T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAMPİNG TERİMLİ TİMOSHENKO DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Hazal YÜKSEKKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran - 2018

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Hazal YÜKSEKKAYA tarafından yapılan "Damping Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Doç.Dr. Halis YILMAZ H. Yılmaz

Üye : Doç.Dr. Erhan PİŞKİN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa MIZRAK

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 11/06/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

..../..../2018

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösterip destek olan, akademik bilgileri ve tecrübesi ile tezimin hazırlanmasında yardımcı olan ayrıca bana her türlü olanağı sağlayan, çok değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Erhan PİŞKİN'e en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu yüksek lisans çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.18.002) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DAMPİNG TERİMLİ TİMOSHENKO DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazal YÜKSEKKAYA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan diferansiyel denklemlere kısaca değinilmiş ve çözümlerin patlaması ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde damping terimli Timoshenko denklemi ile ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz ve Sobolev uzayları ile ilgili temel kavramlar ve bazı eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra çözümlerin patlamasını ispatlarken kullandığımız lemmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, önce kiriş teorileri ile ilgili tanımlar verilmiştir. Daha sonra Timoshenko denkleminin modellenmesi verilmiştir. Son kısım ise tezin orijinal kısmı olup çözümlerin patlaması negatif, sıfır ve pozitif başlangıç enerjileri için ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Timoshenko denklemi, Damping terim, Patlama.

ABSTRACT

BLOW UP OF SOLUTIONS FOR TIMOSHENKO EQUATION WITH DAMPING TERM

MASTER THESIS

Hazal YÜKSEKKAYA

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2018

In the first chapter of this thesis, differential equations emerging in applied sciences, such as engineering and science, are briefly dealt with, and the basic information regarding blow up of solutions is given.

In the second chapter, the studies concerning Timoshenko equation with damping term are summarized.

In the third chapter, elementary notions and some inequalities about Sobolev spaces, functional analysis and differential equations are presented. Subsequently, the lemmas that we have used to prove the blow up of the solutions is presented.

In the fourth chapter, primarily, the definitions pertaining to the beam theory are given, and then, the modeling of Timoshenko equation is presented. The final part involves the original part of the thesis, in which the blow up of the solutions has been proven for negative, zero and positive initial energy.

Keywords: Timoshenko equation, Damping term, Blow up.

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\,\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	: *p*. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
∇	: Nabla operatörü (Gradiyent)
Δ	: Laplace operatörü

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak kısmi diferansiyel denklemler, geometrik yüzeylerin ve mekanikte çeşitli problemlerin incelenmesinden doğmuştur. Böylece kısmi diferansiyel denklemlerin yüzey teorisini geliştirmede ve fiziksel problemlerin çözümünde önemli olduğu keşfedilmiştir. On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru, çok sayıda matematikçi diferansiyel denklemlerin sunduğu bir çok problemin araştırılmasına aktif bir biçimde dahil olmuştur. Bu araştırmaların en önemli nedeni, diferansiyel denklemlerin hem doğanın birçok yasasını ifade etmesi hem de bilim ve mühendislikteki çeşitli problemlerin matematiksel analizi ile ilişkili olmasıydı.

Ayrıca günümüzde ileri teknoloji sistemlerindeki gelişmeler, matematiksel modellemelerden ve sistem davranışlarının analizinden ayrı düşünülemez. Bu nedenle kontrol mühendisliği, iletişim mühendisliği, makine mühendisliği ve robot teknolojisi gibi modern mühendislik bilimlerindeki birçok alan karşılaşılan problemleri çözmek için gelişmiş matematiksel yöntemler kullanır. Matematikçiler, mühendislerin sorularının cevaplarını bulmalarını sağlamak için onları destekleyecek yeni yöntemler sunar. Sunulan bu yöntemler karşılaşılan problemleri daha anlaşılabilir hale getirir ve onları pratikte uygulanabilir kılar. Bu nedenle esas amaç, karşılaşılan problemleri matematiksel doğruları ihmal etmeden anlaşılabilir kılma ve gerçek dünyada uygulanabilir hale getirmedir.

Kısmi diferansiyel denklemler, genel olarak fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerden ortaya çıkmaktadır. Fen ve mühendislikte kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu, fiziksel yasaların korunması veya uygulanmasının bir sonucudur. Olaylar belirli bir uzay zamanda sürekli bir durum ise; akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve elektromagnetizma gibi bir alan kuramına ihtiyaç duyulur. Uzay ve zaman değişkenlerine sahip bu olaylar kısmi türev içeren denklemlerle açıklanabilir. Böylece bu formülasyonu sağlayan kısmi diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemlerde başlangıç koşulları, olayların en azından belirli bir zaman aralığında davranışını öngörmek için gerekli ve yeterlidir. Kısmi diferansiyel denklemler teorisi, çeşitli matematik alanlarının yöntemlerini kullanan geniş bir matematik alanıdır. Bu denklemler sayesinde, mühendislerin pek çok matematiksel alanlarla ilgili temel fikirleri makul bir seviyede anlamaları ve sonuçları pratik durumlara uygulamaları mümkündür. Ayrıca tipik diferansiyel denklemlerin çoğunun kökeni mühendislik problemlerine dayanır.

Kısmi diferansiyel denklemler; doğanın temel kanunlarının formülasyonunda, uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerindeki çeşitli problemlerin matematiksel analizinde sıkça ortaya çıkar. Kısmi diferansiyel denklemler modern matematiksel bilimlerde özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi bir rol oynamaktadır. Fiziksel birçok problem, başlangıç ve/veya sınır şartlarına sahip kısmi diferansiyel denklemler tarafından tanımlanmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin kullanılması fiziksel dünyanın anlaşılmasında edinilen en büyük başarıdır. Örneğin, adi diferansiyel denklemler, yaylarla birbirine bağlı bir zincirin titreşim analizinde kullanılırken, kısmi diferansiyel denklemler ise bir çubuğun dinamik analizinin uygulanmasında kullanılırlar. Buradan da anlaşılacağı gibi, bazı ayrıntıların daha dikkatle incelenmesi gereken durumlarda kullanılan kısmi diferansiyel denklemler daha geneldir.

Mühendislikte bazı kısmi diferansiyel denklem örnekleri:

1. Dalga yayılması
2. Isı yayılması
3. Elastik çubukta boyuna dalgalar
4. Kiriş teorileri
5. Sürekli ortamlar mekaniğidir.

Kısmi diferansiyel denklemler genel olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkmaktadır. Lineer kısmi diferansiyel denklemler modern matematikte özellikle fizik, geometri ve analiz problemlerinde merkezi bir rol oynamaktadır. Lineer kısmi diferansiyel denklemlerin gelişimi genel teoriler ve bu lineer denklemlerin çeşitli çözüm yöntemlerini geliştirme çabaları ile ilişkilidir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kökeni çok eski olmasına rağmen, bu denklemler ile ilgili önemli çalışmalar ancak yirminci yüzyılın son yarısında yapıldı. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin geliştirilmesinde ana etkenlerden biri, lineer olmayan dalga yayılımı problemlerinin incelenmesidir. Bu problemler akışkanlar dinamiği, optik, katı mekaniği, plazma fiziği, kuantum alan teorisi ve yoğun madde fiziği gibi uygulamalı matematik, fizik ve mühendisliğin farklı alanlarında ortaya çıkmaktadır. Lineer olmayan dalga denklemleri, lineer dalga denklemleri için elde edilenlerden daha farklı çözüm örnekleri sağlamıştır. Bunların en bilinenleri: şok dalgaları, su dalgaları, solitonlar ve tekil dalgalardır. Lineer olmayan dalgalar ile ilgili son otuz yıldır oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu süre boyunca fiziksel, kimyasal ve biyolojik sistemlerde göze çarpan ve beklenmedik birçok gelişme oldu.

Matematik, fizik ve mühendislik bilimlerindeki birçok problem, birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin formülasyonu ve çözümü ile ilgilidir. Matematiksel açıdan bakıldığında, birinci mertebeden denklemlerin ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden denklemlerde kullanılabilecek kavramsal bir temel sağlama avantajı vardır.

Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler geometrik optik ve akışkanlar dinamiği gibi çeşitli fizik bilimleri alanlarında ortaya çıkar. Bu denklemler çeşitli alanların geliştirilmesinde önemli rol oynamaktadır. Lineer ve yarı lineer birinci mertebeden kismi diferansiyel denklemler teorisi, kısmi diferansiyel denklemleri tanımlayan katsayılarla ilişkili bir vektör alanının, integral yüzeylerinin bulunmasına indirgenebilmesidir. Bu fikir, karakteristikler metodu olarak bilinen bir çözüm tekniğinin temelidir. Bu metot hem teorik hem de sayısal sonuçlar için kullanılabilir. Bu olgunun fiziksel anlamı, şok dalgalarının ortaya çıkışı ile ilgilidir.

İkinci mertebeden yarı lineer denklemlerin analizi, daha yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler ve sistemlerin dünyasına açılan kapıdır. Bu analizin en önemli yönlerinden biri hiperbolik, parabolik ve eliptik tipler arasındaki ayrımdır. Fiziksel açıdan bakıldığında; hiperbolik tip, sonlu mesafelerde keskin sinyaller gönderebilen fiziksel sistemlere karşılık gelir, parabolik tip diffüzif olayları temsil eder, eliptik tip ise genellikle zamanın olmadığı statik durumlarla ilişkilendirilir. Bu üç tipten en çok hiperbolik tip birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere benzemektedir [Debnath 2012, Epstein 2017].

Fen ve mühendislik gibi bazı uygulamalı bilimlerden elde edilen kısmi diferansiyel denklemler ikiden daha yüksek mertebeli olabilir. Bunlardan biri de genel olarak dördüncü mertebeden olan kiriş teorilerinden elde edilir. Örneğin; Timoshenko kiriş teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi öne çıkan kiriş teorilerindendir. Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin genelleştirilmiş halidir ve elastisitenin öncüsü Timoshenko tarafından elde edilmiştir. Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli kiriş teorisinden farklı olarak kayma gerilmelerinin kiriş eğilmesinde etkili olduğunu belirtir yani kayma deformasyonlarını da göz önüne alır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde ise bu kayma deformasyonları çok küçük olduğundan ihmal edilir [Çelik 2011].

1.1. Patlama (Blow up)

Lineer olmayan hiperbolik denklemleri içeren başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması konusu üzerine geçmişte çok fazla çalışma yapılmıştır ve günümüzde de bu konu üzerine çalışmalar etkin olarak sürdürülmektedir.

Kabaca, doğrusal olmayan problemlerde zamanın sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında, problemdeki değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı da çözümler global olarak yok olur. Bu olay *blow up (çözümün patlaması)* veya *global çözümlerin yokluğu* olarak adlandırılır.

Blow up, adi diferansiyel denklemlerde oldukça temel düzeyde gerçekleşmektedir.

Basit bir örnekle ifade edecek olursak reel değişkenli

$$u = u(t)$$

fonksiyonu için çözümün patlamasına adi diferansiyel denklemler için basit bir örnek verelim;

$$\begin{cases} u' = u^2 , \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = \frac{1}{2-t}$ dir. Bu örnekte $t \to 2^-$ için $u(t) \to \infty$ dır. Bu örnek doğrusal olmayan denklemlerin büyük bir sınıfı için ortak olan bir özelliği göstermesi açısından önemlidir, yani çözüm sonlu zamanda sonsuz olur.

Bu nedenle, bu tezin esas amacı son bölümde dördüncü mertebeden bir kısmi türevli denklem olan Timoshenko denkleminin bir sınıfı için çözümlerin patlaması için yeter koşulları vermektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin esas amacı; doğrusal olmayan

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u \tag{2.1}$$

Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlamasını göstermektir.

Bu denklemde $M\left(\|\nabla u\|^2\right) \equiv 1$ ve dördüncü mertebeden $\Delta^2 u$ teriminin yokluğunda (2.1) denklemi

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u \tag{2.2}$$

denklemine dönüşür. (2.2) denkleminin çözümlerinin varlık-teklik, asimptotik davranışı ve patlaması Georgiev ve Todorova (1994), Levine (1974) ve Messaoudi (2001) tarafından çalışıldı.

(2.1) denkleminde $M\left(\|\nabla u\|^2\right) \equiv 0$ ise

$$u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u$$

Petrovsky denklemi elde edilir. Bu denklemin varlık-teklik ve patlaması Messaoudi (2002) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra farklı yöntemler kullanılarak patlaması ve enerji azalması Wu ve Tsai (2009), Chen ve Zhou (2009), Li ve ark. (2012), Pişkin ve Polat (2014) tarafından çalışılmıştır.

Ono 1997 yılında (Ono 1997a-b)

$$u_{tt} - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^2\right) Au + \delta u_t = |u|^{\alpha} u$$

denkleminin patlamasını çalıştı.

Esquivel-Avila, 2010 ve 2013 yıllarında (2.1) denkleminin çözümünün varlığı, patlaması ve global atraktörünü çalıştı. Pişkin, 2015 yılında denklemin Banach büzülme dönüşümünden faydalanarak lokal varlığını, negatif başlangıç enerjisi için patlamasını ve enerji azalmasını gösterdi. Daha sonra 2016 yılında Pişkin ve Irkıl Timoshenko denkleminin çözümünün pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını çalıştılar.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler ve çözümlerin patlaması ile ilgili bazı lemmalara yer verilecektir. [Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Kesavan 1989, Polat 2005, Pişkin 2013, Pişkin 2017].

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Bir fonksiyonu ve onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir diferansiyel denklemde bağımlı ve bağımsız değişkenler olmak zorunda değildir. Fakat bağımlı değişkenin herhangi bir mertebeden türev veya türevleri olmak zorundadır.

Tanım 3.1.2. Diferansiyel denklem, tek bir bağımsız değişkene göre türev içerirse buna *adi diferansiyel denklem* denir. Bu denklemler genel olarak

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

biçiminde veya eğer $y^{(n)}$ yalnız bırakılabiliyorsa

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.1.3. Diferansiyel denklem, birden fazla bağımsız değişkene göre türev içerirse buna *kısmi diferansiyel denklem* denir. Bu denklemler ise genel olarak

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, ...\right) = 0$$

veya

$$f\left(x, y, z, z_x, z_y, ...\right) = 0$$

biçiminde yazılır. Örneğin;

$$y'' - 2y' - 3y = \sin x$$

denklemi adi diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemi ise kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.4. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin *mertebesi (basamağı)* denir. En yüksek mertebeli türevin cebirsel kuvvetine (üssüne) diferansiyel denklemin *derecesi* denir.

Örneğin;

$$(y''')^4 + 3x\,(y')^5 - 3y = \sin x$$

denklemi 3. mertebe, 4. derecedendir.

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme *doğrusal (lineer) denklem*, aksi halde *doğrusal olmayan (nonlineer) denklem* denir.

n. mertebeden en genel doğrusal adi diferansiyel denklem

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)$$

biçimindedir. Denklem eğer; $b(x) = 0$ ise *homojen denklem*, $b(x) \neq 0$ ise *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır.

Ayrıca eğer katsayılar sabit sayılar ise *sabit katsayılı diferansiyel denklem*, aksi halde *değişken katsayılı diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Örneğin;

$$y''' - x^3 y' + 4y = 0$$

diferansiyel denklemi 3. mertebe, 1. dereceden, değişken katsayılı, homojen, lineer bir adi diferansiyel denklemdir.

Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise *lineer denklem* denir.

Örneğin;

$$u_{xx} + e^{2y} u_y = xy^2 u$$

denklemi lineerdir.

Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevlerine göre lineer ise bu denkleme *yarı lineer denklem* denir.

Örneğin;

$$u_y u_{xx} - \sin x . u_{xy} = y$$

denklemi yarı lineer bir denklemdir.

Bazen yarı lineer bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olur. Böyle bir yarı lineer denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir.

Örneğin;

$$yu_{xx} + x^2 u_{yy} - u^3 u_x = 0$$

denklemi hemen hemen lineer bir denklemdir.

Bu tanımlara göre, hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklem sınıfının lineer denklem sınıfını; yarı lineer denklem sınıfının ise hemen hemen lineer denklem sınıfını içerdiği açıktır.

Tanım 3.1.6. İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{3.1.1}$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. (3.1.1) denklemi,

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

diskrimantının işaretine göre sınıflandırılır. Bu sınıflandırma

Diskrimant	Denklem Tipi
$\Delta > 0$	*Hiperbolik*
$\Delta = 0$	*Parabolik*
$\Delta < 0$	*Eliptik*

şeklinde yapılabilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik tiplerinin genel denklemleri sırasıyla Laplace, ısı ve dalga operatörünü içermektedir.

Matematiksel Nicelik	İsimlendirme	Fiziksel İsim	Sınıflandırma
Δ	Laplacian	Potansiyel operatörü	*Eliptik*
$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$	Isı	Difüzyon operatörü	*Parabolik*
$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$	D′Alembert	Dalga operatörü	*Hiperbolik*

Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilişleri

Diferansiyel denklemlerin elde edilmeleri genelde üç kısımda toplanabilir.

I) Problem cebirsel olarak verilebilir. İçinde keyfi sabitlerin bulunduğu bir cebirsel denklem, düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Cebirsel denklemdeki keyfi sabitler denklem ve onun türevleri arasında yok edilerek bir diferansiyel denkleme ulaşılır.

II) Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp, bu özelliklere uyan eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklem verir.

III) Uygulamalı bilim dallarında (Fen ve mühendislik gibi) problemin matematiksel modeli genellikle bir diferansiyel denklemdir.

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tanım 3.1.7.

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (3.1.2)$$

diferansiyel denklemi verilsin. $c_1, c_2, c_{3,...,}c_n$ birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere

$$F\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right) = 0$$

bağıntısıyla tanımlanan n parametreli bir fonksiyon ailesini göz önüne alalım. Eğer ailedeki her fonksiyon (3.1.2) denkleminin bir çözümü ise, bu fonksiyona (3.1.2) denkleminin *genel çözümü* denir.

Tanım 3.1.8. Keyfi sabitlere özel değerler vererek genel çözümden elde edilen çözümlere *özel çözümler* denir.

Tanım 3.1.9. Genel çözümde keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere *tekil (singüler, aykırı) çözüm* denir.

Tanım 3.1.10. Bir özel çözümün grafiğine *integral eğrisi*, genel çözümün grafiğine ise *integral eğriler ailesi (integral eğriler kümesi)* denir.

Örneğin;

$$y' - 4y^{\frac{1}{2}} = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = (2x + c)^2$$

dır. Burada c ye özel değerler vererek elde edilen çözümler özel çözüm olacaktır. Örneğin;

$$\begin{aligned} y &= (2x-1)^2, \\ y &= (2x+5)^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

özel çözümlerdir. Burada genel çözümde c ye keyfi değer vererek elde edemediğimiz fakat denklemi sağlayan

$$y = 0$$

tekil (singüler) çözümdür.

Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

Tanım 3.1.11. Uygulamalı bilimlerde genellikle bir diferansiyel denklemin genel çözümü yerine onun bazı ek koşulları sağlayan çözümlerinin bulunması istenir, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme *başlangıç-değer problemi*, eğer koşullar en az iki farklı noktada verilmişse probleme *sınır-değer problemi* denir.

Bir diferansiyel denklemin tek bir çözümünün elde edilebilmesi için, başlangıç ve sınır değer problemindeki koşul sayısı denklemin mertebesine (yani genel çözümdeki keyfi sabit sayısına) eşit olmalıdır.

3.2. İyi Konulmuş Problemler

Bir diferansiyel denklem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa *iyi konulmuş (well posed)* olarak adlandırılır:

(I) *Varlık*: Problem gerçekte bir çözüme sahip olmalı,

(II) *Teklik*: Bu çözüm tek olmalı,

(III) *Sürekli Bağımlılık*: Çözüm, problemde verilen verilere sürekli bağımlı olmalıdır. Bu koşul özel olarak fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan problemler için önemlidir. Problemi belirleyen verilerdeki küçük bir değişiklik, tek çözümde de küçük değişikliklere neden olmalıdır. Diğer taraftan birçok problem için tek çözüm olması beklenmemektedir. Bu durumda matematiksel olarak çözümleri sınıflandırma ve karakterize etme önemlidir.

3.3. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.3.1. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|.\| : X \to R^+, x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için
(I) $\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
(II) $\|ax\| = |a| \, . \, \|x\|;$
(III) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Üçgen eşitsizliği*)
özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *norm* adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının *normu* denir.

Tanım 3.3.2. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.3.3. (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.4. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.3.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A > 0,\ B > 0$ sabitleri için

$$A \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Tanım 3.3.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(I) $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$,

(II) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(III) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$.

$K=R$ halinde $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır.

Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.3.7. Tam iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.3.8. $n-$boyutlu R^n ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x=(x_1,...,x_n)$ ve bu noktanın normu

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı

$$x.y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

şeklindedir.

3.4. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.4.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω da tanımlı ölçülebilir bütün u fonksiyonları sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

normuyla Banach uzaydır.

Tanım 3.4.2. Ω, R^n uzayında bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde her kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilir bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayıdır.

Tanım 3.4.3. $vol\,(\Omega) = \int_\Omega 1dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı), $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda $u \in L^q\,(\Omega)$ ise $u \in L^p\,(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq c\,\|u\|_q$$

dır. Burada $c = (vol\,(\Omega))^{(1/p)-(1/q)}$ dır. Yani

$$L^q\,(\Omega) \hookrightarrow L^p\,(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.4.4. $L^2\,(\Omega)\,,$

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\,(x)\,\overline{v\,(x)}dx$$

iç çarpımına göre Hilbert uzaydır.

3.5. Sobolev Uzayı ($W^{m,p}\,(\Omega)$)

Tanım 3.5.1. $u \in L^1_{loc}\,(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall\varphi \in C_0^\infty\,(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

ise $v \in L^1_{loc}\,(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. *zayıf türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.5.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}\,(\Omega) = \{u \in L^p\,(\Omega) : D^\alpha u \in L^p\,(\Omega)\,, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir ve bu uzay

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

normları ile Banach uzaydır.

$W^{m,p}\,(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty\,(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}\,(\Omega)$ dır.

Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.5.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.5.4. $H^m(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle$$

iç çarpımı ile Hilbert uzaydır. Burada $\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ şeklinde $L^2(\Omega)$ deki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.5.5. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bölge, $m \ge 1$ ve $j \ge 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda

(I) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(II) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \le q < \infty$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \le q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(III) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

dır.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır.

$W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

3.6. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler

Teorem 3.6.1. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

dır.

Lemma 3.6.2. (Cauchy Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

dır.

Lemma 3.6.3. (Young Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.6.4. (**Hölder Eşitsizliği**). $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır. $p = 1$ ise $q = \infty$ ve $\|v\|_q = ess \sup\limits_{\Omega} |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği* denir.

Lemma 3.6.5. (**Minkowski Eşitsizliği**). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.6.6. (**Sobolev Eşitsizliği**). $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık bölge olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

şeklindedir. Burada $C = C(p, n)$ dır.

$n > p$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n - 1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.6.7. (Leibniz İntegral Formülü).

$f(x,t)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ fonksiyonları $\{(x,t) : a \leq x \leq b,\ c \leq t \leq d\}$ bölgesinde ve $u(x)$, $v(x)$ fonksiyonları da (a,b) aralığında sürekli ise

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(x,t)\,dt\right) = \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt + f(x,u(x))\,u'(x) - f(x,v(x))\,v'(x)$$

Lemma 3.6.8. (Green Özdeşliği).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

3.7. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Bazı Lemmalar

Lemma 3.7.1.

$\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0,\infty)$ negatif olmayan fonksiyonu, $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0 \tag{3.7.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. $r_2 = 2(\delta+1) - 2\sqrt{\delta(\delta+1)}$ olmak üzere; eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0 \tag{3.7.2}$$

ise, bu durumda $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ dır. Burada K_0 sabit sayıdır (Li ve Tsai 2003).

İspat. (3.7.1) denklemi sabit katsayılı adi bir diferansiyel eşitsizlik olduğundan, karakteristik denklemi

$$r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 16(\delta+1)^2 - 16(\delta+1) \\ &= 16\left(\delta^2+\delta\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{4(\delta+1)+\sqrt{16\left(\delta^2+\delta\right)}}{2} \\
&= 2(\delta+1)+2\sqrt{\delta(\delta+1)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
r_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{4(\delta+1)-\sqrt{16\left(\delta^2+\delta\right)}}{2} \\
&= 2(\delta+1)-2\sqrt{\delta(\delta+1)}
\end{aligned}
$$

dır.

Bu durumda (3.7.1) diferansiyel eşitsizliği

$$
\left(\frac{d}{dt}-r_1\right)\left(\frac{d}{dt}-r_2\right)B(t)\geq 0
$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$
B''(t)-B'(t)(r_1+r_2)+B(t)r_1r_2\geq 0,
$$

$$
B''(t)-B'(t)r_1-B'(t)r_2+B(t)r_1r_2\geq 0,
$$

$$
B''(t)-B'(t)r_2\geq r_1(B'(t)-B(t)r_2),
$$

$$
\frac{B''(t)-B'(t)r_2}{B'(t)-B(t)r_2}\geq r_1
$$

olur. Buradan

$$
\frac{(B'(t)-r_2B(t))'}{B'(t)-r_2B(t)}\geq r_1 \tag{3.7.3}
$$

yazılabilir. (3.7.3) ifadesinin 0 dan t ye integralini alırsak

$$
\int_0^t \frac{(B'(t)-r_2B(t))'}{B'(t)-r_2B(t)}dt\geq \int_0^t r_1 dt,
$$

$$
\ln|B'(t)-r_2B(t)|-\ln|B'(0)-r_2B(0)|\geq r_1t,
$$

$$
\ln\left|\frac{B'(t)-r_2B(t)}{B'(0)-r_2B(0)}\right|\geq r_1t,
$$

$$\frac{B'(t) - r_2 B(t)}{B'(0) - r_2 B(0)} \geq e^{r_1 t},$$

$$B'(t) - r_2 B(t) \geq (B'(0) - r_2 B(0))\, e^{r_1 t},$$

$$B'(t) \geq r_2 B(t) + (B'(0) - r_2 B(0))\, e^{r_1 t}$$

bulunur. Böylece (3.7.2) göz önünde bulundurulursa

$$B'(t) > K_0$$

elde edilir.

Lemma 3.7.2.

$H(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında artmayan ve $t \geq t_0$ için

$$[H'(t)\,]^2 \geq a + b\,[H(t)\,]^{2+\frac{1}{\delta}} \tag{3.7.4}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{t \to T^{*-}} H(t) = 0$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0$, $b \in R$ dir.

T^* ın üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

I) Eğer $b < 0$ ve $H(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{-a}{b}}\right\}$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}}{\sqrt{\frac{-a}{b}} - H(t_0)} \tag{3.7.5}$$

dır.

II) Eğer $b = 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{3.7.6}$$

dır.

III) Eğer $b > 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \quad \text{veya} \quad T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right] \tag{3.7.7}$$

dır. Burada $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+1}}$ dır (Li ve Tsai 2003).

İspat.

I) $c \geq d > 0$ için $\sqrt{c^2 - d^2} \geq c - d$ olduğundan (3.7.4) ten $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} \left|H'(t)\right| &\geq \sqrt{a - (-b)\left[H(t)\right]^{2+\frac{1}{\delta}}} \\ &\geq \sqrt{a} - \sqrt{-b}\left[H(t)\right]^{1+\frac{1}{2\delta}}, \end{aligned}$$

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b}\left[H(t)\right]^{1+\frac{1}{2\delta}},$$

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b}H(t)$$

olur. Buradan birinci mertebeden lineer

$$H'(t) - \sqrt{-b}H(t) \leq -\sqrt{a}$$

eşitsizliği çözülürse

$$\left(e^{-\sqrt{-b}t}H(t)\right)' \leq -\sqrt{a}e^{-\sqrt{-b}t},$$

$$\int_{t_0}^{t}\left(e^{-\sqrt{-b}t}H(t)\right)' dt \leq \int_{t_0}^{t} -\sqrt{a}e^{-\sqrt{-b}t}dt,$$

$$e^{-\sqrt{-b}t}H(t) - e^{-\sqrt{-b}t_0}H(t_0) \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}e^{-\sqrt{-b}t} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}e^{-\sqrt{-b}t_0},$$

$$H(t) \leq \left(H(t_0) - \sqrt{\frac{-a}{b}}\right)e^{(t-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{\frac{-a}{b}}$$

bulunur. Buradan limit alınırsa

$$\lim_{t\to T^*} H(t) \leq \lim_{t\to T^*}\left[\left(H(t_0) - \sqrt{\frac{-a}{b}}\right)e^{(T^*-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{\frac{-a}{b}}\right]$$

olur.

$$\lim_{t\to T^*} H(t) = 0$$

olduğundan

$$\left(H(t_0) - \sqrt{\frac{-a}{b}}\right)e^{(T^*-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{\frac{-a}{b}} = 0,$$

$$T^* = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}}{\sqrt{\frac{-a}{b}} - H(t_0)}\right)$$

olur. Böylece burada $\lim_{t\to T^*} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^* sayısının üst sınırı (3.7.5) te verildiği gibidir.

II) $b = 0$ ise, (3.7.4) ten $t \geq t_0$ için

$$H(t) \leq H(t_0) - \sqrt{a}\,(t - t_0)$$

olur. Buradan her tarafın t göre türevi alınırsa

$$H'(t) \leq -\sqrt{a}$$

olur. Bu ifadenin t_0 dan t ye integrali alınırsa

$$\int_{t_0}^{t} H'(t)\,dt \leq \int_{t_0}^{t} \left(-\sqrt{a}\right) dt,$$

$$H(t) \leq H(t_0) - \sqrt{a}\,(t - t_0)$$

olur. Burada limit alınırsa

$$\lim_{t \to T^{*-}} H(t) \leq \lim_{t \to T^{*-}} \left[H(t_0) - \sqrt{a}\,(T^* - t_0)\right]$$

burada $\lim_{t \to T^*} H(t) = 0$ olduğundan

$$H(t_0) - \sqrt{a}\,(T^* - t_0) = 0,$$

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} + t_0$$

olur.

III)

$b > 0$ için, (3.7.4) ten

$$|H'(t)| \geq \sqrt{a + b\,(H(t))^{2+\frac{1}{\delta}}},$$

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\sqrt{a + b\,(H(t))^{2+\frac{1}{\delta}}} \\ &= -\sqrt{a\left(1 + \frac{b}{a}\,(H(t))^{2+\frac{1}{\delta}}\right)} \end{aligned}$$

Buradan

$$H'(t) \leq -\sqrt{a\left(1 + (cH(t))^{2+\frac{1}{\delta}}\right)} \qquad (3.7.8)$$

olur. Burada $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+1}}$ dır.

$m, n > 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$m^q + n^q \geq 2^{1-q} (m+n)^q$$

eşitsizliği göz önünde bulundurulur ve $q = 2 + \frac{1}{\delta}$ olarak seçilirse (3.7.8) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} 2^{\frac{-1-\delta}{2\delta}} (1 + cH(t))^{1+\frac{1}{2\delta}}$$

diferansiyel eşitsizliği bulunur. Bu ifadenin t_0 dan t ye integrali alınırsa

$$\int_{t_0}^{t} \frac{H'(t)}{(1+cH(t))^{1+\frac{1}{2\delta}}} dt \leq \int_{t_0}^{t} \left(-\sqrt{a} 2^{\frac{-1-\delta}{2\delta}}\right) dt,$$

$$H(t) \leq \frac{1}{c}\left\{-1 + \left[\frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{-\frac{3\delta+1}{2\delta}} (t - t_0) + (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right]^{-2\delta}\right\}$$

bulunur. Böylece burada $\lim_{t \to T^*} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^* sayısının üst sınırı (3.7.7) de verildiği gibidir.

Şimdi, denklemin her iki tarafının limitini alalım:

$$\lim_{t \to T^{*-}} H(t) \leq \lim_{t \to T^{*-}} \frac{1}{c}\left\{-1 + \left[\frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{-\frac{3\delta+1}{2\delta}} (T^* - t_0) + (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right]^{-2\delta}\right\}$$

burada $\lim_{t \to T^{*-}} H(t) = 0$ olduğundan

$$\frac{1}{c}\left\{-1 + \left[\frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{-\frac{3\delta+1}{2\delta}} (T^* - t_0) + (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right]^{-2\delta}\right\} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{-\frac{3\delta+1}{2\delta}} (T^* - t_0) = 1 - (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}},$$

$$T^* = t_0 + \frac{\delta c}{\sqrt{a}} 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \left(1 - (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right)$$

bulunur. Böylece

$$T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}}\right]$$

olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Giriş

Bu bölümde, önce Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri tanımlanacaktır. Daha sonra 1921 de Timoshenko tarafından elde edilen denklemin modellenmesi Doshi'nin [Doshi 1979] çalışmasından faydalanılarak verilmiştir. Son olarak Timoshenko denkleminin bir sınıfı için denklemin çözümlerinin patlaması farklı iki yoldan ispatlanacaktır.

4.2. Kiriş Teorileri

Eksenine düşey yönde etkiyen yükleri taşıyan, kalınlık ve genişlikleri uzunluklarına göre daha az olan yapı elemanlarına *kiriş* denir. Yüklemeden sonra kirişin düz ekseni çökme eğrisi denen bir eğriye eğrilir. Bu olaya *kirişin eğrilmesi* denir.

4.2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Çarpılmanın göz önüne alınmadığı durumlarda yer değiştirmeleri esas alan deplasman (yer değişim) yöntemi olan ve kolaylığı sayesinde mühendisler tarafından en çok kullanılan teoridir. Burada kayma deformasyonları dikkate alınmaz. Yani şekil değiştirmeden önce kiriş eksenine dik olan düzlem en kesitin şekil değişiminden sonra da kiriş eksenine dik kaldığı varsayılır. Bu teoride eğilme momenti ve yanal deplasman göz önüne alınır. Ancak kayma deformasyonu ve dönme ataleti (eylemsizliği) ihmal edilir.

Euler-Bernoulli kiriş modeli, eğilmeye bağlı olarak gerinme enerjisini ve yanal deplasmanlara bağlı olarak da kinetik enerjiyi hesaba katıyordu. Jacob Bernoulli elastik bir kirişin herhangi bir noktadaki eğilmesinin o noktadaki eğilme momentiyle orantılı olduğundan bahsetmiştir. Daniel Bernoulli ise ilk defa titreşen bir kirişin hareket denklemlerini diferansiyel denklem şeklinde göstermiştir. Sonraları Jacob Bernoulli'nin teorisini benimseyen Leonard Euler, elastik kirişlerin çeşitli yükleme koşulları altındaki şekilleriyle ilgili çalışmalar yapmıştır. Böylece bu model Euler-Bernoulli kiriş teorisi diye geçmiştir. Genel olarak klasik kiriş teorisi, Euler kiriş teorisi ya da Bernoulli kiriş teorisi olarak da adlandırılmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi en basit kiriş modelidir. Bundan dolayı yapılan çalışmalarda en çok yararlanılan kiriş modellerinden biridir. Basit olmasına rağmen çoğu koşulda yeterli sonuçlar elde edilmektedir. Ancak bazı karmaşık modların (şekillerin) ağırlık, rijitlik gibi özelliklerinden oluşan hasar durumlarını hatalı hesaplayabilmektedir. Ancak genelde ince kirişler için tutarlı sonuçlar elde edilir. Çeşitli araştırmacılar

Euler-Bernoulli kiriş teorisi vasıtasıyla enine titreşimin hareket denklemlerini bularak bazı sınır şartları altında kararlılık diyagramlarını bulmuşlardır. Bu teori basitliği dolayısıyla mühendisler tarafından en çok tercih edilen teoridir.

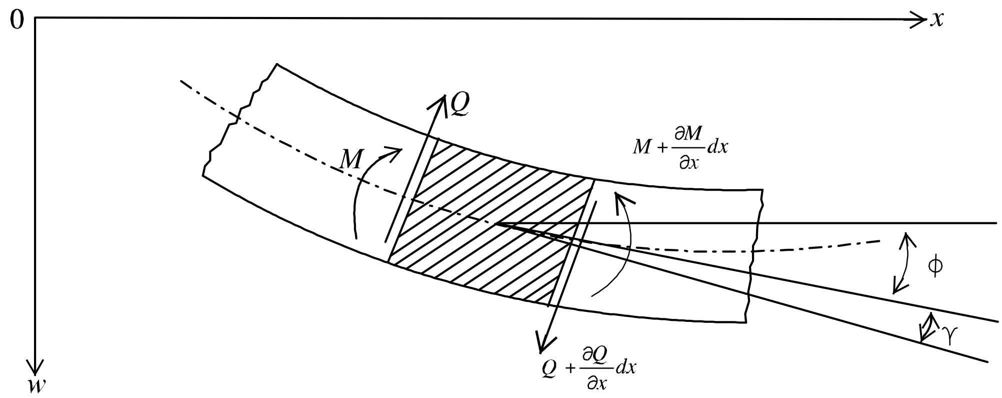
4.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisi

Deformasyondan önce ortalama düzleme dik olan en kesit, şekil değişiminden sonra düzlemle bir açı yapar, ancak düzlem kesit yine aynı kalır. (Euler-Bernoulli varsayımı). Timoshenko kiriş teorisi kayma gerilmelerinin etkilerini dikkate alır. Timoshenko'nun hesap yöntemi Euler hesap yönteminde göz önüne alınmayan kesme kuvvetinin de hesaba katılmasıyla oluşturulmuştur. Genelde kısa ve yüksek kirişler için Euler-Bernoulli teorisine kıyasla daha net sonuçlar elde edilir. Bu kiriş modelinde Euler-Bernoulli kiriş teorisine ilaveten hem kesitin dönme eylemsizliği hem de kayma şekil değiştirmeleri dikkate alınır. Böylece Timoshenko kiriş teorisinde eğilme momenti, yanal yer değişimler, dönme ataleti ve kayma deformasyonlarının etkisi aynı anda göz önünde bulundurulur. Ortaya çıkan modelden sadece ince kirişler için değil, kalın kirişler için de doğru sonuçlar elde edilir. [Ihlamur 2008, Yazıcı 2009]

4.3. Timoshenko Denkleminin Elde Edilmesi

Timoshenko kiriş teorisi, Euler kiriş teorisinin bir modifikasyonudur. Euler kiriş teorisi, rotasyonel eylemsizlik veya kayma için düzeltmeyi hesaba katmaz. Timoshenko kiriş teorisinde, Timoshenko hem rotasyonel eylemsizlik hem de kayma için düzeltmeleri hesaba katmıştır. Modifiye teori, bir kirişin titreşim analizi, gerilme analizi ve dalga yayılım analizi gibi dinamik analizinin uygulanmasında yararlıdır. Cisimlerin mukavemetinin bir öncüsü olan Timoshenko, Euler kiriş teorisinin bir modifikasyonu olan bu teoriyi 1921 yılında geliştirdi.

S. P. Timoshenko (1921) de, basit kiriş teorisine (Euler-Bernoulli kiriş teorisi) kayma ve rotasyonel eylemsizlik için düzeltme getiren ilk kişi oldu. Bu nedenle kayma ve rotasyonel eylemsizliğin uygulanmasından sonra elde edilen denkleme *Timoshenko Denklemi* denir. Bu denklemin elde edilişini gösterelim [Doshi 1979].



Yukarıdaki şekilde, eğilme momenti M ve kesme kuvveti Q ile gösterilmiştir. ϕ açısı eğim ve γ açısı ise kayma açısı olsun. Sapma ise W dir.

Çok küçük sapmalar için

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \phi + \gamma \tag{4.3.1}$$

ve basit kiriş teorisinden (Euler-Bernoulli kiriş teorisi)

$$\begin{cases} M = -EI\frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ Q = kAG\gamma \end{cases} \tag{4.3.2}$$

dır. Burada E elastiklik modülü, I eylemsizlik modülü, EI eğilme direncini gösteren bir sabit, k bir kirişin kesit şekline bağlı bir sabit, A kesit alanı ve G rijitlik modülüdür.

Önce rotasyon (dönme) ve öteleme hareket denklemlerini ifade edelim:

Rotasyon denklemi

$$-\frac{\partial M}{\partial x}dx + Qdx = \rho I\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}dx \tag{4.3.3}$$

dır. Burada ρ materyalin yoğunluğudur.

W yönünde öteleme denklemi

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx = \rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}dx \tag{4.3.4}$$

dır.

Şimdi, (4.3.2) denklemindeki Q değeri, (4.3.3) ve (4.3.4) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + kAG\gamma = \rho I\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{4.3.5}$$

ve

$$\frac{\partial\left(kAG\gamma\right)}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{4.3.6}$$

denklemleri elde edilir. (4.3.1) denkleminden

$$\gamma=\frac{\partial W}{\partial x}-\phi$$

ve (4.3.2) denkleminden

$$M=-EI\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

ifadeleri (4.3.5) ve (4.3.6) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$EI\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+kAG\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\phi\right)-\rho I\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{4.3.7}$$

ve

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-kAG\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0 \tag{4.3.8}$$

denklemleri bulunur. (4.3.8) denkleminden

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

dır. (4.3.7) denkleminde x e göre türev alınırsa

$$EI\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+kAG\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\rho I\frac{\partial^3\phi}{\partial t^2\partial x}=0$$

olur. Bu denklemde $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
& EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] \\
& +kAG\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] \\
& -\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$-\frac{EI\rho}{kG}\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

dan

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho I\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0 \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Burada (4.3.9) denklemi Timoshenko denklemi olarak adlandırılır.

(4.3.9) denkleminde rotasyonel eylemsizlik

$$-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2}$$

ve kaymaya bağlı düzeltme

$$-\frac{\rho I E}{kG}\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}$$

dır.

Euler denklemi, Timoshenko denkleminden hem kayma hem de rotasyonel eylemsizliğe bağlı oluşturulan düzeltmelerin çıkartılmasıyla elde edilir. Yani; Euler denklemi

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{4.3.10}$$

şeklindedir.

Timoshenko kiriş teorisi ya (4.3.7) ve (4.3.8) deki iki denklem (denklem sistemi) şeklinde ya da (4.3.9) daki tek denklem şeklinde düşünülebilir.

4.4. Doğrusal Olmayan Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda zayıf damping terimli

$$\begin{cases} u_{tt} + \triangle^2 u - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\triangle u + u_t = |u|^{q-1}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x\in\Omega \\ u(x,t) = \frac{\partial}{\partial v}u(x,t) = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlamasını negatif, sıfır ve pozitif başlangıç enerjileri için çalışacağız. Burada $M(s) = b_1 + b_2 s^\gamma$ dır. Özel olarak $b_1 = b_2 = 1$ alınırsa

$$M(s) = 1 + s^\gamma$$

olur.

Şimdi (4.4.1) probleminin lokal varlık teoremini ifade edelim, ispat için (Pişkin 2015) e bakılabilir.

Teorem 4.4.1. (Lokal Varlık).

$$\begin{cases} 1 < q < \infty, & n \leq 2 \\ 1 < q \leq \frac{n}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

ve

$$(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

olsun. Bu durumda (4.4.1) denkleminin

$$u \in C\left([0, T); H_0^2(\Omega)\right),$$

uzayında bir tek çözümü vardır. Ayrıca aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

I. $T = \infty$ (Global varlık),

II. $t \to T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 \to \infty$ (Blow up).

Enerji Fonksiyoneli:

(4.4.1) denkleminin Enerji fonksiyonelini bulmak için denklemi u_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\underbrace{\int_\Omega u_t u_{tt} dx}_{A_1} + \underbrace{\int_\Omega u_t \Delta^2 u dx}_{A_2} - \underbrace{\int_\Omega \left(1 + \|\nabla u\|^{2\gamma}\right) \Delta u u_t dx}_{A_3} + \underbrace{\int_\Omega u_t^2 dx}_{A_4} = \underbrace{\int_\Omega |u|^{q-1} u u_t dx}_{A_5},$$

olur. Şimdi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 terimlerini düzenleyelim:

A_1 terimi

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_{tt} u_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \end{aligned}$$

A_2 terimine Green özdeşliği uygulanır ve $u(x,t) = \frac{\partial}{\partial v} u(x,t) = 0$ sınır koşulları göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t \Delta^2 u dx &= \int_\Omega \Delta u_t \Delta u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2, \end{aligned}$$

A_3 terimi

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \left(1+\|\nabla u\|^{2\gamma}\right)\Delta u u_t dx &= -\int_\Omega u_t \Delta u dx - \int_\Omega \|\nabla u\|^{2\gamma} u_t \Delta u dx \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \|\nabla u\|^{2\gamma} \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx + \|\nabla u\|^{2\gamma} \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2\gamma}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\right],
\end{aligned}
$$

A_4 terimi

$$
\int_\Omega u_t^2 dx = \|u_t\|^2
$$

ve

A_5 terimi

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{q-1} u u_t dx &= \int_\Omega |u|^q u_t dx \\
&= \frac{1}{q+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{q+1} dx \\
&= \frac{1}{q+1}\frac{d}{dt}\|u\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}\right] = -\|u_t\|_2^2 \tag{4.4.2}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned}
$$

dır.

Tanım 4.4.2. (4.4.1) problemininin u çözümü için

$$\lim_{t\to T^{*-}}\left[\int_\Omega u^2dx+\int_0^t\int_\Omega u^2dxd\tau\right]=\infty \tag{4.4.3}$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı varsa buna çözümün patlaması denir.

$t\geq 0$ için

$$a(t)=\int_\Omega u^2dx+\int_\Omega\int_0^t u^2d\tau dx \tag{4.4.4}$$

olsun.

Lemma 4.4.3. Kabul edelim ki $\frac{q-1}{4}\geq\delta\geq\frac{\gamma}{2}$ ve $\gamma\geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} a''(t) &\geq 4(\delta+1)\int_\Omega u_t^2dx-4(2\delta+1)E(0)\\ &\quad +4(2\delta+1)\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

dır.

İspat. (4.4.4) ün birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2\int_\Omega uu_tdx+\int_\Omega u^2dx\\ &= 2\int_\Omega uu_tdx+\|u\|^2 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

ve

$$a''(t)=2\int_\Omega u_t^2dx+2\int_\Omega uu_{tt}dx+2\int_\Omega uu_tdx$$

dır. Bu denklemde $\int_\Omega uu_{tt}dx$ ifadesinin değerini bulup yerine yazacağız. (4.4.1) denkleminde

$$u_{tt}=|u|^{q-1}u+\Delta u+\|\nabla u\|^{2\gamma}\Delta u-\Delta^2u-u_t$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} a''(t) &= 2\int_\Omega u_t^2dx+2\int_\Omega uu_tdx\\ &\quad +2\int_\Omega\left(|u|^{q-1}u+\Delta u+\|\nabla u\|^{2\gamma}\Delta u-\Delta^2u-u_t\right)udx \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
a''(t) &= 2\int_\Omega u_t^2 dx + 2\int_\Omega |u|^{q-1} u^2 dx \\
&\quad +2\int_\Omega u\Delta u dx + 2\int_\Omega \|\nabla u\|^{2\gamma} u\Delta u dx \\
&\quad -2\int_\Omega u\Delta^2 u dx - 2\int_\Omega u u_t dx + 2\int_\Omega u u_t dx \\
&= 2\|u_t\|^2 + 2\|u\|_{q+1}^{q+1} - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\quad -2\|\nabla u\|^{2\gamma}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - 2\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \\
&= 2\left(\|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1}\right) - 2\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\Delta u\|^2\right) \quad (4.4.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.4.2) denkleminde

$$E'(t) = -\|u_t\|^2$$

dır. Bu ifadenin 0 dan t ye integrali alınırsa

$$\int_0^t E'(\tau)\, d\tau = -\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau,$$

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned}
E(0) &= E(t) + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \\
&= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2\right) + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad -\frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $4\left(2\delta+1\right)E\left(0\right)$ ifadesini bulalım

$$
\begin{aligned}
4\left(2\delta+1\right)E\left(0\right) &= 4\left(2\delta+1\right)\left(\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\Delta u\right\|^2\right)\right) \\
&\quad +4\left(2\delta+1\right)\left(\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}\right) \\
&\quad +4\left(2\delta+1\right)\left(-\frac{1}{q+1}\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}+\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau\right) \\
&= 2\left(2\delta+1\right)\left(\left\|u_t\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\Delta u\right\|^2\right) \\
&\quad +\frac{2\left(2\delta+1\right)}{\gamma+1}\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}-\frac{4\left(2\delta+1\right)}{q+1}\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1} \\
&\quad +4\left(2\delta+1\right)\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau
\end{aligned}
$$

olur. (4.4.7) denklemine $4\left(2\delta+1\right)E\left(0\right)$ ifadesini ekleyip-çıkarırsak

$$
\begin{aligned}
a''\left(t\right) &= \left(-8\delta-4\right)E\left(0\right)+\left(8\delta+4\right)E\left(0\right)+2\left(\left\|u_t\right\|^2+\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}\right) \\
&\quad -2\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}+\left\|\Delta u\right\|^2\right)
\end{aligned}
$$

olur. (4.4.8) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
a''\left(t\right) &= \left(-8\delta-4\right)E\left(0\right)+2\left(2\delta+1\right)\left\|u_t\right\|^2+2\left(2\delta+1\right)\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\Delta u\right\|^2\right) \\
&\quad +\frac{2\left(2\delta+1\right)}{\gamma+1}\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}-\frac{4\left(2\delta+1\right)}{q+1}\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}+4\left(2\delta+1\right)\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau \\
&\quad +2\left(\left\|u_t\right\|^2+\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}\right)-2\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}+\left\|\Delta u\right\|^2\right) \\
&= \left(-8\delta-4\right)E\left(0\right)+\left(4\delta+4\right)\left\|u_t\right\|^2+4\delta\left\|\nabla u\right\|^2+4\delta\left\|\Delta u\right\|^2 \\
&\quad +\left(\frac{4\delta+2}{\gamma+1}-2\right)\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad +\left(2-\frac{4\left(2\delta+1\right)}{q+1}\right)\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}+4\left(2\delta+1\right)\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau \\
&= 4\left(\delta+1\right)\int_\Omega u_t^2dx-4\left(2\delta+1\right)E\left(0\right)+4\delta\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\Delta u\right\|^2\right) \\
&\quad +\left(\frac{4\delta+2}{\gamma+1}-2\right)\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad +\left(2-\frac{4\left(2\delta+1\right)}{q+1}\right)\left\|u\right\|_{q+1}^{q+1}+4\left(2\delta+1\right)\int_0^t\left\|u_\tau\right\|^2d\tau
\end{aligned}
$$

yazılır. Lemmadaki kabulümüzden $\frac{q-1}{4}\geq\delta\geq\frac{\gamma}{2}$ ve $\gamma\geq0$ olduğundan

$$
\begin{cases}
4\delta\geq0, \\
\frac{4\delta+2}{\gamma+1}-2\geq0, \\
2-\frac{4(2\delta+1)}{q+1}\geq0
\end{cases}
$$

olur. Böylece (4.4.5) elde edilir.

Lemma 4.4.4. $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq \frac{\gamma}{2}$, $\gamma \geq 0$ olsun ve aşağıdaki durumlardan biri sağlansın:

I) $E(0) < 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,

II) $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,

III) $E(0) > 0$ ve

$$a'(0) > r_2 \left[a(0) + \frac{K_1}{4(\delta+1)} \right] + \|u_0\|^2 \tag{4.4.9}$$

olsun. Bu durumda $t > t^*$ için $a'(t) > \|u_0\|^2$ bulunur.

Burada, (I) durumunda $t_0 = t^*$ ve (II), (III) durumlarında da $t_0 = 0$ dır.

Ayrıca K_1 ve t^* sırasıyla (4.4.15) ve (4.4.11) de tanımlanmıştır.

İspat.

(I) Eğer $E(0) < 0$ ise, (4.4.5) ten

$$a''(t) \geq -4(1+2\delta) E(0)$$

olur. Burada 0 dan t ye integral alınırsa

$$\int_0^t a''(\tau) d\tau \geq \int_0^t -4(1+2\delta) E(0) d\tau,$$

$$(a'(t) - a'(0)) \geq -4(1+2\delta) E(0) t,$$

$$a'(t) \geq a'(0) - 4(1+2\delta) E(0) t \tag{4.4.10}$$

olur. Lemma 4.4.3 te,

$$a'(t) = 2 \int_\Omega u u_t dx + \|u\|^2$$

bulmuştuk. Burada t yerine 0 yazılırsa

$$a'(0) = 2 \int_\Omega u_0 u_1 dx + \|u_0\|^2$$

elde edilir. Burada $a'(0)$ ifadesi (4.4.10) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$a'(t) \geq 2 \int_\Omega u_0 u_1 dx + \|u_0\|^2 - 4(1+2\delta) E(0) t$$

olur. Böylece $E(0) < 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$ olduğundan, $t > t^*$ için

$$a'(t) \geq \|u_0\|^2$$

bulunur. Bu ifade ve (4.4.10) dan

$$4(1+2\delta) E(0) t_1 = a'(0) - \|u_0\|^2$$

olacak şekilde t_1 vardır. Bu eşitlikten t_1 çekilirse

$$t_1 = \frac{a'(0) - \|u_0\|^2}{4(1+2\delta) E(0)}$$

olur. Burada

$$t^* = \max\left\{ \frac{a'(0) - \|u_0\|^2}{4(1+2\delta) E(0)},\ 0 \right\} \tag{4.4.11}$$

dır.

(II) Eğer $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$ ise, bu durumda (4.4.5) ten $t \geq 0$ için $a''(t) \geq 0$ dır. Buradan integral alınırsa

$$a'(t) \geq a'(0)$$

olur. Ayrıca

$$a'(t) = 2\int_\Omega u u_t dx + \|u\|^2$$

ve

$$a'(0) = 2\int_\Omega u_0 u_1 dx + \|u_0\|^2$$

dır. $a'(0)$ ifadesini üstteki eşitsizlikte yerine yazarsak

$$a'(t) \geq 2\int_\Omega u_0 u_1 dx + \|u_0\|^2$$

elde ederiz. Böylece $t \geq 0$ için $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$ kabulünden

$$a'(t) \geq \|u_0\|^2$$

olur.

(III) Eğer $E(0) > 0$ ise, önce

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \int_\Omega u u_t dx d\tau &= \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial t} dx d\tau \\ &= \|u\|^2 - \|u_0\|^2 \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

olduğunu göz önüne alalım. (4.4.12) denkleminden

$$\|u\|^2 = \|u_0\|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega u u_t dx d\tau$$

dır. Bu denkleme önce Hölder eşitsizliği sonra Young eşitsizliği uygulanırsa;

Hölder eşitsizliğinden,

$$\|u\|^2 \le \|u_0\|^2 + 2\int_0^t \|u\| \|u_\tau\| d\tau$$

olur.

Young eşitsizliğinden,

$$\|u\|^2 \le \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau$$

dır.

Böylece,

$$\|u\|^2 \le \|u_0\|^2 + \int_0^t \int_\Omega |u|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega |u_\tau|^2 dx d\tau \tag{4.4.13}$$

bulunur. (4.4.4) ten

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \int_0^t u^2 d\tau dx \\ &= \|u\|^2 + \int_0^t \int_\Omega u^2 dx d\tau \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|u\|^2 = a(t) - \int_0^t \int_\Omega u^2 dx d\tau$$

dır. Ayrıca

$$a'(t) = 2\int_\Omega u u_t dx + \|u\|^2$$

dır. Buradan

$$a'(t) = a(t) - \int_0^t \int_\Omega u^2 dx d\tau + 2 \int_\Omega u u_t dx$$

yazılabilir. Bu ifadeye önce Hölder eşitsizliği sonra Young eşitsizliği uygulanırsa;

Hölder eşitsizliğinden,

$$a'(t) \leq a(t) - \int_0^t \int_\Omega u^2 dx d\tau + 2\|u\| \|u_t\|$$

olur.

Young eşitsizliğinden,

$$a'(t) \leq a(t) - \int_0^t \int_\Omega u^2 dx d\tau + \|u\|^2 + \|u_t\|^2$$

olur. (4.4.13) ten $\|u\|^2$ ifadesi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a'(t) \leq a(t) + \|u_0\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^t \int_\Omega |u_\tau|^2 dx d\tau \tag{4.4.14}$$

bulunur. (4.4.14) ifadesinin her iki tarafı $-4(\delta+1)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} -4(\delta+1) a'(t) \quad &\geq \quad -4(\delta+1) a(t) - 4(\delta+1) \int_\Omega u_0^2 dx \\ &\quad -4(\delta+1) \int_\Omega u_t^2 dx - 4(\delta+1) \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.4.5) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} a''(t) - 4(\delta+1) a'(t) \quad &\geq \quad 4(\delta+1) \int_\Omega u_t^2 dx - 4(2\delta+1) E(0) \\ &\quad +4(2\delta+1) \int_0^t \|u_\tau\|^2 d_\tau \\ &\quad -4(\delta+1) a(t) - 4(\delta+1) \int_\Omega u_0^2 dx \\ &\quad -4(\delta+1) \int_\Omega u_t^2 dx - 4(\delta+1) \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& a''(t) - 4(\delta+1)a'(t) + 4(\delta+1)a(t) \\
& +4(2\delta+1)E(0) - 4(2\delta+1)\int_0^t \|u_\tau\|^2 d_\tau \\
& +4(\delta+1)\int_\Omega u_0^2 dx + 4(\delta+1)\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \\
\geq\ & 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
a''(t) - 4(\delta+1)a'(t) + 4(\delta+1)a(t) + K_1 \geq 0
$$

bulunur. Burada

$$
K_1 = (8\delta+4)E(0) + 4(\delta+1)\int_\Omega u_0^2 dx - 4\delta\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \tag{4.4.15}
$$

dır. $t > 0$ için $b(t) = a(t) + \frac{K_1}{4(\delta+1)}$ olsun. Bu durumda $b(t)$, Lemma 3.7.1 i sağlar.

Sonuç olarak (4.4.9) dan $a'(t) > \|u_0\|^2$, $t > 0$ olur. Burada r_2, Lemma 3.7.1 de verildiği gibidir.

Teorem 4.4.5. Kabul edelim ki $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq \frac{\gamma}{2}$ ve $\gamma \geq 0$ olsun. Aşağıdaki durumlarda

I) $E(0) < 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,

II) $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,

III) $0 < E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \|u_0\|^2\right)^2}{8\left[a(t_0) + (T_1 - t_0)\|u_0\|^2\right]}$, (4.4.9) sağlandığında, u çözümü (4.4.3) anlamında sonlu bir T^* zamanında patlar.

I) durumunda

$$
T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)} \tag{4.4.16}
$$

dır. Ayrıca eğer $H(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{-a}{b}}\right\}$ ise

$$
T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}}{\sqrt{\frac{-a}{b}} - H(t_0)} \tag{4.4.17}
$$

dır.

Burada

$$
a = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0)\left[\left(a'(t_0) - \|u_0\|^2\right)^2 - 8E(0)H^{\frac{-1}{\delta}}(t_0)\right] > 0 \tag{4.4.18}
$$

ve

$$b = 8\delta^2 E(0) \tag{4.4.19}$$

dır.

II) durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{4.4.20}$$

dır.

III) durumunda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} \frac{\delta}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} H(t_0) \right]^{\frac{-1}{2\delta}} \right\} \tag{4.4.21}$$

dır.

Burada a ve b, sırasıyla (4.4.18) ve (4.4.19) da verildiği gibidir.

İspat. $t \in [0, T_1]$ için

$$H(t) = \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right]^{-\delta} \tag{4.4.22}$$

olsun. Burada $T_1 > 0$ daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. Buradan

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\delta \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right]^{-\delta-1} \left[a'(t) - \|u_0\|^2 \right] \\ &= -\delta H^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \left[a'(t) - \|u_0\|^2 \right] \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

ve

$$\begin{aligned} H''(t) &= -\delta(-\delta-1) \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right]^{-\delta-2} \left[a'(t) - \|u_0\|^2 \right]^2 \\ &\quad -\delta \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right]^{-\delta-1} a''(t) \\ &= -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) a''(t) \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right] \\ &\quad +\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (1+\delta) \left[a'(t) - \|u_0\|^2 \right]^2, \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

$$H''(t) = -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) V(t) \tag{4.4.25}$$

dır. Burada

$$V(t) = a''(t) \left[a(t) + (T_1 - t) \|u_0\|^2 \right] - (1+\delta) \left[a'(t) - \|u_0\|^2 \right]^2 \tag{4.4.26}$$

dır. Hesaplamalarda kolaylık olsun diye

$$\begin{cases} P_u = \int_\Omega u^2 dx, \\ R_u = \int_\Omega u_t^2 dx, \\ Q_u = \int_0^t \|u\|^2 d\tau, \\ S_u = \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \end{cases}$$

gösterimlerini kullanalım. (4.4.12) ifadesi (4.4.6) da yazılır ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} a'(t) &\leq 2\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +2\left(\int_0^t \left\|u^2\right\| d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left\|u_\tau^2\right\| d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \|u_0\|^2 \\ &= 2\left(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u}\right) + \|u_0\|^2 \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

olur. Eğer (I) ve (II) durumlar sağlanıyorsa, (4.4.5) ten

$$\begin{aligned} a''(t) &\geq (-4-8\delta) E(0) + 4(1+\delta)\left(\int_\Omega u_t^2 dx + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau\right) \\ &= (-4-8\delta) E(0) + 4(1+\delta)(R_u + S_u) \end{aligned} \tag{4.4.28}$$

yazılır. Böylece (4.4.22) ve (4.4.26)-(4.4.28) den

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \left[(-4-8\delta) E(0) + 4(1+\delta)\left(\int_\Omega u_t^2 dx + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau\right)\right] H^{\frac{-1}{\delta}}(t) \\ &\quad -4(1+\delta)\left[\sqrt{\int_\Omega u_t^2 dx . \int_\Omega u^2 dx} + \sqrt{\int_0^t \|u\|^2 d\tau . \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau}\right]^2 \end{aligned}$$

dır. Yani

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \left[(-4-8\delta) E(0) + 4(1+\delta)(R_u + S_u)\right] H^{\frac{-1}{\delta}}(t) \\ &\quad -4(1+\delta)\left[\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u}\right]^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.4.4) ten

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \int_0^t u^2 d\tau dx \\ &= P_u + Q_u \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitlik ve (4.4.22) den

$$\begin{aligned} V(t) &\geq (-4-8\delta)E(0)H^{\frac{-1}{\delta}}(t)+4(1+\delta) \\ &\times\left[\left(\int_\Omega u_t^2dx+\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau\right)(T_1-t)\|u_0\|^2+Q(t)\right] \end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned} V(t) &\geq (-4-8\delta)E(0)H^{\frac{-1}{\delta}}(t) \\ &+4(1+\delta)\left[(R_u+S_u)(T_1-t)\|u_0\|^2+Q(t)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left(\int_\Omega u_t^2dx+\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau\right)\left(\int_\Omega u^2dx+\int_0^t\|u\|^2d\tau\right) \\ &-\left(\sqrt{\int_\Omega u_t^2dx\int_\Omega u^2dx}+\sqrt{\int_0^t\|u\|^2d\tau\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau}\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Yani

$$Q(t)=(R_u+S_u)(P_u+Q_u)-\left(\sqrt{R_uP_u}+\sqrt{Q_uS_u}\right)^2$$

olur. $a,b,c,d\geq 0$ olmak üzere

$$(ab+cd)^2\leq\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$$

formundaki Schwarz eşitsizliğinden $Q(t)$ negatif değildir. Böylece

$$V(t)\geq(-4-8\delta)E(0)H^{\frac{-1}{\delta}}(t),\ t\geq t_0 \tag{4.4.29}$$

dır. Ayrıca, (4.4.25) ve (4.4.29) dan

$$H''(t)\leq 4\delta(1+2\delta)E(0)H^{1+\frac{1}{\delta}}(t),\ t\geq t_0 \tag{4.4.30}$$

dır. (4.4.23) ve Lemma 4.4.4 ten, $t\geq t_0$ için $H'(t)<0$ olduğunu biliyoruz. (4.4.30) u $H'(t)$ ile çarpıp t_0 dan t ye integral alırsak, $t\geq t_0$ için

$$\int_{t_0}^t H'(t)H''(t)\,dt\geq\int_{t_0}^t 4\delta(1+2\delta)E(0)H^{1+\frac{1}{\delta}}(t)\ H'(t)\,dt,$$

$$\left.\frac{H'^2(t)}{2}\right|_{t_0}^{t} \geq 4\delta^2 E(0)\, H^{2+\frac{1}{\delta}}(t)\Big|_{t_0}^{t},$$

$$\frac{H'^2(t) - H'^2(t_0)}{2} \geq 4\delta^2 E(0)\left(H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0)\right),$$

$$\left(H'^2(t) - H'^2(t_0)\right) \geq 8\delta^2 E(0)\, H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0)\, H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0)$$

den

$$H'^2(t) \geq 8\delta^2 E(0)\, H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0)\, H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) + H'^2(t_0)$$

olur. Bu ifade

$$H'^2(t) \geq a + bH^{2+\frac{1}{\delta}}(t)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada a, b sırasıyla (4.4.18) ve (4.4.19) daki gibidir.

Eğer (III) sağlanıyor ise, (I) deki adımlara benzer olarak, $a > 0$ ancak ve ancak

$$E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \|u_0\|^2\right)^2}{8\left[a(t_0) + (T_1 - t_0)\|u_0\|^2\right]}$$

dır. Böylece Lemma 3.7.2 den

$$\lim_{t \to T^{*-}} H(t) = 0$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı vardır ki T^* ın üst sınırları $E(0)$ ın işaretine göre belirlenir.

Şimdi, 2005 yılında Zhou tarafından verilen bir eşitsizlik yardımı ile çözümlerin patlamasını farklı bir yoldan ispatlayacağız:

Lemma 4.4.6. $\psi(t)$, iki defa sürekli diferansiyellenebilen ve

$$\begin{cases} \psi''(t) + \psi'(t) \geq C_0 \psi^{1+\alpha}(t), \quad t > 0,\ C_0 > 0,\ \alpha > 0, \\ \psi(0) > 0, \qquad \psi'(0) \geq 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\psi(t)$ çözüm fonksiyonu sonlu zamanda patlar (Zhou 2005).

Teorem 4.4.7. Lokal varlık koşullarına ek olarak

$$E(0) \leq 0, \quad \int_\Omega u_0 u_1 dx \geq 0 \text{ ve } -1 < \gamma \leq 0$$

olsun. Bu durumda (4.4.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat.

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$$

olsun. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\psi'(t) = \int_\Omega u u_t dx$$

ve

$$\psi''(t) = \int_\Omega \left(u_t^2 + u u_{tt}\right) dx$$

dır. (4.4.1) denkleminde

$$u_{tt} = |u|^{q-1} u - \Delta^2 u + \Delta u + \|\nabla u\|^{2\gamma} \Delta u - u_t$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |u|^{q-1} u^2 dx - \int_\Omega u \Delta^2 u dx \\ &\quad + \int_\Omega u \Delta u dx + \int_\Omega u \|\nabla u\|^{2\gamma} \Delta u dx - \int_\Omega u u_t dx \\ &= \|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega u u_t dx \\ &= \|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \psi'(t) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\psi''(t)+\psi'(t)=\|u_t\|^2+\|u\|_{q+1}^{q+1}-\|\Delta u\|_2^2-\|\nabla u\|_2^2-\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}$$

olur. Denklemin sağ tarafına $2E(t)$ ifadesini ekleyip çıkarırsak

$$\psi''(t)+\psi'(t)=2\|u_t\|^2-2E(t)+\frac{q-1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}$$

olur. $\|u_t\|^2\geq 0,\ E(t)\leq 0$ ve $-1<\gamma\leq 0$ olduğundan

$$\psi''(t)+\psi'(t)\geq\frac{q-1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \tag{4.4.31}$$

yazılabilir. Bu ifadedeki $\|u\|_{q+1}^{q+1}$ terimi için kestirim elde edelim. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_\Omega|u|^2\,dx\leq\left(\int_\Omega|u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{2}{q+1}}\left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{q-1}{q+1}},$$

$$\|u\|_{q+1}^{q+1}\geq\left(\int_\Omega|u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} \tag{4.4.32}$$

dır. Böylece (4.4.32) ifadesi (4.4.31) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi''(t)+\psi'(t) &\geq \frac{q-1}{q+1}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_\Omega|u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}}\\ &= 2^{\frac{q+1}{2}}\frac{q-1}{q+1}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\left[\psi(t)\right]^{\frac{q+1}{2}},\end{aligned}$$

$$\psi''(t)+\psi'(t)\geq C_0\psi^{1+\alpha}(t)$$

olur. Böylece Lemma 4.4.6 dan çözüm blow up olur. Burada

$$C_0=2^{\frac{q+1}{2}}\frac{q-1}{q+1}|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\ \text{ ve } \alpha=\frac{q-1}{2}$$

dır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada zayıf damping terimli

$$u_{tt} + \triangle^2 u - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u + u_t = |u|^{q-1} u \tag{5.1}$$

Timoshenko denklemi incelenmiştir. Timoshenko denkleminin modellenmesi verildikten sonra, çözümlerin patlaması ile ilgili aşağıdaki iki teorem elde edilmiştir:

Teorem 1. $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq \frac{\gamma}{2}$ ve $\gamma \geq 0$ olsun.
I) $E(0) < 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,
II) $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,
III) $0 < E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \|u_0\|^2\right)^2}{8\left[a(t_0) + (T_1 - t_0)\|u_0\|^2\right]}$
olduğunda (5.1) denkleminin u çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar.

Teorem 2. Lokal varlık koşullarına ek olarak

$$E(0) \leq 0, \quad \int_\Omega u_0 u_1 dx \geq 0 \text{ ve } -1 < \gamma \leq 0$$

ise (5.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

Ele alınan denklemin patlaması farklı metotlarla çalışılabilir. Sınırlı bölgede çalıştığımız problem sınırsız bir bölgeye de genişletilebilir. Ayrıca problemin enerji azalması, üstel büyümesi gibi matematiksel özellikleri de çalışılabilir. Aynı şekilde diğer diferansiyel denklemler için de benzer işlemler yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A. 2003. Fournier, J. J. F., Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Brezis, H. 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.

Chen, W., Zhou, Y. 2009. Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equation, ***Nonlinear Anal.***, 70(9): 3203-3208.

Çelik, O. 2011. Pasternak zeminine oturan Timoshenko kirişinin değişken hızlı ve şiddeti zamanla artan tekil yük altında dinamik davranışı, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.

Debnath, L. 2012. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Springer.

Doshi, C. 1979. On the Analysis of the Timoshenko Beam Theory with and Without Internal Damping, Rochester Institute of Technology, Thesis.

Epstein, M. 2017. Partial Differential Equations: Mathematical Techniques for Engineeers, Springer.

Esquivel-Avila, J. A. 2013. Global attractor for a nonlinear Timoshenko equation with source terms, ***Math. Sci.***, 1-8.

Esquivel-Avila, J. A. 2010. Dynamic analysis of a nonlinear Timoshenko equation, ***Abstr. Appl. Anal.***, 2011: 1-36.

Evans, L. C. 1998. Partial differantial equations, Graduate Studies in Mathematics: vol.19.

Georgiev, V., Todorova, G. 1994. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, ***J. Diff. Eq.***, 107: 295-308.

Ihlamur, M. E. 2008. Leipholz problemi için farklı kiriş modellerinin analizi ve karşılaştırılması, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications, John Wiley Sons, India.

Levine, H.A. 1974. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt}+Au = F(u)$, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 192: 1-21.

Li, G., Sun, Y., Liu, W. 2012. Global existence and blow up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping, ***Appl. Anal.***, 91(3): 575-586.

Li, M. R., Tsai L. Y. 2003. Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations. ***Nonlinear Anal.***, 54(8): 1397-1415.

Messaoudi, S. A. 2002. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky, ***J. Math. Anal. Appl.***, 265(2): 296-308.

Messaoudi, S. A. 2001. Blow up in a nonlinearly damped wave equation, ***Math. Nachr.***, 231: 105-111.

Ono, K. 1997a. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation, ***Math. Meth. Appl. Sci.***, 20: 151-177.

Ono, K. 1997b. On global solutions and blow up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation, ***J. Math. Anal. Appl.***, 216: 321-342.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. 2015. Existence, decay and blow up of solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, ***Open Math.***, 13: 408-42.

Pişkin, E. 2013. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E., Irkıl N. 2016. Blow up of positive initial-energy solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, Facta Universitatis, ***Ser. Math. Inform.***, 31(3): 645-654.

Pişkin, E., Polat, N. 2014. On the decay of solutions for a nonlinear Petrovsky equation, ***Math. Sci. Lett.***, 3(1): 43-47.

Polat, N. 2005. Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Timoshenko, S. P. 1921. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Tranverse Vibrations of Prismatic Bars, ***Philos. Mag. J. Sci.***, 41(6): 744-746.

Wu, S.T., Tsai, L.Y. 2009. On global solutions and blow up of solutions for a nonlinearly damped Petrovsky system, ***Taiwanese J. Math.***, 13(2A): 545-558.

Yazıcı, E. 2009. Elastik zemine oturan Timoshenko kirişinin sonlu elemanlar yöntemiyle elastoplastik analizi, Yüksek lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 32-48.

Zhou, Y. 2005. Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms, ***Math. Nachr.***, 278(11):1341–1358.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Şanlıurfa ilinin Siverek ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2009 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimime başladım. 2012-2013 te bir yıl erasmus programıyla Polonya'da Pomeranian Üniversitesinde öğrenim gördüm. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi dereceyle tamamladım. İkinci üniversite olarak 2016 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi tamamladım. Ayrıca İngiltere ve Almanya'da çeşitli okullarda, kısa dönemli stajyer öğretmen olarak çalıştım. 2016 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.

Çalışmaları

Makaleler

- E. Pişkin, H. Yüksekkaya, Nonexistence of solutions for a Timoshenko equations with weak damping term (Gönderildi).

Bildiriler

- E. Pişkin, H. Yüksekkaya, Energy decay and global nonexistence of solutions for a nonlinear hyperbolic equation, Conference Differential Equations and Applications, September 4–7, 2017, Brno, CZECH REPUBLIC.
- E. Pişkin, H. Yüksekkaya, Asymptotic behavior and blow up of a solution for a system of nonlinear higher-order wave equations, Workshop on Analysis and PDE, October 4 - 6, 2017, Leibniz Universität Hannover, GERMANY.
- E. Pişkin, H. Yüksekkaya, Existence and Nonexistence of Solutions of Timoshenko Beam Equations, 5. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı, 05-07 Mayıs 2018, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır, sf. 30.

Projeler

- Damping Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması (ZGEF.18.002) (Proje Yürütücüsü: Doç. Dr. Erhan Pişkin, Araştırmacı: Hazal Yüksekkaya).

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Hazal Yüksekkaya
ÖĞRENCİ NO	16804003
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Damping Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	60
BENZERLİK ORANI	%23
RAPORLAMA TARİHİ	13/06/ 2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 60 sayfalık kısmına ilişkin, 12/06/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %23 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Hazal YÜKSEKKAYA

13/06/2018 Doç.Dr. Erhan PİŞKİN **Tez Danışmanı**	13/06/2018 Prof.Dr. H. Özlem GÜNEY **Anabilim Dalı Başkanı**