T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK DALGA DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜSTEL BÜYÜMESİ

Şeyhmus ALTINDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz - 2017

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Şeyhmus ALTINDAĞ tarafından yapılan "Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	DoçDr.	Mehmet TURAN
Üye :	Doç.Dr.	Erhan PİŞKİN
Üye :	Yrd.Doç.Dr.	Halis YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03/07/2017

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan ailem olmak üzere; deneyimi ve sorularıma ışık tutan akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Doç. Dr. Erhan PİŞKİN' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu yüksek lisans çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.17.009) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

VİSKOELASTİK DALGA DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜSTEL BÜYÜMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyhmus ALTINDAĞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

Bu tezin ilk bölümünde diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilmiş olup basit anlamda blow up ve üstel büyüme karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde denklem hakkında bilgi verilecek olup çözümlerin üstel büyümesi ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise tezin esas kısmını oluşturan viskoelastik denklem sisteminin pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin üstel büyümesi çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Üstel büyüme, Doğrusal olmayan Viskoelastik denklem, Damping terim.

ABSTRACT

EXPONENTIAL GROWTH OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF VISCOELASTIC WAVE EQUATIONS

MASTER THESIS

Şeyhmus ALTINDAĞ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2017

In the first chapter of this thesis, differential equations are given, but in a simple sense, blow up and exponential growth are compared.

In the second chapter, the historical developments of the exponential growth of solutions are investigated.

In the third chapter, the basic definitions, theorems and inequalities that will be used in this thesis are provided.

The fourth chapter is weak damping terms that contain the exponential growth of solutions for a system of Viscoelastic wave equations for positive initial energy is studied.

Keywords: Exponential growth, Nonlinear viscoelastic wave equation, damping term.

KISALTMALAR VE SİMGELER

R^n	: n boyutlu Öklit uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega)$	: p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert uzayı
Δ	: Laplasyon
∇	: Nabla operatörü (Gradiyent)

1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan olaylar matematiksel olarak birer problem teşkil etmektedir. Bu problemlere bir yaklaşım olarak matematiksel modeller oluşturmak teorik açıdan bilimin gelişmesine katkı sağlayacaktır. Doğadaki olayların matematiksel olarak ifade edilebilmesi ve anlaşılması için öne sürülen modeller genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin her zaman açık çözümü bulunamayabilir. Çözümü bulunamayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde yaklaşık bir çözüm bulmak veya çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmak için denklemin bazı şartlar ile sınırlandırılması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu problemlerde tam olarak çözüm bulunamasa da hangi şartlar altında ve hangi zamanda çözüm olmadığının araştırılması matematikte bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Çözümün yok olma durumlarından biri; $T > 0$ sonlu zamanda $t \to T^-$ iken çözümün sonsuza gitmesi durumudur. Bu olaya *çözümün patlaması (blow up)* denir. Çözümün yok olma durumlarından bir diğeri ise; $T \to \infty$ iken çözümün sonsuza gitmesi durumudur. Bu olaya *çözümlerin büyümesi* denir.

Blow up ve üstel büyümeyi basit anlamda adi diferansiyel denklemlerle örnekleyecek olursak;

Örnek 1:

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = \frac{1}{3-t}$ olacaktır. $t \to 3^-$ iken çözüm $u(t) \to \infty$ olur. Bu durumda $t = 3$ te blow up olur ve $u(t)$ de $t = 3$ te blow up a sahiptir denir.

Örnek 2:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = e^t$ olacaktır. $t \to \infty$ iken $u(t) \to \infty$ olacağından $u(t)$ üstel büyümeye sahiptir denir.

2

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin dördüncü bölümünde;

Doğrusal olmayan damping terim içeren viskoelastik dalga denklem sistemi

$$\begin{cases} |u_t|^j u_{tt} - \Delta u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u\right) - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\,\Delta u ds + |u_t|^{m-1} u_t = f_1(u,v) \\ |v_t|^j v_{tt} - \Delta v_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{\beta-2} \nabla v\right) - \Delta v + \int\limits_0^t h(t-s)\,\Delta v ds + |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.1}$$

çalışılacaktır.

Dafermos (Dafermos 1970)

$$\rho u_{tt} = c u_{xx} - \int\limits_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, u_{xx} d\tau$$

viskoelastik probleminin çözümlerinin yokluğu üzerine çalışmıştır.

Messaoudi (Messaoudi 2003) kaynak ve damping terim içeren lineer olmayan viskoelastik dalga denklemini

$$u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + u_t |u_t|^{m-1} = u |u|^{p-1}.$$

oluşturmuştur. Bu çalışmada negatif başlangıç enerjisi için $m < p$ olduğu durumlarda çözümlerin blow up ve $m \geq p$ için global varlığı gösterildi.

Cavalcanti ve arkadaşları (Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, Ferreria 2001) lineer olmayan

$$|u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int g(t-s)\,\Delta u(\tau)\,d\tau - \gamma \Delta u_t = bu |u|^{p-2}$$

başlangıç sınır değer problemini $\rho > 0$, $\gamma \geq 0$, $p \geq 2$, $b = 0$ Dirichlet sınır şartıyla çalışmışlardır. $\gamma > 0$ ve $b = 0$ için üstel azalmasını çalışmışlardır.

Messaoudi ve Tatar (Messaoudi ve Tatar, 2007a, 2007b) $\gamma = 0$ ve $b > 0$ için kararlı bir küme oluşturduğunu göstermişlerdir. Başlangıç verileri kararlı bir şekilde ayarlanmışsa çözüm sonsuza kadar devam eder ve fonksiyonun bozunma oranına bağlı olarak çözümler üstel ve polinomal bir azalmayla sıfıra iner.

Han ve Wang (Han, Wang 2009) aşağıdaki lineer olmayan viskoelastik dalga denklem sisteminin başlangıç sınır değer problemini

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau + |u_t|^{m-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)\,d\tau + |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v), \end{cases} \tag{2.2}$$

f_1, f_2, g_1, g_2 fonksiyonları ve bazı başlangıç koşulları altında lokal varlık, global varlık ve blow up ını çalışmışlardır.

Messaoudi ve Said-Houari (Messaoudi ve Said-Houari 2010) (2.2) probleminin başlangıç koşulları ve pozitif başlangıç enerjisiyle global yokluğunu kanıtladılar. Ayrıca Said-Houari ve arkadaşları (Said-Houari, Messaoudi, Guesmia 2011) (2.2) probleminin enerji azalması çalışmalarında bulunmuşlardır. Daha sonra Pişkin (Pişkin 2015, Pişkin 2017) (2.2) probleminin çözümlerinin patlamasını ve patlama zamanı için alt sınır belirleyen çalışmalar yapmıştır.

Liu (Liu 2009) aşağıdaki hemen hemen lineer viskolelastik dalga denklem sistemini

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - c_1 \Delta u_{tt} + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau + f(u,v) = 0, \\ |v_t|^{\rho} v_{tt} - \Delta v - c_2 \Delta v_{tt} + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)\,d\tau + k(u,v) = 0, \end{cases}$$

başlangıç sınır koşullarıyla çalışmıştır.

Ayrıca (2.1) denklem sisteminin bir alt sınıfı olan viskoelastik terim içermeyen

$$\begin{cases} u_{tt} + |u_t|^{p-1} u_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) + f_1(u,v) \\ v_{tt} + |v_t|^{q-1} v_t = \operatorname{div}\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right) + f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin varlık tekliği, patlaması (Fei ve Hongjun 2011; Pişkin ve Polat 2013; Pişkin 2015; Pişkin 2017; Wu ve Li 2011; Wu, Li ve Chai 2010) da çalışılmıştır.

Hao ve arkadaşları (Hao, Niu, Meng, 2014) (2.1) probleminin blow up ını çalışmışlardır.

Bu çalışmada (2.1) problemini pozitif başlangıç enerjisiyle bazı kısıtlamalar altında çözümlerinin üstel büyüdüğünü göstereceğiz.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler yer almaktadır (Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Pişkin 2017). Ayrıca tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. X vektör uzayı olsun. $\overrightarrow{x} \in X$ vektörünü $\|\overrightarrow{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(N_1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$; $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$;

(N_2) $\|a\overrightarrow{x}\| = |a| \, \|\overrightarrow{x}\|$;

(N_3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|\overrightarrow{x}\|$ gösterimine de $\overrightarrow{x}$ in normu denir.

$(X, \|.\|)$ normlu uzay olsun. Bu durumda $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ için

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe normun oluşturduğu metrik denir.

Tanım 3.1.2. (x_n) , $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.3. (x_n) , $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. X normlu uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.5. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (burada $\overline{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(iii) $(ax + by, z) = a\,(x, z) + b\,(y, z)$.

$K = R$ halinde $(x, y) = (y, x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.1.6. Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.7. Ω kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C(\Omega)$ ile gösterilir.

Bu uzaydaki norm ise

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.8. m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere Ω kümesi üzerinde m.mertebeye kadar bütün $D^\alpha u$ türevleri sürekli olan fonksiyonlar $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ dır. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|$$

şeklindedir.

$C^{\infty}(\Omega)$ ise bütün mertebeden türevi var ve sürekli fonksiyonlar uzayıdır. Yani,

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^{m}(\Omega)$$

dır.

Tanım 3.1.9. $C_B(\Omega)\,, C(\Omega)$ daki sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaydır. m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $C_B^m(\Omega)$ ise m.mertebeye kadar bütün $D^{\alpha}u$ türevleri sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayıdır.

Bu uzaydaki norm ise

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup |D^{\alpha}u(x)|$$

şeklindedir.

3.2. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir küme olsun. u ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesque anlamında integrallenebilir ise yani

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir.

Bu uzayda norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.2. $\Omega \subset R^n$ de bir bölge, Ω üzerinde ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaya $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı adı verilir. $L^{\infty}(\Omega)$ üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \|u\|_{\infty} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.3. Ω sınırlı bir bölge olmak üzere $vol\,(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q\,(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p\,(\Omega)$ olacaktır ve

$$\|u\|_p \leq c\,\|u\|_q$$

dır. Burada $c = (vol\,(\Omega))^{(1/p)-(1/q)}$ dır. Yani

$$L^q\,(\Omega) \hookrightarrow L^p\,(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Eğer $u \in L^\infty\,(\Omega)$ ise

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$$

olur. Sonuç olarak, eğer $1 \leq p \leq \infty$ için $u \in L^p\,(\Omega)$ ve $\|u\|_p \leq K$ şartını sağlayan K sabiti varsa $u \in L^\infty\,(\Omega)$ olacaktır ve $\|u\|_\infty \leq K$ yazılabilir.

3.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}\,(\Omega))$

Tanım 3.3.1. Ω, R^n de bir bölge, $m \in Z^+ \cup \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$W^{m,p}\,(\Omega) = \{u \in L^p\,(\Omega) : D^\alpha u \in L^p\,(\Omega)\,, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

uzayı *Sobolev uzayı* olarak adlandırılır. Yani kendisi ve m. mertebeye kadar bütün genelleşmiş türevleri $L^p\,(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonların oluşturduğu uzaya Sobolev uzayı denir.

Bu uzaydaki normlar; $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}\,,$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.2. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $j \geq 0$ ve $m \geq 1$ şeklinde tamsayılar olsun. $p \in [1, \infty)$ için

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \le q < \infty$$

dır. $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \le q < \infty$$

gömülmesi geçerlidir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

yazılabilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \le q \le p^*$$

dır. $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \le q \le p^*$$

gömülmesi geçerlidir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \le mp \end{cases}$$

şeklindedir.

3.4. Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1. (**Cauchy Eşitsizliği**). $a, b \in R$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

dır.

Lemma 3.4.2. (**Young Eşitsizliği**). Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)\, b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}\, q^{-1}$ dır.

Özel olarak $p = q = 2$ alınırsa

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.3. (**Hölder Eşitsizliği**). $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

dır.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.4. (**Green Özdeşliği**).

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

İspat. Tek boyutta

$$(vu_x)_x = v_x u_x + v u_{xx}$$

tir. Benzer şekilde daha yüksek boyutlarda da

$$\nabla(v\nabla u) = \nabla v \nabla u + v\Delta u,$$

$$v\Delta u = \nabla(v\nabla u) - \nabla v \nabla u$$

dır. Buradan integral alınırsa

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega \nabla(v\nabla u)\, dx - \int_\Omega \nabla v\nabla u dx$$

olur. Burada

$$\iiint ...dxdydz = \int_\Omega ...dx$$

olarak gösterilmiştir. Diverjans teoreminden $\int_\Omega \nabla F dx = \int_{\partial\Omega} F.nds$ olduğundan

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u.nds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx,$$

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

bulunur.

.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda (4.1.1) denklem sisteminin pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin üstel büyüdüğünü göstereceğiz. Yani $t \to \infty$ için $\|u\| + \|v\| \to \infty$ olduğunu ispatlayacağız.

4.1. Giriş

Bu çalışmada viskoelastik dalga denklem sistemi için

$$\begin{cases} |u_t|^j u_{tt} - \Delta u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u\right) - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\,\Delta u ds \\ \qquad + |u_t|^{m-1} u_t = f_1(u,v), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ |v_t|^j v_{tt} - \Delta v_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{\beta-2} \nabla v\right) - \Delta v + \int\limits_0^t h(t-s)\,\Delta v ds \\ \qquad + |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \qquad u(x,t) = v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \qquad v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç sınır değer problemi çalışılacaktır. Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip bir bölgedir. $j > 0$, $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$, $m \geq 1$, $r \geq 1$ sabit sayılardır. $f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ lineer olmayan fonksiyonlarını a, $b > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} f_1(u,v) = a\,|u+v|^{2(p+1)}(u+v) + b\,|u|^p\, u\,|v|^{p+2} \\ f_2(u,v) = a\,|u+v|^{2(p+1)}(u+v) + b\,|v|^p\, v\,|u|^{p+2} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

şeklinde seçelim. Burada p

$$\begin{cases} p > -1, & n = 1,2, \\ -1 < p \leq 1, & n = 3 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

koşullarını sağlasın.

Kabul edelim ki g ve h fonksiyonları sürekli, negatif olmayan ve artmayan

$$\begin{cases} 1 - \int\limits_0^\infty g(s)\,ds = l > 0, \\ 1 - \int\limits_0^\infty h(s)\,ds = k > 0 \end{cases}$$

fonksiyonlar olsun.

$\forall (u,v) \in R^2$ için

$$uf_1(u,v) + vf_2(u,v) = 2(p+2)F(u,v),$$

yazılabilir. Burada

$$F(u,v) = \frac{1}{2(p+2)}\left[a|u+v|^{2(p+2)}(u+v) + 2b|uv|^{p+2}\right]$$

ve

$$f_1(u,v) = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}, \quad f_2(u,v) = \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}$$

yazılabilir.

Şimdi bazı fonksiyonelleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} I(t) &= I(u,v) = \left(1 - \int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \left(1 - \int\limits_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2 \\ &\quad -2(p+2)\int\limits_\Omega F(u,v)\,dx + (g \circ \nabla u + h \circ \nabla v) + \frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

ve

$$\begin{aligned} J(t) &= J(u,v) = \frac{1}{2}\left(1 - \int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int\limits_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2 \\ &\quad -\int\limits_\Omega F(u,v)\,dx + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u + h \circ \nabla v) + \frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

dır.

Enerji fonksiyoneli ise

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{j+2}\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2 \\ &-\int_\Omega F(u,v)\,dx+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v)+\frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$(\phi\circ\psi)(t)=\int_0^t \phi(t-\tau)\int_\Omega |\psi(t)-\psi(\tau)|^2\,dxd\tau$$

dır.

Şimdi $E(t)$ yi nasıl elde ettiğimizi gösterelim. Bunun için (4.1.1) denklem sisteminin birinci denklemi u_t ve ikinci denklemi v_t ile çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned} &\underbrace{u_t|u_t|^j u_{tt}+v_t|v_t|^j v_{tt}}_{A_1}-\underbrace{(u_t\Delta u_{tt}+v_t\Delta v_{tt})}_{A_2} \\ &-\underbrace{\left(u_t\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u\right)+v_t\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\right)}_{A_3}-\underbrace{(u_t\Delta u+v_t\Delta v)}_{A_4} \\ &\underbrace{+u_t\int_0^t g(t-s)\Delta u ds+v_t\int_0^t h(t-s)\Delta v ds}_{A_5}+\underbrace{u_t|u_t|^{m-1}u_t+v_t|v_t|^{r-1}v_t}_{A_6} \\ = &\underbrace{u_t f_1(u,v)+v_t f_2(u,v)}_{A_7} \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi bu ifadenin Ω bölgesi üzerinde integralini alalım. Ve kolaylık olsun diye $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ve A_7 şeklinde yukarıda gösterdiğimiz ifadeleri hesaplayalım.

A_1 ifadesi,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \left(u_t \left| u_t \right|^j u_{tt} + v_t \left| v_t \right|^j v_{tt} \right) dx &= \int\limits_{\Omega} \left(\left| u_t \right|^{j+1} u_{tt} + \left| v_t \right|^{j+1} v_{tt} \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{j+2} \frac{d}{dt} \left(\left| u_t \right|^{j+2} + \left| v_t \right|^{j+2} \right) dx \\
&= \frac{1}{j+2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \left(\left| u_t \right|^{j+2} + \left| v_t \right|^{j+2} \right) dx \\
&= \frac{1}{j+2} \frac{d}{dt} \left(\left\| u_t \right\|_{j+2}^{j+2} + \left\| v_t \right\|_{j+2}^{j+2} \right)
\end{aligned}$$

olur.

A_2 ifadesi,

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} \left(u_t \Delta u_{tt} + v_t \Delta v_{tt} \right) dx &= -\int\limits_{\partial\Omega} \left(u_t \frac{\partial u_{tt}}{\partial \eta} + v_t \frac{\partial v_{tt}}{\partial \eta} \right) ds \\
&\quad + \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u_t \nabla u_{tt} + \nabla v_t \nabla v_{tt} \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left| \nabla u_t \right|^2 + \left| \nabla v_t \right|^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \left(\left| \nabla u_t \right|^2 + \left| \nabla v_t \right|^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \nabla u_t \right\|^2 + \left\| \nabla v_t \right\|^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

A_3 ifadesi,

$$\begin{aligned}
& -\int\limits_{\Omega}\left(u_t \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u\right)+v_t \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\right)dx \\
= & -\int\limits_{\partial\Omega}\left(u_t|\nabla u|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial\eta}+v_t|\nabla v|^{\beta-2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)ds \\
& +\int\limits_{\Omega}\left(\nabla u_t|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u+\nabla v_t|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)dx \\
= & \int\limits_{\Omega}\left(\nabla u_t|\nabla u|^{\alpha-1}+\nabla v_t|\nabla v|^{\beta-1}\right)dx \\
= & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha}+\frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_{\beta}^{\beta}\right)
\end{aligned}$$

olur.

A_4 ifadesi,

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega}(u_t\Delta u+v_t\Delta v)\,dx &= -\int\limits_{\partial\Omega}\left(u_t\frac{\partial u}{\partial\eta}+v_t\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)ds \\
&\quad +\int\limits_{\Omega}(\nabla u_t\nabla u+\nabla v_t\nabla v)\,dx \\
&= \int\limits_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right)
\end{aligned}$$

olur.

A_5 ifadesi,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} u_t \int\limits_0^t g(t-s)\,\Delta u ds dx + \int\limits_{\Omega} v_t \int\limits_0^t h(t-s)\,\Delta v ds dx \\
=\;& \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t u_t g(t-s)\,\Delta u ds dx + \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t v_t h(t-s)\,\Delta v ds dx \\
=\;& \int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{\Omega} u_t \Delta u dx ds + \int\limits_0^t h(t-s)\int\limits_{\Omega} v_t \Delta v dx ds \\
=\;& -\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx ds - \int\limits_0^t h(t-s)\int\limits_{\Omega} \nabla v_t \nabla v dx ds \\
=\;& -\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{\Omega} \nabla u_t\left[\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right] dx ds \\
& -\int\limits_0^t h(t-s)\int\limits_{\Omega} \nabla v_t\left[\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right] dx ds \\
=\;& \int\limits_0^t g(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]^2 dx ds \\
& -\int\limits_0^t g(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\nabla u(t)\right]^2 dx ds \\
& +\int\limits_0^t h(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\nabla v(s) - \nabla v(t)\right]^2 dx ds \\
& -\int\limits_0^t h(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\nabla v(t)\right]^2 dx ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} u_t \int\limits_0^t g(t-s)\,\Delta u ds dx + \int\limits_{\Omega} v_t \int\limits_0^t h(t-s)\,\Delta v ds dx \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u) - \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(s)\,\|\nabla u(t)\|^2\, ds \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^t g'(s)\,\|\nabla u(t)\|^2\, ds + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\circ\nabla v) - \frac{1}{2}(h'\circ\nabla v) \\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t h(s)\,\|\nabla v(t)\|^2\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t h'(s)\,\|\nabla v(t)\|^2\, ds \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[g\circ\nabla u - \int\limits_0^t g(s)\,\|\nabla u(t)\|^2\, ds \\
&+h\circ\nabla v - \int\limits_0^t h(s)\,\|\nabla v(t)\|^2\, ds\Bigg] \\
&-\frac{1}{2}\Bigg[g'\circ\nabla u - \int\limits_0^t g'(s)\,\|\nabla u(t)\|^2\, ds \\
&+h'\circ\nabla v - \int\limits_0^t h'(s)\,\|\nabla v(t)\|^2\, ds\Bigg]
\end{aligned}$$

olur.

A_6 ifadesi,

$$\int\limits_{\Omega} |u_t|^{m+1}\, dx + \int\limits_{\Omega} |v_t|^{r+1}\, dx = \|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}$$

dır.

A_7 ifadesi için, (4.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&[u_t f_1(u,v) + v_t f_2(u,v)]\, dx \\
= \ & \int \left[a\,|u+v|^{2p+3}(u_t+v_t) + b\,(uv)^{p+1}(uu_t+vv_t)\right] dx \\
= \ & \int \frac{1}{2(p+2)}\frac{d}{dt}\left[a\,|u+v|^{2p+2} + 2b\,(uv)^{p+2}\right] dx \\
= \ & \int \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2(p+2)}\left(a\,|u+v|^{2p+2} + 2b\,(uv)^{p+2}\right)\right] dx \\
= \ & \frac{d}{dt}\int F(u,v)dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ve A_7 ifadeleri (4.1.7) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= -\left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{m+1}^{m+1}\right) + \frac{1}{2}\left(g' \circ \nabla u + h' \circ \nabla v\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(g(t)\|\nabla u\|^2 + h(t)\|\nabla v\|^2\right)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{j+2}\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(1 - \int_\Omega g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_\Omega h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2 - \int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(g \circ \nabla u + h \circ \nabla v\right) + \frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta\end{aligned}$$

dır.

4.2. Pozitif Başlangıç Enerjisi için Çözümlerin Üstel Büyümesi

Bu kısımda, (4.1.1) probleminin çözümlerinin üstel büyümesini inceleyeceğiz.

Lemma 4.2.1. Kabul edelim ki (4.1.3) sağlansın. $\eta > 0$ için (u,v)

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{p+2}^{p+2} &\le \eta\left[\frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta\right. \\ &\qquad \left. +I_1\|\nabla u\|^2 + I_2\|\nabla v\|^2\right]^{p+2}\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x,t) : |u(x,t)| \le 1,\ |v(x,t)| \le 1\} \\ \Omega_2 &= \{(x,t) : |u(x,t)| \le 1,\ |v(x,t)| \ge 1\}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$I_1 = \int_{\Omega_1} |u_t|\left(|u|^{2p+3} + |v|^{2p+3} + |u|^{p+1}|v|^{p+2}\right)dx$$

ve

$$I_2 = \int_{\Omega_2} |v_t|\left(|u|^{2p+3} + |v|^{2p+3} + |u|^{p+2}|v|^{p+1}\right)dx$$

şeklindedir (Hao ve Cai 2015, Fei ve Hongjun 2011).

Lemma 4.2.2. Kabul edelim ki (4.1.3), $E(0) < E_1$ ve

$$\left[\frac{1}{\alpha}\|\nabla u_0\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v_0\|_\beta^\beta + I(0)\right]^{\frac{1}{2}} > \alpha_1$$

sağlansın. $\alpha_2 > \alpha_1$ olmak üzere

$$\left[\frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta + I(t)\right]^{\frac{1}{2}} > \alpha_2,$$

$$\left(\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|uv\|_{p+2}^{p+2}\right)^{\frac{1}{2(p+2)}} > B\alpha_2$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$B = \eta^{\frac{1}{2(p+2)}},\ \alpha_1 = B^{-\frac{p+2}{p+1}},\ E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+2)}\right)\alpha_1^2$$

dır (Hao ve Cai 2015, Fei ve Hongjun 2011).

Teorem 4.2.3. Kabul edelim ki

$$\max\{j+2, m+1, r+1\} < 2(p+2)$$

ve γ sabiti için

$$\max\{\alpha,\beta\} < \gamma < 2(p+2) \text{ ve } \min\{l,k\} > \frac{1/(2\gamma)}{(\gamma/2) - 1 + 1/(2\gamma)}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Ayrıca

$$E(0) < E_1 \le (p+1)\int_\Omega F(u,v)\,dx$$

olsun. Bu durumda (4.1.1) denklem sisteminin çözümleri üstel büyür.

İspat.

$$H(t) = E_1 - E(t),$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$0 < H(0) \le H(t) \le \int_\Omega F(u,v)\,dx \le \frac{C_1}{2(p+2)}\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right) \tag{4.1.8}$$

dir.

$$L(t) = H(t) + \frac{\varepsilon}{j+1}\int\limits_{\Omega}\left(|u_t|^j u_t u + |v_t|^j v_t v\right)dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega}(\Delta u u_t + \Delta v v_t)\,dx,$$

şeklinde tanımlayalım. Burada ε daha sonra belirlenecek pozitif bir sabit ve

$$0 < \delta \le \min\left\{\frac{2(p+2)-(j+2)}{2(p+2)(j+2)}, \frac{2(p+2)-(m+1)}{2m(p+2)}, \frac{2(p+2)-(r+1)}{2r(p+2)}, \frac{\alpha-2}{2\alpha}, \frac{\beta-2}{2\beta}\right\} \tag{4.1.9}$$

dır.

$L(t)$ türevini alırsak,

$$\begin{aligned} L'(t) &= H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega}\left[\left(|u_t|^j u_{tt} u + |v_t|^j v_{tt} v\right) + \frac{1}{j+1}\left(|u_t|^{j+2} + |v_t|^{j+2}\right)\right]dx \\ &\quad + \varepsilon\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) - \varepsilon\int\limits_{\Omega}(u\Delta u_{tt} + v\Delta v_{tt})\,dx \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olur. Burada (4.1.1) denkleminde u_{tt} ve v_{tt} terimleri çekilip yukarıda yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= H'(t) + \frac{\varepsilon}{j+1}\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right) - \varepsilon\int\limits_{\Omega}\left(u|u_t|^{m-1}u_t + v|v_t|^{r-1}v_t\right)dx \\ &\quad + \varepsilon\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) - \varepsilon\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) - \varepsilon\left(\|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha} + \|\nabla v\|_{\beta}^{\beta}\right) \\ &\quad + 2\varepsilon(p+2)\int\limits_{\Omega}F(u,v)dx + \varepsilon\left(\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \varepsilon\left(\int\limits_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2 \\ &\quad + \varepsilon\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{\Omega}\nabla u\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]dxds \\ &\quad + \varepsilon\int\limits_0^t h(t-s)\int\limits_{\Omega}\nabla v\left[\nabla v(s) - \nabla v(t)\right]dxds \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur.

Son iki terime sırasıyla Hölder ve Young eşitsizlikleri uygulandığında

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dxds \\
\leq\ & \int_0^t g(t-s)\left(\int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \left|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
\leq\ & \int_0^t g(t-s)\left\|\nabla u(t)\right\|\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\| ds \\
\leq\ & \int_0^t g(t-s)\left(\lambda\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2+\frac{1}{4\lambda}\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right) ds \\
\leq\ & \lambda\int_0^t g(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds \\
& +\frac{1}{4\lambda}\int_0^t g(t-s)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 ds \\
\leq\ & \lambda(g\circ\nabla u)+\frac{1}{4\lambda}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 \qquad (4.1.12)
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla v\left[\nabla v(s)-\nabla v(t)\right]dxds \\
\leq\ & \int_0^t h(t-s)\left(\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla v(s)-\nabla v(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
\leq\ & \int_0^t h(t-s)\left\|\nabla v(t)\right\|\left\|\nabla v(s)-\nabla v(t)\right\| ds \\
\leq\ & \int_0^t h(t-s)\left(\lambda\left\|\nabla v(s)-\nabla v(t)\right\|^2+\frac{1}{4\lambda}\left\|\nabla v(t)\right\|^2\right) ds \\
\leq\ & \lambda\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla v(s)-\nabla v(t)\right\|^2 ds \\
& +\frac{1}{4\lambda}\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla v(t)\right\|^2 ds \\
\leq\ & \lambda(h\circ\nabla v)+\frac{1}{4\lambda}\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\left\|\nabla v(t)\right\|^2 \qquad (4.1.13)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1.12) ve (4.1.13) , (4.1.11) te yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L'(t)\ \geq\ & H'(t)+\frac{\varepsilon}{j+1}\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)-\varepsilon\int_\Omega\left(u\,|u_t|^{m-1}u_t+v\,|v_t|^{r-1}v_t\right)dx \\
& +\varepsilon\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)-\varepsilon\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right)-\varepsilon\left(\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\|\nabla v\|_\beta^\beta\right) \\
& +2\varepsilon(p+2)\int_\Omega F(u,v)dx+\varepsilon\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 \\
& +\varepsilon\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2+\varepsilon\lambda\left(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v\right) \\
& +\frac{\varepsilon}{4\lambda}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2+\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2\right] \qquad (4.1.14)
\end{aligned}$$

ve $0<\lambda<\frac{\gamma}{2}$ olmak üzere, (4.1.14) e $\gamma\int\limits_{\Omega}F(u,v)\,dx$ eklenip çıkartılırsa;

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}F(u,v)\,dx &= H(t)-E_1+\frac{1}{j+2}\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(1-\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\left(1-\int\limits_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v\|^2\\ &+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v)+\frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\frac{1}{\beta}\|\nabla v\|_\beta^\beta \qquad (4.1.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq H'(t)+\varepsilon\left(\frac{1}{j+1}+\frac{\gamma}{j+2}\right)\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)\\ &+\varepsilon(2(p+2)-\gamma)\int\limits_{\Omega}F(u,v)\,dx\\ &+\varepsilon\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)+\gamma\varepsilon H(t)-\varepsilon\gamma E_1\\ &+\varepsilon\left[\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)-\left(\frac{\gamma}{2}-1+\frac{1}{4\lambda}\right)\int\limits_0^\infty g(s)\,ds\right]\|\nabla u\|^2\\ &+\varepsilon\left[\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)-\left(\frac{\gamma}{2}-1+\frac{1}{4\lambda}\right)\int\limits_0^\infty h(s)\,ds\right]\|\nabla v\|^2\\ &+\varepsilon\left(\frac{\gamma}{2}-\lambda\right)(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v)+\varepsilon\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\varepsilon\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\|\nabla v\|_\beta^\beta\\ &-\varepsilon\int\limits_{\Omega}\left(u|u_t|^{m-1}u_t+v|v_t|^{r-1}v_t\right)dx \qquad (4.1.16)\end{aligned}$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}|u_t|^{m-1}u_t u\,dx &\leq \frac{\delta_1^{m+1}}{m+1}\|u\|_{m+1}^{m+1}+\frac{m\delta_1^{-\frac{m+1}{m}}}{m+1}\|u_t\|_{m+1}^{m+1}\\ &\leq \frac{\delta_1^{m+1}}{m+1}\|u\|_{m+1}^{m+1}+\frac{m\delta_1^{-\frac{m+1}{m}}}{m+1}H'(t) \qquad (4.1.17)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |v_t|^{r-1} v_t v dx &\leq \frac{\delta_2^{r+1}}{r+1} \|v\|_{r+1}^{r+1} + \frac{r\delta_2^{-\frac{r+1}{r}}}{r+1} \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \\ &\leq \frac{\delta_2^{r+1}}{r+1} \|v\|_{r+1}^{r+1} + \frac{r\delta_2^{-\frac{r+1}{r}}}{r+1} H'(t) \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

yazılabilir.

$L^{2(p+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m+1}(\Omega)$, $L^{2(p+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ gömülmelerinden dolayı

$$\|u\|_{m+1}^{m+1} \leq C_2 \left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right)^{\frac{m+1}{2(p+2)}} \tag{4.1.19}$$

ve

$$\|v\|_{r+1}^{r+1} \leq C_3 \left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right)^{\frac{r+1}{2(p+2)}} \tag{4.1.20}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

$$z^v \leq z + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{a}\right)(z + a), \quad \forall z \geq 0,\ 0 < v \leq 1, \tag{4.1.21}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right)^{\frac{m+1}{2(p+2)}} &\leq d\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(0) \right) \\ &\leq d\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(t) \right) \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right)^{\frac{r+1}{2(p+2)}} &\leq d\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(0) \right) \\ &\leq d\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(t) \right) \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

eşitsizlikleri yazılır. Burada $d = 1 + \frac{1}{H(0)}$ dır.

γ sabiti

$$\min\left\{ \frac{\gamma}{\alpha} - 1,\ \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right\} > 0$$

ve

$$1 + \frac{\gamma}{2} > 0$$

eşitsizliklerini sağlasın.

(4.1.16)-(4.1.20), (4.1.13), (4.1.22) ve (4.1.23) ten

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq\; & \left(1+\frac{m\delta_1^{-\frac{m+1}{m}}}{m+1}+\frac{r\delta_2^{-\frac{r+1}{r}}}{r+1}\right)H'(t)+\varepsilon\left(\frac{1}{j+1}+\frac{\gamma}{j+2}\right)\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)\\
& -\left(\frac{\delta_1^{m+1}c_2d}{m+1}+\frac{\delta_2^{r+1}c_3d}{r+1}\right)\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}+\|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right)\\
& +\varepsilon\left(\gamma-\left(\frac{\delta_1^{m+1}c_2d}{m+1}+\frac{\delta_2^{r+1}c_3d}{r+1}\right)\right)H(t)\\
& +\varepsilon\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right)+\varepsilon\left(2(p+2)-\gamma(p+2)\right)\int_\Omega F(u,v)\,dx\\
& +\varepsilon\left[\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)-\left(\frac{\gamma}{2}-1+\frac{1}{4\lambda}\right)\int_0^\infty g(s)\,ds\right]\|\nabla u\|^2\\
& +\varepsilon\left(\frac{\gamma}{2}-\lambda\right)(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v)\\
& +\varepsilon\left[\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)-\left(\frac{\gamma}{2}-1+\frac{1}{4\lambda}\right)\int_0^\infty h(s)\,ds\right]\|\nabla v\|^2\\
& +\varepsilon\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\varepsilon\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\|\nabla v\|_\beta^\beta .
\end{aligned}$$

yazılır ve (4.1.8) den dolayı

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq\; & MH'(t)+\varepsilon\left(\frac{1}{j+1}+\frac{\gamma}{j+2}\right)\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2}+\|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right)+\varepsilon(\gamma-K_1)H(t)\\
& +\varepsilon K_2\left(\|\nabla u\|_\alpha^\alpha+\|\nabla v\|_\beta^\beta\right)+\varepsilon K_3\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right)\\
& +\varepsilon\left(\frac{\gamma}{2}-\lambda\right)(g\circ\nabla u+h\circ\nabla v)+\varepsilon\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\\
& +\varepsilon\left(\frac{(2(p+2)-\gamma(p+2))C_1}{2(p+2)}-K_1\right)\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}+\|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right),
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
M &= 1+\frac{m\delta_1^{-\frac{m+1}{m}}}{m+1}+\frac{r\delta_2^{-\frac{r+1}{r}}}{r+1},\\
K_1 &= \frac{\delta_1^{m+1}c_2d}{m+1}+\frac{\delta_2^{r+1}c_3d}{r+1},\\
K_2 &= \min\left\{\frac{\gamma}{\alpha}-1,\frac{\gamma}{\beta}-1\right\}
\end{aligned}$$

ve

$$K_3=\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)-\left(\frac{\gamma}{2}-1+\frac{1}{4\lambda}\right)\max\left(\int_0^\infty g(s)\,ds,\int_0^\infty h(s)\,ds\right)$$

dır. δ_1 ve δ_2 sabitleri uygun seçilerek

$$b_1 = \gamma - K_1 > 0, \qquad b_2 = \frac{(2(p+2) - \gamma(p+2))C_1}{2(p+2)} - K_1 > 0 \text{ ve } M > 0$$

yapılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & MH'(t) + \varepsilon\left(\frac{1}{j+1} + \frac{\gamma}{j+2}\right)\left(\|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right) \\ & + \varepsilon K_2\left(\|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \|\nabla v\|_\beta^\beta\right) + \varepsilon\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\ & + \varepsilon b_1 H(t) + \varepsilon b_2\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $t > 0$ için $H'(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \tilde{K}(H(t) + \|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2} + \|\nabla u\|_\alpha^\alpha + \|\nabla v\|_\beta^\beta \\ & + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 + \|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{K} = \min\left\{\varepsilon b_1, \varepsilon\left(\frac{1}{j+1} + \frac{\gamma}{j+2}\right), \varepsilon K_2, \varepsilon\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right), \varepsilon b_2\right\}$ dır.

Diğer taraftan,

$$L(0) = H(0) + \varepsilon\int_\Omega (u_0 u_1 + v_0 v_1)\, dx > 0 \tag{4.1.25}$$

olacak şekilde ε yeterince küçük seçelim.

Ayrıca $t \geq 0$ için

$$L(t) \geq L(0) \tag{4.1.26}$$

olur.

$$L(t) = H(t) + \frac{\varepsilon}{j+1}\int_\Omega \left(|u_t|^j u_t u + |v_t|^j v_t v\right) dx - \varepsilon\int_\Omega (\Delta u u_t + \Delta v v_t)\, dx$$

olduğundan

$$\left|\frac{\varepsilon}{j+1}\int_\Omega \left(|u_t|^j u_t u + |v_t|^j v_t v\right) dx - \varepsilon\int_\Omega (\Delta u u_t + \Delta v v_t)\, dx\right| \tag{4.1.27}$$

terimi için kestirim elde edelim.

(4.1.27) daki birinci terim için Young eşitsizliği kullanılırsa $\forall\mu_1 > 0$

$$\left|\int_\Omega |u_t|^{j+1}\, u dx\right| \leq \frac{\mu_1^{j+2}}{j+2}\|u\|_{j+2}^{j+2} + \frac{(j+1)\,\mu_1^{-\frac{j+2}{j+1}}}{j+2}\|u_t\|_{j+2}^{j+2}, \tag{4.1.28}$$

olur. $L^{2(p+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^{j+2}(\Omega)$ gömülmesi kullanılırsa, (4.1.28) dan

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |u_t|^{j+1}\, u dx\right| &\leq C\left(\|u\|_{2(p+2)}^{j+2} + \|u_t\|_{j+2}^{j+2}\right) \\ &\leq C\left(\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right)^{\frac{j+2}{2(p+2)}} + \|u_t\|_{j+2}^{j+2}\right)\end{aligned}$$

olur.

$2(p+2) > j+2$ ve $H(t) > H(0)$ olduğundan (4.1.21) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |u_t|^{j+1}\, u dx\right| &\leq C\left[\left(1+\frac{1}{H(0)}\right)\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(0)\right) + \|u_t\|_{j+2}^{j+2}\right] \\ &\leq C\left[\left(1+\frac{1}{H(0)}\right)\left(\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(t)\right) + \|u_t\|_{j+2}^{j+2}\right]\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left|\int_\Omega |v_t|^{j+1}\, v dx\right| \leq C\left[\left(1+\frac{1}{H(0)}\right)\left(\|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + H(t)\right) + \|v_t\|_{j+2}^{j+2}\right] \tag{4.1.30}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.1.27) daki ikinci terim için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t \Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\ &\leq -\left(\int_\Omega (\nabla u)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (\nabla u_t)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\|\nabla u\|\,\|\nabla u_t\|\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

ve

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} v_t \Delta v dx &= \int\limits_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial \eta} ds - \int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx = -\int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \\ &\leq -\left(\int\limits_{\Omega} (\nabla v)^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla v_t)^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\|\nabla v\| \, \|\nabla v_t\| \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $L^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $L^{\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmeleri (4.1.31) ve (4.1.32) e uygulanırsa

$$\|\nabla u\| \, \|\nabla u_t\| \leq C \|\nabla u\|_{\alpha} \|\nabla u_t\|, \qquad \|\nabla v\| \, \|\nabla v_t\| \leq C \|\nabla v\|_{\beta} \|\nabla v_t\| \tag{4.1.33}$$

bulunur. (4.1.33) e Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{\alpha} \|\nabla u_t\| &\leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_{\alpha}^2 + \|\nabla u_t\|^2\right), \\ \|\nabla v\|_{\beta} \|\nabla v_t\| &\leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_{\alpha}^2 + \|\nabla v_t\|^2\right)\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olur.

$\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$ ve $H(t) > H(0)$ olduğundan (4.1.21) eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{\alpha}^2 &= \left(\|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha} + H(0)\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha} + H(t)\right)\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{\beta}^2 &= \left(\|\nabla v\|_{\beta}^{\beta}\right)^{\frac{2}{\beta}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|\nabla v\|_{\beta}^{\beta} + H(0)\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)}\right)\left(\|\nabla v\|_{\beta}^{\beta} + H(t)\right)\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

(4.1.28)-(4.1.36) birlikte değerlendirilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon}{j+1} \int_{\Omega} \left(|u_t|^j \, u_t u + |v_t|^j \, v_t v \right) dx - \varepsilon \int_{\Omega} \left(\Delta u u_t + \Delta v v_t \right) dx \right| \\ \leq \; & \mu (H(t) + \|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2} + \|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha} + \|\nabla v\|_{\beta}^{\beta} + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \\ & + \|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan

$$\begin{aligned} L(t) \; \leq \; & C^* (H(t) + \|u_t\|_{j+2}^{j+2} + \|v_t\|_{j+2}^{j+2} + \|\nabla u\|_{\alpha}^{\alpha} + \|\nabla v\|_{\beta}^{\beta} + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \\ & + \|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}). \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (4.1.24) ve (4.1.37) dan $\forall t \geq 0$ için

$$L'(t) \leq C^* L(t) \tag{4.1.38}$$

yazılır. Burada C^* pozitif sabittir. (4.1.38) da 0 dan t ye integral alınırsa $L(t)$,

$$L(t) \geq L(0) \, e^{C^* t}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.2.3 kanıtlanmış olur.

.

32

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmasının asıl kısmını oluşturan bölüm pozitif başlangıç enerjisine sahip olan viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin üstel büyümesidir.

Ele alınan denklemin patlaması farklı metotlarla çalışılabilir. Ayrıca problemin farklı matematiksel davranışları ele alınabilir. Sınırlı bölgelerde çalıştığımız problem sınırsız bir bölgeye genişletilebilir.

.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

Brezis, H. 2011. Functional analysis. Sobolev Spaces and partial differential equations, Springer.

Cavalcanti, MM., Domingos Cavalcanti, VN., Ferreira, J. 2001. Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. *Math. Methods Appl. Sci.,* 24: 1043-1053.

Dafermos, CM. 1970. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.,* 37: 297-308.

Evans, L.C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19.

Fei, L., Hongjun, G. 2011. Global nonexistence of positive initial-energy solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis,* Vol. 14 pages.

Han, X., Wang, M. 2009. Global existence and blow-up solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source. *Nonlinear Anal.,* TMA 71: 5427-5450.

Hao, J., Cai, L. 2015. Global existence and blow up solutions for nonlinear coupled wave equations with viscoelastic terms. *Math. Meth. Appl. Sci.*

Hao, J., Niu, S., Meng, H. 2014: Global nonexistence of solutions for nonlinear coupled viscoelastic wave equations with damping and source terms. *Boundary Value Problems,* 250.

Hrusa, WJ. 1985. Global existence and asymptotic stability for a semilinear Volterra equation with large initial data. *SIAM J. Math. Anal.,* 16(1): 110-134.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons, İndia.

Liu, W. 2009. Uniform decay of solutions for a quasilinear system of viscoelastic equations. *Nonlinear Anal.,* TMA 71: 2257-2267.

Messaoudi, SA. 2003. Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. *Math. Nachr.,* 260: 58-66.

Messaoudi, SA. 2006. Blow up of positive-initial-energy solutions of a linear viscoelastic hyperbolic equation. *J. Math. Anal. Appl.,* 320: 902-915.

Messaoudi, SA., Tatar, NE. 2007a. Global existence and oniform stability of solutions for quasilinear viscoelastic problem. *Math. Methods Appl. Sci.,* 30: 665-680.

Messaoudi, SA., Tatar, NE. 2007b. Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation. *Nonlinear Anal.,* TMA 68: 785-793.

Messaoudi, SA., Said-Houari, B. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. *J. Math. Anal. Appl.,* 365: 277-287.

Munoz Rivera, JE. 1994. Asymptotic behavior in linear viscoelsticity. *Q. Appl. Math.,* 52(4): 628-648.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları. Seçkin Yayıncılık.

Pişkin E. 2015. Global nonexistence of solutions for a system of viscoelstic wave equations with weak damping terms. *Malaya J. Mat.*, 3(2): 168-174.

Pişkin E. 2015. Growth of Solutions with Positive Initial Energy to Systems of Nonlinear Wave Equations with Damping and Source Terms. *Advances in Mathematical Physics.*

Pişkin E. 2017. A lower bound for the blow up time of a system of viscoelastic wave equations with nonlinear damping and source terms. *J. Nonlinear Funct. Anal.*, 1-9.

Pişkin E. 2017. Exponential growth of solutions for a coupled nonlinear wave equations with nonlinear damping and source terms. *Palestine Journal of Mathematics*, 6(2): 396-402.

Pişkin E., Polat N. 2013. Global existence, decay and blow up solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. *Turk. J. Math.*, 37: 633–651.

Said-Houari, B., Messaoudi, SA., Guesmia, A. 2011. General decay of solutions of a nonlinear system of viscoelastic wave equations. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.,* 18: 659-684.

Wu J, Li S. 2011. Blow up for coupled nonlinear wave equations with damping and source. *Appl. Math. Lett.*, 24: 1093-1098.

Wu J, Li S, Chai S. 2010. Existence and nonexistence of a global solution for coupled nonlinear wave equations with damping and source. *Nonlinear Anal.*, 72: 3969-3975.

.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Diyarbakır ilinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimi Diyarbakır'da tamamladım. 2011 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2014 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullarda öğretmenlik yapmaktayım.

Çalışmaları

Bildiriler

• E. Pişkin, Ş. Altındağ, Exponential growth of solutions with positive initial energy to systems of nonlinear wave equations, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016), 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey, pp 322.

• E. Pişkin, Ş. Altındağ, Growth of solutions for nonlinear coupled wave equations with damping terms, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2017), 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.

Projeler

• Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi (ZGEF.17.09) (Proje Yürütücüsü: Doç.Dr. Erhan Pişkin, Araştırmacı: Şeyhmus Altındağ).

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Şeyhmus ALTINDAĞ
ÖĞRENCİ NO	15804002
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2016-2017
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	46
BENZERLİK ORANI	%17
RAPORLAMA TARİHİ	04/07/ 2017

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 46 sayfalık kısmına ilişkin, 04/07/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 17 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☒ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Şeyhmus ALTINDAĞ

04/07/2017 Doç.Dr. Erhan PİŞKİN **Tez Danışmanı**	04/07/2017 Doç.Dr. Bilal ÇEKİÇ **Anabilim Dalı Başkanı** ✓.