**T.C.**
**DİCLE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# HADAMARD ÇARPIM İLE TANIMLANMIŞ P-KATLI FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI

**Birgül ÖNER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DİYARBAKIR**
**Şubat - 2015**

**TEŞEKKÜR**

Hoşgörü ve sabrıyla her zaman yanımda olan, tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım, engin bilgisiyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER'e,

Tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen Hocam Sayın Prof. Dr. H.Özlem GÜNEY'e,

Tezimi hazırlarken bana verdikleri destek ve anlayışlarıyla hep yanımda olan anneme, babama ve sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# İ Ç İ N D E K İ L E R

# Ö Z E T

HADAMARD ÇARPIM İLE TANIMLANMIŞ
P-KATLI FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Birgül ÖNER

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu tezde, Hadamard çarpımı yardımıyla yeni bir sınıf tanımlanarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliği, ekstrem noktaları, büyüme ve bükülme teoremleri ve integral ortalama eşitsizlikleri hesabı yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler : p-katlı fonksiyonlar, Katsayı eşitsizlikleri, Hadamard çarpım, Ekstrem noktalar, Büyüme-Bükülme denklemleri, İntegral ortalamaları.**

# ABSTRACT

A NEW SUBCLAS OF P-VALENT FUNCTIONS
DEFINED BY HADAMARD PRODUCT

MASTER THESIS

Birgül ÖNER

UNIVERSITY OF DİCLE
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2015

In this thesis, a new subclass of analytic functions involving Hadamard Product is defined. Coefficient inequalities, extreme points, distortion theorems and integral means inequalities for the functions in this class are calculated.

**Key Words; p-valent functions, Coeffient bound, Hadamard product, Extreme points, Distortion bounds, İntegral means.**

# ŞEKİL LİSTESİ

## KISALTMA VE S İ M G E L E R

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Doğal Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{N}_0$ | : $\mathbb{N} \cup \{0\}$ |
| $\mathbb{R}$ | : Gerçel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : Karmaşık Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{C}_\infty$ | : $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Genişletilmiş Karmaşık Düzlem |
| $U$ | : $\{ z : \lvert z \rvert < 1 \}$, Birim disk |
| $E(C)$ | : $C$ nin tüm ekstrem noktalarının kümesi |
| $k(z)$ | : $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu |
| $f \prec g$ | : $f$ fonksiyonu $g$ fonksiyonuna subordinedir |
| $D^n f$ | : $f$ fonksiyonunun n. mertebeden Salagean Türevi |
| $f * g$ | : $f$ ve $g$ fonksiyonlarının hadamard çarpımı |
| A | : $U$ birim diskinde analitik olan tüm fonksiyonların uzayı |
| $S$ | : Birim diskte analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı |
| $\wp$ | : Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı |
| $C$ | : Konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $S^*$ | : Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı |
| $S^*(\alpha)$ | : $\alpha$ mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı |
| $C(\alpha)$ | : $\alpha$ mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $A(p)$ | : $a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere, $U$ birim diskinde analitik olan $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı |
| $S_p^*$ | : $A(p)$ sınıfına ait p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı |

| | |
|---|---|
| $C_{\mathrm{p}}$ | : $A(p)$ sınıfına ait p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $S_p^*(\alpha)$ | : $\alpha$ -mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı |
| $C_p(\alpha)$ | : $\alpha$ -mertebeli p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $A_p$ | : Birim diskte analitik, çok katlı $f(z)=z^p+\sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k$ formundaki fonksiyonlar sınıfı |
| $T_p$ | : Birim diskte analitik, çok katlı $f(z)=z^p-\sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k$ formundaki fonksiyonlar sınıfı |
| $\mathcal{AS}_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ | : $T_p$ sınıfına ait $\alpha$ mertebeli p-katlı fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfı |

## 1.GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgilenen, yani analiz ile geometri arasında ilişki kuran, karmaşık analizin özel bir dalıdır. Fonksiyonlar teorisinin başlangıcı 18.yüzyıla, L.Euler'e dayanmaktadır. Modern fonksiyonlar teorisi 19. Yüzyılda gelişmeye başlamıştır. Konunun öncüleri L.A. Cauchy, B.Riemann ve K.Weierstrass'tır. B.Riemann 1851 yılında $z$-düzleminin basit bağlantılı bir $D_1 \subset \mathbb{C}$ $\left(D_1 \neq \mathbb{C}\right)$ bölgesini, $w$-düzleminin basit bağlantılı $D_2$ bölgesi üzerine resmeden analitik bir $f$ fonksiyonunun varlığını göstermiş ve böylece geometrik fonksiyonlar teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin gelişmesinde önemli bir köşe taşı, günümüz araştırmalarında aktif bir yere sahip olan ve Koebe'nin 1907 deki çalışmasıyla başlattığı yalınkat ve çok katlı fonksiyonlar teorisidir. Koebe'nin ardından 1914 yılında Gronwall'ın alan teoremini ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın normalize edilmiş yalınkat fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları yalınkat fonksiyonlar teorisinin önemini ortaya koymuştur. Böylece karmaşık analizin bu önemli dalı, pek çok matematikçiyi cezbetmeye başlamıştır.

Bieberbach tarafından ileri sürülen

"$f \in S$ fonksiyonu için $n=2,3,\dots$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır"

şeklindeki tahmin uzun yıllar matematikçileri meşgul eden bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Loewner 1923 yılında kendi bulduğu ve parametrik metod olarak isimlendirdiği bir metotla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson (1969 yılında Ozawa) $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliklerini ispatlamışlardır. Tahminin genel hali uzun yıllar boyunca birçok matematikçi tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve nihayet 1985 yılında L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak tüm $n=2,3,\dots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş ve bu probleme son noktayı koymuştur.

Bieberbach tahmininin Branges tarafından ispatlanmasına kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler $S$ sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden bazıları yıldızıl (starlike), konveks ve konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyonlar sınıflarıdır. Bu alt sınıflar analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir.

Bieberbach teoreminin en önemli sonuçlarından birisi de $S$ sınıfına ait bir $f$ fonksiyonu için Koebe tarafından verilen ve büyüme ve bükülme teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$, $|f'(z)|$ sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Branges tarafından katsayı probleminin çözülmüş olması, bu alanda çalışılacak bir şeyin kalmadığı anlamına gelmemiş, aksine teoriyi daha da zenginleştirmiştir. Çağımızın önde gelen matematikçilerini yetmiş yıl uğraştıran bu problemin çözülmüş olması bir takım yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur. Bu alanda çalışan matematikçiler problemi yalınkat fonksiyonların değişik alt sınıflarına taşımışlar ve bu alt sınıflar üzerinde çalışmalarını sürdürmüşlerdir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde, incelenen fonksiyonların katsayı sınırlarını, modülünün alt ve üst sınırlarını veya fonksiyonun integral ortalaması için kesin üst sınırları bulma problemleri önemli bir yer tutmaktadır.

Bu çalışmadaki esas amaç, Hadamard çarpımıyla tanımlanmış p-katlı yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini, büyüme ve bükülme teoremlerini ve integral ortalama eşitsizliklerini hesaplamaktır. Ayrıca bu sınıfın konveks olduğu gösterilmiş ve ekstrem noktaları bulunmuştur.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanımlar yapılmıştır. Ayrıca bazı önemli teorem ve sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir.

**Tanım 2.1. (Açık Disk, Kapalı Disk, Çember)** $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

kümesine $\boldsymbol{z_0}$ **merkezli** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı açık disk,**

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

kümesine $\boldsymbol{z_0}$ **merkezli** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı kapalı disk**,

$$\partial D(z, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümesine de $\boldsymbol{z_0}$ **merkezli** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı çember** denir.

**Tanım 2.2. (İç nokta, Açık küme, Kapalı küme )** $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $z_0$ noktasına $A$ kümesinin bir **iç noktası denir.** $A$ kümesinin bütün iç noktalarının kümesi $A$ kümesinin **içi** olarak adlandırılır. Eğer $A$ kümesinin bütün noktaları iç nokta ise, $A$ kümesine **açık küme** ve tümleyeni açık olan kümeye de **kapalı küme** adı verilir.

**Tanım 2.3. (Bağlantılı küme)** $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $A$ kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa, bu kümeye **bağlantılıdır** denir. Yani $A \cap \mathrm{U} \neq \varnothing$, $A \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$, $A \subset \mathrm{U} \cup \mathrm{V}$ ve $A \cap U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $\mathrm{U}$ ve $\mathrm{V}$ açık kümeleri bulunamıyorsa, $A$ kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye **bağlantısızdır** denir.

**Tanım 2.4. (Bölge)** Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** adı verilir.

**Tanım 2.5. (Diferensiyellenebilirlik)** $A \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $z_0 \in A$ noktasında

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında **diferansiyellenebilirdir** veya **türevlenebilirdir** denir. Bu limit $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ biçiminde gösterilir. Bu değere $f$ fonksiyonunun $\boldsymbol{z_0}$ **noktasındaki türevi** denir ve bu bir karmaşık sayıdır.

**Tanım 2.6. (Analitiklik)** $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebiliyorsa, $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında **analitiktir** denir. Bu tanıma göre $z_0$ noktasının $f$ fonksiyonunun diferensiyellenebildiği kümenin bir iç noktası olacağı açıktır. Eğer bir $f$ fonksiyonu $A$ kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f$ fonksiyonuna $A$ üzerinde **analitiktir** denir.

**Teorem 2.7. (Maksimum Modül Teoremi)** $f$ fonksiyonu $A$ bölgesinde analitik olsun. Bu $f$ fonksiyonu $A$ bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değerini $A$ bölgesinin sınırında alır. (Duren 1983)

**Yardımcı Önerme 2.8. (Schwarz Yardımcı Önermesi)** $f$ fonksiyonu $U = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $U$ birim diskinde $|f(z)| \le 1$ ise $|f'(0)| \le 1$ ve $|f(z)| \le |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy ve Silverman 2006).

**Tanım 2.9. (Konform Dönüşüm)** Karmaşık düzlemin bir $D$ bölgesinde $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında $\alpha$ açısı bulunan herhangi iki düzgün $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin aralarında da $w_0$ noktasında yön ve büyüklük bakımından $\alpha$ açısı varsa, $f$ fonksiyonuna $\boldsymbol{z_0}$ **noktasında bir konform dönüşümdür** denir. Eğer $f$ fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise $f$ fonksiyonu $D$ bölgesinde konformdur.

**Teorem 2.10.** $f$ fonksiyonunun analitik olduğu her $z_0$ noktasında $f'(z_0) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

En önemli konform dönüşümlerden biri $a,b,c,d$ karmaşık sabitler olmak üzere,

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad-bc\neq 0$$

ile verilen Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemi kendisi üzerine konform olarak resmeder.

**Teorem 2.14. ( Riemann Dönüşüm Teoremi)** $D\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini $U$ birim diski üzerine birebir ve konform olarak resmeden $z_0\in D$ için $f\left(z_0\right)=0$ ve $f'(z_0)>0$ özelliğinde bir tek $f$ fonksiyonu vardır (Pakla 1991).

# 3.MATERYAL VE METOT

Bu başlık altında tezin oluşturulmasında kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmektedir.

## 3.1 Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kesimde yalınkat fonksiyonları tanımlayarak önemli özelliklerini vereceğiz.

**Tanım 3.1.1. (Yalınkat Fonksiyon)** Bir $D$ bölgesinde tanımlı bir $f$ fonksiyonuna $D$ **bölgesinde yalınkattır** denmesi, $f$ 'in $D$ deki farklı $z$ değerleri için farklı $w$ değer çiftleri karşılık getirmesi anlamına gelir. Bu durumda, $w = f(z)$ denklemi, her $w$ değeri için $D$ bölgesinde en fazla bir köke sahiptir. Böyle fonksiyonlar, $D$ bölgesini bire-bir ( 1-1 ) ve konform olarak, $w$-düzlemindeki bir bölge üzerine dönüştürür.

Yalınkatlık için bir başka ifade aşağıdaki gibi verilebilir.

Herhangi bir $D$ bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir $f$ fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \;\Rightarrow\; f(z_1) \neq f(z_2)$$

önermesi doğru oluyorsa, yani $f$ fonksiyonu bu bölgede, bir tek noktada aynı değeri iki kez almıyorsa $f$ fonksiyonuna $D$ **bölgesinde yalınkattır** denir.

$D$ bölgesindeki yalınkatlık doğal olarak $D$ bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır.

**Tanım 3.1.2. (Yerel Yalınkat Fonksiyon)** Bir $D$ bölgesinde tanımlı herhangi bir $f$ fonksiyonu, bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise $f$ fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında **yerel yalınkat fonksiyon** denir.

**Teorem 3.1.3.** Analitik bir $f$ fonksiyonunun $z_0$ noktasında yerel yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmayabilir. Örneğin, $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \left\{ z \colon 1 < |z| < 2 \,,\, 0 < \arg z < 3\pi/2 \right\}$ bölgesinde yerel yalınkattır ancak yalınkat değildir. Gerçekten de $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D$ bölgesinde analitiktir ve her $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan yerel yalınkattır.

Fakat

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}+i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}-i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=i\frac{9}{4}$$

olduğundan $f$ fonksiyonu $D$ bölgesinde yalınkat değildir.

**Tanım 3.1.4. (Normalize Edilmiş Yalınkat Fonksiyonlar)** $U$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı $S$ ile gösterilir. Her $f\in S$ fonksiyonu,

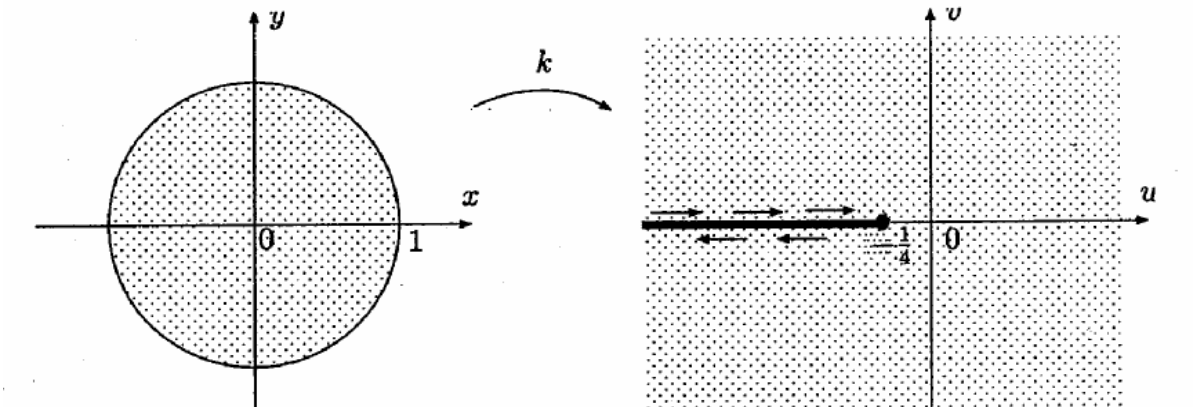
$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

$S$ sınıfındaki fonksiyonların en öncelikli örneği,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n z^n=z+2z^2+3z^3+\cdots$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip $K(z)=z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonudur. Koebe fonksiyonu $U$ birim diskini $-1/4$ den $-\infty$ a kadar kesilmiş düzlem üzerine konform olarak dönüştürür.




**Şekil 3.1.** Koebe Fonksiyonu

Gerçekten, Koebe fonksiyonu,

$$K(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

olarak tekrar düzenlendiğinde ve $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $U$ bölgesini konform olarak $\operatorname{Re}\{w\}>0$ bölgesine dönüştürdüğü düşünüldüğünde, yukarıdaki ifadenin doğru olduğu görülür.

$S$ sınıfına ait bir $f$ fonksiyonunun $a_2$ (ikinci) katsayısının modülünün sınırını hesaplamak için verilen Bieberbach Teoremi yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutar.

**Teorem 3.1.5. (Bieberbach Teoremi)** $S$ sınıfından alınan her $f$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik için, $f$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir. (Bieberbach 1916)

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe'ye ait ünlü bir örtme teoremidir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0)=0$ koşullu açık bir dönüşüm olduğundan $f$ fonksiyonunun görüntüsü orjinde merkezli en az bir diski kapsar. 1907 yılında Koebe, $\rho$ mutlak bir sabit olmak üzere, $S$ sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w|<\rho$ diski kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\rho \leq 1/4$ olmasını gerektirir. Daha sonra, Bieberbach, $\rho$ sabitinin $1/4$ alınabileceği şeklindeki Koebe Kestirimini ispatlamıştır.

**Teorem 3.1.6. (Koebe Dörtte Bir Teoremi)** $S$ sınıfındaki her fonksiyonun değer kümesi, $\{ w : |w| < 1/4 \}$ diskini kapsar. (Duren 1983)

Bieberbach'a ait $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde daha ileri uygulamalara sahiptir. En önemli sonuç, $f \in S$ iken $|f'(z)|$ için kesin üst ve alt sınırları veren Koebe Bükülme Teoremidir. Bükülme Terimi, geometrik olarak, $|f'(z)|$ nin $f$ dönüşümü altında sonsuz küçük büyütme çarpanı ya da $|f'(z)|^2$ Jacobieninin, alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olması gerçeğinden çıkmıştır.

**Teorem 3.1.7. (Bükülme Teoremi)** Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır. (Goodman 1983)

**Teorem 3.1.8. (Büyüme Teoremi)** Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır. (Goodman 1983)

Kimi durumlarda daha kullanışlı olan aşağıdaki teoremde, Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirilmiş olduğu bir diğer eşitsizlik verilmektedir.

**Teorem 3.1.9.** $S$ sınıfındaki her bir $f$ fonksiyonu için $|z|=r<1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{z f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

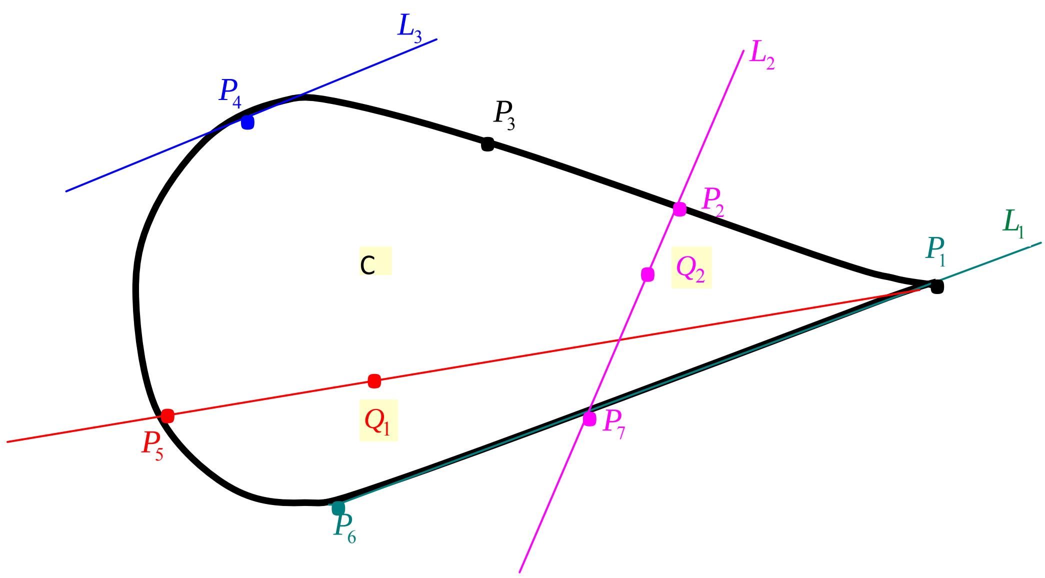
eşitsizliği sağlanır. (Duren 1983)

Teorem 3.1.7, 3.1.8 ve 3.1.9 da eşitliklerinin gerçeklenmesi için $z \in U$ ve $z \neq 0$ iken $f$ fonksiyonu Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

**Teorem 3.1.10. (Bieberbach Kestirimi veya Branges Teoremi)** $S$ sınıfındaki her $f$ fonksiyonu $n=2,3,\ldots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar. $f$, Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça tüm $n$ değerleri için kesin eşitsizlik sağlanır (Pommerenke 1975).

Bieberbach Kestirimi, 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmıştır. Uzun yıllar kestirim olarak kalan ve kısmen ispatlanan bu kestirimin tam ispatı 1985 yılında Louis de Branges tarafından yapılmıştır (Branges 1985).

**Tanım 3.1.11. (Ekstrem Noktalar**) Şekil 3.2 de gösterildiği gibi, $C$ kapalı ve sınırlı konveks bir küme ve $L_1, L_2, L_3$ düzlemde doğrular olsunlar.




**Şekil 3.2.** Ekstrem Noktalar

$Q_1$ noktası $P_1P_5$ doğru parçasının bir iç noktası ve $Q_2$ noktası $P_2P_7$ doğru parçasının bir iç noktasıdır. $C$ kümesindeki her bir nokta ya bir iç noktadır ya da $C$ de kapsanan bir doğru parçasının bitim noktasıdır. $C$ nin bir sınır noktası aynı zamanda $C$ de kapsanan bir doğru parçasının bir iç noktası olabilir. Örneğin $P_2$, $C$ de kapsanan $P_1P_3$ parçasının bir iç noktasıdır ve $P_7$ yine $C$ de kapsanan $P_6P_1$ parçasının bir iç noktasıdır. Diğer taraftan, $P_4$, $C$ de kapsanan herhangi bir doğru parçasının bir iç noktası değildir. $C$ nin bu tür noktalarına **“$C$ nin ekstrem noktaları”** denir. Şekil 3.2'de ekstrem noktalar $P_1$ ve $P_3P_4P_5P_6$ yayının sınırı üzerindeki tüm noktalardır.

$E(C)$ ile $C$ nin tüm ekstrem noktalarının kümesini belirtelim. Geometrik olarak Şekil 3.2 ile verilen $C$ kümesinin, bitim noktaları $C$ nin ekstrem noktaları olan tüm doğru parçalarının noktalarının birleşimi olduğu geometrik olarak açıktır ($C$ kümesini $P_2P_7$ gibi doğru parçalarından elde etmek gerekli değildir). Bir başka durumda, bitim noktaları $E(C)$ de olan doğru parçaları $C$ yi meydana getirmeye yeterli olmayabilir. $C$ nin bir $PQR$ üçgeni ile üçgenin tüm iç noktalarından oluştuğunu varsayalım. Bu durumda $E(C)$, sadece $P, Q$ ve $R$ noktalarını kapsar. Bitim noktaları $E(C)$ de olan tüm doğru parçalarının kümesi sadece kenarları verecek, üçgenin içindeki noktaları vermeyecektir. $C$ nin tamamını meydana getirmek için $\alpha, \beta$ ve $\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=1$ olacak şekilde negatif olmayan sayılar iken, $\alpha P+\beta Q+\gamma R$ formundaki tüm doğrusal birleşimleri alabiliriz.

## 3.2. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde yalınkat fonksiyonların bazı önemli alt sınıflarını vereceğiz.

**Tanım 3.2.1 (Yıldızıl Küme)** Bir $D_0 \subset \mathbb{C}$ kümesi ve onun bir $z_0 \in D$ noktasını alalım. $z_0$ noktasını, her diğer $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $D$ içinde kalıyorsa, $D$ kümesine **$z_0 \in D$ noktasına göre yıldızıl** denir. Daha resimsel bir ifadeyle, $D$ kümesinin her noktası $z_0$ noktasından “görünür” ise $D$ kümesine $\boldsymbol{z_0}$ noktasına göre yıldızıl küme denir. Orijine göre yıldızıl kümeye kısaca **yıldızıl** denir.

**Tanım 3.2.2. (Yıldızıl Fonksiyon)** $f$ fonksiyonu yalınkat ve $F=f(U)$ görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl ise, yani

$$w \in F \quad , \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow \; tw \in F$$

önermesi doğru ise $f$ fonksiyonuna **yıldızıl fonksiyon** denir.

**Tanım 3.2.3. (Konveks Küme)** Noktalarının her birine göre yıldızıl olan $D$ kümesine **konveks küme** denir. Geometrik olarak, $D$ kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen $D$ kümesinde kalıyorsa $D$ kümesine konvekstir denir.

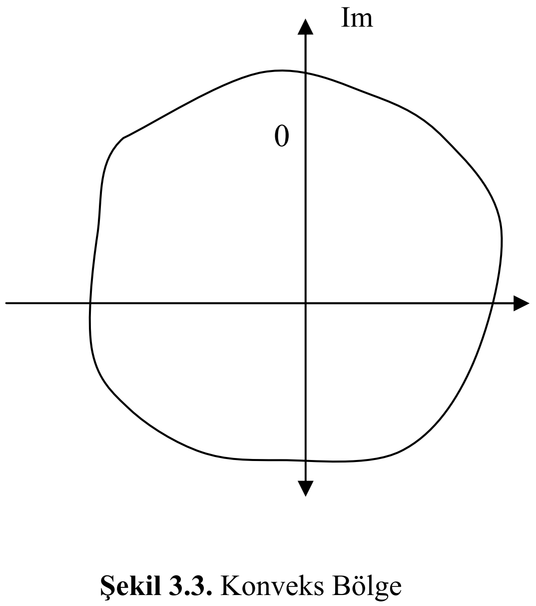
**Tanım 3.2.4. (Konveks Fonksiyon)** Genel olarak konveks bir kümeyi konveks bir kümeye dönüştüren fonksiyona konveks fonksiyon denildiğini biliyoruz. Diğer bir deyişle, bir $f$ fonksiyonu yalınkat ve $f(U)$ görüntü bölgesi konveks ise, $f$ fonksiyonuna konveks **fonksiyon** denilmektedir.

$S$ nin yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan altsınıfları, sırasıyla $S^*$ ve $C$ ile gösterilir. Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için

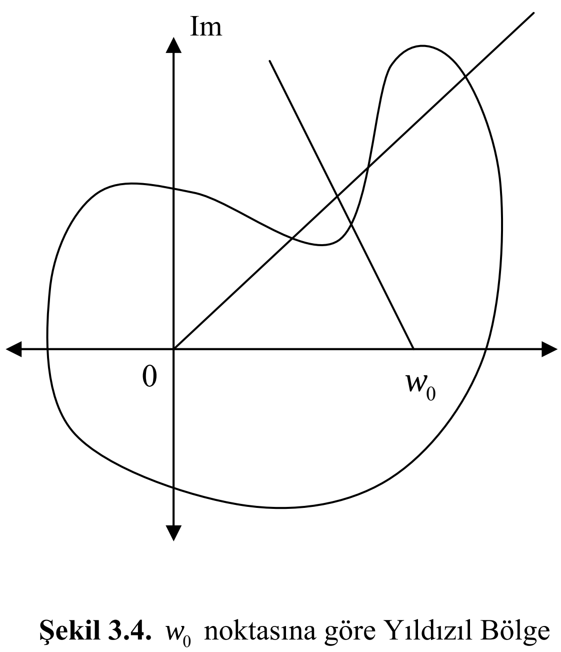
$$C \subset S^* \subset S$$

yazılabilir.

Konveks ve $w_0$ noktasına göre yıldızıl bölgeler sırasıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 te gösterilmiştir. Şekil 3.4 teki bölge $w_0$ noktasına göre yıldızıl olmasına rağmen, orijine göre yıldızıl değildir.




**Şekil 3.3.** Konveks Bölge




**Şekil 3.4.** $w_0$ noktasına göre Yıldızıl Bölge

Ayrıca,

$$\frac{z}{1-z} \quad , \quad \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \text{ ve } \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonlarından ilk ikisi konveks fonksiyonlar olduğu halde, $\frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızıl olup konveks değildir.

$S$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonunun $|a_n|$ katsayıları için kesin sınırları hala arıyor olmamıza rağmen, bu problem $S^*$ ve $C$ altsınıfları için çözülmüştür. $S^*$ sınıfına ait fonksiyonlar için Nevanlinna (1921) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 3.2.5.** Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $S^*$ sınıfında ise, her bir pozitif $n$ tamsayısı için

$$|a_n| \le n$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik her $n$ için kesindir ve eğer sadece bir $n \ge 2$ için eşitlik sağlanırsa, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesidir.

Diğer taraftan Loewner 1917 yılında $C$ sınıfı için aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

**Teorem 3.2.6.** Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $C$ sınıfında ise, her bir pozitif $n$ tamsayısı için

$$|a_n| \le 1$$

olur. Bu eşitsizlik her $n$ için kesindir ve eğer sadece bir $n \ge 2$ için eşitlik sağlanırsa, $f(z)$ fonksiyonu, $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesidir.

$S^*$ sınıfındaki fonksiyonlar ve türevleri için alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibidir.

**Teorem 3.2.7.** $f(z) \in S^*$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ve her bir $k \geq 2$ için

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!(k+r)}{(1-r)^{k+2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin tümü kesindir. Eşitlik hali için $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 3.2.7. deki ilk iki eşitsizlik $S$ sınıfındaki elemanlar için Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8. de verilmişti. Koebe fonksiyonu da yıldızıl bir fonksiyon olduğundan bu eşitsizlikler bu altsınıf için de kesindir.

Konveks fonksiyonlar için farklı sınırlar olacağını beklemek doğaldır.

**Teorem 3.2.8.** $f(z) \in C$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{1+r} \leq \left| f(z) \right| \leq \frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq \left| f'(z) \right| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

ve her bir $k \geq 2$ için

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Tüm bu eşitsizlikler kesindir. Eşitlik hali için $f(z)$ fonksiyonunun, $\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

$C$ sınıfındaki fonksiyonlar ve türevleri için Teorem 3.2.8 de sözü edilen sınırlar, 1916 yılında Gronwall ve 1917 yılında Loewner tarafından birbirinden bağımsız olarak elde edilmiştir.

**Tanım 3.2.9. (Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı)**

$\wp$ sınıfı,

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

formunda, $U$ birim diskinde analitik olan ve birim diskteki $z$ noktaları için $\operatorname{Re}\{ f(z) \} > 0$ olacak şekildeki tüm fonksiyonların sınıfıdır. $\wp$ sınıfındaki herhangi bir fonksiyona $U$ birim diskinde **pozitif gerçel kısma sahiptir** denir. Burada $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması gerekmediğini belirtmeliyiz. Örneğin, $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n \geq 0$ tamsayısı için $\wp$ sınıfındadır ancak $n \geq 2$ için bu fonksiyon yalınkat değildir.

Koebe fonksiyonunun $S$ sınıfı için oynadığı merkezi rol gibi,

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+\cdots=1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Möbius fonksiyonu da $\wp$ sınıfı için merkezi bir rol oynar. Bu fonksiyon $\wp$ sınıfındadır, birim diskte analitik ve yalınkattır ve üstelik birim diski $\operatorname{Re} w>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Ancak $L_0(z)$ fonksiyonunun karakteri ile Koebe fonksiyonu arasında dikkate değer bir fark vardır. $S$ sınıfı için pek çok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu (veya bir dönmesi) yegane çözümdür. Bu durumun aksine, $L_0(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfındaki $|p_n|$ değerini maksimize eder fakat $n \geq 2$ ise $p_n=2$ olacak şekilde $\wp$ sınıfının sonsuz çoklukta başka fonksiyonu vardır ve bunların hiçbiri, bir diğerinin dönmesiyle elde edilemez.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. Başka bir deyişle, $U$ bölgesinde analitik, $f(0)=f'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlayan bir $f$ fonksiyonu için

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

ve

$$f \in C \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

önermeleri doğrudur. Bu önermeler, yıldızıl ve konveks fonksiyonların daha önce verdiğimiz geometrik tanımlarını analitik olarak ifade eder.

### 3.3. Noshiro-Warschawski Teoremi

$\wp$ sınıfının yalınkat fonksiyonlar teorisiyle yakın bir ilişkisi vardır. Bu kesimde bağımsız olarak Noshiro'ya (1935) ve Warschawski'ye (1935) ait olan yalınkatlık için güzel ve daha sade olan bir yeterli koşul vereceğiz.

**Teorem 3.3.1.** Eğer $f'(z) \in \wp$ ise $f(z)$ fonksiyonu $U$ birim diskinde yalınkattır (Alexander 1915).

Alexander'a ait olan Teorem 3.3.1, aslında aşağıdaki teoremin özel bir halidir:

**Teorem 3.3.2. (Noshiro-Warschawski Teoremi)** Bir konveks $D$ bölgesindeki tüm $z$ değerleri ve en az bir $\alpha$ gerçel sayısı için

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} f'(z)\right)>0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $D$ bölgesinde yalınkattır (Noshiro 1935, Warschawski 1935).

### 3.4. p-Katlı Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde p-katlı fonksiyonları ve bazı özel alt sınıflarını tanımlayacağız.

**Tanım 3.4.1. (p-Katlı Fonksiyon)** $w=f(z)$ denklemi, bir $D$ bölgesinde her farklı $w$ değeri için en fazla p tane köke sahip ise $f$ fonksiyonuna **p-katlı fonksiyon** denir. Eşdeğer olarak, $f$ fonksiyonu konveks bir $D$ bölgesinde analitik ve $\alpha$ gerçel bir sabit olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} f^{(p)}(z)\right) > 0$$

oluyorsa, $f$ fonksiyonu $D$ bölgesinde p-katlıdır. Bu ifade,

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonunun $U$ bölgesinde analitik ve $\mathrm{Re}\, f^{(p)}(z)>0$ olması durumunda $U$ bölgesinde p-katlı olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $f$ fonksiyonu $|z|\leq 1$ de analitik ve $|z|=1$ üzerinde $f'(z)\neq 0$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi}\left|1+\mathrm{Re}\frac{zf''}{f'}\right|d\theta<2\pi(p+1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonu $|z|\leq 1$ de en fazla p-katlıdır.

**Tanım 3.4.2. (p-Katlı Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon)** $a_p\neq 0$, $p\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ olmak üzere, $U$ birim diskinde tanımlı

$$f(z)=\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n = a_p z^p + a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $A(p)$ ile gösterelim.

$A(p)$ sınıfındaki bir $f$ fonksiyonuna, $U$ birim diskinde, $\operatorname{Re}\dfrac{z\,f'}{f} > 0$ ve $\operatorname{Re}\left(1+\dfrac{z\,f''}{f'}\right) > 0$ koşullarını sağlaması durumunda, sırasıyla, **p-katlı yıldızıl fonksiyon** ve **p-katlı konveks fonksiyon** denir. $A(p)$ sınıfının alt sınıfları olan p-katlı yıldızıl ve p-katlı konveks fonksiyonların sınıfları, sırasıyla, $S_p^*$ ve $C_p$ ile gösterilecektir.

$f$ fonksiyonu $U$ birim diskinde p-katlı yıldızıl bir fonksiyon ise, bu bölgede p-katlıdır. Benzer şekilde $f$ fonksiyonu $U$ birim diskinde p-katlı konveks bir fonksiyon ise, yine bu bölgede p-katlıdır.

$A(p)$ sınıfına ait bir $f$ fonksiyonu için,

$$f \in C_p \Leftrightarrow \frac{z\,f'}{p} \in S_p^*$$

önermesi doğrudur. Ayrıca

$$C_p \subset S_p^*$$

bağıntısı da yazılabilir. $C_p$ ve $S_p^*$ sınıfları, $p=1$ durumunda, sırasıyla, yalınkat fonksiyonların altsınıfları olarak bilinen sırasıyla konveks ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfları olur. Özel olarak, $C_1 \subset S_1^*$ olacaktır.

**Tanım 3.4.3. ($\alpha$-Mertebeli p-Katlı Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon)** $f$ fonksiyonu, $\forall z \in U$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere bazı $0 \le \alpha < p$ değerleri için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\,f'}{f}\right\} > \alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'}{f}\right\} d\theta = 2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, **$\alpha$- mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyon** adını alır. $A(p)$ sınıfının alt sınıfı olan $\alpha$-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S_p^*(\alpha)$ ile gösterilecektir.

$A(p)$ sınıfına ait bir $f$ fonksiyonunun **$\alpha$-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon** olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall z \in U$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \le \alpha < p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}>\alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}d\theta=2p\pi$$

olmasıdır. $\alpha$ - mertebeli p-katlı konveks fonksiyonların sınıfı $C_p(\alpha)$ ile gösterilir.

$C_p(\alpha)$ ve $S_p^*(\alpha)$ sınıfları için

$$f\in C_p(\alpha)\Leftrightarrow\frac{z\,f'}{p}\in S_p^*(\alpha)$$

önermesi doğrudur ve $0\leq\alpha\leq p$ durumunda

**( i )** $S_p^*(\alpha)\subseteq S_p^*(0)$

**( ii )** $C_p(\alpha)\subseteq C_p(0)$

**( iii )** $C_p(\alpha)\subset S_p^*(\alpha)\subset A(p)$

yazılır.

### 3.5. Subordinasyon İlkesi

Subordinasyon ilkesi karmaşık analizde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen bir çok matematikçi, subordinasyon konusunda çalışmalar yapmıştır. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J.E. Littlewood (1925) ve W.W. Rogosinski (1943) tarafından bulunmuştur.

$f$ ve $g$ fonksiyonları $U$ birim diskinde analitik olsunlar. $U$ bölgesinde

$$f(z)=g\left(\psi(z)\right) \tag{3.5.1}$$

olacak şekilde $|\psi(z)|<1$ ve $\psi(0)=0$ koşullarını sağlayan analitik (yalınkat olması gerekmeyen) bir $\psi$ fonksiyonu varsa, $f$ **fonksiyonu** $g$ **fonksiyonuna subordinedir** denir ve bu durum $f\prec g$ yazılarak anlatılır.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyon, $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinedir. Diğer bir ifade ile,

$$p(z)\in\wp\;\Leftrightarrow\;p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}$$

yazılır.

Öncelikle, Subordinasyon ilkesini elde etmede önemli rol oynayan ve J.E.Littlewood'a (1925) ait bazı temel özellikleri verelim :

$f \prec g$ olsun. Bu durumda, $\psi(U)\subset U$ ve $\psi(0)=0$ olduğundan, (3.5.1) özelliği ile $f(U)\subset g(U)$ ve $f(0)=g(0)$ bulunur. Schwarz yardımcı önermesinden; $|\psi(z)| \le |z|$ ve $0<r<1$ olmak üzere

$$\left\{ f(z): |z|<r \right\} \subset \left\{ g(z): |z|<r \right\} \tag{3.5.2}$$

olduğundan $0\le r<1$ için

$$\max_{|z|\le r}\left\{ \left| f(z)\right|\right\} \le \max_{|z|\le r}\left\{ \left| g(z)\right|\right\}$$

yazılır. Bundan başka,

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\psi'(z)\right| \le 1-\left|\psi(z)\right|^2$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\left(1-|z|^2\right)\left| f'(z)\right| = \left(1-|z|^2\right)\left|\psi'\right|\left|g'(\psi)\right|$$

$$\le \left(1-|\psi|^2\right)\left|g'(\psi)\right|$$

elde edilir. $|\psi(z)|\le|z|$ eşitsizliği tekrar kullanıldığında, $0\le r<1$ iken

$$\max_{|z|\le r}\left\{ \left(1-|z|^2\right)\left|f'(z)\right|\right\} \le \max_{|z|\le r}\left\{ \left(1-|z|^2\right)\left|g'(z)\right|\right\}$$

bulunur. Özellikle, $z=0$ alınırsa $\left|f'(0)\right| \le \left|g'(0)\right|$ olur.

Subordine olunan fonksiyonun yalınkat olması en önemli durumdur. $g$ fonksiyonu $U$ birim diskinde yalınkat olmak üzere

$$f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0)=g(0) \quad \text{ve} \quad f\left(U\right)\subset g\left(U\right) \tag{3.5.3}$$

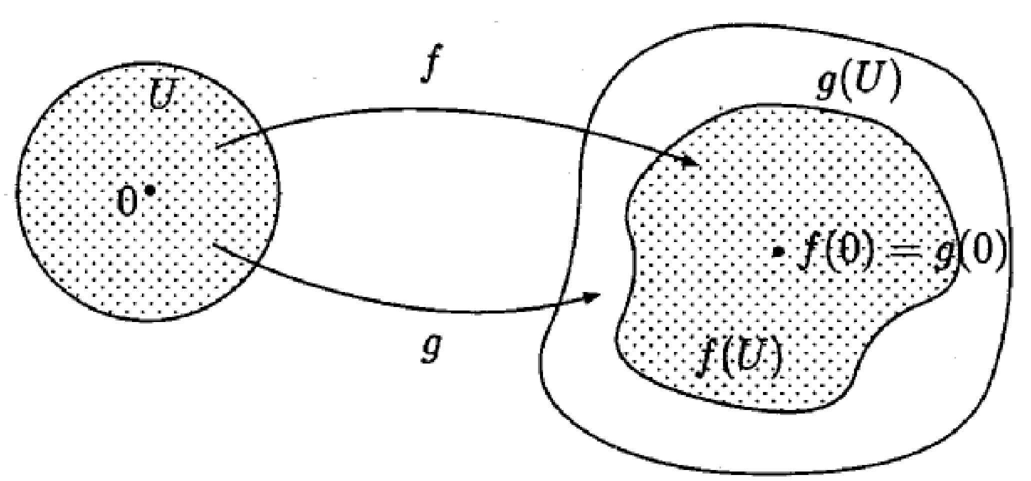
önermesi doğrudur. (Duren, 1983)

(3.5.2) ve (3.5.3) ifadeleri birlikte kullanılarak çok kullanışlı olan aşağıdaki subordinasyon ilkesi elde edilir.

**Teorem 3.5.1. ( Subordinasyon ilkesi )** $g$ fonksiyonu $U$ birim diskinde yalınkat ve $U_r=\left\{ z: |z|<r ,\, 0<r<1 \right\}$ olmak üzere $f(0)=g(0)$ ve $f\left(U\right)\subset g\left(U\right)$,

$$f\left(U_r\right)\subset g\left(U_r\right)$$

kapsamasını verir (Duren 1983).




**Şekil 3.5** Subordinasyon

### 3.6. Salagean Türev Operatörü

$U$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $A$ olsun. Bu sınıfa ait bir $f(z)$ fonksiyonu için G.S.Salagean,

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right) \qquad \left(n \in \mathbb{N} = 1,2,3..\right)$$

şeklinde bir operatör elde etmiştir (Salagean 1983). Bazı basit hesaplamalar ile $A$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k \qquad \left(n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$$

olduğu, tanımdan kolayca bulunabilir. Ayrıca

$$z\left(D^n f(z)\right)' = D^{n+1} f(z)$$

eşitliğini yazmak mümkündür.

### 3.7. Hadamard Çarpım

$f, g \in A$ fonksiyonları

$$f(z) = \mathrm{z} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \mathrm{z} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$$

şeklinde verilsin.

$$(f * g)(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k = (g * f)(z)$$

ifadesine $f$ ve $g$ fonksiyonlarının Hadamard Çarpımı (konvolusyon) denir.

### 3.8. p-katlı $\alpha$-mertebeli $\beta$-Pascu Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

$U$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z^p + \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $A(p,m)$ olsun. $A(1,2) = A$ olduğu açıktır. $A(p,m)$ sınıfının $n \geq m$ iken $a_n \geq 0$ olmak üzere

$$f(z) = z^p - \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \tag{3.8.1}$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan altsınıfını $T(p,m)$ ile gösterelim. $T(p,m)$ sınıfına ait fonksiyonlara negatif katsayılı fonksiyonlar denir. $n \geq m$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere $g(z) = z^p + \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonunu alalım.

$$\frac{1}{p}\mathrm{Re}\left(\frac{z(f * g)'(z)}{(f * g)(z)}\right) > \alpha \qquad (0 \leq \alpha < 1,\ z \in U)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar sınıfını $TS_{\mathrm{g}}^{*}(p, m, \alpha)$ ile gösterelim (Ali ve ark. 2006).

**Tanım 3.8.1.** $f \in A(p,m)$ olsun. Eğer $f$ fonksiyonu

$$\frac{1}{p}\mathrm{Re}\left(\frac{(1-\beta) z f'(z) + \frac{\beta}{p} z\left(z f'(z)\right)'}{(1-\beta) f(z) + \frac{\beta}{p} z f'(z)}\right) > \alpha \qquad (\beta \geq 0; 0 \leq \alpha < 1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa **$\alpha$-mertebeli $\beta$-Pascu konveks fonksiyon**dur (Pascu ve Podaru 1983). Bir başka deyişle $(1-\beta)f(z)+\frac{\beta}{p}zf'(z)$ fonksiyonu $p$-katlı yıldızıl bir fonksiyon ise $f(z)$ $\beta$-Pascu konveks olur . Pascu ve Podaru'nun tanımladığı $\alpha$ mertebeli $\beta$-Pascu konveks fonksiyonlar sınıfıyla daha sonraları Ali ve ark. (2006), Güney ve Salagean (2007) çalışmışlardır.

$T(p,m)$ sınıfının, $\alpha$-mertebeli $\beta$-Pascu konveks fonksiyonlarından oluşan alt sınıfını $TPC(p,m,\alpha,\beta)$ ile gösterelim.

**Teorem 3.8.2.** $f(z)$ fonksiyonu 3.8.1 ile verilsin. $f(z)$ fonksiyonunun $TS_g^*(p,m,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=m}^{\infty}(n-p\alpha)a_n b_n \le p(1-\alpha) \tag{3.8.2}$$

eitsizliğini sağlamasıdır (Ali ve ark. 2006).

**Teorem 3.8.3.** Eğer $f \in TS_g^*(p,m,\alpha)$ ise $n \ge m$ iken $b_n \ge b_m$ olmak üzere

$$r^p - \frac{p(1-\alpha)}{(m-p\alpha)b_m}r^m \le |f(z)| \le r^p + \frac{p(1-\alpha)}{(m-p\alpha)b_m}r^m \quad |z|=r<1 \tag{3.8.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesindir. Eşitlik hali $z=r$ ve $z=re^{\frac{i\pi(2k+1)}{m-p}}$ , $(k\in\mathbb{Z})$ de

$$f(z) = z^p - \frac{p(1-\alpha)}{(m-p\alpha)b_m}z^m \tag{3.8.4}$$

fonksiyonu için sağlanır. Ayrıca $TS_g^*(p,m,\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların türevleri için $b_n \ge b_m$ olmak üzere

$$pr^{p-1} - \frac{mp(1-\alpha)}{(m-p\alpha)b_m}r^{m-1} \le |f'(z)| \le pr^{p-1} + \frac{mp(1-\alpha)}{(m-p\alpha)b_m}r^{m-1} \qquad |z|=r<1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesindir. Eşitlik hali (3.8.4) ile verilen fonksiyon için vardır (Ali ve ark. 2006).

**Teorem 3.8.4.** 3.8.1 ile verilen $f(z)$ fonksiyonunun $TPC(p,m,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=m}^{\infty}(n-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta n\right]a_n \le p^2(1-\alpha) \tag{3.8.3}$$

eitsizliğini sağlamasıdır (Ali ve ark. 2006).

**Teorem 3.8.5.** Eğer $f \in TPC(p,m,\alpha,\beta)$ ise $|z|=r<1$ olmak üzere

$$r^p - \frac{p^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}r^m \le \left|f(z)\right| \le r^p + \frac{p^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}r^m$$

eşitsizliğini sağlar. Eşitsizlik, eşitliği sağlayan

$$f(z) = z^p - \frac{p^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}z^m$$

fonksiyonu ile kesindir (Ali ve ark. 2006).

**Teorem 3.8.6.** Eğer $f \in TPC(p,m,\alpha,\beta)$ ise $|z|=r<1$ olmak üzere

$$pr^{p-1} - \frac{mp^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}r^{m-1} \le \left|f'(z)\right| \le pr^{p-1} + \frac{mp^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}r^{m-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizlik, eşitliği sağlayan

$$f(z) = z^p - \frac{p^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}z^m$$

ile kesindir (Ali ve ark. 2006).

**Teorem 3.8.7**. $\delta > 0$ olsun. Eğer $f \in TPC(p,m,\alpha,\beta)$ ve

$$f_m = z^p - \frac{p^2(1-\alpha)}{(m-p\alpha)\left[(1-\beta)p+\beta m\right]}z^m$$

ise $z = re^{i\theta}$ ve $0<r<1$ için

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\delta} d\theta \le \int_0^{2\pi}\left|f_m\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\delta} d\theta$$

eşitsizliği sağlanır (Güney ve Salagean 2007).

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilecektir. Hadamard Çarpımı yardımıyla analitik ve p-katlı fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanımlanarak bu sınıfa ait katsayı eşitsizlikleri, ekstrem noktaları, büyüme ve bükülme teoremleri ve integral ortalama eşitsizlikleri hesaplanacaktır. Bu bölümde yapılan çalışma "Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica" adlı dergide yayına kabul edilmiştir.

### 4.1. Temel Tanımlar

$p \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $U$ birim diskinde analitik ve $p$-katlı

$$f(z) = z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k$$

fonksiyonlarının sınıfı $A_p$ olsun. Bu sınıfın, $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$f(z) = z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k \tag{4.1.1}$$

şeklinde ifade edilebilen p-katlı fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $T_p$ ile gösterilsin. Bundan başka, $g \in A_p$ fonksiyonu $b_k \geq 0$ olmak üzere

$$g(z) = z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} b_k z^k \tag{4.1.2}$$

ile tanımlansın. $D^n$ Salagean operatörünü göstermek üzere,

$$\frac{1}{p}\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)}{(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)}\right\} > \alpha \tag{4.1.3}$$

$$(0 \leq \beta \leq 1,\ 0 \leq \alpha < 1,\ n,p \in \mathbb{N})$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan, $f \in T_p$ fonksiyonlarının kümesini $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ ile tanımlayacağız.

Bu bölümde $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfına ait katsayı eşitsizlikleri, ekstrem noktaları, büyüme ve bükülme teoremleri ve integral ortalama eşitsizlikleri hesaplanacaktır.

## 4.2. $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ Sınıfının Katsayı Eşitsizlikleri

Bu kesimde $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlara ait katsayı kestirimleri incelenecektir.

**Teorem 4.2.1.** $f$ fonksiyonu (4.1.1) ile tanımlansın. O zaman,

$$f \in AS^*_g(n,p,\alpha,\beta) \Leftrightarrow \sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n a_k b_k \le p^{n+2}(1-\alpha) \tag{4.2.1}$$

$$\left(0 \le \beta \le 1,\ 0 \le \alpha < 1,\ n,p \in \mathbb{N}\right)$$

önermesi sağlanır.

**İspat:** $f \in AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ olsun. (4.1.1) ten (4.1.3) e kadar verilen bilgiler göz önüne alındığında

$$\frac{1}{p}\mathrm{Re}\left\{\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\dfrac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)}{(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\dfrac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)}\right\}$$

$$=\frac{1}{p}\mathrm{Re}\left\{\frac{p^{n+1}z^p-\displaystyle\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left(k^{n+1}-\beta k^{n+1}+\frac{\beta}{p}k^{n+2}\right)a_k b_k z^k}{p^{n}z^p-\displaystyle\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left(k^{n}-\beta k^{n}+\frac{\beta}{p}k^{n+1}\right)a_k b_k z^k}\right\}$$

$$=\frac{1}{p}\mathrm{Re}\left\{\frac{p^{n+1}-\displaystyle\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left(1-\beta+\frac{\beta}{p}k\right)k^{n+1}a_k b_k z^{k-p}}{p^{n}-\displaystyle\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left(1-\beta+\frac{\beta}{p}k\right)k^{n}a_k b_k z^{k-p}}\right\}>\alpha$$

olur. $z$ nin değerleri gerçel eksen üzerinde seçilsin. Gerçel eksen boyunca $z \to 1^-$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n a_k b_k \le p^{n+2}(1-\alpha)$$

elde edilir.

Tersini ispatlamak için

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^{n}a_{k}b_{k}\leq p^{n+2}(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

$$\frac{1}{p}\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)}{(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)}\right\}>\alpha$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$F(z)=\frac{1}{p}\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)}{(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)}-\alpha$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right|<1,\qquad (z\in U)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right|=$$

$$\left|\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)-p(\alpha+1)\left[(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)\right]}{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)-p(\alpha-1)\left[(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)\right]}\right|$$

$$=\left|\frac{-\alpha p^{n+1}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p-p)\left(1-\beta+\frac{\beta}{p}k\right)\right]k^{n}a_{k}b_{k}z^{k-p}}{(2-\alpha)p^{n+1}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p+p)\left(1-\beta+\frac{\beta}{p}k\right)\right]k^{n}a_{k}b_{k}z^{k-p}}\right|$$

$$\leq\frac{\alpha p^{n+2}+\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p-p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^{n}a_{k}b_{k}}{(2-\alpha)p^{n+2}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}\left[(k-\alpha p+p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^{n}a_{k}b_{k}}\qquad(4.2.2)$$

ifadesini elde ederiz. Bu son ifade

$$\alpha p^{n+2} + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[ (k - \alpha p - p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n a_k b_k$$

$$\leq (2-\alpha)\, p^{n+2} - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[ (k - \alpha p + p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n a_k b_k$$

oluyorsa 1 den küçüktür. Bu teoremin ispatını tamamlar.

**Sonuç 4.2.2.** $f$ fonksiyonu (4.1.1) ile tanımlansın. Eğer $f \in AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ ise

$$a_k \leq \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n b_k} \tag{4.2.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali

$$f_k(z) = z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n b_k} z^k$$

formundaki fonksiyonlar için vardır.

**İspat:** $f \in AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ olsun.(4.2.1) ile verilen katsayı eşitsizliğini kullanarak

$$\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n a_k b_k \leq \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n a_k b_k \leq p^{n+2}(1-\alpha)$$

yazmak mümkündür. Buradan

$$a_k \leq \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n b_k}$$

elde edilir.

$$f_k(z) = z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n b_k} z^k$$

fonksiyonu için

$$a_k = \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[ (k-\alpha p)(p - \beta p + \beta k) \right] k^n b_k}$$

olduğu açıktır.

### 4.3. $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ Sınıfının Büyüme ve Bükülme Teoremleri

Bu bölümde $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfına ait büyüme ve bükülme teoremlerini ispatlayacağız.

**Teorem 4.3.1.** Eğer (4.1.1) ile tanımlı $f$ fonksiyonu $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfında olsun. $k \geq 2p+1$ iken $b_k \geq b_{2p+1}$ olmak üzere $|z| = r < 1$ için,

$$\left|f(z)\right| \geq r^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^n b_{2p+1}} r^{2p+1} \tag{4.3.1}$$

ve

$$\left|f(z)\right| \leq r^p + \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^n b_{2p+1}} r^{2p+1} \tag{4.3.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali $z = r$ ve $z = re^{\frac{i(2m+1)\pi}{p+1}}$ $(m \in \mathbb{Z})$ olmak üzere

$$f(z) = z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^n b_{2p+1}} z^{2p+1}$$

fonksiyonu için vardır.

**İspat:** $f \in AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ olsun. Teorem 4.2.1 den

$$\begin{aligned}\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^n b_{2p+1} \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k &\leq \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right] k^n a_k b_k \\ &\leq p^{n+2}(1-\alpha)\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k \leq \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^n b_{2p+1}} \tag{4.3.3}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $f(z) = z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k \ \left(a_k \geq 0,\ p \in \mathbb{N}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|f(z)\right| &= \left|z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k\right| \\
&\leq |z|^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} |a_k||z|^k \\
&\leq r^p + r^{2p+1} \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k \\
&\leq r^p + \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^n b_{2p+1}} r^{2p+1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left|f(z)\right| &= \left|z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k\right| \\
&\geq |z|^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} |a_k||z|^k \\
&\geq r^p - r^{2p+1} \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k \\
&\geq r^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^n b_{2p+1}} r^{2p+1}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

**Teorem 4.3.2.** Eğer (4.1.1) ile tanımlı $f$ fonksiyonu $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfında ise $k \geq 2p+1$ iken $b_k \geq b_{2p+1}$ olmak üzere $|z| = r < 1$ için,

$$\left|f'(z)\right| \geq pr^{p-1} - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^{n-1} b_{2p+1}} r^{2p} \tag{4.3.4}$$

ve

$$\left|f'(z)\right| \leq pr^{p-1} + \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^{n-1} b_{2p+1}} r^{2p} \tag{4.3.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Eşitlik hali $z=r$ ve $z=r\,e^{\frac{i(2m+1)\pi}{p}}$ $(m\in\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)(2p+1)^{n-1}b_{2p+1}}z^{2p}$$

fonksiyonu için vardır.

**İspat:** $f\in AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ olsun. Teorem 4.2.1 ve (4.3.3) özelliği ile

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty}ka_k\le\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^{n-1}b_{2p+1}}$$

yazılabilir.

Teorem 4.3.1'e benzer şekilde;

$$\begin{aligned}|f'(z)|&=\left|pz^{p-1}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\right|\\&\le p|z|^{p-1}+\sum_{k=2p+1}^{\infty}|ka_k||z|^{k-1}\\&\le pr^{p-1}+r^{2p}\sum_{k=2p+1}^{\infty}ka_k\\&\le pr^{p-1}+\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^{n-1}b_{2p+1}}r^{2p}\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}|f'(z)|&=\left|pz^{p-1}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\right|\\&\ge p|z|^{p-1}-\sum_{k=2p+1}^{\infty}|ka_k||z|^{k-1}\\&\ge pr^{p-1}-r^{2p}\sum_{k=2p+1}^{\infty}ka_k\\&\ge pr^{p-1}-\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(2p+1-\alpha p)(p+\beta p+\beta)\right](2p+1)^{n-1}b_{2p+1}}r^{2p}\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

yazılır.

### 4.4. $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ Sınıfının Ekstrem Noktaları

**Teorem 4.4.1.** $f_p = z^p$

ve

$$f_k(z) = z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} z^k$$

$$\left(b_k \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ n, p \in \mathbb{N},\ k = 2p+1, 2p+2 ...\right)$$

olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonun

$$\lambda_p \geq 0,\ \lambda_k \geq 0 \qquad \text{ve} \quad \lambda_p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k = 1$$

olmak üzere

$$f(z) = \lambda_p z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k f_k(z)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

**İspat:** $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = \lambda_p z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k f_k(z)$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda_p z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k f_k(z) \\ &= \left(1 - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k\right) z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k \left( z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} z^k \right) \\ &= z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} z^k \end{aligned}$$

yazabiliriz. Teorem 4.2.1 den

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n \lambda_k \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} b_k$$

$$= \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k p^{n+2}(1-\alpha) = p^{n+2}(1-\alpha)(1-\lambda_p) \leq p^{n+2}(1-\alpha)$$

elde ederiz. Bu $f(z)$ fonksiyonunun $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfında olduğu anlamına gelir.

Tersine, $f(z) \in AS_g^*(n, \mathrm{p}, \alpha, \beta)$ olsun.

$$a_k \leq \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\lambda_k = \frac{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}{p^{n+2}(1-\alpha)} a_k$$

ve

$$\lambda_p = 1 - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k$$

alarak,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k \\ &= z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} z^k \\ &= \lambda_p z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \lambda_k f_k(z) \end{aligned}$$

yazarız. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.4.2.** $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfının ekstrem noktaları $f_p = z^p$ ve

$$f_k(z) = z^p - \frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k} z^k \quad \left(k \geq 2p+1, \ \ p \in \mathbb{N}\right) \qquad (4.4.1)$$

fonksiyonlarıdır.

**Teorem 4.4.3.** $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfı konveks bir kümedir.

**İspat:**

$$f_i(z) = z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_{k,i} z^k \ , \qquad \left(a_{k,i} \geq 0\right)$$

ile verilen her bir $f_i(z)$ , $(i = 1, 2)$ fonksiyonunun $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfında olduğunu varsayalım.

$$g(z) = \eta f_1(z) + (1-\eta) f_2(z) \ , \qquad (0 \leq \eta < 1)$$

fonksiyonunun $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfında olduğunu göstermek yeterlidir.

$$g(z) = \eta\left(z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_{k,1} z^k\right) + (1-\eta)\left(z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_{k,2} z^k\right)$$

$$= z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[\eta a_{k,1} + (1-\eta) a_{k,2}\right] z^k$$

olur. Teorem 4.2.1. yardımı ile

$$\sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right] k^n \left[\eta a_{k,1} + (1-\eta) a_{k,2}\right] b_k$$

$$= \eta \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right] k^n a_{k,1} b_k + (1-\eta) \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right] k^n a_{k,2} b_k$$

$$\leq \eta p^{n+2}(1-\alpha) + (1-\eta) p^{n+2}(1-\alpha) = p^{n+2}(1-\alpha)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

### 4.5. $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ Sınıfının İntegral Ortalamaları

Bu kesimde, $AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için integral ortalama eşitsizliklerini vereceğiz.

1925 yılında Littlewood, subordinasyon ve integral ortalamalar arasında bir ilişki kuran aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 4.5.1.** $f$ ve $g$ fonksiyonları $U$ birim diskinde analitik ve $f \prec g$ olsun. Bu durumda $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ ve $\mu > 0$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|f(z)\right|^\mu d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|g(z)\right|^\mu d\theta$$

eşitsizliği vardır (Littlewood 1925).

**Teorem 4.5.2.** $f(z) \in AS_g^*(n, p, \alpha, \beta)$ olsun ve (4.4.1) ile tanımlı $f_k(z)$ fonksiyonunu alalım. olsun. Eğer

$$\omega(z)^{k-p} = \frac{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right] k^n b_k}{p^{n+2}(1-\alpha)} \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^{k-p}$$

şeklinde analitik bir $\omega(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $z = re^{i\theta}$ ve $0 < r < 1$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^\mu d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|f_k\left(re^{i\theta}\right)\right|^\mu d\theta \qquad (\mu > 0)$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat:** Teoremi ispatlamak için

$$\int_0^{2\pi}\left|1-\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k z^{k-p}\right|^{\mu}d\theta \le \int_0^{2\pi}\left|1-\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}z^{k-p}\right|^{\mu}d\theta$$

olduğunu göstermeliyiz. Littlewood Subordinasyon Teoreminden;

$$1-\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k z^{k-p} \prec 1-\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}z^{k-p}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Subordinasyon tanımından

$$1-\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k z^{k-p} = 1-\frac{p^{n+2}(1-\alpha)}{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}\left[\omega(z)\right]^{k-p}$$

yazarsak, gerekli düzenlemeler ile

$$\left[\omega(z)\right]^{k-p} = \frac{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}{p^{n+2}(1-\alpha)}\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k z^{k-p}$$

elde ederiz. Böylece $z=0$ için $\omega(0)=0$ olacak şekilde $U$ birim diskinde analitik bir $\omega(z)$ fonksiyonu vardır.

Şimdi $\omega(z)$ fonksiyonunun $\left|\omega(z)\right|<1$ eşitsizliğini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|\omega(z)\right|^{k-p} &= \left|\frac{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}{p^{n+2}(1-\alpha)}\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k z^{k-p}\right|\\ &\le \frac{\left[(k-\alpha p)(p-\beta p+\beta k)\right]k^n b_k}{p^{n+2}(1-\alpha)}\sum_{k=2p+1}^{\infty}a_k \left|z\right|^{k-p}\\ &\le \left|z\right|^{k-p}<1\end{aligned}$$

buluruz. Bu teoremin ispatını tamamlar.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda

$$f(z) = z^p - \sum_{k=2p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0,\ p \in \mathbb{N},\ z \in U)$$

ve

$$g(z) = z^p + \sum_{k=2p+1}^{\infty} b_k z^k \quad (b_k \geq 0,\ p \in \mathbb{N},\ z \in U)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{p}\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\beta)D^{n+1}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+2}(f*g)(z)}{(1-\beta)D^{n}(f*g)(z)+\frac{\beta}{p}D^{n+1}(f*g)(z)}\right\} > \alpha \qquad (0 \leq \beta \leq 1,\ 0 \leq \alpha < 1,\ \ n,p \in \mathbb{N})$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan $AS_g^*(n,p,\alpha,\beta)$ sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. Elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve onlara ait sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 5.1.** $\beta = 0$, $n = 0$ alınırsa Ali ve ark. (2006) tarafından çalışılan $TS_g^*(p,m,\alpha)$ sınıfı elde edilir.

**Sonuç 5.2.** $n = 0$ ve $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alınırsa yine Ali ve ark. (2006) tarafından çalışılan $TPC(p,m,\alpha,\beta)$ sınıfı elde edilir.

**Sonuç 5.3.** $\beta = 0$, $p = 1$, $n = 0$ ve $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ için Silverman (1975) tarafından çalışılan $S^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

**Sonuç 5.4.** $\beta = 0$, $p = 1$, $n = 0$ ve $g(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ için Silverman (1975) tarafından çalışılan $C(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Sonuç olarak, bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların bir genellemesidir.

## 6. KAYNAKLAR

Alexander J.W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann.of Math., 17, 12-22.

Ali R.M., Khan M.H, Ravichandran V., and Subramanian K.G., 2006. A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution, Bulletin of the Korean Mathematical Society, vol. 43, no. 1, pp. 179-188.

Bieberbach L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. pp. 940–955.

Branges L.de., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Mathematica 154 (1), 137-152.

Duren P L., 1983. Univalent Functions, Springer–Verlag, New York.

Garabedian, M. Schiffer, 1955. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Rational Mech. Anal., 4 427–465.

Goodman A.W,. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Gronwall, Some remarks on conformal ,Ann. Math., 16 (1914 / 1915), 72–76.

Grunsky, H., 1939. Koezientenbedingungen fur schlicht abbildende meromorphe functionen, Math. Z., 45, 29-61.

Güney H.Ö and Salagean G.S., 2007. Further properties of $\beta$ -Pascu convex functions of order $\alpha$ , International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 34017.

Koebe, P.,1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven, Nach. Ges. Wiss. Gottingen 191-210.

Lowner, 1923. Untersuchungen ¨uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I., Math. Ann., 89 , 103–121,

Lindelöf E., 1909. Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctions onogènes etsur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, Acta.Soc.Sci.Fenn., 35, 7, 1–35.

Littlewood J.E., 1925. On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math.Soc.23,481-519.

Loewner, C.1917. *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises* $|z|<1$, *die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden,* Ber.Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, **69** 89-106.

Nevanlınna, R., 1920-1921 *Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Översikt av Finska Vetenskaps,* Societetens Förhandlingar, No. 6 **63** 1-21

Noshiro K., 1934-1935. On the theory of schlicht functions, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 2, 129-155.

Ozowa, 1969. On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Kodai Math. Sem. Rep., 21 , 97–128.

Pakla B. P., 1991. An Introduction to Complex Function Theory.Springer-Verlag, New York, pp.560.

Pascu N.N. and Podaru V., 1983. On the radius of alpha-starlikeness for starlike functions of order beta, Lecture Notes in Math., 1013, 335-349, Springer-Verlag.

Pederson, 1968/1969. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Arch. Rational Mech. Anal., 31 , 331–351.

Ponnusamy S. and Silverman H., 2006. Complex variables with Applications, Birkhäuser, Boston.

Pommerenke Ch., 1975. Univalent functions, Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.

R.M.Ali,M.H.Khan,V.Ravichandran,and K.G.Subramanian, 1925. A class of multivalent functions with negatif coefficients defined by convolution,''Bulletin of the Korean Matematical Society,vol. 43, no. 1, pp.481-519,

Rogosinski W., 1943. On the coefficients of subordinate functions, Proc, London Math. Soc. 2, 48-82.

Silverman H., 1975. Univalent functions with negative coefficients, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 51, Number 1, , 109-116.

Salagean G.S.,1983. Subclasses of univalent functions, Lecture Notes in MathSpringer Verlag 1013, 362-372

Study, E., 1913. Konforme Abbildung Einfache-Zussammenh¨angender Bereiche, B. G. Teubne Leipzig/Berlin.

Warschawski S.E., 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping,Trans.Amer.Math.Soc., 38 , 310-340.

**ÖZGEÇMİŞ**

1985 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2006 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne başladım ve 2010 yılında mezun oldum. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım. 2011 yılında MEB de İlköğretim Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. Halen MEB de ki görevime devam etmekteyim. Evliyim. Bir oğlum var.