T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN HANKEL DETERMİNANTI PROBLEMİ

Ayşegül DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Ocak 2016

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca hoşgörü, samimiyet ve alçak gönüllülüğü ile daima yanımda olan, bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli Hocam Sayın Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY ´e,

Yüksek lisans çalışmam boyunca tecrübe ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen meslektaşım Sayın A. Mutlu GEÇGEL´e,

Bana duydukları sevgi, güven ve anlayışlarıyla daima yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR I

İÇİNDEKİLER II

ÖZET IV

ABSTRACT V

ŞEKİL LİSTESİ VI

KISALTMA VE SİMGELER VII

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ÖZETLERİ 5

2.1 Hankel Determinantı ile İlgili Çalışmalar 5

2.2 Sakaguchi Tip Fonksiyonlar İle İlgili Çalışmalar 6

2.3 Kuvvetli Konveks ve Kuvvetli Yıldızıl Fonksiyonlar ile İlgili Çalışmalar 6

3. MATERYAL VE METOT 7

3.1 Materyal 7

3.2 Metot 7

3.3 Temel Tanımlar 7

3.4 Yalınkat Fonksiyonlar 9

3.5 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları 15

3.6 Birim Diskte Yalınkat Olan Fonksiyonların Bazı Önemli Alt Sınıfları 16

3.7 Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı 20

3.8 Subordinasyon İlkesi 23

3.9 Hankel Determinantı ve Fekete-Szegö Fonksiyoneli 25

3.10 Bernoulli Lemniscate 26

3.11 Kuvvetli Yıldızıl ve Kuvvetli Konveks Fonksiyonlar 27

3.12 Genelleştirilmiş Sakaguchi Tip Fonksiyonlar 27

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 29
4.1 Bernoulli Lemniscate ile ilgili Kuvvetli Konveks Fonksiyonların Bir Sınıfı İçin Bazı Özel Tahminler 29
4.1.1 Temel Tanımlar 29
4.1.2 SL^c Sınıfında Katsayı Tahminleri 31
4.1.3 SL^c İçin Hankel Determinantının Üst Sınırı 35
4.2 Yalınkat Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Alt Sınıfı İçin 2. Hankel Determinantı 39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 45
5.1 Bernoulli Lemniscate ile ilgili Kuvvetli Konveks Fonksiyonların Bir Sınıfı İçin Elde Edilen Sonuçlar 45
5.2 Yalınkat Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Alt Sınıfı İçin 2. Hankel Determinantı ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar 46
6. KAYNAKLAR 47
ÖZGEÇMİŞ 53

ÖZET

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN HANKEL DETERMİNANTI PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşegül DOĞAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

Bu tezde, analitik fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonlar için ikinci ve üçüncü Hankel determinantları ele alınmış ve bu determinantlar için kesin üst sınırlar belirlenmiştir. Tanımlanan fonksiyon sınıfında ikinci Hankel determinantı için elde edilen sonuçların daha önce bulunan sınırların bir genelleştirmesi olduğu gösterilmiştir. Üçüncü Hankel determinantı için ise öncelikle tanımlanan bu sınıfa ait fonksiyonlar için bir katsayı tahmininde bulunulmuş ve daha sonra da üçüncü Hankel determinantı için bir üst sınır belirlenmiştir.

İlk olarak karmaşık analizin temelini oluşturan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra yalınkat fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonların önemli bazı alt sınıfları, birim diskte yalınkat olan fonksiyonların önemli bazı alt sınıfları, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonların sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflarla ilgili önemli bazı teoremler ifade edilmiştir. Subordinasyon ilkesi ve bu ilkenin özelliği anlatılarak, Hankel determinantı ve bu determinant sayesinde elde edilen Fekete- Szegö fonksiyoneli incelenmiştir. Kuvvetli Konveks Fonksiyonlar ve Genelleştirilmiş Sakaguchi Tip Fonksiyonlar tanımlanarak bu fonksiyonların özellikleri ele alınmıştır. Son olarak Bernoulli Lemniscate´ nin özelliklerinden bahsedilmiştir. Bu eğri ile ilgili Kuvvetli Konveks Fonksiyonların bir alt sınıfı tanımlanarak, bu sınıf için bazı katsayı tahminleri elde edilerek, bu katsayılar doğrultusunda üçüncü Hankel Determinantının bir üst sınırı tahmin edilmeye çalışılmıştır. Genelleştirilmiş Sakaguchi Tip Fonksiyonların bir alt sınıfı tanımlanarak bu alt sınıf için ikinci Hankel Determinantının bir üst sınırı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Yalınkat Fonksiyonlar, Yıldızıl Fonksiyonlar, Konveks Fonksiyonlar, Hankel Determinantı.

ABSTRACT

HANKEL DETERMINANTS OF THE PROBLEM FOR SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTİONS

THESIS OF MASTER DEGREE

Ayşegül DOĞAN

DEPATMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2016

In this thesis, for some subclass of analytic functions the second and third Hankel determinant are discussed, and for these determinants certain upper bounds have been identified. The result has shown that is a generalization of earlier limit, for third Hankel determinant, first of all, coefficient prediction has been done. For functions belong to class then upper limit has been identified for third Hankel determinant.

First of all, it has been devoted some theorems and descriptions as a basic of complex analysis. After that, univalent functions, its some important subclasses, some important subclasses in the unit disc of univalent functions and positive real functions classes have been introduced. Also some theorems about these classes have been stated. Subordination principles and their features have been explained, and then Hankel determinant and Fekete-Szegö functions that is formed thanks to Hankel determinant have been examined. By introducing Strongly Convex Functions and Generalized Sakaguchi Type Functions, the characteristics of functions have been defined. Finally, Bernoulli Lemniscate´s features have been mentioned. Strongly Convex Functions which is related this curve have been mentioned as a subclass, for this class, coefficient estimates have been achieved, and accordig to these coefficients, third Hankel determinants upper bound has been tried to estimate. By introducing a subclass of Generalized Sakaguchi Type Functions, Second Hankel determinants upper bound have been achieved for this subclass.

Key Words: Analytic Functions, Univalent Functions, Starlike Functions, Convex Functions, Hankel Determinant.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No **Sayfa**

Şekil 3.1 $f(z)=(1+z)^2$ fonksiyonunun resmi **10**

Şekil 3.2 $f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonunun resmi **10**

Şekil 3.3 Koebe fonksiyonunun grafiği **12**

Şekil 3.4 Konveks bölge **15**

Şekil 3.5 w_0 noktasına göre yıldızıl bölge **16**

Şekil 3.6 Subordinasyon İlkesi **25**

Şekil 3.7 Bernoulli Lemniscate **26**

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ Genişletilmiş Karmaşık Düzlem
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
U	: $\{z\ :\ \lvert z\rvert<1\}$, Birim disk
$k(z)$	: $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu
A	: U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfı
S	: Analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı
S^*	: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
C	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$C(\alpha)$	: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$L_0(z)$	: Möbius Fonksiyonu
$\wp$	: Pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı
SL^*	: Kuvvetli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
SL^c	: Kuvvetli konveks fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha,t)$	: α mertebeli Sakaguchi fonksiyonların sınıfı
$S(\alpha,s,t)$	: Genelleştirilmiş Sakaguchi tip fonksiyonların sınıfı
$T(\alpha,s,t)$	: $\{f(z)\in A,\ zf'(z)\in S(\alpha,s,t)\}$ ile tanımlı fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biridir. Bu teorinin temelleri, Riemann Dönüşüm Teoremi ile birlikte atılmış olup, Koebe' nin 1907 deki $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskindeki birebir her $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ dönüşümünün resim bölgesinde, $|w|<c$ diski kapsanacak şekilde mutlak bir c sabitinin ve sadece $|z|$ ye bağlı olan $|f'(z)|$ modülü üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı çalışması da bu teorinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Daha sonraki birçok matematikçinin çalışmaları da bu sınırları veya $|f(z)|$ değerinin büyümesiyle ilgili diğer sabitleri tam anlamıyla belirleme üzerinde yoğunlaşmıştır. Uzun çalışmalar ve bunun neticesinde bulunan sonuçlar ***" Temel Yalınkat Fonksiyonlar Kuramı"*** olarak adlandırılmıştır. Böylece yalınkat fonksiyonların sınıfları ile ilgili problemler üzerindeki çalışmalar artmıştır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde, ele alınan fonksiyonların katsayı sınırlarının tahmin edilmesi, modülünün alt ve üst sınırları veya katsayılar arasındaki bağıntıların bulunması önemli bir yere sahiptir.

Bieberbach tarafından öne atılan

" $f\in S$ fonksiyonu için $n=2,3,\cdots$ olmak üzere $|a_n|\le n$ eşitsizliği sağlanır"

tahmini uzun süre matematikçilerin çalıştığı bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2|\le 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk olarak Bieberbach tarafından 1916 da ispatlanmıştır. Daha sonra Loewner 1923' te parametrik metot olarak isimlendirdiği kendi buluşuyla $|a_3|\le 3$ eşitsizliğini, 1955' te Schiffer ve Garabedian, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4|\le 4$ eşitsizliğini, 1968' de Pederson $|a_6|\le 6$ ve 1972 de Pederson ve Schiffer $|a_5|\le 5$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu tahminin genelleştirilmiş hali yıllarca matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. 1985 te nihayet L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak bütün $n=2,3,\cdots$ için $|a_n|\le n$ eşitsizliğinin doğrulunu ispatlamıştır.

Bieberbach tahmini Branges tarafından ispatlanıncaya kadar konuyla ilgilenen matematikçiler S sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıflarla ilgili bir takım bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden bazıları yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıflarıdır.

Koebe tarafından ifade edilen ve büyüme bükülme teoremleri olarak bilinen, bir $f \in S$ fonksiyonu için $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ sınırlarının elde edilmesi problemi de Bieberbach teoreminin önemli sonuçlarından birisidir.

1976' da Noonan ve Thomas tarafından $s-inci$ Hankel Determinantı tanımlanmıştır. Bu determinant bir çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Örneğin Noor (1983)

$$f(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

şeklindeki f fonksiyonu için $k \to \infty$ iken $H_s(k)$ nın büyüme oranını tespit etmiştir. Ehrenborg (2000) üstel polinomların Hankel determinantını çalışmıştır. Bir tamsayı dizisinin Hankel dönüşümü ve bazı özellikleri Layman (2001) tarafından ele alınmıştır. Janteng (2007) yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının Hankel determinantını çalışmıştır. Ayrıca p-valent alpha-konveks fonksiyonlar için Hankel determinantı problemi Singh ve Mehrok (2013) tarafından çalışılmıştır.

Yakın zamanda Arif (2012) analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları için $s-inci$ Hankel determinantını çalışmıştır. $|a_2a_4-a_3^2|$ fonksiyoneli Bansal (2013), Janteng (2007) ile Janteng ve ark. (2007) tarafından ele alınmıştır.

Bu çalışmamızdaki amacımız, ilk olarak kuvvetli konveks fonksiyonların SL^c alt sınıfında iki problemi ele alıp, SL^c alt sınıfında bazı katsayı tahminleri elde ederek Toeplitz determinantını kullanıp, Bernoulli Lemniscate ile ilgili analitik fonksiyonların bir alt sınıfı için $H_3(1)$ Hankel determinantının bir üst sınırı elde etmektir. İkinci olarak U birim diskinde tanımlı analitik

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu için $M_\lambda(s,t)$ sınıfını tanımlayıp, bu sınıfa ait fonksiyonların temel özelliklerini inceleyerek, bulunan parametreler için bazı özel değerler seçilmek suretiyle daha önce çalışılmış sınıflara ait sonuçları elde etmektir.

Bu amaç doğrultusunda bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde yalınkat fonksiyonların genel bir tarihçesinden söz edilmiştir.

İkinci bölümde tezi oluştururken faydalandığımız bazı temel makalelerden kısaca bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak temel tanımlara, önemli bazı teorem ve sonuçlara yer verilmiştir. Yalınkatlığın temelini oluşturan analitik fonksiyonlardan bahsedilmiştir. Yalınkat ve yerel yalınkat fonksiyonlar örnekleriyle birlikte anlatılmıştır. Yalınkat fonksiyonların alt sınıfları incelenip konuyla ilgili teoremler ifade edilmiş ve Subordinasyon ilkesine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümlerde yer alan teoremler tekrara düşmemek amacıyla, ispat için ulaşılacak kaynaklar belirtilerek ispatsız olarak verilmiştir.

Dördüncü bölüm iki ayrı kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak Bernoulli Lemniscate ile ilgili kuvvetli konveks fonksiyonların SL^c sınıfı için bazı katsayı tahminlerinde bulunup üçüncü Hankel determinantı için bir üst sınır elde edilmiştir. Daha sonra da Yalınkat fonksiyonların bir alt sınıfı olan Genelleştirilmiş Sakaguchi tip fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının bir üst sınırı hesaplanmıştır.

Son olarak beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen teoremler ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde daha önce üzerinde çalışılmış ve tezi oluşturmamızda faydalandığımız makalelerin içeriğinden kısaca bahsedilmiştir.

2.1 Hankel Determinantı ile İlgili Çalışmalar

$s-inci$ Hankel determinantı $H_s(k)$ Noonan (1976) tarafından tanımlanmıştır. Bu determinant bir çok matematikçinin ilgi odağı olup s ve k ´nın farklı değerleri için determinantın bir üst sınırı elde edilmeye çalışılmıştır.

Janteng ve ark. 2007 de yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının üst sınırlarını sırasıyla yıldızıl fonksiyonlar için $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le 1$ ve konveks fonksiyonlar için de $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{1}{8}$ olarak elde etmiştir.

Babalola (2010) yalınkat fonksiyonların R, S^* ve C sınıfları için üçüncü Hankel determinantının sınırlarını sırasıyla $\left|H_3(1)\right|\le \frac{2736\sqrt{3}+675\sqrt{5}}{4860\sqrt{3}}$, $\left|H_3(1)\right|\le 16$, $\left|H_3(1)\right|\le \frac{32+35\sqrt{3}}{72\sqrt{3}}$ olarak elde etmiştir.

Arif ve ark. 2012 deki çalışmasında ikinci Hankel determinantının üst sınırını analitik fonksiyonların α-mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı için $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{1}{(1+3\alpha)^2}$ ve α -mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı için

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{1}{144}\left|\frac{280\alpha^3+340\alpha^2+138\alpha+18}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\right|$$

olarak hesaplamıştır.

Singh ve Singh (2014) analitik fonksiyonların $S_s^*(\alpha;A,B)$ alt sınıfı için ikinci Hankel determinantının bir üst sınırını $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{(A-B)^2}{4(1+2\alpha)^2}$ olarak bulmuştur.

2.2 Sakaguchi Tip Fonksiyonlar İle İlgili Çalışmalar

Owa ve ark. 2005´ teki çalışmasında Sakaguchi fonksiyonların özelliklerinden, bazı sınıflar arası ilişkilerden bahsedip katsayı eşitsizliğini,

$$S(\alpha) \text{ sınıfı için } |a_{2n}| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j-2\alpha)}{n(n!)}, \quad |a_{2n+1}| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j-2\alpha)}{n!}$$

ve

$$T(\alpha) \text{ için } |a_{2n}| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j-2\alpha)}{2n^2(n!)}, \quad |a_{2n+1}| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j-2\alpha)}{(2n+1)(n!)}$$

olarak belirlemiştir.

Frasin (2010), Sakaguchi tip fonksiyonların $S(\alpha,s,t)$ ve $T(\alpha,s,t)$ sınıfları için katsayı eşitsizliğini α, s ve t nin farklı değerlerine göre, çeşitli hesaplamalar yaparak bulmuştur.

Keerthi ve ark. (2012), Sakaguchi tip fonksiyonlarda katsayı eşitsizliğini ele aldığı çalışmasında $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ ´e ait sonuçları bulmuştur.

Vijayalakshmi ve Sudharsan (2015), Genelleştirilmiş Sakaguchi tip fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının bir üst sınırını elde etmiştir.

2.3 Kuvvetli Konveks ve Kuvvetli Yıldızıl Fonksiyonlar ile İlgili Çalışmalar

Sokol (2009) , kuvvetli yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfını ele alıp, bu sınıftaki katsayı eşitsizliğini $\sum_{K=2}^{\infty}(k^2-2)|a_k|^2 \leq 1$ olarak elde etmiştir.

Raza ve Malik (2013) , analitik fonksiyonların bir sınıfını tanımlayıp, bu sınıf için üçüncü Hankel determinantının bir üst sınırını elde etmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanımlara ve önemli bazı teoremlere ispatları verilmeksizin değinilmiştir.

3.1 Materyal

Bu tez çalışması analitik fonksiyonların bir alt sınıfı olan kuvvetli konveks fonksiyonların bir sınıfı için Hankel determinantının bir üst sınırının bulunması ve genelleştirilmiş Sakaguchi tip fonksiyonların katsayıları ile ilgili genellemelerin elde edilmesi metodu üzerine kurulmuştur.

3.2 Metot

Bernoulli Lemniscate ile ilgili kuvvetli konveks fonksiyonların bir alt sınıfında üçüncü Hankel determinantının bir üst sınırını elde edebilmek için öncelikle bazı yardımcı önermeler yardımıyla verilen sınıfa ait katsayı eşitsizlikleri elde edilip, bulunan bu değerler Hankel determinantında uygulanacaktır.

Genelleştirilmiş Sakaguchi tip fonksiyonlarda ikinci Hankel determinantının üst sınırını elde etmek için, öncelikle verilen sınıfa ait fonksiyonların temel özellikleri incelenecek, tanımlanan parametrelere bazı özel değerler verilip daha önce üzerinde çalışılmış olan sınıflara ait sonuçlarla ilgili genellemelere ulaşılacaktır.

3.3 Temel Tanımlar

$\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere z_0 ***noktasının*** ε ***komşuluğu***, $D(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktası ***komşuluğun merkezi***, ε sayısı ise ***komşuluğun yarıçapı***dır. $D(z_0,\varepsilon)$ kümesine ***açık disk*** de denir. $\bar{D}(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesi ise ***kapalı disk*** belirtir.

Bir $M \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $M' = \{z \in \mathbb{C} : z \notin M\}$ ile tanımlı küme M nin ***tümleyeni*** olarak tanımlanır. Bir $M \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası alalım. Eğer M nin z_0 dan farklı bir z noktası her $D(z_0,\varepsilon)$ komşuluğunda mevcutsa, z_0 M nin bir ***yığılma noktasıdır***. Bir $z \in M$ noktası için $D(z,\varepsilon) \subset M$ olacak şekilde bir ε sayısı mevcutsa z, M kümesinin bir ***iç noktasıdır*** denir. Buradan iç noktanın bir yığılma noktası olduğu anlaşılmaktadır. Eğer her $z \in M$ noktası M nin iç noktası ise M ye ***açık küme*** denir. M nin M' tümleyeni açık küme ise M ***kapalıdır.***

$M \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathbb{C}$ de $M_1 = M \cap N_1 \neq \varnothing, M_2 = M \cap N_2 \neq \varnothing$ ve $M = M_1 \cup M_2$ olacak şekilde ayrık ve açık N_1 ve N_2 kümeleri bulunmuyorsa M ye ***bağlantılı küme***, bağlantılı olmayan kümeye ***bağlantısız küme*** denir. Bağlantılı ve açık olan kümeye de ***bölge*** denir.

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı f fonksiyonunu alalım. f fonksiyonunun z_0 noktasında

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında ***diferansiyellenebilir*** denir. Bu limit $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir. Bu değer aynı zamanda f in z_0 noktasındaki türevidir. Bir D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu, D nin her noktasında diferansiyellenebilirse fonksiyon bu bölgede ***analitiktir*** denir. Eğer f, z_0 ın bir komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebilir ise f, z_0 da analitiktir. Bu durumda f nin z_0 da her mertebeden türevi vardır ve $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde bir Taylor seri açılımına sahiptir.

Teorem 3.3.1 (Maksimum Modül Teoremi) Bir A bölgesinde analitik olan f fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değeri A bölgesinin sınırında alır (Duren 1983).

Yardımcı Önerme 3.3.2 (Schwarz Yardımcı Önermesi) f fonksiyonu $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde

$|f(z)| \leq 1$ ise $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitsizlik sadece $\phi \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\phi} z$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy ve Silverman 2006).

Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde sürekli olan $f : D \to \mathbb{C}$ dönüşümünü alalım. Bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında θ açısı bulunan iki düzgün eğri φ_1 ve φ_2 olsun. Bu eğrilerin t_0 noktasında $f(\varphi_1)$ ve $f(\varphi_2)$ resim eğrilerinin aralarında da yön ve büyüklük bakımından θ açısı varsa, f fonksiyonuna t_0 noktasında ***konform bir dönüşümdür*** denir. f fonksiyonu tüm $z_0 \in D$ için konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur denir.

En önemli konform dönüşümlerden biri $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemi kendisi üzerine konform olarak resmeden Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm, a,b,c,d karmaşık sabitleri için

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0$$

şeklindedir.

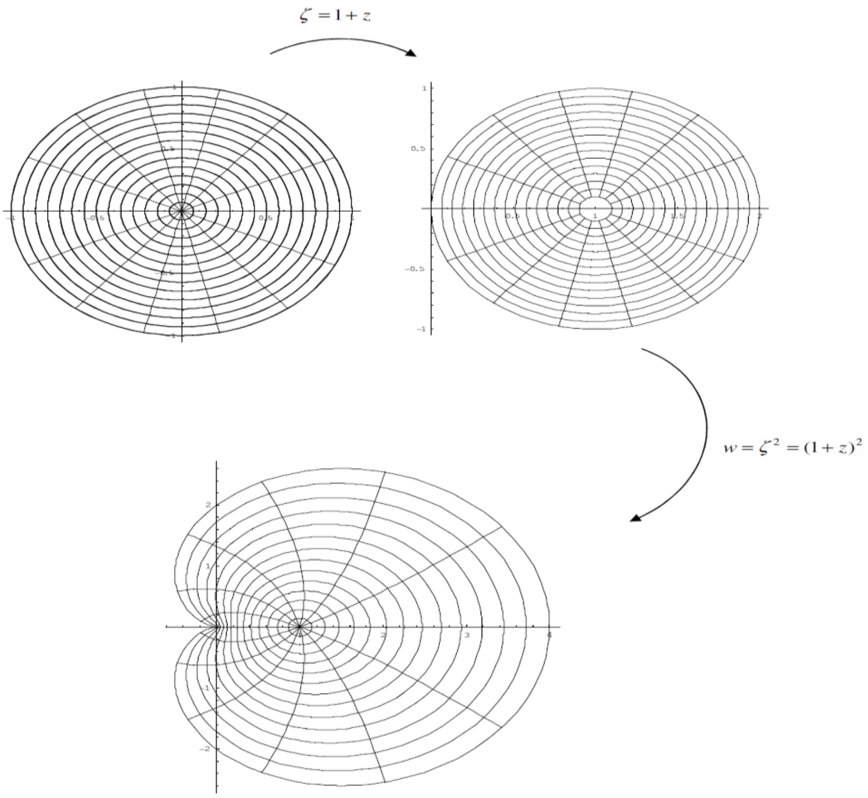
Teorem 3.3.3 f fonksiyonunun analitik olduğu her z_0 noktasında $f'(z_0) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Teorem 3.3.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini U birim diski üzerine birebir ve konform olarak resmeden $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Pakla 1991).

3.4 Yalınkat Fonksiyonlar

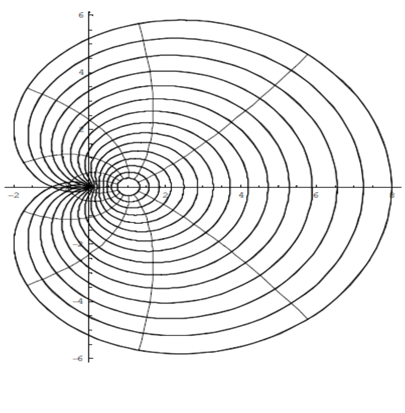
Bir D bölgesinde tanımlı analitik f fonksiyonunu alalım. Her $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ şartı sağlanıyorsa f ’ ye D bölgesinde ***yalınkat fonksiyon*** denir. U birim diskindeki $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonunu yalınkat fonksiyonlara örnek olarak gösterebiliriz. Bu fonksiyonun yalınkatlığını geometrik olarak incelemek basittir.

Gerçekten de $1+z$, birim diskin yerini 1 birim sağa doğru kaydırır ve $1+z$ nin karesini alınca ortaya çıkacak durumu resimle göstermek mümkündür (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonunun resmi

Benzer işlemler $g(z) = (1+z)^3$ fonksiyonuna uygulandığında, bu fonksiyonun U birim diskinde yalınkat olmadığı görülebilir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 $f(z) = (1+z)^3$ fonksiyonunun resmi

Eğer f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında ***yerel yalınkat fonksiyon*** denir.

Aşağıdaki teoremde analitik fonksiyonların yerel yalınkatlığı ile ilgili aşağıdaki gerek ve yeter şart verilmiştir.

Teorem 3.4.1 Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Bir bölgede yerel yalınkat olan analitik bir fonksiyon yalınkat olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \{z : 1 < |z| < 2 \ , \ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel yalınkat olmasına rağmen, yalınkat değildir. Gerçekten de $f(z) = z^2$, D de analitik bir fonksiyondur ve her $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan yerel yalınkattır. Buna karşın

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}i\right) = f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}i\right) = \frac{9}{4}i$$

olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde yalınkat değildir.

U birim diskinde analitik ve yalınkat $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalize koşullarını sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı S ile gösterilir. Her $f \in S$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ , \quad |z| < 1 \ , \quad a_n \in \mathbb{C}$$

olacak şekilde bir Taylor serisine sahiptir. S sınıfının en önemli örneği

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n \qquad (3.1)$$

şeklinde bir Taylor seri açılımına sahip Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon bir takım dönüşümler sonucu elde edilir:

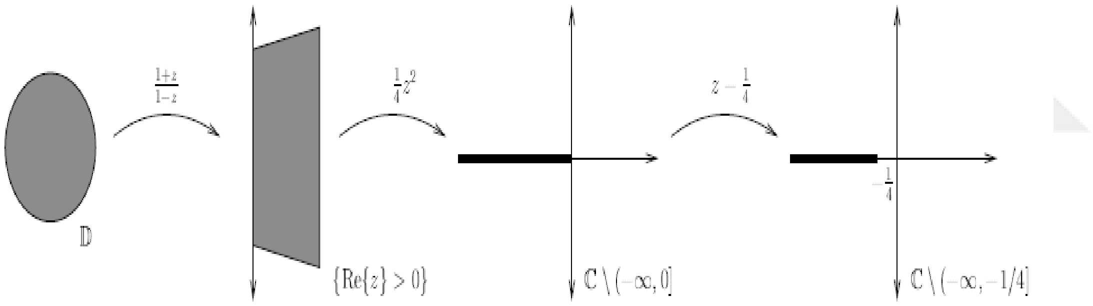
$$u(z)=\frac{1+z}{1-z}\quad,\quad g(z)=u^2(z)\quad,\quad f(z)=\frac{1}{4}\big(g(z)-1\big)$$

dizisini ele alalım. $u(z)$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}\,u>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Böylece $g(z)=u^2(z)$ fonksiyonu bir yarı düzlemi negatif gerçel eksen hariç bütün karmaşık düzlem üzerine resmeder ve $f(z)=\frac{1}{4}\big(g(z)-1\big)$ fonksiyonu da bir normalize işleminin sonucudur. Bu durumda f fonksiyonu

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde yazılabilir ve böylece (3.1) de belirttiğimiz Koebe fonksiyonu elde edilir.

Koebe fonksiyonu U birim diskini $-1/4$ den $-\infty$ a kadar kesilmiş düzlem üzerine konform olarak dönüştürür (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 Koebe fonksiyonunun grafiği

Koebe fonksiyonu

$$K(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4} \tag{3.2}$$

olarak yeniden düzenlendiğinde $w(z)=\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun U bölgesini konform olarak $\mathrm{Re}\{w\}>0$ bölgesine dönüştürmesi yukarıdaki ifadenin doğruluğunu gösterir.

S sınıfı bazı temel transformasyonlar altında korunur. Bu transformasyonların bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

i. $\overline{f(\overline{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a}_n z^n$ **(Eşlenik Alma)**

ii. $e^{i\alpha} f\left(e^{i\alpha} z\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$ **(Dönme)**

iii. $\frac{1}{t} f(tz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} z^n \quad , \quad 0 < t \le 1$ **(Genişleme)**

iv. $\left[f\left(z^k\right)\right]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}\left(2ka_3 - (k-1) z^{2k+1} + \ldots\right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^+$ **(Kök)**

v. D bölgesinde $f(z) = \phi$ denkleminin z ile çözümü yoksa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde ϕ çıkarılmış denir. Eğer $f(z) \in S$ fonksiyonu U birim diskinde ϕ çıkarılmış ise

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/\phi} = z + \left(a_2 + 1/\phi\right) z^2 + \ldots$$

fonksiyonu da S sınıfındadır. **(Atılmış Değer)**

Teorem 3.4.2 (De Branges Teoremi) Her $f \in S$ ve $n = 2,3,\ldots$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği sağlanır. f, Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça eşitsizlik tüm n değerleri için sağlanır (Pommerenke 1975).

S sınıfındaki bir fonksiyonun a_2 (ikinci) katsayısının modülünün sınırını hesaplamak için verilen Bieberbach Teoremi yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Teorem 3.4.3 (Bieberbach Teoremi) S sınıfından alınan her f fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik için, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir (Bieberbach 1916).

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe’ ye ait bir örtme teoremidir. Her $g \in S$ fonksiyonu $g(0) = 0$ şartını sağlayan açık bir dönüşüm olduğundan g fonksiyonunun görüntüsü orjin merkezli en az bir diski kapsar. 1907 de Koebe, δ mutlak sabit olmak üzere, S sınıfındaki fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir

$|\omega| < \delta$ diski kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\delta \le 1/4$ olmasını gerektirir. Daha sonra da Bieberbach, δ sabitinin $1/4$ alınabileceğini ifade eden Koebe Dörtte Bir Teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.4.4 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfının her fonksiyonunun menzili $\{w : |w| < 1/4\}$ diskini kapsar (Duren 1983).

Bieberbach'ın $|a_2| \le 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde ileri uygulamaları barındırır. $f \in S$ için $|f'(z)|$ nin kesin alt ve üst sınırlarını veren Koebe Bükülme Teoremi bunun önemli bir sonucudur. Geometrik olarak Bükülme Teoremi f dönüşümü altında, $|f'(z)|$ nin sonsuz küçük büyütme çarpanı ya da $|f'(z)|^2$ Jakobiyeninin, alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olmasından ileri gelmiştir.

Teorem 3.4.5 (Bükülme Teoremi) Her $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad , \quad |z| = r < 1$$

dir (Goodman 1983).

Teorem 3.4.6 (Büyüme Teoremi) Her $f \in S$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \quad , \quad |z| = r < 1$$

dir (Goodman 1983).

Bazı durumlarda Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirilmişi olan aşağıdaki eşitsizlik daha kullanışlı olmaktadır.

Teorem 3.4.7 Her bir $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \le \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \frac{1+r}{1-r} \quad , \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Duren 1983).

3.5 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $z_0 \in D$ alalım. z_0 noktasını, diğer tüm $z \in D$ noktalarıyla birleştiren doğru parçasının tamamı D kümesinin içinde kalıyorsa, D ye $z_0 \in D$ ***noktasına göre yıldızıl küme*** denir. Orjine göre yıldızıl olan kümeye de kısaca ***yıldızıl küme*** denir. Bir f fonksiyonu yalınkat ve $F = f(U)$ görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl ise yani

$$w \in F \ , \ 0 \le t \le 1 \ \Rightarrow \ tw \in F$$

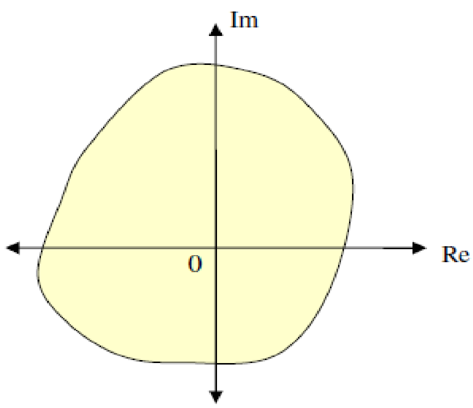
önermesi sağlanıyorsa f e ***yıldızıl fonksiyon*** denir. Bir D kümesi, noktalarının her birine göre yıldızıl ise D ***konveks kümedir***. Geometrik olarak, D kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı D içinde kalıyorsa bu küme konveks küme olarak isimlendirilir. Konveks bir kümeyi konveks bir kümeye dönüştüren fonksiyon konveks fonksiyondur. Başka bir deyişle, bir f fonksiyonu yalınkat ve $f(U)$ görüntü bölgesi konveks ise f e ***konveks fonksiyon*** denir.

S kümesinin yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan alt sınıfları sırasıyla S^* ve C ile gösterilir. Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için

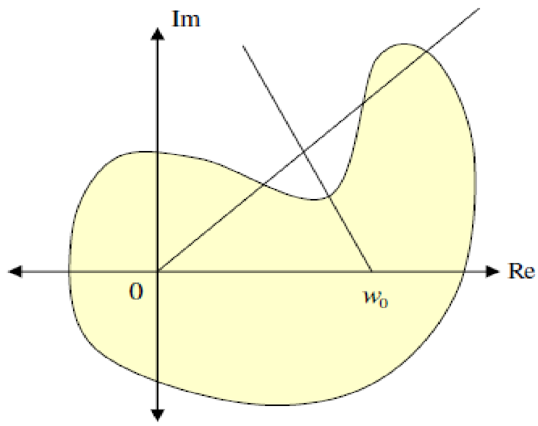
$$C \subset S^* \subset S$$

şeklindeki kapsama bağıntısı yazılabilir.

Konveks ve yıldızıl bölgeler sırasıyla Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 te gösterilmiştir. Şekil 3.5 teki bölge w_0 noktasına göre yıldızıldır fakat orjine göre yıldızıl değildir.



Şekil 3.4 Konveks Bölge



Şekil 3.5 w_0 noktasına göre yıldızıl bölge

$g(z)=\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ ve $h(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonlarını konveks fonksiyonlara örnek olarak verebiliriz. Ayrıca Koebe fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyondur. Gerçekten $k(U)$ bölgesi her $w_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} w_0 > -1/4$ noktasına göre yıldızıldır. $p(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu ise yıldızıl olmasına rağmen konveks bir fonksiyon değildir.

Herhangi bir yarı düzlem veya dairesel bir disk konveks kümedir. Konveks kümelerin herhangi sayıda arakesitleri de yine bir konveks kümedir. Konveks bir küme her bir iç noktasına göre yıldızıldır. Tersine bir küme, her bir iç noktasına göre yıldızıl ise bu küme konvekstir.

3.6 Birim Diskte Yalınkat Olan Fonksiyonların Bazı Önemli Alt Sınıfları

U birim diskinde analitik ve yalınkat f fonksiyonunu alalım. Eğer f fonksiyonu, $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$ eğrisini basit kapalı bir konveks eğri üzerine dönüştürüyorsa bu eğri konveks bir bölgeyi sınırlar. Tersine, eğer f, $U_R\,(R<1)$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürüyorsa bölgenin sınırı basit kapalı konveks bir eğri olur. Aynı durum yıldızıl eğriler için de geçerlidir.

Teorem 3.6.1 f, $\overline{U_R}=\{z:|z|\le R\}$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. Bu durumda f in $\overline{U_R}$ kapalı diskini konveks bir bölgeye dönüştürmesi için $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$ üzerindeki z noktaları için

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geq 0 \tag{3.3}$$

olması gerek ve yeterdir (Study 1913).

Ayrıca $f(0)=0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda f fonksiyonunun U_R bölgesini $w=0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$ üzerindeki z noktaları için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\geq 0 \tag{3.4}$$

olmasıdır (Nevanlınna 1920-1921).

Teorem 3.6.1 deki f fonksiyonunun yalınkat olması önemli bir şarttır. Aksi halde yanlışlık olur. Örneğin $f(z)=z^2$ alırsak, (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinde $2\geq 0$ olup eşitsizlik sağlanır fakat bu fonksiyon altında U diskinin iki katlı resmi konveks veya yıldızıl bir bölge olmamaktadır.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki temel bir bağıntı ilk kez J.W.Alexander (1915) tarafından ifade edilmiştir.

Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$F(z)=f'(z)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=z\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}$$

olur. Böylece $F(z)\neq 0$ iken

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir. Eğer $f(z)$ nin orijinde k. mertebeden bir sıfırı varsa, son eşitliğin her iki tarafı da orijinde analitiktir. Son eşitlik ile (3.3) ve (3.4) te verdiğimiz eşitsizlikleri karşılaştırdığımızda

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right]=\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.6.2 (Alexander Teoremi) U_r bölgesinde $f'(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun U_r bölgesinde konveks olması için $F(z)=zf'(z)$ fonksiyonunun bu bölgede yıldızıl olması gerek ve yeterdir (Alexander 1915).

Örnek olarak U birim diskini $\operatorname{Re} w>-1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştüren

$$f(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

fonksiyonunu verebiliriz. Bu fonksiyon birim diskte konveks olduğundan

$$F(z)=zf'(z)=z\frac{(1-z)-z(-1)}{(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

ifadesi birim diskte yıldızıl bir fonksiyondur. Ayrıca son eşitlik Koebe fonksiyonudur.

U birim diskini konveks bir bölgeye dönüştüren birim diskte yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonların kümesini C ile, U birim diskini orijine göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştüren birim diskte yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonların kümesini de S^* ile ifade etmiştik. Şimdi bu sembollerle Teorem 3.6.2 yi yeniden ifade edelim:

$i)$ $f(z)\in C \;\Rightarrow\; zf'(z)\in S^*$

$ii)$ $F(z)\in S^* \Rightarrow \int_0^z \frac{F(\mu)}{\mu}d\mu\in C.$

Bir $f \in S$ fonksiyonunun $|a_n|$ katsayıları için kesin sınırlar hala bilinememesine rağmen, bu problem S^* ve C altsınıfları için çözülmüştür. S^* sınıfına ait fonksiyonlar için Nevanlinna (1921) tarafından aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 3.6.3 Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu S^* sınıfında ise, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her n için kesindir ve eşitlik sadece bir $n \ge 2$ için sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olur.

C sınıfı için Loewner (1917) aşağıdaki teoremi elde etmiştir:

Teorem 3.6.4 Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu C sınıfında ise, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|a_n| \le 1$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her bir n için kesindir ve eşitlik sadece bir $n \ge 2$ için sağlanıyorsa, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olur.

S^* sınıfındaki fonksiyonlar ve bunların türevleri için alt ve üst sınırlar aşağıdaki teoremde belirtildiği gibidir.

Teorem 3.6.5 $f \in S^*$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ve her bir $k \ge 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \frac{k!(k+r)}{(1-r)^{k+2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir. Eşitlik durumunda $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerek ve yeterdir (Goodman 1983).

Konveks fonksiyonlar için farklı sınırların olması gayet doğaldır.

Teorem 3.6.6 $f \in C$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2}$$

ve her bir $k \ge 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \frac{k!}{(1-r)^{k+1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin hepsi kesindir. Eşitlik için $f(z)$ fonksiyonunun, $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olması gerek ve yeterdir (Goodman 1983).

Teorem 3.6.6 daki sınırlar C sınıfındaki fonksiyonlar ve bunların türevleri için Gronwall (1916) ve Loewner (1917) tarafından birbirinden bağımsız bir şekilde elde edilmiştir.

Robertson (1936) α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu, her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \ge \alpha$$

şartını sağlıyorsa, bu fonksiyona α ***mertebeli yıldızıl fonksiyon*** denir. Bu fonksiyonları sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir. Aynı fonksiyon

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \ge \alpha$$

şartını sağlıyorsa, bu fonksiyona α ***mertebeli konveks fonksiyon*** denir. Bu fonksiyonların kümesi de $C(\alpha)$ ile gösterilir.

$$\left.\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|_{z=0}=1+\left.\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0}=1$$

olduğundan $\alpha\le 1$ şartı gereklidir. Aksi durumda $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri boş olur. Ayrıca $\alpha=1$ ise $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri bir tek $f(z)=z$ fonksiyonuna sahip olur. Biz genellikle $0\le\alpha\le 1$ doğal şartını koyacağız. Burada α değeri arttıkça $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir.

3.7 Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı

$$f(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots+p_nz^n+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \tag{3.5}$$

olmak üzere, U birim diskinde analitik olan ve birim diskteki z noktaları için $\operatorname{Re}\{f(z)\}>0$ şartını sağlayan tüm fonksiyonların sınıfı $\wp$ olsun. $\wp$ sınıfındaki fonksiyonlara U birim diskinde ***pozitif gerçel kısma sahip fonksiyon*** denir. Burada f fonksiyonlarının yalınkat olma gerekliliği yoktur. Örneğin, $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $n\ge 0$ tamsayıları için $\wp$ sınıfındandır fakat $n\ge 2$ için yalınkat değildir.

Koebe fonksiyonunun S sınıfının en önemli örneği olması gibi

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+\cdots=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

Möbius fonksiyonu da $\wp$ sınıfının en önemli örneğidir. Bu fonksiyon $\wp$ sınıfındandır, birim diskte analitik ve yalınkattır. Ayrıca birim diski $\operatorname{Re}w>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Bununla birlikte $L_0(z)$ fonksiyonunun karakteri ile Koebe fonksiyonu arasında fark vardır. Koebe fonksiyonu, bir çok ekstremal problemde S sınıfı için tek çözüm olmasına rağmen, $L_0(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfındaki $|p_n|$ değerini maksimize eder ayrıca $\wp$ sınıfının $n\ge 2$ ve $p_n=2$ olacak şekilde sonsuz sayıda başka fonksiyonları vardır ve bunların hiçbiri, diğerlerinin dönmesiyle elde edilemez.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. Bir başka ifade ile, U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

ve

$$f \in C \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

önermeleri doğrudur.

$\wp$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için kullanışlı olan aşağıdaki teorem Carathéodory (1907) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.7.1 (Carathéodory Teoremi) $N \geq 1$ belirli bir tamsayı olsun. Eğer (3.5) ile verilen f fonksiyonu $\wp$ sınıfında ise $|p_N| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik durumu için $\zeta = e^{2\pi i/N}$ ve $k = 1, 2, \cdots, N$ için $\varphi_k \geq 0$ olmak üzere

$$F(z) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \frac{1+\zeta^k z}{1-\zeta^k z} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n$$

ve $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k = 1$ ise $F(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfındandır ve $P_N = 2$ olur.

Teorem 3.7.2 $f \in \wp$ ve $z = e^{i\theta}$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

ve

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{(1-r)^2}$$

kesin eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin gerçeklenmesi için $f(z) = L_0\left(e^{i\alpha} z\right)$ fonksiyonunu almak gerek ve yeterdir (Goodman 1983).

3.8 Subordinasyon İlkesi

Son yıllarda karmaşık analizle ilgilenen birçok matematikçi, bu alanda önemli rol oynayan subordinasyon konusunda çalışmalar yapmıştır. Subordinasyon terimi ilk olarak E. Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmış olmasına rağmen temel bağıntılar Littlewood (1925) ile Rogosinski (1943) tarafından bulunmuştur.

U birim diskinde analitik olan f ve g fonksiyonlarını alalım. U da

$$f(z) = g(\varphi(z)) \tag{3.6}$$

olacak biçimde $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlayan analitik (yalınkat olmasına gerek duyulmayan) bir φ fonksiyonu mevcut ise f ***fonksiyonu*** g ***fonksiyonuna subordinedir*** denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir. Aynı zamanda g fonksiyonu f fonksiyonuna ***süperordinedir*** de denir.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyon, $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinedir. Başka bir deyişle

$$p(z) \in \wp \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

dir.

Subordinasyon ilkesi için önemli olan Schwarz yardımcı önermesinden ve bu ilkeyi elde etmede büyük rol oynayan ve J. E. Littlewood (1925) ´a ait bazı temel özelliklerden bahsedelim.

Teorem 3.8.1 (Schwarz Yardımcı Önermesi) A_0 , $|f(z)| < 1$ olacak şekilde U birim diskinde analitik olan $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonlarının sınıfı olsun. $a(z) \in A_0$ alalım. Böylece birim diskteki z değerleri için $a(z)$ analitik, $a(0) = 0$, $|a(z)| \le 1$ olur. Bu durumda her bir $0 < r < 1$ için $|a(re^{i\theta})| \le r$ eşitsizliği sağlanır. Eğer bu eşitsizlikte bir $z_0 = re^{i\theta}$ noktası için eşitlik sağlanıyorsa, bu durumda en az bir β gerçel sayısı için

$a(z)=e^{i\beta}z$ olur. Sonuç olarak $|a_1|=|a'(0)|\leq 1$ eşitsizliği ve $|a_1|=1$ olması için gerekli ve yeterli şartın $a(z)=A(z)=e^{i\beta}z$ olduğu elde edilir (Schwarz 1890).

$f \prec g$ kabul edelim. Bu durumda $\varphi(U)\subset U$ ve $\varphi(0)=0$ olduğundan, (3.6) özelliği ile $f(U)\subset g(U)$ ve $f(0)=g(0)$ bulunur. Schwarz yardımcı önermesinden; $|\varphi(z)|\leq|z|$ ve $0<r<1$ olmak üzere

$$\{f(z):|z|<r\}\subset\{g(z):|z|<r\} \tag{3.7}$$

olduğundan $0\leq r<1$ için

$$\max_{|z|\leq r}\{|f(z)|\}\leq\max_{|z|\leq r}\{|g(z)|\}$$

yazılır. Ayrıca

$$\left(1-|z|^2\right)|\varphi'(z)|\leq 1-|\varphi(z)|^2$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|&=\left(1-|z|^2\right)|\varphi'||g'(\varphi)|\\ &\leq\left(1-|\varphi|^2\right)|g'(\varphi)|\end{aligned}$$

elde edilir. $|\varphi(z)|\leq|z|$ eşitsizliği tekrar kullanıldığında, $0\leq r<1$ durumunda

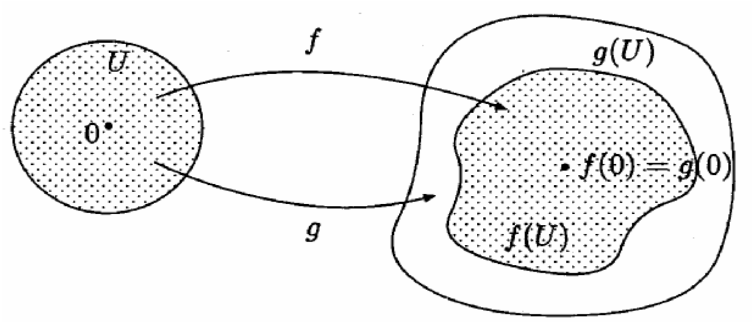
$$\max_{|z|\leq r}\left\{\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|\right\}\leq\max_{|z|\leq r}\left\{\left(1-|z|^2\right)|g'(z)|\right\}$$

bulunur. Özellikle $z=0$ alınırsa $|f'(0)|\leq|g'(0)|$ olur.

Subordine olunan bir fonksiyonun yalınkat olması en önemli durumdur. g , U birim diskinde yalınkat olmak üzere

$$f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0) \text{ ve } f(U)\subset g(U) \tag{3.8}$$

önermesi doğrudur (Duren 1983).



Şekil 3.6 Subordinasyon ilkesi

(3.7) ile (3.8) birlikte kullanılarak aşağıdaki subordinasyon ilkesi elde edilir.

Teorem 3.8.2 (Subordinasyon ilkesi) g fonksiyonu U birim diskinde yalınkat ve $U_r = \{z : |z| < r\ ,\ 0 < r < 1\}$ olmak üzere $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$,

$$f(U_r) \subset g(U_r)$$

kapsamasını verir (Duren 1983).

3.9 Hankel Determinantı ve Fekete-Szegö Fonksiyoneli

$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlı

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.9}$$

biçimindeki analitik fonksiyonların sınıfı A ve yalınkat fonksiyonlardan oluşan A nın bir alt sınıfı S olsun.

1976 da Noonan ve Thomas $s \geq 1$ ve $k \geq 1$ için $s-inci$ Hankel determinantını

$$H_s(k) = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+s-1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_{k+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k+s-1} & a_{k+s} & \cdots & a_{k+2s-2} \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

şeklinde ifade etmiştir. Bu determinant bir çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Örneğin Noor (1983) te $n \to \infty$ iken (3.9) da verilen bir $f(z)$ fonksiyonu için $H_s(k)$ nın bir sınırını belirlemiştir. Layman (2001) de bir tamsayı dizisinin Hankel Dönüşümü ve bazı özelliklerini ele almıştır.

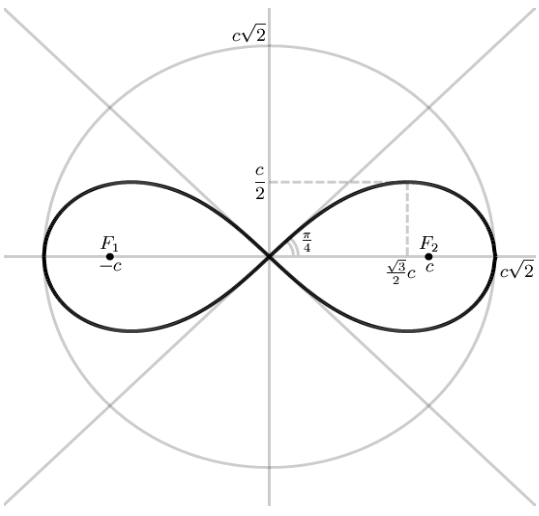
$H_2(1) = \left|a_3 - a_2^2\right|$ determinantı Fekete-Szegö fonksiyoneli olarak bilinir. Fekete-Szegö (1933) bu değeri reel μ için $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ ye genelleştirmiştir.

3.10 Bernoulli Lemniscate

Bernoulli Kelebek Eğrisi olarak da isimlendirilen Bernoulli Lemniscate, geometride, odaklar olarak bilinen, iki F_1 ve F_2 noktalarından birbirine $2c$ mesafe uzaklıktaki P noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanan bir düzlem eğrisidir $\left(PF_1 \cdot PF_2 = c^2\right)$. Eğri 8 rakamına ve ∞ sembolüne benzer bir şekle sahiptir (Şekil 3.7). Adını lemniskus denilen beyaz sinir lifinden alan bu eğri, Cassini ovalinin özel bir halidir ve 4. dereceden rasyonel bir cebirsel eğridir.

Bernoulli Lemniscate ilk olarak 1694 yılında Jakob Bernoulli tarafından iki sabit odak noktasından bütün mesafeleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri olan bir elipsin modifikasyonu olarak tanımlanmıştır. Bir cassini ovali, aksine, bu mesafelerin çarpımı sabit olan noktaların geometrik yeridir. Bu durumda eğrinin odakların arasındaki orta noktadan geçtiği yerde, oval bir Bernoulli Lemniscate´ e dönüşür.

Bu eğri hiperbolün merkezinde konumlanan inversiyon daire ile bir hiperbolün ters dönüşümü olarak elde edilebilir. Ayrıca, bağlantının üç bar bacakları ve bir çarpraz kare oluşturmak için seçilen kendi uç noktaları arasındaki mesafe ile Watt bağlantısı formunda mekanik bir bağlantı tarafından da çizilebilir.



Şekil 3.7 Bernoulli Lemniscate

3.11 Kuvvetli Yıldızıl ve Kuvvetli Konveks Fonksiyonlar

$Q(f,z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ olmak üzere $SL^{*}=\left\{f\in A:\left|Q^{2}(f,z)-1\right|<1\right\};z\in U$ kümesi, analitik fonksiyonların bir sınıfı olsun. Bu tanımla verilen $f\in SL^{*}$ fonksiyonuna ***kuvvetli yıldızıl fonksiyon*** denir. Bir $f\in SL^{*}$ için $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, $\left|Q^{2}(f,z)-1\right|<1$ bağıntısını sağlayan Bernoulli Lemniscate′ nin sağ yarısı ile sınırlanmış bölgede uzanır. Eğer $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\prec\sqrt{1+z}$, $z\in U$ şartı sağlanıyorsa $f\in SL^{*}$ dır. Bu fonksiyonların sınıfı Sokol ve Stankievicz tarafından 1996 da verilmiştir.

$Q(f,z)=1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ olmak üzere, $SL^{c}=\left\{f\in A:\left|Q^{2}(f,z)-1\right|<1\right\}$, $z\in U$ ile tanımlı $f\in SL^{c}$ fonksiyonuna ***kuvvetli konveks fonksiyon*** denir. Burada $\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec q_{0}(z)=\sqrt{1+z}$, $q_{0}(0)=1$ ise $f\in SL^{c}$ dir.

3.12 Genelleştirilmiş Sakaguchi Tip Fonksiyonlar

Yakın zamanda Owa (2005, 2007), Sakaguchi tip $S^{*}(\alpha,t)$ sınıfını çalıştı.

f ve g , (3.9) ile tanımlı U birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun eğer $\exists\alpha\in[0,1)$ ve $\forall z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-t)zf'(z)}{f(z)-f(tz)}\right\}>\alpha \ , \ |t|\le 1 \ , \ t\neq 1$$

ise $f\in A$ fonksiyonu $S^{*}(\alpha,t)$ ***sınıfındandır*** denir. $\alpha=0$ ve $t=-1$ için Sakaguchi (1959) nin çalıştığı $S^{*}(0,-1)$ sınıfını elde ederiz. Bir $f\in S^{*}(\alpha,-1)$ fonksiyonu, α mertebeli Sakaguchi fonksiyonu olarak isimlendirilir. Frasin (2010), $S(\alpha,s,t)$ ve $T(\alpha,s,t)$ gibi genelleştirilmiş Sakaguchi tip sınıflarını çalışmıştır. Bir $f\in A$ fonksiyonu $\forall z\in U$ ve bazı $0\le\alpha<1$ ile $s,t\in\mathbb{C}$, $s\neq t$, $|t|\le 1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(s-t)zf'(z)}{f(sz)-f(tz)}\right\}>\alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f\in A$ fonksiyonu $S(\alpha,s,t)$ sınıfındandır denir. $T(\alpha,s,t)$ sınıfı tüm f fonksiyonlarını içeren A nın alt sınıfı olsun öyle ki bu sınıftaki fonksiyonlar için $zf'(z)\in S(\alpha,s,t)$ dir.

Keerthi (2012), $M(\alpha,\lambda,t)$ sınıfını tanımlamıştır. $\forall z\in U$ ve $|t|\le 1,\ t\ne 1,\ 0\le\lambda\le 1$ ve $0\le\alpha\le 1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left[\frac{(1-t)zf'(z)}{f(z)-f(tz)}\right]+\lambda\left[\frac{(1-t)\left(z^2f''(z)+zf'(z)\right)}{zf'(z)-tzf'(tz)}\right]\right\}>\alpha$$

ise $f\in A$ fonksiyonu $M(\alpha,\lambda,t)$ sınıfındandır denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulara yer verilecektir. İlk kısımda kuvvetli konveks fonksiyonların SL^c alt sınıfında iki problemi ele alıp SL^c sınıfında bazı katsayı tahminleri elde edeceğiz daha sonra Toeplitz determinantını kullanarak Bernoulli Lemniscate ile ilgili analitik fonksiyonların bir alt sınıfı için $H_3(1)$ Hankel determinantının üst sınırını inceleyeceğiz.

İkinci kısımda ise yalınkat fonksiyonların genelleştirilmiş bir alt sınıfı için ikinci Hankel determinantının bir üst sınırını tahmin edeceğiz.

4.1 Bernoulli Lemniscate ile ilgili Kuvvetli Konveks Fonksiyonların Bir Sınıfı İçin Bazı Özel Tahminler

4.1.1 Temel Tanımlar

Bu kısımda kuvvetli konveks fonksiyonların SL^c sınıfını inceleyeceğiz:

$Q(f,z)=1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ olmak üzere,

$$SL^c=\left\{f\in A:\left|\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^2-1\right|<1\right\},\ z\in U \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonların sınıfı olsun. Burada $f\in SL^c$ dir ancak ve ancak

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec q_0(z)=\sqrt{1+z},q_0(0)=1 \tag{4.2}$$

dir

$H_s(q)$ tanımında $s=3$ ve $q=1$ için $H_3(1)$

$$H_3(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\\ a_3 & a_4 & a_5\end{vmatrix}$$

ile verilir. $f\in A$ ve $a_1=1$ için

$$H_3(1) = a_3\left(a_2a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right)$$

ve

$$\left|H_3(1)\right| \le |a_3|\left|a_2a_4 - a_3^2\right| + |a_4|\left|a_4 - a_2a_3\right| + |a_5|\left|a_3 - a_2^2\right|$$

elde ederiz.

Üçüncü Hankel determinantı için sonuçlarımızda kullanılacak aşağıdaki yardımcı önermelere ihtiyacımız vardır.

Yardımcı Önerme 4.1.1.1 (3.5) ile verilen $p \in \wp$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$\left|p_2 - vp_1^2\right| \le \begin{cases} -4v+2 & ; v<0 \\ 2 & ; 0 \le v < 1 \\ 4v-2 & ; v>1 \end{cases}$$

dir. $v<0$ veya $v>1$ ise, eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ veya onun dönmelerinden biri olması durumunda sağlanır. $0<v<1$ ise, eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ veya onun dönmelerinden biri olması durumunda sağlanır. $v=0$ ise $p(z) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{2}\right)\dfrac{1+z}{1-z} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\eta}{2}\right)\dfrac{1-z}{1+z}$ $(0 \le \eta \le 1)$ veya onun dönmelerinden biri olması durumunda sağlanır. $v=1$ ise ancak ve ancak $v=0$ olması durumunda sağlanan eşitlikteki fonksiyonlardan birine karşılık gelen P için eşitlik sağlanır. $0<v<1$ durumunda, yaklaşık üst sınır olmasına rağmen kesindir. Bu ifade

$$\left|p_2 - vp_1^2\right| + v|p_1|^2 \le 2 \ ; \ 0 < v \le \frac{1}{2}$$

ve

$$\left|p_2 - vp_1^2\right| + (1-v)|p_1|^2 \le 2 \ ; \ \frac{1}{2} < v \le 1$$

şeklinde genelleştirilebilir (Ma 1994).

Yardımcı Önerme 4.1.1.2 $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ U da pozitif reel kısımlı bir fonksiyon ise v karmaşık sayısı için

$$\left|p_2-vp_1^2\right|\leq 2\max\left(1,\left|2v-1\right|\right)$$

dir. Bu sonuç $p(z)=\dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ ve $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları için kesindir (Ma 1994).

Yardımcı Önerme 4.1.1.3 (3.5) ile gösterilen $p\in\wp$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda bazı x , $|x|\leq 1$ için

$$2p_2=p_1^2+x(4-p_1^2)$$

ve bazı z , $|z|\leq 1$ için

$$4p_3=p_1^3+2(4-p_1^2)p_1x-(4-p_1^2)p_1x^2+2(4-p_1^2)(1-|x|^2)z$$

dir (Grenander and Szegö 1958).

Yardımcı Önerme 4.1.1.4 $p\in\wp$ ise $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|p_k|\leq 2$ dir (Pommerenke 1975).

4.1.2 SL^c Sınıfında Katsayı Tahminleri

Bu kesimde öncelikle SL^c sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini elde edeceğiz, daha sonra da bu eşitsizlik yardımıyla Hankel determinantı için bir üst sınır belirleyeceğiz.

Teorem 4.1.2.1 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ fonksiyonu SL^c sınıfına ait ise

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2\left(k^2-2\right)\left|a_k\right|^2\leq 1 \tag{4.3}$$

dir.

İspat: $f\in SL^c$ ise $Q(f,z)\prec q_0(z)=\sqrt{1+z}$ dir. Böylece ω , $|z|<1$ için $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ i sağlamak üzere $Q(f,z)=\sqrt{1+\omega(z)}$ olur. Ayrıca

$$\left(zf'(z)\right)^2=\left(zf'(z)+z^2f''(z)\right)^2-\left(zf'(z)\right)^2\omega(z)$$

dir. Bunu kullanarak $0<r<1$ için

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k} &= \int_0^{2\pi}\left|re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta\\ &\geq \int_0^{2\pi}\left|\omega\left(re^{i\theta}\right)\right|\left|r^2e^{2i\theta}\left(f'\left(re^{i\theta}\right)\right)^2\right|d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left|re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)+r^2e^{2i\theta}\left(f''\left(re^{i\theta}\right)\right)^2-r^2e^{2i\theta}\left(f'\left(re^{i\theta}\right)\right)^2\right|d\theta\\ &\geq \int_0^{2\pi}\left\{\left|re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)+r^2e^{2i\theta}\left(f''\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2-\left|re^{i\theta}\left(f'\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2\right\}d\theta\\ &= 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^4|a_k|^2r^{2k}-2\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k}\end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitsizliklerin bu sıralanışındaki uç değerler

$$2\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k}\geq\sum_{k=1}^{\infty}k^4|a_k|^2r^{2k} \quad , \quad 0<r<1$$

ifadesini verir. Sonunda $r\to1^-$ alınırsa (4.3) deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.2.1 sayesinde aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.1.2.2 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ fonksiyonu SL^c sınıfına ait ise $k\geq2$ için

$$|a_k|\leq\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{\left(k^2-2\right)}}$$

dir.

Teorem 4.1.2.3 $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ fonksiyonu SL^c sınıfına ait ise

$$|a_2|\leq\frac{1}{6} \quad , \quad |a_3|\leq\frac{1}{12} \quad , \quad |a_4|\leq\frac{1}{24} \tag{4.4}$$

dir. Bu tahminler kesindir.

İspat: $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ fonksiyonu SL^c sınıfına ait ise ω , $|z|<1$ için $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ i sağlamak üzere

$$\left[zf'(z)+z^2f''(z)\right]^2=\left(zf'(z)\right)^2\left[\omega(z)+1\right]$$

dir.

$$\left[zf'(z)+z^2f''(z)\right]^2=\sum_{k=2}^{\infty}A_kz^k\ ,\ \left(zf'(z)\right)^2=\sum_{k=2}^{\infty}B_kz^k\ ,\ \omega(z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kz^k \tag{4.5}$$

ile gösterelim. Buradan

$$A_k=\sum_{l=1}^{k-1}l^2\left(k-l\right)^2a_la_{k-l}\ ,\ B_k=\sum_{l=1}^{k-1}l\left(k-l\right)a_la_{k-l} \tag{4.6}$$

ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(A_k-B_k\right)z^k=\left[\sum_{k=1}^{\infty}C_kz^k\right]\left[\sum_{k=2}^{\infty}B_kz^k\right] \tag{4.7}$$

elde ederiz. Böylece

$$A_2=a_1^2=1\ ,\ A_3=8a_1a_2=8a_2\ ,\ A_4=18a_3+16a_2^2\ ,\ A_5=32a_4+72a_2a_3 \tag{4.8}$$

ve

$$B_2=a_1^2=1\ ,\ B_3=4a_2\ ,\ B_3=4a_2\ ,\ B_5=8a_4+12a_2a_3 \tag{4.9}$$

dir. (4.7) in karşılıklı katsayı eşitliğinden

$$\begin{aligned}&i)\ \ A_3-B_3=B_2C_1\\&ii)\ \ A_4-B_4=C_1B_3+B_2C_2\\&iii)\ A_5-B_5=B_3C_2+B_2C_3+C_1B_4\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.8) ve (4.9) dan

$$\begin{aligned}&i)\ \ a_2=\frac{1}{4}C_1\\&ii)\ \ a_3=\frac{1}{48}C_1^2+\frac{1}{12}C_2\\&iii)\ a_4=\frac{1}{384}C_1^3+\frac{1}{96}C_1C_2+\frac{1}{24}C_3\end{aligned}$$

elde ederiz.

$|C_k| \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leq 1$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla (4.4) i elde ederiz.

Kesinliğin ispatı için $q(z) = \sqrt{1+z^n}$ alalım.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \ , \quad \left[zf'(z) + z^2 f''(z)\right]^2 = \left(zf'(z)\right)^2 \left[z^n + 1\right]$$

ve (4.5) eşitliklerle

$$\sum_{k=2} (A_k - B_k) z^k = \sum_{k=2} B_k z^{k+n}$$

elde ederiz.

$k \leq n+1$ için $A_k = B_k$ olduğundan

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = \cdots = a_n = 0$$

verir. $A_{n+2} - B_{n+2} = B_2$ iken

$$\sum_{l=1}^{n+1} l(n+2-l)\left[l(n+2-l)-1\right] a_l a_{n+2-l} = 1$$

verir. Böylece

$$2n(n+1) a_1 a_{n+1} = 1$$

dir. Buradan SL^c sınıfında

$$f(z) = z + \frac{1}{2n(n+1)} z^{n+1} + \cdots$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır.

Tahmin: $f \in SL^c$ ve $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Bu durumda

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$

dir.

4.1.3 SL^c İçin Üçüncü Hankel Determinantının Üst Sınırı

Bu kısımda $H_3(1)$ üçüncü Hankel Determinantı için bir üst sınır elde edeceğiz.

Aşağıdaki ilk iki teorem Fekete-Szegö fonksiyoneli ile ilgilidir.

Teorem 4.1.3.1 $f \in SL^c$ ve $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \frac{1}{48}(1-3\mu); & \mu < -1 \\ \frac{1}{12} & ; \quad -1 \le \mu \le \frac{5}{3} \\ \frac{1}{48}(3\mu - 1); & \mu > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

dir.

İspat: $f \in SL^c$ ise (4.2) den $\phi(z) = \sqrt{1+z}$ için

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \phi(z) \tag{4.10}$$

dir.

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots .$$

fonksiyonu tanımlansın. $p \in \wp$ olduğu açıktır. Buradan $w(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}$ dir. (4.10) dan

$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \phi(w(z))$ ile $\phi(w(z)) = \left(\frac{2p(z)}{p(z)+1}\right)^{1/2}$ elde ederiz. Böylece

$$\left(\frac{2p(z)}{p(z)+1}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{4}p_1 z + \left[\frac{1}{4}p_2 - \frac{5}{32}p_1^2\right]z^2 + \left[\frac{1}{4}p_3 - \frac{5}{16}p_1 p_2 + \frac{13}{128}p_1^3\right]z^3 + \ldots$$

olur. Benzer şekilde

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + 2a_2 z + \left[6a_3 - 4a_2^2\right]z^2 + \left[12a_4 - 18a_2 a_3 + 8a_2^3\right]z^3 + \ldots$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{8} p_1, \\
a_3 &= \frac{1}{24} p_2 - \frac{1}{64} p_1^2 \\
a_4 &= \frac{1}{48} p_3 - \frac{7}{384} p_1 p_2 + \frac{13}{3072} p_1^3
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

dir. Bu da

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| = \frac{1}{24}\left|p_2 - \frac{3}{8}(\mu+1) p_1^2\right|$$

olmasını gerektirir. Buradan Yardımcı Önerme (4.1.1.1) i kullanarak istenilen sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.1.3.2 $f \in SL^c$ ve $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Bu durumda $\left|a_3 - a_2^2\right| \le \frac{1}{12}$ dir.

Teorem 4.1.3.3 $f \in SL^c$ ve $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Bu durumda $\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \frac{1}{144}$ dir.

İspat: (4.11) den

$$
\begin{aligned}
a_2 a_4 - a_3^2 &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} p_1 p_3 - \frac{7}{384} p_1^2 p_2 + \frac{13}{3072} p_1^4\right) - \left(\frac{p_2}{24} - \frac{p_1^2}{64}\right)^2 \\
&= \frac{1}{384} p_1 p_3 - \frac{1}{576} p_2^2 - \frac{1}{1024} p_1^2 p_2 + \frac{7}{24576} p_1^4 \\
&= \frac{1}{73728}\left(192 p_1 p_3 - 128 p_2^2 - 72 p_1^2 p_2 + 21 p_1^4\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Yardımcı Önerme 4.1.1.3 deki p_2 ve p_3 değerleri yerine yazılarak, $p > 0$ ve $p_1 = p \in [0,2]$ göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| = \frac{1}{73728}\Big| & 48 p_1 \left\{ p_1^3 + 2\left(4 - p_1^2\right) p_1 x - \left(4 - p_1^2\right) p_1 x^2 + 2\left(4 - p_1^2\right)\left(1 - |x|^2\right) z \right\} \\
& - 32\left\{ p_1^2 + x\left(4 - p_1^2\right)\right\}^2 - 36 p_1^2 \left\{ p_1^2 + x\left(4 - p_1^2\right)\right\} + 21 p_1^4 \Big|
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Basit hesaplamalarla

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\frac{1}{73728}\Big|p^4-4\left(4-p^2\right)p^2x+96\left(4-p^2\right)\left(1-|x|^2\right)pz$$
$$-16\left(4-p^2\right)\left(p^2+8\right)x^2\ \Big|$$

elde ederiz.

Şimdi $|x|$ yerine ρ yazıp üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{1}{73728}\left|p^4+4\left(4-p^2\right)p^2\rho+96\left(4-p^2\right)p+16\left(4-p^2\right)(p-4)(p-2)\rho^2\right|$$
$$=F(p,\rho)$$

elde ederiz. ρ ya göre diferansiyel alınırsa

$$\frac{\partial F(p,\rho)}{\partial\rho}=\frac{1}{73728}\left[4\left(4-p^2\right)p^2+32\rho\left(4-p^2\right)(p-4)(p-2)\right]$$

elde ederiz. $\dfrac{\partial F(p,\rho)}{\partial\rho}>0$ olduğu açıktır ki bu $F(p,\rho)$ in [0,1] kapalı aralığında artan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Bu $\rho=1$ de maksimum olmasını gerektirir. Buradan

$$\max F(p,\rho)=F(p,1)=G(p)$$

dir. Buna göre

$$G(p)=\frac{1}{73728}\left[-19p^4-48p^2+512\right]$$

dir. Buradan

$$G'(p)=\frac{1}{73728}\left[-76p^3-96p\right]$$

olur ve $p=0$ için

$$G''(p)=\frac{1}{73728}\left[-228p-96\right]<0$$

bulunur. Bu $G(p)$ nin $p=0$ da maksimum olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{512}{73728}=\frac{1}{144}$$

elde ederiz. Bu sonuç

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\sqrt{1+z}\ \text{ ya da }\ \left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\sqrt{1+z^2}$$

fonksiyonları için kesindir.

Teorem 4.1.3.4 $f\in SL^c$ ve $f(z)=\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ olsun. Bu durumda $\left|a_2a_3-a_4\right|\le\frac{1}{24}$ dir.

İspat: Yardımcı Önerme 4.1.1.1 i kullanarak (4.11) den

$$\left|a_2a_3-a_4\right|\le\frac{1}{3072}\left\{p^3+4\left(4-p^2\right)p\rho+32\left(4-p^2\right)+16\left(4-p^2\right)(p+2)\rho^2\right\}$$

elde ederiz.

$$F_1(p,\rho)=\frac{1}{3072}\left\{p^3+4\left(4-p^2\right)p\rho+32\left(4-p^2\right)+16\left(4-p^2\right)(p+2)\rho^2\right\} \quad (4.12)$$

olsun. Üst sınırın [0,2]x[0,1] dikdörtgeninin iç bölgesinde olduğunu kabul edelim. (4.12) nin ρ ya göre diferansiyeli alınırsa

$$\frac{\partial F_1}{\partial\rho}=\frac{1}{3072}\left\{4\left(4-p^2\right)p+32\left(4-p^2\right)(p+2)\rho\right\}$$

elde edilir. $0<\rho<1$ ve $p\in(0,2)$ sabiti için $\frac{\partial F_1}{\partial\rho}<0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu $F_1(p,\rho)$ in ρ nun azalan bir fonksiyonu olduğunu kolayca gösterir ki bu bizim varsayımımızla çelişir. Bu yüzden

$$\max F_1(p,\rho)=F_1(p,0)=G_1(p)$$

dir. Bu da

$$G_1'(p)=\frac{1}{3072}\left\{3p^2-64p\right\}$$

ve $p=0$ için

$$G_1''(p)=\frac{1}{3072}\left(6p-64\right)<0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla $p=0$ maksimum noktadır. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Aşağıda vereceğimiz teorem üçüncü Hankel Determinantı için bir üst sınır verir.

Teorem 4.1.3.5 $f\in SL^c$ ve $f(z)=\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ olsun. Bu durumda $\left|H_3(1)\right|\le\frac{19}{4320}$ dir.

İspat: $H_3(1)=a_3(a_2a_4-a_3^2)-a_4(a_4-a_2a_3)+a_5(a_1a_3-a_2^2)$ olduğundan

$$\left|H_3(1)\right|\le|a_3|\left|a_2a_4-a_3^2\right|+|a_4|\left|a_4-a_2a_3\right|+|a_5|\left|a_1a_3-a_2^2\right|$$

elde ederiz. $|a_5|$ için sınır, Teorem 4.1.2.2. deki benzer yolla elde edildikten sonra Sonuç 4.1.3.2 , Teorem 4.1.3.3 ve Teorem 4.1.3.4 in sonuçları ile birlikte $a_1=1$ olması kullanılarak, istenilen sonucu elde ederiz.

4.2 Yalınkat Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Alt Sınıfı İçin 2. Hankel Determinantı

Bu kısımda $S(0,s,t)$ ve $T(0,s,t)$ sınıflarının genelleştirilmiş hali olan $M_\lambda(s,t)$ sınıfını tanımlayacağız.

Bir $f(z)\in A$ fonksiyonu $\forall z\in U$ için ve $s,t\in\mathbb{C},\ s\ne t,\ |s|\le1,\ |t|\le1,\ 0\le\lambda\le1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left[\frac{(s-t)zf'(z)}{f(sz)-f(tz)}\right]+\lambda\left[\frac{(s-t)\left(z^2f''(z)+zf'(z)\right)}{szf'(z)-tzf'(tz)}\right]\right\}>0 \qquad (4.13)$$

şartlarını sağlıyorsa $M_\lambda(s,t)$ sınıfındandır denir.

Aşağıdaki ifadeler açıktır:

i. $M_\lambda(1,-1)=S_S^*(\lambda,1,-1)$

ii. $M_0(s,t)=S^*(0,s,t)$

iii. $M_0(1,t)=M(0,1,t)=S^*(0,1,t)=S^*(0,t)$

iv. $M_0\left(1,-1\right)=S^*(0,1,-1)=S^*(0,-1)$

v. $M_1\left(s,t\right)=T(0,s,t)$

vi. $M_1\left(1,-1\right)=T(0,1,-1)=T\left(0,t\right)$

$H_s(q)$, $s-inci$ Hankel determinantında $s=2$ ve $q=2$ alınırsa

$$H_2(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}=a_2a_4-a_3^2 \tag{4.14}$$

elde edilir. Bunu kullanarak çalışmamızda $M_\lambda\left(s,t\right)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $\left|a_2a_4-a_3^2\right|$ fonksiyonelinin kesin üst sınırını bulacağız.

Teorem 4.2.1 $f\in M_\lambda\left(s,t\right)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{4}{\left(1+2\lambda\right)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2} \tag{4.15}$$

dir.

İspat: $f\in M_\lambda\left(s,t\right)$ olsun. Bu durumda bazı $z\in U$ için

$$\left(1-\lambda\right)\left[\frac{\left(s-t\right)zf'(z)}{f(sz)-f(tz)}\right]+\lambda\left[\frac{\left(s-t\right)\left(z^2f''(z)+zf'(z)\right)}{szf'(z)-tzf'(tz)}\right]=p(z) \tag{4.16}$$

şartını sağlayan bir $p\in\wp$ vardır. (4.16) daki katsayı eşitliği

$$a_2=\frac{1}{\left(1+\lambda\right)\left(2-s-t\right)}b_1$$

$$a_3=\frac{\left(1+3\lambda\right)\left(s+t\right)}{\left(1+\lambda\right)^2\left(1+2\lambda\right)\left(2-s-t\right)\left(3-s^2-st-t^2\right)}b_1^2+\frac{1}{\left(1+2\lambda\right)\left(3-s^2-st-t^2\right)}b_2$$

$$a_4=\left\{ \frac{1}{(1+3\lambda)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)}b_3\right.$$

$$+\frac{(1+5\lambda)\left[(2-s-t)\left(s^2+st+t^2\right)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\right]}{(1+\lambda)(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)}b_1b_2$$

$$\left. -(s+t)\times\frac{\left[(1+2\lambda)(1+7\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)-(1+3\lambda)(1+5\lambda)\left[(2-s-t)\left(s^2+st+t^2\right)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\right]\right]}{(1+\lambda)^3(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)}b_1^3\right\} \tag{4.17}$$

verir. (4.17) de kolaylıkla görülebilir ki

$$C(\lambda,s,t)=(1+\lambda)^4(1+2\lambda)^3(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)$$

$$\begin{aligned}P=&(1+2\lambda)(1+3\lambda)^3(s+t)^2(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\\&-(1+2\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\left[\ (1+3\lambda)(1+5\lambda)\left((2-s-t)\left(s^2+st+t^2\right)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\right)\right.\\&\left.\qquad -(1+2\lambda)(1+7\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\ \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R=&(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\\&\text{x}\left[\ (1+2\lambda)(1+5\lambda)\left(3-s^2-st-t^2\right)\left(\left(s^2+st+t^2\right)(2-s-t)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\right)\right.\\&\left.\quad -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\ \right]\end{aligned}$$

$$S=(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2$$

ve

$$T=(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)$$

olmak üzere

$$a_2a_4-a_3^2=\frac{1}{C(\lambda,s,t)}\left\{-Pb_1^4+Rb_1^2b_2+Sb_1b_3-Tb_2^2\right\} \tag{4.18}$$

dir. (4.18) de Yardımcı Önerme (4.1.1.3) ve Yardımcı Önerme (4.1.1.4) i kullanarak

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\frac{1}{4C(\lambda,s,t)}\Big|&-(4P-2R-S+T)b_1^4+(2R+2S-2T)b_1^2\left(4-b_1^2\right)x\\&-\left[4T-(T-S)b_1^2\right]\left(4-b_1^2\right)x^2+2Sb_1\left(4-b_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\Big|\end{aligned}$$

elde ederiz.

$b_1 = b$ ve $b \in [0,2]$ alıp, üçgen eşitsizliğini kullanarak $\delta = |x| \le 1$ ve

$$
\begin{aligned}
F(\delta) = \frac{1}{4}\Big\{ \Big\{ 4\Big[& (1+2\lambda)(1+3\lambda)^3 (s+t)^2 (2-s-t)(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \\
& -(1+2\lambda)(s+t)(3-s^2-st-t^2)^2 \times \\
& \Big[(1+3\lambda)(1+5\lambda)\big[(2-s-t)(s^2+st+t^2)+(s+t)(3-s^2-st-t^2)\big]-(1+2\lambda)(1+7\lambda)(s+t)(3-s^2-st-t^2)\big] \Big] \\
& -2(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)(3-s^2-st-t^2)\big[(s^2+st+t^2)(2-s-t)+(s+t)(3-s^2-st-t^2)\big] \\
& -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \Big] \\
& -(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2(3-s^2-st-t^2)^2 \\
& +(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \Big\} b^4 \\
+\Big[& 2(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\times\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)(3-s^2-st-t^2)\big[(s^2+st+t^2)(2-s-t)+(s+t)(3-s^2-st-t^2)\big] \\
& -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \Big] \\
& +2(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2(3-s^2-st-t^2)^2 \\
& -2(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \Big] b^2(4-b^2)\delta \\
& +\Big\{ \Big[4(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3(4-s^3-s^2t-st^2-t^3) \\
& -\Big((1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3(4-s^3-s^2t-st^2-t^3)-(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2(3-s^2-st-t^2)^2\Big)b^2 \Big] \\
& -2(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2(3-s^2-st-t^2)^2 b \Big\}(4-b^2)\delta^2 \\
& +2(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2(3-s^2-st-t^2)^2 b(4-b^2) \Big\}
\end{aligned}
$$

artan bir fonksiyon olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left|a_2a_4 - a_3^2\right| &\le \frac{1}{4C(\lambda,s,t)}\left\{ \begin{aligned} &(4P-2R-S+T)b^4 + (2R+2S-2T)b^2(4-b^2)\delta \\ &\quad + \left[\left[4T-(T-S)b^2\right](4-b^2)-2Sb(4-b^2)\right]\delta^2 + 2Sb(4-b^2) \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{C(\lambda,s,t)}F(\delta)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Buradan $MaxF(\delta) = F(1)$ dir. Sonuç olarak $G(b) = F(1)$ olmak üzere

$$
\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{1}{C(\lambda,s,t)}G(b) \qquad (4.19)
$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
G(b)=\Big\{ \Big\{ & (1+2\lambda)(1+3\lambda)^3(s+t)^2(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right) \\
& -(1+2\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\times \\
& \quad \Big[(1+3\lambda)(1+5\lambda)\Big[(2-s-t)\left(s^2+st+t^2\right)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big]-(1+2\lambda)(1+7\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& -(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big[\left(s^2+st+t^2\right)(2-s-t)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& \qquad -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big] \\
& -(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2 \\
& +(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big\}b^4 \\
& +\Big[2(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\times\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big[\left(s^2+st+t^2\right)(2-s-t)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& \qquad -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big] \\
& -4(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right) \\
& +3(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\Big]b^2 \\
& +4(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
A=\Big\{ & (1+2\lambda)(1+3\lambda)^3(s+t)^2(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right) \\
& -(1+2\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\times \\
& \Big[(1+3\lambda)(1+5\lambda)\Big[(2-s-t)\left(s^2+st+t^2\right)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big]-(1+2\lambda)(1+7\lambda)(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& -(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big[\left(s^2+st+t^2\right)(2-s-t)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& \qquad -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big] \\
& -(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2+(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B=\Big[& 2(1+\lambda)^2(1+2\lambda)(2-s-t)\times\Big[(1+2\lambda)(1+5\lambda)\left(3-s^2-st-t^2\right)\times \\
& \qquad \Big[\left(s^2+st+t^2\right)(2-s-t)+(s+t)\left(3-s^2-st-t^2\right)\Big] \\
& \qquad -2(1+3\lambda)^2(s+t)(2-s-t)\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right)\Big] \\
& -4(1+\lambda)^4(1+2\lambda)(1+3\lambda)(2-s-t)^3\left(4-s^3-s^2t-st^2-t^3\right) \\
& +3(1+\lambda)^3(1+2\lambda)^3(2-s-t)^2\left(3-s^2-st-t^2\right)^2\Big]
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$G(b)=Ab^4+Bb^2+4T$$

olur. Bununla birlikte

$$G'(b) = 4Ab^3 + 2Bb$$

dir. $G'(b) = 0$ olması $b\left[4Ab^2 + 2B\right] = 0$ eşitliğini verir. $b = 0$ için

$$G''(b) = 12Ab^2 + 2B$$

negatiftir. Bu yüzden

$$MaxG(b) = G(1)$$

olur. Böylece (4.19) dan (4.15) i elde ederiz. $b_1 = 0, b_2 = 2$ ve $b_3 = 0$ için sonuç kesindir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde dördüncü bölümde her iki kısmında elde edilen teorem ve sonuçlar ispatsız olarak yazılacaktır.

5.1 Bernoulli Lemniscate ile ilgili Kuvvetli Konveks Fonksiyonların Bir Sınıfı İçin Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmamızda kuvvetli konveks fonksiyonların SL^c sınıfını;

$Q(f,z)=1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ olmak üzere,

$$SL^c=\left\{ f\in A:\left|\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^2-1\right|<1\right\},\ z\in U$$

şeklinde tanımlayarak, bu fonksiyon sınıfına ait bazı katsayı tahminlerinde bulunup, üçüncü Hankel Determinantının bir üst sınırını elde ettik.

Sonuç 5.1.1 $f\in SL^c$ ve $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ ise $\sum_{k=2}^{\infty}k^2(k^2-2)|a_k|^2\le 1$ dır.

Sonuç 5.1.2 $f\in SL^c$ ve $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ ise $|a_2|\le\frac{1}{6}$, $|a_3|\le\frac{1}{12}$, $|a_4|\le\frac{1}{24}$ dır.

Sonuç 5.1.3 $f\in SL^c$ ve $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ ise $\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\frac{1}{48}(1-3\mu); & \mu<-1\\ \frac{1}{12} & ;\quad -1\le\mu\le\frac{5}{3}\\ \frac{1}{48}(3\mu-1); & \mu>\frac{5}{3}.\end{cases}$ dır.

Sonuç 5.1.4 $f\in SL^c$ ve $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{1}{144}$ dır.

Sonuç 5.1.5 $f\in SL^c$ ve $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ ise $\left|a_2a_3-a_4\right|\le\frac{1}{24}$ dır.

Sonuç 5.1.6 $f\in SL^c$ ve $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ ise $\left|H_3(1)\right|\le\frac{19}{4320}$

5.2 Yalınkat Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Alt Sınıfı İçin 2. Hankel Determinantı ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmamızda $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde tanımlı (3.9) ile verilen analitik $f(z)$ fonksiyonu için $\forall z\in U$ ve $s,t\in\mathbb{C},\ s\neq t,\ |s|\leq 1,\ |t|\leq 1,\ 0\leq\lambda\leq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left[\frac{(s-t)zf'(z)}{f(sz)-f(tz)}\right]+\lambda\left[\frac{(s-t)\left(z^2f''(z)+zf'(z)\right)}{szf'(z)-tzf'(tz)}\right]\right\}>0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan $M_\lambda(s,t)$ sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. Elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel değerler seçilirse, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve onlara ait sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.1 de $s=1$ ve $t=-1$ alınırsa Singh (2014) in Sonuç 3.1.1 i elde edilir.

Sonuç 5.2.1 $f(z)\in M_\lambda(1,-1)$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\dfrac{1}{(1+2\lambda)^2}$ dir.

Teorem 4.2.1 de $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ alırsak sırasıyla aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 5.2.2 $f(z)\in M_0(s,t)$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\dfrac{4}{\left(3-s^2-st-t^2\right)^2}$ dir.

Sonuç 5.2.2, Vijayalakshmia ve Sudharsan (2015) in Teorem 3.1 de $B_1=2$ için elde ettiği sonucun bir genellemesidir.

Sonuç 5.2.3 $f(z)\in M_1(s,t)$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\dfrac{4}{9\left(3-s^2-st-t^2\right)^2}$ dir.

Teorem 4.2.1 de $(\lambda=0\ ,\ s=1\ ,\ t=-1)$ ve $(\lambda=1\ ,\ s=1\ ,\ t=-1)$ alırsak Janteng (2006) in ifade ettiği aşağıdaki sonuçları sırasıyla elde ederiz.

Sonuç 5.2.4 $f(z)\in M_0(1,-1)$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq 1$ dir.

Sonuç 5.2.5 $f(z)\in M_1(1,-1)$ ise $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\dfrac{1}{9}$ dir.

Sonuç olarak, bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların bir genellemesidir.

6. KAYNAKLAR

(Kitap)

Duren, P. L., 1983. Univalent Functions, Springer- Verlag, Newyork.

Fekete, M. and Szegö, G., 1933. Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen, J. London Math. Soc., 8: 85-89.

Goodman, A. W., 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House. Washington, New Jersey.

Grenander, U. and Szegö, G., 1958. Toeplitz forms and their applications, University of California Press. Berkeley.

Ponnusamy, S. and Silverman H., 2006. Complex variables with Applications, Birkäuser, Boston.

Pommerenke, Ch., 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

Study, E., 1913. Konforme Abbildung Einfache-Zussammenh angender Bereiche, B. G. Teubne Leipzig/ Berlin.

(Dergi)

Alexander, J. W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math., 17, 12-22.

Ali, R.M., Cho, N.E., Ravichadran, V. and Kumar, S.S., 2012. Differential subordination for functions associated with the lemniscate of Bernoulli. Taiwan, J. Math.16(3),1017-1027.

Arif, M., Noor, K.I. and Raza, M., 2012. Hankel determinant problem of a subclass of analytic functions. J. Inequal. Appl. doi: 10.1186/1029-242X-2012-22.

Arif, M., Noor,K.I., Raza, M. and Haq, S.W., 2012. Some properties of generalized class of analytic functions related with Janowski functions. Abst. Appl. Anal., Article ID 279843.

Bansal D., 2013. Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions. Appl. Math. Letters, 26(1), 103-107.

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Pottenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math. Kl. pp. 940-955.

Carathéodory, C., 1907. Über den variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen , die gegebene Werte nicht annehmen Math. Ann., 64, 95-115.

Frasin, B. A.,2010. Coefficient Inequalities for Certain Classes of Sakaguchi Type Functions. Int. J. Nonlinear Sci. 10(2): 206-211.

Gronwall, T. H.,1916. Sur la deformation dans la representation conforme , C. R. Acad . Sci. Paris vol 162 249-252.

Grunsky , H., 1934. Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung , Jber. Deustsch. Math. Verein., 43 140-143.

Janteng, A., Halim AS. and Darus M., 2006. Hankel determinant for functions starlike and convex with respect to symmetric points. J. Quality Measurement and Anal., 2(1) 37-43.

Janteng, A., Halim SA. and Darus M., 2006. Coefficients inequality for a function whose derivative has a positive real part. J. Inequl. Pure and Appl. Math., 7(2) Article 50.

Janteng, A., Halim SA. and Darus M., 2007. Hankel Determinant for Starlike and Convex Functions. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, no. 13, 619-625.

Keerthi B. S., Shanthi V. G. and Stephen B. A., 2012. Certain coefficient inequalities for Sakaguchi type functions and applications to fractional derivatives, Bulletin of Math. Analysis and Application, Vol. 4, Issue 2 29-39.

Koebe, P.,1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven, Nach. Ges. Wiss. Gottingen 191-210.

Layman, J. W., 2001. The Hankel transform and some of its properties. Journal of integer sequences, 4, 1-11.

Lindelöf , E., 1909. Mémoire sur certaines inegualitiés dans la théorie des fonctions onogénes etsur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, Acta. Sos. Sci. Fenn., 35, 7, 1-35.

Littlewood J. E., 1925. On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. 23, 481-519.

Loewner, C., 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, 69, 89-106.

Ma, WC. And Minda, D., 1992. A unified treatment of some special classes of univalent functions, Procedings of the conference on Complex Analysis. Tiajin, pp 157-169, Int.Press, Cambridge(1994).

Nevanlinna, R., 1920-1921 *Über die Konforme Abbildung von Sternebieten , Översikt av Finska Vetenskaps,* Societetens Förhandlingar, No 6 63, 1-21.

Noonan, J.W. and Thomas, D.K., 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 223 (2) 337-346.

Noor, K.I., 1983. Hankel determinant problem for the class of functions with bounded boundary rotation. Rev. Roum. Math. Pures Et Appl., 28(8) 731-739.

Owa, S., Sekine T. And Yamakawa R.,2005. Notes on Sakaguchi type functions, RIMS Kokyuroku, 1414 76-82.

Owa, S., Sekine T. And Yamakawa R.,2007. On Sakaguchi type functions, Appl. Math. Comput., 187 356-361.

Pakla, B. P., 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer- Verlag, New York, pp. 560.

Raza, M., Malik S. N., 2013. Upper bound of the third Hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli. *Journal of Inequalities ann Applications.* doi: 10.1186/1029-242X-2013-412.

Robertson , M. S., 1936. On the theory of univalent functions , Ann of Math. **37** 374-408.

Rogosinski, W., 1943. On the coefficients of subordinate functions, Proc, London Math. Soc. 2, 48-82.

Sakaguchi, K., 1959. On a certain univalent mapping, J. Math. Soc. Japan, 11, 72-75.

Schwarz, H. A., 1890. Gesamm. Math. Abhandl., 1-2, Springer.

Singh, G. and Mehrok, B.S., 2013. Hankel determinant for p-valent alpha-convex functions. Geometry, ID 348251, 4 pages.

Singh, G., 2014. Upper bound of the second Hankel determinant for a class of analytic functions. New Trends in Mathematical Sciences, Vol. 2, No 1, 53-58.

Sokol, J., Stankievicz, J., 1996. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions. Folia Scient,. Univ. Tech.Res.,19 ,101-105.

Sokol, J., 2009. Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions. Kyungpook Math. 49(2), 349- 353.

Vijayalakshmia, S. P., Sudharsan ,T. V. , 2015. Second Hankel Determinant for Generalized Sakaguchi Type Functions, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science 5 (1) , 94–100.

ÖZGEÇMİŞ

30.11.1986 yılında doğdu. İlköğretim ve ortaöğretimini Elazığ´da tamamladı. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü´nde başladığı lisans öğreniminden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü´nde başladığı Tezsiz Yüksek Lisans Programını 2009 yılında bitirdi. 2013 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı´ nda Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında MEB' de başladığı Matematik Öğretmenliği görevine çeşitli liselerde çalışarak devam etmektedir.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS / DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	AYŞEGÜL DOĞAN
ÖĞRENCİ NO	13804003
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2015-2016
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora ☐ Tezsiz Yüksek Lisans (Dönem Projesi)
TEZ KONUSU	ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN HANKEL DETERMİNATI PROBLEMİ
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	☐ Tez Savunma Sınavı Öncesi ☒ Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	61 SAYFA
BENZERLİK ORANI	% 18
RAPORLAMA TARİHİ	17 / 02 / 2016

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 61 sayfalık kısmına ilişkin, 17 / 02 / 2016 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *TURNİTİN* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 18 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☒ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)
AYŞEGÜL DOĞAN

(İmza)	(İmza)
18 /02/2016	18 /02/2016
PROF.DR.H.ÖZLEM GÜNEY	PROF.DR.H.ÖZLEM GÜNEY
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**