T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN HERMİTYEN SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Pınar BARAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran-2018

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Pınar BARAN tarafından yapılan "Hemen Hemen Hermityen Submersiyonların Geometrisi Üzerine " konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

Üye : Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP (Danışman)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA Yasin Kaya

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 20/06/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2018

Doç.Dr. Sevtap SÜMER EKER

Enstitü Müdürü V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmada yol göstererek yardım ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP' e teşekkür ederim.

Bu süreçte sabır ve anlayışla yanımda olan, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini sürekli arkamda hissetiğim aileme beni motive eden arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

HEMEN HEMEN HERMİTYEN SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar BARAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde çeşitli submersiyon konuları özellikle Hermityen submersiyonlarının tarihi ve yapılan çalışmalar verilmiştir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak temel kavramlar, önerme ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde submersiyonlar konusuna özellikle submersiyon ve Riemann submersiyonun tanımları, özellikleri ve örneklerine değinilmiştir. Hemen hemen Hermityen submersiyonların inşasında kullanılacak Riemann submersiyonların temel tensörleri ve özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde hemen hemen Hermityen submersiyonlar çalışılmıştır. Hemen hemen Hermityen submersiyonlar tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Bu submersiyonların özellikleri üzerinde yoğunlaşılmıştır. Bununla birlikte kuaterniyonik submersiyonlar üzerine çalışılmaktadır. Hemen hemen kuaterniyonik manifoldlar tanımlanmıştır. Kuaterniyonik submersiyonun özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen Hermityen manifoldlar, hemen hemen Hermityen submersiyonlar, kuaterniyonik manifoldlar, kuaterniyonik submersiyonlar, Riemann submersiyonlar.

ABSTRACT

ON THE GEOMETRY OF ALMOST HERMITIAN SUBMERSIONS

MASTER THESIS

Pınar BARAN

DICLE UNIVERSITY
INSITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMANT OF MATHEMATIC

2018

This graduate thesis consist of five chapters.

The first chapter is the introduction section and this chapter contains the history of various topic of submersions particularly Hermitian submersions.

The second chapter includes basic concepts, propositions and theorems which are going to be used in other parts.

In the third chapter, submersions in particular definitions, properties and examples of submersions and Riemannian submermersions were mentioned. The basics tensors and properties of Riemannian submersions that be used in the construct almost Hermitian submersion were examined. Theorems that be used in the next chapter are stated.

In the fourth chapter, almost Hermitian submersions were studied. Almost Hermitian submersions were defined and examples were given. It was focused on properties of this submersions. In addition that quaternionic submersions were studied. The almost quaternionic manifolds were defined. The properties of quaternionic submersions were examined.

In the fifth chapter, discussions and conclusions were taken.

Key Words: Almost Hermitian manifolds, almost Hermitian submersions, quaternionic manifolds, quaternionic submersions, Riemannian submersions.

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi
g	: Metrik Tensör
TpM	: Tanjant Uzay
TM	: Tanjant Demeti
$(M,\mathbb{R}$	: M den $\mathbb{R}$' ye Diferensiyellenebilir Fonksiyonların Cümlesi
	: Manifold
$\|\| \|\|$	: Norm
∇	: Riemann Konneksiyon
$\chi(M)$	: Vektör Alanlarının Uzayı
	: Türev Dönüşümü
Ker	: Dikey Distribüsyon
Ker	:Yatay Distribüsyon
[,]	: Lie Braketi
R	: Riemann Eğrilik Tensörü
B	: Bi-Kesit Eğriliği
H	: Holomorfik Kesit Eğriliği
Φ	: Temel 2-form
A	: Yatay Tensör Alanı
T	: Dikey Tensör Alanı
J	: Hemen Hemen Kompleks Yapı

1. GİRİŞ

Manifoldlar diferensiyel geometride önemli çalışma alanlarından biridir. Bir manifoldun geometrisi araştırılırken bir manifolddan diğerine dönüşümler tanımlanmaktadır. Bu dönüşümlerin en önemlileri immersiyon ve submersiyon dönüşümleridir.

İmmersiyonlar küçük boyuttan daha yüksek boyuta tanımlanırken, Riemann submersiyonlar bunun aksi şekilde tanımlanır. İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar teorisine sırasıyla O'Neill ve Gray tarafından giriş yapıldı. O zamandan beri Riemann submersiyonlarla ilgili birçok yazar çalışma yapmıştır(Gray 1967). Bu çalışmalardan bazıları hemen hemen Hermityen submersiyonlar (Watson 1976), kuaterniyonik submersiyonlar (Ianus 2008), çarpım submersiyonların geometrisi üzerine (Gündüzalp 2011) v.b. taşınır.

1930 yılında Schouten ve Dantzng' ın Riemann manifoldları için bulduğu sonuçları Hermit olarak adlandırılan uzaya taşımasıyla kompleks manifoldlarla ilgili çalışmalar başlar.

Hermityen submersiyonlar ilk defa Watson'ın çalışmalarında kullanılır (Watson, 1976). (1,1) mertebeli $J^2 = -I$ sağlayan hemen hemen kompleks manifoldlar üzerinde (M, g) Hermityen yapı ve J tensörü yardımıyla da Kähler manifold tanımlanır. (M_1^{2m}, g_1, J_1) ve (M_2^{2n}, g_2, J_2) hemen hemen Hermityen manifoldlar $F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir diferensiyellenebilir örten dönüşümü

a) F maksimal ranka sahiptir. ($rank F_* = boy M_2 = 2n$ dir)

b) F_* türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu korur.

c) $F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$

şartları sağlıyorsa F'ye hemen hemen Hermityen submersiyonu (Holomorfik submersiyon) denir. Bu dönüşümler kullanılarak çoğunlukla her iki manifoldun da benzer yapıda olduğu görülür. Bu, dönüşümlerin yatay ve dikey distribüsyonlarının invaryant kalmalarından kaynaklanır.

Şahin, Hermityen manifoldlar üzerinde çalışmalarda bulundu(Şahin, 2010). Gündüzalp, hemen hemen para-Hermityen submersiyonları üzerine çalışmıştır (Gündüzalp, 2016). Ianus, kuaterniyonik Kähler manifoldlarda çalışmalarda bulundu (Ianus, 2008).

Bu çalışmalar göz önüne alınarak Hermityen manifoldlar, Kähler manifoldlar, quasi-Kähler manifoldlar, hemen hemen Hermityen manifoldlar, kuaterniyonik submersiyonlar üzerinde çalışılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölüm iki alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak gösterimlerin daha iyi anlaşılması için temel kavramlar verilmiştir. İkinci alt bölümde Riemann manifoldları ve eğriliklere yer verilmiştir.

2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. *M_1 diferensiyellenebilir bir manifold varsayılsın ve $p \in M_1$ verilsin.* $C^\infty(M_1, \mathbb{R}) = (f | f : U \subset M_1 \to \mathbb{R}, f \in C^\infty(U)$

$$\begin{aligned} v_p : C^\infty(M_1, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to v_p(f) \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ ve $\forall a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ için

1. $v_p(a_1 f + b_1 g) = a_1 v_p(f) + b_1 v_p(g)$
2. $v_p(f.g) = f.v_p(g) + g.v_p(f)$

özellikleri sağlanıyorsa v_p ye M_1 manifoldunun bir $p \in M_1$ noktasındaki tanjant vektörü denir ; $p \in M_1$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi T_pM_1 ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. *M_1 diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in M_1$ olduğu varsayalım.*

$$\begin{aligned} \oplus : T_pM_1 \times T_pM_1 &\to T_pM_1 \\ (v_p, w_p) \to (v_p \oplus w_p) : C^\infty(M_1, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to ((v_p(f) \oplus w_p(f)) = v_p(f) + w_p(f) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_pM_1 &\to T_pM_1 \\ (a_1, w_p) \to (a_1 \odot w_p) : C^\infty(M_1, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to (a_1 \odot w_p)(f) = a_1.w_p(f) \end{aligned}$$

işlemleri, $(T_pM_1, (\mathbb{R}, +, .)\oplus, \odot)$ ile birlikte bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına M_1' nin $p \in M_1$ noktasındaki tanjant uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. *E^n üzerinde bir $f : E^n \to \mathbb{R}$ reel fonksiyonu verilmiş olsun. $V \in E^n$ için*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + tV) - f(p)}{t}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f' nin $p \in E^n$ noktasında ve V yönündeki türevi denir. Bu türev

$$V_p [f] = df(V_p) = \frac{d}{dt}(f(p + tV))|_{t=0}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.4. *M_1 bir diferensiyellenebilir manifold verilsin. Her $p \in M_1$ noktasına $X_p \in T_pM_1$ tanjant vektörü karşılık gelen dönüşüme vektör alanı denir.*

$$TM_1 = \bigcup_{p \in M_1} T_pM_1$$

tanjant demeti olsun.

$$\begin{aligned} X : M_1 &\rightarrow TM_1 \\ p &\rightarrow X_p \end{aligned}$$

dönüşümüne vektör alanı denir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \\ (Xf) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla X vektör alanı M_1 üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonlar cümlesinden fonksiyonlar cümlesine bir dönüşümdür. $X(f)$ diferensiyellenebilir ise X vektör alanına da diferensiyellenebilirdir denir. M_1 üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M_1)$ ile temsil edilir.(Do Carmo 1992)

Tanım 2.1.5. *M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir iki manifold ve $p \in M_1$ olsun.*

$$\begin{aligned} F : M_1 &\rightarrow M_2 \\ p &\rightarrow F(p) \end{aligned}$$

türevlenebilir bir dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned} F_{*p} : T_pM_1 &\rightarrow T_{F(p)}M_2 \\ v_p &\rightarrow F_{*p}(v_p) \end{aligned}$$

dönüşümüne M_1' in $p \in M_1$ noktasındaki türev dönüşümü denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6. *M_1 , M_2 diferensiyellenebilir iki manifold ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ türevlenebilir bir dönüşüm olduğunu varsayalım. M_1 üzerindeki vektör alanı E , M_2 üzerindeki vektör alanı G olmak üzere her $p \in M_1$ için*

$$F_*(E_P) = G_{F(p)}$$

oluyorsa E ve G, F-bağlıdır denir(O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7. *$F : M_1 \rightarrow M_2$ bir C^∞ dönüşüm , $p \in M_1$ noktasındaki tanjant uzayının T_pM_1 olduğunu varsayalım. Eğer F dönüşümünün türev dönüşümü $F_*(T_pM_1)$ nin boyutu r ise F dönüşümünün rankı r dir denir(O'Neill 1983).*

Önerme 2.1.1. *Eğer her $p \in M_1$ için $rankF_* = boyM_1 = n$ ise $(F_*)_p$ bire birdir (Gündüzalp 2007)*

Sonuç 2.1.1. *M_1 ve M_2 sırasıyla n ve m boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold, $F : M_1^n \to M_2^m$ dönüşümün türev dönüşümü $p \in M_1^n$ için $(F_*)_p$ olsun. Sırasıyla $T_pM_1^n$ ve $T_{F(p)}M_2^m$ de tanjant uzayının bazları*

$$\begin{aligned} \eta &= \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\} \\ \xi &= \{\frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}|_{F(p)}\} \end{aligned}$$

için $(F_*)_p$' ye karşılık gelen matrisi $(JF)_p$

$$(JF)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial_{F_1}}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial_{F_1}}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial_{F_1}}{\partial x_n}|_p \\ \frac{\partial_{F_2}}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial_{F_2}}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial_{F_2}}{\partial x_n}|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial_{F_m}}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial_{F_m}}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial_{F_m}}{\partial x_n}|_p \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve bu matrise M_1' nin p noktasındaki Jakobiyen matrisi denir (Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.1.8. *M_1 diferensiyellenebilir bir manifold , $\chi(M_1)$ manifold üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesi olduğunu varsayalım. Bu durumda $X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$, $f \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ fonksiyonu alınırsa*

$$\begin{aligned} [,] : \chi(M_1) \times \chi(M_1) &\to \chi(M_1) \\ (X_1, Y_1) &\to [X_1, Y_1] f = X_1(Y_1 f) - Y_1(X_1 f) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış $[,]$ dönüşümüne X_1 ve Y_1 vektör alanlarının Parantez (Lie) operatörü denir. Bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar:

$f, g \in C^\infty(M_1)$ ve $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M_1)$ olmak üzere

a) $[X_1, Y_1] = -[Y_1, X_1]$

b) $[a_1X_1 + b_1Y_1, Z_1] = a_1 [X_1, Z_1] + b_1 [Y_1, Z_1], \qquad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

c) $[[X_1, Y_1], Z_1] + [[Y_1, Z_1], X_1] + [[Z_1, X_1], Y_1] = 0$

d) $[fX_1, gY_1] = fg [X_1, Y_1] + f(X_1 g)Y_1 - g(Y_1 f)X_1$

dır(Do Carmo 1992).

2.2 Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1. *M_1 in diferensiyellenebilir bir manifold, manifold üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesinin $\chi(M_1)$ olduğunu varsayalım.*
$\forall X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M_1)$, ve $\quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ için

$$g_1 : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to C^\infty(M_1)$$

ile tanımlı g_1 dönüşümü

a) $g_1(X_1, Y_1) = g_1(Y_1, X_1)$, *(simetriklik)*

b) *(ikilineer)*

$$\begin{aligned} g_1(a_1X_1 + b_1Y_1, Z_1) &= a_1g_1(X_1, Z_1) + b_1g_1(Y_1, Z_1) \\ g_1(X_1, a_1Y_1 + b_1Z_1) &= a_1g_1(X_1, Y_1) + b_1g_1(X_1, Z_1) \end{aligned}$$

c) $g_1(X_1, X_1) \geqslant 0, \forall X_1$ *için* $g_1(X_1, X_1) = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0$ *(pozitif tanımlılık) özellikleri sağlanıyorsa* g_1 *dönüşümüne metrik tensör (Riemann metriği),* (M_1, g_1) *ikilisine de Riemann manifoldu denir(Gundmundsson 2006).*

Tanım 2.2.2. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu olsun. Bir* $X_p \in T_pM_1$ *tanjant vektörünün uzunluğu*

$$\|X_p\| = \sqrt{\langle X, X\rangle_p}$$

reel sayısı ile tanımlanır(Gundmundsson 2006).

Tanım 2.2.3. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu olsun. Sıfırdan farklı iki* $X_p, Y_p \in T_pM_1$ *tanjant vektörleri arasındaki açı* θ *ise*

$$g_1(X_p, Y_p) = \|X_p\|\|Y_p\| \cos\theta$$

dır. Burada $\cos\theta \in [0, \pi]$ *olduğundan*

$$|g_1(X_p, Y_p)| \leq \|X_p\|\|Y_p\|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.(Hacısalihoğlu 2003).

Tanım 2.2.4. (M_1, g_1)*,bir* n*-boyutlu Riemann manifoldu,* $X, Y \in \chi(M_1)$ *vektör alanları verildiğini varsayalım.* $\forall p \in M_1$ *için*

$$X_p = (x_1, ..., x_n)|_p \in T_pM_1$$

ve

$$Y_p = (y_1, ..., y_n)|_p$$

vektörleri verilsin. Buradan Y *nin* X *e göre kovaryant türevi*

$$\nabla_X Y = (X_p [y_1], ..., X_p [y_n])$$

ile tanımlanır , $\nabla_X Y$ *şeklinde gösterilir(Hacısalihoğlu 1982)*

Tanım 2.2.5. (M_1, g_1)*,* n*-boyutlu bir manifold olsun.* M_1 *üzerinde vektör alanlarının uzayı* $\chi(M_1)$*,* $\forall f \in C^\infty(M_1)$ *ve* $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M_1)$ *olmak üzere*

1) $\nabla_{X_1}(Y_1 + Z_1) = \nabla_{X_1}Y_1 + \nabla_{X_1}Z_1$

2) $\nabla_{X_1+Y_1}Z_1 = \nabla_{X_1}Z_1 + \nabla_{Y_1}Z_1$

3) $\nabla_{X_1}fY_1 = X_1 [f] Y_1 + f\nabla_{X_1}Y_1$

4) $\nabla_{fX_1}Y_1 = f\nabla_{X_1}Y_1$

5) $[X_1, Y_1] = \nabla_{X_1}Y_1 - \nabla_{Y_1}X_1$

6) $X_1 g(Y_1, Z_1) = g(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1) + g(\nabla_{X_1}Z_1, Y_1)$

şartları sağlanıyorsa ∇ konneksiyonuna M_1 manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu, Levi-Civita konneksiyonu veya metrik konneksiyon denir.

M_1 üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olan aşağıdaki denkleme

$$\begin{aligned} 2g_1(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1) &= X_1(g_1(Y_1, Z_1)) + Y_1(g_1(Z_1, X_1)) - Z_1(g_1(X_1, Y_1)) \\ &- g_1(X_1, [Y_1, Z_1]) + g_1(Y_1, [Z_1, X_1]) + g_1(Z_1, [X_1, Y_1]) \end{aligned}$$

Koszul eşitliği adı verilir(O'Neill 1983).

Teorem 2.2.1. *(M_1, g_1) in bir Riemann manifoldu olduğunu varsayalım. Bu durumda M_1 üzerinde torsiyonsuz ve g_1 metriği ile uyumlu bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır(Chen ve Bootby 1973,1986)*

Tanım 2.2.6. *M_1 bir Riemann manifoldu, g_1 de M_1 nin Riemann metriği ve ∇, M_1 üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$\begin{aligned} R : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \times \chi(M_1) &\to \chi(M_1) \\ (X_1, Y_1, Z_1) &\to R(X_1, Y_1, Z_1) = R(X_1, Y_1)Z_1 \end{aligned}$$

$$R(X_1, Y_1)Z_1 = \nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z_1 - \nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z_1 - \nabla_{[X_1,Y_1]}Z_1$$

şeklinde tanımlanmış $(1, 3)$ tipindeki R tensör alanına M_1 nin Riemann eğrilik tensörü denir(Bootby 1986).

Tanım 2.2.7. *(M_1^n, g_1) bir Riemann manifoldu, $(x^1, x^2, ..., x^n)$ bu manifold üzerinde bir lokal koordinat sistemi ve*

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

verilsin. Bu durumda

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

ile verilen Γ_{ij}^k fonksiyonlarına ∇ nın Christoffel sembolleri denir.

$$\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$$

olsun. Burdan Christoffel sembolleri

$$\nabla_i \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

şekliyle de yazılabilir.

Y vektör alanının lokal ifadesi $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ ise

$$\nabla_i Y = \sum_k \{\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j\}\partial_k$$

dır(O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu olsun.* $\forall X_1, Y_1, Z_1, W_1 \in \chi(M_1)$ *için*

$$\begin{array}{rcl} K:\chi(M_1)\times\chi(M_1)\times\chi(M_1)\times\chi(M_1) & \to & C^\infty(M_1) \\ (X_1,Y_1,Z_1,W_1) & \to & K(X_1,Y_1,Z_1,W_1)=g_1(R(X_1,Y_1)Z_1,W_1) \end{array}$$

şeklinde tanımlanmış $4.$ *mertebeden kovaryant tensöre* M_1 *üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir(Hacısalihoğlu 1982).*

Önerme 2.2.1. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu ve* ∇ *nın* M_1 *üzerinde bir Riemann konneksiyonu olduğu varsayılsın. Bu durumda* $\forall X_1, Y_1, Z_1, V_1, W_1 \in \chi(M_1)$ *için*

a) $R(X_1, Y_1)Z_1 = -R(Y_1, X_1)Z_1$

b) $g_1(R(X_1, Y_1)V_1, W_1) = -g_1(R(X_1, Y_1)W_1, V_1)$

c) $R(X_1, Y_1)Z_1 + R(Y_1, Z_1)X_1 + R(Z_1, X_1)Y_1 = 0$

d) $g_1(R(X_1, Y_1)V_1, W_1) = g_1(R(V_1, W_1)X_1, Y_1)$
özellikleri sağlanır(O'Neill 1983).

Teorem 2.2.2. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu ve* ∇, M_1 *üzerinde bir Riemann konneksiyon olduğu varsayılsın. Bu durumda* $\forall X_1, Y_1, Z_1, W_1 \in \chi(M_1)$ *için*

a) $K(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + K(Y_1, Z_1, X_1, W_1) + K(Z_1, X_1, Y_1, W_1) = 0\,,$

b) $K(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -K(Y_1, X_1, Z_1, W_1)\,,$

c) $K(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -K(X_1, Y_1, W_1, Z_1)\,,$

d) $K(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = K(Z_1, W_1, X_1, Y_1)$
özellikleri sağlanır(Hacısalihoğlu 1982).

Tanım 2.2.9. (M_1, g_1) *bir Riemann manifoldu , bir* $p \in M_1$ *noktasındaki tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayının* P *olduğu varsayılsın.* $\{X_1, Y_1\}$ *,* P *nin bir bazı ve* M_1 *üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü* K *olmak üzere*

$$\begin{aligned} K(P) &= \frac{g_1(R(X_1,Y_1)Y_1,X_1)}{\|X_1\|^2\|Y_1\|^2 - g_1(X_1,Y_1)^2} \\ K(P) &= \frac{K(X_1,Y_1,X_1,Y_1)}{\|X_1\|^2\|Y_1\|^2 - g_1(X_1,Y_1)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmış $K(P)$ *reel sayısına* P *nin kesit eğriliği denir.* K *eğriliğin değeri sadece* P *altuzayına bağlıdır (Gundmundsson 2006).*

3. MATERYAL ve METOT

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde submersiyonlar, distribüsyonlar ve Riemann altmanifoldları incelenecektir. İkinci alt bölümde Riemann submersiyonları ve bu submersiyonlar üzerindeki tensörler tanımlanacak ve temel özellikleri ifade edilecektir. Üçüncü alt bölümde ise kompleks manifoldlar ve bu manifoldlar üzerinde tanımlanan farklı submersiyon türlerine tanımlanarak temel özelliklerine değinilecektir.

3.1 Submersiyonlar, Distribüsyonlar ve Altmanifoldlar

Tanım 3.1.1. *(M_1, g_1) n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. M_1 üzerinde*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} : M_1 &\rightarrow T_x M_1 \\ x &\rightarrow \mathfrak{D} \subset T_x M_1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathfrak{D}$ dönüşümüne bir distribüsyon adı verilir. $X \in \chi(M_1)$ için $p \in M_1$ olmak üzere $X_p \in \mathfrak{D}_p$ oluyorsa X vektör alanına $\mathfrak{D}$' ye aittir denir. Eğer $\forall p$ noktası için $\mathfrak{D}$ ye ait q-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı varsa $\mathfrak{D}$ ye diferensiyellenebilirdir denir (Şahin 1996).

Tanım 3.1.2. *$F : M_1^m \rightarrow M_2^n$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm verilsin. Eğer $rankF_* = boyM_1 = m$ ise F' ye immersiyon(daldırma,dolgulama) denir. Burada $m \leqslant n$' dir. Bu durumda M_1 manifolduna M_2 manifoldunun immersed alt manifoldu denir. F immersiyonu birebir ise F dönüşümüne imbedding, M_1 manifolduna da M_2 manifoldunun altmanifoldu (gömülen altmanifoldu) denir(Chen 1973).*

Tanım 3.1.3. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olduğu varsayılırsa*

$$F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

örten ,C^∞ bir dönüşümü için

$$rankF_{*x} = boyM_2$$

oluyorsa F ye $x \in M_1$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall x \in M_1$ için F bir submersiyon ise F ye M_1 üzerinde bir submersiyon denir. m ve n pozitif doğal sayılar ve $n < m$ olduğu varsayılsın.

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü

$$F : (x_1, \ldots, x_m) \rightarrow (x_1, \ldots, x_n)$$

olsun. Bir x noktasında

$$F_{*x}(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n)$$

olacağından F_{*x} diferensiyeli örtendir. Dolayısıyla, projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur.

Herhangi bir $x \in M_2$ için $F_y = F^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M_1, g_1) manifoldunun $r = (m - n)$- boyutlu bir alt manifoldudur. $F^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun

lifleri denir.
Herhangi bir $p \in M_1$ *için* (M_1, g_1) *üzerindeki* V *integrallenebilir distribüsyonu*

$$V_p = KerF_{*p}$$

şeklinde tanımlanmıştır. V_p *ye submersiyonun dikey distribisyonu adı verilir.*

$$H_p = (V_p)^{\perp}$$

şeklinde tanımlanmış distribüsyona da submersiyonun yatay distribüsyonu denir (Gündüzalp 2007).

Teorem 3.1.1. $F : M_1 \to M_2$ *bir submersiyon ,* M_1 *nin dikey distribüsyonu* V *olduğu varsayılsın. Buradan,* $F(p) = x$ *ile* $p \in M_1$ *için* $\forall V_p$ *dikey distribüsyonu* $F^{-1}(x)$ *in tanjant uzayı ile çakışır(Gündüzalp 2007).*

İspat. $T_pF^{-1}(x)$ *de bir* v *vektörü verilsin. Şimdi*

$$c : [0, 1] \to F^{-1}(x)$$

bir eğri öyleki;

$$c(0) = p, \qquad c'(0) = v$$

olsun. $(F \circ c)(t) = x, \qquad t \in [0, 1]$ *için*

$$F_*(c'(0)) = (F \circ c)_* \frac{d}{dt} = 0$$

olur. Buradan

$$v = c'(0) \in V_p$$

elde edilir. Bu durumda $T_pF^{-1}(x)$, V_p*' nin* $r = (m - n)$*- boyutlu altuzayına dönüşür. Boyutların eşitliği göz önüne alınırsa*

$$V_p = T_pF^{-1}(x)$$

yazılabilir.

Tanım 3.1.4. (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *Riemann manifoldları olduğu varsayılsın.*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

C^∞ *bir dönüşüm olsun.* $x \in M_1$ *için*

$$V_x = V_x(F) = KerF_{*x} = \{X \in T_xM_1 | F_{*x}(X) = 0\} \subset T_xM_1$$

ve

$$H_x = H_x(F) = V_x^{\perp} \subset T_xM_1$$

olarak tanımlayalım. V_x *uzayında* F *nin* x *noktasındaki dikey uzayı adı verilir.*
M_1 *deki* g_1 *metriğine göre* V_x *dikey uzayının dik tümleyeni* H_x *uzayına ise* F *nin* x *noktasındaki yatay uzayı denir.*
Böylece

$$T_xM_1 = V_x \oplus H_x = V_x \oplus V_x^{\perp}$$

yazılabilir(Gündüzalp 2007).

Tanım 3.1.5. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

C^∞ bir dönüşümü olsun. $x \in M_1$ noktasına T_xM_1' nin sırasıyla V_x ve H_x alt uzaylarını karşılık getiren

$$x \to V_x \qquad ve \qquad x \to H_x$$

dönüşümleri $V = V(F)$ ve $H = H(F)$ ile gösterilen C^∞ distribüsyonları tanımlar. $V = V(F)$ ye F nin dikey distribüsyonu veya dikey alt demeti, $H = H(F)$ ye ise F nin yatay distribüsyonu veya yatay alt demeti denir(Gündüzalp 2007).

Tanım 3.1.6. *M_1 üzerinde yatay distribüsyona ait bir X vektör alanına yatay vektör alanı denir. Yatay vektör alanlarının cümlesi $\chi^h(M_1)$ ile gösterilir.*

M_1 üzerinde dikey distribüsyona ait bir X vektör alanına dikey vektör alanı denir. Dikey vektör alanlarının cümlesi $\chi^v(M_1)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $E \in \chi(M_1)$ vektör alanı için E nin yatay ve dikey bileşenleri sırasıyla hE ve vE şeklinde gösterilir(Gündüzalp 2007).

Tanım 3.1.7. *(M_1, g_1) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda. M_1 üzerinde izdüşürülebilir (projectable) vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M_1)$ ile gösterilir. Yani $\chi^c(M_1)$ nin her elemanı M_1 üzerinde bir vektör alanı ve M_2 üzerindeki bir vektör alanına F-bağlıdır denir(Falcitelli ve ark. 2004).*

Tanım 3.1.8. *M_1 ve M_2 Riemann manifoldları olduğu varsayılsın. Eğer X yatay ve M_2 üzerindeki X_* vektör alanına F-bağlıysa M_1 üzerindeki X vektör alanına Temel(Basic) vektör alanı olarak adlandırılır(Falcitelli ve ark. 2004).*

Temel(Basic) vektör alanlarının uzayı

$$\chi^b(M_1) = \chi^c(M_1) \cap \chi^h(M_1)$$

ile ifade edilir.

M_1 üzerindeki ortonormal çatılarının bir lokal alanı $\{e_1, \ldots, e_m\}$ olsun öyleki $e_1, \ldots, e_r$ dikey vektör alanları ve $e_{r+1}, \ldots, e_m$ temel vektör alanlarıdır. Burada $r = boyM_1 - boyM_2$ liflerin boyutudur(Suzuki 2006).

3.2 Riemann Submersiyonları ve Temel Tensörler

Tanım 3.2.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

C^∞ bir dönüşümü olsun. Her $x \in M_1$ ve $V_x, W_x \in T_xM_1$ için

$$g_1(V_x, W_x) = g_2(F_*(V_x), F_*(W_x))$$

oluyorsa F ye M_1 den M_2 ye bir izometri denir.

Bu tanımdan F bir izometri ise F_* dönüşümü $T_x M_1$ ile $T_{F(x)} M_2$ uzaylarındaki iç çarpımları korur. Yani, F_* dönüşümü W_x ve $F_*(W_x)$ tanjant vektörlerinin uzunluklarını da korur(Hacısalihoğlu 2003)

Tanım 3.2.2. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir C^∞ submersiyonu aşağıda sıralanan şartları sağlıyor ise F ye bir Riemann submersiyonu denir.

a) *F dönüşümü maksimal ranka sahiptir. Yani $\forall p \in M_1$ için F_{*p} türev dönüşümü örtendir*

b) *Her $p \in M_1$ noktasında F_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Buradan*

$$g_{1p}(w, u) = g_{2F(p)}(F_{*p}w, F_{*p}u), \qquad w, u \in H_p, \quad p \in M_1$$

dır. Bu da, bir $p \in M_1$ noktasında F_* türev dönüşümünün H_p yatay uzayından $T_{F(p)} M_2$ üzerine bir lineer izometri olduğunu gösterir(O'Neill ve Falcitelli ve ark. 1966,2004).

Önerme 3.2.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ∇_1 ve ∇_2 sırasıyla M_1 ve M_2 nin Levi-Civita konneksiyonları olduğu varsayılsın. M_1 üzerinde X_1, Y_1 temel vektör alanları, X_{1*}, Y_{1*} vektör alanlarına F-bağlı verilsin. Bu durumda

a) $g_1(X_1, Y_1) = g_2(X_{1*}, Y_{1*}) \circ F$

b) *$h[X_1, Y_1]$ temel vektör alanı, $[X_{1*}, Y_{1*}]$ vektör alanına F- bağlıdır.*

c) *$h(\nabla_{1X_1} Y_1)$ temel vektör alanı ve $\nabla_{2X_{1*}} Y_{1*}$ $\quad F$ -bağlıdır.*

d) *Herhangi bir $V_1 \in \chi^v(M_1)$ için, $[X_1, V_1]$ dikey vektör alanıdır(Falcitelli ve ark. 2004).*

O'Neill'in tanımlamış olduğu A ve T tensörlerine değinilecektir.

Tanım 3.2.3. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları verilsin. ∇, M_1 üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $E, G \in \chi(M_1)$ için T tensör alanı*
$T : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$

$$(E, G) \to T(E, G) = T_E G = h(\nabla_{vE} vG) + v(\nabla_{vE} hG)$$

şeklinde tanımlanır(O'Neill 1966). Bu tanımı kullanarak T tensör alanının aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülür.

a) $E \in \chi(M_1)$ *için* T_E *lineer operatörü anti-simetiktir.*

b) $E \in \chi(M_1)$ *için* T_E *yatay ve dikey altuzaylar rollerini değiştirir.*

c) T *dikey tensör alanıdır. Yani* $E \in \chi(M_1)$ *için* $T_E = T_{vE}$*' dir.*

d) T *dikey tensör alanı simetriktir. Yani* $V, W \in \chi^v(M_1)$ *için*

$$T_V W = T_W V$$

dir.

Diğer tensör alanı olarak verilen A *ise aşağıdaki gibi tanımlanır.*

Tanım 3.2.4. (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *Riemann manifoldları verilsin.* ∇, M_1 *üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.* $E, G \in \chi(M_1)$ *için* A *tensör alanı*
$A : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$

$$(E, G) \to A(E, G) = A_E G = h(\nabla_{hE} vG) + v(\nabla_{hE} hG)$$

şeklinde tanımlanır(O'Neill 1966). Bu tanımı kullanarak A *tensör alanının aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülür.*

a) $E \in \chi(M_1)$ *için* A_E *lineer operatörü anti-simetiktir.*

b) $E \in \chi(M_1)$ *için* A_E *yatay ve dikey altuzaylar rollerini değiştirir.*

c) A *yatay tensör alanıdır. Yani* $E \in \chi(M_1)$ *için* $A_E = A_{hE}$*' dir.*

d) A *yatay tensör alanı alterleyendir. Yani* $X, Y \in \chi^h(M_1)$ *için*

$$A_X Y = -A_Y X$$

dir.

Önerme 3.2.2. (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere,T *ve* A *tensör alanları aşağıdaki özellikleri sağlar(O'Neill 1966):*

a) $T_U W = T_W U, \qquad U, W \in \chi^v(M_1),$

b) $A_X Y = -A_Y X, \qquad X, Y \in \chi^h(M_1)$,

c) $A_X Y = \frac{1}{2} v\, [X, Y] \qquad X, Y \in \chi^h(M_1)$*' dır.*

Tanım 3.2.5. (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu verilsin. Eğer T *tensör alanı sıfırsa* F *in herhangi bir lifine* M_1 *nin total geodezik altmanifoldu adı verilir(Falcitelli ve ark. 2004).*

Bir Riemann sunmersiyonda dikey distribüsyon her zaman integrallenebilirdir (O'Neill 1966). Yatay distiribüsyon için ise aşağıdaki şart geçerlidir.

Teorem 3.2.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olduğu varsayılsın. (M_1, g_1) üzerindeki yatay distribüsyonu H olarak verilsin. Burada, H yatay distribüsyonu integrallenebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul $A = 0$ olmasıdır(O'Neill 1966).

Lemma 3.2.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları $F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir Riemann submersiyonu, V ve W dikey vektör alanları X ve Y yatay vektör alanları verilsin. Bu durumda*

a) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$

b) $\nabla_V X = T_V X + h\nabla_V X$

c) $A_X V = h\nabla_V X,$ $\quad$ *X temel olduğunda*

d) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V$

e) $\nabla_X Y = A_X Y + h\nabla_X Y$ *dır(O'Neill 1966).*

Burada ∇ , (M_1, g_1) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonudur.

Tanım 3.2.6. *(M_1, g_1) bir Riemann manifoldu ve $E, G, H \in \chi(M_1)$ olsun. $(1, 2)$ tipindeki A ve T tensör alanlarının kovaryant türevleri*

$$(\nabla_E A)_G H = (\nabla_E A)(G, H) = \nabla_E(A_G H) - A_{\nabla_E G}(H) - A_G(\nabla_E H)$$

ve

$$(\nabla_E T)_G H = (\nabla_E T)(G, H) = \nabla_E(T_G H) - T_{\nabla_E G}(H) - T_G(\nabla_E H)$$

ile tanımlanır. Bu durumda ∇A ve ∇T $(1, 1)$-mertebeli tensör alanları olarak bulunur(Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 3.2.7. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ve (M_1, g_1) üzerindeki yatay distribüsyon H olsun. $\chi^h(M_1)$ üzerinde $(1, 3)$-mertebeli eğrilik tensör alanını R ile gösterelim. Herhangi bir $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi^h(M_1)$ ve $p \in M_1$ için

$$R^*_{F(p)}(F_{*p}X_{1p}, F_{*p}Y_{1p}, F_{*p}Z_{1p})$$

tensörünün yatay lifti $R(X_1, Y_1)Z_1$ ile ifade edilir. (M_2, g_2) manifoldunun R^* Riemann eğriliği kısaca ;

$$F_*(R(X_1, Y_1)Z_1) = R^*(F_*X_1, F_*Y_1)F_*Z_1$$

ile tanımlanabilir. Ayrıca, herhangi bir $X_1, Y_1, Z_1, H_1 \in \chi(M_1)$ için

$$\begin{aligned} R(X_1, Y_1, Z_1, H_1) &= g_1(R(X_1, Y_1)Z_1, H_1) \\ R(X_1, Y_1, Z_1, H_1) &= R^*(F_*X_1, F_*Y_1, F_*Z_1, F_*H_1) \circ F \end{aligned}$$

dir(Falcitelli ve ark. 2004).

Teorem 3.2.2. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ve R, R^* ve $\hat{R}$ sırasıyla M_1, M_2 ve $(F^{-1}, \hat{g}_x)$ liftinin Riemann eğrilik tensörleri olsun.

Bu durumda, herhangi bir $X_1, Y_1, Z_1, H_1 \in \chi^h(M_1)$ ve $U_1, V_1, D_1, W_1 \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned}
R(U_1, V_1, W_1, D_1) &= \hat{R}(U_1, V_1, W_1, D_1) + g(T_{U_1}W_1, T_{V_1}D_1) - g(T_{V_1}W_1, T_{U_1}D_1) \\
R(U_1, V_1, W_1, X_1) &= g((\nabla_{U_1}T)_{V_1}W_1, X_1) - g((\nabla_{V_1}T)_{U_1}W_1, X_1) \\
R(X_1, Y_1, Z_1, H_1) &= R^*(X_1, Y_1, Z_1, H_1) + 2g(A_{X_1}Y_1, A_{Z_1}H_1) - g(A_{Y_1}Z_1, A_{X_1}H_1) \\
&+ g(A_{X_1}Z_1, A_{Y_1}H_1) \\
R(X_1, Y_1, V_1, W_1) &= g((\nabla_{V_1}A)_{X_1}Y_1, W_1) - g(A_{X_1}W_1, A_{Y_1}V_1) + g(A_{X_1}V_1, A_{Y_1}W_1) \\
&- g((\nabla_{W_1}A)_{X_1}Y_1, V_1) + g(T_{W_1}X_1, T_{V_1}Y_1) - g(T_{V_1}X_1, T_{W_1}Y_1)
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$(\nabla_{V_1}A)_{X_1}Y_1 = \nabla_{V_1}A_{X_1}Y_1 - A_{\nabla_{V_1}X_1}(Y_1) - A_{X_1}(\nabla_{V_1}Y_1)$$

ve

$$(\nabla_{U_1}T_1)_{V_1}W_1 = \nabla_{U_1}(T_{V_1}W_1) - T_{\nabla_{U_1}V_1}(W_1) - T_{V_1}(\nabla_{U_1}W_1)$$

ile verilir(O'Neill 1966).

Teorem 3.2.3. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ve K, K^* ve $\hat{K}$ sırasıyla M_1, M_2 ve $(F^{-1}, \hat{g}_x)$ liftinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. X_1, Y_1 ortonormal yatay vektörler ve U_1, V_1 ortonormal dikey vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned}
K(U_1, V_1) &= \hat{K}(U_1, V_1) + \|T_{U_1}V_1\|^2 + g(T_{U_1}U_1, T_{V_1}V_1), \\
K(X_1, V_1) &= g((\nabla_{X_1}T)_{V_1}V_1, X_1) - \|T_{V_1}X_1\|^2 + \|A_{X_1}V_1\|^2, \\
K(X_1, Y_1) &= K^*(X_{1*}, Y_{1*}) \circ F - 3\|A_{X_1}Y_1\|^2
\end{aligned}$$

dır(O'Neill ve Falcitelli ve ark. 1966,2004).

3.3 Kompleks Manifoldlar

Tanım 3.3.1. *V bir reel vektör uzayı verilsin.*

$$V^c = \{\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + i\overrightarrow{Y}; \qquad X, Y \in V\}$$

cümlesini ele alarak V^c üzerinde

a)

$$\begin{aligned}
+ : V^c \times V^c &\to V^c \\
(Z, Z_1) &\to Z + Z_1 = (\overrightarrow{X} + i\overrightarrow{Y}) + (\overrightarrow{X_1} + i\overrightarrow{Y_1}) = (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{X_1}) + i(\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Y_1})
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} C \times V^c & \to & V^c \\ \lambda.Z & \to & (\alpha + i\beta)(\overrightarrow{X} + i\overrightarrow{Y}) = (\alpha\overrightarrow{X} - \beta\overrightarrow{Y}) + i(\beta\overrightarrow{X} + \alpha\overrightarrow{Y}) \end{array}$$

işlemleri tanımlansın. V^c bu işlemler ile birlikte bir vektör uzayıdır. Bu uzaya V nin kompleksleştirilmiş uzayı denir(Şahin 1996).

Tanım 3.3.2. *V bir reel vektör uzayı*

$$J : V \to V$$

bir lineer endomorfizmi verilsin. $\forall X \in V$ için $J^2 = -I$ ise J'ye V üzerindeki bir kompleks yapı adı verilir.(Watson 1976).

Örnek 3.3.1. *$(\mathbb{R}^4, J)$ bir kompleks vektör uzayıdır.*

$$\begin{array}{rcl} X & = & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 olsun. \\ JX & = & (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa J bir kompleks yapıdır. Burada J ye karşılık gelen matris

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\mathbf{JX} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$\begin{array}{rcl} J^2X & = & (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4) = -(x_1, x_2, x_3, x_4) = -X \\ J^2X & = & -X \end{array}$$

$\forall X$ için sağlandığından $J^2 = -I$' dır.

Tanım 3.3.3. *$Z = \{X + iY\}$ C^n' nin W açık altcümlesinde tanımlı kompleks değerli bir F;*

$$F(Z) = U(X, Y) + iV(X, Y)$$

fonksiyonu

$$U_X = V_Y, \qquad U_Y = -V_X$$

şeklinde Cauchy-Riemann denklemleri sağlanıyorsa F' ye holomorfik fonksiyon denir(Okubo 1987).

Tanım 3.3.4. *M_1, bir Hausdorff uzayı ve M_1' de bir açık cümlesi $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olsun. Eğer $\forall p \in M_1$ için*

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \subset M_1 \to W_\alpha \subset C^n$$

homeomorfizması var ve $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta^{-1} : \sigma_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \sigma_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\Omega_{\beta\alpha} = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha^{-1} : \sigma_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \sigma_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise M_1' e kompleks manifold denir. C^n ile R^{2n} özdeş olduğundan M_1, $2n$-boyutlu reel analitik manifolddur. Burada $\{(U_\alpha, \sigma_\beta)\}_{\alpha\in I}$ ya M_1 nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi denir(Matsushima 1972).

Tanım 3.3.5. *M_1 reel $2n$ boyutlu manifold ve J, M_1 üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M_1$ için*

$$J : T_pM_1 \to T_pM_1$$

lineer dönüşümü T_pM_1 üzerinde bir kompleks yapı ise yani $J^2 = -I$ sağlanıyorsa J' ye M_1 üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. (M_1, J) ikilisine hemen hemen kompleks manifold denir(Akyol 2015).

Tanım 3.3.6. *(M_1, J) hemen hemen kompleks manifold ve $\forall X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$g_1(JX_1, JY_1) = g_1(X_1, Y_1)$$

şartını sağlayan bir Riemann metriği varsa g_1 fonksiyonuna Hermityen metrik, (M_1, g_1, J) üçlüsüne hemen hemen Hermityen manifold denir. M_1 bir kompleks manifold ve M_1 üzerinde g_1 Hermityen metriği tanımlı ise M_1 e Hermityen manifold denir(Kon ve Yano 1984).

$X_1 = JX_1$ olsun.

$$\begin{aligned} g_1(J(JX_1), JY_1) &= g_1(JX_1, Y_1) \\ g_1(J^2X_1, JY_1) &= g_1(JX_1, Y_1) \\ -g_1(X_1, JY_1) &= g_1(JX_1, Y_1) \\ g_1(JX_1, Y_1) &= -g_1(X_1, JY_1) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.3.7. *M_1 hemen hemen Hermityen manifold g_1 ve J, M_1 üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olduğu varsayılsın.*
$\forall X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ için

$$\Phi(X_1, Y_1) = g_1(X_1, JY_1)$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir(Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.8. *(M_1, g_1, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. M_1 in temel 2-formu kapalı ise (Yani $d\Phi = 0$) g_1 metriğine Kähler metriği, (M_1, g_1, J) üçlüsüne bir Kähler manifold denir(Kon ve Yano 1984).*

Teorem 3.3.1. *(M_1, g_1, J) Hermityen manifoldu, Kähler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmalıdır. Başka bir deyişle, $\forall X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$(\nabla_{X_1} J)Y_1 = \nabla_{X_1} JY_1 - J\nabla_{X_1} Y_1$$

ile verilir(Bejancu 1986).

$\forall X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ *için*

$$\Phi(X_1, Y_1) = g(X_1, JY_1) = -g(JX_1, Y_1) = -g(Y_1, JX_1) = -\Phi(Y_1, X_1)$$

olduğundan Φ anti-simetriktir.
Eğer $\nabla J = 0$ ise $\forall X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ için M_1 bir Kähler manifold ise $\nabla J = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_1} J)Y_1 &= \nabla_{X_1} JY_1 - J\nabla_{X_1} Y_1 = 0 \\ \nabla_{X_1} JY_1 &= J\nabla_{X_1} Y_1 \end{aligned}$$

dır.

Örnek 3.3.2. *$(\mathbb{R}^4, J)$ üzerinde $X \in \mathbb{R}^4$ için*

$$JX = (-X_3, -X_4, X_1, X_2) \qquad , \qquad X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} J(JX) &= (-X_1, -X_2, -X_3, -X_4) \Rightarrow J(JX) = -X \\ JY &= (-Y_3, -Y_4, Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\nabla_X JY = \nabla_X(-Y_3, -Y_4, Y_1, Y_2) = (X(-Y_3), X(-Y_4), X(Y_1), X(Y_2))$$

olup

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ J(X(Y_1), X(Y_2), X(Y_3), X(Y_4)) \\ &\Rightarrow\ \nabla_X JY = J\nabla_X Y \end{aligned}$$

dır. Böylece $(\mathbb{R}^4, g, J)$ bir Kähler manifold olur.

Tanım 3.3.9. *(M_1, g_1, J) nin hemen hemen Hermityen manifold olduğu varsayılsın. $\forall X_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$(\nabla_{X_1} J)X_1 = 0$$

ise M_1 ye nearly Kähler manifold denir(Kon ve Yano 1984). Nearly Kähler aşağıdaki şekilde de verilebilir. X_1 yerine $X_1 + Y_1$ yazalım.

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_1+Y_1} J)X_1 + Y_1 &= 0 \\ (\nabla_{X_1+Y_1} J)X_1 + Y_1 &= (\nabla_{X_1} J)X_1 + Y_1 + (\nabla_{Y_1} J)X_1 + Y_1 \\ (\nabla_{X_1+Y_1} J)X_1 + Y_1 &= (\nabla_{X_1} J)X_1 + (\nabla_{X_1} J)Y_1 + (\nabla_{Y_1} J)X_1 + (\nabla_{Y_1} J)Y_1 = 0 \\ (\nabla_{X_1+Y_1} J)X_1 + Y_1 &= (\nabla_{X_1} J)Y_1 + (\nabla_{Y_1} J)X_1 = 0 \end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.3.10. *(M_1, J_1) ve (M_2, J_2) kompleks manifoldlar olsun.*

$$F : M_1 \longrightarrow M_2$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$$F_* : \chi(M_1) \longrightarrow \chi(M_2)$$

türev dönüşümü olmak üzere

$$F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$$

ise F ye (J_1, J_2) holomorfik dönüşüm denir(Kon ve Yano 1984).

Tanım 3.3.11. *(M_1, J) nin hemen hemen kompleks manifold olduğu varsayılsın. $X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$N_J(X_1, Y_1) = J^2[X_1, Y_1] + [JX_1, JY_1] - J[JX_1, Y_1] - J[X_1, JY_1]$$

tensör alanına J nin Nijenhuis tensörü denir. Eğer $N_J = 0$ ise J' ye integrallenebilirdir denir(Şahin 1996).

Tanım 3.3.12. *(M_1, g, J) hemen hemen Hermityen manifoldu olmak üzere $\forall X_1 \in \chi(M_1)$ için*

$$\nabla_{X_1} J(X_1) = \nabla_{X_1} JX_1 - J\nabla_{X_1} X_1 = 0$$

$$\nabla_{X_1} JX_1 = J\nabla_{X_1} X_1$$

ise M_1 e bir hemen hemen Tachibana manifoldu denir(Watson 1976).

Tanım 3.3.13. *(M_1, g, J) hemen hemen Hermityen manifoldu olmak üzere $X, Y \in \chi^h(M_1)$ için*

$$(\nabla^1_X J_1)Y + (\nabla^1_{J_1 X} J_1)J_1 Y = 0$$

ise M_1 e bir Quasi Kähler manifold denir(Watson 1976).

Önerme 3.3.1. *M_1, M_2 hemen hemen Hermityen manifoldun bir hemen hemen Hermityen altmanifoldu olarak verilsin. Eğer*

$$M_2 = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases} \quad \text{ise} \quad M_1 = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases}$$

dir(Watson 1976).

Önerme 3.3.2. *$\hat{F}$, M quasi-Kähler manifoldunun hemen hemen Hermityen altmanifoldu olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$\hat{T}_X Y + \hat{T}_{JX} JY = 0$$

olur(Watson 1976).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde hemen hemen Hermityen manifoldları arasındaki hemen hemen Hermityen submersiyonları tanımlanmakta ve örnek verilmektedir. Bununla beraber bu submersiyonlar için O'Neill tensörlerinin temel özellikleri ve bu tensörlerin ilişkileri sunulacaktır. İkinci alt bölümde ise hemen hemen Hermityen submersiyonların total uzay ve liflerinin holomorfik bi-kesit ve kesit eğrilikleri incelenecektir. Üçüncü bölümde kuaterniyonik manifold ve submersiyonlar araştırılacaktır.

4.1 Hemen Hemen Hermityen Submersiyonlar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. *M_1 ve M_2 sırasıyla J_1 ve J_2 hemen hemen kompleks yapılara sahip hemen hemen kompleks manifoldlar olsun.*

$$F : M_1 \longrightarrow M_2$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa F' ye hemen hemen holomorfik dönüşüm denir:

$$F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*.$$

Tanım 4.1.2. *(M_1^{2m}, g_1, J_1) ve (M_2^{2n}, g_2, J_2) hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun.*

$$F : M_1 \longrightarrow M_2$$

bir diferensiyellenebilir örten dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa F'ye hemen hemen Hermityen submersiyonu denir:

a) F maksimal ranka sahiptir($rankF_* = boyM_2 = 2n'dir$).

b) F_* türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu korur.

c) $F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$' dir.

Örnek 4.1.1. (x_1, x_2, x_3, x_4), $\mathbb{R}^4$*' te kartezyen koordinatlar olsun.*
$X \in \mathbb{R}^4$ için $JX = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ ve $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{R}^4, g, J)$ üçlüsü bir hemen hemen Hermityen manifolddur.

Örnek 4.1.2. *$\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ standart Riemann metrikleri ile verilen Öklidyen uzaylar olsun.*
$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 + x_4}{\sqrt{2}})$ dönüşümü verilsin. Doğrudan hesaplamalar ile

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $rankF_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan F_* örtendir. Dikey ve yatay uzayı geren vektörler

$$(KerF_*) = Span\{U = (-1, 0, 1, 0), V = (0, -1, 0, 1)\}$$

ve

$$(KerF_*)^{\perp} = Span\{X = (1,0,1,0), Y = (0,1,0,1)\}$$

olur. Böylece
$X, Y \in (KerF_*)^{\perp}$ *için*

$$\begin{aligned} g_1(X,X) &= g_2(F_*X, F_*X) \\ g_1(Y,Y) &= g_2(F_*Y, F_*Y) \end{aligned}$$

dır. Buradan
$F_*X = (\frac{2}{\sqrt{2}}, 0)\,, \qquad F_*Y = (0, \frac{2}{\sqrt{2}})$

$$g_1(X,X) = 2 \qquad g_2(F_*X, F_*X) = 2$$

$$g_1(X,X) = g_2(F_*X, F_*X)$$

$$g_1(Y,Y) = 2 \qquad g_2(F_*Y, F_*Y) = 2$$

$$g_1(Y,Y) = g_2(F_*Y, F_*Y)$$

dir. O halde yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Yani F bir Riemann submersiyondur. Diğer taraftan

$$F_* \circ J_1X = F_*(0,1,0,1) = (0, \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$J_2 \circ F_*X = J_2(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0) = (0, \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$F_* \circ J_1Y = J_2 \circ F_*Y$$

$$F_* \circ J_1Y = F_*(-1,0,-1,0) = (-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$J_2 \circ F_*Y = J_2(0, \frac{2}{\sqrt{2}}) = (-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0)$$

olduğundan F holomorfiktir. Böylece

$$F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$$

dir. O halde F bir hemen hemen Hermityen submersiyonudur.

Önerme 4.1.1. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Bu durumda yatay ve dikey distribüsyonlar J_1 invaryanttır.(Watson 1976)*

İspat: $W \in KerF_*$ *olsun.*

$$F_* \circ J_1 W = J_2 \circ F_* W = 0$$

$F_* W = 0$ *olduğundan* $F_* \circ J_1 W = 0$*' dır. Buradan* $J_1 W$ *dikey vektör alanıdır.* $W \in KerF_*$, $X \in (KerF_*)^{\perp}$ *için hemen hemen Hermityen manifoldun tanımı kullanılırsa*

$$g_1(J_1 X, W) = -g_1(X, J_1 W)$$

dir. Buradan $g_1(J_1 X, W) = 0$ *elde edilir.* $W \in KerF_*$ *olduğundan* $J_1 X \in (KerF_*)^{\perp}$ *dir. O halde dikey ve yatay distribüsyonlar* J_1 *invaryanttır.*

Önerme 4.1.2. $F : M_1^{2m} \longrightarrow M_2^{2n}$ *bir hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Bu durumda* F *nin lifleri* $2(m-n)$ *boyutlu hemen hemen Hermityen manifoldlardır.(Watson 1976)*

İspat *Lifleri* $\hat{F}$ *ile gösterelim.* $Boy\hat{F} = 2(m-n) = 2r$ *olur. Burada* $r = m - n$ *dir.* $(\hat{F}^{2r}, \hat{g})$ *üzerinde* $J_1 = \hat{J}$ *ve* $g_1|_{\hat{F}} = \hat{g}$ *değişimi yapalım.*
$(\hat{J}, \hat{g})$ *ikilisi hemen hemen Hermityen yapıdır.* $U \in (KerF_*)$ *için*

$$J_1^2 U = J^2 U = -U$$

$$\Rightarrow \hat{J}^2 = -I$$

olur. Diğer taraftan $V \in (KerF_*)$ *için*

$$g_1(\hat{J}V, \hat{J}U) = g_1(V, \hat{J}^2 U) = -g_1(V, -U) = g_1(V, U)$$

elde edilir. O halde lifler M_1 *in hemen hemen Hermityen altmanifoldlarıdır.*

Teorem 4.1.1. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *hemen hemen Hermityen submersiyonu verilsin.* $\hat{F}$ *lifi,* M_1*' nin altmanifoldu olmak üzere eğer*

$$M_1 = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases} \text{ise} \quad \hat{F} = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases}$$

dir.(Watson 1976)

İspat Önerme 3.3.1'den açıktır.

Teorem 4.1.2. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *hemen hemen Hermityen submersiyonu verilsin.Eğer*

$$M_1 = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases} \text{ise} \quad M_2 = \begin{cases} \text{a)Quasi Kähler} \\ \text{b)Hemen hemen Kähler} \\ \text{c)Hemen hemen Tachibana} \\ \text{d) Kähler} \\ \text{e) Hermityen} \end{cases}$$

dir.(Watson 1976)

İspat

a) M_1 quasi-Kähler manifold olduğundan

$X, Y \in \chi^h(M_1)$ için $(\nabla^1_X J_1)Y + (\nabla^1_{J_1X} J_1)J_1Y = 0$ dır.

$F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$ eşitliği kullanılarak her iki tarafa F_* uygulanırsa

$$F_*(\nabla^1_X J_1)Y + F_*((\nabla^1_{J_1X} J_1)J_1Y) = 0$$

ve

$$(\nabla^1_{F_*X} F_*J_1)F_*Y + (\nabla^1_{F_*J_1X} F_*J_1)F_*J_1Y = 0$$

olur. Önerme 3.2.1 (c) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla^1_{F_*X} F_*J_1)F_*Y + (\nabla^1_{F_*J_1X} F_*J_1)F_*J_1Y &= (\nabla^2_{X_*} J_2F_*)Y_* + (\nabla^2_{J_2F_*X} J_2F_*)J_2F_*Y \\ (\nabla^1_{F_*X} F_*J_1)F_*Y + (\nabla^1_{F_*J_1X} F_*J_1)F_*J_1Y &= F_*(\nabla^2_X J_2)Y + F_*(\nabla^2_{J_2X} J_2)J_2Y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_*(\nabla^1_X J_1)Y + F_*(\nabla^1_{J_1X} J_1)J_1Y = F_*(\nabla^2_X J_2)Y + F_*(\nabla^2_{J_2X} J_2)J_2Y = 0$$

dır.
Eğer M_1 bir quasi-Kähler manifold ise o zaman M_2 de bir quasi-Kähler manifold olur.

b) M_1 bir hemen hemen Kähler manifold olduğundan $d\Phi^1 = 0$ dır.
$X, Y, Z \in \chi^h(M_1)$için

$$\begin{aligned}3d\Phi^1(X,Y,Z) &= X(\Phi^1(Y,Z)) - Y(\Phi^1(X,Z)) + Z(\Phi^1(X,Y)) \\ &- \Phi^1([X,Y],Z) + \Phi^1([X,Z],Y) - \Phi^1([Y,Z],X) = 0\end{aligned}$$

olur. Temel 2-formun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}3d\Phi^1(X,Y,Z) &= Xg_1(Y,J_1Z) - Yg_1(X,J_1Z)) + Zg_1(X,J_1Y)) \\ &- g_1([X,Y],J_1Z) + g_1([X,Z],J_1Y) - g_1([Y,Z],J_1X) = 0\end{aligned}$$

olur. F bir Riemann submersiyonu olduğu göz önüne alınır ve Önerme 3.2.1 (a) ve (b) şıkları kullanılırsa

$$\begin{aligned}3d\Phi^1(X,Y,Z) &= X_*g_2(Y_*,F_*J_1Z) - Y_*g_2(X_*,F_*J_1Z)) + Z_*g_2(X_*,F_*J_1Y)) \\ &- g_2([X_*,Y_*],F_*J_1Z) + g_2([X_*,Z_*],F_*J_1Y) \\ &- g_2([Y_*,Z_*],F_*J_1X) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $F_*J_1 = J_2F_*$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}3d\Phi^1(X,Y,Z) &= X_*g_2(Y_*,J_2F_*Z) - Y_*g_2(X_*,J_2F_*Z)) + Z_*g_2(X_*,J_2F_*Y)) \\ &- g_2([X_*,Y_*],J_2F_*Z) + g_2([X_*,Z_*],J_2F_*Y) \\ &- g_2([Y_*,Z_*],J_2F_*X) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3d\Phi^1(X,Y,Z) &= X_*g_2(Y_*,J_2Z_*) - Y_*g_2(X_*,J_2Z_*)) + Z_*g_2(X_*,J_2Y_*)) \\ &- g_2([X_*,Y_*],J_2Z_*) + g_2([X_*,Z_*],J_2Y_*) \\ &- g_2([Y_*,Z_*],J_2X_*) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3d\Phi^1(X,Y,Z) &= X_*(\Phi^2(Y_*,Z_*)) - Y_*(\Phi^2(X_*,Z_*)) + Z_*(\Phi^2(X_*,Y_*)) \\ &- \Phi^2([X_*,Y_*],Z_*) + \Phi^2([X_*,Z_*],Y_*) \\ &- \Phi^2([Y_*,Z_*],X_*) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, M_1 bir hemen hemen Kähler manifold ise o zaman M_2 nin de bir hemen hemen Kähler manifold olduğunu gösterir.

c) M_1 hemen hemen Tachibana manifold olduğundan $\nabla^1_X J_1(X) = 0$ dır.

$$X \in \chi^h(M_1) \quad \text{için} \qquad \nabla^1_X J_1(X) = \nabla^1_X J_1 X - J_1 \nabla^1_X X = 0$$

dır.

$$F_*(\nabla^1_X J_1(X)) = F_*(\nabla^1_X J_1 X) - F_*(J_1 \nabla^1_X X) = 0$$

Her iki tarafa F_* uygulanmıştır. $F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$ eşitliği kullanılırsa

$$F_*(\nabla^1_X J_1(X)) = \nabla^1_{F_*X} F_* J_1 X - J_2 F_*(\nabla^1_X X) = 0$$

olur. Önerme 3.2.1 (c) kullanılırsa M_1 ait ∇^1 konneksiyonu M_2 de ∇^2 ye dönüşür.

$$\begin{aligned} F_*(\nabla^1_X J_1(X)) &= \nabla^2_{X_*} J_2 F_* X - J_2 \nabla^2_{F_*X} F_* X \\ F_*(\nabla^1_X J_1(X)) &= \nabla^2_{X_*} J_2 X_* - J_2 \nabla^2_{X_*} X_* \\ F_*(\nabla^1_X J_1(X)) &= \nabla^2_{X_*} J_2(X_*) = 0 \end{aligned}$$

$X_* \in \chi(M_2)$ olduğundan $F_*(\nabla^1_X J_1(X)) = F_*(\nabla^2_X J_2(X))$ dır.

Eğer M_1 bir Tachibana manifold ise o zaman M_2 de bir Tachibana manifold olur.

d) M_1 bir Kähler manifold olduğundan $\nabla^1 J_1 = 0$ dır.

$$X, Y \in \chi^h(M_1)\text{için} \qquad (\nabla^1_X J_1)Y = \nabla^1_X J_1 Y - J_1 \nabla^1_X Y = 0$$

dır.

$$F_*((\nabla^1_X J_1)Y) = F_*(\nabla^1_X J_1 Y) - F_*(J_1 \nabla^1_X Y) = 0$$

Her iki tarafa F_* uygulanmıştır.

$F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$ eşitliği kullanılırsa

$$F_*((\nabla^1_X J_1)Y) = \nabla^1_{F_*X} F_* J_1 Y - J_2 F_* \nabla^1_X Y = 0$$

olur. Önerme 3.2.1 (c) kullanılırsa M_1 ait ∇^1 konneksiyonu M_2 de ∇^2 ye dönüşür.

$$\begin{aligned} F_*((\nabla^1_X J_1)Y) &= \nabla^2_{X_*} J_2 F_* Y - J_2 \nabla^2_{F_*X} F_* Y = 0 \\ F_*((\nabla^1_X J_1)Y) &= \nabla^2_{X_*} J_2 Y_* - J_2 \nabla^2_{X_*} Y_* = (\nabla^2_{X_*} J_2) Y_* = 0 \end{aligned}$$

$X_*, Y_* \in \chi(M_2)$ olduğundan $F_*((\nabla^1_X J_1)Y) = F_*((\nabla^2_X J_2)Y)$ dır.

Eğer M_1 bir Kähler manifold ise o zaman M_2 de bir Kähler manifold olur.

e) M_1 bir Hermityen manifold olduğundan $N_{J1}(X,Y)=0$ dır.
$X,Y\in\chi^h(M_1)$ için

$$N_{J1}(X,Y)=J_1^2[X,Y]+[J_1X,J_1Y]-J_1[J_1X,Y]-J_1[X,J_1Y]$$

dır. F_* uygulanırsa

$$N_{J1}(X,Y)=-[X_*,Y_*]+[F_*J_1X,F_*J_1Y]-F_*J_1[J_1X,Y]-F_*J_1[X,J_1Y]=0$$

olur. $F_*\circ J_1=J_2\circ F_*$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
N_{J1}(X,Y) &= -[X_*,Y_*]+[J_2F_*X,J_2F_*Y]-J_2[F_*J_1X,F_*Y]-J_2[F_*X,F_*J_1Y]=0\\
N_{J1}(X,Y) &= -[X_*,Y_*]+[J_2F_*X,J_2F_*Y]-J_2[J_2F_*X,F_*Y]-J_2[F_*X,J_2F_*Y]=0\\
N_{J1}(X,Y) &= -[X_*,Y_*]+[J_2X_*,J_2Y_*]-J_2[J_2X_*,Y_*]-J_2[X_*,J_2Y_*]=0\\
N_{J1}(X,Y) &= N_{J2}(X_*,Y_*)=0
\end{aligned}$$

olur. Eğer M_1 bir Hermityen manifold ise o zaman M_2 de bir Hermityen manifolddur.

Şimdi M_1 üzerindeki hemen hemen Hermityen yapıya yerleştirilen T ve A nın kısıtlaması incelenmeye başlanabilir.

Teorem 4.1.3. *$F:M_1\longrightarrow M_2$ bir quasi-Kähler submersiyon; V, W dikey vektörler ve X, Y yatay vektörleri verilsin(Watson 1976). Bu durumda*

a) $T_VJW=T_{JV}W$

b) $T_{JV}X=-JT_VX$

c) $A_XJX=0$

d) $A_XJY=-A_YJX$
dır.

İspat

a) Önerme 3.3.2 den

$$T_VW+T_{JV}JW=0$$

W yerine JW alalım.

$$\begin{aligned}
T_VJW+T_{JV}J^2W &= T_VJW+T_{JV}-W=T_VJW-T_{JV}W=0\\
T_VJW &= T_{JV}W
\end{aligned}$$

olur.

b) $V, W \in \chi^v(M_1)$, $X \in \chi^h(M_1)$ *için*

$$g_1(T_{JV}X, W) = -g_1(T_{JV}W, X)$$

olur. a) şıkkını kullanılırsa

$$g_1(T_{JV}X, W) = -g_1(T_V JW, X)$$

olur. T *anti-simetrik bir operatör olduğundan*

$$g_1(T_{JV}X, W) = +g_1(T_V X, JW)$$

dır. Hermityen manifoldun tanımını kullanırsak

$$g_1(T_{JV}X, W) = -g_1(JT_V X, W)$$

olur. Buradan

$$T_{JV}X = -JT_V X$$

elde edilir.

c) *Quasi-Kähler manifoldun tanımından*

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX}J)JY = 0$$

dır. Y *yerine* X *alınırsa*

$(\nabla_X J)X + (\nabla_{JX}J)JX = 0$

$\nabla_X JX - J\nabla_X X + \nabla_{JX}J^2X - J\nabla_{JX}JX = 0$

$\nabla_X JX - J\nabla_X X - \nabla_{JX}X - J\nabla_{JX}JX = 0$

$A_X JX - JA_X X - A_{JX}X - JA_{JX}JX = 0$

$A_X JX - A_{JX}X = JA_X X + JA_{JX}JX$

$A_X X = 0$, $\qquad$ $A_{JX}JX = 0$ *olduğundan*

$A_X JX - A_{JX}X = J(A_X X + A_{JX}JX)$

$A_X JX - A_{JX}X = 0$
olur. A *anti-simetrik olduğundan*

$$\begin{aligned} A_X JX + A_X JX &= 0 \\ 2A_X JX = 0, \qquad A_X JX &= 0 \end{aligned}$$

olur.

d) c) den yararlanılarak

$$A_X JX = 0$$

X yerine $X + Y$ yazılırsa

$$A_{X+Y} J(X + Y) = 0$$

$$\begin{aligned} A_{X+Y} J(X+Y) &= 0 \\ &\Rightarrow A_X J(X+Y) + A_Y J(X+Y) = 0 \\ &\Rightarrow A_X JX + A_X JY + A_Y JX + A_Y JY = 0 \end{aligned}$$

c) kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_X JX + A_X JY + A_Y JX + A_Y JY = 0 \\ A_X JY + A_Y JX = 0 \end{aligned}$$

$$A_X JY = -A_Y JX$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Tachibana submersiyon olsun. Tüm V, W dikey vektörleri ve X yatay vektörü için*

a) $T_V JW = JT_V W$

b) $T_{JV} W = JT_V W$

c) $T_V JX = JT_V X$ dır(Watson 1976).

İspat:

a) Lemma 3.2.1 (a) şıkkını kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_V JW &= \nabla_V JW - \hat{\nabla}_V JW \\ T_V JW &= \nabla_V J(W) + J\nabla_V W - \hat{\nabla}_V J(W) - J\hat{\nabla}_V W = 0 \end{aligned}$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$J(\nabla_V W - \hat{\nabla}_V W) = JT_V W$$

olur. Burada W yerine V yazıldığında Tachibana manifoldunu sağladığı kolayca görülür.

b) T simetrik olduğundan

$$T_{JV} W = T_W JV$$

olur. Burada a) kullanılırsa

$$T_{JV} W = JT_W V$$

elde edilir. T simetrik olduğundan

$$T_{JV} W = JT_V W$$

olur. Burada W yerine V yazıldığında Tachibana manifoldunu sağladığı kolayca görülür.

c) Lemma 3.2.1 (b) şıkkını kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_V JX &= \nabla_V JX - h\nabla_V JX \\ T_V JX &= \nabla_V J(X) + J\nabla_V X - h\nabla_V J(X) - Jh\nabla_V X = 0 \end{aligned}$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$J(\nabla_V X - h\nabla_V X) = JT_V X$$

olur. $T_V JX = JT_V X$ *sağladığı açıktır.*

Teorem 4.1.5. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir Kähler submersiyon olsun.* V *dikey vektör ve* X *ve* Y *yatay vektör alanları için*

a) $A_X JY = JA_X Y$

b) $A_{JX} Y = JA_X Y$

c) $A_X JY = A_{JX} Y$

d) $A_X JX = 0$

e) $A_X JV = JA_X V$

f) $A_{JX} JY = JA_{JX} Y$ *dır.*

İspat

a) Kähler manifoldun tanımından $\nabla J = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned} (\nabla_X J)Y &= 0 \\ \nabla_X JY - J\nabla_X Y &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (e) kullanılırsa

$$A_X JY + h\nabla_X JY = J(A_X Y + h\nabla_X Y)$$

$$A_X JY + h\nabla_X JY = JA_X Y + Jh\nabla_X Y$$

Yatay ve dikey bileşenlerin birbirine eşitliğinden

$$A_X JY = JA_X Y$$

elde edilir.

b) A *alterleyen olduğundan*

$$A_{JX} Y = -A_Y JX$$

dır. a) kullanılırsa

$$A_{JX} Y = -JA_Y X$$

olur. A *nın alterleyen özelliğini tekrar kullanılırsa*

$$A_{JX} Y = JA_X Y$$

dır.

c) *a) ve b) den*

$$A_X JY = A_{JX}Y$$

dir.

d) *c) de Y yerine X yazılırsa*

$$A_X JY = A_{JX}Y \Rightarrow A_X JX = A_{JX}X$$

A nın alterleyen özelliğini kullanılırsa

$$A_X JX = -A_X JX \Rightarrow 2A_X JX = 0$$

$$A_X JX = 0$$

elde edilir.

e) *Kähler manifoldun tanımından $\nabla J = 0$ dır. Böylece*

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)V &= 0\\ \nabla_X JV - J\nabla_X V &= 0\end{aligned}$$

dir. Lemma 3.2.1 (d) kullanılırsa

$$A_X JV + v\nabla_X JV = J(A_X V + v\nabla_X V)$$

$$A_X JV + v\nabla_X JV = JA_X V + Jv\nabla_X V$$

Yatay ve dikey bileşenlerin birbirine eşitliğinden

$$A_X JV = JA_X V$$

elde edilir.

f) *Kähler manifoldun tanımından $\nabla J = 0$ dır.*

$$\begin{aligned}(\nabla_{JX} J)Y &= 0\\ \nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y &= 0\end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (d) kullanılırsa

$$A_{JX}JY + h\nabla_{JX}JY - J(A_{JX}Y + h\nabla_{JX}Y) = 0$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$A_{JX}JY - JA_{JX}Y = 0$$

$$A_{JX}JY = JA_{JX}Y$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir Kähler submersiyon olsun. U ve V dikey vektör alanları ve X yatay vektör alanı olsun. Bu durumda* *a)* $T_UJV = JT_UV$*(Watson 1976)*

b) $T_{JU}V = JT_UV$

c) $T_UJV = T_{JU}V$

d) $T_UJX = JT_UX$*(Watson 1976)*

e) $T_{JU}X = JT_UX$
dır.

İspat

a) M_1 *bir Kähler manifold olduğundan* $\nabla J = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned}(\nabla_U J)V &= 0\\ \nabla_U JV - J\nabla_U V &= 0\end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (a) kullanılırsa

$$T_UJV + \hat{\nabla}_U JV - JT_UV - J\hat{\nabla}_U V = 0$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$T_UJV - JT_UV = 0$$

$$T_UJV = JT_UV$$

elde edilir.

b) T *simetrik olduğundan*

$$T_{JU}V = T_VJU$$

olur. a) kullanılırsa

$$T_{JU}V = JT_VU$$

T *'nin simetriklik özelliği tekrar kullanılırsa*

$$T_{JU}V = JT_UV$$

elde edilir.

c) *a) ve b) den*

$$T_UJV = T_{JU}V$$

dır.

d) M_1 *bir Kähler manifold olduğu için* $\nabla J = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned}(\nabla_U J)X &= 0\\ \nabla_U JX - J\nabla_U X &= 0\end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (b) kullanılırsa

$$T_U JX + h\nabla_U JX - JT_U X - Jh\nabla_U X = 0$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$T_U JX - JT_U X = 0$$

$$T_U JX = JT_U X$$

elde edilir.

e) *Benzer şekilde elde edilir.*

Teorem 4.1.7. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir nearly-Kähler submersiyon olsun. U dikey vektör alanı ve X yatay vektör alanı olsun. Bu durumda*

a) $T_U JU = JT_U U$

b) $T_{JU} U = JT_U U$

c) $T_U JU = T_{JU} U$

d) $A_X JX = JA_X X$

e) $A_{JX} X = JA_X X$

f) $A_X JX = A_{JX} X$

g) $A_X JX = 0$ *dır.*

İspat

a) *M_1 bir nearly-Kähler manifold olduğundan $\nabla J = 0$ dır.*

$$\begin{aligned} (\nabla_U J)U &= 0 \\ \nabla_U JU - J\nabla_U U &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (a) kullanılırsa

$$T_U JU + \hat{\nabla}_U JU - JT_U U - J\hat{\nabla}_U U = 0$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$T_U JU - JT_U U = 0$$

$$T_U JU = JT_U U$$

elde edilir.

b) T *simetrik olduğundan*

$$T_{JU}U = T_U JU$$

dır. a) kullanılırsa

$$T_{JU}U = JT_U U$$

elde edilir.

c) *a) ve b) den*

$$T_U JU = T_{JU}U$$

dır.

d) M_1 *bir nearly-Kähler manifold olduğu için* $\nabla J = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned} (\nabla_X J)X &= 0 \\ \nabla_X JX - J\nabla_X X &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (e) kullanılırsa

$$A_X JX + h\nabla_X JX - JA_X X + Jh\nabla_X X = 0$$

Yatay ve dikey bileşenlerin ayrı ayrı sıfıra eşitliğinden

$$A_X JX - JA_X X = 0$$

$$A_X JX = JA_X X$$

elde edilir.

e) A *alterleyen olduğundan*

$$A_{JX}X = -A_X JX$$

d) kullanılırsa

$$A_{JX}X = -JA_X X$$

olur. A *'nın alterleyen özelliği tekrar kullanılırsa*

$$A_{JX}X = JA_X X$$

dır.

f) *e) ve d) den*

$$A_X JX = A_{JX}X$$

olur.

g) *f) kullanılırsa*

$$A_X JX = A_{JX}X$$

dır. A *alterleyen olduğundan*

$$A_X JX = -A_X JX$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} A_X JX + A_X JX &= 0 \\ 2A_X JX &= 0 \end{aligned}$$

$A_X JX = 0$ *elde edilir.*

Teorem 4.1.8. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir Kähler submersiyon olsun.* X *temel vektör alanı,* U *dikey vektör ve* Y *yatay vektör alanı olsun. Bu durumda yatay distribüsyon integrallenebilirdir(Watson 1976).*

İspat *Teorem 4.1.5 (c) kullanılırsa*

$$g(A_{JX}Y, U) = g(A_X JY, U)$$

A *antisimetrik operatör olduğundan*

$$g(A_{JX}Y, U) = -g(A_X U, JY)$$

olur. Diğer taraftan Lemma 3.2.1 (c)'den

$$g(A_{JX}Y, U) = -g(h\nabla_U X, JY)$$

elde edilir. Hermityen manifoldun tanımı kullanılırsa

$$g(A_{JX}Y, U) = g(Jh\nabla_U X, Y)$$

olur. Kähler manifoldun tanımına göre düzenlenirse

$$g(A_{JX}Y, U) = g(\nabla_U JX, Y)$$

elde edilir. Lemma 3.2.1 (c) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_{JX}Y, U) &= g(\nabla_{JX}U, Y) \\ g(A_{JX}Y, U) &= g(A_{JX}U, Y) = -g(A_{JX}Y, U) \\ g(2A_{JX}Y, U) &= 0 \end{aligned}$$

U *sıfırdan farklı olmalı o yüzden* $2A_{JX}Y = 0$ *olmak zorundadır.*

$$A_{JX}Y = 0, \qquad A = 0$$

dır. O halde yatay distribüsyon integrallenebilirdir.

Teorem 4.1.9. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir hemen hemen Kähler submersiyon olsun. Bu durumda yatay distribüsyon integrallenebilirdir.*

İspat: *M_1 bir hemen hemen Kähler manifold olduğundan $d\Phi^1 = 0$, X ve Y temel vektör (yatay) alanları, V dikey vektör alanı için*

$$\begin{aligned} 3d\Phi^1(X,Y,V) &= X(\Phi^1(Y,V)) - Y(\Phi^1(X,V)) + V(\Phi^1(X,Y)) \\ &- \Phi^1([X,Y],V) + \Phi^1([X,V],Y) - \Phi^1([Y,V],X) = 0 \end{aligned}$$

olur.
Temel 2-formun tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad Xg_1(Y,J_1V) - Yg_1(X,J_1V)) + Vg_1(X,J_1Y)) \\ &- \quad g_1([X,Y],J_1V) + g_1([X,V],J_1Y) - g_1([Y,V],J_1X) = 0 \end{aligned}$$

olur. $E \in \chi(M)$ için, $[V,E] \in \chi^v(M_1)$ olduğundan

$$Xg_1(Y,J_1V), \quad Yg_1(X,J_1V), \quad g_1([X,V],J_1Y), \quad g_1([Y,V],J_1X)$$

sıfırlanacaktır. Buradan,

$$\begin{aligned} Vg_1(X,J_1Y) - g_1([X,Y],J_1V) &= 0 \\ Vg_1(X,J_1Y) &= g_1([X,Y],J_1V) \end{aligned}$$

olur. Şimdi sol tarafın sıfır olduğu gösterilir.

$$Vg_1(X,J_1Y)) = g_1(\nabla_V X, J_1Y) + g_1(\nabla_V J_1Y, X)$$

dır. X ve Y vektör alanları temel olduğundan

$$Vg_1(X,J_1Y)) = g_1(A_X V, J_1Y) + g_1(A_{J_1Y}V, X)$$

olur. A antisimetrik bir operatör olduğundan

$$\begin{aligned} Vg_1(X,J_1Y)) &= -g_1(A_X J_1Y, V) - g_1(A_{J_1Y}X, V) \\ Vg_1(X,J_1Y)) &= g_1(A_{J_1Y}X, V) - g_1(A_{J_1Y}X, V) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$Vg_1(X,J_1Y)) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} Vg_1(X,J_1Y)) &= g_1([X,Y],J_1V) \\ g_1([X,Y],J_1V) &= 0 \\ g_1(2A_X Y, J_1V) &= 0 \end{aligned}$$

olur. J_1V sıfırdan farklı olacağından $2A_X Y = 0$ olacaktır. Buradan $A = 0$ dır. O halde, yatay distribüsyonlar integrallenebilirdir.

Teorem 4.1.10. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Kähler submersiyon olsun. Bu durumda liflerin total geodezik olması için gerek ve yeter şart $X \in \chi^h(M_1)$ için $L_X J_1 = 0$ olması gerekir.*

İspat: *M_1 bir hemen hemen Kähler manifold olduğundan $d\Phi^1 = 0$, X yatay vektör alanı, V, W dikey vektör alanları olsun.*

$$\begin{aligned} 3d\Phi^1(W, J_1V, X) &= 0 \\ &\Rightarrow W(\Phi^1(J_1V, X)) - J_1V(\Phi^1(W, X)) + X(\Phi^1(W, J_1V)) \\ &- \Phi^1([W, J_1V], X) + \Phi^1([W, X], J_1V) - \Phi^1([J_1V, X], W) = 0 \end{aligned}$$

olur.
Temel 2-formun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Wg_1(J_1V, J_1X) - J_1Vg_1(W, J_1X) - Xg_1(W, V) \\ &- g_1([W, J_1V], J_1X) - g_1([W, X], V) - g_1([J_1V, X], J_1W) = 0 \end{aligned}$$

$E \in \chi(M_1)$ *için,* $\quad [V, E] \in \chi^v(M_1)$ *olduğundan*

$$Wg_1(J_1V, J_1X), \quad J_1Vg_1(W, J_1X), \quad g_1([W, J_1V], J_1X)$$

terimleri sıfir olur. Buradan

$$Xg_1(W, V) + g_1([W, X], V) + g_1([J_1V, X], J_1W) = 0$$

elde edilir. Riemann konneksiyonunun 5. ve 6. şartından

$$g_1(\nabla_X W, V) + g_1(\nabla_X V, W) + g_1(\nabla_W X, V) - g_1(\nabla_X W, V) + g_1([J_1V, X], J_1W) = 0$$

$$g_1(\nabla_X V, W) + g_1(\nabla_W X, V) + g_1([J_1V, X], J_1W) = 0$$

dır. Riemann konneksiyonun 5. şartından

$$g_1([X, V], W) + g_1(\nabla_V X, W) + g_1(\nabla_W X, V) + g_1([J_1V, X], J_1W) = 0$$

elde edilir. Hermityen manifoldların tanımına ve Lemma 3.2.1 (b)' ye göre eşitlik düzenlenlenirse

$$g_1(J_1[X, V], J_1W) + g_1(T_V X, W) + g_1(T_W X, V) + g_1([J_1V, X], J_1W) = 0$$

olur. T antisimetrik operatör olduğundan

$$g_1(J_1[X, V] - [X, J_1V], J_1W) - g_1(T_V W, X) - g_1(T_W V, X) = 0$$

$$g_1(J_1[X, V] - [X, J_1V], J_1W) - 2g_1(T_W V, X) = 0$$

olur. Buradan M_1 hemen hemen kompleks manifold ve $\forall X \in \chi(M_1)$ için $L_X J_1 = 0$ ile başka bir deyişle

$$(L_X J_1)V = L_X J_1 V - J_1 L_X V = [X, J_1V] - J_1[X, V]$$

şeklinde tanımlı olduğundan

$$-g_1((L_X J_1)V, J_1W) - 2g_1(T_W V, X) = 0$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

4.2 Hemen Hemen Hermityen Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri

Tanım 4.2.1. *(M, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Sıfırdan farklı $E, F \in \chi(M)$ için holomorfik bi-kesit eğriliği*

$$B(E, F) = \|E\|^{-2}\|F\|^{-2}g(R(E, JE)F, JF)$$

ile tanımlanır (Watson 1976).

Tanım 4.2.2. *Sıfırdan farklı $E \in \chi(M)$ için holomorfik kesit eğriliği*

$$H(E) = B(E, E)$$

ile tanımlanır(Watson 1976).

Teorem 4.2.1. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Hermityen submersiyonu olsun, X ve Y ortonormal yatay vektörler, W ve V dikey ortonormal vektörleri verilsin. Bu durumda holomorfik bi-kesit eğriliği aşağıdaki denklemleri sağlar(Watson 1976).*

a)

$$B(V, W) = \hat{B}(V, W) + g(T_V JW, T_{JV} W) - g(T_V W, T_{JV} JW)$$

b)

$$\begin{aligned} B(X, V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(T_{JV} X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= B^*(X_*, Y_*) - \{2g(A_X JX, A_Y JY) - g(A_{JX} Y, A_X JY) \\ &- g(A_Y X, A_{JX} JY)\} \end{aligned}$$

dır.

İspat:

a) *Tanım 4.2.1. den*

$$B(V, W) = g(R(V, JV)W, JW)$$

olur. Burada

$$R(V, JV)W = \nabla_V \nabla_{JV} W - \nabla_{JV} \nabla_V W - \nabla_{[V,JV]} W$$

alınır. Lemma 3.2.1 de (a) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(V, JV)W &= \nabla_V (T_{JV} W + v\hat{\nabla}_{JV} W) - \nabla_{JV} (T_V W + v\hat{\nabla}_V W) \\ &- v(\hat{\nabla}_{[V,JV]} W) - h(\hat{\nabla}_{[V,JV]} W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(V,JV)W &= \nabla_V T_{JV}W + \nabla_V v\hat{\nabla}_{JV}W - \nabla_{JV}T_V W - \nabla_{JV}v\hat{\nabla}_V W \\ &- v(\hat{\nabla}_{[V,JV]}W) - h(\hat{\nabla}_{[V,JV]}W) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 de (a) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(V,JV)W &= T_V T_{JV}W + \hat{\nabla}_V T_{JV}W + T_V v\hat{\nabla}_{JV}W + v\hat{\nabla}_V v\hat{\nabla}_{JV}W \\ &- T_{JV}T_V W - \hat{\nabla}_{JV}T_V W - T_{JV}v\hat{\nabla}_V W - v\hat{\nabla}_{JV}v\hat{\nabla}_V W \\ &- v(\hat{\nabla}_{[V,JV]}W) - h(T_{[V,JV]}W) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} R(V,JV)W &= \hat{R}(V,JV)W + T_V T_{JV}W + \hat{\nabla}_V T_{JV}W + T_V v\hat{\nabla}_{JV}W \\ &- T_{JV}T_V W - \hat{\nabla}_{JV}T_V W - T_{JV}v\hat{\nabla}_V W \\ &- h(T_{[V,JV]}W) \end{aligned}$$

olur. JW *ile iç çarpıma tabi tutulursa*

$$B(V,W) = (\hat{R}(V,JV)W, JW) + g(T_V T_{JV}W, JW) - g(T_{JV}T_V W, JW)$$

olur.

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + g(T_V T_{JV}W, JW) - g(T_{JV}T_V W, JW)$$

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_{JV}W) - g(T_V W, T_{JV}JW)$$

dır.

b) *Benzer şekilde ispat yapılır.*

c) *Tanım 4.2.1' den*

$$B(X,Y) = g(R(X,JX)Y, JY)$$

olur.

$$R(X,JX)Y = \nabla_{[X,JX]}Y + \nabla_{JX}\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_{JX}Y$$

alınır. $\nabla_{[X,JX]}Y$ *dikey kabul edelim. Denklemdeki terimlerden herbiri ayrı ayrı bulunur. Lemma 3.2.1(b)' den*

$$\begin{aligned} \nabla_{[X,JX]}Y &= h\nabla_{[X,JX]}Y + T_{[X,JX]}Y && (4.1) \\ \nabla_{[X,JX]}Y &= \nabla_{A_X JX - A_{JX}X}Y + T_{[X,JX]}Y && (4.2) \\ \nabla_{[X,JX]}Y &= 2\nabla_{A_X JX}Y + T_{[X,JX]}Y && (4.3) \\ \nabla_{[X,JX]}Y &= 2\nabla_Y A_X JX + T_{[X,JX]}Y && (4.4) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (e) ' den

$$\nabla_{JX}\nabla_X Y = A_{JX}A_X Y + v\nabla_{JX}A_X Y + A_{JX}h\nabla_X Y + h\nabla_{JX}h\nabla_X Y \qquad (4.5)$$

Lemma 3.2.1 (e) ' den

$$\nabla_X \nabla_{JX} Y = A_X A_{JX} Y + v\nabla_X A_{JX} Y + A_X h\nabla_{JX} Y + h\nabla_X h\nabla_{JX} Y \qquad (4.6)$$

$h\,[X, JX] = 0$ *olduğundan* $\nabla'_{[X,JX]} Y = 0$ *' dır.*
$(4.4), (4.5), (4.6)$ *denklemleri yerlerine yazılırsa ve* JY *ile iç çarpıma tabi tutulursa*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(R(X,JX)Y, JY) \\ B(X,Y) &= g(2\nabla_Y A_X JX, JY) + g(T_{[X,JX]}Y, JY) + g(A_{JX} A_X Y, JY) \\ &+ g(v\nabla_{JX} A_X Y, JY) + g(A_{JX} h\nabla_X Y, JY) + g(h\nabla_{JX} h\nabla_X Y, JY) \\ &- g(A_X A_{JX} Y, JY) - g(v\nabla_X A_{JX} Y, JY) - g(A_X h\nabla_{JX} Y, JY) \\ &- g(h\nabla_X h\nabla_{JX} Y, JY) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$g(T_{[X,JX]}Y, JY), \quad g(v\nabla_{JX} A_X Y, JY), \quad g(A_{JX} h\nabla_X Y, JY), \quad g(v\nabla_X A_{JX} Y, JY),$

$g(A_X h\nabla_{JX} Y, JY)$ *terimleri sıfır olur.*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(2\nabla_Y A_X JX, JY) + g(A_{JX} A_X Y, JY) + g(h\nabla_{JX} h\nabla_X Y, JY) \\ &- g(A_X A_{JX} Y, JY) - g(h\nabla_X h\nabla_{JX} Y, JY) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(2\nabla_Y A_X JX, JY) + g(A_{JX} A_X Y, JY) - g(A_X A_{JX} Y, JY) \\ &+ g(h\nabla_{JX} h\nabla_X Y, JY) - g(h\nabla_X h\nabla_{JX} Y, JY) \end{aligned}$$

$B(X,Y) = B^*(X_*, Y_*) + g(2\nabla_Y A_X JX, JY) + g(A_{JX} JY, A_X Y) - g(A_X JY, A_{JX} Y)$
elde edilir.

Teorem 4.2.2. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir quasi-Kähler submersiyon olsun.* X *ve* Y *ortonormal yatay,* W *ve* V *ortonormal dikey vektörleri verilsin. Bu durumda holomorfik bi-kesit eğriliği aşağıdaki denklemleri sağlar(Watson 1976).*

a)

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + \|T_V JW\|^2 + \|T_V W\|^2$$

b)

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - 2g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

c)

$$B(X,Y) = B^*(X_*, Y_*) + \|A_X JY\|^2 + \|A_X Y\|^2$$

dır.

İspat:

a) *Teorem 4.2.1 (a)'den*

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_{JV}W) - g(T_V W, T_{JV} JW)$$

'dir. Teorem 4.1.3 (a) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_V JW) - g(T_V W, T_V J(JW)) \\ B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_V JW) - g(T_V W, -T_V W) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_V JW) + g(T_V W, T_V W) \\ B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + \|T_V JW\|^2 + \|T_V W\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

b) *Teorem 4.2.1 (b) den*

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX}V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(T_{JV}X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.1.3 (b) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX}V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(-JT_V X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX}V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(T_V X, -JT_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.3 (b) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX}V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - g(T_V X, T_{JV} JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX}V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - 2g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

elde edilir.

c) Teorem 4.2.1 (c) den

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= B^*(X_*,Y_*) - 2g(A_XJX, A_YJY) + g(A_{JX}Y, A_XJY) \\ &+ g(A_YX, A_{JX}JY) \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.1.3 (d) kullanılarak denklem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= B^*(X_*,Y_*) - 2g(A_XJX, A_YJY) + g(A_{JX}Y, -A_YJX) \\ &+ g(A_YX, -A_YJ^2X) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.3 (c) kullanılırsa

$B(X,Y) = B^*(X_*,Y_*) + g(A_{JX}Y, A_{JX}Y) + g(A_YX, A_YX)$

$B(X,Y) = B^*(X_*,Y_*) + g(A_{JX}Y, A_{JX}Y) + g(-A_XY, -A_XY)$

$B(X,Y) = B^*(X_*,Y_*) + g(A_{JX}Y, A_{JX}Y) + g(A_XY, A_XY)$

olur. Buradan

$$B(X,Y) = B^*(X_*,Y_*) + \|A_XJY\|^2 + \|A_XY\|^2$$

dır.

Teorem 4.2.3. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Tachibana submersiyonu olsun, X ortonormal yatay vektör, W ve V dikey ortonormal vektörleri verilsin. Bu durumda holomorfik bi-kesit eğriliği aşağıdaki denklemleri sağlar(Watson 1976).*

a)

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + 2\|T_VW\|^2,$$

b)

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_VA)_XJX, JV) - g(A_XJV, A_{JX}V) + g(A_XV, A_{JX}JV) \\ &- g((\nabla_{JV}A)_XJX, V) + 2\|T_VX\|^2 \end{aligned}$$

İspat:

a) Teorem 4.2.1 (a) den

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + g(T_VJW, T_{JV}W) - g(T_VW, T_{JV}JW)$$

dir. Teorem 4.1.3 (a) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_VJW, T_VJW) - g(T_VW, T_VJ(JW)) \\ B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_VJW, T_VJW) - g(T_VW, -T_VW) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + g(T_VJW, T_VJW) + g(T_VW, T_VW) \\ B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + \|T_VJW\|^2 + \|T_VW\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.4 (a) kullanılırsa

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + \|JT_V W\|^2 + \|T_V W\|^2$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + \|T_V W\|^2 + \|T_V W\|^2 \\ B(V,W) &= \hat{B}(V,W) + 2\|T_V W\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

b) *Teorem 4.2.1 (b) den*

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(T_{JV} X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.1.3 (b) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(-JT_V X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + g(T_V X, -JT_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.3 (b) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - g(T_V X, T_{JV} JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - 2g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.4 (c) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - 2g(T_V X, JT_V JX) \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.1.4 (c) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) - 2g(T_V X, J^2 T_V X) \end{aligned}$$

Buradan düzenlenirse

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) + g(A_X V, A_{JX} JV) \\ &- g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) + 2\|T_V X\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.2.4. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir Kähler submersiyon olsun. V dikey ve X yatay ortonormal birim vektörler olsun . Bu durumda, $X \in \chi^h(M_1)$, $V \in \chi^v(M_1)$ için*

a) $B(X,V) = 2\|T_V X\|^2$

b) $B(X,Y) = B^*(X_*, Y_*)$ *dır(Watson 1976).*

İspat:

a) *F bir Kähler submersiyon olduğundan yatay distribüsyon integrallenebilirdir* $(A = 0)$.
Teorem 4.2.1(b) den

$$\begin{aligned} B(X,V) &= g((\nabla_V A)_X JX, JV) - g(A_X JV, A_{JX} V) \\ &+ g(A_X V, A_{JX} JV) - g((\nabla_{JV} A)_X JX, V) \\ &+ g(T_{JV} X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX) \end{aligned}$$

$$B(X,V) = g(T_{JV} X, T_V JX) - g(T_V X, T_{JV} JX)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6 (d) ve 4.1.6 (e) kullanılırsa

$$B(X,V) = g(JT_V X, JT_V X) - g(T_V X, -T_V X)$$

olur. Hermityen manifoldun tanımını kullanırsak

$$B(X,V) = g(T_V X, T_V X) + g(T_V X, T_V X)$$

$$B(X,V) = 2\|T_V X\|^2$$

bulunur.

b) *F bir Kähler submersiyon olduğundan yatay distribüsyon integrallenebilirdir* $(A = 0)$.
Teorem 4.2.1 (c)' den

$$B(X,Y) = B^*(X_*, Y_*) - 2g(A_X JX, A_Y JY) + g(A_{JX} Y, A_X JY) + g(A_Y X, A_{JX} JY)$$

olduğundan

$$B(X,Y) = B^*(X_*, Y_*)$$

elde edilir. O halde,
M_1 manifoldunun bi-kesit eğriliği M_2 manifoldunun bi-kesit eğriliğine eşittir.

Teorem 4.2.5. *$F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir hemen hemen Hermityen submersiyonu, X yatay , V dikey ortonormal birim vektörleri verilsin. Bu durumda*

a) $H(V) = \hat{H}(V) + \|T_V JV\|^2 - g(T_V V, T_{JV} JV)$

b) $H(V) = H^*(X_*) - 3\|A_X JX\|^2$ *olur(Watson 1976).*

İspat:

a) *Teorem 4.2.1 (a) kullanılırsa*
$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + g(T_V JW, T_{JV} W) - g(T_V W, T_{JV} JW)$
W *yerine* V *yazılırsa*

$$\begin{aligned} B(V,V) &= \hat{B}(V,V) + g(T_V JV, T_{JV} V) - g(T_V V, T_{JV} JV) \\ B(V,V) &= \hat{B}(V,V) + g(T_V JV, T_V JV) - g(T_V V, T_{JV} JV) \\ B(V,V) &= \hat{B}(V,V) + \|T_V JV\|^2 - g(T_V V, T_{JV} JV) \end{aligned}$$

$H(V) = B(V,V)$ *olur.*

$$H(V) = \hat{H}(V) + \|T_V JV\|^2 - g(T_V V, T_{JV} JV)$$

olur.

b) *Teorem 4.2.1 (c) kullanılırsa*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= B^*(X_*, Y_*) - 2g(A_X JX, A_Y JY) + g(A_{JX} Y, A_X JY) \\ &+ g(A_Y X, A_{JX} JY) \end{aligned}$$

olur. Y *yerine* X *yazılırsa*

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B^*(X_*, X_*) - 2g(A_X JX, A_X JX) + g(A_{JX} X, A_X JX) \\ &+ g(A_X X, A_{JX} JX) \end{aligned}$$

dır. A *alterleyen olduğundan*

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B^*(X_*, X_*) - 2g(A_X JX, A_X JX) - g(A_X JX, A_X JX) \\ &+ g(A_X X, A_{JX} JX) \end{aligned}$$

elde edilir..

$A_X X = 0, \qquad A_{JX} JX = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B^*(X_*, X_*) - 3g(A_X JX, A_X JX) \\ B(X,X) &= B^*(X_*, X_*) - 3\|A_X JX\|^2 \end{aligned}$$

$H(X) = B(X,X)$ *olduğundan,*

$$H(X) = H^*(X_*) - 3\|A_X JX\|^2$$

olur.

Teorem 4.2.5 uygulamalarından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir hemen hemen Hermityen submersiyonu,* X *yatay vektör alanı olsun. Bu durumda*

$$H(X) \leqslant H^*(X_*)$$

dır(Watson 1976).

Teorem 4.2.6. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir quasi-Kähler submersiyonu,* X *ve* Y *yatay ,* V *ve* W *dikey ortonormal vektörleri verilsin. Bu durumda*

a) $H(V) = \hat{H}(V) + \|T_V V\|^2 + \|T_V JV\|^2$

b) $H(X) = H^*(X_*)$ *dir(Watson 1976).*

İspat:

a) *Teorem 4.2.2 (a) kullanılırsa*

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + \|T_V JW\|^2 + \|T_V W\|^2$$

dır. W *yerine* V *alınırsa*

$$B(V,V) = \hat{B}(V,V) + \|T_V JV\|^2 + \|T_V V\|^2$$

olur. $H(V) = B(V,V)$ *olduğundan*

$$H(V) = \hat{H}(V) + \|T_V JV\|^2 + \|T_V V\|^2$$

elde edilir.

b) *Teorem 4.2.2 (c) kullanılırsa*

$$B(X,Y) = B^*(X_*,Y_*) + \|A_X JY\|^2 + \|A_X Y\|^2$$

dır. Y *yerine* X *yazılırsa*

$$B(X,X) = B^*(X_*,X_*) + \|A_X JX\|^2 + \|A_X X\|^2$$

olur. Teorem 4.1.3 (c) den

$A_X X = 0, \qquad A_X JX = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B^*(X_*,X_*) + \|A_X JX\|^2 + \|A_X X\|^2 \\ B(X,X) &= B^*(X_*,X_*) \end{aligned}$$

bulunur. $H(X) = B(X,X)$ *olduğu için*

$$H(X) = H^*(X_*)$$

dir(Watson 1976).

Teorem 4.2.6 nin uygulamalarından aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.2. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir quasi-Kähler submersiyonu olsun. Bu durumda* V *dikey vektör alanı için*

$$H(V) \geqslant \hat{H}(V)$$

ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart liflerin total geodezik olmasıdır(Watson 1976).

Sonuç 4.2.3. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir quasi-Kähler submersiyonu olsun. Bu durumda quasi-Kähler submersiyon yatay holomorfik* 2*-düzlemler üzerinde holomorfik kesit eğriliğini korur(Watson 1976).*

Sonuç 4.2.4. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir quasi-Kähler submersiyonu olsun.* M_1 *manifoldunun sabit holomorfik kesit eğriliğinin* c *olduğunu varsayalım.* M_2 *manifoldunun sabit holomorfik kesit eğriliği de* c *olacaktır(Watson 1976).*

Teorem 4.2.7. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *bir hemen hemen Tachibana submersiyonu,* X *yatay ,* V *dikey ortonormal vektörleri verilsin. Bu durumda*

$$H(V) = \hat{H}(V) + 2\|T_V V\|^2$$

olur(Watson 1976).

İspat: *Teorem 4.2.3 (a) kullanırsak*

$$B(V,W) = \hat{B}(V,W) + 2\|T_V W\|^2$$

olur. W *yerine* V *yazarsak*

$$B(V,V) = \hat{B}(V,V) + 2\|T_V V\|^2$$

dır. $H(V) = B(V,V)$ *olduğundan,*

$$H(V) = \hat{H}(V) + 2\|T_V V\|^2$$

olur.

4.3 Kuaterniyonik Manifoldlar ve Submersiyonlar

Tanım 4.3.1. M*,* n *boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olduğu varsayılsın.* M *üzerinde* $(1,1)$ *tipinde tensör alanlarını içeren* 3*-boyutlu* V *vektör demetinin olduğunu varsayalım.* V*' nin* $\{J_1, J_2, J_3\}$ *yerel bazı var ve öyleki* $\forall\alpha \in \{1,2,3\}$ *için*

$$J_\alpha^2 = -I, \qquad J_\alpha J_{\alpha+1} = -J_{\alpha+1} J_\alpha = J_{\alpha+2}$$

dir. O zaman V *demetine* M *üzerinde bir hemen hemen kuaterniyonik yapı denir.*
$\{J_1, J_2, J_3\}$*'e* V*'nin kanonik bazı denir.* (M,V) *ikilisine bir hemen hemen kuaterniyonik manifold denir. Herhangi bir hemen hemen kuaterniyonik manifoldun* 4 *boyutlu olduğunu görmek kolaydır. Yani* $n = 4m$ *dir(Ianus ve ark. 2008).*

Tanım 4.3.2. (M,V) *bir hemen hemen kuaterniyonik manifold,* g *de* M *üzerinde bir Riemann metriği verilsin. Burada* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g(X,Y), \qquad \forall\alpha \in \{1,2,3\}$$

şartı sağlanıyorsa (M,V,g) *üçlüsüne bir hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifold denir(Ianus ve ark. 2008).*

Tanım 4.3.3. *Eğer* V *demeti* g*'nin* ∇ *Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise o zaman* (M,V,g) *'ye bir kuaterniyonik Kähler manifold denir.* $\nabla_X J_\alpha = 0$ *olur. Denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.*
Yerel olarak tanımlanan $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *1-formları var öyle ki* $\forall\alpha \in \{1,2,3\}$ *için*

$$\nabla_X J_\alpha = \omega_{\alpha+2}(X) J_{\alpha+1} - \omega_{\alpha+1}(X) J_{\alpha+2}, \qquad X \in \chi(M) \tag{4.7}$$

dır(Ianus ve ark. 2008).

Tanım 4.3.4. (M_1, V_1, g_1) *ve* (M_2, V_2, g_2) *iki hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifold olsun. Bir* $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *dönüşümü* $X \in M_1$ *noktasında herhangi bir* $J \in V_{1X}$ *için* $J' \in V_{2F(X)}$ *var öyle ki*

$$F_* \circ J = J' \circ F_*$$

dır. Üstelik eğer herbir $X \in M_1$ *noktasında* F *bir* (V_1, V_2)*-holomorfik dönüşüm ise,bu durumda* F*' ye bir* (V_1, V_2)*-holomorfik dönüşüm denir(Ianus ve ark. 2008).*

Tanım 4.3.5. *(M_1, V_1, g_1) ve (M_2, V_2, g_2) iki hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifold olsun. $F : M_1 \longrightarrow M_2$ bir Riemann submersiyonu bir (V_1, V_2)-holomorfik dönüşüm ise F' ye kuaterniyonik submersiyon denir. Dahası eğer (M_1, V_1, g_1) bir kuaterniyonik Kähler manifold ise o zaman F' ye bir kuaterniyonik Kähler submersiyon denir(Ianus ve ark. 2008).*

Önerme 4.3.1. *$F : (M_1, V_1, g_1) \longrightarrow (M_2, V_2, g_2)$ bir kuaterniyonik submersiyon olsun.*

a) F' den indirgenen yatay ve dikey distribüsyonlar $\forall J \in V_{1X}$ altında invariyanttır.

b) Lifler kuaterniyonik altmanifoldlardır(Ianus ve ark. 2008).

İspat:

a) $F(V_1, V_2)$ holomorfik dönüşüm olduğundan, herhangi bir U dikey vektör alanı için

$$F_* \circ J_\alpha U = J'_\alpha \circ F_* U$$

olur. Buradan $F_* U = 0$ olduğundan $F_* \circ (J_\alpha U) = 0$ elde edilir. Böylece $J_\alpha U$ bir dikey vektör alanıdır. $J_\alpha(\chi^v(M_1)) \subseteq \chi^v(M_1)$, $\forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$.
X yatay vektör alanı ve U dikey vektör alanı için

$$g(J_\alpha X, U) = -g(X, J_\alpha U) = 0$$

elde edilir. Böylece $J_\alpha(\chi^h(M_1)) \subseteq \chi^h(M_1), \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$. $J_\alpha X$ yatay vektör alanıdır. Dolayısıyla yatay ve dikey distribüsyonlar F-invaryanttır.

b) (a) dan dikey distribüsyon invaryanttır. Böylece dikey distribüsyonun diferensiyellenebilir altmanifoldu olan lifler kuaterniyonik altmanifold olur.

Teorem 4.3.1. *$F : (M_1, V_1, g_1) \longrightarrow (M_2, V_2, g_2)$ bir kuaterniyonik Kähler submersiyon olsun. (M_2, V_2, g_2) bir kuaterniyonik Kähler manifolddur(Ianus ve ark. 2008)..*

İspat Herhangi bir $X, Y \in \chi(M_1)$ için $F_* X = X_*$, $F_* Y = Y_*$ olur. Burada $X_*, Y_* \in \chi(M_2)$ dir. M_1 bir kuaterniyonik Kähler submersiyon olduğundan $X, Y \in \chi^h(M_1)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X J_\alpha)Y &= \nabla_X J_\alpha Y - J_\alpha \nabla_X Y \\ F_*((\nabla_X J_\alpha)Y) &= F_*(\nabla_X J_\alpha Y) - F_*(J_\alpha \nabla_X Y) \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.3.1 (a)'dan $J_\alpha Y \in \chi^h(M_1)$ olduğundan buradan

$$F_*((\nabla^1_X J_\alpha)Y) = F_*(h\nabla^1_X(J_\alpha Y)) - F_*(J_\alpha(h\nabla^1_X Y))$$

elde edilir.
$\nabla^1_X J_\alpha Y$ ile $\nabla^2_X J'_\alpha Y_*$ vektör alanlarının F bağlı olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} F_*((\nabla^1_X J_\alpha)Y) &= \nabla^2 F_{*X}(F_*(J_\alpha Y)) - J'_\alpha F_*(\nabla^1_X Y) \\ F_*((\nabla^1_X J_\alpha)Y) &= \nabla^2 F_{*X}(J'_\alpha F_* Y) - J'_\alpha(\nabla^1 F_{*X} F_* Y) \\ F_*((\nabla^1_X J_\alpha)Y) &= \nabla^2_{X_*}(J'_\alpha Y_*) - J'_\alpha(\nabla^2_{X_*} Y_*) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$F_*((\nabla^1_X J_\alpha)Y) = (\nabla^2_{X_*} J'_\alpha)Y_* \tag{4.8}$$

elde edilir. Yani (M_1, V_1, g_1) bir kuaterniyonik Kähler manifold olduğundan (4.7) denklemine sahibiz ve M_2 üzerinde ω'_1 , ω'_2 , ω'_3 1-formlarını tanımlayalım. X, M_1 üzerindeki temel tensör alanı M_2 üzerindeki herhangi bir X_* vektör alanı için $(F_*X = X_*)$

$$\omega'_\alpha(X_*) = \omega_\alpha(X) \qquad \forall\alpha \in \{1, 2, 3\} \tag{4.9}$$

dır.
(4.7) , (4.8) , (4.9) denklemlerinden $\forall\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ve X_* ,$Y_* \in \chi(M_2)$ için

$$(\nabla^2_{X_*} J'_\alpha)Y_* = \omega'_{\alpha+2}(X_*)J'_{\alpha+1}Y_* - \omega'_{\alpha+1}(X_*)J'_{\alpha+2}Y_*$$

dır.

Teorem 4.3.2. *$F : (M_1, V_1, g_1) \longrightarrow (M_2, V_2, g_2)$ bir kuaterniyonik Kähler submersiyon ise $A = 0$ dır(Ianus ve ark. 2008).*

İspat: (4.7) denkleminden yatay distribüsyon invaryant olduğundan tüm $X, Y \in \chi^h(M_1)$ ve $U \in \chi^v(M_1)$ için

$$g_1((\nabla_X J_\alpha)Y, U) = g_1(\omega_{\alpha+2}(X)J_{\alpha+1}Y - \omega_{\alpha+1}(X)J_{\alpha+2}Y, U) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} g_1(h(\nabla_X J_\alpha)Y + v(\nabla_X J_\alpha)Y, U) &= 0 \\ g_1(v(\nabla_X J_\alpha)Y, U) &= 0 \end{aligned}$$

olur. $U \neq 0$ olduğundan $v(\nabla_X J_\alpha)Y = 0$ 'dır. Diğer taraftan $v(\nabla_X J_\alpha)Y = 0$ ise $v\nabla_X J_\alpha Y = vJ_\alpha \nabla_X Y$' dır. A yatay tensör alanının tanımından

$$A_X(J_\alpha Y) = v(\nabla_X J_\alpha Y) = v(J_\alpha \nabla_X Y) = J_\alpha A_X Y$$

dır. Bu yüzden $\forall X, Y \in \chi^h(M_1)$ ve $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ için

$$A_X J_\alpha Y = J_\alpha A_X Y$$

dır. $Y = J_\alpha Y$ alınırsa

$$\begin{aligned} A_X J^2_\alpha Y &= J_\alpha A_X J_\alpha Y && (4.10) \\ A_X{-}Y &= J_\alpha A_X J_\alpha Y && (4.11) \\ A_X Y &= -J_\alpha A_X J_\alpha Y && (4.12) \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$A_{J_\alpha X} Y = -A_Y J_\alpha X = -J_\alpha A_Y X = J_\alpha A_X Y$$

dır. Burdan $X = J_\alpha X$ alınırsa,

$$\begin{aligned} A_{J^2_\alpha X} Y &= J_\alpha A_{J_\alpha X} Y && (4.13) \\ A_X Y &= -J_\alpha A_{J_\alpha X} Y && (4.14) \end{aligned}$$

bulunur. (4.12) ve (4.14) den

$$\begin{aligned}
A_X Y &= -J_3 A_X J_3 Y \\
A_X Y &= -J_3 A_X (J_1 J_2 Y) \\
A_X Y &= -J_3 A_{J_1 X} J_2 Y \\
A_X Y &= -J_3 A_{J_2 J_1 X} Y \\
A_X Y &= J_3 A_{J_3 X} Y \\
A_X Y &= J_3^2 A_X Y \\
A_X Y &= -A_X Y
\end{aligned}$$

$$A_X Y + A_X Y = 0 \Rightarrow 2A_X Y = 0 \Rightarrow A_X Y = 0$$

ise $A = 0$ dır. Teorem 4.3.2 den aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 4.3.1. *Eğer $F : (M_1, V_1, g_1) \longrightarrow (M_2, V_2, g_2)$ bir kuaterniyonik Kähler submersiyon ise o zaman,yatay distribüsyon tamamen integrallenebilirdir(Ianus ve ark. 2008).*

Örnek 4.3.1. *(M_1, V_1, g_1) bir hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifold ve TM_1 tanjant demeti olsun. $\forall A, B \in \Gamma(TM_1)$ için*

$$G(A, B) = g(KA, KB) + g'(F_* A, F_* B)$$

metriği ile tanımlansın. Burada $F : TM_1 \longrightarrow M_1$ doğal projeksiyon ve K bir konneksiyon dönüşümüdür. Eğer $X \in \Gamma(TM_1)$ ise o zaman X' in yatay lifti (veya dikey lifti) denilen TM_1 üzerinde bir vektör alanı öyle ki $\forall U \in TM_1$ için

$$F_* X_U^h = X_{F(U)} \qquad F_* X_U^v = 0_{F(U)}$$

$$K X_U^h = 0_{F(U)} \qquad K X_U^v = X_{F(U)}$$

dır. TM_1 üzerinde J_1', J_2', J_3' tensör alanlarını

$$J_\alpha' X^h = (J_\alpha X)^h, \qquad J_\alpha' X^v = (J_\alpha X)^v \qquad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Burada $\{J_1, J_2, J_3\}$ V_1 'in kanonik yerel bazı olduğunda tanımlıyoruz. Buradan eğer $\{J_1', J_2', J_3'\}$ tarafindan oluşturulan TM_1 üzerinden V_2 vektör demetini göz önüne alırsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.3. *(M_1, V_1, g_1) bir hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifold olsun(Ianus ve ark. 2008). Bu durumda*

(a) (TM_1, V_2, G) bir hemen hemen kuaterniyonik Hermityen manifolddur.

(b) $F : TM_1 \longrightarrow M_1$ doğal projeksiyonu bir kuaterniyonik submersiyondur.

İspat

(a) Tüm $\alpha \in \{1,2,3\}$ için

$$J'_1 J'_2 = -J'_2 J'_1 = J'_3 \qquad (J'_\alpha)^2 = -I$$

ve

$$G(J'_\alpha X, J'_\alpha Y) = G(X,Y)$$

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= g_1(KX,KY) + g_1(F_*X, F_*Y) \\ G(J'_\alpha X, J'_\alpha Y) &= g_1(KJ'_\alpha X, KJ'_\alpha Y) + g_1(F_*J'_\alpha X, F_*J'_\alpha Y) \end{aligned}$$

Buradan

$$G(J'_\alpha X, J'_\alpha Y) = G(X,Y)$$

elde edilir. Böylece (TM_1, V_2, G) bir hemen hemen kuatreniyonik manifolddur.

(b)

$$F_*J'_\alpha X^v = F_*(J_\alpha X)^v = 0 = J_\alpha F_* X^v$$

ve

$$F_*J'_\alpha X^h = F_*(J_\alpha X)^h = J_\alpha X = J_\alpha F_* X^h$$

vardır. Buradan

$$F_*J'_\alpha = J_\alpha F_*$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Riemann submersiyonları üzerinde inşa edilen temel tensör ve yapılar ilk önce hemen hemen Hermityen, Kähler, Hermityen, quasi-Kähler, nearly- Kähler, Tachibana manifoldlarına taşınmıştır. Bu submersiyonlarda Riemann submersiyonlarının eğrilik ilişkilerine ve tensörlerin integrallenebilirliğine benzer ilişkiler elde edilmiştir. Bununla birlikte Riemann submersiyonlarındaki ilişkiler kuaterniyonik yapılara da taşınmıştır.

6. KAYNAKLAR

Akyol, M. A. 2015. Kompleks Geometride Konform Submersiyonlar. Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi.

Bejancu, A. 1986. Geometry of CR-submanifolds. D.Reidel publishing company, Dordrecht Holland.

Bootby, W.M. 1986. An Introduction to Differantiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press Inc.

Chen,B. Y. 1973. Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, New York.

Do Carmo, M. P. 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser Boston.

Falcitelli, M., Ianus S., Pastore, A. M. 2004. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific.

Gray, A. 1967. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. ***J. Math. Mech***. 16, 715-737.

Gundmundsson,S. 2006. An Introduction to Riemannian Geometry. Lectures Notes, University of Land,Mathematics, Faculty of Science.

Gündüzalp, Y. 2007. Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine. Yüksek Lisans Tezi,İnönü Üniversitesi.

Gündüzalp, Y. 2011. Çarpım Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine. Doktora Tezi,İnönü Üniversitesi.

Gündüzalp, Y. 2016. Almost Para-Hermitian Submersions. Matematicki Vesnik 68, 4, 241–253

Hacısalihoğlu, H. H. 1982. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi, Fen-Ed. Fak. Mat. No:2.

Hacısalihoğlu, H. H. 2003. Diferensiyel Geometri. Cilt: 1,2,3 Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi.

Ianus, S., Mazzocco R., Vilcu, G. E. 2008. Riemannian submersions from almost quaternionic manifolds. ***Acta Appl.Math.***,104(1), 83-89.

Kobayashi, S. , Nomizu, K. 1963. Foundations of Differential Geometry. vol:1, I-II, New York.

Kon, M. , Yano, K. 1984. Structures on Manifolds. World Scientific Publishing Co. Pte.

Ltd.

Matsushima, Y. 1972. Differential Manifolds. Marcell Dekker Inc New York.

Okubo, T. 1987. Differential Geometry. Marcell Dekker Inc.

O'Neill, B. 1966. The Fundamental Equations of a Submersions. ***Michigan Math. J.***. 13, 458-469.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press.

Suzuki, A. C. 2006. Mappings With Maximal Rank. arXiv:math.DG/0606091V1.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi.

Şahin, B. 2010. Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. ***Central European J.Math.***. 8(3), 437-447.

Watson, B. 1976. Almost Hermitian Submersions. ***J.Diff.Geom*** 11(1), 147-165.

ÖZGEÇMİŞ

20.05.1984 yılında Diyarbakır' da doğdu. İlk ve Orta öğretimini Diyarbakır 5 Nisan İlkokulu ve Mustafa Kemal Ortaokulunda bitirdi. Liseyi Diyarbakır Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında lisansa 19 Mayıs Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde başlayıp Dicle Üniversitesinde aynı bölümü geçerek 2010 yılında mezun oldu. 2012 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde kadrolu öğretmen olarak görevine devam etmektedir.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Pınar Baran
ÖĞRENCİ NO	16804008
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Hemen Hemen Hermityen Submersiyonların Geometrisi Üzerine

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	62
BENZERLİK ORANI	%22
RAPORLAMA TARİHİ	27/06/ 2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 62 sayfalık kısmına ilişkin, 27/06/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 22 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☐ Alıntılar hariç/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)

Pınar BARAN

(İmza)	(İmza)
27/06/2018	27/06/2018
Doç.Dr. Yılmaz Gündüzalp	Prof. Dr. Hatun Özlem Güney
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**