T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN DAMPİNG TERİMLİ PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Turgay UYSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Temmuz - 2017

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Turgay UYSAL tarafından yapılan "Kesirli Mertebeden Damping Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Patlaması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	DoçDr.	Mehmet TURAN
Üye :	Doç.Dr.	Erhan PİŞKİN
Üye :	Yrd.Doç.Dr.	Halis YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03/07/2017

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan başta ailem olmak üzere; deneyimi ve akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana yardımcı olan danışman hocam Doç.Dr.Erhan PİŞKİN' e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN DAMPİNG TERİMLİ PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Turgay UYSAL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

İkincibölümde Petrovsky denklemi ile ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise iki alt kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda damping ve kaynak terimli Petrovsky denkleminin çözümlerinin patlaması incelenmiştir. İkinci kısımda ise kesirli mertebeden damping terimli Petrovsky denkleminin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli türev, Petrovskydenklemi, Patlama.

ABSTRACT

BLOW UP OF THE SOLUTIONS FOR THE PETROVSKY EQUATION WITH FRACTIONAL DAMPING TERMS

MASTER THESIS

Turgay UYSAL

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2017

In the second chapter,discussed Petrovsky equation with the historical development of studies carried out to date on.

In the third chapter, the basic definitions, theorems, and inequalities that will be used in this thesis is are provided.

The fourth section consists of two subsections. Blow up forth Petrovsky Equation in the first episode of Damping and Source; In the second part, Blow up forth Petrovsky Equationwith Damping in theFractional order was studied.

Keywords: Fractional derivative, Petrovsky equation, Blowup.

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n-boyutlu Euclid uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$C_W(\Omega)$	: Zayıf Türevli Fonksiyonlar Uzayı
$\|u\|$	: u' nun Normu
$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$L^p(\Omega) = \mathrm{W}^{0,p}(\Omega)$	: Lebesgue Uzayı
$H^m(\Omega) = \mathrm{W}^{m,2}(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
$E(t)$	: Enerji Fonksiyoneli
$\partial^{1+\alpha} f(x)$	: Caputo Kesirli Türevi
$I^\alpha f(x)$	: Caputo Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Günlük hayatımızda kullandığımız teknolojinin temelinde genel olarak türev ve integral vardır. Türev ve integral, karşılaşılan doğal ve yapay sistemlerin davranışlarını anlamamıza yarayan çok önemli araçlardır. Uygulamalı bilim dallarında (fen, mühendislik, ekonomi, ...) var olan problemlerin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin oluşturulabilmesi için çok önemlidir. Bu süreçte öncelikle bu problemleri matematiksel ifadelerle formülize etmek, sonra da bunlarla ilgili bazı başlangıç ve sınır şartları kullanarak problemin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulmak amaçlanır. Bilinen bir problemi formülize etmemize yardımcı olan bu matematiksel ifadeler, genellikle aranan fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içerir. Burada türevlerin mertebesi tamsayı olabildiği gibi kesirli değerler de olabilir. İşte böyle matematiksel ifadelerde bulunan türevlerin mertebesine göre diferansiyel denkleme, tamsayı mertebeli diferansiyel denklem (klasik) veya kesir mertebeli diferansiyel denklem denmektedir.

Kesirsel diferansiyel denklemler teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesir dereceli türev için bir avantajdır. Kesir dereceli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektro analitik kimyada, çeşitli materyal ve süreçlerin bellek ve kalıtsal özelliklerini tanımlamak için kullanılır. Fizik, kimya, biyoloji, ekoloji, ... gibi alanlarda geniş bir uygulama alanına sahiptirler [Oldham ve Spanier 1974; Samko, Kilbas ve Marichev 1993].

Kesirli türev ve integralin birbirinden farklı ve birbirine uyuşmayan birçok tanımı kaynaklarda mevcuttur. Fakat kaynaklar incelendiğnde, bu tanımların aslında Riemann Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli yada belirli şartlar altında Rieman –Liouvillle türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülmektedir. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir. Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann- Liouville türev tanımıdr. Kesirli türevleri hesaplamak için başka bir seçenek; 1967 yılındaki makalesinde M.Caputo tarafından ortaya konan Caputo kesirli türevidir. Caputo'nun tanımı kullanılarak diferansiyel denklem çözerken Riemann-Liouville kesirli türevinin aksine, bu kesirli mertebeden başlangıç koşulullarını tanımlamaya gerek yoktur, bu da diferansiyel denklem çözerken ciddi avantajlar sağlamaktadır.

Günlük hayatta karşılaşılan birçok problemin adi veya kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilmesi mümkündür. Bu problemler birçok alanda karşımıza çıkabilmektedir. Ancak modellenen her problemin tam olarak çözümünün bulunması çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Bu problemler için yaklaşık bir çözüm bulmak veya en azından çözümün davranışıyla ilgili bir fikir edinebilmek için denklemlerin bazı şartlar ile sınırlandırılması gerekmektedir. Bu nedenle problemlere genellikle başlangıç ve sınır koşulları eklenerek iyi tanımlı çözüm bulmak amaçlanmıştır. İyi tanımlı bir çözüm bulmak için ilk aşama çözümün varlığını, çözüm varsa şayet çözümün tekliğini ve başlangıç verilerine bağımlılığını araştırmaktır. Çözümünün varlığı ve tek olduğu kanıtlanmış denklemin asimptotik davranışı yani çözümünün sonlu veya sonsuz bir zamanda davranışı her ne kadar çözüm tam olarak bilinmesede çözüme yönelik bir fikre sahip olmamızı sağlar.

Zamanın sonlu bir $t>0$ zamanına yaklaştığında, değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı çözümün sonsuza gitmesine blow up (çözümün patlaması) veya çözümlerin global yokluğu denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Patlama (Blow up) konusunun matematiksel teorisi ise 1960 larda; Kaplan (1963), Friedman (1965), Fujita (1966) ve diğer bazı yazarlar tarafından genel bir yaklaşım verildikten sonra aktif olarak araştırmacılar tarafından çalışılmıştır.

İlk olarak

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f(u)$$

şeklindeki damping ve kaynak terim içeren denklemlerin patlamasını Levine (1973,1974), Kalantarov ve Ladyzhenskaya (1978) incelemiştir.

Messaoudi (2002) de, Petrovsky denklemi olarak adlandırılan

$$u_{tt} + \Delta^2 u + g(u_t) = f(u)$$

denkleminde $g(u_t) = u_t |u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u|^{q-1}$ iken çözümünün varlığını ve patlamasını, Wu ve Tsai (2009) da çözümün azalması ve patlamasını çalıştılar. Chen ve Zhou (2009) da bu denklemin pozitif başlangıç enerjisi altında çözümlerinin patlamasını çalıştılar. Daha sonra Li ve ark. (2012) de, $g(u_t)$ nin yerine $G(u_t, \Delta u) = -\Delta u_t + u_t |u_t|^{p-1}$ ve $f(u) = u|u_t|^{q-1}$alarak çözümün azalması ve patlamasını çalıştılar. Daha sonra Pişkin ve Polat (2014) de bu denklemin enerji azalmasını çalıştı.

Tatar (2003) de kesirli türev içeren

$$u_{tt} + \partial_t^{1+\alpha} u = \Delta u + a|u|^{p-1} u$$

denkleminin çözümlerinin üstel büyümesini ve (2005) te de çözümlerinin patlamasını çalıştı. Alamia veTatar 2005 te aynı denklemin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler yer almaktadır [Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Pişkin 2017, Podlubny 1999]. Ayrıca tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\overrightarrow{x} \in X$ vektörünü $\|\overrightarrow{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir.$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ ve $\forall a \in R$ için

(i) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$; $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$;

(ii) $\|a\overrightarrow{x}\| = |a| \|\overrightarrow{x}\|$;

(iii) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

Bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|\overrightarrow{x}\|$ sayısına da $\overrightarrow{x} \in X$ elemanının normu denir.

Her $\|\overrightarrow{x}\|$ normu, $d : X \times X \longrightarrow R^+$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır.

Tanım 3.1.2. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak bir N doğal sayısı mevcut ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.3. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. Bir X normlu vektör uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlanan iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $C_1, C_2 > 0$ sabitleri için

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktirler ve o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar.

Tanım 3.1.6. K cismi üzerinde tanımlanan bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun $\forall\ x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (burada $\bar{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(iii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$.

$K = \mathbb{R}$ halinde $(x, y) = (y, x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.1.7. Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.8. R^n deki Euclid uzayında bir nokta $u = (u_1, ..., u_n)$ ve $|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$ ifadesi noktanın normunu göstermek üzere y ile z nin iç çarpımı

$u \cdot v = < u, v > = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ tanımıyla verilir.

Tanım 3.1.9. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.10. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve $x_n \to x$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.1.11. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

koşulunu sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n \to x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.12. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\|f_n - f\| \to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır. Her $x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.13. $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ negatif olmayan σ_i lerin n-bileşenlisi ise σ ya çoklu-indis denir ve x^σ, $|\sigma| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ mertebeye sahip olan $x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$ tek terimlisi, $x^\sigma = x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$ şeklinde gösterilir. Benzer biçimde $1 \leq i \leq n$ için $D_i = \partial/\partial x_i$ şeklinde tanımlanmış ise,

$$D^\sigma = D_1^{\sigma_1}...D_n^{\sigma_n}$$

ifadesi $|\sigma|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir ve $D^{(0,\dots,0)}u = u$ eşitliği mevcuttur.

Tanım 3.1.14. Ω, R^n de bir bölge olmak üzere $\forall\ m \geq 0$ ve $m \in Z$ için Ω bölgesinde sürekli olan tüm ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha \phi$ sürekli kısmi türevlere sahip vektör uzayı $C^m(\Omega)$ sembolü ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ eşitlikleri vardır.

3.2. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir küme olsun. u ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $u(x)$ fonksiyonları p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak isimlendirilir ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir.

Bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2. X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer

(i) X in bütün elemanları Y de ise $(X \subset Y)$ ve

(ii) u dan bağımsız bir c sabiti ve $\forall u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \, \|x\|_X$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.3. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$< u, v > = \int_\Omega u(x) \, \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.2.4. Her $t \in [0, T]$ için $[0, T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayı $C^m([0, T]; X)$ şeklinde gösterilir.

3.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.3.1. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan bir tamsayı ve p, $1 \le p \le \infty$ şartını sağlamak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

eşitliğiyle tanımlanan bu uzay *Sobolev uzayı* olarak adlandırılır. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

normları ile Banach uzayıdır. Burada $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.3.2. $p = 2$ için $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm ise

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.3. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

eşitliğiyle tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır, buradaki iç çarpım $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımı göstermektedir.

$H_0^1(\Omega)$ uzayındaki iç çarpım ise

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

eşitliğiyle tanımlanır ve $H_0^1(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2}$$

eşitliğiyle verilir.

Teorem 3.3.4. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şartlarını sağlayan tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ koşulu altında;

(i) $mp > n$ ise$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

(ii) $mp = n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir.

$mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi elde edilir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

3.4. Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1. (Cauchy Eşitsizliği) $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ şartları altında

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği mevcuttur.

Lemma 3.4.2. (Young Eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır. Young eşitsizliğinin bir diğer formu da $\delta > 0$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r} X^r + \frac{\delta^{-q}}{q} Y^q$$

şeklindedir.

Lemma 3.4.3. (Hölder Eşitsizliği) $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartları altında $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. $p = 1$ için $q = \infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess \sup_{\Omega} |v|$ olarak alınır.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.4. (İnterpolasyon Eşitsizliği) $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.5. (Minkowski Eşitsizliği) $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.6. (Sobolev Eşitsizliği) $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık bölge olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak biçimde $C = C(n, p)$ sabiti mevcuttur.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.4.7. (Sobolev- Poincare Eşitsizliği) p sayısı $2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ şeklinde olsun. Bu durumda $C_* = C_*(\Omega, p)$ sabiti ve $u \in H_0^2(\Omega)$ için

$$\|u\|_p \leq C_* \|\nabla u\|$$

olur.

Lemma 3.4.8. (Green Özdeşliği)

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

Lemma 3.4.9. (Leibniz İntegral Formülü)

$f(x,t), \frac{\partial f}{\partial x}$ fonksiyonları $\{(x,t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ bölgesinde ve $u(x), v(x)$ fonksiyonları da (a, b) aralığında sürekli ise

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(x,t)\, dt\right) = \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt + f(x, u(x))\, u'(x) - f(x, v(x))\, v'(x)$$

dır.

3.5. Kesirli Türev ve Kesirli İntegral

Bu kısımda kesirli türev ve integral ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler ifade edilecektir [Podlubny 1999].

Tanım 3.5.1. (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma(x)$ ile gösterilen *Gamma fonksiyonu*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. Bu integral $x > 0$ için yakınsaktır. Bu fonksiyona faktöriyel fonksiyonu da denir.

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

dir. Bu ifade kısmi integrasyonla kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ &= \left[-t^x e^t\right]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

buradan açıkça görülebilir ki; $\Gamma(1) = 1$ dir, ayrıca $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliği kullanılarak; $x = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(x+1) &= x! \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= (x-1)!\end{aligned}$$

olur. Bu da Gamma fonksiyonuna neden faktöriyel fonksiyonu dendiğini açıklar.

Teorem 3.5.2. Gamma fonksiyonu şu özellikleri sağlar:

(i) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

(ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(iii) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad (0 < \alpha < 1)$

(iv) $2^{2x-1}\ \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$ (Gamma fonksiyonu çoğalma formülü)

(v) $\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x dx = -\gamma$ (burada γ Euler sabiti).

Tanım 3.5.3. (Beta Fonksiyonu)

$B(m,n)$ notasyonu ile gösterilen ve

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Beta fonksiyonu* denir. Bu integral $m > 0$, $n > 0$ için yakınsaktır.

Aşağıdaki teorem Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.5.4. $m > 0$, $n > 0$ için

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ilişkisi vardır.

Tanım 3.5.5. (Dirichlet Formülü)

$\Omega_1 = [a,b]\,, \Omega_2 = [c,d] \quad -\infty \leq a < b \leq \infty,\ -\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x,y)\,,\ \Omega_1 \times \Omega_2$ bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun, bu durumda

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_c^d f(x,y)\,dx$$

eşitliğine *Dirichlet Formülü* denir [Samko, Kilbas ve Marichev 1993].

Tanım 3.5.6. (Abel İntegral Denklemi)

$0 < \alpha < 1$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

şeklinde tanımlanan integral denklemine *Abel İntegral Denklemi* denir.

Tanım 3.5.7. (Kesirli İntegral)

Şimdi n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\omega_1} \int_a^{\omega_2} \int_a^{\omega_3} \ldots \int_a^{\omega_n} f(\omega_n)\, d\omega_n d\omega_{n-1} \ldots d\omega_2 d\omega_1 \tag{3.5.1}$$

integralinde integrasyon sırasını ve buna bağlı olarak sınırları değiştirelim,

$$\begin{aligned}
a &< \omega_1 < x, & \omega_2 &< \omega_1 < x \\
a &< \omega_2 < \omega_1, & \omega_3 &< \omega_2 < x \\
&\ldots & &\ldots \\
a &< \omega_{n-1} < \omega_{n-2}, & \omega_n &< \omega_{n-1} < x \\
a &< \omega_n < \omega_{n-1}, & a &< \omega_n < x
\end{aligned}$$

sınır değişimleri altında (3.5.1) ifadesi,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \int_a^{\omega_1} \int_a^{\omega_2} \int_a^{\omega_3} \ldots \int_a^{\omega_n} f(\omega_n)\, d\omega_n d\omega_{n-1} \ldots d\omega_2 d\omega_1 \\
&= \int_a^x f(\omega_n) \left(\int_{\omega_n}^x \left(\int_{\omega_{n-1}}^x \ldots \int_{\omega_3}^x \left(\int_{\omega_2}^x d\omega_1 \right) d\omega_2 \ldots \right) d\omega_{n-1} \right) d\omega_n
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

eşitliği ile yazılabilir. (3.5.2) ifadesinin sağ tarafında terim terim integral alınırsa

$$\int_a^x \int_a^{\omega_1} \int_a^{\omega_2} \int_a^{\omega_3} \cdots \int_a^{\omega_n} f(\omega_n)\, d\omega_n d\omega_{n-1} \ldots d\omega_2 d\omega_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\omega_n)(x-\omega_n)^{n-1} d\omega_n$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\int_a^x \int_a^{\omega_1} \int_a^{\omega_2} \int_a^{\omega_3} \cdots \int_a^{\omega_n} f(\omega_n)\, d\omega_n d\omega_{n-1} \ldots d\omega_2 d\omega_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\omega_n)(x-\omega_n)^{n-1} d\omega_n \qquad (3.5.3)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında n pozitif bir tamsayıdır. Γ fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (3.5.3) eşitliğinin sağ tarafı için şu tanım verilebilir.

Tanım 3.5.8. $f(x) \in L^1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x < b$$

integrallerine α. mertebeden *Kesirli İntegral* denir. Bu integral *Riemann-Liouville Kesirli İntegrali* olarak ta bilinir.

Tanım 3.5.9. (Kesirli Türev)

$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ifadesi n. mertebeden türevi göstermek üzere burada amacımız n tamsayı parametresini tamsayı olmayan bir α parametresine genişletmektir. Bunun için p pozitif bir tamsayı olmak şartıyla $f(x) = x^p$ fonksiyonunu ele alalım bu fonksiyonun k. mertebeden türevini alırsak

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^p, \\
f'(x) &= px^{p-1}, \\
f''(x) &= p(p-1)x^{p-2}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)x^{p-k} \\
&= \frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliği kullanılırsa

$$f^{(k)}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)} x^{p-k}$$

yazılır ki burada k değerini herhangi bir pozitif sayı seçerek (Γ fonksiyonu tanımlı olduğundan) $f(x)$ fonksiyonunun kesirli mertebeden türevini hesaplayabiliriz.

Şimdi kesirli türev için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > 0 \tag{3.5.4}$$

Abel integral denklemini ele alalım. (3.5.4) ifadesinin her iki yanında x yerine t, t yerine de s yazalım. Elde edilen ifadenin her iki yanını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpıp a dan x e kadar integralini alırsak,

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt$$

Burada Dirichlet formülü olarak bilinen

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

sınır değişimi formülü uygulanırsa

$$\int_a^x \varphi(s)\, ds \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha} (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \tag{3.5.5}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.5.5) ifadesinde sol taraftaki ikinci integralde $t = s + \tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha} (t-s)^{1-\alpha}} &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.5.5) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)\,ds &= \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \\ \int_a^x \varphi(s)\,ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin x göre türevini alırsak

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \tag{3.5.6}$$

elde edilir. Elde edilen (3.5.6) ifadesine α. mertebeden *Kesirli Türev* denir. Bu türev *Riemann-Liouville kesirli türevi* olarak da bilinir.

Şimdi en yaygın olan bazı kesirli türev ve kesirli integral tanımlarını verelim.

Tanım 3.5.10. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)

Her sonlu (a,x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in N^{+}, n-1 \leq \alpha < n$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden *Riemann-Liouville kesirli türevi*

$${}_{a}^{RL}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}}dt$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5.11. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım,

$\alpha = \frac{1}{2}$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olduğunda $n = 1$ olur bu değerler tanımda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}{}_{0}^{RL}D_x^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.5.12. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali)

Her sonlu (a,x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in N^{+}$, $n-1 \leq \alpha < n$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden *Riemann-Liouville kesirli integrali*;

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{-\alpha} f(x) = \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt $$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5.13. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini hesaplayalım,

$\alpha = \frac{1}{2}$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olduğunda $n = 1$ olur bu değerler tanımda yerine yazılırsa,

$$ \begin{aligned} {}_{0}^{RL}D_{x}^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{x} \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned} $$

bulunur.

Tanım 3.5.14. (Gründwald-Letnikov Kesirli Türevi)

$[a,t]$ kapalı aralığında sürekli $f^{(k)}(t), (k = 1,2,3,...,m+1)$ türevleri var ve m, $m < \alpha < m+1$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun α. mertebeden *Gründwald-Letnikov Kesirli Türevi* $\alpha > 0$ olmak üzere

$$ {}_{a}^{GL}D_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{a}^{x} (x-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau $$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5.15. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$.mertebeden Gründwald-Letnikov kesirli türevini hesaplayalım,

$\alpha = \frac{1}{2}$ ve $m < \alpha < m+1$ olduğunda $m = 0$ olur. Bu değerler tanımda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{GL}D_x^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+0+1\right)}\int_0^x (x-\tau)^{0-\frac{1}{2}}.1.d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.5.16. (Gründwald-Letnikov Kesirli İntegrali)

$[a,t]$ kapalı aralığında sürekli $f^{(k)}(t), (k=1,2,3,...,m+1)$ türevleri var ve m, $m<\alpha<m+1$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun α. mertebeden *Gründwald-Letnikov Kesirli İntegrali* $\alpha>0$ olmak üzere,

$${}_{a}^{GL}D_x^{-\alpha}f(x) = \frac{d^{-\alpha}f(x)}{dx^{-\alpha}} = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^k(a)(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+m+1)}\int_a^x (x-\tau)^{m+\alpha} f^{(m+1)}(\tau)\,d\tau$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5.17. $f(x)=x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Gründwald-Letnikov kesirli integralini hesaplayalım,

$\alpha=\frac{1}{2}$ ve $m<\alpha<m+1$ olduğunda $m=0$ olur. Bu değerler tanımda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{GL}D_x^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+0+1\right)}\int_0^x (x-\tau)^{0+\frac{1}{2}}.1.d\tau \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.5.18. (Caputo Kesirli Türevi)

$a>0$ ve $-1<\alpha<1$ olmak üzere *Caputo Kesirli Türevi*

$${}_{a}^{C}D_x^{1+\alpha}f(x) = \partial_x^{1+\alpha}f(x) = \begin{cases} I^{-\alpha}\frac{d}{dx}f(x) & \text{için } -1<\alpha<0 \\ I^{1-\alpha}\frac{d^2}{dx^2}f(x) & \text{için } \quad 0<\alpha<1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5.19. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevini hesaplayalım,

$\alpha = -\frac{1}{2}$ olur ve bu değerler tanımda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}}(x) &= I^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\tau)^{\frac{1}{2}-1} \tau d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.5.20. (Caputo Kesirli İntegrali)

Burada $I^{\beta}, \beta > 0$ için *Caputo Kesirli İntegrali,*

$$ {}_a^C D_x^{-\alpha} f(x) = I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau $$

şeklinde tanımlanmıştır.

Örnek 3.5.21. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli integralini hesaplayalım,

$\alpha = \frac{1}{2}$ olur ve bu değerler tanımda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^{-\frac{1}{2}}(x) &= I^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-\tau)^{\frac{1}{2}-1} \tau d\tau \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

örneklerden de anlaşılacağı gibi seçilen fonksiyonlara göre bu farklı tanımların birbirine eşit sonuçlar vereceği görülebilir.

Teorem 3.5.22. $f(t) = (t-a)^p$ olmak üzere $f(t)$ nin α. *mertebeden türevi*;

$$ D_t^{\alpha} (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t-a)^{p-\alpha}, \qquad p \in R $$

eşitliğiyle verilir. Şimdi de kesirli türev ve kesirli integralin sağladığı bazı özellikleri veren teoremi ifade edelim.

Teorem 3.5.23.

(i) Lineerlik özelliği:

$$\begin{aligned} D^q(x+y) &= D^q(x)+D^q(y) \\ D^q(ax) &= aD^q(x) \end{aligned}$$

(ii) Birleşme özelliği:

$$D^a D^b(x) = D^{a+b}(x)$$

(iii) Sıfır eleman:

$$D^0(x) = x$$

(iv) Alt küme olma özelliği: a doğal sayısı için

$$D^a(x) = d^a x,$$

(v) Çarpım kuralı

$$D^q(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} D^j(x)\, D^{q-j}(y)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

4.1. GİRİŞ

Bu kısımda damping ve kaynak terimli Petrovsky denkleminin çözümlerinin patlaması gösterilecektir [Messaoudi 2002].

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + a u_t \left|u_t\right|^{m-2} = bu\left|u\right|^{p-2}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = \partial_\nu u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

problemi ile ilgileneceğiz, burada $a, b > 0$ ve $p, m > 2$ dir.

Önce (4.1.1) probleminin lokal varlık teoremini ifade edelim.

Teorem 4.1.1. Kabul edelim ki

$$\begin{cases} 2 < p, & n \leq 4 \\ 2 < p \leq \frac{2(n-2)}{n-4} & n \geq 5 \end{cases}$$

ve

$$m \leq \frac{2n}{n-4}, \qquad n \geq 5$$

olsun.Ayrıca $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ise (4.1.1) probleminin $u \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$, $u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times (0,T))$ uzayında bir tek zayıf çözümü vardır[Messaoudi 2002].

4.1.2. Çözümün Patlaması

Bu bölümde $p > m$ ve $E(0) < 0$ için

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T]; H_0^2(\Omega)\right) \\ u_t &\in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^m(\Omega \times (0,T)) \end{aligned}$$

çözümünün sonlu bir T^* zamanında patladığını göstereceğiz.

Enerji fonksiyonelimiz

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_t^2 + (\Delta u)^2\right](x,t)\,dx - \frac{b}{p}\int_\Omega \left|u(x,t)\right|^p dx \tag{4.1.2}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 4.1.3. Kabul edelim ki

$$\begin{cases} 2 < p, & n \leq 4 \\ 2 < p \leq 2(n-2)/n-4, & n \geq 5 \end{cases}$$

sağlansın, a pozitif bir sabit C sadece Ω ya bağlı ve $C > 1$ için

$$\|u\|_p^s \leq C\left(\|\Delta u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right) \tag{4.1.3}$$

$u \in H_0^2(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq p$.

İspat. Eğer $\|u\|_p \leq 1$ ise Sobolev gömülme teoremlerinden ve sınır şartlarından $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C\|\Delta u\|_2^2$ olur. Eğer $\|u\|_p > 1$ ise $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p$. Bu nedenle (4.1.3) elde edilir.

Bu bölümün tamamında

$$H(t) = -E(t) \tag{4.1.4}$$

olarak tanımlanacak ve C, Ω bölgesi üzerinde farklı pozitif sabitleri temsil edecektir. (4.1.2) ve (4.1.3) den aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

Sonuç 4.1.4. Kabul edelim ki (4.1.3) sağlansın. Bu durumda

$$\|u\|_p^s \leq C\left(|H(t)| + \|u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right) \tag{4.1.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $u \in H_0^2(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq p$ dir.

Teorem 4.1.5. Teorem 4.1.1 in şartları sağlansın ve $E(0) < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T]; H_0^2(\Omega)\right) \\ u_t &\in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^m(\Omega \times (0,T)) \end{aligned}$$

çözümü sonlu bir zamanda patlar.

İspat. (4.1.1) denkleminin her iki yanı u_t ile çarpılıp Ω üzerinde integral alınırsa

$$H'(t) = a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m \, dx \geq 0,$$

$[0,T)$ aralığındaki her t için $H(t)$ süreklidir [V.Barbu 1993]. Böylece

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p}\|u\|_p^p, \tag{4.1.6}$$

yazılabilir.

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t(x,t)\,dx \tag{4.1.7}$$

olsun.Burada ε daha sonra belirlenecek bir sabit ve α

$$0 < \alpha \leq \min\left\{ \frac{(p-2)}{2p}, \frac{(p-m)}{p(m-1)} \right\} \tag{4.1.8}$$

dır. (4.1.7) eşitliğinin türevi alınır ve (4.1.1) denklemi de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} \left[u_t^2 - (\Delta u)^2 \right] dx \\ &\quad + \varepsilon b \int_{\Omega} |u(x,t)|^p\, dx - a\varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

elde edilir. $X, Y \geq 0, \quad \delta > 0, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r} X^r + \frac{\delta^{-q}}{q} Y^q$$

formundaki Young eşitsizliğinde $r = m$ ve $q = m/(m-1)$ seçilerek (4.1.9) ifadesinin son terimine uygulanırsa

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m-1} |u|\, dx \leq \frac{\delta^m}{m} \|u\|_m^m + \frac{m-1}{m} \delta^{-m/(m-1)} \|u_t\|_m^m$$

olur. Bulunan bu eşitsizlik (4.1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) H^{-\alpha}(t) - \frac{m-1}{m} \varepsilon \delta^{-m/(m-1)} \right] H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} \left[u_t^2 - (\Delta u)^2 \right] dx \\ &\quad + \varepsilon \left[pH(t) + \frac{p}{2} \int_{\Omega} \left[u_t^2 + (\Delta u)^2 \right] dx \right] - a\varepsilon \frac{\delta^m}{m} \|u\|_m^m \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\delta^{-m/(m-1)} = kH^{-\alpha}(t)$ olarak alınır k daha sonra belirlenecek büyük bir sabit olmak üzere bu eşitlik (4.1.10) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m} \varepsilon k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} (\Delta u)^2\, dx \\ &\quad + \varepsilon \left[pH(t) - \frac{k^{1-m}}{m} a H^{\alpha(m-1)}(t) \|u\|_m^m \right] \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur. Burada (4.1.6) ve $\|u\|_m^m \leq C\|u\|_p^m$ eşitsizliği kullanılırsa

$$H^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m \leq \left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C\|u\|_p^{m+\alpha p(m-1)}$$

elde edilir, elde edilen bu eşitsizlik (4.1.11) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\int_\Omega u_t^2 dx \\ &+\varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\int_\Omega (\Delta u)^2 dx \\ &+\varepsilon\left[pH(t) - \frac{k^{1-m}}{m} a\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C\|u\|_p^{m+\alpha p(m-1)}\right] \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olur. Sonuç 4.1.4 ve (4.1.8) bağıntısı $s = m + \alpha p(m-1) \leq p$, için (4.1.12) de uygulanırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &+\varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\int_\Omega u_t^2 dx + \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\int_\Omega (\Delta u)^2 dx \\ &+\varepsilon\left[pH(t) - C_1 k^{1-m}\left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\right)\right] \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

elde edilir. Burada $C_1 = a\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C/m$ olarak alındı.

$$H(t) = \frac{b}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2$$

ve $p = (p+2)/2 + (p-2)/2$ alarak (4.1.14) de kullanırsak

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon\frac{p-2}{4}\|\Delta u\|_2^2 \\ &+\varepsilon\left[\begin{array}{c} \left(\frac{p+2}{2} - C_1 k^{1-m}\right) H(t) + \left(\frac{p-2}{2p} b - C_1 k^{1-m}\right)\|u\|_p^p \\ + \left(\frac{p+6}{4} - C_1 k^{1-m}\right)\|u_t\|_2^2 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

yazılabilir. Bu nokta da k nın yeterince büyük seçilmesiyle (4.1.15) deki $H(t), \|u\|_p^p$ ve $\|u_t\|_2^2$ ifadelerinin katsayıları kesinlikle pozitif olacaktır. Böylece,

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon\gamma\left[H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2\right] \tag{4.1.15}$$

elde edilecektir. Burada $\gamma > 0$ olacak şekilde katsayıların en küçüğünü temsil etmektedir. ε yeterince küçük seçildiğinde $(1-\alpha) - \varepsilon k (m-1)/m \geq 0$ olur ve

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \int_{\Omega} u_0 u_1(x)\, dx > 0$$

eşitliği göz önüne alınarak (4.1.15) düzenlenirse

$$L'(t) \geq \varepsilon\gamma \left[H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 \right] \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$L(t) \geq L(0) > 0, \qquad \forall t \geq 0$$

olur. (4.1.7) ifadesinin ikinci terimi için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t(x,t)\, dx \right| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\ &\leq C \|u\|_p \|u_t\|_2 \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \int_{\Omega} u u_t(x,t)\, dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \|u\|_p^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}$$

elde edilir, tekrar Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \int_{\Omega} u u_t(x,t)\, dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_p^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)} \right] \tag{4.1.17}$$

Burada $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ eşitliğinde $\theta = 2(1-\alpha)$, $\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq p$ olarak alınır ve (4.1.8) şartları altında (4.1.17) tekrar düzenlenirse,

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2 \right]$$

elde edilir. Burada $s = 2/(1-2\alpha) \leq p$ dir. Sonuç 4.1.5 kullanılırsa, $\forall t > 0$ için

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq \left[CH(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 \right] \tag{4.1.18}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} L^{1/(1-\alpha)}(t) &= \left(H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx\right)^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{\alpha/(1-\alpha)} \left(H(t) + \left|\int_\Omega u u_t dx\right|^{1/(1-\alpha)}\right) \\ &\leq C\left(H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2\right) \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

bulunur (4.1.16) ve (4.1.19) beraber değerlendirilirse,

$$L'(t) \geq \Gamma L^{1/(1-\alpha)}(t) \tag{4.1.20}$$

elde edilir. Burada Γ, C, γ ve ε a bağlı bir sabittir (böylece u çözümünden bağımsız olur) (4.1.20) ifadesinin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$L^{1/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Gamma t\alpha/(1-\alpha)}$$

elde edilir. Sonuç olarak $L(t)$ nin blow up zamanı

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Gamma\alpha\left[L(0)\right]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

olarak bulunur.

4.2. Kesirli Mertebeden Damping Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda kesirli mertebeden damping terimli

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+\partial_t^{1+\alpha}u=|u|^{p-1}u, & x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Petrovsky denklemi çalışılacaktır. Bu problemin çözümlerinin patlamasını gösterirken 2005 te Alamia ve Tatar tarafından yapılan çalışmadan önemli ölçüde faydalanılmıştır.

Burada Ω, R^n ($n\geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve ν dış normal. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ başlangıç fonksiyonları veriliyor. p ve α sayıları $p>1$ ve $-1<\alpha<1$ şeklindedir. $\partial_t^{1+\alpha}$ ifadesi standart Caputo kesirli türevini göstermek üzere

$$\partial_t^{1+\alpha}w(t)=\begin{cases} I^{-\alpha}\frac{d}{dt}w(t) & ; \quad -1<\alpha<0 \quad \text{için} \\ I^{1-\alpha}\frac{d^2}{dt^2}w(t) & ; \quad 0<\alpha<1 \quad \text{için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [Oldham 1974, Podlubny 1999]. Burada I^β, $\beta>0$ için

$$I^\beta\frac{d}{dt}w(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}w(\tau)d\tau.$$

Caputo kesirli integralini göstermektedir. $\partial_t^{1+\alpha}u$ terimi $\alpha=-1$ için zayıf damping $\alpha=0$ için de güçlü damping terim olur. $-1<\alpha<0$ için ise denkleme zayıf damping ile güçlü damping terim arasında bir etkiye sahip olur [Chen, Triggiani 1989].

Şimdi (4.2.1) probleminin lokal varlık teoremini ifade edelim [Messaoudi 2002].

Teorem 4.2.1.

$$\begin{cases} 1<p & ;\ n\leq 4 \\ 1<p\leq\frac{2n}{n-4} & ;\ n\geq 5 \end{cases}$$

ve $(u_0,u_1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda $u\in C([0,T);\ H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T);\ L^2(\Omega))$ ve $u_t\in L^2((0,T)\times\Omega)$ olacak şekilde $T>0$ için u fonksiyonu (4.2.1) probleminin bir tek zayıf çözümüdür.

Bu kısımda bazı tanımları sunup teoremimizi ispatlamak için gerekli bazı fonksiyonelleri ortaya koyduk. Ayrıca $-1<\alpha<0$ durumunu ele alacağız. (4.2.1) denklemine ait enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2\right) - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{4.2.2}$$

olur. $E(t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre türevini alırsak

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_\Omega \left[\underbrace{u_t u_{tt}}_{I_1} + \underbrace{\Delta u \Delta u_t}_{I_2} - |u|^p u_t\right] dx \tag{4.2.3}$$

(4.2.1) denklemi u_t ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega u_t u_{tt} dx \\ &= \int_\Omega \left[|u|^p u_t - \Delta^2 u u_t - \partial_t^{1+\alpha} u u_t\right] dx \end{aligned}$$

elde edilir. I_2 de iki defa Green özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \Delta u_t \Delta u dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\Delta u_t)\frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla u_t dx \\ &= -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla u_t dx \\ &= \int_\Omega u_t \Delta^2 u dx \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.2.3) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_\Omega \left[|u|^p u_t - \Delta^2 u u_t - u_t \partial_t^{1+\alpha} u + u_t \Delta^2 u - |u|^p u_t\right] dx \\ &= -\int_\Omega u_t \partial_t^{1+\alpha} u dx \\ &= -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u_t \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$E'(t) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u_t \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \tag{4.2.4}$$

elde edilmiş olur. Şimdi modifiye edilmiş enerji fonksiyonelimizi

$$E_{\varepsilon}(t) = E(t) - \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx \tag{4.2.5}$$

şeklinde tanımlayalım. $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere daha sonra belirlenecek bir sabittir. (4.2.2) eşitliği (4.2.5) de yerine yazılır ve t ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}^{'}(t) &= -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\Omega} u_t \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \\ &\quad -\varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \underbrace{\int_{\Omega} u u_{tt} dx}_{I_3} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

elde edilir. (4.2.1) denklemi u ile çarpılıp Ω üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Omega} u u_{tt} dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|u|^{p+1} - u\Delta^2 u - u\partial_t^{1+\alpha} u \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|u|^{p+1} + |\Delta u|^2 - u\partial_t^{1+\alpha} u \right] dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx + \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\Omega} u \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

elde ettiğimiz bu eşitliği (4.2.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}^{'}(t) &= -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\Omega} u_t \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx - \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &\quad -\varepsilon \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &\quad +\frac{\varepsilon}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\Omega} u \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

bulunur.

$$H(t) = -\left(e^{-\sigma\varepsilon t} E_{\varepsilon}(t) + \mu F(t) + d \right), \tag{4.2.9}$$

$$F(t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(t-\tau) e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \tag{4.2.10}$$

ve

$$G(t) = e^{\beta t} \int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau} \tau^{-(\alpha+1)} d\tau \tag{4.2.11}$$

olsun. Burada $\sigma = \frac{p+1}{2}$ ve β, μ, d ifadeleri daha sonra belirlenecek pozitif sabitlerdir.

Lemma 4.2.2. Eğer $E_\varepsilon(0) < 0$ ve p yeterince büyük seçilirse, $H(t) > 0$ ve $H'(t) > 0$ olur.

İspat. $H(t)$ tanımı kullanılır ve t ye göre türev alınırsa

$$H'(t) = \sigma\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t} E_\varepsilon(t) - e^{-\sigma\varepsilon t} E'_\varepsilon(t) - \mu F'(t) \tag{4.2.12}$$

olur. (4.2.10) ve (4.2.11) den

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \int_\Omega G(t-\tau) e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_\Omega \left[e^{\beta(t-z)} \int_{t-z}^{\infty} e^{-\beta(t-z)} z^{-(\alpha+1)} dz \right] e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \end{aligned}$$

yazılabilir. $F'(t)$ ifadesini elde etmek için $F(t)$ nin türevini Leibniz İntegral Formülünü kullanarak alırsak

$$\frac{dF(t)}{dt} = \underbrace{\int_0^t \int_\Omega \frac{d}{dt} \left[G(t-\tau) e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 \right] dx d\tau}_{I_4} + \underbrace{\int_\Omega G(0) e^{-\sigma\varepsilon t} u_t^2 dx}_{I_5} \tag{4.2.13}$$

olur.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^t \int_\Omega G'(t-\tau) e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_\Omega \left[\beta e^{\beta(t-\tau)} \int_{t-\tau}^{\infty} e^{-\beta z} z^{-(\alpha+1)} dz - e^{\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\beta(t-\tau)} \right] e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \\ &= \beta \int_0^t \int_\Omega \underbrace{\left[e^{\beta(t-\tau)} \int_{t-\tau}^{\infty} e^{-\beta z} z^{-(\alpha+1)} dz \right]}_{G(t-\tau)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta \int_0^t \int_\Omega G(t-\tau)\, e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau \\
&= \beta F(t) - \int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \int_\Omega G(0)\, e^{-\sigma\varepsilon t} u_t^2 dx \\
&= \int_\Omega e^{-\sigma\varepsilon t} u_t^2 \left[\int_0^\infty e^{-\beta\tau} \tau^{-(\alpha+1)} ds \right] dx \\
&= \int_\Omega e^{-\sigma\varepsilon t} u_t^2 \left[\int_0^\infty e^{-\rho} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(\alpha+1)} \frac{d\rho}{\beta} \right] dx \\
&= \beta^\alpha \Gamma(-\alpha)\, e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u_t^2 dx
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada $\beta\tau = \rho$ dönüşümü yapılmış ve $\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{-\alpha-1} d\rho = \Gamma(-\alpha)$ eşitliği kullanılmıştır. Şimdi bulduğumuz I_4 ve I_5 değerlerini (4.2.13) te yerine yazarsak

$$
F'(t) = \beta^\alpha \Gamma(-\alpha)\, e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u_t^2 dx - \int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau + \beta F(t) \quad (4.2.14)
$$

olur. Şimdi de (4.2.5), (4.2.8) ve (4.2.14) ifadelerini (4.2.12) de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
H'(t) = \;& \sigma\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}. \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\Delta u|^2 - \varepsilon u u_t - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx \\
& -\mu\beta^\alpha \Gamma(-\alpha) e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u_t^2 dx + \mu \int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 dx d\tau - \mu\beta F(t) \\
& -e^{-\sigma\varepsilon t}. \left[-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_\Omega u_t \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx - \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx \right. \\
& \left. -\varepsilon \int_\Omega |u|^{p+1} dx - \varepsilon \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{\Gamma(-\alpha)} \int_\Omega u \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[\frac{\sigma\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx+\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}\left|\Delta u\right|^2dx \\
& -\sigma\varepsilon^2 e^{-\sigma\varepsilon t}.\int_{\Omega}uu_tdx+\left(\varepsilon-\frac{\sigma\varepsilon}{p+1}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|u|^{p+1}dx \\
& +\frac{e^{-\sigma\varepsilon t}}{\Gamma(-\alpha)}\int_{\Omega}u_t\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx \\
& -\frac{\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}}{\Gamma(-\alpha)}\int_{\Omega}u\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx \\
& +\mu\int_0^t\int_{\Omega}(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2dxd\tau-\mu\beta F(t) \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz. (4.2.15) eşitliğinin sağındaki beşinci ve altıncı terime Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
& e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx \\
= \quad & e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_tdx\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u\tau(\tau)d\tau dx \\
\leq \quad & \delta_1 e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx \\
& +\frac{1}{4\delta_1}e^{-\sigma\varepsilon t}\underbrace{\int_{\Omega}\left[\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau\right]^2dx}_{I_6} \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

I_6 da $-(\alpha+1)=-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{\alpha+1}{2}$ alınır ve Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}\left[\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau\right]^2dx \\
= \quad & \int_{\Omega}\left[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{2}}e^{-\frac{\sigma\varepsilon}{2}(t-\tau)}e^{-\frac{\sigma\varepsilon\tau}{2}}u_\tau(\tau)d\tau\right]^2dx \\
\leq \quad & \int_{\Omega}\left[\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon(t-\tau)}d\tau\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2(\tau)d\tau\right]dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\sigma\varepsilon\left(t-\tau\right)=\vartheta$ dönüşümü yapılır ve $\int\limits_0^\infty \vartheta^{-\alpha-1}\left(\sigma\varepsilon\right)^\alpha e^{-\vartheta}d\vartheta=\left(\sigma\varepsilon\right)^\alpha\Gamma\left(-\alpha\right)$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int\limits_0^\infty \vartheta^{-\alpha-1}\left(\sigma\varepsilon\right)^\alpha e^{-\vartheta}d\vartheta dx\int_\Omega\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2 d\tau dx\\
\leq\ & \left(\sigma\varepsilon\right)^\alpha\Gamma\left(-\alpha\right)\int_\Omega\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2 d\tau dx
\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

bulunur. (4.2.17) ifadesi (4.2.16) da yazılırsa

$$\begin{aligned}
&e^{-\sigma\varepsilon t}.\int_\Omega u_t\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx\\
\leq\ & \delta_1 e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx+\frac{\left(\sigma\varepsilon\right)^\alpha\Gamma\left(-\alpha\right)}{4\delta_1}\int_\Omega\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2 d\tau dx
\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&e^{-\sigma\varepsilon t}.\int_\Omega u\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx\\
\leq\ & \delta_2 e^{-\sigma\varepsilon t}.\underbrace{\int_\Omega |u|^2 dx}_{I_7}\\
&+\frac{1}{4\delta_2}e^{-\sigma\varepsilon t}\underbrace{\int_\Omega\left(\int\limits_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{\frac{-\sigma\varepsilon t}{2}}u_\tau(\tau)d\tau\right)^2 dx}_{I_8}
\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

olur. I_7 de Sobolev Poincare eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_7=\int_\Omega |u|^2 dx\leq C_*\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

elde edilir. I_8 ifadesi, (4.2.17) ifadesinin elde edilişiyle benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_\Omega \left(\int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{\frac{-\sigma\varepsilon t}{2}} u_\tau(\tau) d\tau \right)^2 dx \\ &\le (\sigma\varepsilon)^\alpha \Gamma(-\alpha) \int_\Omega \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi I_7 ve I_8 (4.2.19) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} u_\tau(\tau) d\tau dx \\ \le\; & \delta_2 e^{-\sigma\varepsilon t} C_* \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ & + \frac{(\sigma\varepsilon)^\alpha \Gamma(-\alpha)}{4\delta_2} \int_\Omega \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

olur. Şimdi de (4.2.15) eşitliğinin sağ tarafındaki üçüncü terime Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_\Omega u u_t dx \le \delta_3 \underbrace{\int_\Omega |u|^2 dx}_{I_9} + \frac{1}{4\delta_3} \int_\Omega |u_t|^2 dx \tag{4.2.21}$$

yazılır. Buradaki I_9 ifadesi I_7 ye benzer şekilde Sobolev-Poincare eşitsizliğinden elde edilirse

$$I_9 = \int_\Omega |u|^2 dx \le C_* \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

olacağından I_9, (4.2.21) de yerine yazılırsa

$$\int_\Omega u u_t dx \le \delta_3 C_* \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta_3} \int_\Omega |u_t|^2 dx \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.18), (4.2.20) ve (4.2.22) eşitsizlikleri (4.2.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
H'(t) \geq\ & \left(\frac{\sigma\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx+\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx \\
& -\sigma\varepsilon^2e^{-\sigma\varepsilon t}\delta_3C_{p_1}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx-\frac{\sigma\varepsilon^2e^{-\sigma\varepsilon t}}{4\delta_3}\int_{\Omega}|u_t|^2dx \\
& +\left(\varepsilon-\frac{\sigma\varepsilon}{p+1}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|u|^{p+1}dx-\frac{\delta_1e^{-\sigma\varepsilon t}}{\Gamma(-\alpha)}\int_{\Omega}u_t^2dx \\
& -\frac{(\sigma\varepsilon)^{\alpha}}{4\delta_1}\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_{\tau}^2d\tau dx-\frac{\varepsilon\delta_2C_{p_1}e^{-\sigma\varepsilon t}}{\Gamma(-\alpha)}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\
& -\frac{(\sigma\varepsilon)^{\alpha}\varepsilon}{4\delta_2}\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_{\tau}^2d\tau dx \\
& +\mu\int_0^t\int_{\Omega}(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_{\tau}^2dxd\tau-\mu\beta F(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.Bu eşitsizliği düzenlersek

$$\begin{aligned}
H'(t) \geq\ & \left(\frac{\sigma\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\mu^{\alpha}\Gamma(-\alpha)-\frac{\sigma\varepsilon^2}{4\delta_3}-\frac{\delta_1}{\Gamma(-\alpha)}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx \\
& +\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}.\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx \\
& -\left(\sigma\varepsilon^2\delta_3C_{p_1}+\frac{\varepsilon\delta_2C_{p_1}}{\Gamma(-\alpha)}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\
& +\left(\varepsilon-\frac{\sigma\varepsilon}{p+1}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|u|^{p+1}dx \\
& +\left(\mu-\frac{(\sigma\varepsilon)^{\alpha}}{4\delta_1}-\frac{(\sigma\varepsilon)^{\alpha}\varepsilon}{4\delta_2}\right)\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_{\tau}^2d\tau dx \\
& -\mu\beta F(t) \qquad (4.2.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}
C_1H(t) &= -C_1\left(e^{-\sigma\varepsilon t}E_{\varepsilon}(t)+\mu F(t)+d\right) \\
&= -C_1e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\Delta u|^2-\varepsilon uu_t-\frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right]dx \\
&\quad -C_1\mu F(t)-C_1d
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.2.23) eşitsizliğinin sağına $C_1H(t)$ ifadesi eklenip çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
H'(t) \quad \geq \quad & C_1 H(t) + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\sigma\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \mu\beta^\alpha \Gamma(-\alpha) - \frac{\sigma\varepsilon^2}{4\delta_3} - \frac{\delta_1}{\Gamma(-\alpha)} \right) e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u_t^2 dx \\
& + \left[\left(\frac{\sigma}{2} + 1 \right) \varepsilon + \frac{C_1}{2} \right] e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \\
& - \left(\sigma\varepsilon^2 \delta_3 C_{p_1} + \frac{\varepsilon\delta_2 C_{p_1}}{\Gamma(-\alpha)} \right) e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
& + \left(\varepsilon - \frac{C_1}{p+1} - \frac{\sigma\varepsilon}{p+1} \right) e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx - C_1 \varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u u_t dx \\
& + \left(\mu - \frac{(\sigma\varepsilon)^\alpha}{4\delta_1} - \frac{(\sigma\varepsilon)^\alpha \varepsilon}{4\delta_2} \right) \int_\Omega \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \\
& + (C_1 - \beta) \mu F(t) + C_1 d
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade de sağ taraftaki altıncı terim (4.2.22) deki eşitsizliğe göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
H'(t) \quad \geq \quad & C_1 H(t) + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\sigma\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \mu\beta^\alpha \Gamma(-\alpha) - \frac{\sigma\varepsilon^2}{4\delta_3} - \frac{\delta_1}{\Gamma(-\alpha)} - \frac{C_1\varepsilon}{4\delta_3} \right) e^{-\sigma\varepsilon t} \int_\Omega u_t^2 dx \\
& + \left[\left(\frac{\sigma}{2} + 1 \right) \varepsilon + \frac{C_1}{2} \right] e^{-\sigma\varepsilon t} . \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx + \left(\varepsilon - \frac{C_1}{p+1} - \frac{\sigma\varepsilon}{p+1} \right) e^{-\sigma\varepsilon t} . \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \\
& - \left(\sigma\varepsilon^2 \delta_3 C_{p_1} + \frac{\varepsilon\delta_2 C_{p_1}}{\Gamma(-\alpha)} + C_1 \varepsilon C_{p_1} \delta_3 \right) e^{-\sigma\varepsilon t} . \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
& + \left(\mu - \frac{(\sigma\varepsilon)^\alpha}{4\delta_1} - \frac{(\sigma\varepsilon)^\alpha \varepsilon}{4\delta_2} \right) \int_\Omega \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \\
& + (C_1 - \beta) \mu F(t) + C_1 d
\end{aligned}$$

olur.Burada $C_1 = \frac{p+1}{2}\varepsilon$, $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\Gamma(-\alpha)\varepsilon}{2}$ ve $\delta_3 = \frac{1}{2}$ seçimlerini eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & \frac{p+1}{2}\varepsilon H(t) \\ & +\left[\frac{(p+1)\varepsilon}{4}+\frac{(p+1)\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}-\mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right. \\ & \left.-\frac{(p+1)}{4}\varepsilon^{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{(p+1)}{4}\varepsilon^{2}\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx \\ & +\left[\frac{(p+1)\varepsilon}{4}+\varepsilon+\frac{(p+1)\varepsilon}{4}\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx \\ & +\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|u|^{p+1}dx \\ & -\left[\frac{(p+1)\varepsilon^2C_{p_1}}{4}+\frac{\varepsilon^2C_{p_1}}{2}+\frac{(p+1)\varepsilon^2C_{p_1}}{4}\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\ & +\left[\mu-\frac{(\sigma\varepsilon)^{\alpha}}{2\Gamma(-\alpha)}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2d\tau dx \\ & +\left(\frac{p+1}{2}\varepsilon-\beta\right)\mu F(t)+\frac{p+1}{2}\varepsilon d \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & \frac{p+1}{2}\varepsilon H(t)+\left(\frac{(p+1)}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)-\mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}u_t^2dx \\ & +\left[\frac{(p+1)\varepsilon}{2}+\varepsilon\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx-\left(\frac{p+2}{2}\right)\varepsilon^2C_{p_1}e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\ & +\left[\mu-\frac{(p+1)^{\alpha}\varepsilon^{\alpha-1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)}(1+\varepsilon)\right]\int_{\Omega}\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2d\tau dx \\ & +\left(\frac{p+1}{2}\varepsilon-\beta\right)\mu F(t)+\frac{p+1}{2}\varepsilon d \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

elde edilir. Sağ taraftaki dördüncü terime Sobolev -Poincare eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \leq C_{p_2}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx \tag{4.2.25}$$

olur. (4.2.25), (4.2.24) eşitsizliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & \frac{p+1}{2}\varepsilon H(t) + \left[\frac{p+1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon) - \mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right] e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & -\frac{p+2}{2}\varepsilon^2 C_{p_1} e^{-\sigma\varepsilon t} C_{p_2}\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{p+3}{2}\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2 dx \\ & + \left[\mu - \frac{(p+1)^{\alpha}\varepsilon^{\alpha-1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)}(1+\varepsilon)\right]\int_{\Omega}\int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \\ & + \left(\frac{p+1}{2}\varepsilon - \beta\right)\mu F(t) + \frac{p+1}{2}\varepsilon d \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C_{p_1}C_{p_2} = C_p$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & \frac{p+1}{2}\varepsilon H(t) + \left[\frac{p+1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon) - \mu\beta^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\right] e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & +\frac{\varepsilon}{2}\left[p+3-(p+2)\varepsilon C_p\right] e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2 dx \\ & + \left[\mu - \frac{(p+1)^{\alpha}\varepsilon^{\alpha-1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)}(1+\varepsilon)\right]\int_{\Omega}\int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \\ & + \left(\frac{p+1}{2}\varepsilon - \beta\right)\mu F(t) + \frac{p+1}{2}\varepsilon d \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varepsilon < \varepsilon_1 = \min\left(1, \frac{p+3}{2(p+2)C_p}\right)$$

tanımı göz önüne alındığında üçüncü terimin katsayısı $\frac{p+3}{4}\varepsilon$ ifadesinden daha büyük olur. $\beta = 1$ için μ sabitini ikinci terimin katsayısı negatif olmayacak ve dördüncü terimin katsayısı $\frac{(p+1)^{\alpha}}{2^{\alpha+1}\varepsilon^{1-\alpha}\Gamma(-\alpha)}$ ifadesinden büyük olacak şekilde seçebiliriz ayrıca yeterince büyük bir p değeri için $\varepsilon \geq \frac{2}{p+1}$ için beşinci terimin katsayısı da negatif olmayacaktır, bunlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & \frac{p+1}{2}\varepsilon H(t) + \frac{p+3}{4}\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2 dx \\ & + \frac{(p+1)^{\alpha}}{2^{\alpha+1}\varepsilon^{1-\alpha}\Gamma(-\alpha)}\int_{\Omega}\int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

olur. $H(t) = -\left(e^{-\sigma\varepsilon t}E_{\varepsilon}(t) + \mu F(t) + d\right)$ ifadesinde, $d + E_{\varepsilon}(0) < 0$ yani $d < -E_{\varepsilon}(0)$ olarak seçilirse $H(0) > 0$ elde edilir. $H'(t) > 0$ olduğundan $H(t) > H(0) > 0$ için $H(t) > 0$ da elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.3. $-1<\alpha<0$, $E(0)<0$ ve $\int_\Omega u_1u_0dx\geq 0$ için p yeterince büyük seçildiğinde (4.2.1) denkleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. Pozitif değerli $\Psi(t)$ fonksiyonunu

$$\Psi(t)=H^{1-\gamma}(t)+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega uu_tdx$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\gamma=\frac{p-1}{2(p+1)}$ ve φ pozitif sabitlerdir. Çözümün sonlu zamanda patladığını göstermek için $\Psi^{\frac{1}{1-\gamma}}(t)\leq K\Psi'(t)$ şeklinde bir eşitsizlik elde etmeliyiz. Şimdi $\Psi(t)$ fonksiyonunun t ye göre türevini alalım

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1-\gamma)H^{-\gamma}(t)H'(t)-\varphi\sigma\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega uu_tdx\\ &\quad+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\left(\int_\Omega u_t^2dx+\int_\Omega uu_{tt}dx\right)\end{aligned}$$

burada (4.2.7) deki eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1-\gamma)H^{-\gamma}(t)H'(t)-\varphi\sigma\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega uu_tdx\\ &\quad+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\left[\int_\Omega|u|^{p+1}dx+\int_\Omega|\Delta u|^2dx-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}u_\tau(\tau)d\tau dx\right]\\ &\quad+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2dx\end{aligned}$$

olur. Burada ikinci terim için (4.2.22) deki eşitsizlik, beşinci terim için de (4.2.20) deki eşitsizlik kullanılırsa ve $\delta_4,\delta_5>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1-\gamma)H^{-\gamma}(t)H'(t)-\varphi\sigma\varepsilon\delta_4e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega|u|^2dx-\frac{\varphi\sigma\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}}{4\delta_4}\int_\Omega u_t^2dx\\ &\quad+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2dx+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega|u|^{p+1}dx+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega|\Delta u|^2dx\\ &\quad-\frac{\varphi\delta_5e^{-\sigma\varepsilon t}}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega|u|^2dx-\frac{\varphi(\sigma\varepsilon)^\alpha}{4\delta_5}\int_\Omega\int_0^t(t-\tau)^{-(\alpha+1)}e^{-\sigma\varepsilon\tau}u_\tau^2d\tau dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin son terimi (4.2.26) daki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+1)} e^{-\sigma\varepsilon\tau} u_\tau^2 d\tau dx \\
\leq\ & \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)\varepsilon^{1-\alpha}}{(p+1)^\alpha} H'(t) - \frac{(p+1)\,2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)\varepsilon^{1-\alpha}}{2\,(p+1)^\alpha}\varepsilon H(t) \\
& -\varphi \frac{(p+3)\,2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)\varepsilon^{1-\alpha}}{4\,(p+1)^\alpha}\varepsilon e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

elde edilip yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \ \geq\ & (1-\gamma) H^{-\gamma}(t) H'(t) - \varphi\left(\sigma\varepsilon\delta_4 + \frac{\delta_5}{\Gamma(-\alpha)}\right) e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^2 dx \\
& +\varphi\left(1-\frac{\sigma\varepsilon}{4\delta_4}\right) e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx + \varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^{p+1} dx \\
& +\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{\varphi 2^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)\sigma^\alpha\varepsilon}{(p+1)^\alpha\,\delta_5} H'(t) \\
& +\frac{\varphi 2^{\alpha-2}\sigma^\alpha\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{(p+1)^\alpha\,\delta_5} H(t) \\
& -\varphi\frac{(p+3)\,2^{\alpha-3}\sigma^\alpha\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{(p+1)^\alpha\,\delta_5} e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

olur. Buradan ikinci terime Sobolev-Poincare eşitsizliği uygulanır ve $\sigma = \frac{p+1}{2}$ eşitliği göz önüne alınarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \ \geq\ & \left[(1-\gamma) H^{-\gamma}(t) - \frac{\varphi\Gamma(-\alpha)\varepsilon}{2\delta_5}\right] H'(t) + \frac{\varphi\,(p+1)\,\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{4\delta_5} H(t) \\
& -\varphi\left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4 + \frac{\delta_5}{\Gamma(-\alpha)}\right) e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& +\varphi\left(1-\frac{(p+1)\,\varepsilon}{8\delta_4}\right) e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx \\
& +\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^{p+1} dx + \varphi\left(1-\frac{(p+3)\,\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{8\delta_5}\right) e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

olur. Üçüncü terim için (4.2.25) deki eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left[(1-\gamma)H^{-\gamma}(t) - \frac{\varphi\Gamma(-\alpha)\varepsilon}{2\delta_5}\right]H'(t) + \frac{\varphi(p+1)\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{4\delta_5}H(t) \\
& -\varphi\left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4 + \frac{\delta_5}{\Gamma(-\alpha)}\right)C_p e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \\
& +\varphi\left(1-\frac{(p+1)\varepsilon}{8\delta_4}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx \\
& +\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}.\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \varphi\left(1-\frac{(p+3)\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{8\delta_5}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left[(1-\gamma)H^{-\gamma}(t) - \frac{\varphi\Gamma(-\alpha)\varepsilon}{2\delta_5}\right]H'(t) + \frac{\varphi(p+1)\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{4\delta_5}H(t) \\
& +\varphi\left(1-\frac{(p+1)\varepsilon}{8\delta_4}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx + \varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
& +\varphi\left[1-\frac{(p+3)\Gamma(-\alpha)\varepsilon^2}{8\delta_5} - \left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4 + \frac{\delta_5}{\Gamma(-\alpha)}\right)C_p\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

elde edilir.Burada $\delta_5 = L\Gamma(-\alpha)H^\gamma(t)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left[(1-\gamma) - \frac{\varphi\varepsilon}{2L}\right]H^{-\gamma}(t)H'(t) + \frac{\varphi(p+1)\varepsilon^2}{4L}H^{-\gamma}(t)H(t) \\
& +\varphi\left(1-\frac{(p+1)\varepsilon}{8\delta_4}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega u_t^2 dx + \varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
& +\varphi\left[1-\frac{(p+3)\varepsilon^2}{8LH^\gamma(t)} - \left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4 + LH^\gamma(t)\right)C_p\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx
\end{aligned}$$

bu eşitsizliğin sağ tarafına $H(t)$ ekleyip çıkarır ve (4.2.22) deki eşitsizliği de kullanılırsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq & \left[(1-\gamma) - \frac{\varphi\varepsilon}{2L}\right]H^{-\gamma}(t)H'(t) + \left[\frac{\varphi(p+1)\varepsilon^2}{4L}H^{-\gamma}(t) + 1\right]H(t) \\
& +\left[\varphi\left(1-\frac{(p+1)\varepsilon}{8\delta_4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4\delta_6}\right]\int_\Omega u_t^2 dx \\
& +\left(\varphi - \frac{1}{p+1}\right)e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
& +\varphi\left[1-\frac{(p+3)\varepsilon^2}{8LH^\gamma(t)} - \left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4 + LH^\gamma(t)\right)C_p\right]e^{-\sigma\varepsilon t}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \\
& +\mu F(t) + d
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliğin katsayıları için düzenlemeler yapalım;

Birinci terimin katsayısı için

$$1-\gamma \geq \frac{\varphi\varepsilon}{2L}$$

$$\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \frac{2L\left(1-\gamma\right)}{\varphi},$$

İkinci terimin katsayısı için

$$\frac{\varphi\left(p+1\right)\varepsilon^2}{4L}H^{-\gamma}\left(t\right) \geq 0$$

$$\frac{\varphi\left(p+1\right)\varepsilon^2}{4L}H^{-\gamma}\left(t\right)+1 \geq 1$$

elde edilir. Üçüncü terimin katsayısı için $\varphi = \frac{p+3}{4(p+1)}$, $\delta_4 = \delta_6 = \frac{1}{2}$ ve $\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \frac{4(p+3)}{(p+1)(p+11)}$ olarak alınırsa,

$$\varphi\left(1-\frac{\left(p+1\right)\varepsilon}{8\delta_4}\right)-\frac{\varepsilon}{4\delta_6} \geq 0$$

$$\varphi\left(1-\frac{\left(p+1\right)\varepsilon}{8\delta_4}\right)-\frac{\varepsilon}{4\delta_6}+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

benzer şekilde dördünci terimin katsayısı da

$$\begin{aligned}\varphi-\frac{1}{p+1} &= \frac{p+3}{4\left(p+1\right)}-\frac{1}{p+1}\\ &= \frac{p-1}{4\left(p+1\right)}\end{aligned}$$

olur. ε ve C_p yeterince küçük seçildiğinde beşinci terimin katsayısı

$$\varphi\left[1-\frac{\left(p+3\right)\varepsilon^2}{8LH^{\gamma}\left(t\right)}-\left(\frac{p+1}{2}\varepsilon\delta_4+LH^{\gamma}\left(t\right)\right)C_p\right] \geq 0$$

olacağından sonuç olarak,

$$\Psi'\left(t\right) \geq H\left(t\right)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+\frac{p-1}{4\left(p+1\right)}\int_{\Omega}\left|u\right|^{p+1}dx \tag{4.2.27}$$

bulunur.

Şimdi de $\Psi\left(t\right)$ ile ilgili bir eşitsizlik elde edeceğiz.

$$\Psi\left(t\right) = H^{1-\gamma}\left(t\right)+\varphi e^{-\sigma\varepsilon t}\int_{\Omega}uu_tdx$$

fonksiyonunda $X, Y > 0$, $1 \leq \rho < \infty$ için

$$(X+Y)^{\rho} \leq 2^{\rho-1}\left(X^{\rho}+Y^{\rho}\right) \tag{4.2.28}$$

eşitsizliğini uygularsak

$$\Psi^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \leq 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left[H(t)+\varphi^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(\int_{\Omega} uu_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right]$$

buradaki ikinci terime Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_{\Omega} uu_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} u_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{4.2.29}$$

elde edilir. Sağ taraftaki $\left(\int_{\Omega} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}$ ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\Omega} (u.1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} (1)^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq C(|\Omega|, p)\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade (4.2.29) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} uu_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} &\leq C(|\Omega|, p)\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{(p+1)(1-\gamma)}} . \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx\right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} \\
&\leq C(|\Omega|, p)\left[\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} . \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx\right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

elde edilir. Buradaki $2(1-\gamma) > 1$ olduğu için Young eşitsizliğini uygulayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} . \left(\int_\Omega |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} \\
\leq\ &\left(\left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}\right)^{\frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}} \\
&+\left[\left(\int_\Omega |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}\right]^{2(1-\gamma)} \\
\leq\ & B\left(\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]^{\frac{2}{1-2\gamma}}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $B = C\left(|\Omega|, p\right) > 0$

$$
\left(\int_\Omega u u_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq B\left[\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{(p+1)(1-2\gamma)}}\right]
$$

$\frac{2}{(p+1)(1-2\gamma)} = 1$ olduğundan

$$
\left(\int_\Omega u u_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq B\left[\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right] \tag{4.2.31}
$$

(4.2.31) ifadesini (4.2.27) de yerine yazarsak

$$
\Psi^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \leq 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left[H(t) + \varphi^{\frac{1}{1-\gamma}} B\left(\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)\right] \tag{4.2.32}
$$

elde ederiz. Eğer K sabiti,

$$
K \geq 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \max\left\{1, 2\varphi^{\frac{1}{1-\gamma}} B, \frac{4(p+1)}{p-1} b^{\frac{1}{1-\gamma}} B\right\}
$$

şartlarını sağlayacak şekilde yeterince büyük seçilirse

(4.2.27) ve(4.2.32) ifadeleri beraber değerlendirildiğinde

$$
\Psi^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \leq K\Psi'(t) \tag{4.2.33}
$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.27) den $\Psi'(t) \geq 0$ olduğu açıktır. Böylece, $\Psi(t)$ nin tanımı ve başlangıç verileri kullanılarak $\Psi(t) \geq \Psi(0) > \varphi \int_\Omega u_1 u_0 dx \geq 0$ olduğu görülür.

(4.2.33) eşitsizliğinde $(0,t)$ aralığında integral alınırsa

$$\Psi^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \leq K\Psi'(t)$$

$$\Psi'(t)\,\Psi^{\frac{-1}{1-\gamma}}(t) \geq \frac{1}{K}$$

$$\int_0^t \Psi'(\tau)\,\Psi^{\frac{-1}{1-\gamma}}(\tau)\,d\tau \geq \int_0^t \frac{1}{K}d\tau$$

$$\Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(t) - \Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(0) \geq \frac{-\gamma}{K(1-\gamma)}t$$

$$\Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(t) \geq \Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(0) - \frac{\gamma}{K(1-\gamma)}t$$

$$\Psi^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(0) - \frac{\gamma}{K(1-\gamma)}t}$$

sonuçta, $\Psi(t)$ nin patlama zamanı

$$T^* \leq \frac{K(1-\gamma)\,\Psi^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(0)}{\gamma}$$

olarak bulunur.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada biz Caputo kesirli türevindeki α nın değerine göre değişen tanımda işlem karmaşasından kaçınmak için $-1 < \alpha < 0$ alarak ilgili tanımı kullandık. Aynı çalışma $0 < \alpha < 1$ için seçerek yapılıp sonuç genelleştirilebilir. Ayrıca çözümlerin patlaması farklı metotlar ile ve sınırsız bölgede çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

Alaima, M. R., Tatar, N. E. 2005. Blow up for the wave equation with a fractional damping, *J. Appl. Anal.*, 11(1): 133–144.

Barbu, V. 1993. Analysis and control of nonlinear infinite Dimensional systems, Academic Press, New York.

Brezis, H. 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.

Chen, S., Triggiani, R. 1989. Proof of extension of two conjectures on structual damping for elastic systems: the case $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, *Pasific J. Math.*, 136: 15–55.

Chen, W., Zhou, Y. 2009. Global nonexistence for a semilirear Petrovsky equation, *Nonlinear Anal.*, 70: 3203–3208.

Evans, L. C. 1998. Partial Differential Equations. Graduate Stusies in Mathematics.

Friedman, A. 1965. Remarks on nonlinear parabolic equations, applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. *Amer. Math.*, Soc: 3–23.

Fujita, H. 1966. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, *Sect. IA, Math.*, 13: 109–124.

Kalantarov, V. K., Ladyzhenskaya, O. A. 1978. The occurance of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type. *J. Soviet Math.*, 10: 53–70.

Kaplan, S. 1963. On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 16: 305–330.

Kesavan, S. 1989. Topics in Functionnal Analysis and Applications. John Wilwy Sons. India.

Levine, H. A. 1973. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 51(5): 371–386.

Levine, H.A. 1974. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192: 1–21.

Li, G., Sun, Y., Liu, W. 2012. Global existence and blow up of solution for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping, *Appl. Anal.*, 91(3): 575–586.

Messaoudi, S. A. 2002. Global exietance and nonetistence in a system of Petrovsky, *J. Math. Anal. and Appl.*, 265 (2): 296–308.

Oldham, K. B., Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus, Academic Press, New York London.

Pişkin, E., Polat, N. 2014. On the decay of solutions for a nonlinear Petrovsky equation, *Math. Sci. Letters.*, 3(1): 43–47.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations, Math. Sci. Engrg. 198, Academic Press, San Diago, CA.

Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev O. I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon(Translated from the 1987 Russian original).

Tatar, N. E. 2003. A Wave equation with fractional damping, *Z. Anal. Anw.*, 22(3): 609–617.

Tatar, N. E. 2005. A Blow up result for a fractionaly damped wawe equation, *NoDEA.*, 12: 215–226.

Wu, S. T., Tsai, L. Y. 2009. On Global solutions and blow up of solutions for a nonlinearly damped Petrovsky system , *Taiwanese J. Math.*, 13(2A): 545–558.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin ilinin Gülnar ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Mersin de tamamladım. 2001 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü bitirdim. 2001 yılından bu yana Özel Eğitim kurumlarında öğretmenlik yapmaktayım. Evliyim ve iki çocuğum var.

Çalışmaları

Makaleler

- E. Pişkin, T. Uysal, Blow up of the solutions for the Petrovsky equation with fractional damping terms (İncelemede).

Bildiriler

- E. Pişkin, T. Uysal, Global nonexistence of solutions for a system of nonlinear higher-order Kirchhoff-type equations, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016), 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey, pp 335.

- E. Pişkin, T. Uysal, Blow up of solutions for a system of nonlinear higher-order Kirchhoff-type equations with nonlinear damping, International Workshop On Mathematical Methods In Engineering, 27-29 April 2017, Çankaya University, Ankara, TURKEY, pp 133.

- E. Pişkin, T. Uysal, Global nonexistence of the solutions for a Petrovsky equation with fractional damping, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2017), 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Turgay UYSAL
ÖĞRENCİ NO	15804004
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2016-2017
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Kesirli Mertebeden Damping Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	62
BENZERLİK ORANI	%18
RAPORLAMA TARİHİ	04/07/ 2017

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 62 sayfalık kısmına ilişkin, 04/07/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %18 ‘dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☒ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları’nı inceledim ve bu Uygulama Esasları’nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Turgay UYSAL

04/07/2017	…04/.07../2017
Doç.Dr. Erhan PİŞKİN	Doç.Dr. Bilal ÇEKİÇ
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı** V.