T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUPLARDA BOŞLUKLAR

Gülten ALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Aralık 2015

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve tezimin yazım aşamasında gerek zamanını gerekse desteğini esirgemeyip maddi manevi yanımda olan ayrıca çalışmalarım esnasında gösterdiği sabır ve hoşgörüden dolayı danışmanım

Doç. Dr. Sedat İLHAN'a

Çalışmalarım esnasında tüm samimiyet ve içtenliği ile bilgilerini esirgemeyen değerli hocam ***Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY' e***

Hayatımın her alanında daima yanımda olan sonsuz güven ve sevgisiyle beni bugünlere getiren sevgili ***babama*** ve tüm aileme,

Sonsuz teşekkürler...

ÖZET

SAYISAL YARIGRUPLARDA BOŞLUKLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten ALAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışmada $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$ için $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ ve $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$=1 olmak üzere ,

$$S = < s_1, s_2, \ldots, s_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \,.\, s_i \ :\ k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklindeki bir sayısal yarıgrubun ,

$$H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$$

boşluklar kümesi ve

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

temel boşlukların kümesi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir.

Anahtar kelimeler: Sayısal yarıgrup, Frobenius sayısı, simetrik sayısal yarıgrup ve boşluklar

ABSTRACT

GAPS IN NUMERICAL SEMIGROUPS

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten ALAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSTY OF DICLE

2015

In this study, we will give some results about the set of gaps of S $H(S) = \{x \in N: x \notin S\}$, and the set of fundamental gaps of S,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

where

$$S = < s_1, s_2, \ldots, s_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i . s_i \ : \ k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

is numerical semigroup, where $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ and $(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 1$ for $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$.

Key words: Numerical semigroup, Frobenius number, symmetric numerical semigroup and gaps.

KISALTMA VE SİMGELER

Mantık

$=$: Eşittir

$\neq$: Farklıdır

$\equiv$: Denktir

$\Longrightarrow$: İse, Gerektirir, gerek (koşul)

$\Longleftarrow$: ancak, için

$\Longleftrightarrow$: ancak ve ancak,İçin gerek ve yeter şart

Niceleyiciler

$\forall$: Evrensel

$\exists$: Varlıksal

Kümeler

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\subseteq$: Altkümesidir

$\supseteq$: Kapsar

$\cup$: birleşim

$\cap$: kesişim

$\sum$: Toplam sembolü

$\lceil\ \rceil$: Kendisinden büyük veya eşit en küçük tamsayı

$\lfloor\ \rfloor$: Kendisinden küçük veya eşit en büyük tamsayı

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere ; Bazı özel Kümeler , Sınıflar ve fonksiyonlar

$\langle S,* \rangle$	:	Cebirsel yapı
$\langle A \rangle$	:	Üreteçler kümesi
g(S)	:	Frobenius sayısı
G(S)	:	Sayısal yarıgrubun cinsi
c	:	Kondüktör(İletici)
H(S)	:	Boşluklar Kümesi
N(S)	:	Belirteç Sayısı
μ(S)	:	S nin katlılığı
e(S)	:	İndirgenme boyutu
FH(S)	:	Temel boşluklar Kümesi
K(S)	:	S nin kutup noktalarının kümesi
Pg(S)	:	Pseudo Simetrik elemanların kümesi
$\#(H(S))$	:	boşluklar Kümesinin eleman sayısı
$\leq_s$	:	S kümesinde sıralama bağıntısı

Parantez Benzeri İşaretlerin kullanımı

(a, b)	:	a, b nin en büyük ortak böleni
$\{a, b\}$	:	Elemanları a ve b olan küme

1. GİRİŞ

Sayısal yarıgruplar, Soyut Cebir ve Sayılar teorisinde oldukça önemli ve geniş bir yere sahiptir. Özellikle Kriptoloji (şifreleme) alanında, sayısal yarıgrupların boşlukları ve bunların uygulanması önemini dahada arttırmaktadır. Bununla birlikte Sayısal yarıgruplar, güncel konularda da kullanılmaktadır. Örneğin bozuk para problemi olarakta bilinen Frobenius problemi bunlardan biridir ve çözümü sayısal yarıgruplardaki Frobenius sayısı bulma problemi olarak karşımıza çıkar. Sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşluklar kümelerinin bulunmasında da yine Frobenius sayısından faydalanılmaktadır. Bu çalışmada Frobenius sayısı ve ilgili teoremler yardımıyla sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşluklar kümeleri hesaplanarak, boşluklar sayısının bulunmasında elde edilmiş formüller detaylı bir şekilde incelenmektedir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümü çalışmanın içeriği ve genel görünümü hakkında bilgi vermektedir.

İkinci bölümde tezin yazımında yararlanılan kaynaklar ele alınarak sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşlukların hesaplanması ve gerekli temel bilgilerin elde edilmesine ilişkin daha önce yapılmış çalışmalar hakkında kısa bilgiler yer almaktadır.

Üçüncü bölüm olan materyal ve metot bölümünde ise sayısal yarıguplar teorisinde çok sık kullanılan Frobenius sayısı, Apery kümesi, Simetrik ve Pseudo simetrik sayısal yarıgruplar gibi tez için temel bilgiler oluşturacak kavramlar ve bunlarla ilgili bazı teorem ve uygulamalar verilmektedir.

Araştırma bulguları bölümünde de,materyal ve metot bölümünden elde edilen bilgiler ile katlılığı üç ve dört olan S sayısal yarıgrubunun boşlukları kümesi H(S) hesaplanarak, türü G(S) ve ileticisi (c) arasındaki bağıntılar incelenmektedir.

Beşinci bölüm olan sonuç bölümünde bir S sayısal yarıgrubun boşluklar kümesinden faydalanarak oluşturulan temel boşluklar kümesi,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

ile ilgili bazı sonuçlar ele alınmaktadır.

1. GİRİŞ

2.KAYNAK ÖZETLERİ

Bir sayısal yarıgrupla ilgili karşılaşılan ilk problem, 1884' te Slyvester problemidir. (Bu problem ; g Frobenius sayısı ve (s_1, s_2)=1 olacak şekilde $s_1, s_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere, en büyük g tamsayısının $n_1 s_1$+$n_2 s_2$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılıp yazılamayacağı problemi olarak bilinir). 1958-1978 yılları arasında bahsedilen lineer kombinasyonlar ve Frobenius sayısı hakkında bir çok yeni araştırma yapılmıştır. 1984 yılında Gilmer bir çalışmasında sayısal yarıgrupların sonlu olarak da türetilebileceğini açıklamıştır. Fröberg ve arkadaşları 1987'de yayımladıkları çalışmalarında Apery kümesini

$$S(s) = \{t \in S:\ t - s\ \notin S, s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak tanımlamıştır.

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısının bulunmasını kolaylaştıracak bazı formüller 1990 da Curtis tarafından geliştirilmiştir.

Rosales ve arkadaşları 1996'da sayısal yarıgrupların Apery kümeleri ile pseudo simetriklik arasındaki ilşkiyi incelemişlerdir. 2000-2006 yılları arasında ise sayısal yarıgruplarda boşlukların hesaplanması ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır:

J.L.Ramirez Alfonsin'in çalışması da bunlardan biridir Ramirez ‘’Gaps in semigroups’’başlıklı çalışmasında ardışık tamsayılar ile oluşturulan sayısal yarıgruplarda boşluklarla ilgili açık formüller vererek,bunları Apery kümeleri ve Pick's teoremini kullanarak kanıtlar oluşturmuş.(J.L Ramirez Alfonsin)

Rosales 2005' de yaptığı çalışmalarda üç ve dört katlılıklı sayısal yarıgrupları inceleyerek boşlukları bulmada kolaylık sağlayacak formüller elde etmiştir

J.C Rosales, P.A Garcia ve J.A Jimenez 2004'de beraber yaptıkları çalışmada sayısal yarıgruplarda temel boşluklar (Fundementals gaps) kavramını ilk kez tanıtmışlardır. Bu çalışmada Frobeniüs sayısı verilen bir sayısal yarıgrubun temel boşluklarının alt ve üst sınırları verilerek temel boşlukların özelliklerinden bazı uygulamalar geliştirilmiştir.(Rosales,J.C 2005)

Yine **Rosales** 2005 ‘ de iki elemanla oluşturulan sayısal yarıgrupların temel boşluklarını inceleyerek

$$FH(S) = \{x \in H(S) : kx \in S , k \geq 2\}$$

şeklindeki sayısal yarıgruplardaki temel boşlukların hesaplanabilmesi için bazı özel formüller vermiştir (Rosales,J.C 2005).

3. MATERYAL VE METOT

3.1 Materyal

Bu tez çalışmasında temelde materyal olarak, ‘sayısal yarıgrup’ , ‘Frobenius sayısı’ ve ‘ sayısal yarıgruplarda boşluklar’ yapıları kullanılmış olup alt başlıklarda yer alan ve çalışmaya yön veren tanım ve teoremler kullanılarak boşluklar kümesiyle ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Bu çalışma boyunca $\langle S,*\rangle$ cebirsel yapısı tanımlanmış olup H(S) ve FH(S) kümeleri ile ilgili bazı sonuçlar derlenmiştir.

3.2 Metot

Bu kesimde tez konusu ile ilgili daha önce yazılmış olan çalışmalar esas alınarak sayısal yarıgruplarda çok sık kullanılan ve boşluklar kümesinin bulunmasına yardımcı olan Frobenius sayısı ,Cinsi, Apery kümeleri ve konu ile ilgili gerekli tüm kavramların tanımları, uygulamaları ile birlikte verilmiştir. Verilen bu kavramlar yardımıyla Araştırma bulguları bölümünde yer alan sayısal yarıgrupların boşlukları kümesi ile ilgili hesaplamaların ve kullanılan formüllerin daha iyi anlaşılması amaçlanmaktadır. Bunun için de ilgili teorem ve sonuçlar birlikte verilmiştir.

Böylece bu bölümden elde edilen bilgiler doğrultusunda sonuç bölümünde, temel boşluklar kümesinin hesaplanmasını ve eleman sayısının bulunmasını kolaylaştıran daha kapsamlı ve geliştirilmiş teoremlere yer verilmiştir.

3.2.1 Temel Bilgiler

Bu bölümde, sayısal yarıgruplar teorisinde çok kullanılan, çalışmamızın temelini oluşturan ve bu tezin daha iyi anlaşılması için gerekli temel bilgiler yer almaktadır.

3.2.1.1 Tanım

$S \neq \emptyset$, S kümesi üzerinde $*$ işlemi verilsin. Eğer

$$\forall\, a, b, c \in S \quad \text{için} \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

özelliği sağlanıyorsa $\langle S,*\rangle$ cebirsel yapısına ***yarıgrup*** adı verilir.

3.2.1.2 Tanım

$\langle S,*\rangle$ bir yarıgrup ve $T \subseteq S$ olsun

$$\forall a,b \in T \quad \text{için} \quad a*b \in T$$

oluyor ise ***T* ye *S nin bir alt yarıgrubu*** denir.

3.2.1.3 Tanım

S bir sayısal yarıgrup, A ⊂ S ve T_i ler S nin alt yarıgrupları olsun.

O zaman;

$$\bigcap_{A\subseteq T_i} T_i$$

kümesine **A** nın ürettiği S nin alt yarıgrubu denir ve $< A >$ ile gösterilir.Yani

$$< A >= \bigcap_{A\subseteq T_i} T_i$$

yazılır. Eğer $S =< A >$ oluyorsa A kümesine ***S nin üreteçleri kümesi*** adı verilir.

$s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ olmak üzere A=$\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset S$ alınırsa

$S = < A > =< s_1, s_2, \dots, s_n >$ yazılır. Bu durumda S=$< s_1, s_2, \dots, s_n >$ olacak şekilde S nin A=$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesinden daha küçük alt kümesi yoksa A kümesine S nin minimal üreteç sistemi denir.

3.2.1.4 Tanım

ℕ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere S ⊂ ℕ verilsin. Eğer *S*, ℕ deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve 0 ∈ S oluyorsa S ye sayısal yarıgrup denir. *S* bir sayısal yarıgup olmak üzere; $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ olacak şekilde $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ için

$$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i k_i \ : k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak yazılır.

Bu durumda

"$(s_1, \dots, s_n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus S$ *kümesi sonludur*" önermesi doğrudur

(Barucci, V. ve ark 1997). Bununla birlikte,

$$s_1, s_2 \in S \text{ için },\ s_2 - s_1 \in S \Leftrightarrow s_1 \leq_s s_2$$

şeklinde verilen $\leq_s$ bağıntısı S sayısal yarıgrubunda bir sıralama bağıntısıdır.

3.2.1.1 Örnek

$$\mathrm{S} = \langle 4,5,7 \rangle = \{4\mathrm{k}_1 + 5\mathrm{k}_2 + 7\mathrm{k}_3 : \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3 \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{S} = \{0,4,5,7 \rightarrow \cdots\}$$

şeklinde yazılır. Burada " →" ,7 den sonraki bütün tamsayıların S kümesinde olduğu anlamındadır.

3.2.1.2 Örnek

$\mathrm{S} = \langle 3,8 \rangle = \{3\mathrm{k}_1 + 8\mathrm{k}_2 : \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \in \mathbb{N}\} = \{0,3,6,8,9,11,12,14 \rightarrow \cdots\}$

olup,

$$\mathbb{N} \setminus \mathrm{S} = \{1,2,4,5,7,10,13\} \text{ sonludur } \Leftrightarrow (3,8) = 1$$

şeklindedir.

3.2.1.3 Örnek

$\mathrm{S} = \langle 6,8 \rangle = \{ 6\mathrm{k}_1 + 8\mathrm{k}_2 : \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \in \mathbb{N} \}$

$\mathrm{S} = \{0,6,8,12,14,16,18,\cdots\}$

ve $(6,8) \neq 1$ olduğundan $\mathbb{N} \setminus \mathrm{S}$ sonlu değildir.

3.2.1.5 Tanım

S sayısal yarıgrubu $\mathrm{S} = < s_1, s_2, \dots, s_n >$ şeklinde verilsin. O zaman s_1 ve n sayılarına sırasıyla ***S nin katlılığı*** ve ***indirgenme boyutu*** denir ve sırasıyla $\mu(S)$ ve e(S) ile gösterilir. Buna göre **3.2.1.1 Örnekte** verilen S=$< 4,5,7 >$ sayısal yarıgrubunun katlılığı $\mu(S)=4$ ve indirgenme boyutu e(S)=3 tür.

3.2.2 Frobenius sayısı ve hesaplamalar

3.2.2.1 Tanım

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere *S* ye ait olmayan en büyük tamsayıya ***S nin Frobenius sayısı*** denir ve g(S) ile gösterilir. Yani

$$g(S) = \max\{ x \in \mathbb{Z} : x \notin S \}$$

şeklindedir. **3.2.1.2 Örnekteki** S = $< 3,8 >= \{0,3,6,8,9,11,12,14, \rightarrow \cdots\}$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı , g(S)=13 olur.

3.2.2.1 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı ;

$$g(S)= s_1 s_2 - s_1 - s_2$$

şeklinde hesaplanır (Fröberg, R ve ark 1987).

3.2.2.2 Teorem

$2<s_1<s_2<s_3$ için $2<k< (\frac{s_1-1}{2}) +1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $s_1-k < s_3 / s_2 < s_1 - k +1$,

$s_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ s_1)$ ve $s_3 \equiv s_1 - k+1 \ (\mathrm{mod}\ s_1)$ olacak şekilde $S = \langle s_1,s_2,s_3 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı,

$$g(S)= (k-2)\, s_2 + s_3 - s_1$$

ile hesaplanır (Curtis,F 1990).

Örnek 3.2.2.1

S=$\langle 9,10,51 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım

S={0,9,10,18,19,20,27,28,29,30,36,37,38,39,40,45,46,47,48,49,50,51,54,55,56,57,58,59,60,61,63→ ⋯}

sayısal yarıgrubu için g(S)=62 dir.S nin üreteçleri arasında $2 < 9 < 10 < 51$ ilişkisi olduğu için **3.2.2.2 Teoremdeki** gibi bir k sayısı seçilir.

$$2 < k < \frac{(9-1)}{2} + 1 \quad \text{ve} \quad 2 < k < 5 \quad \text{olur.}$$

k=4 için

$$9-4 < 51/10 < 9-4+1 \quad \text{yani} \quad 5 < 51/10 < 6 \quad \text{olup}$$

$10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$ ve $51 \equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 9)$ yazılır. Böylece,

$g(S)= (k-2)\, s_2 + s_3 - s_1 = (4-2) \cdot 10 + 51-9=62$ bulunur.

3.2.2.3 Teorem

$a > 2$ ve a çift tamsayı olmak üzere ,

$$S = \langle a, a+2 , 2a + 1 \rangle$$

şeklindeki sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı ,

$$g(S)=\frac{a^2}{2}+a-1$$

formülü ile elde edilir (İlhan,S 2006).

3.2.2.2 Örnek

$S=\langle 8,10,17\rangle=\{0,8,10,16,17,18,20,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35,36,37,38,40\cdots\}$

sayısal yarıgrubu için,

$$g(S)=\frac{64}{2}+8-1=\ 39$$

olarak bulunur.

3.2.2.2 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı g(S) olsun. O zaman

$$n\,(\,S\,)\ =\ \#(\,\{0\,,1\ ,2\ ,\ldots,\ g(S)\ \}\cap S\,)$$

sayısına ***S nin belirteç sayısı*** adı verilir.

3.2.2.1 Not

g(S) ve $n(S)$ sırasıyla, S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere,

$$S=\{0=s_{0,}\,s_1,\ldots,\,s_{n-1}\,,\,s_n\,,\,\ldots,\,s_{n(s)}=g(\,S\,)+1,\rightarrow\ldots\}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $s_i < s_{i+1}$ olup " → " g(S) +1 sayısından büyük olan her tamsayının S ye ait olduğunu gösterir.

3.2.3 Simetrik ve pseudo simetrik sayısal yarıgruplar

3.2.3.1 Tanım

S sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı g(S) olsun. Eğer

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{Z}\setminus S \text{ için }\quad g(S)-x\ \in\ S$$

oluyorsa S ye ***simetrik sayısal yarıgrup*** adı verilir. Öte yandan iki eleman ile üretilen her $S=\langle\, s_1\,,s_2\,\rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir (Curtis,F 1990).

3.2.3.1 Örnek

$S=\langle\ 6,8,13\rangle\ =\{0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24\rightarrow\cdots\}$

sayısal yarıgrubu için,

$$g(S) = \frac{36}{2} + 6 - 1 = 23$$

olup, $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $23 - x \in S$ olur. Yani, S simetrik sayısal yarıgruptur. Ancak

$$S = \langle 5{,}6{,}13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunda g(S) =14 olup $x = 7$ için $14 - 7 = 7 \notin S$ çıkar. Yani S simetrik olmaz.

3.2.3.2 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve g(S) onun Frobenius sayısı olsun.
g(S) çift tam sayı ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere, eğer

$$g(S) - x \notin S \text{ ve } x = g(S)/2$$

oluyorsa S sayısal yarıgrubu ***pseudo-simetriktir*** denir.

3.2.3.2 Örnek

$S = \langle 5{,}6{,}13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow \cdots\}$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı g(S)=14 tür. Bununla birlikte $x = 7 \in \mathbb{Z} \setminus S$ alırsak ,

$$14-7 = 7 \notin S \text{ ve } x = 14/2 = 7$$

olduğundan S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgruptur.

3.2.3.3 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı g(S) olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $g(S) - x \notin S$ ise x elemanına ***S nin kutup noktası*** denir. S nin bütün kutup noktalarının kümesi

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : g(S) - x \notin S\}$$

ile gösterilir.

3.2.3.1 Teorem

Bir S sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $K(S) = \emptyset$ olmasıdır (Madero,M 2005).

3.2.3.3 Örnek

$S = \langle 7{,}8{,}33 \rangle$ alırsak

$$S = \{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,33,35 \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunda g(S) =34 ve

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (34 - x) \notin S\} = \{25,17,9\} \neq \emptyset$$

olduğundan S sayısal yarıgrubu simerik değildir. Ancak S = ⟨ 6,8,13⟩ alırsak

$$S = \{0,6,812,13,14,16,18,19,20,21,22,24, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunda g(S) =23 ve S nin kutup noktalarının kümesi,

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (23 - x) \notin S\} = \emptyset$$

olup S simetriktir.

3.2.3.4 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $n \in$ S \ {0} olsun.

$$Ap(S,n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$$

kümesine S nin n ye göre Apery kümesi denir.Yani S nin n ye göre Apery kümesinin elemanları (mod n) e göre kalan sınıfların her birindeki en küçük pozitif tam sayılardan oluşmaktadır. Böylece,

$$\#(Ap(S,n)) = n \quad \text{olup} \quad \text{g}(S = max\,(Ap(S,n)) - n$$

bağıntısı mevcuttur (Rosales,J.C 2000).

3.2.3.1 Not

S = ⟨ $s_1, s_2, \ldots, s_n$⟩ sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda ,

$$Ap(S, s_1) = \{s \in S : s - s_1 \notin S\}$$

kümesi, S nin (mod s_1) e göre tam olarak bir elemanını kapsar. Özel olarak $Ap(S, s_1)$ kümesi, i =1,2,..., s_1 -1 için (mod s_1) ye göre i ye denk olan elemanlardan oluşur. Yani $Ap(S, s_1)$ kümesinin elemanlarını $w(i)$ ile gösterirsek

$$w(i) \equiv i \ (\text{mod } s_1)$$

yazarız (Rosales,J.C 2000).

3.2.3.5 Tanım

S sayısal yarıgrup ve *d* pozitif bir tamsayı olsun. O zaman

$$\frac{S}{d} = \{x \in N : dx \in S\}$$

kümesi de aynı zamanda bir sayısal yarıgruptır ve bu küme **S nin *d* ile bölüm kümesi** olarak adlandırılır. Üstelik $S \subseteq \frac{S}{d}$ olup , $d = 1$ için $\frac{S}{d}$= S yazılır.

3.2.3.4 Örnek

S = ⟨ 2,5⟩ = {0,2,4,5,6 → ... } olsun. O zaman d=3 için $\frac{S}{d}$ kümesi

$$\frac{S}{3} = \{ x \in \mathbb{N} : 3x \in S\} = \{0,2,3,4,5,6,7,8, \rightarrow \dots \}$$

olarak bulunur.

3.2.3.6 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve g(S) onun Frobenius sayısı olsun. Eğer $c - 1 \notin S$ ve $c + \mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in$ S varsa c elemanına ***S sayısal yarıgrubunun kondüktörü(ileticisi)*** denir. Bir başka deyişle c = g(S)+1 eşitliğini sağlayan c sayısına kısaca **S nin kondüktörü** adı verilir.

3.2.3.5 Örnek

S= ⟨6,8,13⟩ = {0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24→...} ve g(S)=23 şeklindedir. Bununla birlikte $c - 1 \notin S$ ve $c + \mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in$ S vardır ve bu değer c =24 olarak bulunur. Çünkü, c -1=24-1=23 ∉ S ve

$$c + \mathbb{N} = 24 + \mathbb{N} = \{c + x : x \in \mathbb{N}\} = \{ 24 + x : x \in \mathbb{N} \} \subseteq S$$

olur.

3.2.3.6 Örnek

S= ⟨4,7,9⟩ = {0,4,7,8,9,11→....} ve g(S)=10 şeklindedir. Bununla birlikte c-1 ∉ S ve c+ℕ ⊆ S olacak şekilde bir tek c ∈ S vardır ve bu değer c=11 olarak bulunur.

Çünkü ; c-1=11-1=10 ∉ S ve

$$c + \mathbb{N} = 11 + \mathbb{N} = \{c + x : x \in \mathbb{N}\} = \{ 11 + x : x \in \mathbb{N} \} \subseteq S$$

olur.

3.2.3.7 Tanım

Bir sayısal yarıgrubu, onu kapsayan iki sayısal yarıgrubun arakesiti olarak ifade edilemiyorsa bu durumda ***S ye ingirgenemez sayısal yarıgrup*** denir.

3.2.3.2 Not

S bir sayısal yarıgrup ve g(S) onun Frobenius sayısı olsun.

O zaman "S simetriktir ⇔ S indirgenemez ve g(S) tek sayıdır " önermesi doğrudur (Rosales,J.C 2008).

3.2.3.7 Örnek

S= $\langle 7,8,25\rangle$ sayısal yarıgrubu indirgenemez ve g(S)= 34 tür. Üstelik, S pseudo – simetriktir. Bununla birlikte, S = $\langle 6,11,15,20,25\rangle$ = $\langle 5,6\rangle \cap \langle 3,11\rangle$ olduğundan indirgenemez değildir.Öte yandan, S simetrik değildir.

Ancak, $S_1=\langle 5,6\rangle$ ve $S_2=\langle 3,11\rangle$ sayısal yarıgrupları simetrik ve S_1 , $S_2 \supseteq$ S şeklindedir.

3.2.3.7 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve g(S) onun Frobenius sayısı olsun. Bu durumda

$$N(S) = \{s \in S: s < g(S)\}$$

kümesine S nin minimal temsilcisi denir. **3.2.3.6 Örnekte** verilen S=$\langle 4,7,9\rangle$ sayısal yarıgrubu için $N(S) = \{0,4,7,8,9\}$ şeklindedir.

3.2.3.8 Tanım

S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,

$$\forall s \in S \setminus \{0\} \text{ için } x + s \in S$$

oluyorsa x tam sayısına ***S nin Pseudo-Frobenius sayısı*** denir ve S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi Pg(S) ile gösterilir. Yani

$$\text{Pg(S)} = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak ifade edilir.

3.2.3.7 Örnek

S= $\langle 6,8,13\rangle$ = {0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24→ ...} ve g(S) =23 olur. O zaman, S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi ;

$$\text{Pg(S)} = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\} = \{23\}$$

olarak bulunur.

3.2.3.1 Önerme

S bir sayısal yarıgrup, g(S) onun Frobenius sayısı ve S nin pseudo- Frobenius sayılarının kümesi Pg(S) olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur.

(1) g (S) = max (Pg (S))

(2) Eğer $x, y \in$ Pg (S) ve $x - y \in S$ ise $x = y$

şeklindedir (Rosales,J.C 2008).

3.2.3.2 Önerme

S bir sayısal yarıgrup olsun. Öte yandan, g(S) ve Pg (S) sırasıyla S nin Frobenius sayısı ve Pseudo Frobenius sayılarının kümesi verilsin. Buna göre S sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerek ve koşul

$$\mathrm{Pg(S)} \ = \{\mathrm{g(S)}\}$$

olmasıdır (Rosales,J.C 2008).

3.2.3.8 Örnek

S=$< 8{,}10{,}17 >$ alalım

S=$\{0,8,10,16,17,18,20,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35,36,37,38,40, \rightarrow \cdots\}$

sayısal yarıgrubu simetriktir. Çünkü g(S) = 39 olup

$$\mathrm{Pg(S)} = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x+s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\} = \{39\}$$

şeklindedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Sayısal yarıgruplarda boşluklar

Bu bölümde, bir sayısal yarıgrubun boşlukları kümesi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Bununla birlikte bir sayısal yarıgrubun boşlukları sayısı, yani cinsi ile simetriklik, pseudo simetriklik ve Frobenius sayısı arasındaki bazı bağıntılar yer almaktadır.

4.1.1 Tanım

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin elemanlarına ***S nin (gaps) boşlukları*** denir. S nin bütün boşluklarının kümesi $H(S)$ ile gösterilir.

Yani ; $H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$ yazılır. Ayrıca $\#(H(S))$ sayısına da S nin cinsi (genus) adı verilir ve $G(S) = \#(H(S))$ ile gösterilir.

4.1.1 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ şeklinde tanımlanan bir sayısal yarıgrup için

$$G(S) = \frac{(s_1 - 1)(s_2 - 1)}{2}$$

ile hesaplanır (Rosales,J.C 2005).

4.1.1 Örnek

$$S = \langle 5, 8 \rangle = \{0,5,8,10,13,15,16,18,20,21,23,24,25,26,28 \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S) = 27$ olup

$$G(S) = \#(H(S)) = 4.7\,/2 = 14$$

olarak hesaplanır. Gerçekten de $H(S) = \{1,2,3,4,6,7,9,11,12,14,17,19,22,27\}$

şeklindedir.

S sayısal yarıgrubunun Apery kümesi ile boşluklarının kümesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz.

4.1.2 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ şeklindeki bir sayısal yarıgrubu için,

$$G(S) = \frac{[\#(Ap(S,s_1))-1][\#(Ap(S,s_2))-1]}{2} \quad \text{ve}$$

$$H(S) \cap Ap(S,s_1) = \emptyset, \qquad H(S) \cap Ap(S,s_2) = \emptyset$$

bağıntısı mevcuttur (İlhan,S 2006).

4.1.2 Örnek

$S = \langle 3{,}5 \rangle = \{0,3,5,6,8 \rightarrow \ldots\}$ olup $g(S) = 3 \cdot 5 - 3 - 5 = 7$ şeklindedir. Bununla birlikte,

$$Ap(S,3) = \{s \in S : s-3 \notin S\} = \{0,5,10\}$$

$$Ap(S,5) = \{s \in S : s-5 \notin S\} = \{0,3,6,9,12\}$$

ve $H(S) = \{1,2,4,7\}$ olup, $G(S) = \frac{(3-1)(5-1)}{2} = 4$ eşitliği sağlanır.

4.1.1 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup $n \in S \setminus \{0\}$ ve $Ap\,(S,n) = \{0, w(1), \ldots, w(n-1)\}$ olsun.

O zaman

$$G(S) = \frac{1}{n}\,(w(1) + \ldots + w(n-1)) - \frac{n-1}{2}$$

olur (Rosales,J.C 2005).

4.1.3 Örnek

$S = \langle 3{,}5 \rangle = \{0,3,5,6,8, \rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubunun cinsinin 4 olduğunu göstermek zor değildir. Yani $H\,(S) = \{1,2,4,7\}$ olur.

4.1.2 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur

(1) S simetrik ise $\Leftrightarrow$ $G(S) = \#\,(N\,(S))$
(2) S Pseudo-simetrik ise $\Leftrightarrow$ $G(S) = \#\,(N\,(S)) + 1$

şeklindedir (Rosales,J.C 2008).

4.1.4 Örnek

$S = \langle 4,6,7 \rangle = \{0,4,6,7,8,10, \to \cdots \}$ S sayısal yarıgrubunda açıktır ki

$\mathrm{g(S)} = 9,\ H\ (S\ ) = \{1,2,3,5,9\ \}$ ve $N(S) = \{0,4,6,7,8\}$

olup S simetriktir çünkü G(S)=5= # $(N\ (S))$ olur (Rosales,J.C 2008).

4.1.3 Yardımcı Önerme

Bir S sayısal yarıgrubunun cinsi $G(S)$ ve kondüktörü c olsun. Eğer $c = 2G(S)$ ise S simetriktir (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.4 Örnekteki S sayısal yarıgrubunun kondüktörü $c = 10 = 2.G(S)$ olup S simetriktir.

4.1.4 Yardımcı Önerme

Bir S sayısal yarıgrubunun cinsi G(S) ve kondüktörü c olsun, o zaman $c = 2G(S) - 1$ ise S pseudo-simetriktir.(Maria Bras-Amoros-2008)

3.2.3.2 Örnekteki S=$< 5,6,13 >$=$\{0,5,6,10,11,12,13,15, \to \cdots\}$ sayısal yarıgrubun cinsi G(S)=8 ve kondüktörü c=15 olup $c = 2G(S) - 1$ eşitliği sağlanır. Yani S pseudo simetriktir.

4.1.1 Önerme

Kondüktörü c olan bir S sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $i \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer i bir boşluksa o zaman $c - 1 - i$ bir boşluk değildir (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.2 Önerme

Kondüktörü c tek sayısı olan bir S sayısal yarıgrubunun Pseudo- simetrik bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul (c -1)/2 den farklı herhangi bir i tamsayısı için i bir boşluksa o zaman $c - 1 - i$ sayısının bir boşluk olmamasıdır (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.1 Not

S bir sayısal yarıgrup ve cinsi $G(S)$ olsun. Bu durumda, cinsi $G(S)$ olan sayısal yarıgrupların sayısı $n_{G(S)}$ olmak üzere $n_0 = 1$ ve $n_1 = 1$ verilsin. Bununla birlikte, Matematikte bir çok problemin çözümünde kullanılabilen özel bir sayı dizisi olan Katalan sayısını kullanarak $n_{G(S)}$ hakkında fikir sahibi olabiliriz. Katalan sayısının genel formülü

$$C\,n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad ; \quad n \geq 0 \; için$$

olarak yazılır .$n_{G(S)}$ sayıları için

$$C_{G(S)} = \frac{1}{G(S)+1}\binom{2G(S)}{G(S)}$$

katalan sayısı hesaplanır.

Burada $n_{G(S)} \leq C_{G(S)}$ olduğu bilinmektedir.(Maria Bras-Amoros-2008)

Cinsi $G(S)$ olan sayısal yarıgrupların hesaplanmasında Katalan sayısı gibi yine özel bir sayı dizisi olan Fibonacci sayı dizisi kullanılarakta geniş bir aralık elde edilmiştir.n.inci Fibonacci sayısı F(n) şu şekilde ifade edilir

$$F_n = F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

4.1.3 Teorem

Cinsi $G(S)$ olan S sayısal yarıgruplarının sayısı $n_{G(S)}$ olsun. O zaman $F_{G(S)}$, $G(S)$ nin fibonacci sayısı olmak üzere , aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

(Maria Bras-Amoros-2008).

(1) $\forall\ G(S) \geq 2$ için $2\,F_{G(S)} \leq n_{G(S)}$ şeklindedir.

(2) $\forall\ G(S) \geq 3$ için $2F_{G(S)} \leq n_{G(S)} \leq 1 + 3 \cdot 2^{G(S)-3}$ olur.

4.1.3 Önerme

S, Katlılığı 3 olan bir sayısal yarıgrup ve g(S) ile $G(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı ile cinsi olsun . O zaman;

$Ap\,(S,3) = \{\,0 < 3G(S) -$ g(S) $<$ g(S) + 3$\}$ dir (Rosales,J.C 2005).

4.1.5 Yardımcı Önerme

S, Katlılığı 3 olan bir sayısal yarıgrup g(S) ve $G(S)$ de sırasıyla S'nin Frobenius sayısı ve cinsi olsun. O zaman

$$(g(S)+1)/2 \ \leq \ G(S) \ < \ (2g(S)+3)/3$$

eşitsizliği mevcuttur (Rosales,J.C 2005).

4.1.5 Örnek

S=$< 3,5 >=\{0,3,5,6,8,\rightarrow \cdots\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Burada g(S)=7 ve H(S)= $\{1,2,4,7\}$ olup G(S)=4 tür. Bu durumda,

$$Ap\,(S,3) = \{0,5,10\} \ = \{\ 0 \ < \ 3\cdot 4-7 \ < \ 7+3\} \quad \text{olur.}$$

Bununla beraber (7+1)/2 $\leq 4 <$ (2·7+3)/3 eşitsizliği de sağlanır.

4.1.4 Teorem

F $\in \mathbb{Z}^{+}$ için $F \geq$ 4 ve 3 $\nmid F$ olsun. Ayrıca G $\in \mathbb{Z}^{+}$ sayısı

$$(F+1)/2 \ \leq \ G \ < \ (2F+3)/3$$

eşitsizliğini sağlasın, O zaman $S = \langle 3, 3G-F\,, F+3\ \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı F, cinsi de G olur (Rosales,J.C 2005).

4.1.6 Örnek

F=5 ve G=4 alırsak (5+1)/2 $\leq$ 4 $<$ (2·5+3)/3 olup,

$S = \langle 3, 3\cdot 4-5\,, 5+3\ \rangle$=$\langle 3,7,8\ \rangle$=$\{0,3,6,7,8,9,10,11 \rightarrow \cdots\}$ sayısal yarıgrubu elde ederizki g(S)=5 ve H(S)=$\{1,2,4,5\}$ olup G(S)=4 olur.

4.1.1 Sonuç

Katlılığı 3 olan iki sayısal yarıgrubun birbirine eşit olması için gerek ve yeter koşul bunların Frobenius sayılarının ve cinslerinin aynı olmasıdır (Rosales,J.C 2005).

4.1.2 Sonuç

F $\in \mathbb{Z}^{+}$ için $F \geq$ 4 ve 3 $\nmid F$ olsun. O zaman, katlılığı 3 ve Frobenius sayısı F olan

$\left\lfloor \frac{2F+3}{3} \right\rfloor$ - $\left\lceil \frac{F+1}{2} \right\rceil$ +1 tane sayısal yarıgrup vardır. (Rosales,J.C 2005).

Burada ; $x \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere,

$$\lfloor\ x\ \rfloor = x\text{'ten küçük veya eşit olan en büyük tamsayı}$$

ve

$$\lceil\ x\ \rceil = \ x'ten\text{büyük veya eşit olan en küçük tamsayı}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

4.1.7 Örnek

Katlılığı 3 ve Frobrnius sayısı 7 olan bütün S sayısal yarıgruplarını oluşturalım.

Bunların sayısı $\lfloor \frac{17}{3} \rfloor$ - $\lceil \frac{8}{2} \rceil$ + 1 = 5- 4 + 1 = 2 dir. Aynı zamanda belirtelim ki **Yardımcı önerme 4.1.5** den $G \in \{4, 5\}$ ve **Teorem 4.1.4** yardımıyla bu yarıgruplar

$$S_1 = \langle\ 3, 3 \cdot 4 - 7\ , 7 + 3\ \rangle = \langle\ 3, 5\ \rangle$$

ve

$$S_2 = \langle\ 3, 3 \cdot 5 - 7\ , 7 + 3\ \rangle = \langle\ 3, 8\ , 10\ \rangle$$

şeklindedir.

4.1.3 Sonuç

$G \in \mathbb{Z}$ ve $G \geq 3$ olsun. O zaman cinsi G ve katlılığı 3 olan G- $\lfloor \frac{2G-1}{3} \rfloor$ tane sayısal yarıgrup vardır (Rosales,J.C 2005).

4.1.8 Örnek

Katlılığı 3 ve cinsi 11 olan bir S sayısal yarıgruplarının sayısı

11- $\lfloor \frac{22-1}{3} \rfloor$ = 4 tanedir.

Bu yarıgruplar frobeniusu 3 ün katı olmayan tamsayılara sahip ve aşağıdaki gibidirler.

$S_1 = \langle$ 3, 17, 19 $\rangle$ ise g(S_1)=16

$S_2 = \langle$ 3, 16, 20 $\rangle$ ise g(S_2)=17

$S_3 = \langle\, 3, 14, 22 \,\rangle$ ise $g(S_3)$=19

$S_4 = \langle\, 3, 13, 23 \,\rangle$ ise $g(S_4)$=20

bunların cinsi 11 ve katlılığı 3 tür.

4.1.2 Tanım

$S =< s_1, s_2, \dots, s_n >$ sayısal yarıgrubunda s_2 elemanına **S nin oranı** denir ve $R(S)$ ile gösterilir.

4.1.4 Önerme

S sayısal yarıgrubunda $\mu(S) = 4$ olsun. S nin Frobenius sayısı g(S), cinsi $G(S)$ ve oranı da $R(S)$ olmak üzere

$$Ap\,(S,4) = \{0 < R < 4G(S) - g(S) - R + 2 < g(S) + 4\}$$

şeklindedir (Rosales,J.C 2005).

4.1.4 Sonuç

Katlılığı 4 olan iki sayısal yarıgrubun birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart Frobenius sayıları cinsleri ve oranlarının aynı olmasıdır (Rosales,J.C 2005).

4.1.6 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $\mu(S) = 4$ olsun.S nin Frobenius sayısı g(S) ve cinsi $G(S)$ olmak üzere

$$\lceil\ (\mathrm{g(S)} + 1)/2\ \rceil \leq G(S) \leq \mathrm{g(S)} - \lfloor\ (\mathrm{g(S)})/4\ \rfloor$$

şeklindedir (Rosales,J.C 2005).

4.1.9 Örnek

$S =< 4{,}10{,}11 > = \{0{,}4{,}8{,}10{,}11{,}12{,}14{,}15{,}16{,}18 \to \cdots\}$ sayısal yarıgrubunda g(S)=17 olup H(S) = $\{1{,}2{,}3{,}5{,}6{,}7{,}9{,}13{,}17\}$ şeklindedir . O halde G(S)=9 olur. Böylece

$$\lceil\ (17 + 1)/2\ \rceil \leq 9 \leq 17 - \lfloor\ 17/4\ \rfloor$$

eşitsizliği sağlanır.

4.1.7 Yardımcı Önerme

F ≥ 6 ve F çift bir tamsayı olsun. Eğer F, 4'ün katı değilse $S = \langle\ 4,\ \frac{\mathrm{F}}{2} + 4,\ \mathrm{F} + 4\ \rangle$ sayısal yarıgrubunun katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi $\frac{\mathrm{F}+2}{2}$ olur (Rosales,J.C 2005).

4.1.8 Yardımcı Önerme

F ≥ 7 ve tek tamsayı olsun.

O zaman S = ⟨ 4, 6, F-2 ⟩ katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi $\frac{\mathrm{F}+1}{2}$ olan bir sayısal yarıgruptur (Rosales,J.C 2005).

4.1.10 Örnek

F=11 alalım. O zaman

$$S=<4,6,11-2>=< 4,6,9 > =\{0,4,6,8,9,10,12 \rightarrow \cdots\} \text{ olur.}$$

Bu durumda, g(S)=11=F olup $H(S) = \{1,2,3,5,7,11\}$ bulunur. Böylece

$$G(S) = 6 = \frac{F+1}{2} \text{ olur.}$$

4.1.5 Önerme

F tamsayısı, $F \geq 6$ ve $4 \nmid F$ şeklinde olsun. O zaman;

$\lceil \frac{\mathrm{F}+1}{2} \rceil \leq \mathrm{G} \leq \mathrm{F} - \lfloor \frac{\mathrm{F}}{4} \rfloor$ olacak şekilde, her G tamsayısı için, katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi G olan bir sayısal yarıgrup vardır (Rosales,J.C 2005).

4.1.6 Önerme

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve min $\{ n_1, n_2\} \geq 3$ olmak üzere

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise o zaman

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle n_1, n_2\rangle \ ve\ 2x \in \langle n_1, n_2\rangle \} =$$

$\{ \frac{n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid 0 \leq a \leq \frac{n_2}{2} - 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \}$

olur. Üstelik

$$g\left(\frac{\langle n_1 , n_2 \rangle}{2}\right) = \frac{n_1 n_2 - 2n_1 - n_2}{2}$$

ve $$G\left(\frac{\langle n_1 , n_2 \rangle}{2}\right) = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 2)}{4}$$ şeklindedir.

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise o zaman

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle n_1 , n_2 \rangle \; ve \; 2x \in \langle n_1 , n_2 \rangle \} =$$

$\{ \frac{n_1 + n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid 0 \leq a \leq \frac{n_2-1}{2} - 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \}$

olur. Üstelik

$$g\left(\frac{\langle n_1 , n_2 \rangle}{2}\right) = \frac{n_1 n_2 - n_1 - n_2 - \min(n_1 , n_2)}{2}$$

ve

$$G\left(\frac{\langle n_1 , n_2 \rangle}{2}\right) = (n_1 - 1)(n_2 - 1) \; / \; 4$$

bulunur (Rosales, J.C 2005).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1 Bir sayısal yarıgrupta temel boşluklar

Bu bölümde,bir sayısal yarıgrubun boşlukları kümesi kullanılarak elde edilen temel boşluklar kümesi ile ilgili bazı sonuçlar yer almaktadır. Bununla birlikte temel boşlukların sayısı, Frobenius sayısı ve Cinsi kullanılarak indirgenmezlik kavramları arasındaki bağıntılar verilmektedir.

5.1.1 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve H(S) onun boşlukları kümesi olsun.O zaman $x \in H(S)$ için $2x, 3x \in S$ ise x elamanına ***S nin temel boşluğu*** denir ve S nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(S)$ ile gösterilir.

Yani ,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

olarak yazılır.

5.1.1 Örnek

$S = \langle 3,5 \rangle = \{0,3,5,6,8, \rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubu için $H(S) = \{1,2,4,7\}$, g(S)=7 ve $FH(S) = \{4,7\}$ olur.

5.1.1 Teorem

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$ olsun

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise o zaman

FH ($\langle n_1, n_2 \rangle$) ={ $\frac{n_2}{2}$ + an_1 + bn_2 | ($\frac{n_2}{6} \leq a \leq \frac{n_2}{2}$ - 1 ve $0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2}$ -1

ya da;

($0 \leq a \leq \frac{n_2}{2} - 1$ ve $\frac{n_1-3}{6} \leq b \leq \frac{n_1-1}{2}$ - 1) }

olur.

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise o zaman

$FH\ (\langle n_1, n_2 \rangle)$ ={ $\frac{n_1+n_2}{2}$ + an$_1$ + bn$_2$ | ($\frac{n_2-3}{6}$ ≤ a ≤ $\frac{n_2-1}{2}$ - 1 ve 0 ≤ b ≤ $\frac{n_1-1}{2}$ -1)

ya da

(0≤ a ≤ $\frac{n_2-1}{2}$ – 1 ve $\frac{n_1-3}{6}$ ≤ b ≤ $\frac{n_1-1}{2}$ - 1) }

şeklindedir (Rosales,J.C 2005).

5.1.1 Sonuç

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\min\{n_1, n_2\}$ ≥3 olsun.

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise ozaman

$$\# FH\ (\langle n_1, n_2 \rangle) = \frac{n_2(n_1-1)}{4} - \left\lceil \frac{n_2}{6} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n_1-3}{6} \right\rceil$$ olur.

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise

$$\# FH\ (\langle n_1, n_2 \rangle) = \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{4} - \left\lceil \frac{n_2-3}{6} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n_1-3}{6} \right\rceil$$

şeklindedir (Rosales,J.C 2005).

5.1.2 Örnek

$S = \langle 3, 10 \rangle$ = { 0,3,6,9,10,12,13,15,16,18,→...} sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu durumda

$H(S) ==$ { 1,2,4,5,7,8,11,14,17} olup $FH\ (S)$ = { 5,8,11,14,17} şeklindedir. Ayrıca

$$\#(FH\ (S)) = \frac{10\ x\ 2}{4} - 2 \cdot 0 = 5$$

olduğunu **Sonuç 5.1.1** den kolaylıkla hesaplayabiliriz (Rosales,J.C 2005).

5.1.1 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve bir p pozitif bir tamsayı olsun.O zaman $\frac{S}{P}$ sayısal yarıgrubun temel boşlukları kümesi

$$FH\left(\frac{S}{P}\right) = \left\{ \frac{h}{P} \mid h \in FH(S)\ ve\ h,p\ nin\ katı \right\}$$

şeklindedir (Rosales,J.C 2005).

5.1.3 Örnek

S=⟨ 5, 11 ⟩ ve p=3 olmak üzere,

$S_1 = \frac{\langle 5,11 \rangle}{3}$ sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesini bulalım. $S = \{0,5,10,11,15,16,20,21,22,25,26,27,30,31,32,33,35,36,37,38,40 \rightarrow \ldots\}$

$$H(S) = \{1,2,3,4,6,7,8,9,12,13,14,17,18,19,23,24,28,29,34,39\}$$

ve $FH(S) = FH(\langle 5,11 \rangle) = \{18,19,23,24,28,29,34,39\}$

elde ederiz. Böylece **Yardımcı Önerme 5.1.1** yardımıyla $FH(S_1) = \{6,8,13\}$ yazılır.

Gerçekten de $S_1 = \frac{S}{3} = \{x \in \mathbb{N} : 3x \in S\} = \{0,5,7,9,10,11,12,14, \rightarrow \cdots\}$ olur ve

$H(S_1) = \{1,2,3,4,6,8,13\}$ bulunur. Böylece

$$FH(S_1) = \{a \in H(S_1) : 2a, 3a \in S\} = \{6,8,13\}$$

çıkar.

5.1.1 Not

(a) Eğer $\min\{n_1, n_2\} = 1$ ise o zaman

$$S = \langle n_1, n_2 \rangle = \mathbb{N} \text{ ve } FH(S) = \emptyset$$

olur.

(b) Eğer $\min\{n_1, n_2\} = n_2 = 2$ ise o zaman

$$S = \langle n_1, n_2 \rangle = \{0,2,4,\ldots,2.\left(\frac{n_1-1}{2}\right), n_1, \rightarrow\}$$

ve

$$FH(S) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ tek sayı ve } \frac{n_1}{3} \leq x \leq n_1 - 2\}$$

şeklinde olur (Rosales,J.C 2005).

5.1.2 Yardımcı Önerme

a pozitif bir tamsayı olmak üzere , $S = \langle a+1, a+2, \rightarrow \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman

$$\text{g}(S) = a \; ve \; \#(FH(S)) = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$$

şeklindedir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.4 Örnek

S=$< 4,5, \rightarrow \cdots >= \{0,4,5,6,7, \rightarrow \cdots\}$ olup $H(S) = \{1,2,3\}$ ve $g(S) = 3 = a$,

$$\#(FH(S)) = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$$

çıkar. Gerçekten de $FH(S) = \{2,3\}$ şeklindedir.

5.1.3 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $\mu(S) = m$ olsun. O halde $S \setminus \{m\}$ bir sayısal yarıgrup ve $FH(S \setminus \{m\}) \subseteq FH(S) \cup \{m\}$ olur. Ayrıca $m \in FH(S \setminus \{m\})$ olur (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.5 Örnek

S=$< 3,5 >=\{0,3,5,6,8 \rightarrow \cdots\}$ sayısal yarıgrubunda

$$m = \mu(S) = 3,$$

$$\text{H(S)}= \{1,2,4,7\} \quad \text{ve} \quad \text{FH(S)}= \{4,7\}$$

olup $S \setminus \{3\}$ =$\{0,5,6,8, \rightarrow \cdots\}$ bir sayısal yarıgruptur ve $FH(S \setminus \{3\})$=$\{3,4,7\}$ bulunur.

Diğer taraftan $H(S \setminus \{3\})$=$\{1,2,3,4,7\}$ ve $FH(S)$=$\{4,7\}$ olup

$$FH(S \setminus \{3\}) \subseteq FH(S) \cup \{3\}$$

yazarız.

5.1.4 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup m = $\mu(S)$ olsun.O zaman

$$FH\,(S) \subseteq FH\,(\,S \setminus \{\,m\,\}\,) \cup \{\,m\,/\,2\,\}$$

olur. Üstelik,

$$m/2 \in FH\,(S) \Leftrightarrow 3m/2 \in S$$

şeklindedir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.2 Sonuç

S bir sayısal yarıgrup ve m = $\mu(S)$ onun katlılığı olsun. O zaman

$$\#(\,FH\,(S)) = \begin{cases} \#(FH\,(S\setminus\{m\}) & ; \ \frac{3m}{2} \in S \; ise \\ \#(FH\,(S\setminus\{m\}) - 1 & ; \ \frac{3m}{2} \notin S \; ise \end{cases}$$

olur.

5.1.2 Not

Verilen S sayısal yarıgrubu için S_i kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır .

(1) $S_0 = S$,

(2) $S_{n+1} = S_n \setminus \{m\,(S_n\,)\}$ dir.

Burada $S_k = \langle\ \mathrm{g(S)} + 1\,, \rightarrow \rangle$ olacak şekilde bir k ∈ℕ doğal sayısı vardır.Böylece

$$\langle\ \mathrm{g(S)} + 1\,, \rightarrow \rangle = S_k \subseteq \ldots\ldots . \subseteq S_1 \subseteq S_0 = S$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak

$$\#(FH(S)) = \#(FH(S_0)) \leq \ldots\ldots \leq \#(\,FH(S_i)) = \left\lceil \frac{\mathrm{g(S)}}{2} \right\rceil$$

ifadesini elde ederiz (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.2 Teorem

S bir sayısal yarıgrup olsun. O halde $\#(\, FH(S)) \leq \lceil \frac{\mathrm{g(S)}}{2} \rceil$ olur. Ayrıca aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.(Rosales,J.C 2004)

1) $\#(FH(S)) = \left\lceil \frac{\mathrm{g(S)}}{2} \right\rceil$

2) $x <$ g(S) olacak şekilde her $x \in S$ için $3x/2 \in S$ olur.

3) Eğer a, S nin bir minimal üreteci ve $a <$ g(S)ise o zaman $3a/2 \in S$ çıkar**.**

5.1.1 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $s \in S$ olsun. O zaman S \ $\{s\}$ nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul , s elemanının S nin bir

minimal üreteci olmasıdır. Üstelik S \{s} bir sayısal yarıgrup ise o zaman

$$FH(S \setminus \{s\}) = (\, FH\,(S) \cup \{s\}\,) \setminus \{x \in FH(S) : x |\, s\,\}$$

şeklindedir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.2 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $y \in H(S)$ olsun. Ozaman $S \cup \{y\}$ nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $y \in$ Maximal $\leq_S$ $(FH(S))$ olmasıdır. Üstelik $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgrup ve y nin asal bölenleri $p_1, \ldots .. p_n$ ise

$$FH\,(S \cup \{y\}\,) = (\,FH\,(S) \setminus \{y\}\,) \cup \{\, \frac{y}{p_i} \;:\; \frac{y}{p_i} \;\notin D\left(\left(FH(S)\right) \setminus \{y\}\right)$$

şeklindedir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

(Burada $D(x_1, x_2, .., x_n) = \{x \in \mathbb{N} : x \mid x_i\,,\; i = 1,2, \ldots, r\,\}$ olarak tanımlanmaktadır.)

5.1.3 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $S \neq \mathbb{N}$ olsun o zaman aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.

(1) S indirgenemezdir.

(2) Maximal $\leq_S (FH(S)) = \{\mathrm{g(S)}\}$ dir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

6. KAYNAKLAR

Barucci, V. ; Dobbs, D. E. ; Fontana, M.,Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analyticalle Irreducible local Domains, Memoirs of the Amer. Math.Soc., **1997**, Vol.598.

Branco, M.B ; Franco, Nuno Universidade de Evora, Study of Algorithms for Decomposition of a Numerical Semigroup, **2007**, Vol 1. Issue 2

Curtis, F., On Formulas for the Frobenus Number of A Numerical Semigroup, Math. Scand.,**1990**,67,190-192.

Fernando Torres, Remarks on Numerical Semigroups,**1995**,ar Xiv; alg-eom/9512012 v1

Fröberg, R. ; Gottlieb , C. ; Haggkvist, R. , On numerical Semigroups, Semigroup Forum, **1987**, Vol.35 , 63-83.

İlhan, S., On A Class of Telescopic Numerical Semigroups,International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **2006**, Vol.1, No.2 , 81-83 .

J.L Ramirez Alfonsin ,Gaps in Semigroups Discrete Math 2007

Madero, M ; Herzinger, K. ,The Apery Sets of Numerical Semigroups, Algebra Commnucations, **2005**, 33;3831-3838.

Marco D'Anna,Type Sequances of Numerical Semigroups,Semigroup Forum,**1998**, Vol.56 1-31.

Maria Bras-Amoros , Acute Semigropus, the Order Bound on the Minimum Distance and the Freg-Rao Improvement, IEEE Transaction on informatıons Theory, **2004**,Vol.50 , No.6.

Maria Bras-Amoros , Bounds on the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus, **2008.**

Rosales J.C , Numerical Semigroups with Apery Sets of Unigue Expression, Journel of Algebra, **2000,**226,479-48

Rosales, J.C , Garcia-Sanchez P.A , Garcia-Garcia J.I and Jimenez Madrid J.A, Fundamental Gaps in Numerical Semigroups, Journal of Pure and Applied Algebra, **2004,**Vol.301-303.

Rosales, J.C., Fundamental Gaps of Numerical Semigroups Generated by Two Elements, Linear Algebra and its Applications, **2005** , 405-200-208.

6. KAYNAKLAR

Rosales, J.C., Numerical Semigroup with Multiplicity Three and Four,Semigroup Forum, **2005**,Vol.71,323-331.

Rosales, J.C., Contractions of a Numerical Semigroup,Journal of Mathematical Inequalities, **2007**,Vol.1 , No.4, 491-501.

Rosales, J.C., One Half of a Pseudo-symmetric Numerical semigroup, London Mathematical Society, **2008**, doi:10.1112/blms/bd010