T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÖLÇÜM HATALI DEĞİŞKENLİ YARI PARAMETRİK REGRESYON MODELLERİ

**Seçil TOPRAK**

**DOKTORA TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DİYARBAKIR**
**Eylül 2015**

## TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR'a, bilimsel bakış açısı ve vermiş olduğu her türlü destek için ikinci tez danışmanı hocam Sayın Prof. Dr. Müjgan TEZ'e ve beni destekleyen bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında her an beni yalnız bırakmayıp bana destek olan ve beni daima yüreklendiren sevgili annem Sultan YALAZ'a ve sıkıntılı anlarımda bana manevi desteğini esirgemeyen arkadaşım Arife ATAY'a teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

# ÖZET

ÖLÇÜM HATALI DEĞİŞKENLİ YARI PARAMETRİK REGRESYON MODELLERİ

DOKTORA TEZİ

Seçil TOPRAK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu tezde, bir yarı parametrik regresyon modeli olan kısmi doğrusal modelde ölçüm hatasından kaynaklı olarak hatalı ölçülmüş değişkenlerin olması ve ölçüm hatasının yoğunluk fonksiyonunun bilinmemesi durumunda parametrelerin tahmini için kullanılabilecek bir metot önerilmiştir.

İlk olarak parametrik, parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon modelleri, regresyonda düzeltme kavramı, pürüzlülük ceza yaklaşımı ve parametrik olmayan regresyonda düzeltme yöntemleri tanıtılmıştır. Daha sonra değişkenleri hatalı modeller üzerinde durularak değişkenler ‘‘*bilinen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon yöntemleri incelenmiştir. Bu yöntemler arasından; değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon, parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri tanıtılmıştır. Son olarak değişkenler ‘‘*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan regresyon yöntemleri içerisinde incelenen değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon yöntemi tanıtılmıştır. Bu yönteme dayalı olarak elde edilen ve parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri için kernel dekonvolüsyon tekniğine alternatif olarak görülen yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler ile elde edilen tahmin edicilerin örneklem büyüklüğü $n$ sonsuza giderken yakınsadığı parametre çevresindeki dağılımının normal dağılıma uyup uymadığını gözlemlemek için bu tahmin edicilerin asimptotik normallik özellikleri incelenmiştir. Tahmin edicilerin sonlu örneklem özellikleri Monte Carlo simülasyonu yaklaşımı ile araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Hatalı Değişkenler, Kısmi Doğrusal Model, Yarı Parametrik Regresyon, Bilinmeyen Yoğunluklu Ölçüm Hatası, Asimptotik Normallik.

# ABSTRACT

SEMIPARAMETRIC REGRESSION MODELS WITH ERRORS IN VARIABLES

PHd THESIS

Seçil TOPRAK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2015

In this dissertation, a method has been proposed to be used for the partially linear model, a semiparametric regression model, when variables are measured with errors and the densities of these errors are unknown.

Firstly parametric, nonparametric and semiparametric regression models, smoothing in regression, roughness penalty approach and smoothing methods in nonparametric regression are introduced. Then, as a nonparametric and semiparametric regression method when variables are measured with an error that has *''known''* density, nonparametric regression with errors in variables models, semiparametric regression models with measurement error in the nonparametric part and semiparametric regression models with errors in all variables are introduced. Finally, as a nonparametric regression method when variables are measured with an error that has *''unknown''* density, nonparametric regression with errors in variables models are introduced and semiparametric regression models with measurement error in the nonparametric part and semiparametric regression models with errors in all variables which are obtained according to this method and seen as an alternative to the kernel deconvolution techniques have been developed. These estimators' asymptotic normality properties are analyzed to observe whether they fit a normal distribution around the parameters they converge when the sample size of estimators obtained by these methods $n$ goes to infinity. The finite sample properties of estimators were investigated by Monte Carlo simulation approach.

**Key Words:** Errors in Variables, Partially Linear Model, Semiparametric Regression, Unknown Error Density, Asymptotic Normality.

# ÇİZELGE LİSTESİ

## ŞEKİL LİSTESİ

**Şekil No** **Sayfa**

# EK LİSTESİ

## KISALTMA VE SİMGELER

**Kısaltmalar**

| | |
|---|---|
| RSS | : Hata kareler toplamı |
| MSE | : Hata kareler ortalaması |
| MISE | : Bütünleşik hata kareler ortalaması |
| CV | : Cross validation |
| GCV | : Genelleştirilmiş çapraz geçerlilik |
| $C_p$ | : Mallows'un $C_p$ ölçütü |
| AIC | : Akaike bilgi kriteri |
| RECP | : Klasik pilotları kullanan risk tahmini |
| $R$ | : Risk fonksiyonu |
| EDS | : Tam kat düzeltme |

**Mantık**

| | |
|---|---|
| $=$ | : Eşittir |
| $\triangleq$ | : Delta eşitliği |
| $\approx$ | : Hemen hemen eşittir |
| $<$ | : Küçüktür |
| $>$ | : Büyüktür |
| $\leq$ | : Küçük veya eşittir |
| $\geq$ | : Büyük veya eşittir |
| $\preccurlyeq$ | : Önce gelir veya eşittir |
| $\succcurlyeq$ | : Sonra gelir veya eşittir |

**Kümeler**

| | |
|---|---|
| $\in$ | : Elemanıdır |
| $\subseteq$ | : Altkümesidir |
| $\times$ | : Kartezyen çarpım |
| $\bigcup$ | : Çoklu birleşim |

**Bazı Özel Kümeler**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Gerçel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^n$ | : $n$ boyutlu gerçel sayılar kümesi |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\boldsymbol{C}$ | : Kompleks sayılar kümesi |

**Matematiksel Semboller**

| | |
|---|---|
| $\sum$ | : Toplam sembolü |
| $\prod$ | : Çarpım sembolü |
| $\lVert . \rVert_2$ | : Öklit normu |
| $\partial$ | : Kısmi türev sembolü |
| $\int$ | : İntegral sembolü |
| $\mathrm{V}^{\mathrm{T}}$ | : V matrisinin transpozu |
| $(\mathrm{V})^{-1}$ | : V matrisinin tersi |
| $H$ | : Şapka matrisi |
| $tr(\mathrm{V})$ | : V matrisinin izi |
| $v \to \infty$ | : $v$ sonsuza giderken |
| $\lim_{n\to\infty}$ | : $n$ sonsuza giderken limit |
| log | : Logaritma |
| ln | : Doğal logaritma |
| exp | : Üstel fonksiyon |
| $inf$ | : Alt sınırların en büyüğü (İnfimum) |
| $sup$ | : Üst sınırların en küçüğü (Supremum) |
| $max(a, b)$ | : $a$ ve $b$'nin maksimumu |
| $min(m, n)$ | : $m$ ve $n$'nin minimumu |
| $o$ | : Küçük o gösterimi |
| $O$ | : Büyük o gösterimi |

**İstatistiksel Semboller**

| | |
|---|---|
| $S^2$ | : Örneklem varyansı |
| $\sigma^2$ | : Kitle varyansı |
| $\phi_K$ | : $K$ fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu |
| $K$ | : Kernel fonksiyonu |
| $K_n$ | : Kernel fonksiyonunun dekonvolüsyonu |
| $\kappa$ | : Kernel fonksiyonunun fourier fonksiyonu |
| $\widetilde{K}$ | : Değiştirilmiş kernel fonksiyonu |
| $W$ | : Pencere fonksiyonu |

| | |
|---|---|
| $E$ | : Beklenen dDenklemi buraya yazın.eğer |
| $f$ | : Yoğunluk fonksiyonu |
| $\hat{f}$ | : Tahmin edilmiş fonksiyon |
| $\hat{f}_n$ | : $n$ büyüklüğündeki örneklem için tahmin edilmiş fonksiyon |
| $F$ | : Dağılım fonksiyonu |
| $n$ | : Örneklem büyüklüğü |
| $p$ | : Matris boyutu |
| $\Sigma$ | : Kovaryans matrisi |
| $h$ | : Bant genişliği |
| $h_n$ | : $n$ büyüklüğündeki örneklem için seçilmiş bant genişliği |
| $w$ | : Ağırlık fonksiyonu |
| $\tilde{x}^*$ | : Verilen bir $x^*$ noktası |
| $E(X\|X^*)$ | : $X^*$ biliniyorken $X$in beklenen değeri |
| $N\left(0, \sigma_{\Delta y}^2\right)$ | : 0 ortalamalı ve $\sigma_{\Delta y}^2$ varyanslı normal dağılım |
| $\sigma_{\Delta y}^2$ | : Hata teriminin varyansı |
| $L(0, \sigma_{\Delta y}^2)$ | : 0 ortalamalı ve $\sigma_{\Delta y}^2$ varyanslı laplace dağılımı |

# 1. GİRİŞ

İstatistik biliminin en önemli konularından biri olan ve matematik, finans, ekonomi, tıp, ziraat, mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılan regresyon analizi; gözlenen bir olayın diğer hangi olayların etkisi altında olduğunun araştırılması temeline dayanmaktadır. Regresyon analizinde bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında bir ilişki olup olmadığı, bir ilişki olması durumunda bu ilişkinin türü ve gücü, belirli koşullar altında özel bir değişken veya değişkenler grubunun diğer değişken veya değişkenler grubu üzerindeki etkisi ve bu etkinin nasıl değiştiği gibi bilgiler de elde edilmeye çalışılır. Regresyon analizi ile gözlem değerleri ve etkilenilen değişkenler arasındaki ortalama ilişki matematiksel bir fonksiyon ile ifade edilir.

Regresyon analizi bazı varsayımlara dayanır. Bu varsayımların en önemlisi, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin şeklinin biliniyor olmasıdır. Örneğin, parametrik regresyon analizindeki matematiksel ifadede bağımsız değişkenlerle bağımlı değişkenin doğrusal bir ilişki içinde olduğu varsayılır. Varsayımların sağlanmadığı durumlarda yapılan tahminler iyi bir tahmin olmayacağından parametrik regresyondaki doğrusallık varsayımını esnetebilen parametrik olmayan (nonparametric) ve yarı parametrik (semiparametric) regresyon yöntemlerine ihtiyaç duyulur.

Bağımsız değişken sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda parametrik olmayan yöntemlerle analizlerin yapılması ve grafiklerin yorumlanması zor olduğundan alternatif bir yönteme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumda yarı parametrik modeller kullanılabilir. Yarı parametrik modellerde zaman etkisi ve şansa bağlı etkiler parametrik olmayan yöntemlerle modele eklenirken sürekli bağımsız değişken etkileri parametrik yöntemlerle modele eklenir.

Yarı parametrik regresyon modeli için var olan yaklaşımların tümü farklı parametrik olmayan regresyon yöntemlerine bağlıdır. Yarı parametrik regresyon modelleri karmaşık veri kümelerini bizim anlayabileceğimiz biçimde özetleyip, uygulamada verilerin önemsiz detaylarını göz ardı ederken önemli olan özelliklerini muhafaza eder ve böylece sağlam kararlar verilmesini sağlarlar (Ruppert ve ark. 2003).

Yarı parametrik regresyon modeli hem parametrik hem de parametrik olmayan regresyon fonksiyonunun birleşiminden oluştuğu için "*kısmi doğrusal model*" olarak da adlandırılmaktadır. Yarı parametrik regresyon modelinde, parametrik değişkenlerin etkileri yoksa ya da bu değişkenler analizde yer almıyorsa artık yarı parametrik regresyon modeli parametrik olmayan regresyon modeline dönüşür.

Bağımsız değişkenlerde ölçüm hatalarının bulunduğu regresyon modelleri istatistikte değişkenleri hatalı modeller ya da ölçüm hatalı modeller olarak bilinmektedir. Standart regresyon modelleri bu değişkenlerin tam olarak ölçüldüğünü ya da hatasız olarak gözlemlendiğini varsayarken bu modeller bağımlı değişkenlerdeki ya da karşıt değişkenlerdeki hataları önemserler. Bazı değişkenlerin hatalı ölçüldüğü durumlarda standart varsayımlara dayalı tahminler tutarsız tahminlere neden olmaktadır. Basit doğrusal regresyon için yanlış tahmin edilmiş bir katsayının etkisi ‘‘*etki azalması yanlılığı*’’ (attenuation bias) olarak bilinir. Doğrusal olmayan modellerde ise yanlılığın açıklanması daha karmaşık etkilere bağlı olabilmektedir (Wikipedia 2014).

Açıklayıcı değişkenlerde ölçüm hatasının varlığından kaynaklanan yanlılık, regresyon analizinde sık karşılaşılan bir problemdir. Bu problemin çözümleri parametrik regresyon modelleri için sayısız olarak üretilmesine rağmen parametrik olmayan tanımlamalarda bu problem nispeten keşfedilmemiş kalmıştır.

Parametrik olmayan değişkenleri hatalı problemlerin bazı yönleri daha önce araştırılmıştır. Bir gözlenmiş değişken, hatalı ölçüldüğünde ve bu hatanın yoğunluğu biliniyorsa, bu değişkenin yoğunluğunun tahmini problemine literatürde önemle yer verilmektedir. Böyle durumlarda yakınsamanın optimal oranına ulaşmak için çoğunlukla kernel dekonvolüsyon tahmin edicisi kullanılmaktadır (Fan 1991). Bağımsız değişken bilinen bir dağılımdan gelen bir hata ile ölçüldüğü durumlarda regresyon fonksiyonunun parametrik olmayan tahmini ayrıca çalışılmıştır. Bu durumda optimal yakınsama oranına ulaşmak için kernel dekonvolüsyona dayalı kernel regresyon tahmin edicisinin bilinmesi gereklidir (Fan ve Truong 1993). Daha zorlu bir problem ise bağımsız değişkenler ‘‘*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen bir hata ile ölçüldüğünde regresyon fonksiyonlarının ve yoğunluklarının tahminidir. Gözlenmemiş bir rasgele değişkenin iki hata bulaşmış ölçümlerinin eklemeli yoğunluğu bilindiğinde, bu değişkenin yoğunluğunun tanımlanması olasıdır (Rao 1992). Li ve Vuong (1998), bu tanımlamanın deneysel bir şeklinin onları bilinen yakınsama oranlı tutarlı bir tahmin ediciye götürdüğünü göstermişlerdir.

Parametrik olmayan yoğunluk tahmini probleminin tersine, bağımsız değişkenler bilinmeyen bir dağılımdan gelen bir hata ile ölçüldüğünde, koşullu beklentilerin parametrik olmayan tahminleri Schennach (2004b) tarafından çözümlenmiştir. Schennach, bilinmeyen bir dağılımın hatası bulaşmış bağımsız değişkenleri göz önüne alan geleneksel Nadaraya-Watson kernel regresyon tahmin edicisini genişleterek bu boşluğu doldurmuştur. Ayrıca sadece tahmin edicinin yakınsama oranını ortaya koymamış, onun asimtotik dağılımını da sağlamıştır.

Yarı parametrik regresyon modelinde parametrik olmayan kısımdaki değişken bilinen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğünde, tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen $\beta$'nın bir tahmini Liang ve ark. (1997) tarafından elde edilmiştir. Ancak bu çalışmada $\beta$'nın parametrik oranda tahmin edilebilir olduğu göz ardı edilmiştir. Liang (2000) bu problemlere daha anlaşılabilir bir yanıt sunmaktadır.

Yarı parametrik regresyon modelinde hem parametrik olmayan kısımdaki değişken hem de parametrik kısımdaki değişken hatalı ölçüldüğünde $\beta$'nın tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen bir tahmin problemi de Zhu ve Cui (2003) tarafından çalışılmıştır. Buradaki parametrik olmayan kısımdaki değişkenin bilinen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğü düşünülmektedir. Buna karşın, yarı parametrik regresyon modelinde parametrik olmayan kısımdaki değişken bilinmeyen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğünde çözümlerin nasıl elde edilebileceği bilinmemektedir.

Bu çalışmada koşullu beklentilerin yarı parametrik tahminleri üretilerek, ölçüm hataları bilinmeyen bir dağılımdan geldiği zaman kullanılabilecek bir metot geliştirilmiştir. Bu metot ile, açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olduğu zaman eksik ölçülmüş bir değişkenin tekrar eden bir gözlem değeri olduğunda tutarlı olan bir yarı parametrik regresyon tahmin edicisi elde edilmiştir. Elde edilen bu metot, parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olan yarı parametrik model ve hem parametrik olmayan bölümde hem de parametrik bölümde ölçüm hataları olan yarı parametrik model için ayrı ayrı oluşturulmuştur.

Yarı parametrik regresyon modelinde, $\beta$'nın bilinmesi durumunda parametrik bölüm yanıt değişkeninden çıkarıldığında parametrik olmayan regresyon modeli elde edilmektedir. Parametrik olmayan bölümün tahmin edicisinin asimptotik olarak normal olduğu durumu da daha önce Schennach (2004b) tarafından gösterilmiştir. Burada ise yarı parametrik regresyon modelinin parametrik bölümündeki $\beta$'nın bir tahmini elde edilmiş ve ilgili tahmin edicinin asimptotik olarak normal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, hem parametrik olmayan bölümde hem de parametrik bölümde ölçüm hataları olan yarı parametrik regresyon modelinin, parametrik olmayan bölümünün tahmin edicisinin asimptotik olarak normal olduğu gösterilmiş ve parametrik bölümdeki $\beta$'nın bir tahmini elde edilerek bu tahmin edicinin asimptotik olarak normal olduğu gösterilmiştir. Sonuç değerleri çoğunlukla ölçüm hatasının yoğunluğu bilindiğinde daha kuvvetli varsayımlar altında tutarlı bir tahmin sağlayan Kernel dekonvolüsyon tahmin edicileriyle karşılaştırılabilir. Bu sonucun kullanışlılığı tekrarlı ölçümlerin sıklıkla bulunduğu veri setlerindeki gözlemlerden kaynaklanmaktadır. Örneğin, verilen bir miktar zaman içinde yeniden ölçülebilir ya da aynı miktar başka biri tarafından (farklı bir aile üyesi ya da bir çalışan ve işveren) kaydedilebilir. Ölçümlerden biri üzerindeki hatanın sıfır ortalamalı olmasına gerek yoktur. Bu yüzden geçerli tekrarlı ölçümlerin kümesi daha genel göstergelere ya da sistematik eğilim sergileyen tekrarlı ölçümlere genişletilebilir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, tezin konusu, daha önce bu konuyla ilgili yapılmış olan çalışmalar, tezin içeriği ve önemi hakkında bilgi verilmektedir.

İkinci bölüm, üzerinde çalışılan konu ile ilgili olarak daha önce yapılmış olan çalışmaların kısa özetler halinde tanıtıldığı kaynak özetlerini içermektedir.

Üçüncü bölüm, çalışmada kullanılan ya da üzerinde çalışılan objeyi belirten materyal ve araştırmanın amacına ulaşmasında kullanılan teknik ya da teknikleri belirten metot bölümlerini içermektedir. Bu bölüm; parametrik, parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon modellerinin tanıtımını, regresyonda düzeltme kavramı, pürüzlülük ceza yaklaşımı ve parametrik olmayan regresyonda düzeltme yöntemlerini içermektedir. Ayrıca bu bölümde değişkenleri hatalı modellerin tanıtımı üzerinde durulmaktadır. Değişkenler ''*bilinen*'' bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde, değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon, parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri burada ele alınmıştır. Daha sonra da değişkenler ‘’*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan regresyon yöntemleri içerisinde incelenen değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon yöntemi tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm, tez çalışmasından elde edilen bulguları içermektedir. Bu bölümde değişkenler ‘’*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan bölümde ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri için kernel dekonvolüsyon metoduna alternatif olarak görülen yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler ile elde edilen tahmin edicilerin örneklem büyüklüğü $n$ sonsuza giderken yakınsadığı parametre çevresindeki dağılımının normal dağılıma uyup uymadığını gözlemlemek için bu tahmin edicilerin asimptotik normallik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde ise tahmin edicilerin sonlu örneklem özellikleri Monte Carlo simülasyonu yaklaşımı ile araştırılmış, sonuçlar ve önerilere değinilmiştir.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

*Härdle ve ark. 2004*, *Ruppert ve ark. 2003*'de; parametrik olmayan ve yarı parametrik modeller ile regresyon yöntemleri incelenmiştir.

*Loader 2004*'de regresyonda düzeltme kavramları üzerinde durulmuştur.

*Tabakan 2009*'da yarı parametrik regresyonda tahmin metodları, regresyonda düzeltme kavramı ve parametrik olmayan regresyonda düzeltme yöntemleri tanıtılmıştır.

*Wikipedia 2014*'de değişkenleri hatalı modeller hakkında bilgi verilmiştir.

*Fan 1991*'de parametrik olmayan değişkenleri hatalı problemlerin bazı yönleri araştırılmıştır. Bir gözlenmiş değişken, hatalı ölçüldüğünde ve bu hatanın yoğunluğu biliniyorsa, bu değişkenin yoğunluğunun tahmini durumunda yakınsamanın optimal oranına ulaşmak için kernel dekonvolüsyon tahmin edicisi kullanılmıştır.

*Fan ve Truong 1993*'de bağımsız değişken bilinen bir dağılımdan çizilen bir hata ile ölçüldüğü zaman bir regresyon fonksiyonunun parametrik olmayan tahmininin problemi çalışılmıştır. Bu durumda kernel dekonvolüsyona dayalı kernel regresyon tahmin edicisinin optimal yakınsama oranına ulaşmak için bilinmesi gerektiği belirtilmiştir.

*Rao, 1992*'ye göre bağımsız değişkenler bilinmeyen bir dağılımdan gelen bir hata ile ölçüldüğünde regresyon fonksiyonlarının ve yoğunlukların tahmini daha zorlu bir problemdir. Gözlenmemiş bir rasgele değişkenin iki hata bulaşmış ölçümlerinin eklemeli yoğunluğu bilindiğinde, bu değişkenin yoğunluğunun tanımlanması olasıdır.

*Li ve Vuong 1998*'de bu tanımlamanın deneysel bir versiyonunun çalışanları bilinen yakınsama oranlı tutarlı bir tahmin ediciye götürdüğü gösterilmiştir.

*Schennach 2004b* ile parametrik olmayan yoğunluk tahmini probleminin tersine, bağımsız değişkenler bilinmeyen bir dağılımdan gelen bir hata ile ölçüldüğünde, koşullu beklentilerin parametrik olmayan tahminleri çözüm kazanmıştır. Schennach, bilinmeyen bir dağılımın hatası bulaşmış bağımsız değişkenleri göz önüne alan geleneksel Nadaraya-Watson kernel regresyon tahmin edicisini genişleterek bu boşluğu doldurmuştur. Ayrıca sadece tahmin edicinin yakınsama oranını ortaya koymamış, onun asimtotik dağılımını da sağlamıştır.

*Liang ve ark. 1997*'de yarı parametrik regresyon modelinde parametrik olmayan kısımdaki değişken bilinen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğünde, tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen $\beta$'nın bir tahmini elde edilmiştir.

*Liang 2000*'de, 1997 yılında Liang ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada $\beta$'nın parametrik oranda tahmin edilebilir olduğu göz ardı edildiğinden yola çıkılarak oluşan problemlere daha pozitif bir cevap sunulmaktadır.

*Zhu ve Cui 2003*'de yarı parametrik regresyon modelinde hem parametrik olmayan kısımdaki değişken hem de parametrik kısımdaki değişken hatalı ölçüldüğünde $\beta$'nın tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen bir tahmin problemi çalışılmıştır.

*MATLAB* bilgisayar programında; çeşitli matematiksel formüllerin çözümü için kodlar yazılarak zamandan tasarruf edilmesi ve olası hataların önüne geçilmesi söz konusu olmuştur.

Burada belirtilen internet belgesi, bilgisayar programı, tez, kitap ve makaleler dışında kaynaklar bölümünde yer alan *internet belgeleri, makaleler, kitaplar ve tezler* de bu çalışmada kullanılan metot ve denklemlerin incelenmesinde yol gösterici olmuştur.

# 3. MATERYAL VE METOT

## 3.1 Materyal

Bu Doktora Tez Çalışması, bir yarı parametrik regresyon modeli olan kısmi doğrusal modelde, ölçüm hatasından kaynaklı olarak hatalı ölçülmüş değişkenlerin olması ve ölçüm hatasının yoğunluk fonksiyonunun bilinmemesi durumunda parametrelerin tahmini için kullanılabilecek bir metodun geliştirilmesi üzerine kurulmuştur.

Burada parametrik, parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon modelleri, regresyonda düzeltme kavramı, pürüzlülük ceza yaklaşımı ve parametrik olmayan regresyonda düzeltme yöntemleri tanıtılacaktır. Daha sonra değişkenleri hatalı modeller üzerinde durulacaktır. Değişkenler ‘‘*bilinen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon yöntemleri arasından; değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon, parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri açıklanacaktır. Tüm bu bilgiler ile birlikte değişkenler ‘‘*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon yöntemi yardımıyla ‘’yarı parametrik regresyon modelinde parametrik olmayan kısımdaki değişken bilinmeyen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğünde parametre tahminleri nasıl elde edilebilir?’’ sorusuna cevap verecek bir modelin inşası için gerekli bilgi ve yöntemler verilecektir.

Materyal olarak kullandığımız “ölçüm hatalı değişkenli parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon” kavramı ile ilgili olarak çeşitli kaynaklar araştırılmış ve genel tanımlamaların yanında bu modeller için parametre tahmini yapılırken kernel dekonvolüsyon metodunun kullanıldığı görülmüştür. Ancak tüm bu ölçüm hatalı değişkenli yarı parametrik regresyon modellerinde ölçüm hatasının bilinen bir dağılımdan geldiği varsayılmıştır. Ölçüm hatalı değişkenli yarı parametrik regresyon modellerinde ölçüm hatasının bilinmeyen bir dağılımdan geldiği varsayımı ile bir yöntemin geliştirildiğine rastlanmamıştır.

## 3.2 Metot

Ölçüm hatalı değişkenli yarı parametrik regresyon modellerinde ölçüm hatasının bilinmeyen bir dağılımdan geldiği varsayımı ile bir yöntemin elde edilebilmesi için öncelikle parametrik, parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon modelleri, regresyonda düzeltme kavramı, pürüzlülük ceza yaklaşımı ve parametrik olmayan regresyonda düzeltme yöntemleri tanıtılacaktır.

Öncelikle değişkenleri hatalı modeller hakkında bilgi verilecektir. Değişkenler ‘’*bilinen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon, parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelleri incelenecektir. Son olarak değişkenler ‘’*bilinmeyen*’’ bir dağılımdan gelen hata ile ölçüldüğünde parametrik olmayan regresyon yöntemleri içerisinde incelenen değişkenleri hatalı parametrik olmayan regresyon yöntemi üzerinde durulacaktır.

### 3.2.1 Regresyon Modelleri, Regresyonda Düzeltme Kavramı ve Parametrik Olmayan Regresyonda Düzeltme Yöntemleri

Regresyon, bağımlı değişkenin ( $y$ ) bağımsız değişkenlerin ($x_1$, $x_2$, ..., $x_p$) bir fonksiyonu olarak ifade edilmesidir. Fonksiyonel bir bağıntı olan regresyon denklemi, bağımsız değişkenlerdeki değişimlerin bağımlı değişkeni hangi yönde ve hangi oranda etkilediğini, yani bağımsız değişkenlere göre bağımlı değişkenin koşullu ortalamasının fonksiyonel bağımlılığını gösterir. Bu durumda; değişkenler arasındaki fonksiyonel bağıntıyı en iyi ifade eden matematiksel denklemi kurmak ve bu denklemi bağımlı değişkenin tahmininde ve istatistiksel analizde kullanmak regresyon analizinin asıl amacı olarak gösterilebilir.

Bu bölümde sırasıyla parametrik regresyon, parametrik olmayan regresyon ve yarı parametrik regresyon modelleri tanıtılmış, parametrik olmayan regresyonda düzeltme (smoothing) kavramı ve düzeltme yöntemleri incelenmiştir.

### 3.2.1.1 Parametrik Regresyon

Regresyon denkleminin bağımsız değişkenlerin bir doğrusal fonksiyonu olarak yazılabildiğinin varsayıldığı *'Parametrik regresyon modeli'*nde bağımlı ve bağımsız değişkenler ile bu değişkenler arasındaki ortalama ilişki matematiksel bir fonksiyonla ifade edilmekte ve bu fonksiyondaki parametre vektörleri açıkça gösterilmektedir. $X$ biliniyorken $y$ 'nin ortalama dağılımının $X$ ile fonksiyonel ilişkisi $E(y|X)$ koşullu beklenen değeri ile gösterilir ve

$$E(y|X) = X\beta$$

biçiminde veya

$$y = X\beta + \Delta y \tag{3.1}$$

biçiminde yazılır. Burada $\Delta y = y - E(y|X)$ ifadesi $y$'den $E(y|X)$ koşullu beklenen değerinin sapmasıdır (Härdle ve ark. 2004). Eşitlik (3.1)'de gözlem sayısı $n$, bağımsız değişken sayısı $p$ olmak üzere; $y$, $(n \times 1)$ boyutlu bağımlı değişken vektörü, $X$, $(n \times p)$ boyutlu ve $p$ ranklı bağımsız değişkenler matrisi, $\beta$, $(p \times 1)$ boyutlu bilinmeyen regresyon katsayıları vektörü, $\Delta y$ ise $(n \times 1)$ boyutlu gözlenemeyen 0 ortalamalı ve sabit varyanslı rasgele hatalar vektörüdür. Doğrusal regresyon modelini belirlemek için öncelikle bilinmeyen $\beta$ parametreleri tahmin edilmelidir. Eşitlik (3.1)'deki $(y_i, x_i)$ gözlem değerlerine karşılık gelen nokta ile bu noktanın en küçük kareler yöntemi ile elde edilmiş olan doğru üzerindeki izdüşümleri toplamını gösteren $\Delta y_i = y_i - \hat{y}_i$ sıfır olmalı ve bu farkın kareler toplamı da minimum olmalıdır. Öyleyse parametre tahminleri,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i'\hat{\beta}\right)^2$$

ile elde edilebilir.

Eşitlik (3.1)'deki $\beta$ parametrelerinin sonlu olduğunun ve $X$ bağımsız değişkenler arasındaki fonksiyonel yapının $X\beta$ şeklinde doğrusal olduğunun varsayılması gibi parametrik yaklaşım tümüyle varsayımlara dayalıdır. Ancak değişkenler arasında doğrusal olmayan ilişkiler bulunuyorsa parametrik yöntemler yerine parametrik olmayan yöntemlere ihtiyaç duyulur.

#### 3.2.1.2 Parametrik Olmayan Regresyon

Bir $y$ bağımlı değişkeni ve bu değişkenle bilinmeyen bir ilişki içindeki $x^*$ bağımsız değişkeni ile oluşturulan *'parametrik olmayan regresyon modeli'*,

$$y_i = g(x_i^*) + \Delta y_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.2}$$

biçimindedir. Burada $y_i$, bağımlı değişkene ait gözlem değerleri, $g \in C^2[a,b]$ olan bir düzgün fonksiyon, $x_i^*$ parametrik olmayan bağımsız değişkenlere ait gözlem değerleri ve $\Delta y_i$, 0 ortalamalı ve $\sigma^2$ sabit varyanslı, bağımsız ve özdeş olarak dağılan rasgele hata terimleridir.

Parametrik olmayan regresyon analizinde amaç, parametreleri tahmin etmekten çok bilinmeyen yanıt fonksiyonu (ortalama fonksiyon) olan $g\,(x^*)$'i tahmin etmektir. $E(y|x^*) = g(x^*)$ koşullu beklenen fonksiyonunu tahmin etmek, $y$ bağımlı değişkeni ile $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ bağımsız değişkenleri arasındaki ilişkiyi açıklayan en yaygın yöntemdir.

$g$ fonksiyonunu tahmin etmek için düzeltme yöntemleri kullanılır. Parametrik tahmin edicilere oranla parametrik olmayan tahmin edicilerin yakınsama oranı genellikle daha yavaştır. Bu nedenle, parametrik tahmin ile kıyaslandığında parametrik olmayan yöntemler daha büyük örneklem hacimleri gerektirir (Yatchew 1998). Ancak parametrik modellerde olduğu gibi bu tür modellerde de istatistiksel doğruluk örneklem hacmine değil tahmin edicilerin varyans ve kovaryanslarına bağlıdır (Heerde ve ark. 2001, Yatchew 1998).

Aykırı değerlerin (outliers) bulunduğu veri setleri için de parametrik olmayan regresyon yöntemi önemlidir. İstatistikte aykırı değerlerin etkilerini farklı biçimlerde inceleyen güçlü (robust) parametrik yöntemler olmasına rağmen, aykırı gözlemlerden dolayı parametreler bozulduğundan bu güçlü yöntemler ile uygun çözümler üretilememekte ve verinin gerçek yapısı modele yansıtılamamaktadır. Böyle durumlarda parametrik olmayan regresyon, ön bilgi sağlamaktadır (Härdle 1994).

Parametrik yaklaşımda çok fazla varsayım yapıldığından sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Parametrik olmayan yaklaşımda ise hiçbir varsayım yapılmadığı halde bağımsız değişken sayısı fazla olduğunda model tahmininin elde edilmesi zor olmaktadır. '*Boyutluluk sorunu*' (curse of dimensionality) olarak adlandırılan bağımsız değişken sayısı fazla iken tahmin yapmanın zor olduğu ve elde edilen grafiklerin çok karmaşık bir yapıda olduğu durumlarda parametrik olmayan regresyon yöntemi kısıtlayıcı bazı varsayımları olmamasına rağmen kullanılamamaktadır. Ayrıca parametrik olmayan yöntemle kesikli bağımsız değişkenleri dikkate almak ve bağımsız değişken sayısındaki artışa bağlı olarak $y$ değişkenine ait bireysel etkileri yorumlamak zor olmaktadır. İşte bu sıkıntılar yarı parametrik regresyon modeli ile giderilmektedir. Yarı parametrik regresyon modeli parametrik ve parametrik olmayan regresyon modelinin her ikisini birlikte kullandığından hem parametrik modellerin kısıtlayıcı varsayımlarından etkilenmemekte hem de parametrik olmayan yöntemlerin cazip özelliklerini içermektedir. Bu durumda yarı parametrik yaklaşımın parametrik ve parametrik olmayan yaklaşım arasında bir orta yol bulduğu söylenebilir.

#### 3.2.1.3 Yarı Parametrik Regresyon

Yarı parametrik regresyon modelleri bağımlı değişken $y$'nin bağımsız değişkenlerden bazıları olan $X$ ile ilişkisinin parametreleştirilebildiği fakat $x^*$ gibi diğer bağımsız değişken veya değişkenlerle ilişkisinin parametreleştirilemediği modellerdir. Skaler değişkenler ve parametrik olmayan bir aileden gelen $g$ fonksiyonunu içeren '*yarı parametrik regresyon modeli*',

$$\begin{aligned} y &= E(y|X, x^*) + \Delta y \\ &= X\beta + g(x^*) + \Delta y \end{aligned} \tag{3.3}$$

biçimindedir. (3.3) eşitliğindeki $y, X, g$ ve $\Delta y$ bölüm 3.2.1.1 ve 3.2.1.2'de tanımlandığı gibidir. Burada $X$ parametrik değişkenler vektörünün parametrik olmayan $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ değişkeni ile düzgün bir regresyon ilişkisine sahip olduğu varsayılır (Yatchew 2003). Ayrıca parametre tahmini yapılırken normallik varsayımına ihtiyaç yoktur (Zeger ve Diggle 1994).

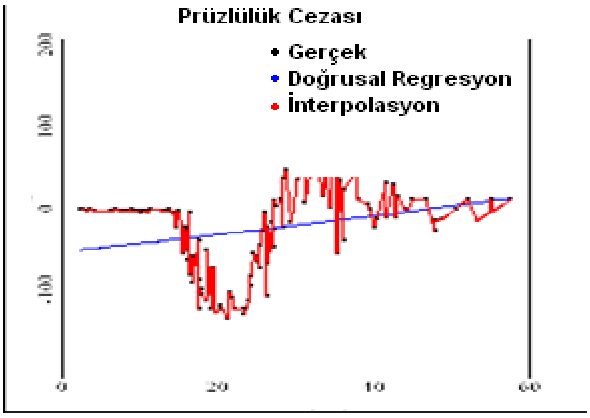
Parametrik olmayan model tahmininde boyutluluk sorunu yaşamamak ve dolayısıyla yorumlanabilir sonuçlar elde etmek için en fazla iki açıklayıcı değişken ile çalışılabilirken, yarı parametrik yöntemde $k$ tane açıklayıcı değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisi incelenebilir. Ayrıca parametrik modeldeki kadar varsayım yapılmadığından bu yaklaşımın uygulamalı çalışmalarda kullanılması önerilmektedir (Horowitz 1993).

### 3.2.1.4 Parametrik Olmayan Regresyonda Düzeltme Kavramı

Parametrik olmayan regresyon modelinde $y_i$'ye karşı $x_i^*$'nin dağılımı incelendiğinde bir regresyon ilişkisi her zaman kurulamaz. Uygun olmayan yorumlamalara veri kümesindeki aykırı değerler neden olabilir. Parametrik olmayan regresyonda amaç bilinmeyen yanıt fonksiyonu $g(x^*)$'in uygun bir analizini elde etmektir.

Gözlenen hatalar azaltılarak $y$'nin $x^*$'a göre ortalama bağımlılığının önemli ayrıntılarının verildiği ve genel olarak '*düzeltme* (smoothing)' olarak adlandırılan eğri yaklaştırma işleminin yapılması parametrik olmayan regresyonda yorumu kolaylaştırır. Düzeltme işlemi ile veriler bir eğriye uydurulduğundan, daha basit fonksiyonların birleşiminden oluşan esnek fonksiyonlar kullanılmış olur. '*Düzeltici* (smoother)' $\hat{g}(x^*) = \sum_{i=1}^{n} w_{x_i^*} y_i$ ise bir ya da birden fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu olan $y$ bağımlı değişkenin sahip olduğu eğimi ifade etmek için kullanılır. Bir düzelticinin en önemli özelliği, değişkenler arasındaki ilişkinin şeklini kesin bir biçimde belirlememesidir (örneğin; doğru) ve bu özelliğinden dolayı parametrik olmayan regresyonda sıklıkla kullanılır (Hastie ve Tibshirani 1990). Bu durumda parametrik regresyonda elde edilen doğru kesin parametrik bir biçimde olduğu için bir düzeltici değildir.

Düzeltme yönteminin sonuç değişkeni yani bir düzeltici tarafından oluşturulan tahmin '*düzgün* (smooth)' olarak adlandırılır (Härdle 1994). Parametrik olmayan ve yarı parametrik regresyon modellerindeki $g$ fonksiyonu yaklaşık olarak doğrusal ise, bu fonksiyonu tahmin etmek için doğrusal regresyon yaklaşımı kullanılabilir. Bu yaklaşımla $g$ fonksiyonu, hata kareler toplamı minimum yapılarak tahmin edilmeye çalışılır. Ancak $g$ fonksiyonu doğrusal değil ise bu yaklaşımın kullanılması Şekil 3.1'de görüldüğü gibi başarısız sonuçlara neden olabilir.




**Şekil 3.1** Doğrusal regresyon ve interpolasyon (Tabakan, 2009)

Şekil 3.1'de $g$ regresyon fonksiyonunun diğer bir tahmininin, $(x_i^*, y_i)$ $i = 1, \dots, n$ verilerinin interpolasyonu ile elde edilebildiği görülmektedir. '*İnterpolasyon*' bilinen değer noktalarını kullanarak, farklı bir yerde bulunan ve değeri bilinmeyen bir diğer noktadaki olası değeri tahmin etmeye yarayan yöntemlerin tümüne denir. Yani, var olan değerleri kullanarak, boş noktalardaki değerlerin tahmin edilmesi işlemidir. Bu tahmin edici için hata kareler toplamı $RSS(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{g}(x_i^*)\right)^2 = 0$ olur. Doğrusal regresyonda verideki bilginin çok azı kullanılırken, interpolasyonda verideki bilginin daha fazlası bulunur. Ancak interpolasyon verilerin yararlı bir özetini sağlamadığından ve modelin rasgele hata kavramından kaynaklanan özelliklerini veya esas eğilimin daha doğru bir açıklamasını içermediğinden başarısız olur. Bu durumda parametre tahmininde doğrusal regresyon ve interpolasyon uyumlarının esnetilmesini sağlayan daha esnek yaklaşımların kullanılması zorunlu hale gelir.

Düzeltme yöntemlerini sınıflayacak olursak;

1) Doğrusal Düzelticiler
    a) Kernel (Çekirdek) Düzeltici
    b) Yerel (Local) Regresyon Düzeltici
    c) $k$-En Yakın Komşu Tahmin Edici
2) Eğrisel Çizgi Düzeltme (Spline Smoothing) Yöntemi

Burada Kernel Düzeltici kullanılacağından dolayı kısaca bu düzeltici hakkında bilgi verilecektir.

### 3.2.1.5 Parametrik Olmayan Regresyonda Düzeltme Yöntemleri (Doğrusal Düzelticiler)

Düzeltme yöntemleri farklı ölçümler arasındaki fonksiyonel ilişkileri bulmaya yarayan yöntemlerdir. Parametrik regresyonda olduğu gibi verilerin bir bağımlı değişken ve bir ya da daha fazla bağımsız değişken ölçümlerinden oluştuğu varsayılır. Parametrik regresyon yöntemleri bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi tanımlamak için fonksiyonel bir şekil (örneğin, doğru) belirlerken, düzeltme yöntemleri uydurulmuş eğrilerin şeklini belirlemek için veri noktaları sağlarlar (Loader 2004).

Bu düzelticilerin hepsi,

$$\hat{g}(x^*) = \sum_{i=1}^{n} w_{x_i^*} y_i$$

yazılışında da görüldüğü gibi doğrusal düzelticilerdir. Burada $w_{x_i^*}$ ağırlık vektörü $y_i$ vektörüne bağlı olarak hesaplanır. $\hat{g}(x^*)$ regresyon tahmin edicisi düzeltici olarak adlandırılır.

***- Kernel (Çekirdek) Düzeltici***

En basit düzeltme yöntemi kernel düzelticisidir. Bu yöntemde bir $x^*$ noktası ortalama fonksiyon $g\,(x^*)$'in tanım bölgesinde yer almıştır ve $(x^* - h, x^* + h)$ şeklindeki bir düzeltme penceresi aralığı bu noktanın etrafında belirlenmiştir. Düzeltme penceresi içindeki gözlemlerin bir ağırlıklandırılmış ortalaması olarak bilinen kernel tahmini,

$$\hat{g}(x^*, h) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i^* - x^*}{h}\right) y_i}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j^* - x^*}{h}\right)}. \tag{3.4}$$

şekilde gösterilir. Burada $n$ gözlem sayısı iken $h$ bant genişliği düzeltme penceresinin yarıçapına karşılık gelen bir düzeltme parametresidir. (3.4) ile gösterilen kernel düzeltici aşağıdaki biçimde de gösterilebilir (Loader 2004):

$$\hat{g}(x^*, h) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{K\left(\frac{x_i^* - x^*}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j^* - x^*}{h}\right)} \right) y_i = \sum_{i=1}^{n} w_{x_i^*} y_i. \tag{3.5}$$

Burada $w_{x_i^*}$, $x_i^* - x^*$ uzaklığına bağlı $i.$ gözlem $y_i$'ye atanan ağırlık olarak tanımlanır. Bu yöntemde $x^*$'a bağlı $w_{x_i^*}$ ağırlıkları yardımı ile $y_i$ bağımlı değişkenlerinin bir ağırlıklı ortalaması olarak $x^*$ noktasında regresyon fonksiyonu tahmin edilir ve $w_{x_i^*}$ katsayıları,

$$w_i(x^*) = w_{x_i^*} = \frac{K\left(\frac{x_i^* - x^*}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j^* - x^*}{h}\right)} \tag{3.6}$$

biçiminde olup $\sum_{i=1}^{n} w_{x_i^*} = 1$ dir. Hedef noktalardaki tahminleri üretmek için kernel düzeltici yine kernel olarak tanımlanan yerel ağırlıkların açıkça tanımlanmış bir kümesini kullanır. Hedef noktadan uzağa taşınıldığından dolayı düzgün olarak azalan ağırlıklar kullanılır. Genellikle uzaklık ve ağırlık ters orantılı olup uzaklık küçükse ağırlık yüksek, uzaklık büyükse ağırlık düşüktür. Ağırlıklar $K$ ile belirtilir ve $h$ düzeltme parametresi tarafından kontrol edilir. (3.5) kernel tahmini bazen '*Nadaraya-Watson*' tahmini olarak da adlandırılır (Härdle ve ark. 2004). Kernel fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

**1)** $K(u) \geq 0\ , \forall u$ için

**2 )** $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$

**3 )** $K(-u) = K(u)$ simetriktir.

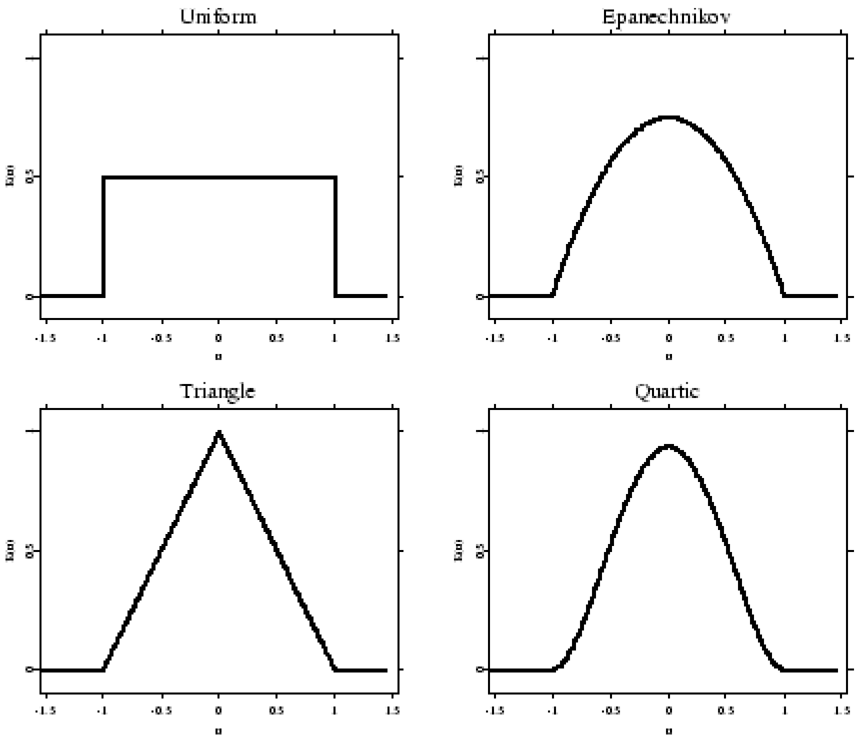
Görüldüğü üzere bu özellikler aynı zamanda simetrik bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun da özellikleridir (Montgomery ve Peck 1992).

Uygulamada kullanılan bazı kernel fonksiyonları Çizelge 3.1'de verilmiştir.

**Çizelge 3.1** Kernel fonksiyonları

| **Kernel** | $\boldsymbol{K(u)}$ | |
|---|---|---|
| Düzgün (Uniform) | $\frac{1}{2}I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $\frac{1}{2}, u \in [-1,1]$ |
| Üçgen (Triangle) | $(1-\lvert u\rvert)I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $(1-\lvert u\rvert), u \in [-1,1]$ |
| Epanechnikov | $\frac{3}{4}(1-u^2)I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $\frac{3}{4}(1-u^2), u \in [-1,1]$ |
| 4. dereceden (Quartic, Biweight) | $\frac{15}{16}(1-u^2)^2 I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $\frac{15}{16}(1-u^2)^2, u \in [-1,1]$ |
| 6. dereceden (Triweight) | $\frac{35}{32}(1-u^2)^3 I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $\frac{35}{32}(1-u^2)^3, u \in [-1,1]$ |
| Normal (Gaussian) | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-1}{2}u^2\right)$ | $u \in [-\infty,\infty]$ |
| Cosinüs | $\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) I(\lvert u\rvert \leq 1)$ | $\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right), u \in [-1,1]$ |

Çizelge 3.1'de verilen tüm fonksiyonlar yukarıda verilen kernel fonksiyonlarının özelliklerini sağlar. Şekil 3.2'de bazı kernel fonksiyonları gösterilmiştir.




**Şekil 3.2** Bazı kernel fonksiyonları: Düzgün (sol üst), Epanechnikov (sağ üst), Üçgen (sol alt), 4. dereceden (sağ alt) (Härdle ve ark., 2004)

Hastie ve Tibshirani (1990)'da kernel fonksiyonunun seçiminin düzeltme parametresinin seçimine göre daha önemsiz olduğu gösterilmiştir. Bu durumda (3.4) kernel tahmininde $h$ düzeltme parametresinin rolü önemlidir. Çünkü, $h$ değerleri büyüdükçe eğri çok yavaş değişir ve tahminin varyansı sınırlı olmasına rağmen tahmin oldukça sapmalıdır. $h$ değerleri küçüldükçe eğri oldukça düzensizdir ve sapmalar sınırlı olduğu halde tahminin varyansı büyüktür. Bu nedenle $h$ parametresi sapmalar ve tahminin doğruluğu arasında bir denge sağlar (Härdle ve ark. 2004).

#### 3.2.1.6 Bant Genişliği Seçim Yöntemleri

Parametrik olmayan regresyonda, tahminin düzgünlük derecesini kontrol eden düzgünleştirme parametresinin diğer bir ifadeyle bant genişliğinin seçimi, ağırlık fonksiyonunun (Kernel Fonksiyonu) seçiminden daha önemli bir konudur. Uygulamada optimum bant genişliğinin ne olması gerektiği konusu hala tartışılmakla birlikte uygulanan çeşitli yöntemler bulunmaktadır.

$g(x^*)$ fonksiyonunun istatistik özellikleri bant genişliği $(h)$ ile yakından ilişkilidir. Bant genişliği seçimi, tahminin yanlılığı ile varyansı arasında bir denge (trade-off) oluşturulmasını sağlamak amacıyla yapılır. Olması gerekenden daha geniş bir bant genişliği kullanıldığında tahminin varyansı daha küçük olur fakat gerçek yoğunluk aşırı düzgünleştirilmiş (oversmoothing) olabileceği için yanlı bir tahmin elde edilir (Dinardo ve Tobias 2001). Aynı şekilde daha dar bir bant genişliği kullanılırsa bu kez de yanlılık miktarı azalırken, tahminin varyansı artabilir.

Literatürde yanlılık ve varyans arasındaki bu dengeyi kurmak amacı ile çeşitli ölçütler kullanılmaktadır. Bunlardan birisi tek bir $x^*$ noktasında tahminleyenin kuadratik kaybını (quadratic loss) ölçen '*Hata Kareleri Ortalaması* (Mean Squared Error (MSE))'dır.

Uygulamada genellikle tek bir nokta yerine tüm eğrinin tahmini kullanıldığı için $x^*$'ın çok sayıdaki değeri için global bir ölçü olarak '*Bütünleşik Hata Kareleri Ortalaması* (BHKO), (Mean Integrated Squared Error (MISE))' kullanılabilir (Silverman 1986). Optimal bant genişliği esasen regresyon fonksiyonunun kendisine ve artıkların varyansına bağlıdır ve veriden elde edilmesi tercih edilen bir değerdir. Bu nedenle bütünleşik hata kareleri ortalaması değerini minimize eden bant genişliği olarak ifade edilmektedir (Brockmann ve ark. 1993).

Bant genişliği $h$ sabittir, fakat bununla birlikte bant genişliği kolaylıkla en yakın komşuluk tipi bant genişliğine uyarlanabilir. Uyarlama kernel fonksiyonları için basittir. Pencere içine sabit sayıda gözlemin $(m)$ düşmesi için $h$ değeri ayarlanabilir. $n$ toplam gözlem sayısı olmak üzere; $m/n$ oranı, Kernel düzgünleştiricisinin '*Sabit Örnek Büyüklüğü* (Span)' olarak adlandırılır (Fox 2000a).

Parametrik olmayan regresyon analizinde düzgünleştirme parametresinin belirlenmesinde '*Çapraz Geçerlilik* (Cross-Validation (CV))' yöntemi en çok kullanılan yöntemlerdendir. Çapraz geçerlilik yönteminin temelinde, $x_i^*$ odak noktasında hesaplanan yerel regresyonda (local regression) $i$. gözlemin ihmal edilmesi düşüncesi yatmaktadır. Aynı mantık span için de geçerlidir. Çapraz Geçerlilik, $(x_i^*, y_i)$ veri noktalarından birinin çıkarılması ve geri kalan $(n-1)$ veri noktasına bağlı olarak $x_i^*$ noktasındaki pürüzsüzlüğün yani $x_i^*$ noktasındaki uyum olan $\hat{g}_\lambda^{-i}(x_i^*)$'in tahmin edilmesidir.

'*Genelleştirilmiş Çapraz Geçerlilik* (Generalized Cross-Validation (GCV))' ölçütü, parametrik regresyon için verilen CV ölçütünde $h_{ii}$'nin yerine $\widehat{H}$ matrisinin izinin $(tr)$ ortalamasının alınması ile elde edilen bir ölçüttür.

'*Mallows'un* $C_p$' ölçütü eğrisel çizgi düzeltme konusunda yansız risk yöntemi olarak bilinir. $S^2$ bilindiğinde $\lambda$ için bir yansız risk tahmini mevcuttur.

Akaike (1973) tarafından önerilen '*Akaike Bilgi Kriteri* (Improved Akaike Information Criterion (AIC))' de çok yaygın olarak kullanılan düzeltme parametresi seçim ölçütlerinden biridir. AIC ölçütünden çok daha düşük yanlılık içeren ve Hurvich, Simonoff ve Tsai (1998) tarafından önerilen düzeltilmiş AIC ve $AIC_c$ olarak adlandırılan düzeltme parametresi seçim ölçütleri de AIC kadar yaygındır.

Diğer bir düzeltme parametresi seçim ölçütü de '*Klasik Pilotları Kullanan Risk Tahmini* (Risk Estimation using Classical Pilots (RECP))'dir. Yanlılık ve varyansın toplamı olarak gösterilebilen *R* risk fonksiyonu, tahmin ile gerçek regresyon fonksiyonu arasındaki uzaklığı ölçer. Bu yöntemde $R(g, \hat{g}_\lambda)$ riskini tahmin etmek ve bu tahmin ediciyi minimum yapan $\lambda$ parametresini seçmek gerekir. Pilot tahminleri seçmek için klasik bir yöntem (CV, GCV, AIC$_c$, $C_p$) kullanarak bir pilot $\lambda_p$ değerini seçmek ve bu $\lambda_p$ değeri ile $f$ ve $\sigma^2$'nin pilot tahminleri olan $\hat{g}_{\lambda_p}$ ve $\hat{\sigma}^2_{\lambda_p}$'nin hesaplanması beklenir. Böylece RECP yöntemi $R(\hat{g}_{\lambda_p}, \hat{g}_{\lambda})$'yi minimum yapan $\lambda$ düzeltme parametresini seçmiş olur (Lee 2003).

Risk fonksiyonundaki pilot tahminlerin seçimi için '*Tam Kat Düzeltme* (Exact Double Smoothing (EDS))' olarak adlandırılan bir yaklaşım Wand ve Gutierrez (1997) tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşım ile pilot tahminlerin iki seviyesinin seçimi elde edilir.

Lee (2003) yaptığı çalışmada eğrisel çizgi düzeltme için klasik yöntemler ile risk tahmin yöntemlerinden hangilerinin daha iyi olduğunu belirlemiş ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

- Ele alınan hiçbir yöntem düzgün olarak en iyi performansı göstermemiştir.
- Klasik yöntemlerden CV, GCV ve $C_p$'nin üçü de çok benzer sonuçlar vermiştir.
- Basit bir regresyon fonksiyonu yüksek gürültü içerdiğinde RECP daha üstündür.
- Heterokedastik hatalar olduğunda AIC$_c$ en iyi yöntemdir.

Yanlılık ve varyansın tahmini ile bir risk ölçümünü tahmin eden '*Yerleştirme* (Plug-in) *Yöntemleri*' de düzeltme parametresi seçim yöntemlerinin tamamen farklı bir sınıfıdır. Yöntem daha çok kernel yoğunluk tahmini durumu için geliştirilmiş olmasına rağmen kernel regresyon ve yerel polinom regresyona uyarlaması da bulunmaktadır (Loader 2004).

### 3.2.2 Değişkenleri Hatalı Modeller

İstatistikte değişkenleri hatalı modeller ya da ölçüm hatalı modeller, bağımsız değişkenlerde ölçüm hatalarının sebebi olan regresyon modelleridir. Standart regresyon modelleri bu değişkenlerin tam olarak ölçüldüğünü ya da hatasız olarak gözlemlendiğini varsayarken, aksine bu modeller, bağımlı değişkenlerdeki ya da karşıt değişkenlerdeki hatalardan sorumludur.

Genellikle ölçüm hatalı modeller gizli değişkenler yaklaşımı kullanılarak tanımlanır. $y$ ve $x$ sırasıyla bağımlı ve bağımsız değişkenler ise $y^*$ ve $x^*$ gizli değişkenler olarak alınır:

$$x = x^* + \eta$$

$$y = y^* + \varepsilon$$

$$y^* = g(x^*, t|\beta)$$

burada $\beta$ model parametresi ve $\eta, \varepsilon$ hatalardır. $y, x, t$ değişkenleri gözlenmiş $x^*, y^*, \varepsilon$, ve $\eta$ gizli değişkenleri ise gözlenmemiştir. Bu tanımlama tüm mevcut değişkenleri hatalı modelleri kapsamamaktadır. Örneğin bazılarında $g$ fonksiyonu parametrik olmayan ya da yarı parametrik bir fonksiyon olabilir. Bazı yaklaşımlarda ise $y^*$ ve $x^*$ arasındaki ilişki fonksiyonel yerine dağılımsal olabilir.

Gözlenmiş $x$ değişkeni *belirgin, kılavuz* ya da *yetkili* değişken olarak, gözlenmemiş $x^*$ değişkeni ise *gizli* ya da *gerçek* değişken olarak adlandırılabilir (Fuller 1987). $\eta$ ölçüm hatası ve $x^*$ gizli değişkeni arasındaki ilişki farklı yollarla modellenebilir:

- *Klasik hatalar*: $\eta \perp x^*$, hatalar gizli değişkenden bağımsızdır. Bu en yaygın varsayımdır ve hataların ölçülen değere bağlı olmadığı anlamına gelir.
- *Ortalama-bağımsızlık*: $E[\eta|x^*] = 0$, gizli değişkenin her bir değeri için hatalar sıfır ortalamalıdır. Bu klasik hatalardan daha az sınırlayıcı bir varsayımdır, ölçüm hatalarındaki değişen varyanslılığın ya da diğer etkilerin oluşmasına izin verir.
- *Berkson'un hataları*: $\eta \perp x$, hatalar gözlenen $x$ değişkeninden bağımsızdır. Bu varsayım çok sınırlı uygulanabilirliğe sahiptir. Birçok veri setleri, $x$ değişkenlerinin doğru gözlenmemiş eş değişkenleri $x^*$ın hata içeren versiyonları olan $x$ değişkenlerini içerir. Ancak ölçüm hatası genellikle, $x^*$dan bağımsız $\eta$ için $x = x^* + \eta$ şeklindeki klasik hata yapısına uymaz. Bu durumun tersi olarak, yani $x^*$dan bağımsız $\eta^*$ için $x^* = x + \eta^*$ şeklindeki hata yapısından Berkson ölçüm hatası olarak bahsedilir. (Berkson 1950, Wang 2004, Carroll ve ark. 2006). Berkson hata modeli, ölçümdeki rasgele hata ya da sınıflandırılamamanın bir tanımıdır. Klasik hatanın tersine Berkson hatası ölçümde ya çok az yanlılığa sebep olur ya da hiç yanlılığa sebep olmaz (Berkson 1950). Berkson hatasının bir örneği epidemiyolojik çalışmalarda maruz kalmaların değerlendirilmesinde ortaya çıkmaktadır. Berkson hatası maruz kalınan verinin yüksek oranda

kümelenmiş olduğu durumlarda klasik hatadan üstün olabilmektedir. Bu tür hata çalışmanın gücünü azaltırken riski azaltmaz (Wikipedia 2014).

- *Sınıflandırılamayan hatalar*: Kukla değişkenler için kullanılan özel bir konudur. $x^*$ kesin bir olay ya da durumun bir göstergesi (örneğin bir insanın erkek/bayan olması, bazı medikal tedavilerin verilip/verilmemesi) ise bu değişkendeki ölçüm hatası istatistiksel testlerdeki tip I ve tip II hatalara benzer yanlış sınıflandırmaya karşılık gelecektir. Bu durumda $\eta$ hatası sadece 3 olası değer alabilir ve $x^*$ üzerindeki koşullu dağılımı iki parametre ile modellenebilir: $\alpha = Pr[\eta = -1|x^* = 1]$, ve $\beta = Pr[\eta = 1|x^* = 0]$. Tanımlama için gerekli durum $\alpha + \beta < 1$ olmasıdır.

Klasik hatalarda hataların gizli değişkenden bağımsız olması en yaygın olarak kullanılan varsayımdır. Bu nedenle burada klasik hata içeren ölçüm hatalarından söz edilecektir.

Bağımsız değişken bilinen bir dağılımdan çizilen bir hata ile ölçüldüğü zaman bir regresyon fonksiyonunun parametrik olmayan tahmininin problemi literatürde önemli ölçüde dikkat çekmiştir. Bu durumda Kernel dekonvolüsyonuna dayalı kernel regresyon tahmin edicisi optimal yakınsama oranına ulaşmak için bilinmelidir (Fan ve Truong 1993).

### 3.2.3 Değişkenler ‘’*Bilinen*’’ Bir Dağılımdan Gelen Hata İle Ölçüldüğünde Parametrik Olmayan ve Yarı Parametrik Regresyon Yöntemleri

#### 3.2.3.1 Değişkenleri Hatalı Parametrik Olmayan Regresyon

Birçok çalışmada ilgi, parametrik olmayan regresyon tahmininin problemine yoğunlaşmıştır. Bu ilginin çoğu, standart yapılı veri üzerine yönelmiştir. Diğer taraftan değişkenleri hatalı regresyon analizi hızlı bir şekilde gelişmektedir.

$(X^*, Y)$ şeklinde iki rasgele değişken alınsın ve $g(x^*) = E(Y|X^* = x^*)$ regresyon fonksiyonu tahmin edilmek istensin. Bazen ölçüm mekanizmasından ve çevrenin doğasından dolayı $X^*$ değişkeni hatalı ölçülmüş ve direkt olarak gözlemlenemiyor olabilir (Fuller 1987). Karşıt olarak $X = X^* + \Delta X$ gözlemlenir, burada $\Delta X$, $(X^*, Y)$’den bağımsız dağılımı bilinen bir bozulmadır.

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$'in $(X, Y)$ dağılımından alınan bir rasgele örnek olduğunu düşünelim. Değişkenlerde hata olması durumunda bir parametrik olmayan regresyon fonksiyonunun nasıl tahmin edileceği sorusunu adres göstermek için aşağıdaki kernel tipi tahmin ediciyi düşünelim:

$$\hat{g}(x^*) = \sum_j W_{n,j}(X_1, \dots, X_n) Y_j$$

burada $W_{n,j}(X_1, \dots, X_n)$ normalleşmiş ağırlık fonksiyonu ve $\sum_j W_{n,j}(X_1, \dots, X_n) = 1$'dir. Bu ağırlıklar $X^*$ değişkenindeki hataları açıklamak için oluşturulmuştur. Bu oluşum fikri ise dekonvolüsyon tekniklerini kullanan yoğunluk tahmini ile ilişkilidir (Stefanski ve Caroll 1987b, Fan 1991).

***- Kernel Dekonvolüsyonu***

$X^*$ ve $\Delta X$ sırasıyla $g$ ve $h$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Öyleyse $X = X^* + \Delta X$ rasgele değişkeni, $*$ işlemi konvolüsyonu göstermek üzere $f = g * h$ yoğunluğuna sahiptir. Burada $h$'nin bilindiği varsayılarak $f$ yoğunluklu bağımsız $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ gözlemlerinin bir setinden $g$ tahmin edilmektedir.

$g$'nin tanımlanabilir olduğundan emin olmak için $h$ üzerindeki bazı koşullar önemlidir. $h$'nin sıfıra gitmeyen bir $\phi_h$ karakteristik fonksiyona sahip olduğu varsayılmaktadır, örneğin

$$|\phi_h(t)| > 0, \text{ tüm gerçel } t'\text{ler için.} \tag{3.7}$$

(3.7) $g$'nin tanımlanabilirliğini sağlayan en zayıf varsayım olmamasına rağmen özellikle de normal modelde birçok ilgili durumu içermektedir.

***- Kernel Dekonvolüsyonu İçin Tahmin Edicilerin Tanımlanması***

$K$, $\phi_K$ karakteristik fonksiyonuna sahip ve her sabit $h_n > 0$ için

$$sup_t|\phi_K(t)/\phi_h(t/h_n)| < \infty; \qquad \int|\phi_K(t)/\phi_h(t/h_n)|dt < \infty \tag{3.8}$$

koşulunu sağlayan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. (3.8) ile $\phi_K^2/|\phi_h(./h_n)|^2, |\phi_K|$ ve $\phi_K^2$'nın integrallenebilir olmasından dolayı $\phi_K$'nın tersinir olduğu, örneğin

$$K(x) = (2\pi)^{-1} \int e^{-itx} \phi_K(t) dt$$

olduğu kastedilmektedir.

$$\hat{f}(x) = (nh_n)^{-1} \sum_{j=1}^{n} K\left(\left(X_j - x^*\right)/h_n\right) \quad (3.9)$$

$K$ kernel fonksiyonuna dayanan $f$'nin bir adi kernel yoğunluk tahmin edicisi olsun. $\hat{f}$'nün karakteristik fonksiyonu $\phi_{\hat{f}}$, $\hat{\phi}(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} e^{itX_j}$ $\{X_j\}_{j=1}^{n}$'nin deneysel karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\phi_{\hat{f}}(t) = \hat{\phi}(t)\phi_K(h_n t)$ denklemini sağlar. (3.8) koşulu altında $\phi_{\hat{f}}/\phi_h$ integrallenebilir bir fonksiyondur ve bir Fourier dönüşümü vardır. Hedeflenen tahmin edici

$$\hat{g}(x) = (2\pi)^{-1} \int e^{-itx} \{\phi_{\hat{f}}(t)/\phi_h(t)\} dt \quad (3.10)$$

ile verilir. (3.10)'da $\phi_{\hat{f}}$'nün $\hat{\phi}$ ile yer değiştirmesi mümkün olmadığından integral çıkarılamaz. $\phi$ yerine $\phi_{\hat{f}}$'nün kullanılmasıyla (3.10)'daki integrand, uygun seçilmiş bir $\phi_K$ ile integrallenebilir olmaya zorlanabilir.

$$K_n(t) = (2\pi)^{-1} \int e^{its} \{\phi_K(s)/\phi_h(s/h_n)\} ds$$

olsun. Bu durumda,

$$\hat{g}(x) = (nh_n)^{-1} \sum_{j=1}^{n} K_n\left(\left(X_j - x\right)/h_n\right)$$

dir. $\hat{g}$'nün özellikleri en iyi $\{X_j^*, \Delta X_j\}_{j=1}^{n}$ gizli değişkenlerinin ve $K_n$'in özellikleri üzerinden anlaşılabilir.

(3.11) denklemi $|K_n|$'in sınırlı olduğunu öne sürer, bu yüzden $|\hat{g}|$ de sınırlıdır ve beklenen değerinin elde edilmesi gerekmektedir. Fubini'nin teoremi ve (3.8) tarafından doğrulanan integrasyon ve beklenen değerin bir değiş-tokuş işlemi

$$E\{K_n\left((X - x)/h_n\right)|X^*\} = K\left((X^* - x)/h_n\right) \quad (3.11)$$

$$E\{\hat{g}(x)\} = {h_n}^{-1} E\{K\left((X^* - x)/h_n\right)\} = \int {h_n}^{-1} K\left((x^* - x)/h_n\right) g(x^*) dx^*$$

şeklindedir. Bundan dolayı $\hat{g}$, adi kernel yoğunluk tahmin edicisi ile aynı yanlılığa sahiptir. Biçimsel olarak bu, beklenen değerin lineer operasyonları ile Fourier dönüşümün yer değiştirmesinin bir sonucudur.

Eğer $\hat{g}^*(x) = (nh_n)^{-1}\sum_{j=1}^{n} K\left(\left(X_j^* - x\right)/h_n\right)$ bir kernel tahmin edicisi ise (3.11)'den $E\{\hat{g}(x)|X_1^*, \dots, X_n^*\} = \hat{g}^*(x)$ olur. Bu yüzden koşullu $\hat{g}$, $\hat{g}^*$'ın bir yansız tahmin edicisi olarak görülebilir.

$\phi_K$'nın reel ve çift sayı olması $K_n$ ve dolayısıyla $\hat{g}$'nın da reel ve çift sayı olmasını gerektirir. $h$ çift olduğunda $K_n$ da çifttir. $\phi_K/\phi_h(./h_n)\, m$ tane sürekli integrallenebilir türeve sahipse Riemann-Lebesgue Lemmasından $|t| \to \infty$ ve $m \geq 2$ için $K_n(t) = o(|t|^{-m})$ olur, ki bu $K_n$ ve dolayısıyla $\hat{g}$'nın integrallenebilir olduğu anlamındadır. Bu durumda Fourier Dönüşüm Formülü

$$\phi_K(h_n s)/\phi_h(-s) = {h_n}^{-1} \int e^{its} K_n(t/h_n)dt \tag{3.12}$$

olduğunu gösterir. (3.12) denklemi $s = 0$'da incelenirse $\int K_n(t)dt = 1$ dolayısıyla $\int \hat{g}(x)dx = 1$ olduğu görülür. $K_n$ adi kernelin birçok özelliğine sahip olduğundan *kernel dekonvolüsyonu* olarak adlandırılır (Stefanski ve Carroll 1990).

***- Değişkenleri Hatalı Parametrik Olmayan Regresyon Modelinin Kernel Tahmin Edicileri***

$(X_1^*, Y_1), \dots, (X_n^*, Y_n)$, $(X^*, Y)$'nin dağılımından rasgele bir örnek ve $K(.)$ bir kernel fonksiyonu olsun. $X^*$'ın gözlenebilir olduğu durumlarda $E(Y|X^* = x^*)$ regresyon fonksiyonunun kernel tahmin edicisi, $K\left(\left(x^* - X_j^*\right)/h_n\right)$ ile orantılı ağırlıklı $Y$'nin ortalamasından elde edilir:

$$\hat{g}_n(x^*) = \sum_j K\left(\frac{x^* - X_j^*}{h_n}\right) Y_j \Big/ \sum_i K\left(\frac{x^* - X_i^*}{h_n}\right) = \frac{1}{nh_n} \sum_j K\left(\frac{x^* - X_j^*}{h_n}\right) Y_j \Big/ \hat{f}_n(x^*) \tag{3.13}$$

burada $h_n$ düzeltme parametresi ve $\hat{f}_n(x^*) = (nh_n)^{-1} \sum_i K\left(\frac{x^* - X_j^*}{h_n}\right)$, $X^*$değişkeninin yoğunluğunun bir kernel tahmin edicisidir.

$X_1^*, \dots, X_n^*$ değişkenleri gözlenmediğinde $\hat{f}_n(x^*)$ kernel tahmin edicisi $j = 1, \dots, n$ olmak üzere $X_j = X_j^* + \Delta X_j$'den oluşturulacaktır. $X^*$ ve $X$'in yoğunlukları sırasıyla $f_{X^*}(.)$ ve $f_X(.)$ ile gösterilsin. $F_{\Delta X}(.)$, $\Delta X$'in dağılım fonksiyonunu göstersin. O zaman,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^*}(x - x^*) dF_{\Delta X}(x^*)$$

olur. Bu bize $f_{X^*}(.)$ marjinal yoğunluk fonksiyonunun dekonvolüsyon metodu yardımıyla tahmin edilebileceğini önermektedir. $K(.)$ kernel fonksiyonunu kullanarak bir $h_n$ bant genişliği ile Stefanski ve Caroll (1988) ve Fan (1991) aşağıdaki tahmin ediciyi düşünmüşlerdir:

$$\hat{f}_n(x^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-itx^*)\, \phi_K(th_n) \frac{\hat{\phi}_n(t)}{\phi_{\Delta X}(t)} dt.$$

Burada $\phi_K(.)$, $K(.)$ kernel fonksiyonunun fourier dönüşümü, $\phi_{\Delta X}(.)$, $\Delta X$ hata değişkeninin karakteristik fonksiyonu ve $\hat{\phi}_n(.)$ deneysel karakteristik fonksiyondur. Bu tahmin edici kernel formunda yeniden yazılırsa,

$$\hat{f}_n(x^*) = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K_n\left(\frac{x^* - X_j}{h_n}\right), \tag{3.14}$$

$$K_n(x^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-itx^*) \frac{\phi_K(t)}{\phi_{\Delta X}(t/h_n)} dt. \tag{3.15}$$

Parametrik olmayan dekonvolüsyona bazı diğer katkılar Caroll ve Hall (1988), Fan (1990), Liu ve Taylor (1990), Zhang (1989)'da bulunmaktadır.

(3.13), (3.14) ve (3.15) denklemleri aşağıdaki değişkenleri hata içeren regresyon fonksiyonu tahmin edicisine ulaşılmasını sağlar:

$$\hat{g}_n(x^*) = \sum_j K_n\left(\frac{x^* - X_j}{h_n}\right) Y_j \Big/ \sum_i K_n\left(\frac{x^* - X_j}{h_n}\right) = \frac{1}{nh_n} \sum_j K_n\left(\frac{x^* - X_j}{h_n}\right) Y_j \Big/ \hat{f}_n(x^*)$$

burada $\hat{f}_n(x^*)$ (3.14) ile tanımlanır. Bunun $K_n\left((x^* - X_j)/h_n\right)$ ile orantılı kernel ağırlığı ile bir kernel tipi tahmin edici olduğu görülmektedir (Fan ve Truong 1993).

### 3.2.3.2 Parametrik Olmayan Bölümdeki Değişkenleri Hatalı Kısmi Doğrusal Yarı Parametrik Regresyon

Ölçüm hatalı modele olan ilgi birçok konuda bir dizi çalışmanın yapılmasıyla, özellikle Carroll ve arkadaşlarının 2006 yılındaki çalışmalarından sonra, gitgide büyümektedir. Ayrıntılı olarak bu konu iki bölüme ayrılabilir. İlki lineer ölçüm hatalı model üzerinde yoğunlaşmıştır (Anderson (1984), Carroll ve ark. (1984) ve Stefanski (1985)'e bakınız). İkincisi ise genel olarak lineer olmayan ölçüm hatalı modellerle ilgilenir (Fan ve Truong 1993). $X^*$'lar ardışık hatalarla ölçüldüğünde $(X, X^*)$ tahmin edicilerinin $Y$ yanıt değişkeni ile ilgili $X^T\beta + g(X^*)$ ortalama fonksiyonlu yarı parametrik kısmi doğrusal modeli ilk olarak Liang ve ark. 1997'de düşünmüşlerdir. Yazarlar tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen $\beta$'nın bir tahminini elde etmişlerdir. $X$ ve $X^*$'ın rollerini karşılıklı olarak değiştirirsek, parametrik kısım tam olarak ölçülürken parametrik olmayan kısım hatalı ölçülür, burada $E(Y|X, X^*) = X^T\beta + g(X^*)$ ve $\chi = X^* + \Delta\chi$, $\Delta\chi$ ölçüm hatasıdır. Liang ve ark. (1997) $\beta$'nın parametrik oranda tahmin edilebilir olduğunu göz ardı etmişlerdir. Liang (2000) bu problemlere daha pozitif bir cevap sunmuştur.

Fan ve Truong (1993) $\beta = 0$ ve $X^*$'ın ölçüm hatalı olması durumunu ele almışlardır. Parametrik olmayan $g(.)$ fonksiyonunun sadece logaritmik oranda tahmin edilebileceğini kanıtlamışlardır (fakat genellikle normal dağılan ölçüm hatasında olduğu gibi $n^{-2/5}$ oranında olmadan).

$n$ örneklem büyüklüğüne dayanan yarı parametrik kısmi doğrusal modeli:

$$Y_i = X_i^T\beta + g(X_i^*) + \Delta y_i \tag{3.16}$$

dir. Burada $X_i$ bir rasgele vektör, $X_i^*$ $[0, 1]$ aralığında tanımlanan bir rasgele değişken, $g(.)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve $\Delta y_i$ verilen değişkenlerden bağımsız ve sıfır ortalamaya sahip hatadır. Bu modelde $X^*$ değişkenleri hatalı ölçülmüş olduğundan $X^*$ gözlemi yerine

$$\chi_i = X_i^* + \Delta\chi_i$$

kullanılmıştır. Burada $\Delta\chi_i$, bağımsız ve özdeş olarak dağılmış, $(Y_i, X_i, X_i^*)$'den bağımsız, sıfır ortalamalı ve $\Sigma_{\Delta\chi\Delta\chi}$ kovaryans matrisli ölçüm hatalarıdır. Fan ve Truong

(1993) modelin tanımlanabilir olmasını sağlamak için $\Delta\chi$'nin bilinen bir dağılıma sahip olduğunu varsaymaktadırlar.

$X^*$'lar gözlenebilir olduğunda literatürdeki yazarlar genellikle yerel-olabilirlik (local-likelihood) algoritmasından $\beta$'nın kök-$n$ tutarlı tahminini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir (Engle ve ark. (1986), Heckman (1986), Chen (1988), Speckman (1988), Cuzick (1992a, b) ve Severini ve Staniswalis (1994)'e bakınız.). $\beta$ parametrik bileşenini düzeltmiş ve bir çeşit düzgünleştirme yöntemi kullanarak $g(.)$ parametrik olmayan bileşenin bir $\hat{g}(X^*,\beta)$ tahminini elde etmişlerdir. $\hat{g}(X^*,\beta)$, en çok olabilirlik ya da en küçük kareler metotlarını kullanarak (3.16) modelinin parametrik bileşeninin bir tahmin edicisini elde etmek için kullanılır. Örneğin öngörülmüş bir en küçük kareler algoritması tarafından açıkça tanımlanabilen $\beta$'nın tahmini için çözüm;

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^{n}\{Y_i - X_i^T\beta - \hat{g}(X_i^*,\beta)\}^2. \tag{3.17}$$

dir. $\hat{g}_{y,h}(.)$ ve $\hat{g}_{x,h}(.)$ sırasıyla $Y$ ve $X$'in $X^*$ üzerindeki $h$ bant genişlikli kernel regresyonları için,

$$\hat{\beta}_n = \left[\sum_{i=1}^{n}\{X_i - \hat{g}_{x,h}(X_i^*)\}\{X_i - \hat{g}_{x,h}(X_i^*)\}^T\right]^{-1} \times \sum_{i=1}^{n}\{X_i - \hat{g}_{x,h}(X_i^*)\}\{Y_i - \hat{g}_{y,h}(X_i^*)\} \tag{3.18}$$

olur. (3.18) tahmin edicisinin $\beta_n$'in sıfır ortalama ve $B^{-1}CB^{-1}$ varyansla ($B, X - E(X|X^*)$ 'nin kovaryans matrisi; $C, \Delta y\{X - E(X|X^*)\}$'nin kovaryans matrisi) asimtotik olarak normal dağılmasına neden olan, alışılmış $h \sim n^{-\frac{1}{5}}$ mertebeli bant genişliği ve alt düzeltme gerektirmediği gösterilmiştir.

$\Delta\chi$ ölçüm hatasının bozulmasından dolayı (3.18)'in en küçük kareler şekli düzeltilmelidir. Aksi taktirde $\beta_n$, $\hat{g}_{x,h}(X_i^*)$ ve $\hat{g}_{y,h}(X_i^*)$ artık istatistik olmayacaktır. Bu nedenle $\beta$'nın bir tahmin edicisi yeniden tanımlanmıştır. Bu durumda $g(.)$'nin yeni bir tahmin edicisi daha sonra da $Y$ ve $X$'in $\chi$ üzerindeki regresyonu araştırılmak zorundadır.

***- Tahmin Edicilerin Oluşturulması***

Önceki bölümde de belirtildiği gibi $X^*$'ın gözlenmemiş olması durumunda parametrik olmayan $g(.)$ fonksiyonunun nasıl tahmin edileceği karşılaşılan ilk problemdir. Bu durumun üstesinden Fan ve Truong (1993)'un çalışmasından faydalanılarak gelinebilir. Sözü edilen çalışma, uygun varsayımlar altında yakınsaklık oranına sahip $g(.)$'nin tutarlı parametrik olmayan tahminlerini oluşturan dekonvolüsyon tekniklerini kullanmaktır.

$\chi$ ve $X^*$'ın yoğunlukları sırasıyla $f_\chi(.)$ ve $f_{X^*}(.)$ olsun. Literatürde de belirtildiği gibi $f_{X^*}(.)$ aşağıdaki tahmin edici kullanılarak tahmin edilebilir:

$$\hat{f}_n(x^*) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} K_n\left(\frac{x^* - \chi_j}{h_n}\right), \quad K_n(x^*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-ist)\frac{\phi_K(s)}{\phi_{\Delta\chi}(s/h_n)}ds.$$

Burada $\phi_K(.)$ bir $K(.)$ kernel fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $\phi_{\Delta\chi}(.)$ $\Delta\chi$ hata değişkeninin karakteristik fonksiyonudur (Fan ve Truong 1993).

$$\omega_{ni}(.) = K_n\left(\frac{. - \chi_i}{h_n}\right) / \sum_j K_n\left(\frac{. - \chi_i}{h_n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{nh_n} K_n\left(\frac{. - \chi_i}{h_n}\right) / \hat{f}_n(.)$$

olarak alınsın. $g(x^*) = E(Y - X^T\beta | X^* = x^*)$ olduğu göz önüne alınırsa, Fan ve Truong (1993)'te de ele alındığı gibi $g(.)$'nin tahmin edicisi olarak aşağıdaki denklem tanımlanabilir:

$$g_n(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(x^*)(Y_i - X_i^T\beta).$$

$g_n(\chi_i)$ yerine $\hat{g}(X^*, \beta)$ koyularak $\hat{\beta}_n$, (3.17) denkleminin çözümü olarak alınsın. Öyleyse $\beta$'nın $\hat{\beta}_n$ genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi açık bir şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{Y}\right). \tag{3.19}$$

Burada $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n)$ve $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$olmak üzere $\tilde{Y}_i = Y_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(\chi_i)Y_j$ ve $\tilde{X}_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(\chi_i)X_j$ 'dir (Liang 2000).

#### 3.2.3.3 Hem Doğrusal Hem de Parametrik Olmayan Bölümdeki Değişkenleri Hatalı Yarı Parametrik Regresyon

$(X^*, X, Y)$ bir rasgele değişkenler (ya da vektörler) üçlüsünü göstersin ve verilen $(X^*, X)$ için $Y$ değişkeninin koşullu beklenen değerinin

$$E(Y|X^*, X) = X^T\beta + g(X^*)$$

olduğu varsayılsın. Burada $X, p$ ve $X^*, 1$ boyutlu değişkenler, $\beta, (p \times 1)$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve $g(.)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Ölçüm mekanizmasından ya da çevrenin doğasından dolayı bazen $X$ ve $X^*$ değişkenleri hatalı ölçülmüş olabilir. Yani $X$ ve $X^*$ aşağıdaki şekilde gözlenebilir:

$$X^+ = X + \Delta x,$$

$$\chi = X^* + \Delta\chi,$$

burada $\Delta x$ ve $\Delta\chi$ rasgele hatalardır. Bu durumda $Y, X^+$ ve $\chi$ için değişkenlerinde hata olan yarı parametrik bir model:

$$\begin{cases} Y = X^T\beta + g(X^*) + \Delta y, \\ X^+ = X + \Delta x, \\ \chi = X^* + \Delta\chi, \end{cases} \tag{3.20}$$

şeklindedir. Burada $\Delta x$, $\Delta\chi$ ve $(X^T, X^*, \Delta y)^T$ karşıklı olarak birbirlerinden bağımsız, $X^*$, $f(x^*)$ gibi bilinmeyen bir yoğunluğa sahip, $\Delta\chi$, $\phi_{\Delta\chi}(x^*)$ karakteristik fonksiyonlu bilinen bir dağılıma sahiptir. Modelde

$$E(\Delta x) = E(\Delta\chi) = 0, \;\; Cov(\Delta x) = \Sigma_{\Delta x},$$

$$E(\Delta y|X, X^*) = 0, \;\; Var(\Delta y|X, X^*) = \sigma^2_{\Delta y},$$

olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca $\sigma^2_{\Delta y}$ bilinmiyor ve $\Sigma_{\Delta x} > 0$ olarak kabul ediliyor.

Ölçüm hatası hem doğrusal hem de parametrik olamayan bölümde olduğundan tahmin problemi daha karmaşıktır. İlk olarak parametrik olmayan tahmin edici oluşturulurken ortaya çıkan ve ölçüm hatasından kaynaklanan, çok ciddi sınır problemleriyle ilgilenilmesi gerekmektedir. Daha sonra parametrik olmayan $g$ fonksiyonunun tahmini üzerinde çok güçlü bir etkiye sahip doğrusal bölümdeki ölçüm hatası ile ilgilenilmelidir.

***- Tahmin Edicilerin Oluşturulması***

$$U(X^+, X^*) = X^+ - E(X^+|X^*) = X - E(X|X^*) + \Delta x,$$

$$U(Y, X^*) = Y - E(Y|X^*) = [X - E(X|X^*)]^T\beta + \Delta y,$$

alalım. $w(x^*) \geq 0, [a,b]$ aralığında bir ağırlık fonksiyonu olsun. Buradaki $a$ ve $b$ $0 < \inf_{a \leq x^* \leq b} f(x^*) \leq \sup_{a \leq x^* \leq b} f(x^*) < \infty$ olacak şekilde seçilmelidir. Bu varsayım kernel tahmin edicisinin paydasından kaynaklanan sınır (boundary) probleminden kaçınmada önemli bir rol oynamaktadır.

$$S_1 = E[U(X^+,X^*)U(X^+,X^*)^T w(X^*)]$$
$$= E\{[X - E(X|X^*)][X - E(X|X^*)]^T w(X^*)\} + Ew(X^*)\Sigma_{\Delta x}$$
$$\triangleq S + S_3\Sigma_{\Delta x},$$
$$S_2 = E[U(X^+,X^*)U(Y,X^*)w(X^*)] = S\beta,$$
$$S_4 = E[(\Delta y - \Delta x^T\beta)^2 w(X^*)], \tag{3.21}$$

alınsın. Burada $S = E\{[X - E(X|X^*)][X - E(X|X^*)]^T w(X^*)\}, S_3 = E\big(w(X^*)\big)$'dır. $(Y, X^+, X^*)$'ın yoğunluğu $f(y, x^+, x^*)$ ve

$$g_1(x^*) = E(X^+|X^* = x^*) \triangleq \big(g_{11}(x^*), \dots, g_{1p}(x^*)\big)^T$$

$$g_2(x^*) = E(Y|X^* = x^*)$$

olsun. Eğer $S$ pozitif tanımlı bir matris $(S > 0)$ ise $\beta, g(x^*)$ ve $\sigma^2_{\Delta y}$'nin formülleri

$$\beta = (S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x})^{-1}S_2$$

$$g(x^*) = g_2(x^*) - g_1(x^*)^T\beta$$

$$\sigma^2_{\Delta y} = \frac{S_4}{S_3} - \beta^T\Sigma_{\Delta x}\beta$$

olur. Artık $\beta, g$ ve $\sigma^2_{\Delta y}$ tahminleri $S_1, S_2, S_3, S_4$ ve $g_1, g_2$ tahminlerine indirgenmiş oldu. (3.20) modelinden $n$ boyutlu bir örneklem $\left\{X_j^+ = \left(X_{j1}^+, X_{j2}^+, \dots, X_{jp}^+\right)^T, \chi_j, Y_j, 1 \leq j \leq n\right\}$ olsun. $\beta, \sigma^2_{\Delta y}$ ve $g$'nin tahminleri aşağıdaki yöntemle elde edilir:

**1. Adım:** $f(x^*)$ yoğunluğunun dekonvolüsyon kernel tahmin edicisi $\hat{f}_n(x^*) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} K_n\left(\frac{x^* - X_j^*}{h}\right)$'dir. Burada $h = h_n$ bant genişliği, $K_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-itz\}\frac{\phi_K(t)}{\phi_{\Delta\chi}(t/h)}dt$ şeklindeki dekonvolüsyon kernel fonksiyonu, $\phi_K(.)$ kernel fonksiyonu $K(.)$'nın Fourier dönüşümüdür.

**2. Adım:** $(Y, X^+, X^*)$'ın eklemeli yoğunluk fonksiyonu $f(y, x^+, x^*), g_1(x^*)$ ve $g_2(x^*)$'ın tahminleri:

$$\hat{f}_n(y, x^+, x^*) = \frac{1}{nh^{p+2}} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} K\left(\frac{x_k^+ - X_{jk}^+}{h}\right) K\left(\frac{y - Y_j}{h}\right) K_n\left(\frac{x^* - X_j^*}{h}\right),$$

$$\hat{g}_{1n}(x^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_n\left((x^* - X_j^*)/h\right) X_j}{\sum_{j=1}^{n} K_n\left((x^* - X_j^*)/h\right)}, \quad \hat{g}_{2n}(x^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_n\left((x^* - X_j^*)/h\right) Y_j}{\sum_{j=1}^{n} K_n\left((x^* - X_j^*)/h\right)},$$

$$(y, x^+, x^*) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^1.$$

Stefanski ve Carroll (1990) ve Fan ve Truong (1993) çalışmalarına benzer olarak bazı düzenleme koşulları altında $\hat{f}_n(y, x^+, x^*), \hat{g}_{1n}(x^*)$ ve $\hat{g}_{2n}(x^*)$'nin hata dağılımlarının geniş bir sınıfı için $f(y, x^+, x^*), g_1(x^*)$ ve $g_2(x^*)$'nin tutarlı tahminleri olduğu gösterilebilir (Zhu ve Cui 2003).

**3. Adım:** (3.21) denklemine göre $S_q, q = 1,2,3, \beta$ ve $g(.)$'nin tahminleri elde edilir:

$$\begin{cases} \hat{S}_{1n} = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(x^+ - \hat{g}_{1n}(x^*)\right)\left(x^+ - \hat{g}_{1n}(x^*)\right)^T w(x^*) \hat{f}_n(y, x^+, x^*) dx^+ dy dx^*, \\ \hat{S}_{2n} = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(x^+ - \hat{g}_{1n}(x^*)\right)\left(y - \hat{g}_{2n}(x^*)\right)^T w(x^*) \hat{f}_n(y, x^+, x^*) dx^+ dy dx^*, \\ \hat{S}_{3n} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} w(x^*) \hat{f}_n(x^*) dx^*, \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_n = \left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x}\right)^{-1} \hat{S}_{2n}, \qquad \hat{g}_n(x^*) = \hat{g}_{2n}(x^*) - \hat{g}_{1n}(x^*)^T \hat{\beta}_n.$$

**4. Adım:** $S_4$ ve $\sigma_{\Delta y}^2$'nin tahminleri elde edilir:

$$\hat{S}_{4n} = \int\int\int \left(y - x^{+T}\hat{\beta}_n - \hat{g}_n(x^*)\right)^2 w(x^*) \hat{f}_n(y, x^+, x^*) dy dx^+ dx^*,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{S}_{4n}/\hat{S}_{3n} - \hat{\beta}_n^T \Sigma_{\Delta x} \hat{\beta}_n.$$

### 3.2.4 Değişkenler ‘’*Bilinmeyen*’’ Bir Dağılımdan Gelen Hata İle Ölçüldüğünde Parametrik Olmayan Regresyon Yöntemleri

#### 3.2.4.1 Değişkenleri Hatalı Parametrik Olmayan Regresyon

Ölçüm hatalarının olması durumunda parametrik olmayan tahminde karşılaşılan zorlukları anlamak için verilen bir kusurlu $x$ ölçümündeki gözlenmemiş bir $x^*$ değişkeninin yoğunluğunun bulunmasının daha basit bir problemini çözmek için en iyi bilinen çözümü gözden geçirelim:

$$x = x^* + \Delta x$$

$\Delta x$ ölçüm hatasının genellikle $x^*$’dan bağımsız olduğu ve bilinen bir yoğunluktan geldiği varsayılır. $\Delta x$’in yoğunluğu ile $x^*$’ın yoğunluğunun konvolüsyonu tarafından verilen $x$’in yoğunluğu iyi bilinmektedir. Konvolüsyon teoremi sayesinde bu ilişki karakteristik fonksiyonlar kullanılarak

$$m(v) = \phi(v)\psi(v)$$

yazılabilir. Burada $\phi(v), m(v)$ ve $\psi(v)$ sırasıyla $x^*, x$ ve $\Delta x$’in karakteristik fonksiyonlarını göstermektedir. Böylece $\phi(v)$’nin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\phi(v) = \frac{m(v)}{\psi(v)} \tag{3.22}$$

Burada $m(v)$ bir kernel tahmin edicisi gibi $x$’in yoğunluğunun parametrik olmayan bir tahmininin fourier dönüşümü ile tahmin edilebilir. Bu yöntemle birlikte, uygun varsayımlar altında ($\Delta x$’in yoğunluğunun sürekli olmasını varsaymak gibi) $v \to \infty$ gittikçe $\psi(v)$ kaybolur ve bu yüzden tüm $v$’ler için bu operasyonun iyi tanımlı olmaması gibi bir problem ortaya çıkar. Bu yüzden sadece $m(v)$’nin tutarlı bir tahmini $\widehat{m}(v)$ ile değiştirilmesi $\phi(v)$’nin tutarlı bir tahminini vermeyebilir. Çünkü $\widehat{m}(v)$’deki küçük hatalar keyfi büyük bir $\frac{1}{\psi(v)}$ çarpanı tarafından büyütülecektir. Bu durum, konvolüsyon operatörünün tersi alınırken ortaya çıkan ve çok iyi bilinen bir kötü tanımlı ters alma problemidir. Böyle durumlarda Fourier dönüşümü $\kappa(v)$ olan bir kernel kullanarak (Carroll ve ark. 2006, Fan 1991) $m(v)$’nin tahminini sağlayan kernel dekonvolüsyon tahmin edicisi yoğun bir şekilde desteklenmektedir. Bu ise, tahmin edilen $\widehat{m}(v)$ karakteristik fonksiyonunun da yoğun bir şekilde desteklendiğini ve sırasıyla (3.22) denkleminin paydasının payı ıraksama oranına neden olmadan önce kaldırılacağını garanti eder.

Bu olayda $x$'in karakteristik fonksiyonunun budanmasının bir yanlılık oluşturacağı görülebilir. Tutarlı bir tahmin edici elde etmek için $\kappa(v)$'nin dayanağındaki tüm frekanslar üzerindeki bütünleşik toplam hatanın (total integrated noise) düşmesine olanak sağlayan örneklem hacmi büyüdükçe $\kappa(v)$'nin dayanağının genişlemesine izin verilir. Ne kadar $v \to \infty$ için $\psi(v) \to 0$ hızlı ise, o kadar yavaş bir şekilde $\kappa(v)$'nin dayanağı örneklem hacmi ve daha yavaş yakınsama oranı ile genişleyebilir. Bu, ölçüm hataları olduğunda parametrik olmayan tahmin sırasında karşılaşılan temel bir zorluktur. Ölçüm hatasının yoğunluğunun düzgünlüğü yükseldikçe $v \to \infty$ ile $\psi(v)$ karakteristik fonksiyonu sıfıra yaklaşır ve yakınsama oranı daha da kötüleşir. $x^*$'ın yoğunluğunun düzgünlüğü de yakınsama oranının tanımlanmasında bir rol oynar. Sonlu bir frekansta $m(v)$'nin budanmasından kaynaklanan yanlılık $v \to \infty$ için $\psi(v)$'nin bozulma oranının büyüklüğünün bir fonksiyonudur. $x^*$ ne kadar düzgünse, onun $m(v)$ Fourier dönüşümü $v \to \infty$ için o kadar hızlı düşer ve kernel bant genişliği küçüldükçe yanlılık o kadar hızlı düşer.

Literatürde ele alınan kernel dekonvolüsyon tahmin edicileri tipik olarak, $v$ frekansı sonsuza gittikçe Fourier dönüşümünün düşüşünün asimtotik oranı açısından, bir yoğunluğun düzgünlüğünü tanımlarlar. Bir yoğunluğun sürekli olan türevlerinin sayısının, direkt olarak $v \to \infty$ için Fourier dönüşümünün asimtotik davranışıyla ilişkili olması bu gibi bir tanımlama için temel oluşturmaktadır. Bu, ''genelde düzgün'' fonksiyonlar (Bunlar sürekli türevlerinin bir sonlu sayısını kabul ederler ve bunların Fourier dönüşümleri $|v|^{\gamma}, \gamma < 0$ oldukça küçülür.) ve ''süper düzgün'' fonksiyonlar (Bunlar sürekli türevlerinin bir sonsuz sayısını kabul ederler ve bunların Fourier dönüşümleri $\exp\left(\alpha|v|^{\beta}\right), \alpha < 0, \beta > 0$ oldukça küçülür.) arasındaki geleneksel ayrıma öncülük eder. Genelde düzgün fonksiyon örnekleri gamma, uniform ve double üstel iken süper düzgün fonksiyon örnekleri de Cauchy ve normal fonksiyonlardır.

Kernel dekonvolüsyon tahmin edicisi ilgili yoğunlukların düzgünlüklerine dayanan yakınsama oranının geniş bir çeşitliliğinde ortaya çıkar. $x^*$ ve $\Delta x$'in yoğunlukları genelde düzgün olsa da $n$ örneklem büyüklüğü olmak üzere bazı $c > 0$ için $n^{-c}$ formunun yakınsama oranını kernel dekonvolüsyon ortaya serecektir. $x^*$'ın yoğunluğu genelde düzgün kalırken $\Delta x$'in yoğunluğu süper düzgün olduğunda bu durum önemli ölçüde bozulur. Yakınsama oranı bazı $c > 0$ için $n$'nin herhangi bir negatif gücünden daha yavaş olan $(\ln n)^{-c}$ formunu alır.

Burada çözülen problem yukarıda tanımlanandan daha zorlayıcıdır. Öncelikle bir kernel yoğunluk tahmin edicisi yerine bir kernel regresyon tahmin edicisine odaklanılmış, daha sonra da ölçüm hatasının bilindiği varsayılmıştır.

***- Tahmin Yöntemi***

$g(x^*): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve

$$E[\Delta y | x^*] = 0 \text{ için } y = g(x^*) + \Delta y$$

olsun. Çok değişkenli genişleme açık bir şekilde olası olsa da bu yorumu kolaylaştırmak için $x^*$'ın bir skaler olduğu düşünülsün. $y$ ve $x^*$ gözlendiğinde verilen bir $\tilde{x}^*$ noktasında $g(\tilde{x}^*)$'ın iyi bilinen Nadarya-Watson Kernel tahmin edicisi,

$$\hat{g}(\tilde{x}^*, h) = \frac{n^{-1} \sum_{l=1}^{n} y_l K_h(x_l^* - \tilde{x}^*)}{n^{-1} \sum_{l=1}^{n} K_h(x_l^* - \tilde{x}^*)}$$

dir. Burada $l = 1, \dots, n$ için $x_l^*$ ve $y_l$ veri noktalarını göstermekte ve $K_h(.)$ kernel

$$K_h(x^*) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x^*}{h}\right)$$

formundadır ve $h$ bant genişliği parametresidir. Schennach (2004a)'da gösterildiği gibi $x^*$'ın iki tekrarlı ölçümlerinin uygunluğu

$$x = x^* + \Delta x$$

$$z = x^* + \Delta z$$

herhangi bir $u(y, x^*)$ fonksiyonu için $E[u(y, x^*)]$ formunun herhangi bir momentini tanımlamak için yeterli bilgiyi sağlar. Çünkü Nadarya-Watson Kernel tahmin edicisinin (sabit $h$ bant genişliğinde) olasılık limiti

$$\hat{g}(\tilde{x}^*, h) = \frac{E[yK_h(x^* - \tilde{x}^*)]}{E[K_h(x^* - \tilde{x}^*)]}$$

oranıdır ve $k = 0{,}1$ için $u(y, x^*) = y^k K_h(x^* - \tilde{x}^*)$ şeklinde benzer bir teknik burada uygulanabilir. Çıkan sonuçların bir parametrik olmayan duruma genişlemesi ek adımlar gerektirir. Bunun için, $\tilde{x}^*$ tarafından indekslenen momentlerin sonsuz bir ailesinin karakterize edilmesine ihtiyaç vardır. Bu sorun Nadarya-Watson tahmin edicisinin hesaplanmasıyla ilişkili konvolüsyon operasyonlarının Fourier dönüşümü ailesinin yalnızca bir operasyon ile tahmin edilmesine olanak sağlanarak çözülebilir. Tanımlamaya izin veren sonuç aşağıdaki varsayımlar kümesi ile ilişkili teoremde verilmiştir.

**Varsayım 1:** $\Delta z$ ve $x^*$ karşılıklı olarak bağımsızdır.

$$E[\Delta y|x^*, \Delta z] = 0$$

$$E[\Delta x|x^*, \Delta z] = 0$$

**Varsayım 2:** $E[|x^*|], E[\Delta x]$ ve $E[|y|]$'ler sonludur.

**Varsayım 3:** $E\left[y^k h^{-1} K\left(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\right)\right] < \infty$, tüm $\tilde{x}^*$, herhangi bir $h > 0$ ve $k = 0{,}1$ için.

**Teorem 1:** 1-3 varsayımları altında ve herhangi bir sonlu $\xi$ için $\left|E\left[e^{i\xi z}\right]\right| > 0$ koşuluyla

$$g(\tilde{x}^*, h) = \frac{E[yh^{-1}K(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*))]}{E[h^{-1}K(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*))]}$$

fonksiyonu, yalnız $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}$ ve $h > 0$ için gözlemlenebilen $y, x$ ve $z$ değişkenlerini gerektiren momentler yardımıyla açıklanabilir: ($k = 0{,}1$ için)

$$g(\tilde{x}^*, h) = \frac{M_1(\tilde{x}^*, h)}{M_0(\tilde{x}^*, h)}$$

$$M_k(\tilde{x}^*, h) = \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) \phi_k(\xi) \exp(-i\xi \tilde{x}^*) d\,\xi \tag{3.23}$$

ve $\phi_k(\xi) \equiv E[y^k \exp(i\xi x^*)]$ için

$$\phi_0(\xi) = \exp\left(\int_0^\xi \frac{im_x(\zeta)}{m_1(\zeta)} d\zeta\right) \tag{3.24}$$

$$\phi_1(\xi) = \phi_0(\xi) \frac{m_y(\xi)}{m_1(\xi)} \tag{3.25}$$

dir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $\kappa(\xi)$ kernel $K(x^*)$'ın Fourier dönüşümü ve $a = 1, x, y$ için

$$m_a(\xi) = E[a\exp(i\xi z)]$$

dir. (3.24) denklemi Kotlarski (1967) ve Rao (1992)'deki ile benzer olarak tanımlanmıştır. Ancak, bu sonucun kanıtlanmasında daha zayıf bağımsızlık varsayımları gerekmiştir. Özel olarak $\Delta x$ ile $x^*$ ve $\Delta x$ ile $\Delta z$ aralarında bağımsız olmalarına gerek duyulmamıştır.

**İspat:** Sonuç doğrudan yerine koyma ile gösterilebilir. Varsayım 2 tüm beklenen değerlerin iyi tanımlı olduğunu belirtmektedir. İlk olarak (3.24) denkleminin $\phi_0(\xi)$'nin değerini gerçekten de sağladığını gösterelim. Varsayım 1'i kullanarak

$$\exp\left(\int_0^{\xi} \frac{im_x(\zeta)}{m_1(\zeta)} d\zeta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{iE[x\exp(i\zeta z)]}{E[\exp(i\zeta z)]} d\zeta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{iE\left[(x^*+\Delta x)\exp\left(i\zeta(x^*+\Delta z)\right)\right]}{E\left[\exp\left(i\zeta(x^*+\Delta z)\right)\right]} d\zeta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{iE[x^*\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)+\Delta x\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]}{E[\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]} d\zeta\right)$$

($x^*$ ve $\Delta z$ bağımsız)

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{E[ix^*\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]+iE[\Delta x\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]}{E[\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]} d\zeta\right)$$

$(\Delta x = E[\Delta x|x^*, \Delta z])$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{E[ix^*\exp(i\zeta x^*)]E[\exp(i\zeta\Delta z)]+iE[E[\Delta x|x^*,\Delta z]\exp(i\zeta x^*)\exp(i\zeta\Delta z)]}{E[\exp(i\zeta x^*)]E[\exp(i\zeta\Delta z)]} d\zeta\right)$$

$(E[\Delta x|x^*, \Delta z] = 0)$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{E[ix^*\exp(i\zeta x^*)]}{E[\exp(i\zeta x^*)]} d\zeta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{d}{d\zeta} \ln E[\exp(i\zeta x^*)]\, d\zeta\right)$$

$$= \frac{E[\exp(i\xi x^*)]}{E[1]}$$

$$= \phi_0(\xi)$$

elde edilir.

$f(x^*)$, $x^*$'ın yoğunluğu olarak alınırsa $M_1(\tilde{x}^*, h)$ ve $M_0(\tilde{x}^*, h)$'ın sırasıyla Nadaraya-Watson tahmin edicisinin pay ve paydasını sağladığı gösterilebilir. $x^*$ ve $\Delta z$ arasındaki bağımsızlık kullanılarak,

$$E[y\exp(i\xi z)] = E[E[y|x^*, \Delta z]\exp(i\xi x^*)\exp(i\xi\Delta z)]$$

$$= E[E[g(x^*)|x^*, \Delta z]\exp(i\xi x^*)\exp(i\xi\Delta z)]$$

$$= E[g(x^*)\exp(i\xi x^*)\exp(i\xi\Delta z)]$$

$$= E[g(x^*)\exp(i\xi x^*)]E[\exp(i\xi\Delta z)]$$

$$= E[y\exp(i\xi x^*)]E[\exp(i\xi\Delta z)]$$

$$M_1(\tilde{x}^*, h) = \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)\phi_0(\xi)\frac{m_y(\xi)}{m_1(\xi)}\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)E[\exp(i\xi x^*)]\frac{E[y\exp(i\xi z)]}{E[\exp(i\xi z)]}\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)E[\exp(i\xi x^*)]\frac{E[y\exp(i\xi x^*)]E[\exp(i\xi\Delta z)]}{E[\exp(i\xi x^*)]E[\exp(i\xi\Delta z)]}\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)E[y\exp(i\xi x^*)]\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)E[E[y|x^*]\exp(i\xi x^*)]\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)\left(\int E[y|x^*]f(x^*)\exp(i\xi x^*)dx^*\right)\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \iint \frac{1}{2\pi}\kappa(h\xi)\exp[i\xi(x^* - \tilde{x}^*)]E[y|x^*]f(x^*)d\xi d\,x^*$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Parseval eşitliğinden;}\\ \int \frac{1}{2\pi}\kappa(\xi)\exp[i\xi h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)]d\xi = K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)\end{array}\right)$$

$$= \int h^{-1}K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)\big(E[y|x^*]f(x^*)\big)dx^*$$

$$= E\left[h^{-1}K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)E[y|x^*]\right] = E\big[yh^{-1}K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)\big]$$

$$M_0(\tilde{x}^*, h) = \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)\phi_0(\xi)\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) \left( \int f(x^*) \exp(i\xi x^*) dx^* \right) \exp(-i\xi \tilde{x}^*) d\xi$$

Parseval eşitliğinden

$$= \int h^{-1} K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big) f(x^*) dx^*$$

$$= E\big[h^{-1} K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)\big]$$

yazılır.

Sadece gözlemlenebilen değişkenler içeren $a = 1, x, y$ için $m_a(\xi)$ momentlerinin bilgisinin $g(\tilde{x}^*, h)$'yi tanımlamak için gerekli olduğu bilinmelidir. Çünkü $m_a(\xi)$ momentleri ilgili örneklem ortalamalarından tahmin edilebilir. Bu durumda Schennach 2004b'de aşağıdaki tahmin edici önerilmektedir:

**Tanım1:** $i = 1, \ldots, n$ için $(x_i, y_i, z_i)\, n$ büyüklüğündeki bir örneklem alınsın. Verilen bir $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}$ için ve bazı $h_n \to 0$ bant genişliklerinin sırası için

$$\hat{g}(\tilde{x}^*, h_n) = \frac{\widehat{M}_1(\tilde{x}^*, h_n)}{\widehat{M}_0(\tilde{x}^*, h_n)} \tag{3.26}$$

$$\widehat{M}_k(\tilde{x}^*, h_n) = \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h_n \xi) \hat{\phi}_k(\xi) \exp(-i\xi \tilde{x}^*) d\, \xi \tag{3.27}$$

$$\hat{\phi}_0(v) = \exp\left( \int_0^v \frac{i\hat{m}_x(\zeta)}{\hat{m}_1(\zeta)} d\zeta \right) \tag{3.28}$$

$$\hat{\phi}_1(v) = \frac{\hat{m}_y(\zeta)}{\hat{m}_1(\zeta)} \phi_0(v) \tag{3.29}$$

ve $a = 1, x, y$ için

$$m_a(\zeta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\big(i\zeta z_j\big)$$

dir.

Bu tahmin edicinin ilginç bir özelliği, ölçüm hatasının yokluğunda Nadaraya-Watson tahmin edicisine dönüşmesidir (Örneğin $z = x = x^*$ olduğunda). Dahası, bu durumda, $\hat{m}_x(\zeta) = \hat{m}_z(\zeta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} z_j \exp\big(\zeta z_j\big) = d\hat{m}_1(\zeta)/d\zeta$ ve (3.28) denklemi $\hat{\phi}_0(v) = m_1(v)$ sağlamasına analitik olarak dönüşür. Böylece (3.29) denklemi de $\hat{\phi}_1(v) = \hat{m}_y(\zeta)$ anlamına gelir. Eldeki bu eşitliklerle (3.26) denklemi Nadaraya-Watson tahmin edicisinin pay ve paydasının Fourier sunumunu tanımlayabilir.

Hedeflenen tahmin edicinin iyi davranışlı (well behaved) olduğundan emin olmak için aşağıdaki varsayıma ihtiyaç duyulur:

**Varsayım 4:** $\kappa(\xi)$, kernelin Fourier dönüşümü

i. Sınırlı

ii. Tıkız (kompakt) dayanaklı (genelliği kaybetmeksizin $[-1, 1]$ aralığında)

dir.

$\kappa(\xi)$'nın sınırsızlığı çok zayıf bir gereksinimdir. Çünkü herhangi bir sınırlılığı ihlal eden $K(z)$ kernel, artık kesin olarak integrallenebilir olmayacaktır. $\kappa(\xi)$'nın tıkız dayanaklı olması varsayımı genellikle kernel dekonvolüsyon tahmin edicilerinin asimtotik özelliklerinden türetilmesinden üretilmiştir (Fan ve Truong 1993). Bu varsayıma gereksinim, tahmin edicinin asimtotik olarak var olmayan bir karakteristik fonksiyona bölüm içermesinden ortaya çıkmaktadır. Çok hafif düzgünlülük gerektirmeleri altında frekans sonsuza doğru gittikçe karakteristik fonksiyonlar sıfıra bozulurlar. Kapalı tanımlı bir kernel (Fourier sunumunda), ıraksamanın kontrol altında olduğundan emin olarak, verilen bir sonlu kümede frekans aralığını açık bir şekilde dikkate aldırır.

Tıkız dayanağın sınırlanması (Fourier sunumunda) pratikte birkaç problem yaratır. Çünkü Fourier sunumunda bir tıkız dayanakla karşılaşırken, herhangi bir $K(x^*)$ kerneli alınabilir ve orijinal kernelin özelliklerinin çoğunu sergileyen değiştirilmiş bir $\widetilde{K}(x^*)$ kerneli üretilebilir. Orijinal $K(x^*)$ kernelin Fourier dönüşümü $\kappa(\xi)$'nın hesaplanmasıyla ve verilen bir frekansın ötesini kaldıran bir $W(\xi)$ pencere fonksiyonu ile çarpılmasıyla

$$\tilde{\kappa}(\xi) = W(\xi)\kappa(\xi)$$

elde dilir.

Pencere fonksiyonunun makul bir seçimi ile orijinal kernelin birçok özelliğini $\tilde{\kappa}(\xi)$ değiştirilmiş kernelin de muhafaza ettiğinden emin olunacaktır. Örneğin bir pencere fonksiyonu aşağıdaki gibi etkilenmeyen kernelin mertebesinden ayrılacaktır. $\forall\, \bar{\xi} \in [0, 1]$ için

$$W(\xi) = \begin{cases} 1 & , |\xi| \leq \bar{\xi} \\ \left(1 + \exp\left((1-\bar{\xi})((1-|\xi|)^{-1} - \left(|\xi| - \bar{\xi}\right)^{-1})\right)\right)^{-1} & , 1 \geq |\xi| > \bar{\xi} \\ 0 & , |\xi| > 1 \end{cases}$$

dir. Çünkü pencere fonksiyonu orijinin yakınlarında sabittir. Bu pencere fonksiyonu sonsuz bir şekilde birçok kez diferansiyellenebilir olduğundan değiştirilmiş $\widetilde{K}(x^*)$ kernelin $|x^*| \to \infty$ gittikçe $x^*$'ın herhangi bir gücünden daha hızlı azalacağını garanti edecektir (Orijinal $K(x^*)$ kernelin de bu özelliğe sahip olması koşuluyla).

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 4.1 Değişkenler ‘’*Bilinmeyen*’’ Bir Dağılımdan Gelen Hata İle Ölçüldüğünde Yarı Parametrik Regresyon Yöntemleri

### 4.1.1 Parametrik Olmayan Bölümde Ölçüm Hataları Olması Durumunda Yarı Parametrik Regresyon

Ölçüm hatalı model çalışmaya olan ilgi birçok konuda bir dizi çalışmanın yapılmasıyla, özellikle Carroll ve arkadaşlarının 2006 yılındaki çalışmalarından sonra daha da önem kazanmıştır. Ayrıntılı olarak bu konu iki bölüme ayrılabilir. İlki lineer ölçüm hatalı model üzerinde yoğunlaşmıştır (Anderson (1984), Carroll ve ark. (1984) ve Stefanski (1985)’e bakınız.). İkincisi ise genel olarak lineer olmayan ölçüm hatalı modellerle ilgilidir (Fan ve Truong (1993) ve oradaki referanslara bakınız.). $X^*$’lar ardışık hatalarla ölçüldüğünde $(X, X^*)$ tahmin edicilerinin $Y$ yanıt değişkeni ile ilgili $X^T\beta + g(X^*)$ ortalama fonksiyonlu yarı parametrik kısmi doğrusal modeli ilk olarak Liang ve ark. (1997) düşünmüşlerdir. Yazarlar tutarlı ve asimtotik olarak normal olduğu gösterilebilen $\beta$’nın bir tahminini elde etmişlerdir.

Fan ve Truong (1993) $\beta = 0$ ve $X^*$’ın ölçüm hatalı olması durumunu ele almışlardır. Parametrik olmayan $g(.)$ fonksiyonunun sadece logaritmik oranda tahmin edilebileceğini kanıtlamışlardır.

$X$ ve $X^*$’ın rollerini karşılıklı olarak değiştirirsek, parametrik kısım tam olarak ölçülürken parametrik olmayan kısım hatalı ölçülür. Burada $\Delta\chi$ ölçüm hatası olmak üzere $E(Y|X, X^*) = X^T\beta + g(X^*)$ ve $\chi = X^* + \Delta\chi$ dir. Liang ve ark. (1997) $\beta$’nın parametrik oranda tahmin edilebilir olduğunu göz ardı etmişlerdir. Liang (2000) bu problemlere daha pozitif bir cevap sunmuştur. Ancak Liang (2000)’de ölçüm hatalarının bilinen bir dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır (Bölüm 3.2.3.2’ye bakınız). Bizim çalışmamız ise ‘’yarı parametrik bir regresyon modelinde bağımsız değişkenler bilinmeyen dağılımdan gelen bir hata ile ölçülüyorsa bu durumda regresyon fonksiyonlarının ve yoğunluklarının tahmini nasıl elde edilebilir’’ sorusuna detaylı bir yanıt verebilmektedir.

Gözlenmemiş bir rasgele değişkenin iki hatalı-bulaşmış ölçümlerinin eklemeli yoğunluğu bilindiğinde bu değişkenin yoğunluğunun tanımlanması olasıdır (Rao 1992). Li ve Vuong (1998) bu tanımlamanın deneysel bir versiyonunun bilinen yakınsama oranlı tutarlı bir tahmin ediciye neden olduğunu göstermişlerdir. Schennach (2004b), bilinmeyen bir dağılımın hatası ile bulaştırılmış bağımsız değişkenleri göz önüne alan geleneksel Nadarya-Watson Kernel regresyon tahmin edicisini genişleterek eksik ölçülmüş bir değişkenin tekrar eden bir gözlem değeri olduğu zaman açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olduğunda tutarlı bir parametrik olmayan regresyon tahmin edicisi tanıtmıştır. Bağımsız değişkenlerin iki hata bulaşmış ölçümlerinin geçerliliğinin, tanımlamanın başarılması için gerekli olan tek şey olduğu gösterilmiştir. Ayrıca hedeflenen tahmin edicinin yakınsama oranı ve asimtotik dağılımı da sağlanmıştır.

Bu çalışmada koşullu beklentilerin yarı parametrik tahminleri üretilerek, ölçüm hataları bilinmeyen bir dağılımdan geldiği zaman kullanılabilecek bir teknik geliştirilmiştir. Bu metot ile eksik ölçülmüş bir değişkenin tekrar eden bir gözlem değeri olduğu zaman parametrik olmayan bölümdeki açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olduğunda tutarlı olan bir yarı parametrik regresyon tahmin edicisi elde edilmiştir. Parametrik olmayan kısmın tahmin edicisinin asimptotik olarak normal olduğu Schennach (2004b) tarafından gösterilmiştir. Burada ise yarı parametrik regresyon modelinin parametrik kısımdaki $\beta$'nın bir tahmini elde edilmiş ve bu tahmin edicinin asimptotik olarak normal olduğu gösterilmiştir.

***- Tahmin Yöntemi***

$n$ örneklem büyüklüğüne dayanan yarı parametrik kısmi doğrusal modeli düşünelim: $E[\Delta y|x^*] = 0$ için

$$y = X^T\beta + g(x^*) + \Delta y. \tag{4.1}$$

Burada $X$ bir rasgele vektör, $x^*$ $[0,1]$ aralığında tanımlanan bir rasgele değişken, $g(.)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve $\Delta y$ verilen değişkenlerden bağımsız ve sıfır ortalamaya sahip hatadır. Çok değişkenli bir genişleme açık bir şekilde olası olsa da bu yorumu kolaylaştırmak için $x^*$'ın skaler olduğunu düşünelim. Öngörülmüş bir en küçük kareler algoritması tarafından açıkça tanımlanabilen $\beta$'nın tahmini için aşağıdaki çözüme bakalım.

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - X_i^T \beta - \hat{g}(x^*, \beta)\}^2, \tag{4.2}$$

$\hat{g}_{y,h}(.)$ ve $\hat{g}_{x,h}(.)$ sırasıyla $Y$ ve $X$'in $x^*$ üzerindeki $h$ bant genişlikli kernel regresyonları olsun. Öyleyse,

$$\hat{\beta}_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \{X_i - \hat{g}_{x,h}(x_i^*)\}\{X_i - \hat{g}_{x,h}(x_i^*)\}^T\right]^{-1} \times \sum_{i=1}^{n} \{X_i - \hat{g}_{x,h}(x_i^*)\}\{Y_i - \hat{g}_{y,h}(x_i^*)\} \tag{4.3}$$

olur. (4.3) tahmin edicisinin $\beta_n$'in sıfır ortalama ve $B^{-1}CB^{-1}$ varyansla ($B, X - E(X|X^*)$'nin kovaryans matrisi; $C, \Delta y\{X - E(X|X^*)\}$'nin kovaryans matrisi) asimtotik olarak normal dağılmasına neden olan alışılmış bant genişliği ve alt düzeltme gerektirmediği gösterilmiştir (Liang 2000).

$x^*$ ölçüm hatasının bozulmasından dolayı (4.3)'ün en küçük kareler şekli düzeltilmelidir. Aksi taktirde $\beta_n$ ve dahası $\hat{g}_{x,h}(x^*)$ ve $\hat{g}_{y,h}(x^*)$ artık istatistik olmayacaktır. Bu nedenle $\beta$'nın bir tahmin edicisi yeniden tanımlanmalıdır. $y$ ve $x^*$ gözlendiğinde verilen bir $\tilde{x}^*$ noktasında $g(\tilde{x}^*)$'ın iyi bilinen Nadarya-Watson Kernel tahmin edicisi bu iş için doğal bir adaydır.

$$\hat{g}(\tilde{x}^*, h) = \frac{n^{-1} \sum_{l=1}^{n} y_l K_h(x_l^* - \tilde{x}^*)}{n^{-1} \sum_{l=1}^{n} K_h(x_l^* - \tilde{x}^*)}$$

Burada $l = 1, \dots, n$ için $x_l^*$ ve $y_l$ veri noktalarını göstermekte ve $K_h(.)$ kernel

$$K_h(x^*) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x^*}{h}\right)$$

formundadır ve $h$ bant genişliği parametresidir. Schennach (2004a)'da gösterildiği gibi $x^*$'ın iki tekrarlı ölçümlerinin uygunluğu

$$\chi = x^* + \Delta\chi$$

$$z = x^* + \Delta z$$

herhangi bir $u(y, x^*)$ fonksiyonu için $E[u(y, x^*)]$ formunun herhangi bir momentini tanımlamak için yeterli bilgiyi sağlar. Çünkü Nadarya-Watson Kernel tahmin edicisinin (sabit $h$ bant genişliğinde) olasılık limiti

$$\hat{g}(\tilde{x}^*, h) = \frac{E[yK_h(x^* - \tilde{x}^*)]}{E[K_h(x^* - \tilde{x}^*)]}$$

oranıdır ve $k = 0{,}1$ için $u(y, x^*) = y^k K_h(x^* - \tilde{x}^*)$ şeklinde benzer bir teknik burada uygulanabilir. Çıkan sonuçların bir parametrik olmayan duruma genişlemesi ek adımlar gerektirir. Bu durumu aşmak için $\tilde{x}^*$ tarafından indekslenen momentlerin sonsuz bir ailesinin karakterize edilmesine ihtiyaç vardır. Bu sorun Nadarya-Watson tahmin edicisinin hesaplanmasıyla, ilişkili konvolüsyon operasyonlarının Fourier dönüşümü ailesinin yalnızca bir operasyon ile tahmin edilmesine olanak sağlanarak ele alınabilir. Aşağıdaki varsayımlar altında $\beta$'nın bir tahminini araştıralım.

**Varsayım 1:** $\Delta z$ ve $x^*$ karşılıklı olarak bağımsızdır.

$$E[\Delta y | x^*, \Delta z] = 0$$

$$E[\Delta x | x^*, \Delta z] = 0$$

**Varsayım 2:** $E[|x^*|], E[\Delta\chi]$ ve $E[|y|]$'ler sonludur.

**Varsayım 3:** $E\left[y^k h^{-1} K\left(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\right)\right] < \infty$, tüm $\tilde{x}^*$, herhangi bir $h > 0$ ve $k = 0{,}1$ için.

**Varsayım 4:** $\kappa(\xi)$, kernelin Fourier dönüşümü

i. Sınırlı

ii. Tıkız (kompakt) dayanaklı (genelliği kaybetmeksizin $[-1, 1]$ aralığında)

Herhangi bir sonlu $\xi$ için $\left|E\left[e^{i\xi z}\right]\right| > 0$ koşuluyla

$$\omega_{ni}(.) = K_n\left(\frac{. - \tilde{x}_i^*}{h_n}\right) / \sum_j K_n\left(\frac{. - \tilde{x}_j^*}{h_n}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{nh_n} K_n\left(\frac{. - \tilde{x}_i^*}{h_n}\right) / \hat{f}_n(.)$$

$$\hat{f}_n(.) = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K_n\left(\frac{. - \tilde{x}_j^*}{h_n}\right)$$

olarak alınsın. Burada 2004b yılında Schennach tarafından kernel dekonvolüsyon metoduna alternatif olarak geliştirilen ve momentleri kullanan metodu kullanarak $\omega_{ni}(.)$'yi yeniden düzenleyelim. $i = 1, \ldots, n$ için $(\chi_i, y_i, z_i)\, n$ büyüklüğündeki bir örneklem alınsın. Verilen bir $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}$ ve bazı $h_n \to 0$ bant genişliklerinin sırası için

$$\omega_{ni}(\tilde{x}^*) = \frac{K_n\left(\frac{\tilde{x}^* - \tilde{x}_i^*}{h_n}\right)}{\sum_j K_n\left(\frac{\tilde{x}^* - \tilde{x}_j^*}{h_n}\right)} = \frac{\int \frac{1}{2\pi}\kappa(h_n\xi)\exp[i\xi(\tilde{x}^* - \tilde{x}_i^*)]d\xi}{\widehat{M}_0(\tilde{x}_i^*, h_n)}$$

olur. Burada $i = \sqrt{-1}$, $\kappa(\xi)$ kernel $K(\tilde{x}^*)$'ın Fourier dönüşümü, $a = 1, \chi$ için $\widehat{m}_a(\xi) = E[a\exp(i\xi z)] = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_j \exp(i\xi z_j)$ ve $\phi_0(\xi) \equiv E[\exp(i\xi\tilde{x}^*)]$ olmak üzere

$$\widehat{M}_0(\tilde{x}_i^*, h_n) = \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h_n\xi)\hat{\phi}_0(\xi)\exp(-i\xi\tilde{x}_i^*)d\,\xi$$

$$\hat{\phi}_0(\xi) = \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{i\widehat{m}_\chi(\zeta)}{\widehat{m}_1(\zeta)}d\zeta\right)$$

dir. Sadece gözlemlenebilen değişkenler içeren $a = 1, \chi$ için $\widehat{m}_a(\xi)$ bilgisinin $\omega_{ni}(\tilde{x}^*)$'yı tanımlamak için gerekli olduğu bilinmelidir. Çünkü $\widehat{m}_a(\xi)$ momentleri ilgili örneklem ortalamalarından tahmin edilebilir.

$g(x^*) = E(Y - X^T\beta | X^* = x^*)$ olduğu göz önüne alınırsa, Schennach (2004b)'de de ele alındığı gibi $g(.)$'nin tahmin edicisi olarak

$$\hat{g}_n(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(x^*)\left(\underbrace{Y_i - X_i^T\beta}_{y^*}\right) = \frac{\widehat{M}_1(\tilde{x}^*, h_n)}{\widehat{M}_0(\tilde{x}^*, h_n)}. \qquad (4.4)$$

denklemi tanımlanabilir. Burada;

$$\omega_{ni}(x^*) = \frac{K_n\left(\frac{x^* - \tilde{x}_i^*}{h_n}\right)}{\sum_j K_n\left(\frac{x^* - \tilde{x}_j^*}{h_n}\right)} = \frac{\int \frac{1}{2\pi}\kappa(h_n\xi)\exp[i\xi(x^* - \tilde{x}^*)]d\xi}{\widehat{M}_0(\tilde{x}^*, h_n)}$$

$k = 0,1$ için $M_k(\tilde{x}^*, h) = \frac{1}{2\pi}\int \kappa(h\xi)\phi_k(\xi)\exp(-i\xi\tilde{x}^*)d\,\xi$

ve $\phi_k(\xi) \equiv E\left[y^{*k}\exp(i\xi x^*)\right]$ için

$$\phi_0(\xi) = \exp\left(\int_0^{\xi} \frac{im_\chi(\zeta)}{m_1(\zeta)}d\zeta\right)$$

$$\phi_1(\xi) = \phi_0(\xi)\frac{m_{y^*}(\xi)}{m_1(\xi)}$$

dir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $\kappa(\xi)$ kernel $K(x^*)$'ın Fourier dönüşümü ve $a = 1, \chi, y$ için $m_a(\xi) = E[a\exp(i\xi z)]$ dir.

$g_n(\chi_i)$ yerine $\hat{g}(x^*, \beta)$ koyularak $\hat{\beta}_n$, (4.2) denkleminin çözümü olarak alınsın. Öyleyse $\beta$'nın $\hat{\beta}_n$ genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi açık bir şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{Y}\right).$$

Burada $\tilde{Y} = \left(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n\right)$ için $\tilde{Y}_i = Y_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)Y_j$ ve $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n\right)$ için $\tilde{X}_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} \omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)X_j$ dir.

***- Parametrik Bölümün Asimptotik Normalliği***

Çoğu durumda gözlem sayısı $n$ arttıkça tahmin ediciler daha iyi sonuç vermektedir. Bazı durumlarda da tahmin edicilerin küçük örneklem özellikleri açıkça ifade edilemez. Bu nedenle daha iyi sonuç vermeyen tahmin edicilerin elenmesi, sapmazsızlık ve etkinlik bakımından tahmin edicilerin karşılaştırılmasının olanaksız olduğu durumlarda tahmin edicilerin örneklem büyüklüğü artarken ($n$ sonsuza giderken) davranışlarının incelenmesi amacıyla tahmin edicilerin asimptotik özelliklerine bakılır.

Asimptotik özellikler tutarlılık ve asimptotik etkinliktir (normallik). Tutarlılık özelliği tahmin edicinin yakınsayacağı parametre hakkında bilgi verse de, bu değer çevresindeki dağılımın şekli ile ilgili bilgi vermez. Oysa birçok istatistiksel çıkarımın yapılabilmesi için tahmin edicilerin limitteki ($n$ sonsuza giderken) dağılımlarının bilinmesi gerekir (örneğin; güven aralıklarının oluşturulması ve hipotez testlerinin yapılması). Çoğu tahmin edicinin limitteki dağılımı normal dağılıma uyar. Buna *asimptotik normallik* denir. Şimdi parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modelinin parametresi için elde ettiğimiz $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisinin asimptotik normalliğini inceleyelim.

İlk olarak bazı notasyonları tanımlayalım ve bölüm 4.1.1'deki varsayım 1-4'e ek olarak aşağıdaki varsayımları yapalım. $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ için $\gamma_i(x^*) = E\left(x_{ij} \middle| X_i^* = x^*\right)$ ve $V_{ij} = x_{ij} - \gamma_i(X_i^*)$ olsun.

**Varsayım 5:** $sup_{0\leq x^*\leq 1}E(\|X_1\|^3|X^*=x^*)<\infty$, $E(V_1V_1^T)=B$ ve $V_i=\left(V_{i1},\dots,V_{ip}\right)^T$ için $B$ pozitif tanımlı bir matristir.

**Varsayım 6:** $g(.)$ ve $\gamma_i(.)$ birinci dereceden Lipschitz süreklidir.

Literatürde geleneksel olarak genelde düzgün fonksiyonlar (Fourier dönüşümleri $\gamma<0$ için $|\zeta|\to\infty$ gittikçe $|\zeta|^\gamma$ ya azalır) ve süper düzgün fonksiyonlar (Fourier dönüşümleri $\alpha<0,\beta>0$ için $|\zeta|\to\infty$ gittikçe $\exp\left(\alpha|\zeta|^\beta\right)$ya azalır) olarak ikiye ayrılan kernel dekonvolüsyon tahmin edicilerine (Carroll ve ark. 2006) ve ilişkili tahmin edicilere (Fan ve Truong 1993) odaklanılmıştır. Biz burada süper düzgün ve genelde düzgünlük durumlarının ikisini birden kapsayan $(1+|\zeta|)^\gamma\exp\left(\alpha|\zeta|^\beta\right)$ formundaki ifadeyi kullanacağız.

**Tanım 2:** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ için $f(\zeta)\preccurlyeq g(\zeta)$ formundaki bir ifade; tüm $\zeta\in\mathbb{R}$ için $f(\zeta)\leq Cg(\zeta)$ olacak şekilde $\zeta$ den bağımsız sabit bir $C>0$ sayısının olduğunu gösterir ($\succcurlyeq$ için de benzerdir). Benzer olarak $a_n,b_n$şeklindeki iki dizi için $a_n\preccurlyeq b_n$ formundaki bir ifade; tüm $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\leq Cb_n$ olacak şekilde $n$ den bağımsız sabit bir $C$ sayısının olduğunu gösterir.

**Varsayım 7:**

i. $[y_i^*,\chi_i,z_i,x_i^*,\Delta y_i,\Delta\chi_i,\Delta z_i]$ ; $i=1,\dots,n$ bağımsız ve özdeş dağılımlı bir dizidir.

ii. $E\left[y^{*2-j}|z|^j\right]<\infty, E\left[\chi^{2-j}|z|^j\right]<\infty;\ j=0,1.$

iii. Gözlenmemiş değişkenin marjinal yoğunluğu $f(x^*)$, $[0,1]$ aralığında 0 dan uzak olacak şekilde ayrıca $x^*=\tilde{x}^*$ iken sıfırlanamayacak biçimde sınırlandırılmıştır.

iv. $\phi_0(\zeta)=E\left[e^{i\zeta x^*}\right],\phi'_0(\zeta)\equiv\frac{d\phi_0(\zeta)}{d\zeta},\phi_1(\zeta)=E\left[y^*e^{i\zeta x^*}\right],\ m_1(\zeta)=E\left[e^{i\zeta z}\right]$

fonksiyonları bazı $\gamma_r\geq 0$ için

$$\left|\frac{\phi'_0(\zeta)}{\phi_0(\zeta)}\right|\preccurlyeq(1+|\zeta|)^{\gamma_r} \tag{4.5}$$

ve bazı $\gamma_\phi\beta_\phi\geq 0,\gamma_m\beta_m\geq 0$ olacak şekildeki $\gamma_\phi,\gamma_m\in\mathbb{R},\alpha_\phi\leq 0,\alpha_m\leq 0,$ $\beta_\phi\geq 0,\beta_m\geq 0$ için

$$\max\{|\phi_0(\zeta)|,|\phi_1(\zeta)|\}\preccurlyeq(1+|\zeta|)^{\gamma_\phi}\exp\left(\alpha_\phi|\zeta|^{\beta_\phi}\right), \tag{4.6}$$

$$|m_1(\zeta)|\succcurlyeq(1+|\zeta|)^{\gamma_m}\exp\left(\alpha_m|\zeta|^{\beta_m}\right) \tag{4.7}$$

koşullarını sağlar.

$x^*$ın karakteristik fonksiyonu $\phi_0(\zeta)$'nın azalma oranı $f(x^*)$'in düzgünlülüğü ile belirlenirken $\phi_1(\zeta)$'nın azalma oranı $f(x^*)E[y|x^*]$'ın düzgünlülüğü ile belirlenir. Denklem (4.6) incelendiğinde en yavaş şekilde azalan terimi almaktan önce, tek tek $|\phi_0(\zeta)|$ ve $|\phi_1(\zeta)|$ üzerindeki sınırları bulmakla ilgilenildiği görülmektedir. Genelliği kaybetmeksizin $\phi_0(\zeta)$ ve $\phi_1(\zeta)$'i tek bir varsayımda gruplama olanağı vardır, çünkü her iki nicelik de tahmin edicinin gösterimini benzer bir biçime dönüştürebilir. Bu gruplama ayrıca, tahmin edicinin yakınsama oranını tanımlamada düşünülmek zorunda olunan büyüklüğün bağımsız mertebelerinin sayısını azalttıkça, gösterim olarak da uygundur.

Her zamanki gibi dekonvolüsyon tipi tahmin ediciler konusunda, bir nicelik (burada $m_1(\zeta)$) üstten sınırlı olmak yerine alttan sınırlı (denklem (4.7)) olmalıdır, çünkü bu nicelik tahmin edicinin gösteriminde payda olarak görünür. Denklem (4.7), $x^*$ ve $\Delta z$'nin karakteristik fonksiyonlarının katsayıları üzerindeki ayrı alt sınırlar anlamına gelmektedir, çünkü $m_1(\zeta) = E\left[e^{i\zeta z}\right] = E\left[e^{i\zeta x^*}\right]E\left[e^{i\zeta \Delta z}\right]$dir. $E\left[e^{i\zeta x^*}\right]$ ve $E\left[e^{i\zeta \Delta z}\right]$'nin gruplanması ayrıca gösterim zorunluluğunu azaltmayı amaçlamıştır. Denklem (4.5) tarafından yüklenen $\phi'_0(\zeta)/\phi_0(\zeta)$ oranı üzerindeki kısıt genelde dışı olarak görülebilmesine rağmen $|\phi'_0(\zeta)|$ üzerindeki daha bilinen bir üst sınır ve $|\phi_0(\zeta)|$ üzerindeki bir alt sınır tarafından ima edildiği açıktır. Denklem (4.5)'deki $\exp\left(\alpha_r|\zeta|^{\beta_r}\right)$ formunun bir teriminin yokluğu çok az bir genelliği kaybetme ile sonuçlanır, çünkü denklem (4.5)'deki gibi tüm yaygın genelde düzgün ve süper düzgün fonksiyonlar $\gamma_r = 1$ için tutunurlar.

Ölçüm hatalı değişkenli çalışmaların çoğu sonlu sıralı kerneller (Fan 1991, Fan ve Truong 1993) ya da sonsuz sıralı kerneller (Politis ve Romano 1991, Li ve Vuong 1998) üzerinde yoğunlaşırken biz burada hem sonlu hem de sonsuz sıralı kernelleri ele alacağız. Geleneksel sonlu sıralı kerneller varsayım 8'de verilmiştir.

**Varsayım 8:** $K(x^*)$ Kernel fonksiyonu bazı $\gamma_\kappa > 0$ tamsayısı için aşağıdaki gösterimlere uyar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x^*)dx^* = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (x^*)^j K(x^*)dx^* \begin{cases} = 0 & j = 1, \dots, \gamma_\kappa - 1 \\ \neq 0 & j = \gamma_\kappa \end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^*|^j |K(x^*)| dx^* < \infty \quad j = 1, \ldots, \gamma_\kappa$$

Ayrıca sonsuz sıralı kernellerin bir sınıfı da varsayım 9'da verilmiştir.

**Varsayım 9:**

Kernel'in Fourier dönüşümü, bazı $\bar{\xi} > 0$ için $|\xi| < \bar{\xi}$ koşuluyla $\kappa(\xi) = 1$dir.

Varsayım 9, $[-1,1]$ aralığında 1, diğer yerlerde 0 değerini alan bir Fourier dönüşümüne sahip olduğu için özellikle Fourier gösterimine uyan

$$K(x^*) = \frac{\sin(x^*)}{\pi x^*}$$

formundaki bir kerneli göz önüne almaktadır. Bu tür kernel daha önce diğer Fourier temelli tahmin edicilerde kullanılmıştır (Li ve Vuong 1998) ve verilen bir frekansa Fourier dönüşümünü budamak anlamına gelmektedir. Hem $E[y|x^*]$ hem de $x^*$ın yoğunluğu sonsuz kez diferansiyellenebilir olduğunda, bir sonsuz sıralı kernel, yanlılığın bant genişliğinin herhangi bir gücünden daha hızlı sıfıra gideceğini garanti edecektir. Böylece yanlılık, örneğin, ters bant genişliği $h^{-1}$'in üstel olarak azalan bir fonksiyonu olacaktır.

**Teorem2:** Verilen herhangi bir $\tilde{x}^*$ için varsayım 1-9 un sağlandığı varsayılsın. Eğer aşağıdaki durumlardan herhangi biri sağlanıyorsa bazı $\eta > 0$ için,

i. $z$ nin yoğunluğu süper düzgün ise $(\beta_m \neq 0)$, bant genişliğini $h_n^{-1} \preccurlyeq \left(\left(-\frac{(1+\eta)}{2\alpha_m}\right) \ln n\right)^{-1/\beta_m}$ alırız.

ii. $z$ nin yoğunluğu genelde düzgün ise, bant genişliğini $h_n^{-1} \preccurlyeq n^{-\eta} n^{1/(3+2\gamma_r-2\gamma_m)}$ alırız.

$\hat{\beta}_n$ bir asimptotik olarak normal tahmin edicidir, yani varsayım 5'de verilen $B$ için

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \Rightarrow N(0, \Omega(\tilde{x}^*, h_n) B^{-1})$$

dir. Buradaki $\Omega(\tilde{x}^*, h_n)$ Schennach (2004b)'de tanımlanan varyans değeridir.

$$\Omega(\tilde{x}^*, h) = \frac{\Sigma_{11}(\tilde{x}^*, h)}{\left(M_0(\tilde{x}^*, h)\right)^2} + \frac{M_1^2(\tilde{x}^*, h)\Sigma_{00}(\tilde{x}^*, h)}{\left(M_0(\tilde{x}^*, h)\right)^4} - 2\frac{M_1(\tilde{x}^*, h)\Sigma_{10}(\tilde{x}^*, h)}{\left(M_0(\tilde{x}^*, h)\right)^3}$$

$$\Sigma_{k_1k_2}(\tilde{x}^*,h) = n^{-1}\sum_{l_1=1,\chi,y}\sum_{l_2=1,\chi,y}\int\int U_{l_1}^{k_1}(\zeta,\tilde{x}^*,h)\,V_{l_1l_2}(\zeta,\xi)\left(U_{l_1}^{k_1}(\xi,\tilde{x}^*,h)\right)^{\dagger} d\zeta d\xi$$

$V_{l_1l_2}(\zeta,\xi) = m_{l_1l_2}(\zeta-\xi) - m_{l_1}(\zeta)m_{l_2}(-\xi)$, † komplex çarpım ve $k_1, k_2 = 0{,}1$ için

$$U_1^0(\zeta,\tilde{x}^*,h) = -\frac{iA_0(\zeta,\tilde{x}^*,h)m_\chi(\xi)}{\left(m_1(\zeta)\right)^2},\ U_\chi^0(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \frac{iA_0(\zeta,\tilde{x}^*,h)}{m_1(\zeta)},\ U_y^0(\zeta,\tilde{x}^*,h) = 0$$

$$U_1^1(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \frac{iA_1(\zeta,\tilde{x}^*,h)m_\chi(\zeta)}{\left(m_1(\zeta)\right)^2} + \frac{C_1(\zeta,\tilde{x}^*,h)}{m_1(\zeta)}, U_\chi^1(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \frac{iA_1(\zeta,\tilde{x}^*,h)}{m_1(\zeta)},$$

$$U_y^1(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \frac{C_0(\zeta,\tilde{x}^*,h)}{m_1(\zeta)}$$

$$A_k(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\zeta}^{\infty} \exp(-iv\tilde{x}^*)\kappa(-hv)\phi_k(v)dv, & \zeta \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\zeta}^{\infty} \exp(-iv\tilde{x}^*)\kappa(-hv)\phi_k(v)dv, & \zeta < 0 \end{cases}$$

$$C_k(\zeta,\tilde{x}^*,h) = \frac{1}{2\pi}\exp(-i\zeta\tilde{x}^*)\kappa(-h\zeta)\phi_k(\zeta)$$

**İspat:** Teorem 2'nin ispatını yapabilmek için önce bazı lemmalar verilecektir. Lemma 1, güçlü düzgün yakınsaklık için genel bir sonuç verebilmek amacıyla oluşturulmuş ve teoremin ispatında kullanılmıştır. Lemma 2 ise, $g(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)g(X_k^*)$ ve $\gamma_j(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\gamma_j(X_k^*)$ için sınırları oluşturmak amacıyla oluşturulmuştur.

**Lemma 1:** $V_1, \dots, V_n$ 0 ortalamalı ve $\sup_j E|V_j|^r \leq C < \infty$ $(r \geq 2)$ olan bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. Bazı $p_2 \geq \max(0, 2/r - p_1)$ için $\sum_{j=1}^n a_{ij} = O(n^{p_2})$ ve bazı $0 < p_1 < 1$ için $\sup_{i,k\leq n}|a_{ki}| \leq n^{-p_1}$ olacak şekilde $\{a_{ki}, k, i = 1, \dots, n\}$ pozitif sayıların bir dizisi olduğu varsayılsın. Öyleyse $\max_{1\leq i\leq n}|\sum_{k=1}^n a_{ki}V_k| = O(n^{-s}\log n)$ $s = (p_1 - p_2)/2$ olur.

**İspat:** İspat için Liang ve Härdle (1997)'ye bakınız.

**Lemma 2:** Varsayım 1-5 in sağlandığı varsayılsın. Öyleyse $G_0(.) = g(.)$ ve $l = 1, \dots, p$ için $G_l(.) = \gamma_l(.)$ iken $\max_{1\leq i\leq n}\left|G_j(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)G_j(X_k^*)\right| = o(1)$

$j = 0, \ldots, p$ olur. Yani, $\max_{1\le i\le n}|g(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*) g(X_k^*)| = o(1)$ ve $\max_{1\le i\le n}\left|\gamma_j(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\gamma_j(X_k^*)\right| = o(1)$ $(j = 0, \ldots, p)$'dir.

**İspat:** Lemma 2 $g(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*) g(X_k^*)$, $\gamma_j(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\gamma_j(X_k^*)$ için sınırsızlığı sağlamaktadır. $V_i = \left(V_{i1}, \ldots, V_{ip}\right)^T$ için $V_{js} = \gamma_s\left(X_j^*\right) - X_{js}$ olmasından hareketle $\bar{\gamma}_{ns}(X_i^*) = \gamma_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*) X_{ks}$ alınarak ispat gösterilebilir. Liang ve Härdle (1997)'ye bakınız.

Teorik olarak eğer $\beta$ biliniyorsa $X^T\beta$'yı $Y$'nin içine alarak $\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)(Y_k - X_k^T\beta)$'nın tahmini Schennach (2004b) tarafından önerilen parametrik olmayan fonksiyonun tahminine dönüşür. Burada hata dağılımı bilinmediği için bu dağılımın ne olduğuna bakılmaksızın Schennach (2004b)'nin ana sonuçlarından birisi elde edilebilir;

$$\max_{1\le i\le n}\left|g(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\{g(X_k^*) + \Delta y_k\}\right| = O\big((\ln \mathrm{n})^{\gamma_b/\beta_v}\big).$$

Lemma 1'de $V_i = \Delta y_i$ ve $a_{ki} = \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)$ alınarak $\sup_{1\le i\le n}|\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_k| = o(1)$ ifadesi elde edilebilir. Bu ise $\max_{1\le i\le n}|g(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*) g(X_k^*)| = o(1)$'i gerektirir.

$\gamma_l(.)$ $(l = 1, \ldots, p)$ için ispatlar Schennach (2004b)'deki Teorem2'nin ispatı ile benzerdir. Böylece, $\gamma_l(.)$'nin Lipschitz sürekli olduğu göz önüne alınarak $\max_{1\le i\le n}|\gamma_l(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\gamma_l(X_k^*) I(|X_i^* - X_k^*| \le c_n)| = O(c_n)$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*) I(|X_i^* - X_k^*| > c_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{K_n\left(\frac{\tilde{x}_i^* - \tilde{x}_k^*}{h_n}\right) I(|X_i^* - X_k^*| > c_n)}{\sum_{j=1}^{n} K_n\left(\frac{\tilde{x}_i^* - \tilde{x}_k^*}{h_n}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\int \frac{1}{2\pi}\kappa(h_n\xi)\exp[i\xi(\tilde{x}_i^* - \tilde{x}_k^*)] I(|X_i^* - X_k^*| > c_n) d\xi}{\widehat{M}_0(\tilde{x}_i^*, h_n)}$$

dır. Schennach (2004b)'deki Teorem 2'nin ispatı kabul edilerek bu eşitliğin pay ve paydasının sırasıyla $nc_nh_n$ ve $nh_n$ mertebeli olduğu gösterilebilir. $c_n$'in sıfıra yaklaştığı düşünülerek aslında Teorem 2'nin $\gamma_l(.)$'nin hemen hemen türevli olmasını içerdiği görülebilir.

**Lemma 3:** Varsayım 1-5'in sağlandığı varsayılsın. Öyleyse $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X} = B$ dir.

**İspat:** $\bar{\gamma}_{ns}(X_i^*) = \gamma_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)X_{ks}$ olsun. $X_{js} = \gamma_s\big(X_j^*\big) + V_{js}$'den $\tilde{X}^T\tilde{X}$ $(s,m = 1,\dots,p)$'nin $(s,m)$-inci elemanı,

$\tilde{X}_{js} = X_{js} - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)X_{ks} = \gamma_s(X_i^*) + V_{js} - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)X_{ks} = \bar{\gamma}_{ns}(X_i^*) + V_{js}$,

$$\tilde{X}_{jm} = X_{jm} - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)X_{km} = \gamma_m(X_i^*) + V_{jm} - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)X_{km} = \bar{\gamma}_{nm}(X_i^*) + V_{jm}$$

den hareketle

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_{js}\tilde{X}_{jm} = \sum_{j=1}^{n} V_{js}V_{jm} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_{ns}\big(X_j^*\big)V_{jm} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_{nm}\big(X_j^*\big)V_{js} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_{ns}\big(X_j^*\big)\bar{\gamma}_{nm}\big(X_j^*\big)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} V_{js}V_{jm} + \sum_{q=1}^{3} R_{nsm}^{(q)}$$

dir. Güçlü büyük sayılar yasası $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_iV_i^T = B$ olduğunu bildirmektedir. Ayrıca $\bar{\gamma}_{ns}(X_i^*) = \gamma_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)[\gamma_s(X_i^*) + V_{ks}]$

$$= \gamma_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\gamma_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)V_{ks}$$

$= \tilde{\gamma}_s(X_i^*) - \sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)V_{ks}$

olur. Lemma 1'de $a_{ik} = \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)$ ve $V_k = V_{ks}$ ve $p_1 = 2$, $p_2 = 0$ alınırsa $\sum_{k=1}^n \omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)V_{ks} = o(1)$ ve dolayısıyla Lemma 2'den $\bar{\gamma}_{ns}(X_i^*) = o(1)$ elde edilir. Bu da $R_{nsm}^{(3)} = o(n)$ olduğunu gösterir. Bununla birlikte Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $R_{nsm}^{(1)} = o(n)$ ve $R_{nsm}^{(2)} = o(n)$ olur.

**Teoremin İspatı:**

$$\hat{\beta}_n = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{Y}\right) = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left[\tilde{X}^T\left(\tilde{X}\beta + g_n(X_i^*) + \widetilde{\Delta y}\right)\right]$$

$$= \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left[\tilde{X}^T\tilde{X}\beta + \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni} + \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i - \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_j\right\}\right]$$

$$= \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)\beta + \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni} + \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i - \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_j\right\}\right]$$

$$= \beta + \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni} + \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i - \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_j\right\}\right]$$

olur. $A(n) = n(\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}$ ve $g_{ni} = g(X_i^*) - \sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)g(X_k^*)$ olmak üzere

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) = \sqrt{n}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni} - \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_j\right\} + \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i\right]$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} A(n)\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_j\right\} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i\right]$$

olur.

Lemma 3'e göre $A(n)$ $B^{-1}$'e yakınsamaktadır. Bu yüzden problemimiz yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki parantez içindeki birinci ve ikinci terimlerin olasılıkta sıfıra yakınsadığını ve $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i$'nin de sıfır ortalama ve $\Omega(\tilde{x}^*, h_n)B$ kovaryans matrisle normal dağılıma yakınsadığını kanıtlar.

Buradaki ikinci ifade merkezi limit teoremi ve lemma 3 kullanılarak gösterilebilir. Lemma 3'ten $n\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}$'in $B^{-1}$'e yakınsadığını biliyoruz. Merkezi limit teoreminden $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\Delta y_i$'nin kovaryans matrisinin $\Omega(\tilde{x}^*, h_n)$ olduğu bilinmektedir. Chen (1988)'de $\frac{1}{n}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)$, $B^{-1}$'e yakınsarken $\sqrt{n}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\Delta y \to N\left(0, B^{-1}\Omega(\tilde{x}^*, h_n)\right)$ olduğu gösterilmiştir. Şimdi $\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{X}^T\Delta y$'nin nasıl dağıldığını bulmak istiyoruz. $\sqrt{n}\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\Delta y = n\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{\sqrt{n}}{n}\tilde{X}^T\Delta y = n\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{X}^T\Delta y$'nin kovaryans matrisi

$B^{-1}\Omega(\tilde{x}^*, h_n)$ olup merkezi limit teoremi gereğince $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{X}^T\Delta y = B\Omega(\tilde{x}^*, h_n)$ olduğu gösterilmiş olur.

İlk ifade için;

Lemma 1'de $r = 3, V_k = \Delta y_k$ (ya da $V_{kl}$), $a_{ij} = \omega_{nj}(\tilde{x}_i^*), p_1 = {}^2/_3$ ve $p_2 = 0$ alırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\max_{i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)\Delta y_k\right| = O\left(n^{-1/3}\log n\right), \tag{4.8}$$

$$\max_{i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}(\tilde{x}_i^*)V_{kl}\right| = O\left(n^{-1/3}\log n\right) \quad l = 1, \dots, p. \tag{4.9}$$

$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ij}g_{ni} = \sum_{i=1}^{n}V_{ij}g_{ni} + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{nij}g_{ni} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\omega_{nq}(\tilde{x}_i^*)V_{qj}\,g_{ni}$ olsun.

Lemma 1'de $r = 2, V_k = V_{kl}$, $a_{ij} = g_{nj}, {}^1/_4 < p_1 < {}^1/_3$ ve $p_2 = 1 - p_1$ alırsak $\left|\sum_{i=1}^{n}V_{ij}g_{ni}\right| = O\left(n^{-(2p_1-1)/2}\right)$ olur.

Lemma 2'den $\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_{nij}g_{ni}\right| \le n\max_{i\le n}|g_{ni}|\ \max_{i\le n}\left|\gamma_{nij}\right| = o(1)$ dir.

Abel eşitsizliği ve (4.9) denklemini kullanırsak,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\omega_{nq}(\tilde{x}_i^*)V_{qj}\,g_{ni} \le\ n\max_{i\le n}|g_{ni}|\ \max_{i\le n}\left|\sum_{q=1}^{n}\omega_{nq}(\tilde{x}_i^*)V_{qj}\right| = o(1)$ olur.

Yukarıdaki ifadeler $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i g_{ni}$'nin $o(1)$ olmasını gerektirir.

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde{x}_{kj}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right\}\Delta y_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}V_{kj}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right\}\Delta y_i + \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nkj}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right\}\Delta y_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{q=1}^{n}V_{qj}\omega_{nq}(\tilde{x}_k^*)\right\}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right]\Delta y_i$$

olduğunu göz önüne alalım. Şimdi yukarıdaki üç terimin de $o\left(n^{1/2}\right)$ olduğunu ispatlayalım.

Lemma 1'de $r = 2, V_k = \Delta y_k, a_{li} = \sum_{k=1}^{n}V_{kj}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*), {}^1/_4 < p_1 < {}^1/_3$ ve $p_2 = 1 - p_1$ alırsak $\left|\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}V_{kj}\omega_{ni}(W_k)\right\}\Delta y_i\right| = O\left(n^{-(2p_1-1)/2}\log n\right)$ elde ederiz. Lemma 2 ve (4.8) denklemleriyle

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nkj}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right\}\Delta y_i\right| \leq n \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\Delta y_i\right| \max_{k\leq n}|\gamma_{nkj}| = O\left(n^{2/3}c_n \log n\right)$$

elde ederiz. Abel eşitsizliği, (4.8) ve (4.9) denklemlerini kullanırsak,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{q=1}^{n}V_{qj}\omega_{nq}(\tilde{x}_k^*)\right\}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\right]\Delta y_i\right|$$

$$\leq n \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}(\tilde{x}_k^*)\Delta y_i\right| \max_{k\leq n}\left|\sum_{q=1}^{n}V_{qj}\omega_{nq}\left(\tilde{x}_j^*\right)\right|$$

$$= O\left(n^{1/3}\log^2 n\right) = o(n^{1/2})$$

denklemini elde ederiz. Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

***- Parametrik Olmayan Bölümün Asimptotik Normalliği***

Teorik olarak eğer $\beta$ biliniyorsa $X^T\beta$'yı $Y$'nin içine alarak $\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}\tilde{x}_i^*(Y_k - X_k^T\beta)$'nın tahmini Schennach (2004b) tarafından önerilen parametrik olmayan fonksiyonun tahminine dönüşür. Bu parametrik olmayan fonksiyonun asimptotik normalliği için Schennach (2004b)'ye bakınız.

**4.1.2 Hem Doğrusal Hem de Parametrik Olmayan Bölümde Ölçüm Hataları Olması Durumunda Yarı Parametrik Regresyon**

Denklem (4.1) ile verilen modelimizi düşünelim. Ölçüm mekanizmasından ya da çevrenin doğasından dolayı bazen $X$ ve $X^*$ değişkenleri hatalı ölçülmüş olabilir. Yani $X$ ve $X^*$ aşağıdaki şekilde gözlenebilir:

$$X^+ = X + \Delta x^+,$$

$$\chi = X^* + \Delta\chi,$$

burada $\Delta x^+$ ve $\Delta\chi$ rasgele hatalardır. Burada $\Delta x^+$, $\Delta\chi$ ve $(X^T, X^*, \Delta y)^T$ karşıklı olarak birbirlerinden bağımsız, $X^*, f(x^*)$ gibi bilinmeyen bir yoğunluğa sahip, $\Delta\chi$ bilinmeyen bir dağılımdan gelen hata fonksiyonudur. Gözlenmemiş bir rasgele değişkenin iki hatalı-bulaşmış ölçümlerinin eklemeli yoğunluğu biliniyorsa, bu değişkenin yoğunluğunun tanımlanmasının olası olması bilgisinden yararlanarak, hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon fonksiyonu için yeni bir model tanımlayalım. Bu durumda $Y, X$ ve $X^*$ için değişkenlerinde hata olan yarı parametrik bir model:

$$\begin{cases} y = X^T\beta + g(x^*) + \Delta y, \\ x^+ = x + \Delta x^+, \\ x^- = x + \Delta x^-, \\ \chi = x^* + \Delta\chi, \\ z = x^* + \Delta z, \end{cases} \tag{4.10}$$

şeklindedir.

$(X^*, X, Y)$ bir rasgele değişkenler (ya da vektörler) üçlüsünü göstersin ve verilen $(X^*, X)$ için $Y$ değişkeninin koşullu beklenen değerinin

$$E(Y|X^*, X) = X^T\beta + g(x^*)$$

olduğu varsayılsın. Burada $X, p$ ve $X^*, 1$ boyutlu değişkenler, $\beta, (p \times 1)$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve $g(.)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Modelde 1-4 varsayımları geçerlidir. Ayrıca $E(\Delta x^+) = 0, Cov(\Delta x^+) = \Sigma_{\Delta x^+}, E(\Delta x^-) = 0,$ $Cov(\Delta x^-) = \Sigma_{\Delta x^-}$ ve $E(\Delta y|X, X^*) = 0, Var(\Delta y|X, X^*) = \sigma^2_{\Delta y}$ olduğu varsayılmaktadır. Bununla birlikte $\sigma^2_{\Delta y}$nin bilinmediği ve $\Sigma_{\Delta x^+} > 0, \Sigma_{\Delta x^-} > 0$ olduğu kabul edilmektedir.

Ölçüm hatası hem doğrusal hem de parametrik olamayan bölümde olduğundan tahmin problemi daha karmaşıktır. İlk olarak parametrik olmayan tahmin edici oluşturulurken ortaya çıkan ölçüm hatasından kaynaklanan çok ciddi sınır problemleriyle ilgilenilmesi gerekmektedir. Daha sonra parametrik olmayan $g$ fonksiyonunun tahmini üzerinde çok güçlü bir etkiye sahip doğrusal bölümdeki ölçüm hatası ile ilgilenilmelidir.

***- Tahmin Edicilerin Oluşturulması***

$$U(X^+, X^*) = x^+ - E(X^+|X^*) = x - E(X|X^*) + \Delta x^+,$$

$$U(X^-, X^*) = x^- - E(X^-|X^*) = x - E(X|X^*) + \Delta x^-,$$

$$U(X^\#, X^*) = \frac{[U(X^+, X^*) + U(X^-, X^*)]}{2} = x - E(X|X^*) + \frac{[\Delta x^+ + \Delta x^-]}{2}$$

$$= x - E(X|X^*) + \Delta x^\#,$$

$$U(Y, X^*) = y - E(Y|X^*) = [x - E(X|X^*)]^T\beta + \Delta y,$$

alalım. Buradaki $X^{\#}$ değişkeni aslında $X$ değişkeninin tekrarlı olarak hatalı ölçülmüş $X^{+}$ ve $X^{-}$ değişkenlerinin ortalaması alınarak elde edilen değişkendir ve gösterim kolaylığı sağlanması açısından modele eklenmiştir. $w(x^*) \geq 0, [a,b]$ aralığında bir ağırlık fonksiyonu olsun. $a$ ve $b$, $0 < \inf_{a \leq x^* \leq b} f(x^*) \leq \sup_{a \leq x^* \leq b} f(x^*) < \infty$ olacak şekilde seçilmelidir. Bu varsayım kernel tahmin edicisinin paydasından kaynaklanan sınır probleminden kaçınmada önemli bir rol oynamaktadır.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= E[U(X^{\#},X^*)U(X^{\#},X^*)^T w(x^*)] \\
&= E\{[x - E(X|X^*)][x - E(X|X^*)]^T w(x^*)\} + Ew(x^*)\Sigma_{\Delta x^{\#}} \\
&\triangleq S + S_3\Sigma_{x^{\#}}, \\
S_2 &= E[U(X^{\#},X^*)U(Y,X^*)w(x^*)] = S\beta, \\
S_4 &= E[(\Delta y - \Delta x^{\#T}\beta)^2 w(x^*)],
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

alınsın. Burada $S = E\{[x - E(X|X^*)][x - E(X|X^*)]^T w(x^*)\}, S_3 = E\big(w(x^*)\big)$'dır. $(Y, X^{\#}, X^*)$'ın yoğunluğu $f(y, x^{\#}, x^*)$ ve

$$g_1(x^*) = E(Y|X^* = x^*)$$

$$g_2(x^*) = E(X^{\#}|X^* = x^*) \triangleq \Big(g_{11}(x^*), \dots, g_{1p}(x^*)\Big)^T$$

olsun. Eğer $S$ pozitif tanımlı bir matris $(S > 0)$ ise $\beta, g(x^*)$ ve $\sigma^2_{\Delta y}$'nin formülleri

$$\beta = \big(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\big)^{-1} S_2$$

$$g(x^*) = g_1(x^*) - g_2(x^*)^T\beta$$

$$\sigma^2_{\Delta y} = \frac{S_4}{S_3} - \beta^T\Sigma_{\Delta x^{\#}}\beta$$

olur. Artık $\beta, g$ ve $\sigma^2_{\Delta y}$ tahminleri $S_1, S_2, S_3, S_4$ ve $g_1, g_2$ tahminlerine indirgenmiş oldu. (4.10) modelinden $n$ boyutlu bir örneklem alınsın $\left\{\begin{matrix} X_j^{\#} = \big(X_{j1}^{\#}, X_{j2}^{\#}, \dots, X_{jp}^{\#}\big)^T, Y_j, X_j^*, \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}\right\}$. $\beta, \sigma^2_{\Delta y}$ ve $g$'nin tahminleri aşağıdaki yöntemle elde edilir:

**1. Adım:** $f(x^*)$in tahmin edicisi $\hat{f}(x^*) = \widehat{M}_0(\tilde{x}^*, h_n)$dir. Burada $h_n$ bant genişliği, $\widehat{M}_0(\tilde{x}^*, h_n)$ denklem (4.4)'de verilen ifadedir.

**2. Adım:** $(Y, X^{\#}, X^{*})$'ın eklemeli yoğunluk fonksiyonu $f(y, x^{\#}, x^{*})$'ın tahmini:

$$\hat{f}(y, x^{\#}, x^{*}) = \frac{1}{nh^{p+2}} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} K\left(\frac{x_k^{\#} - X_{jk}^{\#}}{h}\right) K\left(\frac{y - Y_j}{h}\right) \left[\int \frac{1}{2\pi} \kappa(h_n \xi) \exp[i\xi(x^{*} - \tilde{x}^{*})] d\xi\right],$$

olur.

**3. Adım:** $g_1(x^{*})$ ve $g_2(x^{*})$'ın tahminleri

$$\hat{g}_{1n}(\tilde{x}^{*}, h_n) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_n\big((x^{*} - \tilde{x}^{*})/h\big) Y_j}{\sum_{j=1}^{n} K_n\big((x^{*} - \tilde{x}^{*})/h\big)} = \frac{E[yh^{-1}K(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*}))]}{E[h^{-1}K(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*}))]} = \frac{\widehat{M}_1(\tilde{x}^{*}, h_n)}{\widehat{M}_0(\tilde{x}^{*}, h_n)}$$

$$\hat{g}_{2n}(\tilde{x}^{*}, h_n) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_n\big((x^{*} - \tilde{x}^{*})/h\big) X_j^{\#}}{\sum_{j=1}^{n} K_n\big((x^{*} - \tilde{x}^{*})/h\big)} = \frac{E\big[X_j^{\#} h^{-1}K(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*}))\big]}{E[h^{-1}K(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*}))]} = \frac{\widehat{M}_2(\tilde{x}^{*}, h_n)}{\widehat{M}_0(\tilde{x}^{*}, h_n)},$$

elde edilir. Burada $\widehat{M}_0(\tilde{x}^{*}, h_n)$ ve $\widehat{M}_1(\tilde{x}^{*}, h_n)$ daha önce denklem (4.4)'de verilmiştir. Ayrıca $\phi_2(\xi) = \phi_0(\xi) \frac{m_{X_j^{\#}}(\xi)}{m_1(\xi)} = E\big[X_j^{\#} \exp(i\xi x^{*})\big]$ için

$$M_2(\tilde{x}^{*}, h) = \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) \phi_2(\xi) \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) \phi_0(\xi) \frac{m_{X_j^{\#}}(\xi)}{m_1(\xi)} \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) E[\exp(i\xi x^{*})] \frac{E\big[X_j^{\#} \exp(i\xi z)\big]}{E[\exp(i\xi z)]} \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) E[\exp(i\xi x^{*})] \frac{E\big[X_j^{\#}\big] E[\exp(i\xi z)]}{E[\exp(i\xi z)]} \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) E\big[X_j^{\#} \exp(i\xi x^{*})\big] \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \kappa(h\xi) \left(\int E\big[X_j^{\#} \big| x^{*}\big] f(x^{*}) \exp(i\xi x^{*}) dx^{*}\right) \exp(-i\xi\tilde{x}^{*}) d\xi$$

$$= \iint \frac{1}{2\pi} \kappa(h\xi) \exp[i\xi(x^{*} - \tilde{x}^{*})] E\big[X_j^{\#} \big| x^{*}\big] f(x^{*}) d\xi \, d\, x^{*}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Parseval eşitliğinden;} \\ \int \frac{1}{2\pi} \kappa(\xi) \exp[i\xi h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*})] d\xi = K\big(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*})\big)\end{array}\right)$$

$$= \int h^{-1} K\big(h^{-1}(x^{*} - \tilde{x}^{*})\big) \left(E\big[X_j^{\#} \big| x^{*}\big] f(x^{*})\right) dx^{*}$$

$$= E\left[h^{-1}K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)E\big[X_j^{\#}|x^*\big]\right] = E\big[X_j^{\#}h^{-1}K\big(h^{-1}(x^* - \tilde{x}^*)\big)\big]$$

dir.

**4. Adım:** (4.11) denklemine göre $S_q$ $(q = 1,2,3), \beta$ ve $g(.)$'nin tahminleri elde edilir:

$$\begin{cases} \hat{S}_{1n} = \int\limits_{\mathbb{R}^p}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Big(x^{\#} - \hat{g}_{2n}(\tilde{x}^*, h_n)\Big)\Big(x^{\#} - \hat{g}_{2n}(\tilde{x}^*, h_n)\Big)^T w(x^*)\hat{f}(y, x^{\#}, x^*)dx^{\#}dydx^*, \\ \hat{S}_{2n} = \int\limits_{\mathbb{R}^p}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Big(x^{\#} - \hat{g}_{2n}(\tilde{x}^*, h_n)\Big)\big(y - \hat{g}_{1n}(\tilde{x}^*, h_n)\big)w(x^*)\hat{f}(y, x^{\#}, x^*)dx^{\#}dydx^*, \\ \hat{S}_{3n} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} w(x^*)\hat{f}(x^*)dx^*, \end{cases}$$

için

$$\hat{\beta}_n = \big(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta\#}\big)^{-1}\hat{S}_{2n}, \qquad \hat{g}(\tilde{x}^*, h_n) = \hat{g}_{1n}(\tilde{x}^*, h_n) - \hat{g}_{2n}(\tilde{x}^*, h_n)^T\hat{\beta}_n$$

olur.

**5. Adım:** $S_4$ ve $\sigma_{\Delta y}^2$'nin tahminleri elde edilir:

$$\hat{S}_{4n} = \int\int\int \Big(y - x^{\#T}\hat{\beta}_n - \hat{g}(\tilde{x}^*, h_n)\Big)^2 w(x^*)\hat{f}(y, x^{\#}, x^*)dx^{\#}dydx^*,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{S}_{4n}/\hat{S}_{3n} - \hat{\beta}_n^T\Sigma_{\Delta x^{\#}}\hat{\beta}_n.$$

***- Parametrik Bölümün Asimptotik Normalliği***

**Varsayım 10:**

i. $E(\|X\|^2|X^* = x^*)$ $x^*$ın sınırlı bir fonksiyonudur. Burada $\|X\|$ $X$in $L^2$ normudur.

ii. $S$ $p \times p$ boyutlu pozitif tanımlı bir matristir.

**Teorem3:** Verilen herhangi bir $\tilde{x}^*$ için varsayım 1-10 un sağlandığı varsayılsın. Ayrıca $E(1 + \|\Delta x^{\#}\|^4 + |\Delta y|^2\|X\|^2) < \infty, \gamma_\kappa > 1 + 2\gamma$ ve $nh^{2(1+2\gamma)} \to \infty, nh^{2\gamma_\kappa} \to 0$, $\gamma_\kappa$ $(\gamma_\kappa \geq 3)$ varsayım 8 de de belirtilen bir tamsayı ve $\gamma$ düzgünlük katsayısı olsun. Öyleyse;

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) \to N(0, \mathbf{\Omega}_1), \quad \sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_{\Delta y}^2\right) \to N(0, \mathbf{\Omega}_2)$$

olur. $\xi_1(\beta) = \partial_{\gamma_\kappa} \left\{ \left[ \left(x^{\#} - g_1(x^*)\right)(y - g_2(x^*) - (x^{\#} - g_1(x^*)^T)\beta) + \Sigma_{\Delta x^{\#}}\beta \right] w(x^*) \right\}$

$$\xi_2\left(\beta, \sigma_{\Delta y}^2\right) = \left\{ \partial_{\gamma_\kappa} [(\Delta y - \Delta x^{\#T}\beta)^2 w(x^*)] - \left(\sigma_{\Delta y}^2 + \beta^T \Sigma_{\Delta x^{\#}}\beta\right) \right\} \frac{\partial_{\gamma_\kappa} w(x^*)}{S_3} \text{ için}$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = S^{-1} Cov[\xi_1(\beta)] S^{-1}, \quad \mathbf{\Omega}_2 = Var\left[\xi_2\left(\beta, \sigma_{\Delta y}^2\right)\right]$$

dir.

**İspat:** Schennach 2004b'de tanımlanan lemma ve teoremlerin ışığında çeşitli düzenlemeler ile hem doğrusal hem de parametrik olamayan bölümde ölçüm hatası bulunan modelimiz için parametrik olmayan bölümün asimptotik normalliği incelenebilir. Merkezi limit teoremi ve Teorem 2'nin ispatında bulunan bazı temel hesaplamalarla;

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right) = \sqrt{n}\left[ \left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} \hat{S}_{2n} - \left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} S_2 \right]$$

$$= \sqrt{n}\left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} \left[ \hat{S}_{2n} - \left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)\left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} S_2 \right]$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left[ \hat{S}_{2n} - S_2 - \left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)\left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} S_2 + S_2 \right]$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left\{ \left(\hat{S}_{2n} - S_2\right) - \left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} \left[ \left(\hat{S}_{1n} - \hat{S}_{3n}\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right) S_2 - \left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right) S_2 \right] \right\}$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left\{ \left(\hat{S}_{2n} - S_2\right) - \left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} \left[ \left(\hat{S}_{1n} - S_1\right) S_2 - \left(\hat{S}_{3n} - S_3\right)\Sigma_{\Delta x^{\#}} S_2 \right] \right\}$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left\{ \left(\hat{S}_{2n} - S_2\right) - \left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} \left[ \left(\hat{S}_{1n} - S_1\right) S_2 - \left(\hat{S}_{3n} - S_3\right)\Sigma_{\Delta x^{\#}} S_2 \right] \right\}$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left\{ \left(\hat{S}_{2n} - S_2\right) - \left(\hat{S}_{1n} - S_1\right)\left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} S_2 \right.$$
$$\left. + \left(\hat{S}_{3n} - S_3\right)\Sigma_{\Delta x^{\#}}\left(S_1 - S_3\Sigma_{\Delta x^{\#}}\right)^{-1} S_2 \right\}$$

$$= \sqrt{n} S^{-1} \left[ \left(\hat{S}_{2n} - S_2\right) - \left(\hat{S}_{1n} - S_1\right)\beta + \left(\hat{S}_{3n} - S_3\right)\Sigma_{\Delta x^{\#}}\beta \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} S^{-1} \left[ \xi_{j1}(\beta) - E\left(\xi_{j1}(\beta)\right) \right] + o\left( \frac{1}{\sqrt{n} h^{(1+2\gamma)}} \right) + O\left(\sqrt{n} h^{\gamma_\kappa}\right)$$

$$\to N(0, S^{-1} Cov[\xi_1(\beta)])$$

olduğu gösterilir. $\hat{\sigma}_n^2$ için ispat da benzer şekilde elde edilebilir (Zhu ve Cui 2003).

***- Parametrik Olmayan Bölümün Asimptotik Normalliği***

Teorik olarak eğer $\beta$ biliniyorsa $X^T\beta$'yı $Y$'nin içine alarak $\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}\tilde{x}_i^*(Y_k - X_k^T\beta)$'nın tahmini Schennach (2004b) tarafından önerilen parametrik olmayan fonksiyonun tahminine dönüşür. Bu parametrik olmayan fonksiyonun asimptotik normalliği Schennach (2004b)'de bulunmuştur.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Önceki bölümde yarı parametrik regresyon modelinde parametrik olmayan kısımdaki veya hem parametrik olmayan kısımdaki hem de parametrik kısımdaki değişken bilinmeyen bir dağılıma sahip ardışık hatalarla ölçüldüğünde parametre tahminlerini elde eden metotlar sunulmuştur. Ayrıca bu yöntemler ile elde edilen tahmin edicilerin örneklem büyüklüğü $n$ sonsuza giderken yakınsadığı parametre çevresindeki dağılımının normal dağılıma uyup uymadığını gözlemlemek için bu tahmin edicilerin asimptotik normallik özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Bu bölümde tahmin edicilerin sonlu örneklem özellikleri Monte Carlo simülasyonu yaklaşımı ile araştırılmıştır. Değişkenlerin ve bu değişkenlere bağlı bazı fonksiyonların simüle edilmesi aşamasında MATLAB bilgisayar programında bazı kodlar yazılmıştır. Bu kodlara $\hat{g}_n(x^*)$ ve $\hat{\beta}_n$ tahmin edicilerini elde eden kodlar da eklenerek simülasyon çalışması tamamlanmıştır.

### 5.1 Parametrik Olmayan Bölümde Ölçüm Hataları Olması Durumunda Yarı Parametrik Regresyon Modeli için Bir Simülasyon Çalışması

Bu Monte Carlo sümülasyon çalışmasında $p = 2$ için aşağıda tanımlanan parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli kullanılarak dört farklı örnek üzerinden $\hat{g}_n(x^*)$ ve $\hat{\beta}_n$ tahmin edicilerinin performanslarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

$$\begin{cases} y = X^T\beta + g(x^*) + \Delta y, \\ \chi = x^* + \Delta\chi, \\ z = x^* + \Delta z. \end{cases} \tag{5.1}$$

(5.1) modelinde $n = 100$, $\beta = \binom{1}{2}$, $\sigma^2_{\Delta y} = 0.25$, $x^* = 1$ alınarak ve $X \rightarrow N_2(0, I_2)$ dağılımından seçilerek işlemler sürdürülmüştür. Ayrıca tahmin edicilerin hesaplanmasında kullanılan kernel fonksiyonu $K(x^*) = \frac{\sin(x^*)}{\pi x^*}$ ve kerel fonksiyonunun Fourierinin pencere fonksiyonuyla çarpımından elde edilen değiştirilmiş hali $\tilde{\kappa}(\xi) = W(\xi)\kappa(\xi)$ olmak üzere $\bar{\xi} = 0.5$ için pencere fonksiyonu

$$W(\xi)=\begin{cases}\left(1+\exp(0.5((1+\xi)^{-1}-(-\xi-0.5)^{-1}))\right)^{-1}, & -1\leq\xi<-0.5\\ 1 & ,-0.5\leq\xi\leq 0.5\\ \left(1+\exp(0.5((1-\xi)^{-1}-(\xi-0.5)^{-1}))\right)^{-1} & ,0.5<\xi\leq 1\\ 0 & ,d.y\end{cases} \tag{5.2}$$

olarak alınmıştır. Burada $\kappa(\xi)=1$'dir.

$\hat{g}_n(x^*)$ ve $\hat{\beta}_n$ tahmin edicilerinin performanslarını ölçmek amacıyla kullanılan ve çizelge 5.1'de özetlenen dört örnek $x^*, \Delta\chi$ ve $\Delta z$'nin süper düzgün ya da olağan düzgün olması durumunda süper düzgün ya da olağan düzgün $g(x^*)$'ın tahmininin ve beraberinde $\beta$'nın tahmininin çeşitlenmesi amacıyla oluşturulmuştur. Örnek 1'de $x^*, \Delta\chi$ ve $\Delta z$ süper düzgün bir dağılımdan geldiğinde olağan düzgün $g(x^*)$'ın tahmini, örnek 2'de $x^*, \Delta\chi$ ve $\Delta z$ süper düzgün bir dağılımdan geldiğinde süper düzgün $g(x^*)$'ın tahmini, örnek 3'de $x^*$ süper düzgün ve $\Delta\chi, \Delta z$ olağan düzgün bir dağılımdan geldiğinde olağan düzgün $g(x^*)$'ın tahmini, örnek 4'de ise $x^*, \Delta\chi$ ve $\Delta z$ olağan düzgün bir dağılımdan geldiğinde olağan düzgün $g(x^*)$'ın tahmini elde edilmiştir. Elde edilen $g(x^*)$'lar ile birlikte $\beta$'nın tahminleri de oluşturulmuştur. Parametrelerin üretilmesi aşamasında süper düzgün dağılım olarak normal dağılım tercih edilirken olağan düzgün dağılım olarak düzgün dağılım ve Laplace dağılımı tercih edilmiştir. Olağan düzgün regresyon fonksiyonu $g(x^*)=\begin{cases}-1, & x^*<-1\\ x^*, & x^*\in[-1,1]\\ 1, & x^*>1\end{cases}$ şeklindeki parçalı doğrusal sürekli fonksiyon ile belirtilirken süper düzgün regresyon fonksiyonu $g(x^*)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x^*}e^{-t^2}dt$ şeklindeki hata fonksiyonu ile belirtilmiştir. Her bir örnek için kullanılan bant genişlikleri de Çizelge 5.1'de verilmiştir.

**Çizelge 5.1.** Simülasyon çalışmasında kullanılan örnekler

**ÖRNEKLER**

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $x^* \to N(0,1)$,<br>$\Delta\chi, \Delta z \to N(0,0.25)$,<br>$\Delta y \to N(0,0.25)$,<br><br>$g(x^*) = \begin{cases} -1, & x^* < -1 \\ x^*, & x^* \in [-1,1] \\ 1, & x^* > 1 \end{cases}$ | $x^* \to N(0,1)$,<br>$\Delta\chi, \Delta z \to N(0,0.25)$,<br>$\Delta y \to N(0,0.25)$,<br><br>$g(x^*) = \frac{2}{\pi}\int_0^{x^*} e^{-t^2} dt$ | $x^* \to N(0,1)$,<br>$\Delta\chi, \Delta z \to L(0,0.25)$,<br>$\Delta y \to N(0,0.25)$,<br><br>$g(x^*) = \begin{cases} -1, & x^* < -1 \\ x^*, & x^* \in [-1,1] \\ 1, & x^* > 1 \end{cases}$ | $x^* \to Düzgün\ dağılım\ [-2,2]$,<br>$\Delta\chi, \Delta z \to L(0,0.25)$,<br>$\Delta y \to N(0,0.25)$,<br><br>$g(x^*) = \begin{cases} -1, & x^* < -1 \\ x^*, & x^* \in [-1,1] \\ 1, & x^* > 1 \end{cases}$ |
| $h_n^{-1} = 1.2(\ln n)^{0.25}$ | $h_n^{-1} = 1.2(\ln n)^{0.25}$ | $h_n^{-1} = 1.2(\ln n)^{0.25}$ | $h_n^{-1} = 1.2(\ln n)^{0.125}$ |

Çizelge 5.1'de verilen 4 farklı örnek için elde ettiğimiz ve 15 simülasyon denemesinin ortalama $\hat{\beta}_n$ ve $\hat{\sigma}_n^2(x^*)$ değerleri çizelge 5.2'de verilmiştir. $\beta$'nın $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisi için standart hatalar $S_\beta$'lar da bulunmuştur. Standart hataların oldukça düşük olduğu ve $\hat{\beta}_n$ değerlerinin $\beta$'ya oldukça yakın olduğu göz önüne alındığında $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisinin performansının oldukça iyi bir sonuç verdiği söylenebilir.

**Çizelge 5.2.** Parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için oluşturulan simülasyon sonuçları

**SİMÜLASYON SONUÇ DEĞERLERİ**

| ÖRNEK 1 | ÖRNEK 2 | ÖRNEK 3 | ÖRNEK 4 |
|---|---|---|---|
| $\beta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ | $\beta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ | $\beta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ | $\beta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ |
| $\hat{\beta}_n = \begin{pmatrix}1.0242\\1.9552\end{pmatrix}$ | $\hat{\beta}_n = \begin{pmatrix}0.9934\\1.9485\end{pmatrix}$ | $\hat{\beta}_n = \begin{pmatrix}0.9814\\2.0601\end{pmatrix}$ | $\hat{\beta}_n = \begin{pmatrix}0.9085\\1.9885\end{pmatrix}$ |
| $S_\beta = \begin{pmatrix}0.0021\\0.0030\end{pmatrix}$ | $S_\beta = \begin{pmatrix}0.0301\\0.0885\end{pmatrix}$ | $S_\beta = \begin{pmatrix}0.0258\\0.0984\end{pmatrix}$ | $S_\beta = \begin{pmatrix}0.0149\\0.0491\end{pmatrix}$ |
| $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.0841$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.0113$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.0064$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.0141$ |
| $g(x^*) = 1$ | $g(x^*) = 0.8427$ | $g(x^*) = 1$ | $g(x^*) = 1$ |
| $\hat{g}_n(x^*) = 0.9516$ | $\hat{g}_n(x^*) = 0.5866$ | $\hat{g}_n(x^*) = 0.8048$ | $\hat{g}_n(x^*) = 1.3648$ |
| $MSE = 0.1278$ | $MSE = 0.1693$ | $MSE = 0.0957$ | $MSE = 0.1412$ |

Ayrıca $g(x^*)$'in $\hat{g}_n(x^*)$ tahmini için elde edilen ortalama değerler de Çizelge 5.2'de bulunmuştur. $g(x^*)$'in $\hat{g}_n(x^*)$ tahmini için hata kareler ortalaması (MSE) değerleri de elde edilmiştir. MSE değerlerinin oldukça düşük olduğuna dikkat edilirse $\hat{g}_n(x^*)$'in performansının da oldukça iyi olduğu söylenebilir.

**5.2 Hem Doğrusal Hem de Parametrik Olmayan Bölümde Ölçüm Hataları Olması Durumunda Yarı Parametrik Regresyon Modeli için Bir Simülasyon Çalışması**

Bu Monte Carlo sümülasyon çalışmasında $p = 2$ için aşağıda tanımlanan hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli kullanılarak çizelge 5.1'de özetlenen dört farklı örnek üzerinden $\hat{g}_n(x^*)$ ve $\hat{\beta}_n$ tahmin edicilerinin performanslarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

$$\begin{cases} y = X^T\beta + g(x^*) + \Delta y, \\ x^+ = x + \Delta x^+, \\ x^- = x + \Delta x^-, \\ \chi = x^* + \Delta\chi, \\ z = x^* + \Delta z, \end{cases} \tag{5.3}$$

Değişkenlerin ve bu değişkenlere bağlı bazı fonksiyonların simüle edilmesi aşamasında MATLAB bilgisayar programında bazı kodlar yazılmıştır. Bu kodlara $\hat{g}_n(x^*)$ ve $\hat{\beta}_n$ tahmin edicilerini elde eden kodlar da eklenerek simülasyon çalışması başlatılmıştır.

(5.3) modelinde $\Delta x^{\pm}, \Delta\chi, \Delta z$ ve $(X, X^*, \Delta y)$ karşılıklı olarak birbirlerinden bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere $n = 100$, $\beta = \binom{1}{2}$, $\sigma^2_{\Delta y} = 0.25$, $x^* = 1$, $w(x^*) = I, \{x^* \leq 2\}$ alınarak ve $X \to N_2(0, I_2)$, $\Delta x^{\pm} \to N_2(0{,}0.25I_2)$ dağılımından seçilerek işlemler sürdürülmüştür. Ayrıca tahmin edicilerin hesaplanmasında Bölüm 5.1'de tanımlanan $K(x^*)$ ve (5.2) denklemiyle belirtilen $W(\xi)$ kullanılmıştır.

Çizelge 5.1'de verilen 4 farklı örnek için elde ettiğimiz ve 15 simülasyon denemesinin ortalama $\hat{\beta}_n$ ve $\hat{\sigma}_n^2(x^*)$ değerleri çizelge 5.3'te verilmiştir. $\beta$'nın $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisi için standart hatalar $S_{\beta}$'lar da bulunmuştur. Standart hataların oldukça düşük olduğu ve $\hat{\beta}_n$ değerlerinin $\beta$'ya oldukça yakın olduğu göz önüne alındığında $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisinin performansının oldukça iyi bir sonuç verdiği söylenebilir.

**Çizelge 5.3.** Hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için oluşturulan simülasyon sonuçları

**SİMÜLASYON SONUÇ DEĞERLERİ**

| ÖRNEK 1 | ÖRNEK 2 | ÖRNEK 3 | ÖRNEK 4 |
|---|---|---|---|
| $\beta = \binom{1}{2}$ | $\beta = \binom{1}{2}$ | $\beta = \binom{1}{2}$ | $\beta = \binom{1}{2}$ |
| $\hat{\beta}_n = \binom{0.9606}{1.6938}$ | $\hat{\beta}_n = \binom{0.8704}{1.7396}$ | $\hat{\beta}_n = \binom{0.9347}{2.0610}$ | $\hat{\beta}_n = \binom{0.8607}{2.0074}$ |
| $S_\beta = \binom{0.00035}{0.00042}$ | $S_\beta = \binom{0.00004}{0.00006}$ | $S_\beta = \binom{0.00024}{0.00044}$ | $S_\beta = \binom{0.00095}{0.00160}$ |
| $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.5083$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.0333$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 0.1505$ | $\hat{\sigma}_n^2(x^*) = 1.5850$ |
| $g(x^*) = 1$ | $g(x^*) = 0.8427$ | $g(x^*) = 1$ | $g(x^*) = 1$ |
| $\hat{g}_n(x^*) = 1.1346$ | $\hat{g}_n(x^*) = 0.5975$ | $\hat{g}_n(x^*) = 1.1372$ | $\hat{g}_n(x^*) = 1.5125$ |
| $MSE = 0.7395$ | $MSE = 0.4354$ | $MSE = 0.2542$ | $MSE = 0.3039$ |

Ayrıca $g(x^*)$'in $\hat{g}_n(x^*)$ tahmini için elde edilen ortalama değerler de çizelge 5.3'te bulunmuştur. $g(x^*)$'in $\hat{g}_n(x^*)$ tahmini için hata kareler ortalaması (MSE) değerleri de elde edilmiştir. MSE değerlerinin oldukça düşük olduğuna dikkat edilirse $\hat{g}_n(x^*)$'in performansının da oldukça iyi olduğu söylenebilir.

### 5.3 Sonuç

Yarı parametrik regresyon üzerine yaptığımız bu çalışma, yıllardır birçok alanda kullanılan ölçüm hatası olması durumunda yarı parametrik regresyon analizine yeni bir katkı sağlamaktadır. Bu tez ile, ölçüm hatalarının bilinmesi zorunluluğunun bulunmamasından dolayı geleneksel Nadaraya-Watson tahmin edicinin genişletilmiş bir hali olarak düşünülebilecek iki yeni kernel tabanlı yarı parametrik tahmin edici sunulmuştur. Birincisi parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için parametre tahminlerini, ikincisi ise hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için parametre tahminlerini içermektedir.

Literatürde ölçüm hatalı değişkenli yarı parametrik regresyon yöntemleri sadece ölçüm hatasının yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi varsayımıyla çalışılmıştır. Bu yüzden bizim tahmin edicilerimizin en önemli özelliği kernel dekonvolüsyon tahmin yönteminin tersine ölçüm hatasının dağılımı hakkında herhangi bir bilgiye gerek duymamasıdır.

Hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için parametre tahminlerinin elde edilmesi süper düzgün hatalarda oldukça zordur. Bu nedenle literatürdeki yazarlar sadece $X^*$ hatasının olağan düzgün dağılıma sahip olması durumunu incelemişlerdir. Bu problem Nadaraya-Watson tahmin edicisinin fourier yaklaşımı ile çözüldü. Çünkü bu metot hem süper düzgün hem de olağan düzgün dağılımlar için ele alınabilmektedir.

Elde edilen sonuçlar, Schennach (2004) tarafından çalışılan ölçüm hatalı parametrik olmayan regresyon yönteminin özel bir durumu olarak düşünülebilir. Bu durumda literatürdeki yarı parametrik regresyon için yapılan tüm çalışmalarda sonlu sıralı kernel fonksiyonları kullanılmışken çalışmamızda hem sonlu hem de sonsuz sıralı kerneller kullanılmıştır.

Yine literatürde asimptotik normalliğinin incelenmesi süper düzgün hatalarda oldukça zor olduğundan hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modeli için parametre tahminlerinin asimptotik normallikleri bizim yöntemimiz yardımıyla incelenebilmiş ve sonuç olarak $\hat{\beta}_n$ ve $\hat{\sigma}_n^2$ tahmin edicilerinin asimptotik olarak normal dağıldığı bilgisine ulaşılmıştır.

Sonlu örneklem özelliklerinin incelenmesi için yaptığımız simülasyon çalışmalarında 15 tekrar, 100 örneklem büyüklüğü ve iki bağımsız değişkenli parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon ve hem doğrusal hem de parametrik olmayan bölümde ölçüm hataları olması durumunda yarı parametrik regresyon modellerimiz için $\beta$'nın tahmini $\hat{\beta}_n$, $\sigma$'nın tahmini $\hat{\sigma}_n^2$ ve $g(x^*)$'in tahmini $\hat{g}_n(x^*)$'in performansları değerlendirilmiştir. $\hat{\beta}_n$ için bulunan standart hataların oldukça düşük olduğu ve $\hat{\beta}_n$ değerlerinin $\beta$'ya oldukça yakın olduğu göz önüne alındığında $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisinin performansının oldukça iyi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $g(x^*)$'in $\hat{g}_n(x^*)$ tahmini için elde edilen hata kareler ortalaması (MSE) değerlerinin düşük olmasına dikkat edildiğinde $\hat{g}_n(x^*)$'in performansının da oldukça iyi olduğu söylenebilmiştir.

# 6. KAYNAKLAR

### Kitap

Carroll, R.J., Ruppert, D., Stefanski, L.A., Crainiceanu, C.M. 2006. Measurement Error in Nonlinear Models. Chapman & Hall/CRC, 455, Boca Raton, FL.

Fuller, W.A. 1987. Measurement error models. John Wiley & Sons Inc, ISBN 0-471-86187-1, 435.

Härdle, W. 1994. Applied nonparametric regression. Cambridge University Press, 409, Cambridge.

Härdle, W., Muller, M., Sperlich, S., Werwatz, A. 2004. Nonparametric and semiparametric models. Springer, 299, New York.

Hastie, T., Tibshirani, R.J. 1990. Generalized additive models. Chapman & Hall, 352, London.

Loader, C. 1999. Local regression and likelihood. Springer, 290, New York.

Montgomery, D. C., Peck, E. A. 1992. Introduction to Linear Regression Analysis (2nd edition). John Wiley & Sons, 582, New York. (Probability and Statistics Series; 1st edition, 1983).

Rao, P. 1992. Identifiability in Stochastic Models. Academic Press, 253.

Ruppert, D., Wand, M.P., Carroll, R.J. 2003. Semiparametric regression. Cambridge University Press, 404.

Silverman B.W 1986. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall, 176.

Yatchew, A. 2003. Semiparametric regression for the applied econometrican. Cambridge University press, 205.

### Kitaptan Bir Bölüm

Loader, C. 2004. Smoothing: Local regression principles. J Gentle, W Härdle, Y Mori. Handbook of Computational Statistics Ed. sayfa no: 571, Sayfa:1167.

### Dergi

Anderson, T.W. 1984. Estimating linear statistical relationships. ***Annals of Statistics***, 12, 1-45.

Berkson, J. 1950. Are there two regressions?. ***Journal of the American Statistical Association***, 45 (250), 164-180.

Brockmann, M., Gasser, T., Herrmann, E. 1993. Locally adaptive bandwidth choice for kernel regression estimators. ***J. Amer. Statist. Assoc.***, 88, 1302-1309.

Carroll, R.J., Spiegeman, C.H., Lan, K.G., Bailey, K.T., Abbott, R.D. 1984. On errors-in-variables for binary regression models, ***Biometrika***, 71, 19-25.

Carroll, R.J., Hall, P. 1988. Optimal rates of convergence for deconvoluting a density. ***J. Amer. Statist. Assoc.***, 83, 1184-1186.

Chen, H. 1988. Convergence rates for parametric components in a partly linear model. ***Ann. Statist***., 16, 136-146.

Cuzick, J. 1992a. Semiparametric additive regression. ***J. Roy. Statist. Soc.***, Ser. B 54, 831-843.

Cuzick, J. 1992b. Efficient estimates in semiparametric additive regression models with unknown error distribution. ***Ann. Statist***, 20, 1129-1136.

Engle, R.F., Granger, C.W.J., Rice, J., Weiss, A. 1986. Semiparametric estimates of the relation between weather and electricity sales. ***J. Amer. Statist. Assoc.***, 81**,** 310-320.

Fan, J. 1990. Asymptotic normality for deconvolving kernel density estimators. To appear in ***Sankhyii***.

Fan, J. 1991. On the optimal rates of convergence for nonparametric deconvolution problem. ***Ann. Statist.***, 19 (3), 1257-1272.

Fan, J., Truong, Y.K. 1993. Nonparametric regression with errors in variables. ***Ann. Statist.***, 21, 1900-1925.

Fox, J. 2000. Nonparametric Simple Regression: Smoothing Scatterplots. ***Sage University Paper***, 22, 07-130.

Heckman, N.E. 1986. Spline smoothing in partly linear models. ***J. Roy. Statist. Soc.***, Ser. B 48, 244-248.

Heerde, H.J., Leeflang, P.S.H., Witting, D.R., 2001. Semiparametric Analysis to estimate the deal effect curve. ***Journal of Marketing Research***, 38 (2), 197-215.

Horowitz, J.L. 1993. Semiparametric Estimation of a Work-Trip Mode Choice Model. ***Journal of Econometrics***, 58, 49-70.

Hurvich, C.M., Simonoff, J.S., Tsai, C. 1998. Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. ***Journal of the Royal Statistical Society***, Ser. B 60, 271-93.

John, D., Tobias, J. 2001. Nonparametric Density and Regression Estimation. ***Journal of Economic Perspectives***, 15 (4), 11-28.

Kotlarski, I. 1967. On characterizing the gamma and the normal distribution. ***Pacific Journal of Mathematics***, 20 (1).

Laird, N.M., Ware, J.H. 1982. Random Effects Models for Longitudinal Data. ***Biometrics***, 38, 963-974.

Lee, C.M. 2003. Smoothing parameter selection for smoothing splines: A simulation study. ***Comput. Statistics & Data Analysis***, 42, 139-148.

Lee, C.M., Solo, V. 1999. Bandwith selection for local linear regression: A simulation study. ***Comput. Statist.***, 14, 515-532.

Li, T., Vuong, Q. 1998. Nonparametric estimation of the measurement error model using multiple indicators. ***Journal of Multivariate Analysis***, 65, 139-165.

Liang, H. 2000. Asymptotic normality of parametric part in partially linear model with measurement error in the non-parametric part. ***J. Statist. Plann. Inference***, 86, 51-62.

Liu, M.C., Taylor, R.L. 1990. A consistent nonparametric density estimator for the deconvolution problem. To appear in ***Canadian J. Statist.***

Politis, D.N. ve J.P. Romano. 1999. Multivariate density estimation with general flat-top kernels of infinite order. ***Journal of Multivariate Analysis***, 68, 1-25.

Rao, J.N.K. 1994. Estimating totals and distribution functions using auxiliary information at the estimation stage. ***Journal of Official Statistics***, 10 (2), 153-165.

Schennach, S.M. 2004a. Estimation of nonlinear models with measurement error. ***Econometrica***, 72, 33-75.

Schennach, S.M. 2004b. Nonparametric regression with measurement error. ***Econometric Theory***, 20, 1046-1093.

Severini, T.A., Staniswalis, J.G. 1994. Quasilikelihood estimation in semiparametric models. ***J. Amer. Statist. Assoc.***, 89**,** 501-511.

Speckman, P. 1988. Kernel smoothing in partial linear models. ***J. Roy. Statist. Soc.***, Ser. B 50, 413-436.

Stefanski, L.A. 1985. The effects of measurement error on parameter estimation. ***Biometrika*** 72, 583-592.

Stefanski L.A., Carroll R.J. 1990. Deconvoluting Kernel Density Estimators. ***Statistics***, 21, 169-184.

Wand, M.P., Gutierrez, R.G. 1997. Exact risk approaches to smoothing parameter selection. ***J. Nonparametric Statist.***, 8, 337-354.

Wang, L. 2004. Estimation of nonlinear models with Berkson measurement error. ***Ann.Statist.***, 32, 2559-2579.

Yatchew, A. 1998. Nonparametric regression techniques in economics. ***Journal of Economic Literature***, 36 (2), 669-721.

Zeger, S. L., Diggle, P. J. 1994. Semi-parametric models for longitudinal data with application to CD4 cell numbers in HIV seroconverters. ***Biometrics***, 50, 689-699.

Zhang, C.H. 1990. Fourier methods for estimating mixing densities and distributions. ***Ann.Statist.***, 18, 806-831.

Zhu, L. ve Cui, H. 2003. A semi-parametric regression model with errors in variables. ***Scand. J. Statist.*** 30, 429-442.

**Tez**

Tabakan, G. 2009. Yarı parametrik regresyonda tahmin metotları. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, Sayfa:131.

**Kongre ve Sempozyum**

Akaike, H. 1973. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle, ***2nd International Symposium on Information Theory (B. N. Petrov and F. Csaki, eds.)***, 267-281.

Liang, H., Härdle, W., Carroll, R.J. 1997. Large sample theory in a semiparametric partially linear errors-in-variables model. ***Institut für Statistik und Ökonometrie***, Discussion paper no. 27, Humboldt-Universität zu Berlin.

**İnternet Belgesi**

Wikipedia. 2014. Erişim: [http://en.wikipedia.org/wiki/Errors-in-variables_models] Erişim tarihi: 15.01.2014

**Bilgisayar Programı**

MATLAB, http://www.mathworks.com/products/matlab/tryit.html

# EKLER

## EK 1:

## Örnek 1’deki Değişken ve Fonksiyonları Üreten MATLAB Kodu:

```
x1=normrnd(0,1,[100,2]);
x2=normrnd(0,1,[100,2]);

dx1=normrnd(0,0.25,[100,2]);
dx2=normrnd(0,0.25,[100,2]);

xs=normrnd(0,1,[100,1]);

dki=normrnd(0,0.25,[100,1]);
dz=normrnd(0,0.25,[100,1]);
dy=normrnd(0,0.25,[100,1]);

X1= x1+ dx1;
X2= x2+ dx2;
x=( X1+ X2)/2;

dx= (dx1+ dx2)/2;

ki=xs+dki;
z=xs+dz;

beta=[1;2];

n=size(x,1);
p=size(x,2);

h=1/(1.2*(log(n))^0.25);

for i=1:n
if xs(i) < -1
  Sxs(i) = -1;
else if xs(i) > 1
  Sxs(i) = 1;
else
  Sxs(i) = xs(i);
end
end
end

g=Sxs';

y=x*beta+g+dy;

for i=1:n
if xs(i)<=2
w(i)=1;
else w(i)=0;
end
end

w=w';

cov_dx1= cov(dx1);
cov_dx2= cov(dx2);
cov_dx= cov(dx);
```

## Örnek 2'deki Değişken ve Fonksiyonları Üreten MATLAB Kodu:

```
x1=normrnd(0,1,[100,2]);
x2=normrnd(0,1,[100,2]);

dx1=normrnd(0,0.25,[100,2]);
dx2=normrnd(0,0.25,[100,2]);

xs=normrnd(0,1,[100,1]);

dki=normrnd(0,0.25,[100,1]);
dz=normrnd(0,0.25,[100,1]);
dy=normrnd(0,0.25,[100,1]);

X1= x1+ dx1;
X2= x2+ dx2;
x=( X1+ X2)/2;

dx= (dx1+ dx2)/2;

ki=xs+dki;
z=xs+dz;

beta=[1;2];

n=size(x,1);
p=size(x,2);

h=1/(1.2*(log(n))^0.25);

g=erf(xs);

y=x*beta+g+dy;

for i=1:n
if xs(i)<=2
w(i)=1;
else w(i)=0;
end
end

w=w';

cov_dx1= cov(dx1);
cov_dx2= cov(dx2);
cov_dx= cov(dx);
```

## Örnek 3’deki Değişken ve Fonksiyonları Üreten MATLAB Kodu:

```
x1=normrnd(0,1,[100,2]);
x2=normrnd(0,1,[100,2]);

dx1=normrnd(0,0.25,[100,2]);
dx2=normrnd(0,0.25,[100,2]);

xs=normrnd(0,1,[100,1]);

dki1=rand(100,1);
dki=0-0.25*sign(dki1-0.5).*log(1-2*abs(dki1-0.5));
dz1=rand(100,1);
dz=0-0.25*sign(dz1-0.5).*log(1-2*abs(dz1-0.5));
dy=normrnd(0,0.25,[100,1]);

X1= x1+ dx1;
X2= x2+ dx2;
x=( X1+ X2)/2;

dx= (dx1+ dx2)/2;

ki=xs+dki;
z=xs+dz;

beta=[1;2];

n=size(x,1);
p=size(x,2);

h=1/(1.2*(log(n))^0.25);

for i=1:n
if xs(i) < -1
  Sxs(i) = -1;
else if xs(i) > 1
  Sxs(i) = 1;
else
  Sxs(i) = xs(i);
end
end
end

g=Sxs';

y=x*beta+g+dy;

for i=1:n
if xs(i)<=2
w(i)=1;
else w(i)=0;
end
end

w=w';

cov_dx1= cov(dx1);
cov_dx2= cov(dx2);
cov_dx= cov(dx);
```

## Örnek 4'deki Değişken ve Fonksiyonları Üreten MATLAB Kodu:

```
x1=normrnd(0,1,[100,2]);
x2=normrnd(0,1,[100,2]);

dx1=normrnd(0,0.25,[100,2]);
dx2=normrnd(0,0.25,[100,2]);

xs=unifrnd(-2,2,[100,1]);

dki1=rand(100,1);
dki=0-0.25*sign(dki1-0.5).*log(1-2*abs(dki1-0.5));
dz1=rand(100,1);
dz=0-0.25*sign(dz1-0.5).*log(1-2*abs(dz1-0.5));
dy=normrnd(0,0.25,[100,1]);

X1= x1+ dx1;
X2= x2+ dx2;
x=( X1+ X2)/2;

dx= (dx1+ dx2)/2;

ki=xs+dki;
z=xs+dz;

beta=[1;2];

n=size(x,1);
p=size(x,2);

h=1/(1.2*(n)^0.125);

for i=1:n
if xs(i) < -1
  Sxs(i) = -1;
else if xs(i) > 1
  Sxs(i) = 1;
else
  Sxs(i) = xs(i);
end
end
end

g=Sxs';

y=x*beta+g+dy;

for i=1:n
if xs(i)<=2
w(i)=1;
else w(i)=0;
end
end

w=w';

cov_dx1= cov(dx1);
cov_dx2= cov(dx2);
cov_dx= cov(dx);
```

## EK 2:

## $g_1$ ve $g_2$ Fonksiyonlarını Üreten MATLAB Kodu:

```
function g2 = g2(ki,x,y,z,n,h)

syms v;
syms ksi;
syms m_ki;
syms m_1;
syms m_11;
syms m_hash_1;
syms m_hash_2;
syms temp;

temp=0;
for ind1=1:n
    m_ki=temp+ki(ind1,1)*exp(1i*v*(z(ind1,1)));
    temp=m_ki;
end
%m_ki

temp=0;
for ind1=1:n
    m_1=temp+exp(1i*v*(z(ind1,1)));
    temp=m_1;
end
%m_1

q=(1i*m_ki)/m_1;

a=int(q,v,0,ksi);

fi_0=exp(a);

b01=fi_0*exp(-1i*ksi);
b02=fi_0*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1-h*ksi))-(0.5/(h*ksi-0.5)))));
b03=fi_0*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1+h*ksi))-(0.5/(-h*ksi-0.5)))));

M_01=double(int(b01,ksi,-1/h,1/h));
M_02=double(int(b02,ksi,0.5/h,1/h));
M_03=double(int(b03,ksi,-1/h,-0.5/h));

M_0=(1/(2*pi))*(M_01+M_02+M_03)

temp=0;
for ind1=1:n
    m_y=temp+y(ind1,1)*exp(1i*ksi*(z(ind1,1)));
    temp=m_y;
end
%m_y

temp=0;
for ind1=1:n
    m_11=temp+exp(1i*ksi*(z(ind1,1)));
    temp=m_11;
end
%m_11

fi_1=(m_y/m_11)*fi_0;

b11=fi_1*exp(-1i*ksi);
b12=fi_1*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1-h*ksi))-(0.5/(h*ksi-0.5)))));
b13=fi_1*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1+h*ksi))-(0.5/(-h*ksi-0.5)))));

M_11=double(int(b11,ksi,-1/h,1/h));
M_12=double(int(b12,ksi,0.5/h,1/h));
M_13=double(int(b13,ksi,-1/h,-0.5/h));

M_1=(1/(2*pi))*(M_11+M_12+M_13)
```

```
temp=0;
for ind1=1:n
    m_hash_1=temp+x(ind1,1)*exp(1i*ksi*(z(ind1,1)));
    temp=m_hash_1;
end
%m_hash_1


temp=0;
for ind1=1:n
    m_hash_2=temp+x(ind1,2)*exp(1i*ksi*(z(ind1,1)));
    temp=m_hash_2;
end
%m_hash_2


m_hash=[m_hash_1 m_hash_2];


fi_2=(m_hash./m_11).*fi_0;


b21=fi_2'*exp(-1i*ksi);
b22=fi_2'*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1-h*ksi))-(0.5/(h*ksi-0.5)))));
b23=fi_2'*exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1+h*ksi))-(0.5/(-h*ksi-0.5)))));


M_21=double(int(b21,ksi,-1/h,1/h));
M_22=double(int(b22,ksi,0.5/h,1/h));
M_23=double(int(b23,ksi,-1/h,-0.5/h));


M_2=(1/(2*pi))*(M_21+M_22+M_23)


g1= M_1/ M_0


g2= M_2./ M_0;


end
```

## EK 3:

**Parametrik Olmayan Bölümde Hata Bulunan Yarı Parametrik Regresyon Modeli için $\beta_n$ Parametresini Üreten MATLAB Kodu:**

```
function beta1 = beta1 (h,M_0,x,y)
syms ksi;
b01=exp(-1i*ksi);
b02=exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1-h*ksi))-(0.5/(h*ksi-0.5)))));
b03=exp(-1i*ksi)*(1/(1+exp((0.5/(1+h*ksi))-(0.5/(-h*ksi-0.5)))));


w_01=double(int(b01,ksi,-1/h,1/h));
w_02=double(int(b02,ksi,0.5/h,1/h));
w_03=double(int(b03,ksi,-1/h,-0.5/h));



w_0=(1/(2*pi))*(w_01+w_02+w_03);


W_0=(w_0/M_0);


x_tilda=x-x*W_0;
y_tilda=y-y*W_0;
beta1=inv(x_tilda'*x_tilda)*x_tilda'*y_tilda;
end
```

## EK 4:

**Tüm Değişkenlerinde Hata Olan Yarı Parametrik Regresyon Modeli için $g_n$ Fonksiyonunu ve $\beta_n$ Parametresini Üreten MATLAB Kodu:**

```
function g_n = g_n (x,y,xs,g1,g2,M_0,cov_dx,n,p,h)

xx1 = sym('xx1',[n,1]) ;
xx2 = sym('xx2',[n,1]) ;
yy = sym('yy',[n,1]) ;
xxss = sym('xxss',[n,1]) ;

for i=1:n
    for j=1:n
    k1(i,j)=x(i,1)-x(j,1);
    end
end

for i=1:n
    for j=1:n
    k2(i,j)=x(i,2)-x(j,2);
    end
end

for i=1:n
    for j=1:n
    k3(i,j)=y(i,1)-y(j,1);
    end
end

for i=1:n
    for j=1:n
    k4(i,j)=xs(i,1)-xs(j,1);
    end
end
k41=sum(k4,1);

a=-k1.*cos(k1)+sin(k1);
%int((xx1(:,1)-x(:,1)).*sin(xx1(:,1)-x(:,1)),-inf,inf)
b=-cos(k1);
%int(sin(xx1(:,1)-x(:,1)),-inf,inf)
c=-cos(k2);
%int(sin(xx2(:,1)-x(:,2)),-inf,inf)
d=-k2.*cos(k2)+sin(k2);
%int((xx2(:,1)-x(:,2)).*sin(xx2(:,1)-x(:,2)),-inf,inf)
e=-cos(k3);
%int(sin(yy(:,1)-y(:,1)),-inf,inf)
f=(x(:,1)-g2(1));
g=repmat(f,1,100);
k=((x(:,1)-g2(1)).*(x(:,1)-g2(1)));
l=repmat(k,1,100);
o=(x(:,2)-g2(2));
r=repmat(o,1,100);
s=((x(:,2)-g2(2)).*(x(:,2)-g2(2)));
t=repmat(s,1,100);
u=y(:,1);
v=repmat(u,1,100);

S11x1=a+2*g.*b+l*pi;
%int((xx1(:,1)-x(:,1)).*sin(xx1(:,1)-x(:,1)))+2*(x(:,1)-g2(1)).*int(sin(xx1(:,1)-x(:,1)))+((x(:,1)-
g2(1)).*(x(:,1)-g2(1))).*int((sin(xx1(:,1)-x(:,1)))./(xx1(:,1)-x(:,1)))
S11x2=pi;
%int((sin(xx2(:,1)-x(:,2)))./(xx2(:,1)-x(:,2)))
S11y=pi;
%int((sin(yy(:,1)-y(:,1)))./(yy(:,1)-y(:,1)))
S11xs=pi;
%int((sin(xxss(:,1)-xs(:,1)))./(xxss(:,1)-xs(:,1)))

S11=sum(S11x1.*S11x2.*S11y.*S11xs,1);

S12x1=b+g*pi;
%int(sin(xx1(:,1)-x(:,1)))+(x(:,1)-g2(1)).*int((sin(xx1(:,1)-x(:,1)))./(xx1(:,1)-x(:,1)))
S12x2=c+r*pi;
```

```
%int(sin(xx2(:,1)-x(:,2)))+(x(:,2)-g2(2)).*int((sin(xx2(:,1)-x(:,2)))./(xx2(:,1)-x(:,2)))

S12=sum(S12x1.*S12x2.*S11y.*S11xs,1);

S22x2=d+2*r.*c+t*pi;
%int((xx2(:,1)-x(:,2)).*sin(xx2(:,1)-x(:,2)))+2*(x(:,2)-g2(2)).*int(sin(xx2(:,1)-x(:,2)))+((x(:,2)-
g2(2)).*(x(:,2)-g2(2))).*int((sin(xx2(:,1)-x(:,2)))./(xx2(:,1)-x(:,2)))
S22x1=pi;
%int((sin(xx1(:,1)-x(:,1)))./(xx1(:,1)-x(:,1)),-inf,inf)

S22=sum(S22x1.*S22x2.*S11y.*S11xs,1);

S2_1x1=S12x1;
S2_1x2=pi;
S2_1y=e+v*pi;
%int(sin(yy(:,1)-y(:,1)),-inf,inf)+y(:,1)*pi
S2_1xs=pi;

S2_1=sum(S2_1x1.*S2_1x2.*S2_1y.*S2_1xs,1);

S2_2x2=S12x2;
S2_2x1=pi;
S2_2y=S2_1y;
S2_2xs=pi;

S2_2=sum(S2_2x1.*S2_2x2.*S2_2y.*S2_2xs,1);

S2=(1/(pi)^4)*(1/(n*h^(p+2)))*[sum(S2_1); sum(S2_2)];

S1=(1/(pi)^4)*(1/(n*h^(p+2)))*[sum(S11), sum(S12); sum(S12), sum(S22)];

S3= M_0*sum(k41);

betta=inv(S1-S3*cov_dx)

g_n=g1-g2'*betta;

end
```

## EK 5:

## $\sigma_n^2$ Değerini üreten MATLAB Kodu:

```
function variance = variance(x,y,xs,g_n_ort,beta_ort,M_0,cov_dx,n,p,h)

for i=1:n
    for j=1:n
    k1(i,j)=x(i,1)-x(j,1);
    end
end

for i=1:n
    for j=1:n
    k2(i,j)=x(i,2)-x(j,2);
    end
end

for i=1:n
    for j=1:n
    k3(i,j)=y(i,1)-y(j,1);
    end
end

for i=1:n
    k4(i,1)=1-xs(i,1);
end
k41=sum(k4);

a=-k1.*cos(k1)+sin(k1);
%int((xx1(:,1)-x(:,1)).*sin(xx1(:,1)-x(:,1)),-inf,inf)
b=-cos(k1);
%int(sin(xx1(:,1)-x(:,1)),-inf,inf)
c=-cos(k2);
%int(sin(xx2(:,1)-x(:,2)),-inf,inf)
d=-k2.*cos(k2)+sin(k2);
%int((xx2(:,1)-x(:,2)).*sin(xx2(:,1)-x(:,2)),-inf,inf)
e=-cos(k3);
%int(sin(yy(:,1)-y(:,1)),-inf,inf)
i=-k3.*cos(k3)+sin(k3);
%int((yy(:,1)-y(:,1)).*sin(yy(:,1)-y(:,1)),-inf,inf)

aa=(y(:,1)-g_n_ort).*(y(:,1)-g_n_ort);
bb=repmat(aa,1,100);
cc=x(:,1).*x(:,1);
dd=repmat(cc,1,100);
ee=x(:,1);
ff=repmat(ee,1,100);
gg=x(:,2).*x(:,2);
hh=repmat(gg,1,100);
ii=y(:,1)-g_n_ort;
jj=repmat(ii,1,100);
kk=x(:,2);
ll=repmat(kk,1,100);

S41=sum(pi*pi*(i+2*jj.*e+bb*pi),1);
S42=sum(((beta_ort(1,1))^2)*(a+2*ff.*b+dd*pi)*pi*pi,1);
S43=sum(((beta_ort(2,1))^2)*pi*(d+2*ll.*c+hh*pi)*pi,1);
S44=sum((-2)*beta_ort(1,1)*(b+ff*pi)*pi.*(e+jj*pi),1);
S45=sum((-2)*beta_ort(2,1)*pi*(c+ll*pi).*(e+jj*pi),1);
S46=sum(2*beta_ort(1,1)*beta_ort(2,1)*(a+ff*pi).*(c+ll*pi)*pi,1);

S4=(1/(pi)^4)*(1/(n*h^(p+2)))*sum((S41+S42+S43+S44+S45+S46)*pi)/n;

S3= M_0*k41;

variance=abs(S4/S3-beta_ort'*cov_dx*beta_ort)

% MSE_g=sum((1-g_hat).*(1-g_hat))/15

end
```

## ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Adana'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi normal okullarda, lise öğrenimimi Anadolu lisesinde tamamladım. 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 2006 yılında mezun oldum. 2006 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Orta Öğretim Fen-Matematik Alan Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans Programı'nı kazandım ve 1 dönem devam ettikten sonra kaydımı sildirerek 2007 yılında halen görev yapmakta olduğum Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. 2008 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansa başladım ve 2011 yılında mezun olum. 2011 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora yapmaya hak kazandım.

Seçil TOPRAK