow-up

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler teorisinde temel sorulardan biri şudur: Ne zaman bir tekillik oluşabilir ve yapısı nedir? Tipik iyi konumluluk sonucu ya tüm zamanlarda bir kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu ya da $t \to T$ iken çözümün bazı normlarını sınırsız yapan bir $T < \infty$ var olduğunu ileri sürer. Bunlardan ikincisi sonlu zamanda blow-up olarak adlandırılır.

Blow-up zamanına yaklaşılırken çözümün davranışı özel önem taşımaktadır. Çözümün kendisi sonlu bir zaman içinde sınırsız olduğunda tekilliğin basit bir çeşidi oluşur. Su dalgalarını tanımlayan modeller için eğer çözüm (dalga) sınırlı iken çözümün eğimi sonlu zamanda sınırsız oluyor ise dalga kırılmasının meydana geldiği söylenebilir: Profil yayılırken eğimin dik olduğu bir nokta oluşturuncaya kadar aşamalı olarak dikleşecektir ve dalganın kırıldığı söylenir (Whitham 1980).

Dalga kırılması su dalga teorisinin en ilgi çekici ve köklü problemlerinden biridir. Kırılan dalgalar yaygın olarak okyanusta gözlenmektedir ve çeşitli nedenlerden dolayı önemlidir ama şaşırtıcı derecede onlar hakkında az şey bilinmektedir. Aslında kırılan dalgalar, insan yapımı yapılara büyük hidrodinamik yükler yerleştirir, yüzey dalgalarına yatay momentum aktarır, okyanusun üst tabakalarını karıştırmak için türbülanslı enerji kaynağı sağlar, sığ sularda sediment taşır. Bu özelliklerinden dolayı dalga kırılma teorisi araştırmacılar için büyük önem taşımaktadır.

Blow-up tekniklerinin her tür denklem için oldukça özel olduğunu ve genel bir metodun olmadığını Strauss (1989) belirtmiştir (Constantin ve Escher 1998b). Sığ su dalgalarını modelleyen bazı fiziksel denklemlerin blow-up oluşumunu (dalga kırılması formundaki) ve tahmin edilen dalga kırılmalarını ispatlamak için farklı bir yaklaşıma ihtiyaç duyulur.

Whitham (1980) su dalga teorisinin sürüncemede kalan en ilginç problemlerinden birinin kırılma olayı olduğunu vurgulamış ve KdV denkleminin çözümlerinin fiziksel su dalgaları yaparken kırılmadığını gözlemlemiştir. Nitekim Bourgain (1993) başlangıç verisi L^2 de olmak üzere KdV denkleminin çözümlerinin global olduğunu göstermiştir. Whitham KdV modeli yerine dalgaların kırılma çözümlerinin var olacağını öngördüğü aşağıdaki denklemi önerdi:

$$u_t + uu_x + \int_{\mathbb{R}} K_0\left(x-\xi\right) u_x\left(t,\xi\right) d\xi = 0 \tag{3.8.1}$$

burada

$$K_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\tanh\xi}{\xi}\right)^{1/2} e^{i\xi x} d\xi$$

tekil çekirdektir (Constantin ve Escher 1998b). Whitham denklemi için gerçekleştirilmiş nümerik hesaplamalar soliton etkileşimi beklenebileceği yönünde herhangi bir güçlü iddiayı desteklemez (Dodd ve ark. 1984).

Camassa-Holm denklemi ise KdV ve Whitham denklemlerinin aksine hem dalga kırılması hem de tek dalgalarının birer soliton olması özelliklerini aynı anda barındırır. Yani Camassa-Holm denklemi pik çözümlere, kırılan dalgalara ve değişmez dalgalara sahiptir (Constantin ve Escher 1998a, 1998b).

Whitham denklemi ve Camassa-Holm denklemi için dalga kırılması ispatı Seliger'in (1968) bir fikrinden esinlenmektedir (Constantin ve Escher 1998b). Seliger (1968) K düzgün ($\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir), simetrik çekirdek, $\mathbb{R}_+$ üzerinde monoton azalan olmak üzere

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x-\xi)\, u_\xi(t,\xi)\, d\xi = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.8.2}$$

problemi için dalga kırılmasını biçimsel olarak göstermeyi başardı. Şöyle ki: sırasıyla $x = \xi_1(t)$ ve $x = \xi_2(t)$ ile elde edilen

$$m_1(t) = \min_{x\in\mathbb{R}} [u_x(t,x)] \text{ ve } m_2(t) = \max_{x\in\mathbb{R}} [u_x(t,x)]$$

ifadelerini düşünelim. (3.8.2) denklemini diferansiyelleyerek ve $x = \xi_i(t)$, $i = 1,2$ alarak istenilen dalga kırılmasını veren m_1 ve m_2 için biçimsel olarak diferansiyel eşitsizlikler elde etti. Benzer bir fikir (3.8.1) Whitham denklemi için dalga kırılmasına ilişkin Whitham'ın (1980) sürüncemede kalan öngörüsünü çözmek için Naumkin ve Shishmarev (1994) tarafından kullanıldı. Ama matematiksel olarak yaptıkları analiz kesin değildir. Çünkü çalışmada $\min_{x\in\mathbb{R}}[u_x(t,x)]$ in elde edildiği $\xi_1(t)$ eğrisinin düzgünlüğünü garantilemek mümkün değildir. Bundan dolayı $\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ eğrilerinin düzgün olduğu ek olarak varsayılmalıdır (Constantin ve Escher 1998b).

Yukarıda belirtildiği gibi Whitham tipi denklemler için dalga kırılması ile ilgili çeşitli sonuçlar çözümün eğiminin minimumunun düzgün bir eğri boyunca elde edilmesi varsayımı altında Naumkin ve Shishmarev (1994) tarafından elde edildi. Daha sonra Constantin ve Escher (1998b) elde ettikleri bir teorem (Teorem 2.1, sf: 233) ile bu varsayımı ortadan kaldırıp Whitham tipli denklemlerin dalga kırılması ile ilgili sonuçlar elde ettiler. Aynı çalışmada bu teoremden faydalanarak $\omega = 0$ için (2.4) Camassa-Holm denkleminin de dalga kırılmasını çalıştılar. Bu teorem kullanılarak Camassa-Holm, Dullin-Gottwald-Holm, Degasperis-Procesi gibi denklemlerin ve bu denklemlerin genelleştirilmiş modellerinin dalga kırılması incelenmiştir (Yin 2004, Tian ve ark. 2005, Wu ve Yin 2010).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Güçlü Dispersif Terimli İntegrallenebilir Genelleştirilmiş Bir Sığ Su Dalga Denklemi

Bu bölümde güçlü dispersif terim içeren genelleştirilmiş bir sığ su dalga denklemi için

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + (g(u))_x + \gamma\left(u - \alpha^2 u_{xx}\right)_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u)\, u_{xx}\right)_x, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Burada $g(u), h(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal olmayan fonksiyonlar olup α ve γ sabit sayılardır. (4.1.1) de $g(u) = 2\omega u + \frac{3}{2}u^2$ ve $h(u) = u$ şeklinde alındığında (2.9) denklemi elde edilir.

Kolaylık sağlamak için, (4.1.1) problemini yeniden formüle edelim. $x \mapsto \frac{x}{\alpha}$ alarak (4.1.1)

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + (g(u))_x + a\left(u - u_{xx}\right)_{xxx} = b \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u)\, u_{xx}\right)_x, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

şeklinde yeniden yazılır. Burada $a = \frac{\gamma}{\alpha^3}$ ve $b = \frac{1}{\alpha}$ şeklindedir.

Bu bölümde ilk olarak (4.1.2) (veya (4.1.1)) probleminin lokal iyi konumluluğu Kato teoremi uygulanarak elde edilecektir. Daha sonra (4.1.1) deki denklemin doğrusal olmayan fonksiyonlarının özel halleri için tek dalga çözümlerinin varlığı gösterilecek ardından da bu tek dalga çözümlerinin kararlılığı ispatlanacaktır (Dündar ve Polat 2014).

4.1.1. Lokal İyi Konumluluk

İlk olarak bölüm içinde kullanılacak olan notasyonları verelim: $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Lambda^s = \left(1 - \partial_x^2\right)^{s/2}$ ve

$$\|f\|_{H^s} = \|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

normu ile $H^s(\mathbb{R}) = H^s$ olarak ve $(.,.)$ ile iç çarpım gösterilecektir. $[A, B] = AB - BA$, A ve B lineer operatörlerin komütatörünü gösterir. Kolaylık sağlamak amacı ile farklı pozitif sabitler aynı c sembolleri ile gösterilecektir.

(4.1.2) probleminin iyi konumluluğunu Kato teoremini uygulayarak elde edeceğiz. İlk olarak kullanacağımız lemmaları ispatsız olarak verelim:

Lemma 4.1.1.1. $f \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ olsun. O zaman

$$\left\| \Lambda^{-r} \left[\Lambda^{r+t+1}, M_f \right] \Lambda^{-t} \right\|_{L(L^2)} \leq c \left\| f \right\|_s , \qquad \left| r \right|, \left| t \right| \leq s-1$$

olacak şekilde f ile çarpımın operatörü M_f ve sadece r, t ye bağlı bir pozitif c sabiti vardır (Kato 1979).

Lemma 4.1.1.2. $-r < t \leq r$ olacak şekilde r ve t reel sayılar olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \left\| fg \right\|_t &\leq c \left\| f \right\|_r \left\| g \right\|_t , \qquad \text{eğer } r > \frac{1}{2}, \\ \left\| fg \right\|_{r+t-\frac{1}{2}} &\leq c \left\| f \right\|_r \left\| g \right\|_t , \qquad \text{eğer } r < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olacak şekilde r ve t ye bağlı pozitif bir c sabiti vardır (Kato 1975).

Lemma 4.1.1.3. X ve Y iki Banach uzayı olsun ve Y, X e sürekli ve yoğun olarak gömülsün. $-A$, X üzerinde $T(t)$ C_0 yarıgrubunun sonsuz küçük bir üreteci ve S, Y den X üzerine bir izomorfizm olsun. Y, $-A$- kabul edilebilirdir (yani $T(t)Y \subset Y$, $\forall t \geq 0$, ve $T(t)$ nin Y ye kısıtlaması Y üzerinde bir C_0- yarıgrubudur) ancak ve ancak $-A_1 = -SAS^{-1}$, X üzerinde $T_1(t) = -ST(t)S^{-1}$ C_0 yarıgrubunun sonsuz küçük üretecidir. Ayrıca eğer Y, $-A$- kabul edilebilir ise, bu durumda $-A$ nın Y deki kısmı $T(t)$ nin Y ye kısıtlamasının sonsuz küçük üretecidir (Pazy 1983).

Lemma 4.1.1.4. $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $s \geq 0$ olsun. O zaman herhangi bir $R > 0$ için bazı $C_1(R)$ sabiti vardır ki $\left\| u \right\|_{L^\infty} \leq R$ ile tüm $u \in H^s \cap L^\infty$ için

$$\left\| f(u) \right\|_s \leq C_1(R) \left\| u \right\|_s$$

olur (Wang ve Chen 2006).

Lemma 4.1.1.5. $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $s \geq 0$ olsun. O zaman herhangi bir $R > 0$ için bazı $C_2(R)$ sabiti vardır ki $\left\| u \right\|_{L^\infty} \leq R$, $\left\| v \right\|_{L^\infty} \leq R$ ve $\left\| u \right\|_s \leq R$, $\left\| v \right\|_s \leq R$ ile tüm $u, v \in H^s \cap L^\infty$ için

$$\left\| f(u) - f(v) \right\|_s \leq C_2(R) \left\| u - v \right\|_s$$

olur (Wang ve Chen 2006, Duruk ve ark. 2009).

Eğer $x \in \mathbb{R}$ için $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ise o zaman tüm $f \in L^2(\mathbb{R})$ için $\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} f = p * f$ olur. Burada $*$ ile konvülüsyonu belirtiyoruz. (4.1.2) problemini yeniden

$$\begin{cases} u_t + bh(u)\,u_x + au_{xxx} = -\partial_x p * \left(g(u) + \frac{b}{2}h'(u)\,u_x^2\right) + p * (bh(u)\,u_x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

şeklinde veya

$$\begin{cases} u_t + bh(u)\,u_x + au_{xxx} = -\partial_x \Lambda^{-2} \left(g(u) + \frac{b}{2}h'(u)\,u_x^2\right) + \Lambda^{-2}(bh(u)\,u_x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.4}$$

şeklinde yazabiliriz.

Kato teoremine uygun olarak burada

$$\begin{aligned} A(u) &= bh(u)\,\partial_x + a\partial_x^3, \\ f(u) &= -\partial_x \Lambda^{-2}\left(g(u) + \frac{b}{2}h'(u)\,u_x^2\right) + \Lambda^{-2}(bh(u)\,u_x), \end{aligned}$$

$Y = H^s$, $X = H^{s-1}$ ve $Q = \Lambda = \left(1-\partial_x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ alalım. Q, H^s nin H^{s-1} üzerine bir izomorfizmidir.

(4.1.1) problemi için lokal iyi konumluluk teoremi:

Teorem 4.1.1.6. $g, h \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ ve $h(0) = g(0) = 0$ olduğu kabul edilsin. $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ başlangıç verisi ile (4.1.1) (veya 4.1.4) probleminin

$$u = u(., u_0) \in C([0,T); H^s) \cap C^1\left([0,T); H^{s-1}\right)$$

şeklinde bir tek u çözümü ve $T = T(u_0) > 0$ maksimal zamanı vardır. Ayrıca çözüm başlangıç verisine sürekli bağımlıdır; yani

$$u_0 \to u(., u_0) : H^s \to C([0,T); H^s) \cap C^1\left([0,T); H^{s-1}\right)$$

dönüşümü süreklidir.

Teorem 3.6.1 den Teorem 4.1.1.6 ispatlanacaktır. Bunun için $A(u)$ ve $f(u)$ nun 3.6 daki (I)–(III) varsayımlarını sağladığını göstermemiz yeterlidir.

Lemma 4.1.1.7. $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ ile $A(u) = bh(u)\,\partial_x + a\partial_x^3$ operatorü $G(L^2, 1, \beta)$ e aittir.

İspat. L^2 bir Hilbert uzayı olduğundan dolayı bazı β reel sayıları için ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa $A(u) \in G(L^2, 1, \beta)$ olur (Kato 1983).

(i) $(A(u)y, y)_0 \geq -\beta \|y\|_0^2$,

(ii) Bazı (ya da tüm) $\lambda > \beta$ için $\lambda I + A$ nın aralığı X in tümüdür.

İlk olarak (i)'yi ispatlayalım. $s > \frac{3}{2}$ ile $u \in H^s$ olduğundan $u, u_x \in L^\infty$ ve

$$\|u_x\|_{L^\infty} \leq \|u\|_s, \quad \|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_s$$

olduğuna dikkat edelim. Böylece

$$\begin{aligned} |(A(u)y, y)_0| &= |((bh(u))\partial_x y, y)_0| + \left|\left(a\partial_x^3 y, y\right)_0\right| \\ &\leq \left|\frac{b}{2}\|\partial_x h(u)\|_{L^\infty}\|y\|_0^2\right| \\ &\leq \left|\frac{b}{2}\|h(u)\|_s\|y\|_0^2\right| \\ &\leq cC_1(R)\|u\|_s\|y\|_0^2 \end{aligned}$$

olur. $\beta = cC_1(R)\|u\|_s$ alarak $(A(u)y, y)_0 \geq -\beta\|y\|_0^2$ olduğunu görürüz. Şimdi $A(u)$ nun (ii) sağladığını gösterelim. $A(u)$ bir kapalı operatör olduğundan ve (i) yi sağladığından dolayı tüm $\lambda > \beta$ için $(\lambda I + A)$, L^2 de kapalı aralığa sahiptir. Bundan dolayı tüm $\lambda > \beta$ için $(\lambda I + A)$ nın L^2 de yoğun aralığa sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ ve $y \in L^2$ verilsin. Genelleştirilmiş Leibniz formülünden H^{-1} de

$$\partial_x\left(\left(bh(u) + a\partial_x^2\right)y\right) = \partial_x\left(bh(u) + a\partial_x^2\right)y + \left(bh(u) + a\partial_x^2\right)\partial_x y$$

olur. u, $u_x \in L^\infty$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} D(A) &= D\left((bh(u))\partial_x + a\partial_x^3\right) = \left\{y \in L^2, (bh(u))\partial_x y + a\partial_x^3 y \in L^2\right\} \\ &= \left\{z \in L^2, -\partial_x\left(bh(u) + a\partial_x^2\right)z \in L^2\right\} \\ &= D\left(\left((bh(u))\partial_x + a\partial_x^3\right)^*\right) = D(A^*) \end{aligned}$$

elde ederiz. Farz edelim ki $\lambda I + A$ nın aralığı L^2 in tümü olmasın. O zaman $\forall y \in D(A)$ için $((\lambda I + A)y, z)_0 = 0$ olacak şekilde $z \in L^2$, $z \neq 0$ vardır. $H^1 \subset D(A)$ olduğundan $D(A)$, L^2 de yoğundur. Böylece L^2 içinde $z \in D(A^*)$ ve $\lambda z + A^* = 0$ olduğu görülür.

$D(A) = D(A^*)$ olduğundan z ile çarpılıp kısmi integrasyon alınırsa

$$0 = ((\lambda I + A^*) z, z)_0 = (\lambda z, z)_0 + (z, Az)_0 \geq (\lambda - \beta) \|z\|_0^2, \qquad \forall \lambda > \beta$$

olduğu elde edilir ve böylece $z = 0$ olur. Bu da $z \neq 0$ varsayımı ile çelişir. Böylece Lemma 4.1.1.7 nin ispatı tamamlanır.

Lemma 4.1.1.8. $A(u) = bh(u)\partial_x + a\partial_x^3$ olmak üzere $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ ile $A(u) \in G(H^{s-1}, 1, \beta)$.

İspat. H^{s-1} bir Hilbert uzayı olduğundan dolayı bazı β reel sayıları için ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa $A(u) \in G(H^{s-1}, 1, \beta)$ olur (Kato 1975).

(i) $(A(u)y, y)_{s-1} \geq -\beta \|y\|_{s-1}^2$.

(ii) Bazı (ya da tüm) $\lambda > \beta$ için $-A(u)$, H^{s-1} üzerinde bir C_0-yarıgrubunun sonsuzluk küçüklükteki üretecidir.

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^{s-1} a\partial_x^3 y, \Lambda^{s-1} y\right)_0 &= 0, \\ \Lambda^{s-1}(bh(u)\partial_x y) &= \left[\Lambda^{s-1}, bh(u)\right]\partial_x y + bh(u)\Lambda^{s-1}\partial_x y \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \left|(A(u)y, y)_{s-1}\right| &= \left|\left(\Lambda^{s-1}\left(\left(bh(u)\partial_x + a\partial_x^3\right)y\right), \Lambda^{s-1}y\right)_0\right| \\ &= \left|\left(\Lambda^{s-1} bh(u)\partial_x y, \Lambda^{s-1}y\right)_0\right| \\ &= \left|\left(\left[\Lambda^{s-1}, bh(u)\right]\partial_x y, \Lambda^{s-1}y\right)_0 + \left(bh(u)\Lambda^{s-1}\partial_x y, \Lambda^{s-1}y\right)_0\right| \\ &\leq \left|b\left(\left[\Lambda^{s-1}, h(u)\right]\partial_x \Lambda^{1-s}\Lambda^{s-1}y, \Lambda^{s-1}y\right)_0\right| \\ &\quad + \left|\frac{b}{2}\left(\partial_x h(u), \left(\Lambda^{s-1}y\right)^2\right)_0\right| \\ &\leq \left\|b\left[\Lambda^{s-1}, h(u)\right]\Lambda^{2-s}\right\|_{L(L^2)} \left\|\Lambda^{s-1}y\right\|_0^2 + \left\|\frac{b}{2}\partial_x h(u)\right\|_{L^\infty} \left\|\left(\Lambda^{s-1}y\right)\right\|_0^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $r = 0$, $t = s - 2$ ile Lemma 4.1.1.1 den ve Lemma 4.1.1.4 den

$$\begin{aligned} \left|(A(u)y, y)_{s-1}\right| &\leq c\left(\|h(u)\|_s + \|\partial_x h(u)\|_{L^\infty}\right)\|y\|_{s-1}^2 \\ &\leq c\left(\|h(u)\|_s + \|h(u)\|_s\right)\|y\|_{s-1}^2 \\ &\leq cC_1(R)\|u\|_s \|y\|_{s-1}^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\beta = cC_1(R)\|u\|_s$ alınırsa $(A(u)y, y)_{s-1} \geq -\beta \|y\|_{s-1}^2$ olur. Şimdi (ii) ispatlansın. $S = \Lambda^{s-1}$ olsun. S nin L^2 üzerinde H^{s-1} in bir izomorfizmi olduğuna dikkat edelim ve $s > \frac{3}{2}$ olduğunda H^{s-1} yoğun ve sürekli olarak L^2 ye gömülür.

$$A_1(u) = SA(u)S^{-1} = \Lambda^{s-1}A(u)\Lambda^{1-s}, \qquad B_1(u) = A_1(u) - A(u)$$

tanımlayalım. $y \in L^2$ ve $u \in H^s$ olsun. Ayrıca

$$\left[\Lambda^{s-1}, (bh(u))\partial_x\right]\Lambda^{1-s} = \left[\Lambda^{s-1}, (bh(u))\right]\Lambda^{1-s}\partial_x$$

olduğunu biliyoruz. O zaman (4.1.5) eşitliğini de kullanarak

$$\begin{aligned}
\|B_1(u)y\|_0 &= \left\|\left[\Lambda^{s-1}, bh(u)\partial_x\right]\Lambda^{1-s}y\right\|_0 \\
&= \left\|\left[\Lambda^{s-1}, bh(u)\right]\Lambda^{1-s}\partial_x y\right\|_0 \\
&\leq \left\|b\left[\Lambda^{s-1}, h(u)\right]\Lambda^{2-s}\right\|_{L(L^2)}\left\|\Lambda^{-1}\partial_x y\right\|_0 \\
&\leq c\|h(u)\|_s\|y\|_0 \\
&\leq cC_1(R)\|u\|_s\|y\|_0
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $r = 0$, $t = s-2$ ile Lemma 4.1.1.1 ve Lemma 4.1.1.4 kullanıldı. Böylece $B_1(u) \in L(L^2)$ olur. $A_1(u) = A(u) + B_1(u)$ ve $A(u) \in G(L^2, 1, \beta)$ (Lemma 4.1.1.7) olduğunu hatırlayalım. Bir yarıgrup için pertürbasyon teoremi ile $A_1(u) \in G(L^2, 1, \beta_1)$ olur. $X = L^2, Y = H^{s-1}$ ve $S = \Lambda^{s-1}$ ile Lemma 4.1.1.3 den H^{s-1} in A-kabul edilebilir olduğu sonucuna varılır. Bundan dolayı $-A(u)$, H^{s-1} üzerinde bir C_0-yarıgrubun sonsuz küçüklükte üretecidir.

Lemma 4.1.1.9. $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ ile $A(u) = bh(u)\partial_x + a\partial_x^3$ olsun. O zaman $A(u) \in L(H^s, H^{s-1})$ olur. Ayrıca

$$\|(A(u) - A(v))\omega\|_{s-1} \leq \kappa_1\|u - v\|_{s-1}\|\omega\|_s, \qquad u, v, \omega \in H^s$$

olur.

İspat. $u, v, \omega \in H^s, s > \frac{3}{2}$ olsun. H^{s-1} in bir Banach cebiri olduğunu hatırlayalım. Daha sonra Lemma 4.1.1.5 i kullanarak

$$\begin{aligned}
\|(A(u) - A(v))\omega\|_{s-1} &= \|b(h(u) - h(v))\partial_x\omega\|_{s-1} \\
&\leq \|b(h(u) - h(v))\|_{s-1}\|\partial_x\omega\|_{s-1} \\
&\leq cC_2(R)\|u - v\|_{s-1}\|\omega\|_s
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte $v = 0$ alınarak $A(u) \in L(H^s, H^{s-1})$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.1.10. $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ ile $B(u) = [\Lambda, (bh(u) + a\partial_x^2)\partial_x]\Lambda^{-1} \in L(H^{s-1})$ dir. Ayrıca

$$\|(B(u) - B(v))\omega\|_{s-1} \leq \kappa_2 \|u - v\|_s \|\omega\|_{s-1}$$

olur.

İspat. $u, v \in H^s$ ve $\omega \in H^{s-1}$, $s > \frac{3}{2}$ olsun.

$$[\Lambda, (bh(u))\partial_x]\Lambda^{-1} = [\Lambda, (bh(u))]\Lambda^{-1}\partial_x$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\|(B(u) - B(v))\omega\|_{s-1} &= \left\|\Lambda^{s-1}\left(\left[\Lambda, \left(bh(u) + a\partial_x^2\right)\partial_x\right]\Lambda^{-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left[\Lambda, \left(bh(v) + a\partial_x^2\right)\partial_x\right]\Lambda^{-1}\right)\omega\right\|_0 \\
&= \left\|\Lambda^{s-1}[\Lambda, (bh(u) - bh(v))\partial_x]\Lambda^{-1}\omega\right\|_0 \\
&= \left\|\Lambda^{s-1}[\Lambda, (bh(u) - bh(v))]\Lambda^{-1}\partial_x\omega\right\|_0 \\
&\leq \left\|b\Lambda^{s-1}[\Lambda, (h(u) - h(v))]\Lambda^{1-s}\right\|_{L(L^2)} \left\|\Lambda^{s-2}\partial_x\omega\right\|_0
\end{aligned}$$

elde edilir. $r = 1 - s$, $t = s - 1$ ile Lemma 4.1.1.1 ve Lemma 4.1.1.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|(B(u) - B(v))\omega\|_{s-1} &\leq c\|(h(u) - h(v))\|_s \|\omega\|_{s-1} \\
&\leq cC_2(R)\|u - v\|_s \|\omega\|_{s-1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $v = 0$ alınarak $B(u) \in L(H^{s-1})$ elde edilir.

Lemma 4.1.1.11.

$$f(u) = -\partial_x\left(1 - \partial_x^2\right)^{-1}\left(g(u) + \frac{b}{2}h'(u)u_x^2\right) + \left(1 - \partial_x^2\right)^{-1}(bh(u)u_x)$$

olsun. O zaman f fonksiyonu, H^s deki sınırlı kümeler üzerinde sınırlıdır ve

(i) $\|f(u) - f(v)\|_s \leq \kappa_3 \|u - v\|_s \qquad u, v \in H^s,$

(ii) $\|f(u) - f(v)\|_{s-1} \leq \kappa_4 \|u - v\|_{s-1} \qquad u, v \in H^s$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. $u, v \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ olsun.

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\left(bh\left(u\right)u_x\right) = b\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\left(k\left(u\right)\right), \\ f_2(u) &= -\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\left(g\left(u\right)\right), \\ f_3(u) &= -\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\left(\frac{b}{2}h'\left(u\right)u_x^2\right) \end{aligned}$$

alalım. Burada $f_1(u)+f_2(u)+f_3(u)=f(u)$ dur. Ayrıca $k'\left(u\right)=h\left(u\right)$ dur. Lemma 4.1.1.5 i uygulayarak

$$\left\|f_1(u)-f_1(v)\right\|_s \leq c\left\|b\left(k(u)-k(v)\right)\right\|_{s-1} \leq cC_2\left(R\right)\left\|u-v\right\|_s$$

ve

$$\left\|f_2(u)-f_2(v)\right\|_s \leq c\left\|g(u)-g(v)\right\|_{s-1} \leq cC_2\left(R\right)\left\|u-v\right\|_s$$

eşitsizliklerini elde ederiz. $s > \frac{3}{2}$ ve H^{s-1} bir Banach cebiri olduğundan

$$\begin{aligned} \left\|f_3(u)-f_3(v)\right\|_s &\leq c\left\|h'\left(u\right)u_x^2-h'\left(v\right)v_x^2\right\|_{s-1} \\ &\leq c\left(\left\|h'\left(u\right)\left(u_x^2-v_x^2\right)\right\|_{s-1}+\left\|v_x^2\left(h'\left(u\right)-h'\left(v\right)\right)\right\|_{s-1}\right) \\ &\leq c(\left\|h'\left(u\right)-h'\left(0\right)\right\|_{s-1}\left\|u_x-v_x\right\|_{s-1}\left\|u_x+v_x\right\|_{s-1} \\ &\quad +\left|h'\left(0\right)\right|\left\|u_x-v_x\right\|_{s-1}\left\|u_x+v_x\right\|_{s-1} \\ &\quad +\left\|v_x\right\|_{s-1}^2\left\|\left(h'\left(u\right)-h'\left(v\right)\right)\right\|_{s-1}) \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.1.1.4 ve Lemma 4.1.1.5 yeniden uygulanarak

$$\begin{aligned} \left\|f_3(u)-f_3(v)\right\|_s &\leq c\left(C_1\left(R\right)+\left|h'\left(0\right)\right|\right)\left\|u-v\right\|_s\left\|u+v\right\|_s+cR^2C_2\left(R\right)\left\|u-v\right\|_s \\ &\leq c\left(R\left(C_1\left(R\right)+\left|h'\left(0\right)\right|\right)+R^2C_2\left(R\right)\right)\left\|u-v\right\|_s \\ &\leq c\left\|u-v\right\|_s \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu (i) yi ispatlar. Yukarıdaki eşitsizlikte $v=0$ alındığında f fonksiyonunun H^s deki sınırlı kümeler üzerinde sınırlı olduğu elde edilir.
(ii) nin ispatı için $u, v \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ olsun. (i) ye benzer olarak

$$\begin{aligned} \left\|f_1(u)-f_1(v)\right\|_{s-1} &\leq c\left\|b\left(k(u)-k(v)\right)\right\|_{s-2} \leq cC_2\left(R\right)\left\|u-v\right\|_{s-1}, \\ \left\|f_2(u)-f_2(v)\right\|_{s-1} &\leq c\left\|g(u)-g(v)\right\|_{s-2} \leq cC_2\left(R\right)\left\|u-v\right\|_{s-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\|f_3(u)-f_3(v)\|_{s-1} &\leq c\left\|h'(u)\,u_x^2-h'(v)\,v_x^2\right\|_{s-2}\\
&\leq c\left(\left\|h'(u)\left(u_x^2-v_x^2\right)\right\|_{s-2}+\left\|v_x^2\left(h'(u)-h'(v)\right)\right\|_{s-2}\right)\\
&\leq c\left(\|h'(u)\,\partial_x(u+v)\|_{s-1}\|\partial_x(u-v)\|_{s-2}\right)\\
&\quad+\|v_x\|_{s-1}^2\|(h'(u)-h'(v))\|_{s-2}\\
&\leq c(\|h'(u)-h'(0)\|_{s-1}\|u-v\|_{s-1}\|u+v\|_s\\
&\quad+|h'(0)|\,\|u-v\|_{s-1}\|u+v\|_s+\|v\|_s^2\|(h'(u)-h'(v))\|_{s-2})\\
&\leq c\,\|u-v\|_{s-1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 4.1.1.11 tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.6 nın ispatı. Teorem 3.6.1 ve 4.1.1.7-4.1.1.11 lemmaları birlikte ele alınarak Teorem 4.1.1.6 elde edilir.

Teorem 4.1.1.12. $g,h\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ ve $h(0)=g(0)=0$ olduğu kabul edilsin. $u_0\in H^s$, $s>\frac{3}{2}$ olsun. O zaman Teorem 4.1.1.6 daki T aşağıdaki anlamda s den bağımsız seçilebilir. Eğer (4.1.1) (veya 4.1.4) problemi için $u=u(.,u_0)\in C([0,T);H^s)\cap C^1([0,T);H^{s-1})$ ve bazı $s'\neq s$, $\frac{3}{2}<s'$ için $u_0\in H^{s'}$ ise o zaman aynı T ile $u\in C\left([0,T);H^{s'}\right)\cap C^1\left([0,T);H^{s'-1}\right)$ olur. Özel olarak; $g,h\in C^\infty(\mathbb{R})$ ve $u_0\in H^\infty=\cap_{s\geq 0}H^s$ ise o zaman $u\in C([0,T);H^\infty)$ dir.

İspat. $s'<s$ durumu Teorem 4.1.1.6 da garanti edilen teklikten açık olduğundan $s'>s$ durumunu düşünmek yeterlidir. $s'>s$ için Teorem 4.1.1.12 yi ispatlamak için (4.1.4) e Λ^2 uygulanırsa $y(t)=\Lambda^2u(t)=u-u_{xx}$ için aşağıdaki evolüsyon denklem elde edilir:

$$\frac{dy}{dt}+A(t)\,y+B(t)\,y=f(t)\,,\qquad y(0)=\Lambda^2u(0)\,.$$

Burada

$$A(t)\,y=\partial_x\left(\left(bh(u)+a\partial_x^2\right)y\right),\qquad B(t)\,y=bh'(u)\,u_xy$$

ve

$$f(t)=u_x\left(\frac{b}{2}h''(u)\,u_x^2-g'(u)+2bh'(u)\,u+bh(u)\right)$$

şeklindedir.

$u\in C([0,T);H^s)$ ve $u_0\in H^{s'}$ olduğundan $y\in C([0,T);H^{s-2})$ ve $y(0)=\Lambda^2u(0)\in C\left([0,T);H^{s'-2}\right)$ olur. Burada amaç $u\in C\left([0,T);H^{s'}\right)$ anlamına gelen

$y \in C\left([0,T); H^{s'-2}\right)$ sonucuna varmaktır.

$u \in C([0,T); H^s)$, $u_x \in H^{s-1}$, H^{s-1} in bir Banach cebiri ve $g, h \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ olduğunu hatırlayalım. O zaman

$$B(t) \in L\left(H^{s-1}\right) \text{ ve } f(t) \in C\left([0,T); H^{s-1}\right)$$

olur. Bu amaçla (3.1-3.3 Lemmaları (Kato 1979)), ilk olarak $-s \leq \eta \leq s-2$, $1-s \leq k \leq s-1$ ve $k \geq \eta+1$ olmak üzere $X = H^\eta$ ve $Y = H^k$ uzayları ile $A(t)$ nin bir tek $\{U(t,\tau)\}$ evolüsyon operatörüne sahip olduğunu ispatlamaya gerek vardır. Bundan dolayı aşağıdaki üç şartı doğrulamamız gerekiyor (Lemma 3.1, Kato 1979).

(i) $A(t) \in G(H^\eta, 1, \beta)$, $\forall y \in H^s$.

(ii) $\Lambda^\eta \partial_x \left[\Lambda^{k-\eta}, bh(u)\right] \Lambda^{-k}$, L^2 üzerinde düzgün sınırlıdır.

(iii) $A(t) \in L(H^k, H^\eta)$, t de güçlü süreklidir.

(i) ile başlayalım. H^η bir Hilbert uzayı olduğundan dolayı bazı β reel sayıları için ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa $A(t) \in G(H^\eta, 1, \beta)$ olur (Kato 1975, Kato 1983).

(a) $(A(t)y, y)_\eta \geq -\beta \|y\|_\eta^2$,

(b) Bazı (ya da tüm) $\lambda > \beta$ için $-A(t)$, H^η üzerinde bir C_0-yarıgrubunun sonsuz küçüklükteki üretecidir.

İlk olarak (a)'yı ispatlayalım. $y \in H^\eta$ alalım ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\Lambda^\eta \partial_x \left(bh(u)y + a\partial_x^2 y\right) &= \Lambda^\eta \partial_x \left(-\left[\Lambda^{-\eta}, bh(u)\right]\Lambda^\eta y + \Lambda^{-\eta}\left(bh(u)\Lambda^\eta y\right)\right) + a\Lambda^\eta \partial_x^3 y \\
&= -\Lambda^\eta \partial_x \left[\Lambda^{-\eta}, bh(u)\right]\Lambda^\eta y + \partial_x\left(bh(u)\Lambda^\eta y\right) + a\Lambda^\eta \partial_x^3 y
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. O zaman

$$\begin{aligned}
(A(t)y, y)_\eta &= \left(-\Lambda^\eta \partial_x \left[\Lambda^{-\eta}, bh(u)\right]\Lambda^\eta y + \partial_x\left(bh(u)\Lambda^\eta y\right) + a\Lambda^\eta \partial_x^3 y, \Lambda^\eta y\right)_0 \\
&= \left(\Lambda^{\eta+1}\left[\Lambda^{-\eta}, bh(u)\right]\Lambda^\eta y, \partial_x \Lambda^{\eta-1} y\right)_0 + \frac{b}{2}\left(\partial_x\left(h(u)\Lambda^\eta y\right), \Lambda^\eta y\right)_0 \\
&\leq \left\|\Lambda^{\eta+1}\left[\Lambda^{-\eta}, bh(u)\right]\right\|_{L(L^2)} \|\Lambda^\eta y\|_0^2 + \left\|\frac{b}{2}\partial_x h(u)\right\|_{L^\infty} \|\Lambda^\eta y\|_0^2
\end{aligned}$$

olur. $r = -(\eta + 1)$, $t = 0$ ile Lemma 4.1.1.1 ve Lemma 4.1.1.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|(A(t)\, y, y)_\eta\right| &\leq c\left(\|h(u)\|_s + \|\partial_x h(u)\|_{L^\infty}\right)\|y\|_\eta^2 \\
&\leq c\left(\|h(u)\|_s + \|h(u)\|_s\right)\|y\|_\eta^2 \\
&\leq cC_1(R)\,\|u\|_s\,\|y\|_\eta^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\beta = cC_1(R)\,\|u\|_s$ alarak $(A(t)\, y, y)_\eta \geq -\beta\,\|y\|_\eta^2$ elde edilir.
Şimdi (b)'yi ispatlayalım. $S = \Lambda^{s-1-\eta}$ olsun. S in H^{s-1} in H^η üzerine bir izomorfizmi olduğunu ve $-s \leq \eta \leq s-2$ iken H^{s-1} in sürekli ve yoğun olarak H^η ya gömüldüğünü hatırlayalım.

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= SA(t)\, S^{-1} = \Lambda^{s-1-\eta} A(t)\, \Lambda^{\eta+1-s}, \\
B_1(t) &= A_1(t) - A(t) = [S, A(t)]\, S^{-1}
\end{aligned}$$

tanımlayalım. $y \in H^\eta$ ve $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ olsun. $r = -(\eta + 1)$, $t = s - 1$ için Lemma 4.1.1.1 ve Lemma 4.1.1.4 ile

$$\begin{aligned}
\|B_1(t)\, y\|_\eta &= \left\|\Lambda^\eta \partial_x \left[\Lambda^{s-1-\eta}, bh(u)\right] \Lambda^{\eta+1-s} y\right\|_0 \\
&\leq \left\|\Lambda^\eta \partial_x \left[\Lambda^{s-1-\eta}, bh(u)\right] \Lambda^{1-s}\right\|_{L(L^2)} \|\Lambda^\eta y\|_0 \\
&\leq c\,\|h(u)\|_s\,\|\Lambda^\eta y\|_0 \\
&\leq cC_1(R)\,\|u\|_s\,\|y\|_\eta
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Böylece $B_1(t) \in L(H^\eta)$ olur.

$$\begin{aligned}
A(t)\, y &= \partial_x\left(\left(bh(u) + a\partial_x^2\right) y\right) \\
&= \partial_x\left(bh(u) + a\partial_x^2\right) y + \left(bh(u) + a\partial_x^2\right)\partial_x y \quad \text{ve } u_x \in L\left(H^{s-1}\right)
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. Lemma 4.1.1.8 i ve yarıgruplar için pertürbasyon teoremini uygularsak H^{s-1} in $A(t)$-kabul edilebilir olduğunu elde ederiz. Ayrıca, Lemma 4.1.1.3 ü $Y = H^{s-1}$, $X = H^\eta$ ve $S = \Lambda^{s-1-\eta}$ alarak uygularsak $-A_1(t)$ nin H^η üzerinde C_0 yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci olduğunu elde ederiz. $A_1(t) = A(t) + B_1(t)$ ve $B_1(t) \in L(H^\eta)$ olduğundan yarıgruplar için pertürbasyon teoreminden $-A(t)$ nin H^η üzerinde bir C_0-yarıgrubunun sonsuz küçüklükte üreteci olduğunu elde ederiz. Bu da (b) nin ispatını tamamlar.

(ii) nin sağlandığını gösterelim. $y \in L^2$ alalım. O zaman

$$\left\| \Lambda^{\eta} \partial_x \left[\Lambda^{k-\eta}, bh(u) \right] \Lambda^k y \right\|_0 \leq cC_1(R) \|u\|_s \|y\|_0$$

olur. Burada $r = -(\eta + 1)$, $t = k$ için Lemma 4.1.1.1 uygulandı.
Son olarak (iii) nin sağlandığını gösterelim. $y \in H^k$ alalım. Daha sonra $r = s - 1$, $t = \eta + 1$ için Lemma 4.1.1.2 ve Lemma 4.1.1.5 in uygulanması ile

$$\begin{aligned}
\|(A(t+\tau) - A(t)) y\|_{\eta} &= \|\partial_x (bh(u(t+\tau)) - bh(u(t)) y)\|_{\eta} \\
&\leq \|bh(u(t+\tau)) - bh(u(t)) y\|_{\eta+1} \\
&\leq c \|bh(u(t+\tau)) - bh(u(t))\|_{s-1} \|y\|_{\eta+1} \\
&\leq cC_2(R) \|u(t+\tau) - u(t)\|_{s-1} \|y\|_{\eta+1} \\
&\leq cC_2(R) \|(u(t+\tau) - u(t))\|_s \|y\|_k
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. u nun sürekliliği ile (iii) ispatlanır. Böylece yukarıdaki üç şart ile $A(t)$ ailesi için $U(t, \tau)$ evolüsyon operatörünün varlığı ve tekliği vurgulanır. Özel olarak $-s \leq r \leq s - 1$ için $U(t, \tau)$, H^r yi kendine götürür.
$Y = H^{s-2}$ ve $X = H^{s-3}$ seçelim ve

$$y \in C\left([0, T); H^{s-2}\right) \cap C^1\left([0, T); H^{s-3}\right)$$

olduğuna dikkat edelim. $U(t, \tau)$ evolüsyon operatörünün özelliğinden

$$\frac{d}{d\tau}(U(t, \tau) y(\tau)) = U(t, \tau)(-B(\tau) y(\tau) + f(\tau))$$

olduğu görülür. $\tau \in [0, t]$ üzerinden bir integral alarak

$$y(t) = U(t, 0) y(0) + \int_0^t U(t, \tau)(-B(\tau) y(\tau) + f(\tau)) d\tau \qquad (4.1.6)$$

elde edilir. Eğer $s < s' \leq s + 1$ ise $f(t) \in C([0, T); H^{s-1}) \subset C\left([0, T); H^{s'-2}\right)$ olur ve $B(t) = bh'(u) u_x \in L\left(H^{s'-2}\right)$, $[0, t)$ de güçlü süreklidir ve $s - 1 > \frac{1}{2}$ iken $H^{s-1} H^{s'-2} \subset H^{s'-2}$ olur. $-s < s-2 < s'-2 \leq s-1$ olduğundan dolayı $\{U(t, \tau)\}$ ailesi $H^{s'-2}$ üstünde kendine güçlü süreklidir. $y(0) \in H^{s'-2}$ olduğunu hatırlatalım. (4.1.6) denklemi ardışık yaklaşım ile y için çözülebilen bir Volterra tipli integral denklem olarak görülür. Teorem 4.1.1.12 nin sonucu elde edilir.
Eğer $s' > s+1$ ise yukarıdaki argümanların tekrarı ile Teorem 4.1.1.12 nin sonucu elde

edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(4.1.1) aşağıdaki gibi Hamiltonian formunda yazılabilir:

$$u_t + JF'(u) = 0.$$

Burada $J = (I - \partial_x^2)^{-1} \partial_x$ bir skew-simetrik operator ve

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(2G(u) + \alpha^2 h(u) u_x^2 - \gamma u_x^2 - \gamma \alpha^2 u_{xx}^2\right) dx$$

Hamiltoniandır, ayrıca $G'(s) = g(s)$ dir.

Teorem 4.1.1.13. u, (4.1.1) in bir çözümü olsun. O zaman

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + \alpha^2 u_x^2\right) dx, \\ F(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(2G(u) + \alpha^2 h(u) u_x^2 - \gamma u_x^2 - \gamma \alpha^2 u_{xx}^2\right) dx \end{aligned}$$

fonksiyonelleri t ye göre sabittir ve burada $G'(s) = g(s)$ dir.

İspat. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} \frac{dE(u)}{dt} &= \int_{\mathbb{R}} \left(uu_t + \alpha^2 u_x u_{xt}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u\left(u_t - \alpha^2 u_{xxt}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u\left(-(g(u))_x - \gamma\left(u - \alpha^2 u_{xx}\right)_{xxx} + \alpha^2 \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u) u_{xx}\right)_x\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(g(u) u_x + \gamma u_x \left(u - \alpha^2 u_{xx}\right)_{xx} - \alpha^2 u_x \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u) u_{xx}\right)\right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$v(t,x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} u_t(t,y)\, dy$ alalım. $F(u)$ fonksiyonelinin her bir terimi için ayrı ayrı

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} G(u)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(u) u_t dx = \int_{\mathbb{R}} g(u) v_x dx = -\int_{\mathbb{R}} (g(u))_x v dx,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\alpha^2\frac{1}{2}h(u)\,u_x^2dx &= \alpha^2\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}h'(u)\,u_tu_x^2dx+\alpha^2\int_{\mathbb{R}}h(u)\,u_xu_{xt}dx\\
&= \alpha^2\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}h'(u)\,u_x^2v_xdx+\alpha^2\int_{\mathbb{R}}h(u)\,u_xv_{xx}dx\\
&= -\alpha^2\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}h'(u)\,u_x^2v_xdx-\alpha^2\int_{\mathbb{R}}h(u)\,u_{xx}v_xdx\\
&= \alpha^2\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}h'(u)\,u_x^2+h(u)\,u_{xx}\right)_x vdx,
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\gamma u_x^2dx=\int_{\mathbb{R}}\gamma u_xu_{xt}dx=\int_{\mathbb{R}}\gamma u_xv_{xx}dx=\int_{\mathbb{R}}\gamma u_{xxx}vdx$$

ve

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\gamma\alpha^2u_{xx}^2dx=\int_{\mathbb{R}}\gamma\alpha^2u_{xx}u_{xxt}dx=\int_{\mathbb{R}}\gamma\alpha^2u_{xx}v_{xxx}dx=-\int_{\mathbb{R}}\gamma\alpha^2u_{xxxxx}vdx$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikler birlikte ele alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{dF(u)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\left(2G(u)+\alpha^2h(u)\,u_x^2-\gamma u_x^2-\gamma\alpha^2u_{xx}^2\right)dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left((g(u))_x-\alpha^2\left(\frac{1}{2}h'(u)\,u_x^2+h(u)\,u_{xx}\right)_x+\gamma u_{xxx}-\gamma\alpha^2u_{xxxxx}\right)vdx
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.1) deki denklemin her iki tarafını v ile çarpıp integralini alırsak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}v\left(u_t-\alpha^2u_{xxt}\right)dx &= -\int_{\mathbb{R}}\left((g(u))_x-\alpha^2\left(\frac{1}{2}h'(u)\,u_x^2+h(u)\,u_{xx}\right)_x\right)vdx\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}}\left(\gamma u_{xxx}-\gamma\alpha^2u_{xxxxx}\right)vdx
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\int_{\mathbb{R}}\left(vv_x-\alpha^2vv_{xxx}\right)dx=\frac{dF(u)}{dt}=0$$

olur.

$E(u)$ ve $F(u)$ fonksiyonelleri kararlılık ispatında çok önemli bir rol sahiptir.

4.1.2. Tek Dalga Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda (4.1.1) probleminde genellikten kaybetmeksizin $\alpha=\gamma=1$ alarak ve

$g(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2}u^{p+1}$, $h(u) = u^p$ iken elde edilen aşağıdaki

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + \left(\frac{p+2}{2}u^{p+1}\right)_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = \left(\frac{p}{2}u^{p-1}u_x^2 + u^p u_{xx}\right)_x, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.7}$$

problemin tek dalga çözümlerinin varlığı ele alınacaktır. Burada $p > 0$ bir tam sayıdır ve $\omega > 0$ dır. Ayrıca doğrusal olmayan $g(u)$ ve $h(u)$ fonksiyonlarının bu özel durumları için

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(2\omega u^2 + u^{p+2} + u^p u_x^2 - u_x^2 - u_{xx}^2\right) dx, \\ E(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx \end{aligned}$$

şeklini alır.

Tek dalga ile $c > 2\omega$ dalga hızı olmak üzere (4.1.7) için $u(t,x) = \varphi(x - ct)$ formundaki çözümleri kastediyoruz. O zaman φ aşağıdaki

$$c\varphi - c\varphi'' - 2\omega\varphi - \frac{p+2}{2}\varphi^{p+1} - \varphi'' + \varphi'''' + \left(\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\varphi'^2 + \varphi^p\varphi''\right) = 0 \tag{4.1.8}$$

tek dalga denkleminin bir çözümüdür.

$$I(u) = I(u;\omega,c) = \int_{\mathbb{R}} \left((c - 2\omega)u^2 + (c+1)u_x^2 + u_{xx}^2\right) dx$$

ve

$$K(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(u^{p+2} + u^p u_x^2\right) dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonelleri içeren bir kısıtlanmış minimize problemi çözerek (4.1.8) denkleminin tek dalga çözümlerini elde edeceğiz.

$\lambda > 0$ için H^2 üzerinde aşağıdaki kısıtlanmış minimize problemi düşünelim:

$$M_\lambda = \inf\left\{I(u) : u \in H^2,\ K(u) = \lambda\right\}. \tag{4.1.9}$$

Eğer minimize problem M_λ, bazı $\lambda > 0$ için bir sıfırdan farklı (nontrivial) $\psi \in H^2$ çözümüne sahip ise, o zaman

$$(2c - 4\omega)\psi - (2c+2)\psi'' + 2\psi'''' = \vartheta\left[(p+2)\psi^{p+1} - \left(p\psi^{p-1}(\psi')^2 + 2\psi^p\psi''\right)\right]$$

olacak şekilde bir ϑ Langrange çarpanı vardır. $\varphi = \vartheta^{\frac{1}{p}}\psi$, (4.1.8) tek dalga denkleminin bir çözümüdür. Böyle çözümler taban durum (ground state) çözümleri olarak adlandırılır. Tüm taban durum çözümlerin kümesi N_c ile gösterilecektir. I ve K fonksiyonellerinin homojenliği ile taban durumlar

$$m = m(\omega, c) = \inf\left\{ \frac{I(u)}{K(u)^{\frac{2}{p+2}}} : 0 \neq u \in H^2,\ K(u) > 0 \right\}$$

minimuma ulaşır ve

$$M_\lambda = \lambda^{\frac{2}{p+2}} m \tag{4.1.10}$$

olduğu görülür.

(4.1.8) tek dalga denklemi φ ile çarpılıp integrallenirse $I(\varphi) = \frac{p+2}{2} K(\varphi)$ olduğu görülür. Böylece taban durumların kümesi

$$N_c = \left\{ \varphi \in H^2 : \frac{2}{p+2} I(\varphi) = K(\varphi) = \left(\frac{2}{p+2} m(c) \right)^{\frac{p+2}{p}} \right\} \tag{4.1.11}$$

ile karakterize edilir. Burada amaç N_c kümesinin boş olmadığını göstermektir.

Eğer bazı $\lambda > 0$ için ψ_k, bir minimize dizi ise

$$\lim_{k\to\infty} I(\psi_k) = M_\lambda \text{ ve} \lim_{k\to\infty} K(\psi_k) = \lambda$$

olur.

Teorem 4.1.2.1. Bazı $\lambda > 0$ için $\{\psi_k\}$ bir minimize dizi olsun. Eğer $c > 2\omega$ ise o zaman $y_k \in \mathbb{R}$ ve $\psi \in H^2$ olmak üzere H^2 de (yine ψ_k olarak adlandırılan) $\psi_k(. - y_k) \to \psi$ olacak şekilde bir ψ_k alt dizisi vardır. ψ fonksiyonu $K(\psi) = \lambda$ kısıtına bağlı $I(\psi) = M_\lambda$ minimumuna ulaşır.

İspat. Lions'un (1984) Konsantrasyon-Kompaktlık Lemması uygulanarak teorem ispatlanacaktır. (4.1.10) dan

$$M_\lambda < M_{\lambda_1} + M_{\lambda - \lambda_1}, \quad \lambda_1 \in (0, \lambda)$$

alt toplanabilirlik (subadditivity) şartı sağlanır.

$c > 2\omega$ olduğundan I fonksiyoneli

$$I(u) \geq (c - 2\omega) \|u\|_{H^2}^2$$

koersiflik şartını sağlar. Ayrıca $(c+1)\|u\|_{H^2}^2 \geq I(u)$ olduğu açıktır. Bir başka ifade ile $c > 2\omega$ için $I(u)$ fonksiyoneli

$$(c-2\omega)\|u\|_{H^2}^2 \leq I(u) \leq (c+1)\|u\|_{H^2}^2$$

olduğundan $\|u\|_{H^2}^2$ ye denktir. $\{\psi_k\}$ bir minimize dizi olsun. I fonksiyonelinin koersifliğinden $\{\psi_k\}$ dizisi H^2 de sınırlıdır ve

$$\rho_k = \left|\partial_x^2 \psi_k\right|^2 + |\partial_x \psi_k|^2 + |\psi_k|^2$$

şeklinde $L^1(\mathbb{R})$ içindeki fonksiyonların bir dizisi de sınırlıdır. Bir alt dizi çıkardıktan sonra $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho_k dx = L > 0$ varsayabiliriz. Ayrıca her k için normalize ederek $\|\rho_k\|_{L^1} = L$ varsayabiliriz. Konsantrasyon-Kompaktlık Lemması'na (Lions 1984) göre aşağıdaki üç şarttan birini sağlayan ρ_k alt dizisi vardır:

(i) Kompaktlık (Compactness): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ olmak üzere her k için

$$\int_{|x-y_k|\leq R(\varepsilon)} \rho_k dx \geq \int_{\mathbb{R}} \rho_k dx - \varepsilon \tag{4.1.12}$$

olacak şekilde $R(\varepsilon) > 0$ vardır. Burada $y_k \in \mathbb{R}$ dir.

(ii) Sıfıra azalma (Vanishing): Her $R > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{|x-y|\leq R} \rho_k dx = 0 \tag{4.1.13}$$

olur.

(iii) İkiye ayrılma (Dichotomy): Bazı $l \in (0, L)$ vardır öyle ki herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\int_{|x-y_k|\leq R} \rho_k dx - l\right| < \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad \left|\int_{R<|x-y_k|<R_k} \rho_k dx\right| < \varepsilon \tag{4.1.14}$$

olacak şekilde $R > 0$ ve $R_k \to \infty$, $y_k \in \mathbb{R}$ ve k_0 vardır, burada $k \geq k_0$ dır.

Burada amaç (ii) ve (iii) durumlarını göz ardı ederek ρ_k nın kompakt olduğunu göstermektir.

İlk olarak (ii) nin sağlandığını varsayalım. $\{\psi_k\}$, H^2 de sınırlı olduğundan tüm k

ve $y \in \mathbb{R}$ için Sobolev eşitsizliği ile

$$\int_{|x-y|\leq 1} |\psi_k|^{p+2}\, dx \leq C \left(\int_{|x-y|\leq 1} \rho_k dx \right)^{\frac{p+2}{2}},$$

$$\int_{|x-y|\leq 1} \left|\psi_k^p \left(\partial_x \psi_k\right)^2\right| dx \leq C \left(\int_{|x-y|\leq 1} |\psi_k|^{p+2}\, dx \right)^{\frac{p}{p+2}} . \left(\int_{|x-y|\leq 1} |\partial_x \psi_k|^{p+2}\, dx \right)^{\frac{2}{p+2}}$$

olur. Herhangi bir $\psi_k \in H^2$ için

$$\int_{|x-y|\leq 1} |\psi_k|^{p+2}\, dx \leq C \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{|x-y|\leq 1} \rho_k dx \right)^{\frac{p}{2}} . \left\|\psi_k\right\|_{H^2}^2,$$

$$\int_{|x-y|\leq 1} \left|\psi_k^p \left(\partial_x \psi_k\right)^2\right| dx \leq C \left\|\psi_k\right\|_{H^2}^2 \left[C \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{|x-y|\leq 1} \rho_k dx \right)^{\frac{p}{2}} . \left\|\psi_k\right\|_{H^2}^2 \right]^{\frac{p}{p+2}}$$

elde edilir. Böylece ($R = 1$ ile) (4.1.13) kullanılırsa $\lim\limits_{k\to\infty} K(\psi_k) = 0$ olduğu çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile yok olma (vanishing) oluşmaz.

Şimdi (iii) nin sağlandığını varsayalım. Sırası ile $|x| \leq 2$ ve $|x| \geq \frac{1}{2}$ desteği ile $|x| \leq 1$ için $\delta_1(x) = 1$ ve $|x| \geq 1$ için $\delta_2(x) = 1$ olacak şekilde δ_1 ve δ_2 kesim fonksiyonları tanımlansın, böyle bir şekilde bu

$$\psi_{k,1}(x) = \delta_1 \left(\frac{|x - y_k|}{R} \right) \psi_k(x)$$

ve

$$\psi_{k,2}(x) = \delta_2 \left(\frac{|x - y_k|}{R_k} \right) \psi_k(x)$$

fonksiyonları $k \geq k_0$ için

$$\begin{aligned} I(\psi_k) &= I\left(\psi_{k,1}\right) + I\left(\psi_{k,2}\right) + O(\varepsilon), \\ K(\psi_k) &= K\left(\psi_{k,1}\right) + K\left(\psi_{k,2}\right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

eşitliklerini sağlar. $\{\psi_k\}$, H^2 de sınırlı olduğundan ε dan bağımsız H^2 de sınırlı $\psi_{k,1}$ ve $\psi_{k,2}$ vardır. Sonuç olarak $K\left(\psi_{k,1}\right)$ ve $K\left(\psi_{k,2}\right)$ sınırlıdır ve

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} K\left(\psi_{k,1}\right) \quad \text{ve} \quad \lambda_2(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} K\left(\psi_{k,2}\right)$$

tanımlamak için alt dizilere geçebiliriz. $\lambda_1(\varepsilon)$ ve $\lambda_2(\varepsilon)$, ε dan bağımsız olarak sınırlı olduğundan bir $\varepsilon_j \to 0$ dizisi seçebiliriz öyle ki

$$\lambda_1 = \lim_{j\to\infty} \lambda_1(\varepsilon_j) \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \lim_{j\to\infty} \lambda_2(\varepsilon_j)$$

limitleri vardır. $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ dır ve orada üç durum vardır.
Eğer $\lambda_1 \in (0, \lambda)$ ise o zaman (4.1.15) ve $M_\lambda = \lambda^{\frac{2}{p+2}} m$ kullanılarak

$$\begin{aligned} I(\psi_k) &= I\left(\psi_{k,1}\right) + I\left(\psi_{k,2}\right) + O(\varepsilon) \geq M_{K\left(\psi_{k,1}\right)} + M_{K\left(\psi_{k,2}\right)} + O(\varepsilon_j) \\ &= \left(K\left(\psi_{k,1}\right)^{2/(p+2)} + K\left(\psi_{k,2}\right)^{2/(p+2)}\right) m + O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

elde edilir. ψ_k bir minimize dizi olduğundan ve $k \to \infty$ iken

$$M_\lambda \geq \left[\lambda_1^{2/(p+2)}(\varepsilon_j) + \lambda_2^{2/(p+2)}(\varepsilon_j)\right] m + O(\varepsilon_j)$$

olur. Daha sonra $j \to \infty$ iken

$$M_\lambda \geq M_{\lambda_1} + M_{\lambda - \lambda_1}$$

çelişkisi elde edilir.
Eğer $\lambda_1 = 0$ (ya da $\lambda_1 = \lambda$) ise

$$\begin{aligned} I\left(\psi_{k,1}\right) &\geq (c - 2\omega) \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\psi_{k,1}\right|^2 + \left|\partial_x \psi_{k,1}\right|^2 + \left|\partial_x^2 \psi_{k,1}\right|^2\right) dx \\ &= (c - 2\omega) \left(\int_{|x-y_k|\leq 2R} \left(|\psi_k|^2 + |\partial_x \psi_k|^2 + \left|\partial_x^2 \psi_k\right|^2\right) dx + O(\varepsilon_j)\right) \\ &= (c - 2\omega)(l + O(\varepsilon_j)) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} I(\psi_k) &= I\left(\psi_{k,1}\right) + I\left(\psi_{k,2}\right) + O(\varepsilon_j) \\ &\geq (c - 2\omega)(l + O(\varepsilon_j)) + K\left(\psi_{k,2}\right)^{2/(p+2} m + O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Sırası ile $k \to \infty$ ve $j \to \infty$ alınırsa

$$M_\lambda \geq (c - 2\omega) l + K\left(\psi_{k,2}\right)^{2/(p+2)} m = (c - 2\omega) l + M_\lambda > M_\lambda$$

çelişkisi elde edilir.

Son olarak $\lambda_1 > \lambda$ (ya da $\lambda_1 < 0$) ise I nın pozitifliğini kullanarak

$$I(\psi_k) \geq I\left(\psi_{k,1}\right) + O(\varepsilon_j) \geq K\left(\psi_{k,1}\right)^{2/(p+2)} m + O(\varepsilon_j)$$

elde edilir. Yeniden sırası ile $k \to \infty$ ve $j \to \infty$ alınırsa

$$M_\lambda \geq M_{\lambda_1} > M_\lambda$$

çelişkisi oluşur.

Böylece $\rho_k(. - y_k)$ kompakt olacak şekilde $y_k \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi $\varphi_k = \psi_k(. - y_k)$ alalım. φ_k, H^2 de sınırlı olduğundan, bir φ_k alt dizisi $\psi \in H^2$ ye yakınsar ve I nın H^2 üzerinde zayıf alt sürekliliği ile

$$I(\psi) \leq \lim_{k\to\infty} I(\varphi_k) = M_\lambda$$

olur. Ayrıca H^2 de ki zayıf yakınsaklık, ρ_k nın kompaktlığı ve Sobolev eşitsizliği φ_k nın L^{p+2} içindeki ψ ye güçlü yakınsadığını vurgular. Bundan dolayı

$$K(\psi) = \lim_{k\to\infty} K(\varphi_k) = \lambda$$

ve böylece $I(\psi) \geq M_\lambda$ olur. Bu yukarıdaki eşitsizlik ile birlikte $I(\psi) = M_\lambda$ olduğunu gösterir. Böylece ψ, $K(\varphi) = \lambda$ kısıtına bağlı I nın minimize edicisidir. Son olarak, I, H^2 üzerindeki norma denk, $\varphi_k \to \psi$ ve $I(\varphi_k) \to I(\psi)$ olduğundan φ_k nın H^2 de ψ ye yakınsadığı görülür.

Lemma 4.1.2.2. $\varphi \in H^2$ (4.1.8) in bir zayıf çözümü olsun. O zaman φ bir klasik çözümdür ve $\varphi \in C^5$ dir.

İspat. (4.1.8) denklemi $f(\varphi, \varphi', \varphi'') = \frac{p+2}{2}\varphi^{p+1} - \left(\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\varphi'^2 + \varphi^p\varphi''\right)$ olmak üzere

$$c\varphi - c\varphi'' - 2\omega\varphi - \varphi'' + \varphi'''' = f(\varphi, \varphi', \varphi'')$$

şeklinde yazılabilir. $\varphi \in H^2$ olduğundan φ ve φ', $L^\infty \cap L^2$ içindedir. Böylece $f(\varphi, \varphi', \varphi'') \in L^2$. φ (4.1.8) in bir zayıf çözümü olduğunundan bu $\varphi \in H^4$ olduğunu vurgular ve bundan dolayı Sobolev lemması ile $f(\varphi, \varphi', \varphi'') \in C^1$. Böylece $\varphi \in C^5$ olur.

4.1.3. Tek Dalga Çözümlerinin Kararlılığı

$c > 2\omega$ dalga hızı için

$$d(c) = cE(\varphi) - F(\varphi)$$

şeklinde bir d fonksiyonu tanımlayalım. Burada φ (4.1.8) tek dalga denkleminin herhangi bir taban durum çözümüdür, yani $\varphi \in N_c$. O zaman φ

$$cE'(\varphi) - F'(\varphi) = 0$$

eşitliğini sağlar. Burada E' ve F' sırası ile E ve F fonksiyonellerinin Fréchet türevidir. E ve F fonksiyonelleri tek dalgaları elde etmek için kullanılan I ve K fonksiyonelleri ile

$$cE(u) - F(u) = \frac{1}{2}(I(u) - K(u)) \tag{4.1.16}$$

şeklinde ilişkilidir. $I(\varphi) = \frac{p+2}{2}K(\varphi)$ eşitliğini kullanarak ve (4.1.11) ile

$$d(c) = \frac{p}{2(p+2)}I(\varphi) = \frac{p}{4}K(\varphi) = \frac{p}{4}\left(\frac{2}{p+2}m\right)^{\frac{p+2}{p}} \tag{4.1.17}$$

elde edilir.

Bu kısımda $d(c)$ fonksiyonunun konveksliği ile taban durumların kümesinin kararlılığı gösterilecektir.

Tanım 4.1.3.1. Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\varphi \in S} \|u_0 - \varphi\|_{H^2} < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, $S \subset H^2$ kümesi (4.1.7) ye göre kararlı olarak adlandırılır. Bu durumda (4.1.7) nin $u(t)$ çözümü her $t > 0$ için $u(0) = u_0$ başlangıç verisi ile vardır ve

$$\sup_{0 \le t < \infty} \inf_{\varphi \in S} \|u(t) - \varphi\|_{H^2} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. Diğer durumda S, (4.1.7) ye göre kararsızdır.

Lemma 4.1.3.2. $c > 2\omega$ olsun o zaman $m(\omega, c)$, c ye göre monoton artandır.

İspat. φ_{c_1}, φ_{c_2} sırası ile $c = c_1, c = c_2$ için (4.1.8) denkleminin iki çözümü olsun.

Genelliği kaybetmeksizin $c_1 < c_2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
m(\omega, c_1) &\leq \frac{I\left(\varphi_{c_2}; \omega, c_1\right)}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}}\left[(c_1 - 2\omega)\varphi_{c_2}^2 + (c_1+1)\left(\varphi_{c_2}'\right)^2 + \left(\varphi_{c_2}''\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}}\left[(c_2 - 2\omega)\varphi_{c_2}^2 + (c_2+1)\left(\varphi_{c_2}'\right)^2 + \left(\varphi_{c_2}''\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&\quad + \frac{-c_2\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_{c_2}^2 + \left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx + c_1\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_{c_2}^2 + \left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&= m(\omega, c_2) + (c_1 - c_2)\frac{\int_{\mathbb{R}}\left[\left(\varphi_{c_2}'\right)^2 + \varphi_{c_2}^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&\leq m(\omega, c_2)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu m in c ye göre monoton artan olduğunu gösterir ve (4.1.17) den d fonksiyonunun da monoton artan olduğu söylenir.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$U_\varepsilon = \left\{u \in H^2 : \inf_{\varphi \in N_c} \|u - \varphi\|_{H^2} < \varepsilon\right\}$$

şeklinde taban durumların kümesi N_c nin $\varepsilon-$komşuluğu tanımlansın. (4.1.17) den ve $d(c)$ fonksiyonunun c de monoton artanlığından

$$c(u) = d^{-1}\left(\frac{p}{4}K(u)\right) \tag{4.1.18}$$

olduğu izlenir.

Lemma 4.1.3.3. Eğer $d''(c) > 0$ ise o zaman $u \in U_\varepsilon$ ve $\varphi \in N_c$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki

$$c(u)\left[E(u) - E(\varphi)\right] - \left[F(u) - F(\varphi)\right] \geq \frac{1}{4}d''(c)\left|c(u) - c\right|^2$$

olur.

İspat. $d'(c) = E(\varphi)$ ve Taylor formülünü kullanarak c nin yakınında $\widetilde{c}$ için

$$d(\widetilde{c}) = d(c) + E(\varphi)(\widetilde{c} - c) + \frac{1}{2}d''(c)(\widetilde{c} - c)^2 + o\left(|\widetilde{c} - c|^2\right)$$

elde edilir. $c(u)$ nun sürekliliğini kullanarak ve $\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilerek $u \in U_\varepsilon$

için

$$\begin{aligned} d\left(c\left(u\right)\right) &\geq d\left(c\right)+E\left(\varphi\right)\left(c\left(u\right)-c\right)+\frac{1}{4}d''\left(c\right)\left(c\left(u\right)-c\right)^{2} \\ &= c\left(u\right)E\left(\varphi\right)-F\left(\varphi\right)+\frac{1}{4}d''\left(c\right)\left(c\left(u\right)-c\right)^{2} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.17) ve (4.1.18) eşitliklerinden $K\left(\varphi_{c(u)}\right)=\frac{4}{p}d\left(c\left(u\right)\right)=K\left(u\right)$ olduğu görülür ve $\varphi_{c(u)}$, bu kısıta bağlı $I\left(.;\omega,c\left(u\right)\right)$ yu minimize eder. Böylece

$$\begin{aligned} c\left(u\right)E\left(u\right)-F\left(u\right) &= \frac{1}{2}\left(I\left(u;\omega,c\left(u\right)\right)-K\left(u\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(I\left(\varphi_{c(u)};\omega,c\left(u\right)\right)-K\left(\varphi_{c(u)}\right)\right)=d\left(c\left(u\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bunun kullanılması ile

$$c\left(u\right)E\left(u\right)-F\left(u\right)\geq c\left(u\right)E\left(\varphi\right)-F\left(\varphi\right)+\frac{1}{4}d''\left(c\right)\left(c\left(u\right)-c\right)^{2}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.3.4. $c>2\omega$ olsun. Eğer $d''\left(c\right)>0$ ise o zaman taban durumların kümesi N_c kararlıdır.

İspat. Farzedelim ki N_c kararsız olsun ve

$$\inf_{\varphi\in N_c}\left\|u_k\left(0\right)-\varphi\right\|_{H^2}<\frac{1}{k}$$

olacak şekilde $u_k\left(0\right)$ başlangıç verisininin bir dizisi vardır. $u_k\left(t\right)$, $u_k\left(0\right)$ başlangıç verisi ile (4.1.7) nin bir çözümü olsun. Lokal varlık teoreminden u_k, t de süreklidir ve bazı $\delta>0$ için

$$\inf_{\varphi\in N_c}\left\|u_k\left(t_k\right)-\varphi\right\|_{H^2}=\delta \qquad (4.1.19)$$

olacak şekilde t_k zamanları vardır.

E ve F fonksiyonelleri (4.1.1) in değişmezleri ve N_c sınırlı olduğundan, $k\to\infty$ iken

$$\left|E\left(u_k\left(t_k\right)\right)-E\left(\varphi_k\right)\right|=\left|E\left(u_k\left(0\right)\right)-E\left(\varphi_k\right)\right|\to 0, \qquad (4.1.20)$$

$$\left|F\left(u_k\left(t_k\right)\right)-F\left(\varphi_k\right)\right|=\left|F\left(u_k\left(0\right)\right)-F\left(\varphi_k\right)\right|\to 0 \qquad (4.1.21)$$

olacak şekilde $\varphi_k\in N_c$ bulunabilir.

Lemma 4.1.3.3 kullanılarak, yeteri kadar küçük δ için

$$\begin{aligned} & c\left(u_k\left(t_k\right)\right)\left[E\left(u_k\left(t_k\right)\right)-E\left(\varphi_k\right)\right]-\left[F\left(u_k\left(t_k\right)\right)-F\left(\varphi_k\right)\right] \\ \geq\; & \frac{1}{4} d''(c)\left|c\left(u_k\left(t_k\right)\right)-c\right|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $k \to \infty$ iken (4.1.20) ve (4.1.21) ile $c\left(u_k\left(t_k\right)\right) \to c$ olur.

d nin sürekliliği

$$\lim_{k\to\infty} K\left(u_k\left(t_k\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{4}{p} d\left(c\left(u_k\left(t_k\right)\right)\right)=\frac{4}{p} d(c) \tag{4.1.22}$$

olduğunu vurgular. (4.1.16), (4.1.20) , (4.1.21) ve $d(c)=cE\left(\varphi_k\right)-F\left(\varphi_k\right)$ kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} I\left(u_k\left(t_k\right)\right)=\frac{2(p+2)}{p} d(c) \tag{4.1.23}$$

olduğu görülür.

Böylece $u_k\left(t_k\right)$ bir minimize edici dizidir ve Teorem 4.1.2.1 ile H^2 de bazı $\varphi \in N_c$ ye yakınsayan bir alt diziye sahiptir. Bu (4.1.19) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Genelleştirilmiş Dullin-Gottwald-Holm Denklemi İçin Dalga Kırılması Ve Tek Dalga Çözümlerinin Kararlılığı

Bu kısımda genellleştirilmiş Dullin-Gottwald-Holm denklemi için dalga kırılması formunda ki blow-up oluşumu ve tek dalga çözümlerinin kararlılığı çalışılmıştır (Dündar ve Polat 2013b).

Liu ve Yin (2011), DGH denkleminin bir genelleştirilmişi için aşağıdaki problemin iyi konumluluğunu çalıştı:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + h(u)_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{g'(u)}{2} u_x^2 + g(u) u_{xx} \right)_x, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

(4.2.1) de $h(u) = 2\omega u + \frac{3}{2}u^2$ ve $g(u) = u$ olarak alınırsa (2.7) DGH denkleminin elde edildiği kolayca görülür.

(4.2.1)

$$u_t + JF'(u) = 0$$

şeklinde Hamiltonian formunda yazılabilir. Burada $J = \left(I - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x$ bir skew-simetrik operator ve $H'(s) = h(s)$ olmak üzere

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(2H(u) + \alpha^2 g(u) u_x^2 - \gamma u_x^2 \right) dx$$

olur. Ayrıca $F(u)$ fonksiyoneli korunur. Bunun dışında başka bir korunan fonksiyonelde aşağıdaki gibidir:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{R} \left(u^2 + \alpha^2 u_x^2 \right) dx.$$

Bu kısımın amacı (4.2.1) probleminde $g(u) = u$ için kesin bir blow-up senaryosu verip blow-up çözümlere sahip olduğunu göstermektir. Daha sonra buna ek olarak

$$h(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2} u^{p+1} \text{ ve } g(u) = u^p$$

için (4.2.1) in tek dalga çözümlerinin kararlılığını Girillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teorisi yardımı ile ispatlamaktır.

Şimdi bu kısımda kullanacağımız bazı lemmaları verelim.

Lemma 4.2.1. $s > 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman

$$\|[\Lambda^s, g] f\|_{L^2} \leq c \left(\|\partial_x g\|_{L^\infty} \left\|\Lambda^{s-1} f\right\|_{L^2} + \|\Lambda^s g\|_{L^2} \|f\|_{L^\infty}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c sadece s ye bağlı bir sabittir (Kato ve Ponce 1988).

Lemma 4.2.2. $F(0) = 0$ ile $F \in C^{m+2}(\mathbb{R})$ olduğu kabul edilsin. O zaman her $\frac{1}{2} < s \leq m$ için, $\widetilde{F}$ sadece F ve s ye bağlı monoton artan bir fonksiyon olacak şekilde

$$\|F(u)\|_s \leq \widetilde{F}\left(\|u\|_{L^\infty}\right) \|u\|_s, \qquad u \in H^s$$

eşitsizliği vardır (Constantin ve Molinet 2002).

Lemma 4.2.3. $s > 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman $H^s \cap L^\infty$ bir cebirdir. Ayrıca

$$\|fg\|_s \leq c\left(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_{L^\infty}\right)$$

olacak şekilde sadece s ye bağlı bir c sabiti vardır (Kato ve Ponce 1988).

Lemma 4.2.4. $T > 0$ ve $u \in C^1([0,T); H^2)$ olsun. O zaman her $t \in [0,T)$ için

$$m(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} [u_x(t,x)] = u_x(t, \xi(t)), \qquad M(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} [u_x(t,x)] = u_x(t, \zeta(t))$$

olacak şekilde en az bir çift $\xi(t), \zeta(t) \in \mathbb{R}$ noktaları vardır ve $m(t), M(t)$ $(0,T)$ de mutlak süreklidir. Ayrıca hemen hemen her $(0,T)$ için

$$\frac{dm(t)}{dt} = u_{tx}(t, \xi(t)), \qquad \frac{dM(t)}{dt} = u_{tx}(t, \zeta(t))$$

olur (Constantin ve Escher 1998b).

Teorem 4.2.5. $h, g \in C^{m+3}(\mathbb{R})$, $m \geq 2$ ve $h(0) = g(0) = 0$ olduğu kabul edilsin. $u_0 \in H^s$, $\frac{3}{2} < s \leq m$ olsun.

$$u = u(., u_0) \in C([0,T); H^s) \cap C^1\left([0,T); H^{s-1}\right)$$

olacak şekilde (4.2.1) için tek bir u çözümü ve bir maksimal $T = T(u_0) > 0$ vardır. Ayrıca çözüm başlangıç verisine sürekli bağımlıdır yani;

$$u_0 \to u(., u_0) : H^s \to C([0,T); H^s) \cap C^1\left([0,T); H^{s-1}\right)$$

dönüşümü süreklidir (Liu ve Yin 2011).

Lemma 4.2.6. $u(t,x)$, (4.2.1) in bir çözümü olsun. O zaman $H'(s) = h(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + \alpha^2 u_x^2\right) dx, \\ F(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(2H(u) + \alpha^2 g(u) u_x^2 - \gamma u_x^2\right) dx \end{aligned}$$

fonksiyonelleri t ye göre sabittir (Liu ve Yin 2011).

4.2.1. Blow-up

$g(u) = u$ için (4.2.1) in blow-up olayı ele alınacaktır. (4.2.1) problemindeki denklem sığ su dalgalarını tanımlayan bir denklemdir. Bu tür denklemlerde blow-up olayı sadece dalga kırılması şeklinde meydana gelir. Yani; çözüm sınırlı iken (çözüm ile kastedilen dalgadır) çözümün eğimi sonlu zamanda sınırsız olur.

$p(x) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\left|\frac{x}{\alpha}\right|}$, $x \in \mathbb{R}$ olsun, o zaman her $f \in L^2(\mathbb{R})$ için $\left(1 - \alpha^2\partial_x^2\right)^{-1} f = p * f$ olur. Bu özdeşliği kullanarak (4.2.1) problemini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$\begin{cases} u_t + \left(u - \frac{\gamma}{\alpha^2}\right) u_x + \partial_x p * k(u) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

veya

$$\begin{cases} u_t + \left(u - \frac{\gamma}{\alpha^2}\right) u_x = -\partial_x \left(1 - \alpha^2\partial_x^2\right)^{-1} k(u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k(u) = h(u) + \frac{\alpha^2}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\alpha^2}u$.

Teorem 4.2.1.1. $m \geq 2$ için $h \in C^{m+3}(\mathbb{R})$, $\frac{3}{2} < r \leq m$ olacak şekilde $u_0 \in H^r$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer T, u_0 başlangıç verisine karşılık gelen çözümün varlık zamanı ise o zaman (4.2.1) in (veya (4.2.3)) $u(t,x)$ çözümünün H^r-normu ancak ve ancak

$$\overline{\lim_{t\uparrow T}} \left\{\|u(t,x)\|_{L^\infty} + \|u_x(t,x)\|_{L^\infty}\right\} = \infty$$

olursa $[0,T)$ üzerinde blow-up olur.

İspat. $u(t,x)$ $\frac{3}{2} < r \leq m$ olmak üzere $u_0 \in H^r$ başlangıç verisi ile (4.2.1) probleminin Teorem 4.2.5 ile garantilenen bir çözümü olsun. Eğer

$$\overline{\lim_{t\uparrow T}}\left\{\|u(t,x)\|_{L^\infty}+\|u_x(t,x)\|_{L^\infty}\right\}=\infty$$

ise Sobolev gömülme teoremi ile $u(t,x)$ çözümünün sonlu zamanda blow-up olacağını elde ederiz.
(4.2.3) e Λ^r operatörünü uygulayarak, $\Lambda^r u$ ile çarparak ve $\mathbb{R}$ üzerinde integralleyerek

$$\frac{d}{dt}(u,u)_r=-2(uu_x,u)_r+2(f(u),u)_r \tag{4.2.4}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$f(u)=-\partial_x\left(1-\alpha^2\partial_x^2\right)^{-1}\left(h(u)+\frac{\alpha^2}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma}{\alpha^2}u\right)$$

şeklindedir.

$$\overline{\lim_{t\uparrow T}}\left\{\|u(t,x)\|_{L^\infty}+\|u_x(t,x)\|_{L^\infty}\right\}\le R$$

olacak şekilde bir $R>0$ var olduğunu farz edelim. O zaman $s=r$ için Lemma 4.2.1 uygulanarak

$$\begin{aligned}
\left|(uu_x,u)_r\right| &= \left|\left(\Lambda^r(uu_x),\Lambda^r u\right)_0\right| \\
&= \left|\left([\Lambda^r,u]u_x,\Lambda^r u\right)_0+\left(u\Lambda^r u_x,\Lambda^r u\right)_0\right| \\
&= \left|\left([\Lambda^r,u]u_x,\Lambda^r u\right)_0-\frac{1}{2}\left(u_x,(\Lambda^r u)^2\right)_0\right| \\
&\le \left\|[\Lambda^r,u]u_x\right\|_0\left\|\Lambda^r u\right\|_0+\frac{1}{2}\|u_x\|_{L^\infty}\left\|\Lambda^r u\right\|_0^2 \\
&\le c\left(\|u_x\|_{L^\infty}\left\|\Lambda^{r-1}u_x\right\|_{L^2}+\left\|\Lambda^r u\right\|_{L^2}\|u_x\|_{L^\infty}\right)\|u\|_r \\
&\quad +\frac{1}{2}\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_r^2 \\
&\le c\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_r^2 \\
&\le cR\|u\|_r^2
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, (4.2.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terime $F(u)=h(u)$ ve

$s=r-1$ ile Lemma 4.2.2 ve $s=r-1$ için Lemma 4.2.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
(f(u),u)_r &= \left(-\partial_x\left(1-\alpha^2\partial_x^2\right)^{-1}\left(h(u)+\frac{\alpha^2}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma}{\alpha^2}u\right),u\right)_r \\
&\leq c\left\|u\right\|_r\left(\left\|h(u)\right\|_{r-1}+\left\|u_x^2\right\|_{r-1}+\left\|u^2\right\|_{r-1}+\left\|u\right\|_{r-1}\right) \\
&\leq c\left(\widetilde{h}\left(\left\|u\right\|_{L^\infty}\right)\left\|u\right\|_{r-1}+\left\|u_x\right\|_{L^\infty}\left\|u_x\right\|_{r-1}+\left\|u\right\|_{L^\infty}\left\|u\right\|_{r-1}+\left\|u\right\|_r\right)\left\|u\right\|_r \\
&\leq c\left(\widetilde{h}\left(\left\|u\right\|_{L^\infty}\right)+\left\|u_x\right\|_{L^\infty}+\left\|u\right\|_{L^\infty}+1\right)\left\|u\right\|_r^2 \\
&\leq c\left(\widetilde{h}(R)+R+1\right)\left\|u\right\|_r^2 \qquad (4.2.6)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.4)-(4.2.6) dan

$$\frac{d}{dt}(u,u)_r\leq c\left(\widetilde{h}(R)+R+1\right)\left\|u\right\|_r^2$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanarak

$$\left\|u(t)\right\|_r^2\leq\left\|u_0\right\|_r^2\exp\left(c\left(\widetilde{h}(R)+R+1\right)\right)t$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.2. $h\in C^{m+3}(\mathbb{R})$, $m\geq 3$ olduğu varsayılsın. $u_0\in H^r$, $3\leq r\leq m$ ve $\alpha>0$ olsun. (4.2.1) in u çözümü düzgün sınırlıdır. $T<+\infty$ sonlu zamanında blow-up ancak ve ancak

$$\liminf_{t\uparrow T}\left\{\inf_{x\in\mathbb{R}}\left[u_x(t,x)\right]\right\}=-\infty$$

ise oluşur.

İspat. (4.2.1) in bir değişmezi

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+\alpha^2u_x^2\right)dx$$

fonksiyonelidir. Aşağıdaki eşitsizliklere göre

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+u_x^2\right)dx &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(u^2+\alpha^2u_x^2\right)dx=2E(u) \qquad (\alpha\geq 1), \\
\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+u_x^2\right)dx &\leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+\alpha^2u_x^2\right)dx=\frac{2}{\alpha^2}E(u) \qquad (\alpha\leq 1)
\end{aligned}$$

$E(u)$ fonksiyonelinin değişmezliği u çözümünün düzgün sınırlılığını garantiler.

Eğer $u(t,x)$ çözümünün eğimi sonlu zamanda aşağıdan sınırsız ise Teorem 4.2.5

ve Sobolev gömülme teoremi ile $u\left(t,x\right)$ çözümünün sonlu zamanda blow-up olacağı görülebilinir.

Eğer $u\left(t,x\right)$ çözümünün eğimi sonlu zamanda aşağıdan sınırlı ise çözümün sonlu zamanda blow-up olmayacağı sonucu ortaya çıkacaktır. (4.2.2) deki denklemi x değişkenine göre diferansiyellenip daha sonra $\partial_x^2\left(p*f\right)=\frac{1}{\alpha^2}\left(p*f-f\right)$ özdeşliği kullanılırsa sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$u_{tx}+u_x^2+uu_{xx}-\frac{\gamma}{\alpha^2}u_{xx}+\partial_x^2 p*\left(h\left(u\right)+\frac{\alpha^2}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma}{\alpha^2}u\right)=0,$$

$$\begin{aligned} u_{tx} &= -\frac{1}{2}u_x^2-uu_{xx}+\frac{\gamma}{\alpha^2}u_{xx}+\frac{1}{\alpha^2}h\left(u\right)-\frac{1}{2\alpha^2}u^2+\frac{\gamma}{\alpha^4}u \\ &\quad -\frac{1}{\alpha^2}p*\left(h\left(u\right)+\frac{\alpha^2}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma}{\alpha^2}u\right). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

$p*\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)\geq 0$ ve

$$\left\|u\right\|_{L^\infty}^2\leq\frac{1}{2}\left\|u\right\|_1^2\leq\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)E\left(u_0\right)\leq\alpha^2\max\left(1,\frac{1}{\alpha^4}\right)\left\|u_0\right\|_1^2$$

olduğuna dikkat edelim. Young eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \left\|p*h\left(u\right)\right\|_{L^\infty} &\leq \left\|p\right\|_{L^1}\left\|h\left(u\right)\right\|_{L^\infty}\leq\left\|h\left(u\right)\right\|_{L^\infty} \\ &\leq \sup_{|v|\leq\alpha\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\left\|u_0\right\|_1}\left|h\left(v\right)\right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|p*u^2\right\|_{L^\infty} &\leq \left\|p\right\|_{L^1}\left\|u^2\right\|_{L^\infty}\leq\left\|u\right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \alpha^2\max\left(1,\frac{1}{\alpha^4}\right)\left\|u_0\right\|_1^2, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\|p*u\right\|_{L^\infty} &\leq \left\|p\right\|_{L^1}\left\|u\right\|_{L^\infty}\leq\left\|u\right\|_{L^\infty} \\ &\leq \alpha\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\left\|u_0\right\|_1 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi $M\left(t\right)=u_x\left(t,\zeta\left(t\right)\right)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left[u_x\left(t,x\right)\right]$ tanımlansın. Her

$t \in [0,T)$ için $u_{xx}(t,\zeta(t)) = 0$ olduğundan hemen hemen her $[0,T)$ için

$$\begin{aligned} M'(t) &= -\frac{1}{2}M^2(t) + \frac{1}{\alpha^2}h(u(t,\zeta(t))) - \frac{1}{2\alpha^2}u^2(t,\zeta(t)) + \frac{\gamma}{\alpha^4}u(t,\zeta(t)) \\ &\quad -\frac{1}{\alpha^2}p * \left(h(u) + \frac{\alpha^2}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\alpha^2}u\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Daha sonra

$$M'(t) \leq -\frac{1}{2}M^2(t) + A_0^2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $G_0 = \sup\limits_{|v| \leq \alpha \max\left(1, \frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1} |h(v)|$ olmak üzere

$$A_0 = \left(\frac{2|\gamma|}{\alpha^3}\max\left(1, \frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1 + \frac{1}{2}\max\left(1, \frac{1}{\alpha^4}\right)\|u_0\|_1^2 + \frac{2}{\alpha^2}G_0\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. Eğer $M(t) > \sqrt{2}A_0$ ise o zaman $M'(t) < 0$ ve $M(t)$ azalandır. Diğer durumda $M(t) \leq \sqrt{2}A_0$ dır. Böylece

$$m(t) \leq M(t) \leq \max\left\{M(0), \sqrt{2}A_0\right\} \qquad t \in [0,T)$$

olduğu görülür. Teorem 4.2.1.1 ve yukarıdaki eşitsizlik ile eğer çözümün eğimi sonlu zamanda aşağıdan sınırlı ise çözümün sonlu zamanda blow-up olmayacağı elde edilir.

Teorem 4.2.1.3. $h \in C^{m+3}(\mathbb{R}), m \geq 3$ olduğu kabul edilsin. $u_0 \in H^r$, $3 \leq r \leq m$ ve $\alpha > 0$ olsun. $G_0 = \sup\limits_{|v| \leq \alpha \max\left(1, \frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1} |h(v)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_0'(x_0) &< -\left[\frac{4|\gamma|}{\alpha^3}\max\left(1, \frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1 + \max\left(1, \frac{1}{\alpha^4}\right)\|u_0\|_1^2 + \frac{4}{\alpha^2}G_0\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{B_0} \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_0 \in \mathbb{R}$ bulunabileceği kabul edilsin. O zaman $g(u) = u$ için (4.2.1) in çözümü sonlu zamanda blow-up olur. Ayrıca maksimal zaman T, $c = -u_0'(x_0)$ olmak üzere

$$T \leq 2c\left(c^2 - B_0\right)^{-1}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Lemma 4.2.4 ile $m(t) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}}[u_x(t,x)] = u_x(t,\xi(t))$ tanımlayalım ve $\xi(t) \in$

$\mathbb{R}$ bu infimumu sağlayan bir nokta olsun. (4.2.7) denkleminden

$$\begin{aligned} m'(t) &= -\frac{1}{2}m^2(t) + \frac{1}{\alpha^2}h(u(t,\xi(t))) - \frac{1}{2\alpha^2}u^2(t,\xi(t)) + \frac{\gamma}{\alpha^4}u(t,\xi(t)) \\ &\quad -\frac{1}{\alpha^2}p * \left(h(u) + \frac{\alpha^2}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\alpha^2}u\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $x = \xi(t)$ için $u_{xx}(t,\xi(t)) = 0$ olduğundan hemen hemen her $(0,T)$ için

$$m'(t) \leq -\frac{1}{2}m^2(t) + K(u)$$

elde edilir. Burada

$$K(u) = \frac{|\gamma|}{\alpha^4}\|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\sup_{|v|\leq\|u\|_{L^\infty}}|h(v)|\right) + \left\|\frac{1}{\alpha^2}p * \left(h(u) + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\alpha^2}u\right)\right\|_{L^\infty}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 \leq \max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)E(u_0) \leq \alpha^2\max\left(1,\frac{1}{\alpha^4}\right)\|u_0\|_1^2$$

olduğundan ve Young eşitsizliğinden

$$\|p * h(u)\|_{L^\infty} \leq \sup_{|v|\leq\alpha\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1}|h(v)|,$$

$$\left\|p * u^2\right\|_{L^\infty} \leq \alpha^2\max\left(1,\frac{1}{\alpha^4}\right)\|u_0\|_1^2$$

ve

$$\|p * u\|_{L^\infty} \leq \alpha\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned} G_0 &= \sup_{|v|\leq\alpha\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1}|h(v)| \\ K_0 &= \frac{2|\gamma|}{\alpha^3}\max\left(1,\frac{1}{\alpha^2}\right)\|u_0\|_1 + \frac{1}{2}\max\left(1,\frac{1}{\alpha^4}\right)\|u_0\|_1^2 + \frac{2}{\alpha^2}G_0 \end{aligned}$$

olmak üzere hemen hemen her $(0,T)$ için

$$m'(t) \leq -\frac{1}{2}m^2(t) + K_0 \qquad (4.2.8)$$

elde edilir.

Lokal Lipschitz $m(t)$ fonksiyonunun sürekliliği $[0,t]$ üzerinde bir integrasyon gerçekleştirmek için olanak sağlar ve

$$m(t) \leq m(0) - \frac{1}{2}\int_0^t m^2(\tau)\,d\tau + K_0 t, \qquad t \in [0,T)$$

elde edilir. Her $t \in (0,T)$ için $m(t) < -c$ olduğunu kabul edelim. Burada $c > \sqrt{2K_0}$, $m(0) < -c$ koşulunu sağlayacak şekilde keyfi olarak belirlenmiştir. Eğer bu doğru değilse, $(0,t_0)$ da $m(t) < -c$ ve $m(t_0) = c$ olacak şekilde bazı $t_0 \in (0,T)$ vardır. O zaman

$$m(t) \leq m(0) - \int_0^t K_0 d\tau + K_0 t = m(0) < -c \qquad t \in [0,t_0]$$

olduğu sonucuna varılır ve $t = t_0$ alındığında bir çelişki ortaya çıkar. (4.2.8) i kullanarak $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{K_0}{c^2}\right)$ olmak üzere hemen hemen her $(0,T)$ için

$$\begin{aligned} m'(t) &\leq -\frac{1}{2}m^2(t) + K_0 \leq -\frac{1}{2}m^2(t) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)c^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}m^2(t) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)m^2(t) \\ &\leq -\varepsilon m^2(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $m(t) < -c$ ve $m(t)$ lokal Lipschitz olduğundan $\frac{1}{m(t)}$ de lokal Lipschitzdir. Bu hemen hemen her $(0,T)$ için

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m(t)}\right) = -\frac{m'(t)}{m^2(t)} \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Bu eşitsizliğin integrali alınırsa

$$-\frac{1}{m(t)} + \frac{1}{m(0)} \leq -\varepsilon t \tag{4.2.9}$$

olur. $m(t) < 0$ olduğundan

$$0 \leq t < \frac{1}{\varepsilon(-m(0))}, \qquad t \in [0,T)$$

olduğu görülür. Bu durumların bir sonucu olarak, maksimal zaman

$$T \leq \frac{1}{\varepsilon(-m(0))} < \infty \qquad \text{her } \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{K_0}{c^2}\right)$$

şeklinde elde edilir. T için yukarıdan bir kestirim elde edilir, yani

$$T \leq \frac{2c^2}{(-m(0))(c^2 - 2K_0)}$$

olur. $c \to -m(0)$ alarak sonuca ulaşılır.

Ayrıca (4.2.9) dan $t \to \frac{1}{\varepsilon(-m(0))}$ iken

$$m(t) \leq \frac{m(0)}{\varepsilon t(m(0)) + 1} \to -\infty$$

olduğu görülür.

4.2.2. Tek Dalga Çözümlerin Kararlılığı

Bu kısımda $p > 0$ olmak üzere $h(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2}u^{p+1}$ ve $g(u) = u^p$ için (4.2.1) in tek dalga çözümlerinin kararlılığını ele alacağız. Doğrusal olmayan fonksiyonların bu özel seçimleri durumunda (4.2.1) aşağıdaki probleme dönüşür:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + \left(2\omega u + \frac{p+2}{2}u^{p+1}\right)_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2\left(\frac{p}{2}u^{p-1}u_x^2 + u^p u_{xx}\right)_x, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.2.10}$$

$h(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2}u^{p+1}$ ve $g(u) = u^p$ iken $F(u)$ fonksiyoneli aşağıdaki formdadır:

$$F(u) = \int_R \left(\omega u^2 + \frac{u^{p+2}}{2} + \frac{\alpha^2 u^p}{2}u_x^2 - \gamma u_x^2\right) dx.$$

τ, $\tau(s)u(.) = u(. - s)$, $s \in \mathbb{R}$, $u \in H^2$ ile tanımlanan H^2 üzerinde birim operatörün tek parametreli bir grubu olacak şekilde $\varphi(. - \eta) = \{\tau(\eta)\varphi(.) : \eta \in \mathbb{R}\}$ orbiti tanımlansın. Bunlar fiziksel olarak " tek dalgalar" ya da "sınır durumlar (bound states)" olarak yorumlanır.

Tanım 4.2.2.1. Her $\varepsilon > 0$ için $\varphi-$orbiti $\delta > 0$ olacak şekilde aşağıdaki özellik ile kararlıdır. Eğer $\|u(0,.) - \varphi(.)\|_{H^2} < \delta$ ve $u(0,.) = u_0$ ile bazı $[0,T)$ aralığında u (4.2.10) nun bir çözümü ise o zaman u, $0 \leq t < \infty$ içinde bir çözüme devam edebilir ve

$$\sup_t \inf_\eta \|u(t,.) - \varphi(. - \eta)\|_{H^2} < \varepsilon$$

olur. Diğer durumda, $\varphi-$orbiti kararsızdır denir (Girillakis ve ark. 1987).

(4.2.10) denkleminde $u(t,x) = \varphi(x - ct) = \varphi(\sigma)$ alınıp ve σ ya göre integral alınarak (integral sabiti sıfır seçilir)

$$c\varphi - c\alpha^2\varphi'' - 2\omega\varphi - \frac{p+2}{2}\varphi^{p+1} - \gamma\varphi'' + \alpha^2\left(\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\varphi'^2 + \varphi^p\varphi''\right) = 0 \qquad (4.2.11)$$

denklemi elde edilir. E ve F fonksiyonellerinden

$$\begin{aligned} E'(\varphi) &= \varphi - \alpha^2\varphi'', \\ F'(\varphi) &= 2\omega\varphi + \frac{p+2}{2}\varphi^{p+1} + \gamma\varphi'' - \alpha^2\left(\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\varphi'^2 + \varphi^p\varphi''\right) \end{aligned}$$

ve (4.2.11) den

$$cE'(\varphi) - F'(\varphi) = 0$$

olduğu görülür. Burada E' ve F' sırasıyla E ve F fonksiyonellerinin Fréchet türevleridir.

(4.2.10) nun tek dalga çözümlerinin kararlılığını çalışmak için H_c operatörüne ve $d(c) = cE(\varphi) - F(\varphi)$ skaler fonksiyonuna ihtiyacımız vardır. H_c operatörü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} H_c &= cE''(\varphi) - F''(\varphi) \\ &= \alpha^2\partial_x\left[\left(\varphi^p - \left(c + \frac{\gamma}{\alpha^2}\right)\right)\partial_x\right] + \alpha^2\left(p\varphi^{p-1}\varphi'' + \frac{p(p-1)}{2}\varphi^{p-2}\varphi'^2\right) \\ &\quad -\frac{(p+2)(p+1)}{2}\varphi^p + c - 2\omega. \end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

Lemma 4.2.2.2. Her $c \in (2\omega, \infty)$ için, $H_c = cE''(\varphi) - F''(\varphi)$ bir tek negatif basit özdeğere sahiptir, sıfır bir basit özdeğerdir ve spektrumunun kalanı sıfırdan uzakta sınırlıdır.

İspat. Herhangi bir $u,\ v \in H^2$ için $\int_{\mathbb{R}} u_{xx}v dx = \int_{\mathbb{R}} uv_{xx} dx$ ve

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^p u_{xx} v dx = \int_{\mathbb{R}} p\varphi^{p-1}\varphi_x v_x u dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi^p v_{xx} u dx - \int_{\mathbb{R}} p\varphi^{p-1}\varphi_x u_x v dx$$

şeklindedir. Bundan dolayı

$$\left\langle \partial_x\left(\varphi^p - \left(c + \frac{\gamma}{\alpha^2}\right)\right)\partial_x u, v\right\rangle = \left\langle \partial_x\left(\varphi^p - \left(c + \frac{\gamma}{\alpha^2}\right)\right)\partial_x v, u\right\rangle$$

olur. (4.2.12) ile H_c operatörü bir özeşlenik (self-adjoint) operatördür ve

$$\begin{aligned} H_c\varphi' &= \alpha^2\left[\left(\varphi^p-\left(c+\frac{\gamma}{\alpha^2}\right)\right)\varphi'''\right]+\alpha^2\left(2p\varphi^{p-1}\varphi'\varphi''+\frac{p\,(p-1)}{2}\varphi^{p-2}\varphi'^3\right) \\ &\quad -\frac{(p+2)\,(p+1)}{2}\varphi^p\varphi'+(c-2\omega)\,\varphi' \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

şeklindedir. (4.2.11) denklemi σ ya göre diferansiyellenirse (4.2.13) denkleminin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu görülür yani $H_c\varphi'=0$ olur. φ fonksiyonunun davranışından φ' nün kesin olarak bir sıfıra sahip olduğunu anlarız. Böylece H_c operatörünün sıfır özdeğeri basittir ve Sturm-Liouville teoremini kullanarak H_c nin kesin bir negatif özdeğere sahip olduğunu elde ederiz. Weyl teoremini kullanarak, H_c nin temel spektrumu $\left[\frac{c-2\omega}{\alpha^2},+\infty\right)$ aralığına aittir. Bu ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.2.2 dışında Teorem 4.2.5 den (5.4.1) probleminin iyi konumluluğu ve Lemma 4.2.6 dan $E(u)=E(u_0)$ ve $F(u)=F(u_0)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\varphi>0$ dır. Tüm bu sonuçlar ışığında Grillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teoremine göre $c>2\omega$ için skaler $d(c)=cE(\varphi)-F(\varphi)$ fonksiyonunun konveksliği ile kararlılık elde edilir.

Şimdi $c>2\omega$ ve $\gamma>0$ olmak üzere

$$I(u)=I(u;\omega,\gamma,c)=\int_{\mathbb{R}}\left[(c-2\omega)\,u^2+\left(\alpha^2c+\gamma\right)u_x^2\right]dx$$

ve

$$K(u)=\int_{\mathbb{R}}\left(u^{p+2}+\alpha^2u^pu_x^2\right)dx$$

fonksiyonellerini tanımlayalım. $\lambda>0$ için H^2 üzerinde aşağıdaki kısıtlı minimizasyon problemini düşünelim:

$$M_\lambda=\left\{\inf I(u):u\in H^2,\ K(u)=\lambda\right\}. \tag{4.2.14}$$

Eğer $\psi\in H^2$, bazı $\lambda>0$ için (4.2.14) probleminin minimumuna ulaşırsa o zaman

$$(2c-4\omega)\,\psi-\left(2\alpha^2c+2\gamma\right)\psi''=\vartheta\left[(p+2)\,\psi^{p+1}-\alpha^2\left(p\psi^{p-1}\psi'^2+2\psi^p\psi''\right)\right]$$

olacak şekilde bir ϑ Langrange çarpanı vardır. Böylece $\varphi=\vartheta^{\frac{1}{p}}\psi$, (4.2.11) tek dalga denkleminin bir çözümüdür. $I(u)$ ve $K(u)$ fonksiyonellerinin homojenliği ile φ

$$m = m(\omega,\gamma,c) = \inf\left\{\frac{I(u)}{K(u)^{\frac{2}{p+2}}} : 0 \neq u \in H^2,\ K(u) > 0\right\}$$

sağlar ve

$$M_\lambda = m\lambda^{\frac{2}{p+2}}$$

olduğu görülür. (4.2.11) tek dalga denklemini φ ile çarpılıp integrali alınırsa $I(\varphi) = \frac{(p+2)}{2}K(\varphi)$ elde edilir.

Eğer bazı $\lambda > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} I(\psi_k) = M_\lambda \text{ ve} \lim_{k\to\infty} K(\psi_k) = \lambda$$

ise ψ_k dizisinin bir minimize edici olduğu söylenir.

Teorem 4.2.2.3. $c > 2\omega$ ve $\gamma > 0$ olsun. Bazı $\lambda > 0$ için $\{\psi_k\}$ bir minimize dizi olsun. $y_j \in \mathbb{R}$ ve $\psi \in H^2$ olmak üzere H^2 de $\psi_{k_j} \to \psi$ olacak şekilde bir ψ_{k_j} alt dizisi vardır. ψ fonksiyonu $K(\psi) = \lambda$ kısıtına bağlı $I(\psi) = M_\lambda$ minimumuna ulaşır.

İspat. Teorem Konsantrasyon-Kompaktlık Lemması (Lions 1984) kullanılarak ispatlanır. İspat $I(u)$ ve $K(u)$ fonksiyonellerinin tanımına göre Teorem 4.1.2.1 in ispatına benzerdir.

Basit bir hesaplama,

$$d(c) = cE(u) - F(u) = \frac{1}{2}(I(u) - K(u)) \tag{4.2.15}$$

eşitliğini verir. $I(\varphi) = \frac{p+2}{2}K(\varphi)$ eşitliği kullanılırsa

$$d(c) = \frac{p}{2(p+2)}I(\varphi) = \frac{p}{4}K(\varphi) = \frac{p}{4}\left(\frac{2}{p+2}m\right)^{\frac{p+2}{p}} \tag{4.2.16}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.2.2.4. $c > 2\omega$ ve $\gamma > 0$ olsun. O zaman $m(\omega,\gamma,c)$, c ye göre monoton artandır.

İspat. φ_{c_1}, φ_{c_2} sırası ile $c = c_1, c = c_2$ için (4.2.11) denkleminin iki çözümü olsun.

Genelliği kaybetmeksizin $c_1 < c_2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
m(\omega,\gamma,c_1) &\leq \frac{I\left(\varphi_{c_2};\omega,\gamma,c_1\right)}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}}\left[(c_1-2\omega)\,\varphi_{c_2}^2+\left(\alpha^2c_1+\gamma\right)\left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}}\left[(c_2-2\omega)\,\varphi_{c_2}^2+\left(\alpha^2c_2+\gamma\right)\left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&\quad + \frac{-c_2\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_{c_2}^2+\alpha^2\left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx+c_1\int_{R}\left[\varphi_{c_2}^2+\alpha^2\left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&= m(\omega,\gamma,c_2)+(c_1-c_2)\frac{\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_{c_2}^2+\alpha^2\left(\varphi_{c_2}'\right)^2\right]dx}{K\left(\varphi_{c_2}\right)^{\frac{2}{p+2}}} \\
&\leq m(\omega,\gamma,c_2)\,.
\end{aligned}$$

Böylece lemmanın sonucu sağlanır.

$\varphi\,(.-\eta)$ orbitalinin

$$U_\varepsilon=\left\{u\in H^2:\inf_{\eta\in\mathbb{R}}\|u-\varphi\,(.-\eta)\|_{H^2}<\varepsilon\right\}$$

şeklinde $\varepsilon-$komşuluğu tanımlansın. (4.2.16) and $d\,(c)$ nin c ye göre monoton artanlığından

$$c\,(u)=d^{-1}\left(\frac{p}{4}K\,(u)\right) \tag{4.2.17}$$

olur.

Lemma 4.2.2.5. Eğer $d''\,(c)>0$ ise o zaman öyle bir $\varepsilon>0$ vardır ki herhangi bir $u\in U_\varepsilon$ için

$$c\,(u)\,[E\,(u)-E\,(\varphi)]-[F\,(u)-F\,(\varphi)]\geq\frac{1}{4}d''\,(c)\,|c\,(u)-c|^2$$

olur.

İspat. Lemma 4.1.3.3 ün ispatına benzerdir.

Teorem 4.2.2.6. $c>2\omega$ ve $\gamma>0$ için $\varphi\,(.-\eta)$ nin bir tek dalga çözümü olduğu varsayılsın, eğer $d''\,(c)>0$ ise o zaman $\varphi\,(.-\eta)$ kararlıdır.

İspat. $\varphi(.-\eta)$ in kararsız olduğu varsayılsın. O zaman

$$\inf_{\eta} \|u_k(0) \ -\varphi(.)\|_{H^2} \to 0$$

bununla birlikte

$$\sup_t \inf_{\eta} \|u_k(t) - \varphi(.-\eta)\|_{H^2} \geq \varepsilon_0$$

sağlayan $u_k(0)$ başlangıç dizisi ve ε_0 vardır. Burada $u_k(t)$, $u_k(0)$ başlangıç verisi ile (4.2.10) nun bir çözümüdür. O zaman Teorem 4.2.5 ile u_k, t de süreklidir ve

$$\inf_{\eta} \|u_k(t_k) - \varphi(.-\eta)\|_{H^2} = \varepsilon_0 \tag{4.2.18}$$

olacak şekilde t_k zamanları vardır.

$t_k \to 0$, $\|u_k(0) - \varphi(.)\|_{H^2} \to 0$ iken ve E ve F (4.2.10) nun değişmezleri olduğundan

$$E(u_k(t_k)) \ = \ E(u_k(0)) \to E(\varphi), \tag{4.2.19}$$

$$F(u_k(t_k)) \ = \ F(u_k(0)) \to F(\varphi) \tag{4.2.20}$$

olur. Lemma 4.2.2.5 ile

$$\begin{aligned} & c(u_k(t_k))\left[E(u_k(t_k)) - E(\varphi)\right] - \left[F(u_k(t_k)) - F(\varphi)\right] \\ \geq \ & \frac{1}{4} d''(c)\left|c(u_k(t_k)) - c\right|^2 \end{aligned}$$

olur. Bu, $u_k(t_k)$ k için düzgün sınırlı olduğundan $k \to \infty$ iken $c(u_k(t_k)) \to c$ olduğunu gösterir. d nin sürekliliği

$$\lim_{k\to\infty} K(u_k(t_k)) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{4}{p} d(c(u_k(t_k)))\right) = \frac{4}{p} d(c) \tag{4.2.21}$$

olduğu anlamına gelir. (4.2.15) i ve $d(c) = cE(\varphi) - F(\varphi)$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I(u_k(t_k)) \ &= \ cE(u_k(t_k)) - F(u_k(t_k)) + \frac{1}{2} K(u_k(t_k)) \\ &= \ d(c) - F(u_k(t_k)) + F(\varphi) - c(E(\varphi) - E(u_k(t_k))) \\ & \quad + \frac{1}{2} K(u_k(t_k)) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) den

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k(t_k)) = \frac{2(p+2)}{p} d(c) \tag{4.2.22}$$

olduğu görülür. (4.2.21) ve (4.2.22) den $u_k(t_k)$ bir minimize dizidir.

Bundan dolayı H^2 içinde φ ye yakınsayan yakınsak bir alt dizi vardır. Bu (4.2.18) ile çelişir.

4.3. Bir Genelleştirilmiş KdV-BBM Tipli Denklemin Tek Dalga Çözümlerinin Varlığı ve Kararlılığı

Bu bölümde (4.3.1) denklemi için çözümlerin lokal varlığı, tek dalga çözümlerinin varlığı ve yokluğu ve tek dalga çözümlerinin kararlılığı elde edilecektir (Dündar ve Polat 2013a).

Tek yönlü dalga yayılımını modelleyen doğrusal olmayan dispersif kısmi diferansiyel denklem olan bir genelleştirilmiş KdV-BBM tipli denklem $f \in C^1$ olmak üzere

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxt} + f(u)_x = 0, \qquad x \in R,\ t > 0 \tag{4.3.1}$$

şeklindedir.

KdV-BBM denkleminin aşağıdaki genel formunu ele alalım:

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x - \gamma u_{xxt} + \delta u_{xxx} = 0, \qquad x \in R,\ t > 0. \tag{4.3.2}$$

Burada $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ pozitif reel sayılardır. (4.3.2) denklemi düz dipli düzgün bir kanal içinde yüzeydeki su dalgalarını modeller (Benjamin ve ark. 1972, Fetecau ve Levy 2005). $\delta = 0$ alınırsa (4.3.2) denklemi BBM denklemine dönüşür (Benjamin ve ark. 1972). Eğer $\gamma = 0$ alınırsa ünlü KdV denklemini elde ederiz (Korteweg ve de Vries 1895).

Bu bölümde (4.3.1) denkleminin tek dalga çözümlerinin varlığı, yokluğu ve kararlılığı çalışılacaktır. (4.3.1) denklemi için bir tek dalga çözüm $c > 1$ dalga yayılım hızı olmak üzere $u(t,x) = \varphi(x - ct)$ formundaki çözümlerdir. (4.3.1) denkleminde $u(t,x) = \varphi(x - ct)$ alınır ve bir kere integrallenirse

$$(c-1)\varphi - (c+1)\varphi'' = f(\varphi) \tag{4.3.3}$$

tek dalga denklemi elde edilir.

(4.3.1) denklemi aşağıdaki gibi Hamilton formunda yazılabilir:

$$u_t + JE'(u) = 0.$$

Burada $J = (I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x$ bir skew-simetrik operatör ve $F' = f$ ve $F(0) = 0$ olmak üzere

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u_x^2 + F(u) \right) dx$$

şeklindedir. $E(u)$ ve

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx$$

t zamanından bağımsızdırlar, yani korunurlar. Açıktır ki $E(u)$ ve $Q(u)$, $u \in H^1$ olduğu sürece tanımlıdırlar ve $Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2$ olduğu görülür.

$\varphi(x - ct)$, (4.3.3) tek dalga denkleminin bir çözümü olsun. E ve Q fonksiyonellerinin terimlerini kullanarak ve (4.3.3) denkleminden

$$cQ'(\varphi) - E'(\varphi) = 0$$

olduğu görülür. Burada E' ve Q' sırası ile E ve Q fonksiyonellerinin Fréchet türevleridir.

Bu bölümde ilk olarak (4.3.1) için bir başlangıç değer probleminin lokal varlık teoremi verilecektir. Daha sonra $p \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere doğrusal olmayan fonksiyonun bir özel hali $f(u) = u^p$ için sırası ile tek dalga çözümlerinin varlığı, yokluğu ve kararlılığı ispatlanacaktır.

4.3.1. Lokal Varlık

Bu kısımda (4.3.1) için bir başlangıç değer probleminin lokal varlığı çalışılacaktır.

$$A = -\frac{\partial_x + \partial_x^3}{I - \partial_x^2} \text{ ve } N(u) = -\frac{\partial_x}{I - \partial_x^2} f(u)$$

olmak üzere (4.3.1)

$$u_t = Au + N(u) \tag{4.3.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 4.3.1.1. m bir tam sayı, $f \in C^m(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ ve $1 \leq s \leq m$ olsun. O zaman

$$\|\partial_x f(u)\|_s \leq \widetilde{f}\left(\|u\|_{s-1} + \|u\|_1\right)\|u\|_s, \qquad \forall u \in H^s$$

olur. Burada $\widetilde{f}$ sadece f ye bağlı sürekli bir fonksiyondur (Liu 1996).

Lemma 4.3.1.2. Eğer $f, g \in H^s$, $s > \frac{1}{2}$ ise, o zaman

$$\|fg\|_{H^s} \leq C\left(\|f\|_\infty \|g\|_{H^s} + \|g\|_\infty \|f\|_{H^s}\right)$$

olur (Kato ve Ponce 1988).

Teorem 4.3.1.3. $u_0 \in H^1$ ve $f(0) = 0$ ile $f \in C^1$olsun. O zaman öyle bir $T > 0$ vardır ki $u(0) = u_0$ başlangıç verisiyle (4.3.4) ün $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$ eşitliklerini sağlayan $u \in C([0,T); H^1)$ şeklinde tek bir çözümü vardır. Ayrıca varlık aralığı bir $[0, T_0)$ maxsimal aralığına genişletilebilir, öyleki $T_0 = +\infty$, ya da $T_0 < +\infty$ ve

$$\lim_{t \to T_0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$$

olur.

İspat. Lokal varlık teoremi daralma dönüşümü prensibi ile ispatlanacaktır.
$M \geq 2\|u_0\|_{H^1}$ ve $T > 0$ olmak üzere

$$X = \left\{ u \in C\left([0,T); H^1\right) \mid \sup_{0 \leq t < T} \|u\|_{H^1} \leq M \right\}$$

şeklinde bir metrik uzay tanımlansın. X uzayı $\|u\|_X = \sup\limits_{0 \leq t < T} \|u\|_{H^1}$ normu ile tanımlansın. X bir tam metrik uzaydır.

$$Su(t) = e^{At} u_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} N(u)\, d\tau \qquad \forall u \in X$$

şeklindeki S dönüşümünü düşünelim. S dönüşümününün X üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. A bir skew-adjoint sınırlı lineer operatör: $H^1 \to H^1$ ve $\left\|e^{At}u_0\right\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$ ile bir güçlü sürekli e^{At} birim grubu üretir. Lemma 4.3.1.1 ile $u \in X$ için aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|Su(t)\|_{H^1} &\leq \|u_0\|_{H^1} + \int_0^t \|N(u)\|_{H^1}\, d\tau \\ &\leq \frac{1}{2}M + \int_0^T \|f(u(\tau))\|_{H^1}\, d\tau \\ &\leq \frac{1}{2}M + \widetilde{f}(M)\, T. \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}M + \widetilde{f}(M)\, T \leq M$ elde etmek için T yeterince küçük seçilirse $\|Su(t)\|_{H^1} \leq M$ olur. Böylece $S : X \to X$ olduğu elde edilir.

Şimdi S dönüşümünün kesin büzülme olduğu gösterilecektir. $u, w \in X$ ve $t \in [0,T]$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\|Su(t)-Sw(t)\|_{H^1} &\le \int_0^t \|N(u)-N(w)\|_{H^1}\,d\tau \\
&\le \int_0^t \left(\|f(u)-f(w)\|_2\right)d\tau \\
&\le \int_0^t \widetilde{f}\left(\|u\|_\infty+\|w\|_\infty\right)\|u-w\|_2\,d\tau \\
&\le \widetilde{f}(M)\,\|u-w\|_X\,T
\end{aligned}$$

olur. $\widetilde{f}(M)\,T \le \frac{1}{2}$ elde etmek için T yeterince küçük seçilirse, $S: X \to X$ kesinlikle büzülme olur. Böylece S dönüşümünün X üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu sonucuna varılır. Bundan dolayı, (4.3.4) ün $u(0)=u_0$ başlangıç verisi ile bir tek u çözümü vardır.

(4.3.4) ün u çözümünün ayrıca $C([0,T);H^1)$ de tek olduğunu gösterelim. Bazı $0<T<\infty$ için $u_1,u_2 \in C([0,T);H^1)$ olacak şekilde u_1 ve u_2 (4.3.4) ün iki çözümü olsun. $u=u_1-u_2$ olsun. Herhangi bir $T'<T$ için (4.3.1) den

$$\left(1-\partial_x^2\right)u_t+u_x+u_{xxx}=-\partial_x\left[f(u_1)-f(u_2)\right]$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklemi u ile çarpıp integralini alırsak $i=1,2$ ve $0\le t\le T'<T$ için

$$|u_i(t)|_\infty \le \|u_i(t)\|_{H^1} \le C_1(T')$$

olacak şekilde T' ne bağlı bir $C_1(T')$ sabiti var olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|_2^2+\|\partial_x u\|_2^2\right) &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(f(u_1)-f(u_2)\right)u\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(f(u_1)-f(u_2)\right)u_x\,dx \\
&\le C_1(T')\,\|u\|_2\,\|u_x\|_2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliğinden

$$\left(\|u\|_2^2+\|\partial_x u\|_2^2\right) \le C_1(T')\int_0^t \left[\|u\|_2^2+\|\partial_x u\|_2^2\right]d\tau$$

olduğu görülür. Gronwall eşitsizliği ile yukarıdaki eşitsizlikten $0\le t\le T'$ için$\|u\|_2^2+\|\partial_x u\|_2^2=0$ olduğu görülür. Böylece $0\le t\le T'$ için $u=0$ olur.

4.3.2. Tek Dalga Çözümlerin Varlığı ve Yokluğu

Bu kısımda (4.3.1) denklemi için doğrusal olmayan fonksiyon, $p \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere $f(u) = u^p$ alınıp tek dalga çözümlerinin varlığı ve yokluğu çalışılacaktır.

(4.3.3) denkleminin bir çözümü olduğunu göstermek için varyasyonel metodlar kullanacağız. Yani kısıtlı bir varyasyonel problemin minimumunun varlığını göstereceğiz.

$$I_c(u) = \int_{\mathbb{R}} \left((c+1)\, u_x^2 + (c-1)\, u^2\right) dx$$

ve

$$K(u) = \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx$$

fonksiyonellerini tanımlayalım. $\lambda > 0$ için H^1 üzerinde aşağıdaki kısıtlı varyasyonel problemi ele alalım:

$$M_\lambda = \inf\left\{I_c(u) : u \in H^1,\ K(u) = \lambda\right\}. \tag{4.3.5}$$

Bazı $\lambda > 0$ için eğer $\psi \in H^1$, (4.3.5) problemi için bir minimum ise

$$(c-1)\,\psi - (c+1)\,\psi'' = \vartheta \psi^p$$

olacak şekilde bir ϑ Langrange çarpanı vardır. Böylece $\varphi = \vartheta^{\frac{1}{p-1}}\psi$, (4.3.3) tek dalga denkleminin bir çözümüdür. Böyle çözümler taban durum çözümler (ground states) olarak adlandırılır ve tüm taban durum çözümlerin kümesi G_c ile gösterilsin. I_c ve K fonksiyonellerinin homojenliği ile taban durumlar

$$m(c) = \inf\left\{\frac{I_c(u)}{K(u)^{\frac{2}{p+1}}} : 0 \neq u \in H^1,\ K(u) > 0\right\}$$

minimuma ulaşır ve

$$M_\lambda = \lambda^{\frac{2}{p+1}} m(c)$$

olduğu görülür.

Herhangi bir $\lambda > 0$ için $M_\lambda > 0$ olduğu açıktır. Her $c > 1$ için

$$(c-1)\,\|u\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (c+1)\, u_x^2 + (c-1)\, u^2 dx \leq (c+1)\,\|u\|_{H^1}^2$$

olur. Sobolev gömülme teoreminden $2 \leq p \leq \infty$ için $\|u\|_p \leq C\,\|u\|_{H^s}$ olur. Böylece

$$\lambda = K\left(u\right) = \int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx = \|u\|_{p+1}^{p+1} \leq C\,\|u\|_{H^1}^{p+1}$$

elde edilir ve herhangi bir $\lambda > 0$ için $0 < (c-1)\left(\frac{\lambda}{C}\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq M_\lambda$ olur.

(4.3.3) tek dalga denklemini φ ile çarpılıp daha sonra integrali alınırsa $I\left(\varphi\right) = K\left(\varphi\right)$ olduğu görülür. Böylece taban durumların kümesini

$$G_c = \left\{\varphi \in H^1 : I_c\left(\varphi\right) = K\left(\varphi\right) = \left(m\left(c\right)\right)^{\frac{p+1}{p-1}} = \lambda\right\}$$

şeklinde karakterize edilebilir. Buradaki esas amaç G_c kümesinin boş olmadığını göstermektir. Öyle ki (4.3.5) problemini en küçük yapan dizilerin G_c kümesinin bir elemanına yakınsadığını göstereceğiz.

Eğer bazı $\lambda > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} I_c\left(\psi_k\right) = M_\lambda \text{ ve} \lim_{k\to\infty} K\left(\psi_k\right) = \lambda$$

ise ψ_k bir minimize dizidir.

Teorem 4.3.2.1. Bazı $\lambda > 0$ için $\{\psi_k\}$ bir minimize dizi olsun. $c > 1$ ise o zaman skaler $y_j \in \mathbb{R}$ ve $\psi \in H^1$ olmak üzere H^1 de $\psi_{k_j} \to \psi$ olacak şekilde bir ψ_{k_j} alt dizisi vardır. ψ fonksiyonu $K\left(\psi\right) = \lambda$ kısıtına bağlı $I_c\left(\psi\right) = M_\lambda$ minimumuna ulaşır.

İspat. Teoremin ispatı Konsantrasyon-Kompaktlık Lemması (Lions 1984) kullanılarak elde edilir. İspat $I_c\left(u\right)$ ve $K\left(u\right)$ fonksiyonellerinin tanımına göre Teorem 4.1.2.1 in ispatına benzerdir.

Not 1. $c > 1$ ve $p \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere $f\left(\varphi\right) = \varphi^p$ ile $\varphi \in H^1$ (4.3.3) ün bir zayıf çözümü olsun. O zaman $\varphi \in H^\infty$ olur. Gerçekten de Sobolev eşitsizliği ile $\varphi \in L^\infty$ dur. Böylece $\left(\varphi^p\right)_x \in L^2$ olur.

$$\left(\left(c-1\right)\partial_x - \left(c+1\right)\partial_x^3\right)\varphi = \left(\varphi^p\right)_x$$

olduğundan $\varphi \in H^3$ olur. Bu işlemin tekrarlanması ile $\varphi \in H^\infty$ sağlanır.

Teorem 4.3.2.2. Eğer $-1 \leq c \leq 1$ ise (4.3.3) denkleminin $\varphi \in H^1$ şeklinde herhangi bir sıfırdan farklı çözümü yoktur.

İspat. Bu teorem Pohozaev tipi özdeşlikler kullanılarak ispatlanacaktır. (4.3.3) tek dalga denklemini sırası ile φ, $x\varphi_x$ çarpıp daha sonra $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilirse

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(c-1)(\varphi)^2 + (c+1)(\varphi')^2 - \varphi^{p+1} \right] dx = 0, \tag{4.3.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{(1-c)}{2}(\varphi)^2 + \frac{(c+1)}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{p+1}\varphi^{p+1} \right] dx = 0 \tag{4.3.7}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.3.6) ve (4.3.7) nin kombinasyonundan

$$\frac{(p-1)(1-c)}{2(p+1)} \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi^2\right) dx + \frac{(p+3)(c+1)}{2(p+1)} \int_{\mathbb{R}} (\varphi')^2 dx = 0$$

elde edilir. Eğer $-1 \leq c \leq 1$ ise bu eşitliğin sol tarafındaki terimler pozitif olacaktır. Bu bir çelişkidir.

4.3.3. Tek Dalga Çözümlerin Kararlılığı

Tanım 4.3.3.1. Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\varphi \in S} \|u_0 - \varphi\|_{H^1} < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, $S \subset H^1$ kümesi (4.3.1) deklemine göre kararlı olarak adlandırılır. Bu durumda (4.3.1) in $u(t)$ çözümü her $t > 0$ için $u(0) = u_0$ başlangıç verisi ile vardır ve

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \inf_{\varphi \in S} \|u(t) - \varphi\|_{H^1} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. Diğer durumda S, (4.3.1) e göre kararsızdır.

$c > 1$ dalga hızı ile $\varphi \in G_c$ için

$$d(c) = cQ(\varphi) - E(\varphi)$$

şeklinde d fonksiyonu tanımlansın. φ

$$cQ'(\varphi) - E'(\varphi) = 0$$

eşitliğini sağlar. $d(c)$ fonksiyonunun konveksliği ile taban durumların kümesinin kararlılığı gösterilecektir.

Basit bir hesaplama ile

$$d(c) = cQ(\varphi) - E(\varphi) = \frac{I_c(\varphi)}{2} - \frac{1}{p+1}K(\varphi), \tag{4.3.8}$$

$$d(c) = \frac{p-1}{2(p+1)}K(\varphi) = \frac{p-1}{2(p+1)}I_c(\varphi) = \frac{p-1}{2(p+1)}\left((m(c))^{\frac{p+1}{p-1}}\right) \tag{4.3.9}$$

eşitlikleri elde edilir. Bundan dolayı d iyi tanımlıdır ve $m(c)$ fonksiyonu incelenerek onun özellikleri incelenir.

Lemma 4.3.3.2. $c > 1$ olsun, o zaman $m(c)$, c ye göre kesin artandır.

İspat. φ_{c_1}, φ_{c_2} sırası ile $c = c_1, c = c_2$ için (4.3.3) denkleminin iki çözümü olsun. Genelliği kaybetmeksizin $c_1 < c_2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
m(c_1) &\leq \frac{I_c(\varphi_{c_2}; c_1)}{K(\varphi_{c_2})^{\frac{2}{p+1}}} = \frac{\int_R \left[(c_1+1)\left(\varphi'_{c_2}\right)^2 + (c_1-1)\varphi_{c_2}^2\right]dx}{K(\varphi_{c_2})^{\frac{2}{p+1}}} \\
&= \frac{\int_R \left[(c_2+1)\left(\varphi'_{c_2}\right)^2 + (c_2-1)\varphi_{c_2}^2\right]dx}{K(\varphi_{c_2})^{\frac{2}{p+1}}} \\
&\quad + \frac{-c_2\int_R \left[\left(\varphi'_{c_2}\right)^2 + \varphi_{c_2}^2\right]dx + c_1\int_R \left[\left(\varphi'_{c_2}\right)^2 + \varphi_{c_2}^2\right]dx}{K(\varphi_{c_2})^{\frac{2}{p+1}}} \\
&= m(c_2) + (c_1 - c_2)\frac{\int_R \left[\left(\varphi'_{c_2}\right)^2 + \varphi_{c_2}^2\right]dx}{K(\varphi_{c_2})^{\frac{2}{p+1}}} \\
&< m(c_2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.3.9) dan d fonksiyonu da kesin artandır.

$$U_{c,\varepsilon} = \left\{u \in H^1 : \inf_{\varphi \in G_c}\{\|u-\varphi\|_{H^1}\} < \varepsilon\right\}$$

G_c taban durumların kümesinin $\varepsilon-$komşuluğunu belirtsin. (4.3.9) ve $d(c)$ fonksiyonunun c ye göre artan olması ile

$$c(u) = d^{-1}\left(\frac{p-1}{2(p+1)}K(u)\right) \tag{4.3.10}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.3.3.3. Eğer $d''(c) > 0$ ise o zaman $u \in U_{c,\varepsilon}$ ve $\varphi \in G_c$ için öyle bir

$\varepsilon > 0$ vardır ki

$$c(u)[Q(u) - Q(\varphi)] - [E(u) - E(\varphi)] \geq \frac{1}{4} d''(c) |c(u) - c|^2$$

olur.

Proof. $d'(c) = E(\varphi)$ ve Taylor formülünü kullanarak c nin yakınında $\widetilde{c}$ için

$$d(\widetilde{c}) = d(c) + Q(\varphi)(\widetilde{c} - c) + \frac{1}{2} d''(c)(\widetilde{c} - c)^2 + o\left(|\widetilde{c} - c|^2\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $c(u)$ nun sürekliliğini kullanarak ve $\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilerek $u \in U_{c,\varepsilon}$ için

$$\begin{aligned} d(c(u)) &\geq d(c) + Q(\varphi)(c(u) - c) + \frac{1}{4} d''(c)(c(u) - c)^2 \\ &= c(u) Q(\varphi) - E(\varphi) + \frac{1}{4} d''(c)(c(u) - c)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.9) ve (4.3.10) eşitliklerinden $K\left(\varphi_{c(u)}\right) = \frac{2(p+1)}{p-1} d(c(u)) = K(u)$ olduğu görülür ve $\varphi_{c(u)}$, $K(u) = K\left(\varphi_{c(u)}\right)$ kısıtına bağlı $I_{c(u)}$ fonksiyonelini minimize ettiğinden dolayı

$$\begin{aligned} c(u) Q(u) - E(u) &= \frac{I_{c(u)}(u)}{2} - \frac{1}{p+1} K(u) \\ &\geq \frac{I_{c(u)}\left(\varphi_{c(u)}\right)}{2} - \frac{1}{p+1} K\left(\varphi_{c(u)}\right) = d(c(u)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$c(u) Q(u) - E(u) \geq c(u) Q(\varphi) - E(\varphi) + \frac{1}{4} d''(c)(c(u) - c)^2$$

elde edilir.

Theorem 4.3.3.4. $c > 1$ olsun. Eğer $d''(c) > 0$ ise o zaman taban durumların kümesi G_c kararlıdır.

İspat. Farzedelim ki G_c kararsız olsun ve

$$\inf_{\varphi \in G_c} \|v_k - \varphi\|_{H^1} < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde $u_k(0) = v_k$ başlangıç verisininin bir dizisi vardır. $u_k(t)$, v_k başlangıç verisi ile (4.3.1) in bir çözümü olsun. Teorem (4.3.1.3) ile u_k, t de süreklidir ve bazı

$\delta > 0$ için

$$\inf_{\varphi \in G_c} \|u_k(t_k) - \varphi\|_{H^1} = \delta \tag{4.3.11}$$

olacak şekilde t_k zamanları vardır.

E ve Q fonksiyonelleri (4.3.1) in değişmezleri ve G_c sınırlı olduğundan, $k \to \infty$ iken

$$|E(u_k(t_k)) - E(\varphi_k)| = |E(u_k(0)) - E(\varphi_k)| \to 0, \tag{4.3.12}$$

$$|Q(u_k(t_k)) - Q(\varphi_k)| = |Q(u_k(0)) - Q(\varphi_k)| \to 0 \tag{4.3.13}$$

olacak şekilde $\varphi_k \in G_c$ bulunabilir.

Lemma 4.3.3.3 kullanılarak, yeteri kadar küçük δ için

$$\begin{aligned} & c(u_k(t_k))\left[Q(u_k(t_k)) - Q(\varphi_k)\right] - \left[E(u_k(t_k)) - E(\varphi_k)\right] \\ \geq\ & \frac{1}{4} d''(c)\left|c(u_k(t_k)) - c\right|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $k \to \infty$ iken (4.3.12) ve (4.3.13) ile $c(u_k(t_k)) \to c$ olur.

d nin sürekliliği

$$\lim_{k\to\infty} K(u_k(t_k)) = \lim_{k\to\infty} \frac{2(p+1)}{p-1} d(c(u_k(t_k))) = \frac{2(p+1)}{p-1} d(c) \tag{4.3.14}$$

olduğunu vurgular. (4.3.8), (4.3.12). (4.3.13) ve $d(c) = cQ(\varphi_k) - E(\varphi_k)$ kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} I_c(u_k(t_k)) = \frac{2(p+1)}{(p-1)} d(c) \tag{4.3.15}$$

olduğu görülür.

(4.3.14) ve (4.3.15) den $u_k(t_k)$, I_c ve K için bir minimize edici dizidir ve Teorem 4.3.2.1 ile H^1 de bazı $\varphi_j \in G_c$ ye yakınsayan yani

$$\lim_{j\to\infty} \left\|u_{k_j}\left(t_{k_j}\right) - \varphi_j\right\|_{H^1} = 0$$

olacak şekilde $u_{k_j}\left(t_{k_j}\right)$ alt dizisine sahiptir. Bu (4.3.11) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Not 2. $p \geq 2$ ve $c > 1$ için (4.3.3) denkleminin φ çözümü

$$\varphi(\eta) = (c-1)^{1/p-1}\, w\left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\eta\right)$$

şeklinde yazılabilir, burada w

$$w - w'' = w^p$$

denkleminin çözümüdür. w çözümünün c den bağımsız olduğuna dikkat edelim. Ayrıca

$$K(w) = I(w) = \int_R \left(w^2 + w_x^2\right) dx > 0$$

olacak şekilde

$$d(c) = \frac{p-1}{2(p+1)} (c-1)^{p+1/p-1} \sqrt{\frac{c+1}{c-1}} K(w)$$

şeklindedir. Basit hesaplamalar ile

$$d''(c) = \frac{1}{2(p^2-1)} K(w) (c-1)^{7-3p/2(p-1)} (c+1)^{-3/2} q(c)$$

olur ve burada $q(c) = (2p+2)c^2 + 8c - p^2 + 5$ şeklindedir. Açıktır ki

$$\frac{1}{2(p^2-1)} K(w) (c-1)^{7-3p/2(p-1)} (c+1)^{-3/2}$$

şeklindeki ifade pozitiftir. Bundan dolayı $d''(c)$ nin işareti sadece ikinci dereceden bir polinomal denklem olan $q(c)$ nin işaretine bağlıdır. Böylece tek dalgalar $p \leq 5$ iken her zaman kararlıdır. $p > 5$ iken ise dalga hızının

$$c_p^+ = \frac{-4 + \sqrt{6 + 2(p^3 + p^2 - 5p)}}{2(p+1)} > 1$$

şeklinde kritik bir değeri vardır öyle ki $c > c_p^+$ için tek dalgalar kararlıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Araştırma Bulguları bölümünde üç farklı denklem ele alınmış ve bu denklemlerin çözümlerinin lokal varlığı, tek dalga çözümleri ve tek dalga çözümlerinin varlığı ayrıca bir blow-up oluşumu olan dalga kırılması çalışılmıştır.

İlk olarak ele alınan

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + (g(u))_x + \gamma (u - \alpha^2 u_{xx})_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{h'(u)}{2} u_x^2 + h(u) u_{xx} \right)_x, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin lokal iyi konumluluğu Kato Teoremi kullanılarak ispatlanmıştır. Daha sonra doğrusal olmayan fonksiyonların $g(u) = 2\omega u + \frac{p+2}{2} u^{p+1}$, $h(u) = u^p$ durumları için ve $\alpha = \gamma = 1$ alınarak denklemin tek dalga çözümlerinin varlığı Konsantrasyon-Kompaktlık Lemması (Lions 1984) yardımı ile çalışılmıştır. Son olarak elde edilen tek dalga çözümlerinin kararlılığı varyasyonel metotlar kullanılarak gösterilmiştir. Böylece tek dalgaların kümesinin kararlı olduğu gösterilmiştir.

İkinci olarak

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + h(u)_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 \left(\frac{g'(u)}{2} u_x^2 + g(u) u_{xx} \right)_x, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

problemi için $g(u) = u$ alınarak dalga kırılması formundaki blow-up oluşumu çalışılmıştır. Daha sonra Grillakis ve ark. (1987) nın yörüngesel kararlılık teorisi kullanılarak tek dalga çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir.

Son olarak da

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxt} + f(u)_x = 0, \qquad x \in R, \ t > 0$$

denklemi için bir başlangıç değer probleminin lokal varlığı daralma dönüşümü prensibi ile ispatlanmıştır. Ardından tek dalga çözümlerinin varlığı ve kararlılığı çalışılmıştır.

Ele alınan denklemlerin doğrusal olmayan fonksiyonlarının farklı durumları için de benzer çalışmalar yapılabilir. Ele alınan denklemler sınırlı bölgede çalışılabilir. Bu çalışma da yapılanlar, denklemlerin n boyutlu durumlarına da genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Albert, J. 1999. Concentration compactness and the stability of solitary-wave solutions to non-local equations. in: J. Goldstein, et al. (Eds.), Applied Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI., 1-29.

Angulo, J. 2006. Stability of solitary wave solutions for equations of short and long dispersive waves. Electron. J. Differential Equations. 72: 1-18.

Benjamin, B., Bona, J. L., Mahony, J.J. 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Royal Soc. London Ser. A, 272: 47-78.

Bhattarai, S. 2012. Solitary waves and a stability analysis of an equation of short and long dispersive waves. Nonlinear Analysis 75, 6506-6519.

Bona, J.L., Pritchard, W.G., Scott, L.R. 1980. Solitary wave interaction. Phys. Fluids, 23: 438-441.

Bourgain J. 1993. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. Geom. Funct. Anal. 3, 209-262.

Boussinesq, J. V. 1872. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide continu dans 21 ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pures Appl. 1755-108.

Brezis, H. 2011. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Camassa, R., Holm, D. 1993. An integrable shallow water equation with peaked solitons. Phys. Rev. Lett. 71, 1661-1664.

Camassa, R., Holm, D., Hyman, J. 1994. A new integrable shallow water equation. Adv. Appl. Mech. 31, 1-33.

Cazenave, T., Lions, P.L. 1982. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. 85, 549-561.

Chen, W. 2011. On solutions to the Degasperis-Procesi equation. J. Math. Anal. Appl., 379, 351-359.

Constantin, A. 1997. On the Cauchy problem for the periodic Camassa Holm equation. J. Differential Equations 141, 218-235.

Constantin, A., Escher, J. 1998a.Global existence and blow-up for a shallow water equation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 26 (4), 303-328.

Constantin, A., Escher, J. 1998b. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equation. Acta Math. 181, 229-243.

Constantin, A., Strauss, W. 2000a. Stability of peakons. Comm. Pure Appl. Math., 53, 603-610.

Constantin, A., Strauss, W.A. 2000b. Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods. Physics Letters A 270, 140-148.

Constantin, A., Molinet, L. 2002. The initial value problem for a generalized Boussinesq equation. Differential and Integral equations,15, 1061-1072.

Constantin, A., Strauss, W. 2002. Stability of the Camassa-Holm solitons. J. Nonlinear. Sci., 12, 415-422.

Craik, A.D.D. 2004. The origins of water wave theory. Annu. Rev. Fluid Mech. 36 1-28.

Craik, A.D.D. 2005. George Gabriel Stokes and water wave theory. Annu. Rev. Fluid. Mech., 37: 23-42.

Debnath, L. 1994. Nonlinear Water Waves. Academic Press İnc.

Degasperis, A., Procesi, M. 1999. Asymptotic integrability, in: A.Degasperis, G. Gaeta (Eds.), Symmetry and Perturbation Theory, World Scientific, 23-37.

Degasperis, A., Holm, D.D., Hone, A.N.W. 2002. A new integrable equation with peakon solutions. Theor. Math. Phys. 133,1461-1472.

Dodd, R.K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H.C. 1984. Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic Press, New York.

Dullin, H.R., Gottwald, G.A.,Holm, D.D. 2001. An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion. Phys. Rev. Lett. 87,1945-1948.

Duruk, N., Erkip, A., Erbay, H. A. 2009. A higher-order Boussinesq equation in locally non-linear theory of one-dimensional non-local elasticity. IMA Journal of Applied Mathematics, Vol: 74, No:1, 97-106.

Dündar, N., Polat, N. 2013a. Existence and stability of solitary-wave solutions of a generalized KdV-BBM type equation. J. Adv. Res. Appl. Math., 5(4): 21-30.

Dündar, N., Polat, N. 2013b. Blow-up phenomena and satbility of solitary waves for a generalized Dullin-Gottwald-Holm equation. Boundary Value Problems.

Dündar, N., Polat, N. 2014. Stability of solitary waves for a generalized higher-order shallow water equation. FILOMAT, (Baskıda).

Escher, J., Liu Y., Yin, Z. 2006. Global weak solutions and blow-up structure for the Degasperis-Procesi equation. J. Funct. Anal. 241, 457-485.

Evans, L. C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Fermi, E., J. R. Pasta and S. Ulam. 1955. Studies of nonlinear problems. I. Report LA-1940. Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory.

Fetecau, R., Levy, D. 2005. Aproximate model equations for water waves. Comm. Math. Sci., 3:159-170.

Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W. 1987. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I. Journal of Functional Analysis, 74:160-197.

Hakkaev, S. Kirchev, K .2005. Local well-posedness and orbital stability of solitary wave solutions for the generalized Camassa–Holm equation. Communications in Partial Differential Equation, 30, 761-781.

Hakkaev, S. 2006. Stability of peakons for an integrable shallow water equation. Phys. Lett. A 354, 137-144.

Himonas, A.A., Misiolek, G. 2000a. Well-posedness of the Cauchy problem for a shallow water equation on the circle. Journal of Differential Equations, Vol:161, No: 2, 479-495.

Himonas, A.A., Misiolek, G. 2000b. The initial value problem for a fifth order shallow water. in: Analysis, Geometry, Number Theory: The Mathematics of Leon Ehrenpreis, in: Contemp. Math., Vol: 251, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 309-320.

Johnson, R.S. 2002. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. J. Fluid Mech. 457, 63-82.

Kato, T. 1975. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. in: Spectral Theory and Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 448, 25-70.

Kato, T. 1979. On the Korteweg-de Vries equation. Mathematica 28, 89-99.

Kato, T. 1983. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation. in: Studies in Applied Mathematics, in: Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol.8, 93–128, Academic Press, New York.

Kato, T., Ponce, G. 1988. Commutator estimation and the Euler and Navier Stokes Equation. Comm. Pure Appl. Math., 41,891-907.

Korteweg, D. J., de Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil.Mag.,39(5): 422-443.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India.

Levandosky, S. 1999. A stability analysis of fifth-order water wave models. Physica D 125, 222-240.

Lions., P. L. 1984. The concentration compactness principle in the calculus of variations, The locally compact case, Part 1 and Part 2, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéarie, 1: 109-145; 223-283.

Liu, Y. 1996. Existence and blow up of a nonlinear Pochhammer–Chree equation. Indiana Univ. Math. J., 45, 797-816.

Liu, X., Yin, Z. 2011. Local well-posedness and stability of peakons for a generalized Dullin–Gottwald–Holm equation. Nonlinear Analysis, 74, 2497-2507.

Liu, X., Yin, Z. 2013. Local well-posedness and stability of solitary waves for the two-component Dullin–Gottwald–Holm system. Nonlinear Analysis, 74, 2497-2507.

Molinet, L. 2004. On Well-Posedness Results for Camassa-Holm Equation on the Line: A Survey. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol: 11, No: 4 , 521-533.

Naumkin, P., Shishmarev, I. 1994. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. Transl. Math. Monographs, 133. Amer. Math. Sou., Providence, RI.

Pava, J., P. 2006. Stability of solitary wave solutions for equations of short and long dispersive waves. Electron. J. Diff. Equations, 72: 1-18.

Pazy, A. 1983. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Spring Verlag, New York.

Polat, N., Ertaş, A. 2009. Existence and Blow up of Solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl., 349 10-20.

Russell, J. S. 1844. Report on Waves. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science. September 311-390 London.

Seliger, R. 1968. A note on the breaking of waves. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 303., 493-496.

Strauss, W. 1989. Nonlinear Wave Equations. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 73. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Stokes, G.G. 1847. On the theory of oscillatory waves. Trans. Camb. Phil. Soc., 8: 441-455.

Taşkesen H. 2012. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışı. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Tian, L., Gui, G., Liu, Y. 2005. On the Cauchy problem and the scattering problem for the Dullin–Gottwald–Holm equation. Comm. Math. Phys., 257, 667-701.

Tian, L., Fang, G., Gui, G. 2006. Well-posedness and blow-up for an integrable shallow water equation with strong dispersive term. International Journal of Nonlinear Science, Vol:1, No.1, 3-13.

Tian, L., Zhang, P., Xia, Limeng. 2011. Global existence for the higher-order Camassa-Holm shallow water equation. Nonlinear Analysis, 74. 2468-2474.

Wang, S., Chen, G. 2006. Cauchy problem of the generalized double dispersion equation. Nonlinear Analysis, 64, 159-173.

Whitham, G. B. 1980. Linear and Nonlinear Waves. J. Wiley & Sons, New York.

Wu, X., Yin, Z. 2010. Well-posedness and blow-up phenomena for the generalized Degasperis-Procesi equation. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. Vol: 73, No: 1, 136-146.

Yin, Z. 2004. On the blow-up scenario for the generalized Camassa-Holm equation. Comm. Partial Differential Equations, 29, 867-877.

Yin, Z. 2005. Global existence and blow-up for a periodic integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 12, 87-101.

Yin, Z. 2007. On the Cauchy problem for the generalized Camassa-Holm equation. Nonlinear Analysis, Vol:66, 460-471.

Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. 1965. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. J.Phys. Rev. Lett. 15 (6) 240-243.

Zhang, P., Liu, Y. 2010. Stability of Solitary Waves and Wave-Breaking Phenomena for the Two-Component CH System. International Mathematics Research Notices, Vol:2010, No. 11, 1981-2021.

Zhang, S., Yin, Z. 2008. On the blow-up phenomena of the periodic Dullin Gottwald Holm equation. J. Math. Phys., 49, 1-16, 113504.

Zheng, S. 2004. Nonlinear Evolution Equation. Chapman and Hall/CRC.

Zhou, Y. 2007, Blow-up of solutions to the DGH equation. J. Funct. Anal., 250, 227-248.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Diyarbakır ilinin Bismil ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Bismil'de tamamladım. 2007 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi, 2009 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansımı tamamladım. 2007 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda öğretmenlik yapmaktayım.