T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SATURATED SAYISAL YARIGRUPLAR ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Ahmet ÇELİK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Ağustos-2018

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ahmet ÇELİK tarafından yapılan "***Saturated Sayısal Yarıgruplar Üzerine Bazı Sonuçlar***" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. Sedat İLHAN (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Halil İbrahim KARAKAŞ

Üye : Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR

Üye : Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 07 / 08 /2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2018

Prof.Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bana olan sevgi ve güvenleriyle beni ilme biraz daha yaklaştırabilmek için ömürlerini bitiren sevgili **Annem, Babam, Amcalarım ve kardeşlerim** ile desteklerini esirgemeyen **arkadaşlarım** bu tez çalışmasının gerçek yazarlarıdır.

Doktora çalışmamın başından bitimine kadar yakın ilgi, hoşgörü ve desteğini gördüğüm, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım, sayın hocam **Prof. Dr. Sedat İLHAN’** a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında her türlü sorunlarımla yakından ilgilenen, benden yardımlarını esirgemeyen, sayın hocam **Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY’** e ve vermiş oldukları kıymetli öneriler doğrultusunda, çalışmamı düzenlememi sağlayan **Prof. Dr. H. İbrahim KARAKAŞ** ile **Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER’** e teşekkür eder, saygılarımı arz ederim.

Son olarak, bu tez çalışmasını FEN.17.003 nolu Doktora Projesi ile destekleyen Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ne (DÜBAP) de teşekkür ederim.

Ahmet ÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SATURATED SAYISAL YARIGRUPLAR ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

DOKTORA TEZİ

Ahmet ÇELİK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezde, Arf sayısal yarıgrupların bir alt sınıfı olan saturated sayısal yarıgrupları ele alınmıştır. Bu saturated sayısal yarıgruplardan, katlılığı 9 dan küçük ve ileticisi belli bir K pozitif tamsayısı olanların yapıları verilmiştir ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak sayısal yarıgrupların temelini oluşturan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra Arf sayısal yarıgrupların temel özellikleri yer almıştır. Özellikle katlılığı 9 dan küçük olan ve ileticisi bilinen Arf sayısal yarıgrupların yapıları ve bu yarıgruplarda bazı teoremler ele alınmıştır. Bu Arf sayısal yarıgruplardan yararlanarak katlılığı 9 dan küçük olan ve ileticisi bilinen bütün saturated sayısal yarıgrupları verilmiş ve bu saturated sayısal yarıgruplarda bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal yarıgruplar, Arf sayısal yarıgruplar, Saturated sayısal yarıgruplar, Frobenius sayısı, Boşluklar, Cins.

ABSTRACT

SOME RESULTS ON SATURATED NUMERICAL SEMIGROUPS

PhD THESIS

Ahmet ÇELİK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2018

In this thesis, saturated numerical semigroups which form a subclass of Arf numerical semigroups are discussed. From these saturated numerical semigroups, those with multiplicty less than 9 and given conductor K are considered and some results are obtained.

First, some definitions and theorems underlying the numerical semigroups are given. Later, the basic features of Arf numerical semigroups are included. In particular, the structures of Arf numerical semigroups whose multiplicity is less than 9 and whose conductor is known, and some theorems in these semigroups are discussed. Using these Arf numerical semigroups, are given all saturated numerical semigroups with multiplicity is less than 9 and whose conductor is known, and are obtained some theorems and results in these saturated numerical semigroups.

Key Words: Numerical semigroups, Arf numerical semigroups, Saturated numerical semigroups, Frobenius number, Gaps, Genus.

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$	: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile üretilen sayısal grup
$o.b.e.b\{a,b\}$	: a ile b sayılarının en büyük ortak böleni
MED	: Maksimum gömme (embedding) boyutlu sayısal yarıgrup
$F(S)$	: S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı
$H(S)$	: S sayısal yarıgrubunun boşlukları kümesi
$FH(S)$	: S sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesi
$EH(S)$	: S sayısal yarıgrubunun özel boşluklarının kümesi
$Ap(S,m)$	: S sayısal yarıgrubunun m sayısına göre Apéry kümesi
$G(S)$	: S sayısal yarıgrubunun cinsi (genusu)
$m(S)$	: S sayısal yarıgrubunun katlılığı
$n(S)$	: S sayısal yarıgrubunun belirteç sayısı
$t(S)$	: S sayısal yarıgrubunun tipi
$T(S)$	: S sayısal yarıgrubunun kutup noktalarının kümesi
$K(S)$	: S sayısal yarıgrubunun ileticisi (kondüktörü)

1. GİRİŞ

Sayısal yarıgrup kavramı; ifadesi basit, anlaşılması kolay fakat çözümü açık olmayan problemleri ortaya çıkarmıştır. Bu durum ilk olarak 19. yüzyılın sonlarına doğru Frobenius ve Sylvester gibi bazı matematikçilerin ilgisini çekmiştir.

Sylvester (1884), $n_1, n_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b\ s_1, s_2 = 1$ olmak üzere, $n_1 s_1 + n_2 s_2 = g$ şeklinde yazılamayan en büyük g tam sayısının nasıl bulunacağını göstermiştir. Sylvester'ın genellemesi ise Frobenius tarafından şöyle tasarlanmıştır: "$< s_1, s_2, ..., s_n >$ sayısal yarıgrubuna ait olmayan en büyük tamsayı, $s_1, s_2, ..., s_n$ sayılarına bağlı olarak nasıl formüle edilebilir? " Literatürde bu probleme *Frobenius problemi* denir.

Sayısal yarıgruplar kavramı, matematiğin birçok alanıyla ilgilidir. Arf sayısal yarıgrupları hem halkalar, hem cebirsel geometriye uygulamaları hem de cebirsel hata düzeltme kodlarında kullanılması konusunda özel bir ilgi alanı oluşturmuştur. Öte yandan, Arf sayısal yarıgrupları, Cahit Arf'ın cebirsel eğrilerin katlı noktaları üzerine yaptığı bir çalışmadan ortaya çıkmıştır (Arf, 1948). Lipman, Arf'ın yapmış olduğu çalışmalardan etkilenerek Arf halkaları çalışmalarını tekrar gündeme getirmiş ve halkaların değerleri yardımıyla elde edilen sayısal yarıgruplar için Arf özelliğini ortaya çıkarmıştır (Lipman, 1971).

Arf sayısal yarıgrupların bir alt sınıfı saturated (doymuş) sayısal yarıgruplarıdır. Bununla birlikte, her saturated sayısal yarıgrubunun Arf sayısal yarıgrup olduğu bilinmektedir. Ancak bir Arf sayısal yarıgrubunun saturated olması gerekmez. Saturated sayısal yarıgrup kavramı daha eskiye, O. Zariski'nin bazı çalışmalarına dayanır (Rosales,2004).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Sayısal yarıgrup kavramı ilk olarak 19. yüzyılın sonlarına doğru Frobenius ve Sylvester gibi bazı matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Sylvester, $n_1, n_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b\ (s_1, s_2) = 1$ olmak üzere, $n_1 s_1 + n_2 s_2 = g$ şeklinde yazılamayan en büyük g tam sayısının nasıl bulunacağını göstermiştir (Sylvester, 1884). Brauer,çalışmasında Frobenius problemine yer vermiştir (Brauer, 1942). Sayısal yarıgruplar kavramı, matematiğin birçok alanıyla ilgilidir.

Son yıllarda sayısal yarıgrup kavramı; Cebir, Cebirsel Geometri, Topoloji ve Diferansiyel Geometri alanlarında oldukça geniş uygulamalara sahip olmuştur. Özellikle Grup ve Halka Teorisindeki önemi kayda değerdir. Local, Noteherian Local, Gorenstein ve Arf halkalarının özellikleri belli koşullar altında sayısal yarıgruplar bakımından karakterize edilebildiğini görebilmekteyiz (Abhyankar, 1967; Barucci ve arkadaşları, 1992; Bertin ve Carbonne, 1977; Brown ve Curtis, 1991; Kunz, 1970; Sally,1979). Ruiz (1985) ve Campillo (1990) yapmış oldukları çalışmalarda Arf özellikli sayısal yarıgruplar ile bir gerçel eğrinin Pisagor özelliği arasındaki yakınlığı çalışmışlardır.

Arf sayısal yarıgrupları, Cahit Arf'ın cebirsel eğrilerin katlı noktaları üzerine yaptığı bir çalışmadan ortaya çıkmıştır (Arf, 1948). Lipman, Arf'ın yapmış olduğu çalışmalardan etkilenerek Arf halkaları çalışmalarını tekrar gündeme getirmiş ve halkaların değerleri yardımıyla elde edilen sayısal yarıgruplar için Arf özelliğini ortaya çıkarmıştır (Lipman, 1971).

D'anna bir sayısal yarıgrubun tip dizisi ile Arf olması arasındaki ilişkiyi incelemiştir (D'anna, 1998). Ayrıca, Campillo ve arkadaşları, Arf sayısal yarıgrupları ile ilgili cebirsel geometrik kodların parametreleri üzerine çalışma yapmışlardır (Campillo ve ark., 2000). Diğer taraftan, Bras-Amoros, Arf sayısal yarıgrupların yeni bir karakterizasyonu üzerine bazı çalışmalar yapmıştır (Bras-Amoros, 2003).

2003'te Rosales ve arkadaşları yaptıkları çalışmada "Bir sayısal yarıgruba hangi boşluklar eklenirse yine bir sayısal yarıgrup elde edilebilir?" sorusuna cevap aramışlardır. Yine Rosales ve arkadaşları çalışmalarında, bir sayısal yarıgrubun Arf kapanışını bulmuşlar ve bir Arf sayısal yarıgruba onun Frobenius sayısını ekleyerek farklı bir Arf sayısal yarıgrubu elde etmişlerdir (Rosales ve ark., 2004). Rosales ve arkadaşları, Arf sayısal yarıgrupları ve bunların üreteç sistemlerini incelemişlerdir (Rosales ve ark., 2004). Öte yandan, Robles-Pérez ve arkadaşları maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgruplar ve bunların bir alt sınıfı olan Arf sayısal yarıgrup çiftleri üzerine çalışma yapmışlardır (Robles-Pérez ve ark., 2009).

Rosales ve arkadaşları, 2004 yılında saturated sayısal yarıgruplarda önemli bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Rosales ve arkadaşları 2009 yılında sayısal yarıgruplar özellikle Arf ve saturated sayısal yarıgrupları hakkında genel bilgileri ve bu konuda elde edilen sonuçların yer aldığı bir kitap yazmışlardır. Yine Rosales ve arkadaşları, saturated sayısal yarıgrupların çeşitleri üzerine bazı çalışmalar yapmışlardır (Rosales ve ark., 2010).

Son zamanlarda, İlhan ve Süer, Arf sayısal yarıgrupların bir ailesini incelemiş ve bir takım sonuçlar elde etmişlerdir (İlhan ve ark., 2015). 2017 yılında Garcia-Sanchez ve arkadaşları ileticisi 7 veya 7 den küçük olan Arf sayısal gruplarının sayısını ve bunların yapısı ile ilgili olarak bazı sonuçlar vermişlerdir (Garcia-Sanchez ve ark., 2017). Daha sonra, Süer ve İlhan katlılığı 4 olan saturated sayısal yarıgruplar hakkında birçok sonuçlar elde etmişlerdir (Süer ve ark., 2016, 2017). Süer de katlılığı 7 ve ileticisi c olan bütün saturated sayısal yarıgrupları elde etmiştir (Süer, 2016). Son olarak, İlhan ve Karakaş, Arf sayısal yarıgruplarının bazı özelliklerini incelemiş ve bir sayısal yarıgrubun Arf kapanışı ile ilgili yeni bir yöntem vermişlerdir (İlhan ve ark., 2017).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, çalışmanın esasını oluşturan ve tezin iyi anlaşılması için temel tanım ve teoremler yer almaktadır.

3.1 Materyal

Bu tez çalışması sayısal yarıgrupların önemli bir alanını oluşturan Arf sayısal yarıgruplarının bir alt sınıfı olan saturated sayısal yarıgruplardan katlılığı 9 dan küçük ve keyfi ileticili (kondüktörlü) olanların bulunması üzerine kurulmuştur. Bunun için çeşitli kaynaklardan ulaştığımız ve çalışmalarımıza destek olan, ilgili makaleler ve kitaplar materyal olarak kullanılmıştır.

3.2 Metot

Bir sayısal yarıgruba bazı elemanlar eklenerek farklı bir sayısal yarıgrup bulmak mümkündür. Benzer olarak, bir Arf sayısal yarıgrubuna Frobenius sayısı eklenerek, Frobenius sayısı farklı olan yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilebilir.

Katlılığı 9 dan küçük olan ve ileticisi keyfi bir pozitif tamsayı olan bütün saturated yarıgruplarını elde etmek için metodumuz; bir Arf sayısal yarıgrubuna Frobenius sayısı ekleyerek, Frobenius sayısı farklı olan yeni bir Arf sayısal yarıgrubunu bulmaktır. Ayrıca, bunlardan yararlanarak katlılığı 9 dan küçük ve ileticisi keyfi bir pozitif tamsayı olan bütün Arf sayısal yarıgrupların yapılarından yola çıkmak ve bunlardan saturated olanları tespit etmek olacaktır.

3.3 Temel Tanımlar

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanımlara ve önemli bazı teoremlere ispatsız olarak yer verilmiştir.

Tanım 3.3.1 İçinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli cebirsel yapıya bir *yarıgrup* denir.

Tanım 3.3.2 $\langle S, \circ \rangle$ bir yarıgrup olsun. $M \subseteq S$ olmak üzere $\forall x, y \in M$ için $x \circ y \in M$ oluyor ise M ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir (Howie, 1976).

Tanım 3.3.3 S bir yarıgrup ve $B \subset S$ olsun. B yi kapsayan S nin en küçük alt yarıgrubuna B nin *ürettiği yarıgrup* denir. Bu durumda, B kümesine de S nin *üreteçler kümesi* denir ve $S = \langle B \rangle$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $b_1 < b_2 < ... < b_n$ olacak şekilde $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset S$ alınırsa $S = \langle b_1, b_2, ..., b_n \rangle$ yazılır ve S *sonlu üretilmiştir* denir. Eğer $S = \langle b_1, b_2, ..., b_n \rangle$ olacak şekilde S nin $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ üreteç kümesinden, kapsama bağıntısına göre, daha küçük bir küme yoksa o zaman $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ kümesine S nin *minimal üreteç sistemi* denir (Rosales ve ark.,1999).

Tanım 3.3.4 $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $S \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa S ye *sayısal yarıgrup* denir.

(1) $\forall x_1, x_2 \in S$ için $x_1 + x_2 \in S$

(2) $0 \in S$

(3) $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu. (Rosales ve ark.,2009).

$B \subseteq \mathbb{N}, B \neq \phi$ ise B nin $\mathbb{N}$ içinde ürettiği monoid $< B >$ ile gösterilir ve

$$< B > = \left\{ \sum_{i=1}^{r} n_i b_i : r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_i \in B, n_i \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Üstelik $\mathbb{N}$ nin her alt monoidi sonlu üretilmiştir. Ayrıca, S nin her alt monoidi başka üreteçler kümesi içinde kapsanan tek türlü belirli bir minimal üreteçler kümesine sahiptir (Rosales,2009). $B \subseteq \mathbb{N}, B \neq \phi$ ise $\#(\mathbb{N} \setminus <B>) < \infty \Leftrightarrow o.b.e.b(B) = 1$ olur (Rosales,2009).

Tanım 3.3.5 S sayısal yarıgrubu $S = \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle$ şeklinde verilsin. O zaman s_1 ve n sayılarına sırasıyla S nin *katlılığı* ve *gömme boyutu* denir ve sırasıyla $m(S)$ ve $\mathrm{e}(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.6 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, S nin *Frobenius sayısı*, S ye ait olmayan en büyük tamsayı olarak tanımlanır ve $F(S)$ ile gösterilir. Yani

$$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\}$$

olarak ifade edilir (Fröberg ve ark., 1987).

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısını hesaplamak zordur. Ancak, özel bazı sayısal yarıgruplar için bunu kolayca hesaplamak mümkündür.

Teorem 3.3.7 Eğer S sayısal yarıgrubu $S=\langle x_1,x_2\rangle$ şeklinde ise o zaman S nin Frobenius sayısı $F(S)=x_1.x_2-x_1-x_2$ ile hesaplanır (Rosales, 1996).

Teorem 3.3.8 $x,\ x>2$ olacak şekilde bir çift tamsayı ve $S=\langle x,x+2,2x+1\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman S nin Frobenius sayısı $F(S)=\dfrac{x^2}{2}+x+1$ şeklindedir

(İlhan, 2006).

Teorem 3.3.9 $S=\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ sayısal yarıgrubunda $2<x_1<x_2<x_3$ olmak üzere, $a\in\mathbb{Z}$ için; $2<a<\dfrac{x_1-1}{2}+1$ ve $\mathrm{x}_1-a<\dfrac{x_3}{x_2}<x_1-a+1$ verilsin. O zaman

$x_2\equiv 1(\mathrm{mod}\,x_1)$ ve $\mathrm{x}_3\equiv x_1-a+1(\mathrm{mod}\,x_1)$ olmak üzere,

$$F(S)=(a-2)x_2+x_3-x_1$$

şeklinde olur (Curtis, 1990).

Örnek 3.3.10 Teorem 3.3.9 da $x_1=7,x_2=15\ ve\ x_3=61$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}S&=\langle 7,15,61\rangle\\&=\{\,0,7,14,15,21,22,28,29,30,35,36,37,42,43,44,45,49,50,51,52,56,57,58,59,60,61,63,64,65,66,67,68,70,\rightarrow\ldots\}\end{aligned}$$

sayısal yarıgrubunu yazarız. Bu durumda, S nin Frobenius sayısı $F(S)=69$ olur. Gerçekten de $2<7<15<61$ olmak üzere, $2<a<4$ eşitsizliğinden $a=3$ çıkar. Ayrıca $7-3<\dfrac{61}{15}<7-3+1$ eşitsizliği ile birlikte

$$15\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)\ \text{ve}\ 61\equiv 7-3+1(\mathrm{mod}\,7)$$

ifadeleri de sağlanır. Bu durumda S nin Frobenius sayısı $F(S)=(3-2)15+61-7=69$ şeklinde bulunur.

Tanım 3.3.11 S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun. O zaman

$$n(S)=\#\big(\{0,1,2,\ldots,F(S)\}\cap S\big)$$

sayısına S nin *belirteç sayısı* adı verilir.

Not 3.3.12 $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla, S nin Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $S=\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n=F(S)+1,\rightarrow ...\}$ şeklinde verilsin. Burada $s_i < s_{i+1}$ olup "$\rightarrow$" , $F(S)+1$ sayısından büyük olan her tamsayının S ye ait olduğunu gösterir (D'anna,1998).

Tanım 3.3.13 S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun. Eğer

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S \text{ için } F(S)-x \in S$$

oluyorsa S ye *simetrik sayısal yarıgrup* adı verilir.

Öte yandan iki eleman ile üretilen her $S=\langle x_1,x_2\rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir (Rosales ve ark., 2002).

Tanım 3.3.14 S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer $F(S)$ çift, $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ ve $F(S)-x \notin S$ olacak şekilde sadece bir tek $x=F(S)/2$ varsa S sayısal yarıgrubuna *pseudo- simetriktir* denir.

Tanım 3.3.15 S bir sayısal yarıgup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S)-x \notin S$ oluyor ise x elemanına S nin *kutup noktası* denir. S nin bütün kutup noktalarının kümesi;

$$T(S)=\{x \in \mathbb{Z} \setminus S : \ F(S)-x \notin S\}$$

ile gösterilir.

Teorem 3.3.16 S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman S nin simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul $T(S)=\varnothing$ olmasıdır (Madero ve ark., 2005).

Tanım 3.3.17 S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin elemanlarına S nin *boşlukları (gaps)* denir. S nin bütün boşluklarının kümesi $H(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$H(S)=\{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.3.18 S bir sayısal yarıgrup ve $H(S)$ onun boşluklarının kümesi olsun. Eğer $u \in H(S)$ için $2u, 3u \in S$ oluyorsa u elemanına S nin *temel boşluğu (Fundamental gap)* denir. S nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(S)$ ile gösterilir. Buna göre,

$$FH(S) = \{u \in H(S) : 2u, 3u \in S\}$$

olarak yazılır.

Tanım 3.3.19 Bir S sayısal yarıgrubunda $2x \in S$ ve her $y \in S \setminus \{0\}$ için $x + y \in S$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ varsa x elemanına S nin *özel boşluğu* denir ve S sayısal yarıgrubunun bütün özel boşluklarının kümesi $EH(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$EH(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : 2x \in S, x + y \in S,\ \forall y \in S \setminus \{0\}\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.3.20 S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere,

$$Ap(S, m) = \{s \in S :\ s - m \notin S\}$$

kümesine S nin m ye göre *Apery kümesi* denir. S nin m ye göre Apery kümesinin elemanları, $(\mathrm{mod}\, m)$'ye göre kalan sınıfları içinde S ye ait en küçük tamsayılardan oluşmaktadır. Böylece, her $i = 1, \ldots, m-1$ için $w\ i\ = \min\ x \in S : x \equiv i (\mathrm{mod}\, m)$ olmak üzere, $Ap(S, m) =\ w(0) = 0, w(1), \ldots, w(m-1)$ şeklindedir. Burada

$$\#(Ap(S, m)) = m \text{ ve } F(S) = \max(Ap(S, m)) - m$$

olduğunu not edelim.

Örnek 3.3.21 $S = < 3, 7 > =\ 0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow \ldots$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu durumda,

$$Ap(S, 3) = \{s \in S :\ s - 3 \notin S\} = \{0, 7, 14\}$$

ve

$$F(S) = \max(Ap(S, 3)) - 3 = 14 - 3 = 11$$

olarak bulunur.

Not 3.3.22 $S=\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n=F(S)+1,\rightarrow...\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, S_i ve $S(i)$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $0\leq i\leq n(S)=n$ için

$$S_i=\{x\in S: x\geq s_i\}$$

ve

$$S(i)=\{x\in\mathbb{N}:\ x+S_i\subset S\}.$$

Bu durumda

$$S_n\subset S_{n-1}\subset...\subset S_1\subset S\subset S(1)\subset...\subset S(n-1)\subset S(n)=\mathbb{N}$$

zincirini elde ederiz (D'anna,1998).

Tanım 3.3.23 $S=\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n=F(S)+1,\rightarrow...\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)=n$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $t=t(S)=\#(S(1)\setminus S)$ sayısına *S sayısal yarıgrubunun tipi* denir.

Tanım 3.3.24 $S=\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n=F(S)+1,\rightarrow...\}$ bir sayısal yarıgrup, $F(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $1\leq i\leq n(S)$ için $t_i=t_i(S)=\#(S(i)\setminus S(i-1))$ sayılarından yararlanarak $\{t_1,t_2,...,t_{n(S)}\}$ kümesini elde ederiz. Bu kümeye de S sayısal yarıgrubunun *tip dizisi* adı verilir. Burada,

$$2\leq a\leq n(S)\quad \text{ve } t_1\geq t_a\geq 1$$

olarak tanımlanır. Bununla birlikte, simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun tip dizileri sırasıyla, $\{1,1,...,1\}$ ve $\{2,1,1,...,1\}$ şeklindedir (D'anna,1998).

Tanım 3.3.25 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $G(S)=\#(\mathbb{N}\setminus S)$ sayısına S nin *cinsi (genus)* denir. Yani, $H(S)$ kümesinin eleman sayısına S nin *cinsi (genus)* adı verilir.

Tanım 3.3.26 S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. $K=F(S)+1$ eşitliğini sağlayan K sayısına S nin *iletici*si *(kondüktörü)* adı verilir.

Tanım 3.3.27 S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Bu durumda,

$$N(S)=\{\, x\in S:\; x<F(S)\,\}$$

kümesine S nin *minimal temsilcilerinin kümesi* denir. Bununla birlikte

$$\#\big(H(S)\big)+\#\big(N(S)\big)=F(S)+1$$

eşitliği mevcuttur. Ayrıca, $x\in N(S)$ iken

$$F(S)-x\in H(S)$$

olduğundan

$$\#\big(H(S)\big)\geq\#\big(N(S)\big)$$

şeklindedir (Rosales,2008). Bununla birlikte,

$$n(S)=\#\big(N(S)\big)$$

olduğu açıktır.

Örnek 3.3.28 $S=\langle 5,7,8\rangle=\{0,5,7,8,10,12,\rightarrow\ldots\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. Bu durumda; $F(S)=11$, $n(S)=\#\big(\{0,1,2,\ldots,11\}\cap S\big)=\#\big(\{0,5,7,8,10\}\big)=5$ ve S sayısal yarıgrubunun ileticisi $K(S)=12$ olur. Öte yandan, S sayısal yarıgrubunun boşluklarının ve temel boşluklarının kümesi ile cinsi sırasıyla;

$$H(S)=\{x\in\mathbb{N}:\; x\notin S\}=\{1,2,3,4,6,9,11\}\ ,$$

$$FH(S)=\{u\in H(S):2u,3u\in S\}=\{4,6,9,11\}$$

ve

$$G(S)=\#\big(H(S)\big)=7$$

olur.

S sayısal yarıgrubunun kutup noktalarının kümesi,

$$T(S)=\left\{x\in\mathbb{Z}\setminus S:\ 11-x\notin S\right\}=\{\,2,9\}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, $T(S)\neq\varnothing$ olduğundan S sayısal yarıgrubu simetrik değildir. Üstelik S pseudo-simetrik te değildir. Çünkü, $F(S)=11$ tek sayıdır. S sayısal yarıgrubunun 5'e göre Apery kümesi, $Ap(S,5)=\{s\in S:\ s-5\notin S\}=\{0,7,8,14,16\}$

şeklinde olur. S nin minimal temsilcilerinin kümesi,

$$N(S)=\{\,x\in S:\ x<11\,\}=\{\,0,5,7,8,10\,\}$$

biçimindedir.

Son olarak S sayısal yarıgrubunun tip dizisini bulalım:

$$S_1=\{x\in S: x\geq 5\}=\{5,7,8,10,12,\rightarrow...\}$$

ve

$$S(1)=\{x\in\mathbb{N}:\ x+S_1\subset S\}=\{0,5,6,7,8,\rightarrow...\}$$

olup, S sayısal yarıgrubunun tipi de

$$t_1=t(S)=\#\big(S(1)\setminus S\big)=\#\big(\{9,11\}\big)=2$$

sayısı olur. Benzer yolla; $t_2=1,\ t_3=2,\ t_4=1\ ve\ t_5=1$ olarak buluruz. Böylece, S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{\,2,1,2,1,1\,\}$ şeklinde olur.

Tanım 3.3.29 S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer her $x,y,z\in S$ için $x\geq y\geq z$ koşuluyla $x+y-z\in S$ oluyorsa S sayısal yarıgrubuna *Arf sayısal yarıgrup* denir.

Örnek 3.3.30 $S=\langle 4,7,9,10\rangle=\{0,4,7,\rightarrow...\}$ bir *Arf* sayısal yarıgrubudur. Çünkü, her $x,y,z\in S$ için $x\geq y\geq z$ koşuluyla $x+y-z\in S$ olur.

Ancak $T=\langle 4,5,7\,\rangle=\{0,4,5,7,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubu bir *Arf* sayısal yarıgrup olmaz. Çünkü, $5\geq 5\geq 4$ koşuluyla $5+5-4=6\notin S$ olur.

Önerme 3.3.31 $S_1, S_2, ..., S_n$ Arf sayısal yarıgrupları ise o zaman $S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n$ kümesi de Arf sayısal yarıgrubudur (Rosales ve ark.,2004).

Tanım 3.3.32 S, $\mathbb{N}$ nin bir alt monoidi olmak üzere,

$$S' = \{ x + y - z : x, y, z \in S \ ve \ x \geq y \geq z \}$$

kümesi S yi kapsayan bir alt monoidtir. Bununla birlikte aşağıdaki bağıntılar tanımlanır:

(1) $S^0 = S$

(2) $S^{n+1} = (S^n)'$

(Rosales ve ark.,2004).

Tanım 3.3.33 S bir sayısal yarıgrup olsun. S yi kapsayan Arf sayısal yarıgruplarının (alt küme bağıntısına göre) en küçüğüne S nin Arf *kapanışı* denir ve $Arf(S)$ ile gösterilir. Yani; $S_1, S_2, ..., S_n$ kümeleri S yi kapsayan Arf sayısal yarıgrupları olmak üzere;

$$Arf(S) = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

yazılır. Eğer S bir Arf sayısal yarıgrup ise $Arf(S) = S$ olur.

Tanım 3.3.34 Eğer $B \subseteq \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b(B) = 1$ ise, B yi kapsayan tüm Arf sayısal yarıgruplarının kesişimi bir Arf sayısal yarıgruptur. Bu Arf sayısal yarıgruba B nin ürettiği Arf sayısal yarıgrup, B ye de onun *Arf üreteçler sistemi* denir.

Yardımcı Teorem 3.3.35 S bir Arf sayısal yarıgrup ve $m(S)$ onun katlılığı olsun. Eğer A, S nin bir Arf üreteçler sistemi ise o zaman $m(S) \in A$ olur (Rosales ve ark.,2004).

Teorem 3.3.36 A ve B, S nin iki minimal Arf üreteçler sistemi olsun. O zaman $A = B$ olur (Rosales ve ark., 2004).

Yardımcı Teorem 3.3.37 S bir Arf sayısal yarıgrup ve $b \in S$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar birbirine denktirler:

(1) b, S nin minimal Arf üreteçler sistemine aittir.

(2) $S \setminus \{b\}$ bir Arf sayısal yarıgrubudur (Rosales ve ark.,2004).

Yardımcı Teorem 3.3.38 $S \neq \mathbb{N}$ olmak üzere, S bir Arf sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. O zaman $S \cup \{F(S)\}$ kümesi bir Arf sayısal yarıgrup olur (Rosales ve ark., 2004).

Önerme 3.3.39 S bir Arf sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktirler:

(1) $\bar{S}$ bir Arf sayısal yarıgrup olmak üzere, $S = \bar{S} \cup \{F(\bar{S})\}$ şeklindedir.

(2) S nin minimal Arf üreteçler sistemi, $F(S)$den daha büyük olan en az bir eleman kapsar (Rosales ve ark.,2004).

Yardımcı Teorem 3.3.40 S bir Arf sayısal yarıgrup ve $a \in S$ olsun. O zaman $(a+S) \cup \{0\}$ kümesi de bir Arf sayısal yarıgruptur (Rosales ve ark.,2004).

Teorem 3.3.41 $o.b.e.b\{a, b_1, b_2, ..., b_k\} = 1$ olacak şekilde $a, b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{N}$ verilsin. O zaman

$$Arf\ (a, a+b_1, a+b_2, ..., a+b_k) = (\ a+\ Arf\ (a, b_1, b_2, ...b_k) \cup \{0\}\ )$$

şeklinde olur (Rosales ve ark.,2004).

Teorem 3.3.42 $o.b.e.b\{a, b_1, b_2, ..., b_k\} = 1$ olacak şekilde $a, b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{N}$ verilsin. O zaman

$$F(Arf(a,\ a+b_1,\ a+b_2, ..., a+b_k)) = a + F(Arf(a, b_1, b_2, ..., b_k))$$

şeklindedir (Rosales ve ark.,2004).

Not 3.3.43 $X \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi verilsin. Bu durumda $o.b.e.b(X)$=1 olmak üzere, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

(a) $A_1 = X$

(b) $A_{n+1} = \{x - \min_{\leq} A_n : x \in A_n,\ x \neq 0\} \cup \{\min_{\leq} A_n\}$.

Teorem 3.3.44 Not 3.3.43'de verilenlere göre,

$Arf(X) = 0, \min_{\leq} A_1,\ \min_{\leq} A_1 + \min_{\leq} A_2, ..., \min_{\leq} A_1 + \min_{\leq} A_2 + ... + \min_{\leq} A_{q-1}, \rightarrow ...$ biçimindedir (Rosales ve ark.,2004).

Örnek 3.3.45 $Arf\ (5,13,23)$ kümesini hesaplayalım.

$A_1 = \{5,13,23\}$, $\min_{\leq} A_1 = 5$,
$A_2 = \{5,8,18\}$, $\min_{\leq} A_2 = 5$,
$A_3 = \{3,5,13\}$, $\min_{\leq} A_3 = 3$,
$A_4 = \{2,3,10\}$, $\min_{\leq} A_4 = 2$
$A_5 = \{1,2,8\}$

olur. Bu durumda Arf $(5,13,23) = \{0,5,10,13,15,\rightarrow .....\}$ şeklinde bulunur.

Tanım 3.3.46 Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(x_1, x_2, ...x_n)$ tamsayı dizisine bir *Arf dizisi* denir.

(1) $x_n \geq x_{n-1} \geq .... \geq x_2 \geq x_1 \geq 2$,

(2) $x_{i+1} \in \{x_i,\ x_i + x_{i-1} ..., x_i + ... + x_1, \rightarrow ...\}$.

Önerme 3.3.47 S, $\mathbb{N}$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman S nin bir Arf sayısal yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$S = \{0, x_n, x_n + x_{n-1}, ..., x_n + ...x_1, \rightarrow ...\}$$

olacak şekilde bir $(x_1, x_2, ...x_n)$ Arf dizisinin var olmasıdır

(Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.48 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bir Arf dizisi olmak üzere, S Arf sayısal yarıgrubu

$$S = S(x_1, x_2, ..., x_n) = \{0, x_n, x_n + x_{n-1}, x_n + x_{n-1} + x_{n-2}, ..., x_n + x_{n-1} + ... + x_1\}$$

şeklinde verilsin. O zaman

(a) $F(S)=x_1+x_2+...+x_n-1$

(b) $G(S)=x_1+x_2+...+x_n-n$

biçimindedir(Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Örnek 3.3.49 $x_1=7$, $x_2=4$ ve $x_3=2$ olarak alalım. Bu durumda, $(7,4,2)$ bir Arf dizisi olup $S=S(7,4,2)$ = $\{0,7,11,13,\rightarrow...\}$ Arf özellikli bir sayısal yarıgruptur. Böylece

$$F(S)=x_1+x_2+x_3-1=7+4+2-1=12$$

ve

$$G(S)=x_1+x_2+x_3-3=7+4+2-3=10$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.50 $(x_1,x_2,...,x_n)$ bir Arf dizisi olmak üzere, $S=S(x_1,x_2,...x_n)$ yarıgrubu verilsin. $K(S)$ ve $\mathrm{G}(S)$ sırasıyla S nin ileticisi ve cinsi olmak üzere,

$$n=K(S)-G(S)$$

şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Not 3.3.51 $K(S)$ ve $G(S)$ sırasıyla S sayısal yarıgrubunun ileticisi ve cinsi olmak üzere aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

(1) $2G(S)\geq K(S)$

$(2) G(S)\leq F(S)$.

Not 3.3.52 Bir S Arf sayısal yarıgrubunun ileticisi $K(S)=K$ olsun. O zaman

(1) Eğer $m(S)=1$ ise $S=\mathbb{N}$

(2) Eğer $m(S)=2$ ise $S=\langle 2,2K+1\rangle$

olur.

Teorem 3.3.53 $K>3$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 3$ olacak şekilde bir K tamsayısı verilsin. O zaman katlılığı 3 ve iletícisi K olan S Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir.

(1) $K \equiv 0 \pmod 3$ ise $S = \langle 3, K+1, K+2 \rangle$

(2) $K \equiv 2 \pmod 3$ ise $S = \langle 3, K, K+2 \rangle$

şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.54 $K>4$ ve $K \not\equiv 1 (\bmod 4)$ olmak üzere S, katlılığı 4 ve iletícisi K olan bir Arf sayısal yarıgrubu olsun. O zaman S aşağıdakilerden biridir:

(1) Eğer $K \equiv 0 \pmod 4$ ise $t \in \left\{1, 2, ..., \frac{K}{4}\right\}$ olmak üzere

$$S = \langle 4, 4t+2, K+1, K+3 \rangle$$

şeklindedir.

(2) Eğer $K \equiv 2 (\bmod 4)$ ise $t \in \left\{1, 2, ..., \frac{K-2}{4}\right\}$ olmak üzere

$$S = \langle 4, 4t+2, K+1, K+3 \rangle$$

olur.

(3) Eğer $K \equiv 3 \pmod 4$ ise o zaman $S = \langle 4, K, K+2, K+3 \rangle$

biçimindedir (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Sonuç 3.3.55 Katlılığı m ve iletícisi K olan Arf sayısal yarıgruplarının sayısını $n_A(K,m)$ ile gösterelim. O zaman $K>4$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 4$ olmak üzere,

$$n_A(K,4) = \begin{cases} \frac{K}{4} & ;\ K \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{K-2}{4} & ;\ K \equiv 2 \pmod 4 \\ 1 & ;\ K \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

şeklinde olur (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.56 $K > 5$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 5$ olmak üzere, katlılığı 5 ve ileticisi K olan S, Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

(1) Eğer $K \equiv 0 \pmod 5$ ise

ya

$$S = \langle 5, K-2, K+1, K+2, K+4 \rangle$$

ya da

$$S = \langle 5,\ K+1,\ K+2,\ K+3,\ K+4 \rangle$$

olur.

(2) Eğer $K \equiv 2 (\bmod 5)$ ise

$$S = \langle 5, K, K+1, K+2, K+4 \rangle$$

olur.

(3) Eğer $K \equiv 3 \pmod 5$ ise

$$S = \langle 5, K, K+1, K+3, K+4 \rangle$$

olur.

(4) Eğer $K \equiv 4 \pmod 5$ ise

ya

$$S = \langle 5, K-2, K, K+2, K+4 \rangle$$

ya da

$$S = \langle 5, K, K+2, K+3, K+4 \rangle$$

olur (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Sonuç 3.3.57 $K > 5$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 5$ olmak üzere, katlılığı 5 ve ileticisi K olan S **,** Arf sayısal yarıgruplarının sayısı;

$$n_A(K,5) = \begin{cases} 2 & ; \text{ eğer } K \equiv 0 (\text{mod}\,5) \text{ ya da } K \equiv 4 (\text{mod}\,5) \\ 1 & ; \text{ eğer } K \equiv 2 (\text{mod}5) \text{ ya da } K \equiv 3 (\text{mod}5) \end{cases}$$

şeklinde olur (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.58 $K > 6$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 6$ olmak üzere, S katlılığı 6 ve ileticisi K olan bir Arf sayısal yarıgrubu olsun. Bu durumda;

1) Eğer $K \equiv 0 \pmod 6$ ise S, aşağıdaki sayısal yarıgruplarından biridir: $1 \le a \le \dfrac{K}{6} - 1$ şeklindeki bir a tamsayısı için

   i. $S = \langle 6, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5 \rangle$

   ii. $S = \langle 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 \rangle$

   iii. $S = \langle 6, 6a+3, K+1, K+2, K+4, K+5 \rangle$

   iv. $S = \langle 6, 6a+4, 6a+8, K+1, K+3, K+5 \rangle$

olur.

2) Eğer $K \equiv 2 \pmod 6$ ise o zaman S aşağıdaki sayısal yarıgruplardan biridir: $1 \le a \le \dfrac{K-2}{6} - 1$ ve $1 \le b \le \dfrac{K-2}{6}$ olacak şekildeki a ve b tamsayıları için,

   i. $S = \langle 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 \rangle$

   ii. $S = \langle 6, 6b+3, K, K+2, K+3, K+5 \rangle$

   iii. $S = \langle 6, 6b+4, 6b+8, K+1, K+3, K+5 \rangle$

olur.

3) Eğer $K \equiv 3 \pmod 6$ ise o zaman $1 \le b \le \dfrac{K-3}{6}$ şeklindeki bir b tamsayısı için

$$S = \langle 6, 6b+3, K+1, K+2, K+4, K+5 \rangle$$

olur.

4) Eğer $K \equiv 4 \pmod 6$ ise o zaman S aşağıdaki sayısal yarıgruplardan biridir: $1 \le a \le \dfrac{K-4}{6}$ şeklindeki bir a tamsayısı için

i. $S = \langle 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 \rangle$

ii. $S = \langle 6, 6a+4, 6a+8, K+1, K+3, K+5 \rangle$.

5) Eğer $K \equiv 5 \pmod 6$ ise o zaman S aşağıdaki formlardan biridir:

$1 \le a \le \dfrac{K-5}{6}$ şeklindeki bir a tamsayısı için

i. $S = \langle 6, K, K+2, K+3, K+4, K+5 \rangle$

ii. $S = \langle 6, 6a+3, K, K+2, K+3, K+5 \rangle$

olur (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Sonuç 3.3.59 $K > 6$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 6$ olmak üzere, katlılığı 6 ve iileticisi K olan S, Arf sayısal yarıgruplarının sayısı,

$$n_A(K,6) = \begin{cases} \dfrac{K}{2} - 2 & ; \text{ eğer } K \equiv 0 \pmod 6 \\ \dfrac{K-2}{2} - 2 & ; \text{ eğer } K \equiv 2 \pmod 6 \\ \dfrac{K-3}{6} & ; \text{ eğer } K \equiv 3 \pmod 6 \\ \dfrac{K-4}{3} & ; \text{ eğer } K \equiv 4 \pmod 6 \\ \dfrac{K+1}{6} & ; \text{ eğer } K \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.60 $K>7$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 7$ olmak üzere, S katlılığı 7 ve iletici si K olan bir Arf sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda;

1) Eğer $K \equiv 0 \pmod 7$ ise o zaman S aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 7, K-3, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 \rangle$

ii. $S = \langle 7, K-2, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 \rangle$

iii. $S = \langle 7, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 \rangle$.

2) Eğer $K \equiv 2 \pmod 7$ ise S aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 7, K-4, K, K+1, K+2, K+4, K+6 \rangle$

ii. $S = \langle 7, K, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 \rangle$

şeklindedir.

3) Eğer $K \equiv 3 \pmod 7$ ise

$$S = \langle 7, K, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 \rangle.$$

4) Eğer $K \equiv 4 \pmod 7$ ise o zaman S aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 7, K-2, K, K+1, K+2, K+4, K+6 \rangle$

ii. $S = \langle 7, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6 \rangle$

şeklindedir.

5) Eğer $K \equiv 5 \pmod 7$ ise S aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 7, K-2, K, K+1, K+3, K+4, K+6 \rangle$

ii. $S = \langle 7, K, K+1, K+3, K+4, K+5, K+6 \rangle$

şeklindedir.

6) Eğer $K \equiv 6 \pmod 7$ ise o zaman S aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 7, K-4, K-2, K, K+2, K+4, K+6 \rangle$

ii. $S = \langle 7, K-3, K, K+2, K+3, K+5, K+6 \rangle$

iii. $S = \langle 7, K-2, K, K+2, K+3, K+4, K+6 \rangle$

iv. $S = \langle 7, K, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 \rangle$

(Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Sonuç 3.3.61 $K > 7$ ve $K \not\equiv 1 \pmod 7$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan S Arf sayısal yarıgruplarının sayısı

$$n_A(K,7) = \begin{cases} 3 & ; \quad eğer\ K \equiv 0 \pmod 7 \\ 2 & ; \quad eğer\ K \equiv 2,4,5 \pmod 7 \\ 1 & ; \quad eğer\ K \equiv 3 \pmod 7 \\ 4 & ; \quad eğer\ K \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$$

şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark.,2017).

Teorem 3.3.62 $K > 8$ ve $K \equiv 0 \pmod 8$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan S Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 8, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6, K+7 \rangle$

$1 \le a \le \dfrac{K-8}{8}$ tam sayısı için

ii. $S = \langle 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

iii. $S = \langle 8, K-5, K-2, K+1, K+2, K+4, K+5, K+7 \rangle$

$1 \leq a < b \leq \frac{K}{8}$ tam sayıları için

iv. $S = \langle 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

v. $S = \langle 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

vi. $S = \langle 8, K-3, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 \rangle$

$1 \leq a \leq \frac{K-8}{8}$ tam sayısı için

vii. $S = \langle 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

şeklindedir (Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.63 $K > 10$ ve $K \equiv 2 \pmod 8$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan S, Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \leq a \leq \frac{K-2}{8}$ tam sayısı için

i. $S = \langle 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5K+7 \rangle$,

$1 \leq a < b \leq \frac{K-2}{8}$ tam sayıları için

ii. $S = \langle 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \leq a < b \leq \frac{K-2}{8}$ tam sayıları için

iii. $S = \langle 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

iv. $S = \langle 8, K-5, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a \le \frac{K-10}{8}$ tam sayısı için

v. $S = \langle 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

şeklindedir (Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.64 $K > 11$ ve $K \equiv 3 \pmod 8$ olmak üzere, katlılığı 8 ve iletici̇si K olan S, Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 8, K, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 \rangle$

$1 \le a \le \frac{K-11}{8}$ tam sayısı için

ii. $S = \langle 8, 8a+4, K, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 \rangle$

şeklindedir (Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.65 $K > 12$ ve $K \equiv 4 \pmod 8$ olmak üzere, katlılığı 8 ve iletici̇si K olan S , Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \le a \le \frac{K-4}{8}$ tamsayısı için

i. $S = \langle 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a < b \le \frac{K-4}{8}$ tamsayıları için

ii. $S = \langle 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a < b \le \frac{K+4}{8}$ tamsayıları için

iii. $S = \langle 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a \le \dfrac{K-12}{8}$ tamsayısı için

vi. $S = \langle 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$.

(Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.66 $K > 13$ ve $K \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan S, Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

i. $S = \langle 8, K-2, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+7 \rangle$,

ii. $S = \langle 8, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6, K+7 \rangle$.

(Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.67 $K > 14$ ve $K \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan S , Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \le a \le \dfrac{K-6}{8}$ tamsayısı için

i. $S = \langle 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$

ii. $S = \langle 8, K-3, K, K+1, K+3, K+4, K+6, K+7 \rangle$,

$1 \le a < b \le \dfrac{K-6}{8}$ tamsayıları için

iii. $S = \langle 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a < b \le \dfrac{K+2}{8}$ tamsayıları için

iv. $S = \langle 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$,

$1 \le a \le \dfrac{K-6}{8}$ tamsayısı için

v. $S = \langle 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 \rangle$.

(Süer ve ark., 2018).

Teorem 3.3.68 $K>15$ ve $K\equiv 7(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan S, Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1\leq a\leq \frac{K-7}{8}$ tamsayısı için

i. $S=\langle 8,8a+4,K,K+2,K+3,K+4,K+6,K+7\rangle$,

ii. $S=\langle 8,K-2,K,K+2,K+3,K+4,K+5,K+7\rangle$,

iii. $S=\langle 8,K,K+2,K+3,K+4,K+5,K+6,K+7\rangle$.

(Süer ve ark., 2018).

Sonuç 3.3.69 $K>8$ ve $K\not\equiv 1(\bmod 8)$ için katlılığı 8 ve ileticisi K olan Arf sayısal yarıgrupların sayısı $N_A(K,8)$ olmak üzere,

$$N_A(K,8)=\begin{cases} \left(\frac{K}{8}\right)^2+\frac{K}{8}+1 & \text{eğer } K\equiv 0(\bmod 8) \\ \left(\frac{K-2}{8}\right)^2-\frac{K-2}{8} & \text{eğer } K\equiv 2(\bmod 8) \\ \frac{K-3}{8} & \text{eğer } K\equiv 3\ (\bmod 8) \\ \left(\frac{K-4}{8}\right)\left(\frac{K+4}{8}\right)-1 & \text{eğer } K\equiv 4(\bmod 8) \\ 2 & \text{eğer } K\equiv 5(\bmod 8) \\ \left(\frac{K-6}{8}+1\right)^2 & \text{eğer } K\equiv 6(\bmod 8) \\ \frac{K-7}{8}+2 & \text{eğer } K\equiv 7(\bmod 8) \end{cases}$$

şeklindedir (Süer ve ark., 2018).

Örnek 3.3.70 Katlılığı 8 ve ileticisi 21 olan Arf sayısal yarıgrupları

$$S_1 = \langle 8,19,21,22,23,25,26,28 \rangle = \{ 0,8,16,19,21,\rightarrow \ldots \}$$

$$S_2 = \langle 8,21,22,23,25,26,27,28 \rangle = \{ 0,8,16,21,\rightarrow \ldots \}$$

şeklinde iki tanedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulara yer verilecektir. Burada, saturated sayısal yarıgrupları hakkında temel bilgileri ve katlılığı 9 dan küçük olan belli bir ileticiye sahip olan bütün saturated sayısal yarıgrupların yapılarını ve bu sayısal yarıgruplarda elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz.

4.1 Saturated Sayısal Yarıgrupları

Bu kesimde saturated sayısal yarıgruplar hakkında genel bilgilerle birlikte katlılığı 9 dan küçük ve ileticisi belli bir K pozitif tamsayısı olan bütün saturated sayısal yarıgrupları vereceğiz.

4.1.1 Temel Bilgiler

Tanım 4.1.1.1 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, her $1 \leq i \leq r$ için $s_i \leq s$ koşuluyla; $s, s_1, s_2, ..., s_r \in S$ ve $a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $\sum_{i=1}^{r} a_i s_i \geq 0$ iken $s + \sum_{i=1}^{r} a_i s_i \in S$ oluyorsa S ye *saturated sayısal yarıgrubu* denir.

Saturated sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruplarının bir alt sınıfıdır. Yani, her saturated sayısal yarıgrup bir Arf sayısal yarıgrubudur. Ama tersi doğru değildir. Yani, bir Arf sayısal yarıgrubu saturated sayısal yarıgrup olmayabilir.

Örnek 4.1.1.2 $S = \langle 5,8,11,12,14 \rangle = \{0,5,8,10,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. S, Arf sayısal yarıgrubudur. Ama saturated sayısal yarıgrubu değildir.

Not 4.1.1.3 $M \subseteq \mathbb{N}$ ve $b \in M$ için $d_M(b) = o.b.e.b\{y \in M : y \leq b\}$ şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.1.4 S bir saturated sayısal yarıgrup ve $x \in S$ verilsin. O zaman $x + d_S(x) \in S$ olur (Rosales ve ark., 2004).

Yardımcı Teorem 4.1.1.5 $M \subseteq \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b(M) = 1$ olsun. Eğer her $b \in M$ için $b + d_m(b) \in M$ ise her $r \in \mathbb{N}$ için $b + rd_M(b) \in M$ olur ve $M \cup \{0\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur (Rosales ve ark., 2004).

Teorem 4.1.1.6 $0 \in M \subseteq \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b(M)=1$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktirler:

(1) M bir saturated sayısal yarıgruptur.

(2) Her $b \in M \setminus \{0\}$ için $b + d_M(b) \in M$ olur.

(3) Her $b \in M \setminus \{0\}$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $b + r\,d_M(b) \in M$ olur

(Rosales ve ark., 2004).

Örnek 4.1.1.7 $S = \langle 5,12,13,14,16 \rangle = \{0,5,10,12,\rightarrow ...\}$ *Arf* sayısal yarıgrubu saturatedtir. Çünkü $F(S)=11$ ve $K(S)=12$ olup $x \in S, x > 0$ için,

eğer $x \geq K(S) = 12$ ise $d_S(x) = o.b.e.b\{y \in S : y \leq x\} = 1$

bulunur. Bu durumda, $x + d_S(x) = x + 1 \in S$ olur.

Eğer $x < K(S) = 12$ ise $d_S(x) = o.b.e.b\{y \in S : y \leq x\} = 5$

bulunur. Bu durumda, $x + d_S(x) = x + 5 \in S$ olur. Böylece, Teorem 4.1.1.6 dan $S = \langle 5,12,13,14,16 \rangle = \{0,5,10,12,\rightarrow ...\}$ *Arf* sayısal yarıgrubu saturated olur.

Örnek 4.1.1.8 $S = \langle 5,8,11,12,14 \rangle = \{0,5,8,10,\rightarrow ...\}$ Arf sayısal yarıgrubu saturated değildir. Çünkü; $F(S)=9$ ve $K(S)=10$ olup $d_S(8) = o.b.e.b\{y \in S : y \leq 8\} = 1$ bulunur. Bu durumda, $8 + d_S(8) = 8 + 1 = 9 \notin S$ olur. Böylece, Teorem 4.1.1.6 dan $S = \langle 5,8,11,12,14 \rangle = \{0,5,8,10,\rightarrow ...\}$ *Arf* sayısal yarıgrubu saturated olmaz.

Önerme 4.1.1.9 T_1 ve T_2 iki saturated sayısal yarıgrup olsun. O zaman $S = T_1 \cap T_2$ kümesi de bir saturated sayısal yarıgruptur (Rosales ve ark., 2004).

Not 4.1.1.10 $X \subseteq \mathbb{N}$ ve $o.b.e.b(X)=1$ olmak üzere, X kümesini kapsayan her saturated sayısal yarıgrup $\langle X \rangle$'i kapsar. Bu durumda X kümesini kapsayan bütün saturated sayısal yarıgrupların arakesiti de $\langle X \rangle$'i kapsayan bir saturated sayısal yarıgruptur ve bu saturated sayısal yarıgruba X 'in *saturated kapanışı* adı verilir ve $Sat(X)$ ile gösterilir. Böylece $Sat(X) = Sat(\langle X \rangle)$ olur. Yani $Sat(X)$, X kümesini kapsayan en küçük saturated sayısal yarıgruptur. Eğer S bir saturated sayısal yarıgrup ve X, $\mathbb{N}$ nin $o.b.e.b(X)=1$ ve $Sat(X)=S$ olacak şekilde bir altkümesi ise X kümesine S nin bir *SAT üreteçler sistemi* denir.

Teorem 4.1.1.11 $o.b.e.b\{a_1, a_2, ...a_p\} = 1$ ve $a_1 < a_2 < .... < a_p$ olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_p$ pozitif tamsayıları verilsin. Her $i \in \{1, 2, ..., p\}$ için $d_i = o.b.e.b\{a_1, a_2, ..., a_i\}$ ve her $j \in \{1, 2, ..., p-1\}$ için $k_j = \max\{q \in \mathbb{N}; n_j + qd_j < n_{j+1}\}$ sayılarını tanımlayalım.

O zaman;

$$\begin{aligned} Sat(a_1, a_2, ...a_p) = \{&0, n_1, n_1 + d_1, ..., n_1 + q_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, ..., n_2 + q_2 d_2, ..., \\ &n_{p-1}, n_{p-1} + d_{p-1}, ..., n_{p-1} + q_{p-1} d_{p-1}, n_p, n_p + 1, \rightarrow ...\} \end{aligned}$$

şeklinde olur (Rosales ve ark., 2004).

Örnek 4.1.1.12 $X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{4, 10, 23\}$ olarak alalım. Bu takdirde

$d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$ olup $q_1 = 1$ ve $q_2 = 6$ seçersek

$$Sat(4, 10, 23) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, \rightarrow ...\} = \langle 4, 10, 23, 25 \rangle$$

olarak buluruz.

Yardımcı Teorem 4.1.1.13 S bir saturated sayısal yarıgrup ve $x \in S \setminus \{0\}$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktirler:

(1) $\overline{S} = S \setminus \{x\}$ bir saturated sayısal yarıgruptur.

(2) Her $x' \in S$ ve $x' < x$ için $d_S(x) \neq d_S(x')$ olur

(Rosales ve ark., 2004).

Yardımcı Teorem 4.1.1.14 S bir saturated sayısal yarıgrup ve $x \in S \setminus \{0\}$ olsun. Her $x' < x$ için $d_S(x) \neq d_S(x')$ ise o zaman x sayısı, S nin her SAT üreteçler sistemine aittir (Rosales ve ark., 2004).

Yardımcı Teorem 4.1.1.15 S bir saturated sayısal yarıgrup olmak üzere, eğer

$$\{a_1, a_2, ..., a_r\} = \{x \in S \setminus \{0\} : d_S(x) \neq d_S(x'),\ ve\ x' < x,\ \forall x' \in S\}$$

ise o zaman $Sat(a_1, a_2, ...a_r) = S$ şeklindedir (Rosales ve ark., 2004).

Teorem 4.1.1.16 S bir saturated sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$\{a_1, a_2, ..., a_r\} = \{x \in S \setminus \{0\} : d_S(x) \neq d_S(x') \text{ her } x' \in S \text{ için } x' < x\}$$

kümesi S nin tek minimal SAT üreteçler sistemidir (Rosales ve ark., 2004).

Sonuç 4.1.1.17 $a_1 < a_2$ ve $o.b.e.b\{a_1, a_2\} = 1$ olacak şekilde a_1 ve a_2 pozitif tamsayıları verilsin. O zaman $u = \max\{t \in \mathbb{N} : a_1 + ta_1 < a_2\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Sat(a_1, a_2) &= \langle a_1, a_2, a_2 + 1, a_2 + 2, \rightarrow ...\rangle \\ &= \{0, a_1, a_1 + a_1, ..., a_1 + ua_1, n_2, n_2 + 1 \rightarrow ....\} \end{aligned}$$

şeklindedir (Rosales ve ark., 2004).

4.1.2 Katlılığı 9 dan Küçük Olan Saturated Sayısal Yarıgruplar

Bu kesimde, katlılığı 9 dan küçük ve ileticisi belli bir K pozitif tamsayısı olan tüm saturated sayısal yarıgrupları belirleyeceğiz. Katlılığı 8 den küçük olan *Arf* sayısal yarıgrupları Garcia-Sanchez ve ark. 2017'de, katlılığı 8 olan *Arf* sayısal yarıgrupları da Süer ve arkadaşları tarafından 2018'de belirlenmiş ve parametrize edilmişti. Her saturated sayısal yarıgrup *Arf* olduğundan, saturated sayısal yarıgrupları belirlerken Garcia-Sanchez ve ark., 2017, ve Süer ve ark., 2018'deki *Arf* sayısal yarıgrupları ile ilgili sonuçlardan yararlanacağız.

Teorem 4.1.2.1 Her K pozitif tamsayısı için $S = \{0, K, \rightarrow\}$ bir saturated sayısal yarıgruptur (Bu tür sayısal yarıgruplara *yarıdoğru* denir).

İspat: Her $x \in S \setminus \{0\}$ için $d_S(x) = 1$ ve böylece $x + d_S(x) = x + 1 \in S$ olduğundan, Teorem 4.1.1.6'ya göre S sayısal yarıgrubu saturateddir.

Yardımcı Teorem 4.1.2.2 m, q ve K pozitif tamsayılar, $m > 1$ ve $(q-1)m < K \leq qm$ olmak üzere

$$S = \{0, m, 2m, ..., (q-1)m, K, \rightarrow\}$$

bir saturated sayısal yarıgruptur.

İspat: S nin sayısal yarıgrup olduğu açıktır. Bu durumda $x \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_S(x) = 1$ ve $x + d_S(x) = x + 1 \in S$,

eğer $x = K$ ise $d_S(K) = 1$ olacağından $K + d_S(K) \in S$,

eğer $x < K$ ise $d_S(x) = m$

olur. Bu durumda $x + d_s(x) = x + m$ sayısı, m nin bir katı ve dolayısıyla S nin elemanı olur. Böylece, Teorem 4.1.1.6 ya göre S saturated bir sayısal yarıgrup çıkar.

1 katlılıklı tek sayısal yarıgrup olan $\mathbb{N}$ nin, saturated olduğu Teorem 4.1.2.1 den kolaylıkla görülür.

Katlılığı 2 olan her sayısal yarıgrup,

$$S = \{0, 2, 4, ..., 2q, \rightarrow\}$$

biçiminde olduğundan, Yardımcı Teorem 4.1.2.2 ye göre S saturated bir sayısal yarıgruptur.

Teorem 4.1.2.3 Katlılığı 3 veya 4 olan her Arf sayısal yarıgrubu saturateddir.

İspat: S, katlılığı 3 ve ileticisi K olan bir Arf sayısal yarıgrubu olsun. O zaman,

Teorem 3.3.53 e göre, S sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

i. $K \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ise $S = \{0, 3, 6, ..., K-3, K, \rightarrow\}$

ii. $K \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ ise $S = \{0, 3, 6, ..., K-2, K, \rightarrow\}$.

Yardımcı Teorem 4.1.2.2 ye göre her iki durumda da S saturateddir.

Şimdi de katlılığı 4 ve ileticisi K olan bir S Arf sayısal yarıgrubunu alalım. Bu durumda, Teorem 3.3.54'e göre S aşağıdakilerden biridir:

(1) $K \equiv 0(\bmod 4)$ için $1 \leq t \leq \frac{K}{4}$ olmak üzere

$$S =< 4, 4t+2, K+1, K+3 >$$

(2) $K \equiv 2(\bmod 4)$ için $1 \leq t \leq \frac{K-2}{4}$ olmak üzere,

$$S =< 4, 4t+2, K+1, K+3 >$$

(3) $K \equiv 3(\bmod 4)$ için

$$S =< 4, K, K+2, K+3 >$$

biçimindedir.

Böylece, $K \equiv 0(\bmod 4)$ için Teorem 3.3.54'e göre, $1 \leq t \leq \frac{K}{4}$ olmak üzere

$$S =< 4, 4t+2, K+1, K+3 >= \{0, 4, ..., 4t, 4t+2, 4t+4, ..., K-2, K, \rightarrow\}$$

olur. O zaman $x \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_S(x) = 1$ ve $x + d_S(x) = x+1 \in S$,

eğer $4t+2 \leq x \leq K$ ise $d_S(x) = 2$ ve $x + d_S(x) = x+2 \in S$,

eğer $x \leq 4t$ ise $d_S(x) = 4$ ve $x + d_S(x) = x+4 \in S$

elde edilir.

Bu durumda, Teorem 4.1.1.6'ya göre S sayısal yarıgrubu saturateddir.

$K \equiv 2(\bmod 4)$ ve $1 \leq t \leq \frac{K-2}{4}$ olacak şekildeki t tamsayısı için

$$\begin{aligned} S &=< 4, 4t+2, K+1, K+3 > \\ &= \{0, 4, 8, 12, ..., 4t, 4t+2, 4t+4, 4t+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow ...\} \end{aligned}$$

sayısal yarıgrubunda yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa S sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Son olarak, $K \equiv 3(\bmod 4)$ için

$$S =< 4, K, K+2, K+3 >= \{0, 4, 8, ..., K-3, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılabildiğinden S sayısal yarıgrubu Yardımcı Teorem 4.1.2.2 ye göre saturated olur.

Not 4.1.2.4 Katlılığı m ve ileticisi K olan saturated sayısal yarıgruplarının sayısını, $n_{SAT}(K,m)$ ile gösteririz.

Sonuç 4.1.2.5 $K > 3$ ve $K \not\equiv 1(\bmod 3)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K,3) = n_A(K,3) = 1$$

şeklindedir. Ayrıca $K > 4$ ve $K \not\equiv 1(\bmod 4)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K,4) = n_A(K,4) = \begin{cases} \dfrac{K}{4} & ; \quad K \equiv 0(\bmod 4) \\ \dfrac{K-2}{4} & ; \quad K \equiv 2(\bmod 4) \\ 1 & ; \quad K \equiv 3(\bmod 4) \end{cases}$$

biçimindedir.

Teorem 4.1.2.6 $K > 5$ ve $K \not\equiv 1(\bmod 5)$ olmak üzere S, katlılığı 5 ve ileticisi K olan bir saturated sayısal yarıgrubu olsun. Bu takdirde,

i. $K \equiv 0(\bmod 5)$ ise $S =< 5, K+1, K+2, K+3, K+4 >$,

ii. $K \equiv 2(\bmod 5)$ ise $S =< 5, K, K+1, K+2, K+4 >$,

iii. $K \equiv 3(\bmod 5)$ ise $S =< 5, K, K+1, K+3, K+4 >$,

iv. $K \equiv 4(\bmod 5)$ ise $S =< 5, K, K+2, K+3, K+4 >$

şeklinde olur.

İspat: $K \equiv k(\bmod 5)$, $1 < k \leq 5$ olsun. Teoremde verilen sayısal yarıgruplarının her biri, $S = \{0, 5, ..., K-k, K, \rightarrow\}$ biçimindedir ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'ye göre saturateddir. Katlılığı 5 ve ileticisi K olup bu teoremde söylenmeyen *Arf* sayısal yarıgruplarından biri S olsun. O zaman Teorem 3.3.56'ya göre bu sayısal yarıgrup ya

$$K \equiv 0 (\bmod 5) \text{ için } S =< 5, K-2, K+1, K+2, K+4 >$$

ya da

$$K \equiv 4 (\bmod 5) \text{ için } S =< 5, K-2, K, K+2, K+4 >$$

biçimindedir. Her iki durumda da,

$$d_S(K-2) = obeb(5, K-2) = 1$$

ve

$$(K-2) + d_S(K-2) = (K-2) + 1 = K - 1 \notin S$$

olduğundan S saturated değildir.

Sonuç 4.1.2.7 $K > 5$ ve $K \not\equiv 1 (\bmod 5)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K, 5) = 1$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2.8 $K > 6$ ve $K \not\equiv 1 (\bmod 6)$ olmak üzere, Katlılığı 6 ve ileticisi K olan her Arf sayısal yarugrubu saturated sayısal yarıgruptur.

İspat: $K > 6$ ve $K \equiv 0 (\bmod 6)$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.3.58'e göre, katlılığı 6 ve ileticisi K olan Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 =< 6, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5 >,$$

$1 \leq a \leq \dfrac{K-6}{6}$ olacak şekilde a tamsayısı için

$$S_2 =< 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 >,$$

$$S_3 =< 6, 6a+3, K+1, \mathrm{K}+2, K+4, K+5 >,$$

$$S_4 =< 6, 6a+4, 6a+8, K+1, K+3, K+5 > .$$

Burada $S_1 = \{0, 6, ..., K-6, K, \rightarrow\}$ şeklinde yazılır ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'ye göre S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

S_2 sayısal yarıgrubu,

$$S_2 = \{0, 6, ..., 6a, 6a+2, 6a+4, 6a+6, ..., K-4, \mathrm{K}-2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır. O zaman $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $6a+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_2}(x) = 2$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+2 \in S_2$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_2}(x) = 6$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+6 \in S_2$

bulunur. Dolayısıyla, Teorem 4.1.1.6'ya göre S_2 sayısal yarıgrubu saturateddir.

S_3 sayısal yarıgrubu aşağıdaki gibi yazılır:

$$S_3 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+3, 6a+6, ..., K-6, K-3, K, \rightarrow\}.$$

Bu durumda, $x \in S_3 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_3}(x) = 1$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+1 \in S_3$,

eğer $6a+3 \leq x \leq K$ ise $d_{S_3}(x) = 3$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+3 \in S_3$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_3}(x) = 6$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+6 \in S_3$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 4.1.1.6'ya göre S_3 saturateddir.

Son olarak, S_4 sayısal yarıgrubu aşağıdaki gibi yazılır:

$$S_4 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+4, 6a+6, 6a+8, 6a+10, 6a+12, ..., K-6, K-2, K, \rightarrow\}.$$

Böylece, $x \in S_4 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_4}(x) = 1$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+1 \in S_4$,

eğer $6a+4 \leq x \leq K$ ise $d_{S_4}(x) = 2$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+2 \in S_4$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_4}(x) = 6$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+6 \in S_4$

bulunur. Dolayısıyla, Teorem 4.1.1.6'ya göre S_4 sayısal yarugrubu saturateddir.

$K \equiv 2(\text{mod}\, 6)$ olsun. Teorem 3.3.58'e göre, katlılığı 6 ve ileticisi K olan Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \leq a \leq \dfrac{K-2}{6} - 1$ ve $1 \leq b \leq \dfrac{K-2}{6}$ olacak şekildeki a ve b tamsayıları için,

$$S_1 = < 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 >,$$

$$S_2 = < 6, 6b+3, K, K+2, K+3, K+5 >,$$

$$S_3 = < 6, 6b+4, 6b+8, K+1, K+3, K+5 >$$

olur. Bu durumda, $S_1 = < 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 >$ sayısal yarıgrubunu,

$$S_1 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+2, 6a+4, 6a+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazarız. O zaman $x \in S_1 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_1}(x) = 1$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+1 \in S_1$,

eğer $6a+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_1}(x) = 2$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+2 \in S_1$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_1}(x) = 6$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+6 \in S_1$

elde edilir. Dolayısıyla, S_1 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6'ya göre saturateddir.

Bununla birlikte, $S_2 = < 6, 6b+3, K, K+2, K+3, K+5 >$ sayısal yarıgrubunu,

$$S_2 = \{0, 6, 12, ..., 6b, 6b+3, 6b+6, ..., K-5, K-2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazarız. O zaman, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x \geq K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $6b+3 \leq x < K$ ise $d_{S_2}(x) = 3$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+3 \in S_2$,

eğer $x \leq 6b$ ise $d_{S_2}(x) = 6$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+6 \in S_2$

bulunur. Dolayısıyla, S_2 sayısal yarıgrubu saturateddir.

Son olarak, $S_3 =< 6, 6b+4, 6b+8, K+1, K+3, K+5 >$ sayısal yarıgrubunu,

$$S_3 = \{0, 6, 12, ..., 6b, 6b+4, 6b+6, 6b+8..., K-6, K-2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazarız. O zaman $x \in S_3 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_3}(x) = 1$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+1 \in S_3$,

eğer $6b+4 \leq x \leq K$ ise $d_{S_3}(x) = 2$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+2 \in S_3$,

eğer $x \leq 6b$ ise $d_{S_3}(x) = 6$ ve $x + d_{S_3}(x) = x+6 \in S_3$

olur. Dolayısıyla, S_3 sayısal yarıgrubu saturateddir.

$K \equiv 3(\text{mod}\, 6)$ olsun. O zaman Teorem 3.3.58'e göre, katlılığı 6 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu, $1 \leq b \leq \dfrac{K-3}{6}$ olacak şekildeki b tamsayısı için

$$S =< 6, 6b+3, K+1, \mathrm{K}+2, K+4, K+5 >$$

şeklindedir. O zaman, S sayısal yarıgrubunu

$$S = \{0, 6, 12, ..., 6b, 6b+3, 6b+6, 6b+9, ..., K-6, K-3, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazarız. Bu durumda $x \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_S(x) = 1$ ve $x + d_S(x) = x+1 \in S$,

eğer $6b+3 \leq x \leq K$ ise $d_S(x) = 3$ ve $x + d_S(x) = x+3 \in S$,

eğer $x \leq 6b$ ise $d_S(x) = 6$ ve $x + d_S(x) = x+6 \in S$

elde edilir. Dolayısıyla, S sayısal yarıgrubu saturateddir.

$K \equiv 4(\text{mod}\, 6)$ olsun. O zaman Teorem 3.3.58'e göre, katlılığı 6 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \leq a \leq \dfrac{K-4}{6}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 =< 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 >,$$

$$S_2 =< 6, 6a+4, 6a+8, \mathrm{K}+1, K+3, K+5 >$$

olur. Bu durumda, $S_1 =< 6, 6a+2, 6a+4, K+1, K+3, K+5 >$ sayısal yarıgrubunu,

$$S_1 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+2, 6a+4, 6a+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazarız. O zaman, $x \in S_1 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_1}(x) = 1$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+1 \in S_1$,

eğer $6a+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_1}(x) = 2$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+2 \in S_1$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_1}(x) = 6$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+6 \in S_1$

bulunur. Dolayısıyla, S_1 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6'ya göre saturateddir.

Ayrıca, $S_2 =< 6, 6a+4, 6a+8, K+1, K+3, K+5 >$ sayısal yarıgrubunu

$$S_2 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+4, 6a+6, 6a+8, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazarız. O zaman, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $6a+4 \leq x \leq K$ ise $d_{S_2}(x) = 2$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+2 \in S_2$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_2}(x) = 6$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+6 \in S_2$

elde edilir. Dolayısıyla, S_2 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6'ya göre saturateddir.

Son olarak, $K \equiv 5 (\bmod 6)$ alalım. O zaman Teorem 3.3.58'e göre, katlılığı 6 ve iletici K olan *Arf* sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir: $1 \leq a \leq \frac{K-5}{6}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 =< 6, K, K+2, K+3, K+4, K+5 >,$$

$$S_2 =< 6, 6a+3, K, K+2, K+3, K+5 >.$$

olur.

Bu durumda,

$$S_1 =< 6, K, K+2, K+3, K+4, K+5 >= \{0, 6, 12, ..., K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Öte yandan,

$$S_2 =< 6, 6a+3, K, K+2, K+3, K+5 >$$

sayısal yarıgrubunu,

$$S_2 = \{0, 6, 12, ..., 6a, 6a+3, 6a+6, 6a+9, ..., K-5, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazarız. O zaman, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x \geq K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $6a+3 \leq x < K$ ise $d_{S_2}(x) = 3$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+3 \in S_2$,

eğer $x \leq 6a$ ise $d_{S_2}(x) = 6$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+6 \in S_2$

elde edilir. Dolayısıyla, S_2 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6'ya göre saturateddir.

Sonuç 4.1.2.9 $K > 6$ ve $K \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K,6) = n_A(K,6) = \begin{cases} \frac{K}{2} - 2 & ; \ eğer\ K \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 6) \\ \frac{K-2}{2} - 2 & ; \ eğer\ K \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 6) \\ \frac{K-3}{6} & ; \ eğer\ K \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 6) \\ \frac{K-4}{3} & ; \ eğer\ K \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 6) \\ \frac{K+1}{6} & ; \ eğer\ K \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6) \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2.10 $K > 7$ ve $K \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 7)$ olmak üzere S, katlılığı 7 ve ileticisi K olan bir saturated sayısal yarıgrup olsun. O zaman,

i. $K \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 >$

ii. $K \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 >$

iii. $K \equiv 3(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 >$

iv. $K \equiv 4(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6 >$

v. $K \equiv 5(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K, K+1, K+3, K+4, K+5, K+6 >$

vi. $K \equiv 6(\mathrm{mod}\, 7)$ ise $S = < 7, K, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 >$

şeklindedir.

İspat: i. $K \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)$ olmak üzere katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrupları Teorem 3.3.60'a göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 7, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 >,$$

$$S_2 = < 7, K-2, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 >,$$

$$S_3 = < 7, K-3, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 >.$$

Bu durumda,

$$S_1 = < 7, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6 > = \{0, 7, 14, \ldots K, \rightarrow\}$$

yazılır ki Yardımcı Teorem 4.1.2.2 den S_1 sayısal yarıgrubu saturateddir.

$$S_2 = < 7, K-2, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 >$$

sayısal yarıgrubunda

$$d_{S_2}(K-2) = obeb(7, K-2) = 1$$

ve dolayısıyla,

$$(K-2) + d_{S_2}(K-2) = K-1 \notin S_2$$

olarak bulunur. Bu durumda S_2 sayısal yarıgrubu saturated değildir.

Son olarak,

$$S_3 = < 7, K-3, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 >$$

sayısal yarıgrubunda,

$$d_{S_3}(K-3) = obeb(7, K-3) = 1$$

ve

$$(K-3) + d_{S_3}(K-3) = K-2 \notin S_3$$

olur, bu durumda S_3 sayısal yarıgrubu saturated değildir.

ii. $K \equiv 2 (\bmod 7)$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrupları Teorem 3.3.60'a göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 7, K, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6 >,$$

$$S_2 = < 7, K-4, K, K+1, K+2, K+4, K+6 >.$$

Bu durumda, S_1 sayısal yarıgrubu

$$S_1 = \{0, 7, 14, ..., K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde olur ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 saturated çıkar.

Öte yandan,

$$S_2 = < 7, K-4, K, K+1, K+2, K+4, K+6 >$$

sayısal yarıgrbunda,

$$d_{S_2}(K-4) = obeb(7, K-4) = 1$$

ve

$$(K-4) + d_{S_2}(K-4) = K-3 \notin S_2$$

elde edilir ve dolayısıyla S_2 saturated sayısal yarıgrup olmaz.

iii. $K \equiv 3 (\bmod 7)$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.60'a göre,

$$S = < 7, K, K+1, K+2, K+3, K+5, K+6 >$$

şeklindedir. Bu sayısal yarıgrup,

$$S = \{0, 7, 14, ..., K-3, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır. Böylece Yardımcı Teorem 4.1.2.2 'ye göre S sayısal yarıgrubu saturated olur.

iv. $K \equiv 4(\bmod 7)$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrupları Teorem 3.3.60'a göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 7, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6 >,$$

$$S_2 = < 7, K-2, K, K+1, K+2, K+4, K+6 >.$$

Bu takdirde S_1 sayısal yarıgrubu,

$$S_1 = \{0, 7, 14, ..., K-4, K, \rightarrow\}$$

şeklinde olur ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 saturated sayısal yarıgruptur.

Diğer taraftan, $S_2 = < 7, K-2, K, K+1, K+2, K+4, K+6 >$ *Arf* sayısal yarıgrubunda,

$$d_{S_2}(K-2) = obeb(7, K-2) = 1$$

ve

$$(K-2) + d_{S_2}(K-2) = K-1 \notin S_2$$

buluruz ki bu durumda S_2 saturated sayısal yarıgrup olmaz.

v. $K \equiv 5(\bmod 7)$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrupları Teorem 3.3.60'a göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 7, K, K+1, K+3, K+4, K+5, K+6 >,$$

$$S_2 = < 7, K-2, K, K+1, K+3, K+4, K+6 >.$$

O zaman S_1 sayısal yarıgrubu, $S_1 = \{0, 7, 14, ..., K-5, K, \rightarrow\}$

biçiminde olur ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 sayısal yarıgrubu saturateddir.

Ama S_2 sayısal yarıgrubunda

$$d_{S_2}(K-2)=obeb(7,K-2)=1$$

ve

$$(K-2)+d_{S_2}(K-2)=K-1\notin S_2$$

yazarız ki bu durumda S_2 sayısal yarıgrubu saturated olmaz.

vi. $K\equiv 6(\bmod 7)$ olmak üzere, katlılığı 7 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrupları Teorem 3.3.60'a göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1=<7,K,K+2,K+3,K+4,K+5,K+6>,$$

$$S_2=<7,K-2,K,K+2,K+3,K+4,K+6>,$$

$$S_3=<7,K-3,K,K+2,K+3,K+5,K+6>,$$

$$S_4=<7,K-4,K-2,K,K+2,K+4,K+6>.$$

Bu durumda, S_1 sayısal yarıgrubu,

$$S_1=\{0,7,14,...,K-6,K,\rightarrow\}$$

şeklinde yazılır ki Yardımcı Teorem 4.1.2.2'e göre S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Ancak S_2, S_3 ve S_4 *Arf* sayısal yarıgruplarında sırasıyla,

$$d_{S_2}(K-2)=obeb(7,K-2)=1 \text{ ve } (K-2)+d_{S_2}(K-2)=K-1\notin S_2,$$

$$d_{S_3}(K-3)=obeb(7,K-3)=1 \text{ ve } (K-3)+d_{S_3}(K-3)=K-2\notin S_3,$$

$$d_{S_4}(K-4)=obeb(7,K-4)=1 \text{ ve } (K-4)+d_{S_4}(K-4)=K-3\notin S_4$$

olduğundan bu sayısal yarıgruplar saturated değildirler.

Sonuç 4.1.2.11 $K>7$ ve $K\not\equiv 1(\bmod 7)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K,7)=1$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2.12 $K > 8$ ve $K \not\equiv 1(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi $K \equiv 0(\bmod 8)$ olan bir saturated sayısal yarıgrup aşağıdakilerden biridir;

$$S_1 = < 8, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6, K+7 >,$$

$1 \le a \le \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \le a \le \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_5 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >.$$

İspat: $K > 8$ ve $K \equiv 0(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.62'ye göre aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 8, K+1, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6, K+7 >,$$

$1 \le a \le \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \le a \le \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$1 \leq a < b \leq \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_5 =< 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >,$$

$$S_6 =< 8, K-3, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 >,$$

$$S_7 =< 8, K-5, K-2, K+1, K+2, K+4, \mathrm{K}+5, K+7 >.$$

Bu durumda, S_1 sayısal yarıgrubu

$$S_1 = \{0, 7, 14, ..., K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 saturated olur.

Öte yandan $1 \leq a \leq \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 =< 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+2, 8a+4, 8a+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $8a+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_2}(x) = 2$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+2 \in S_2$,

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_2}(x) = 8$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+8 \in S_2$

elde edilir. Böylece S_2 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6'dan saturated olur.

Ayrıca $1 \leq a < b \leq \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 =< 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, ..., 8b-4, 8b-2, 8b, 8b+2, ..., K-6, K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır. O zaman, $x \in S_3 \setminus \{0\}$ olmak üzere, eğer $x > K$ ise $d_{S_3}(x) = 1$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 1 \in S_3$,

eğer $8b - 2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_3}(x) = 2$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 2 \in S_3$,

eğer $8a + 4 \leq x \leq 8b - 4$ ise $d_{S_3}(x) = 4$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 4 \in S_3$,

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_3}(x) = 8$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 8 \in S_3$

bulunur. Böylece S_3 sayısal yarıgrubu Teorem 4.1.1.6 'ya göre saturated olur.

Diğer taraftan $1 \leq a \leq \dfrac{K-8}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = < 8, 8a + 6, 8a + 10, 8a + 12, K + 1, K + 3, K + 5, K + 7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a + 6, 8a + 8, 8a + 10, 8a + 12, ..., K - 4, K - 2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_4 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_4}(x) = 1$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 1 \in S_4$,

eğer $8a + 6 \leq x \leq K$ ise $d_{S_4}(x) = 2$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 2 \in S_4$,

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_4}(x) = 8$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 8 \in S_4$

olur. Böylece Teorem 4.1.1.6'ya göre S_4 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Şimdi $1 \leq a < b \leq \dfrac{K}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_5 = < 8, 8a + 4, 8b + 2, 8b + 6, K + 1, K + 3, K + 5, K + 7 >$$

sayısal yarıgrubunda, eğer $8b + 2 > K$ ise

$$S_5 = \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a + 4, 8a + 8, ..., K - 4, K\}$$

eğer $8b + 2 < K$ ise

$$S_5 = \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a + 4, ..., 8b - 4, 8b, 8b + 2, 8b + 4, ..., K - 4, K - 2, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır.

Bu durumda,

eğer $x > K$ ise $d_{S_5}(x) = 1$ ve $x + d_{S_5}(x) = x+1 \in S_5$;

eğer $8a+4 \le x \le K$ ise $d_{S_5}(x) = 4$ ve $x + d_{S_5}(x) = x+4 \in S_5$;

eğer $8b+2 \le x \le K$ ise $d_{S_5}(x) = 2$ ve $x + d_{S_5}(x) = x+2 \in S_5$;

eğer $8a+4 \le x \le 8b$ ise $d_{S_5}(x) = 4$ ve $x + d_{S_5}(x) = x+4 \in S_5$;

bulunur ve $x \le 8a$ ise $d_{S_5}(x) = 8$ ve $x + d_{S_5}(x) = x+8 \in S_5$ olur. Böylece Teorem 4.1.1.6'ya göre S_5 sayısal yarıgrubunun saturated olduğu görülür.

Son olarak, S_6 ve S_7 *Arf* sayısal yarıgruplarında sıra ile

$$d_{S_6}(K-3) = obeb(8, K-3) = 1 \text{ ve } (K-3) + d_{S_6}(K-3) = K-2 \notin S_6$$

$$d_{S_7}(K-5) = obeb(8, K-5) = 1 \text{ olup } (K-5) + d_{S_7}(K-5) = K-4 \notin S_7$$

elde edildiğinden S_6 ve S_7 saturated değildirler.

Teorem 4.1.2.13 $K > 10$ ve $K \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan saturated sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir:

$1 \le a \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a \le \dfrac{K-10}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$S_4 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >.$$

İspat: $K > 10$ ve $K \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.63'ye göre aşağıdakilerden biridir:

$1 \le a \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 =< 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a \le \dfrac{K-10}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 =< 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 =< 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$S_4 =< 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$S_5 =< 8, K-5, K, K+1, \mathrm{K}+2, K+4, K+5, K+7 > .$$

Bu takdirde, $1 \le a \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 =< 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+2, 8a+4, 8a+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_1 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_1}(x) = 1$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+1 \in S_1$,

eğer $8a+2 \le x \le K$ ise $d_{S_1}(x) = 2$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+2 \in S_1$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_1}(x) = 8$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+8 \in S_1$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1.6’ya göre S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Öte yandan, $1 \le a \le \dfrac{K-10}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 =< 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+6, 8a+8, 8a+10, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$, eğer $8a+6 \le x \le K$ ise $d_{S_2}(x)=2$ ve $x+d_{S_2}(x)=x+2 \in S_2$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_2}(x)=8$ ve $x+d_{S_2}(x)=x+8 \in S_2$

yazılır. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_2 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Ayrıca, $1 \le a < b \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = <8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7>$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, ..., 8b-4, 8b-2, 8b, 8b+2, 8b+4, K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $x \in S_3 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_3}(x)=1$ ve $x+d_{S_3}(x)=x+1 \in S_3$,

eğer $8b-2 \le x \le K$ ise $d_{S_3}(x)=2$ ve $x+d_{S_3}(x)=x+2 \in S_3$,

eğer $8a+4 \le x \le 8b-4$ ise $d_{S_3}(x)=4$ ve $x+d_{S_3}(x)=x+4 \in S_3$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_3}(x)=8$ ve $x+d_{S_3}(x)=x+8 \in S_3$

elde edilir. Dolaysıyla Teorem 4.1.1.6'dan S_3 sayısal yarıgrubu saturated olur.

$1 \le a < b \le \dfrac{K-2}{8}$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = <8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7>$$

$$= 0, 8, ..., 8a, 8a+4, ..., 8b-4, 8b, 8b+2, 8b+4, 8b+6, ..., K-6, K-4, K-2, K, \rightarrow$$

yazılır. Bu durumda, $x \in S_4 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_4}(x)=1$ ve $x+d_{S_4}(x)=x+1 \in S_4$,

eğer $8b+2 \le x \le K$ ise $d_{S_4}(x)=2$ ve $x+d_{S_4}(x)=x+2 \in S_4$,

eğer $8a+4 \le x \le 8b$ ise $d_{S_4}(x)=4$ ve $x+d_{S_4}(x)=x+4 \in S_4$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_4}(x)=8$ ve $x+d_{S_4}(x)=x+8 \in S_4$

elde edilir. Dolaysıyla Teorem 4.1.1.6'dan S_3 sayısal yarıgrubu saturated olur.

S_5 sayısal yarıgrubu saturated değildir. Çünkü

$$d_{S_5}(\mathrm{K}-5) = obeb(8, K-5) = 1 \text{ ve } (K-5) + d_{S_5}(K-5) = K-4 \notin S_5 .$$

Teorem 4.1.2.14 $K > 11$ ve $K \equiv 3(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgruplarının hepsi saturateddir.

İspat: $K > 11$ ve $K \equiv 3(\bmod 8)$ olmak üzere,Teorem 3.3.64'te verilen *Arf* yarıgrupları,

$$S_1 = < 8, K, K+1, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 >$$

$1 \le a \le \dfrac{K-11}{8}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, K, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 >$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$S_1 = \{0, 8, 16, ..., K-5, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır ve Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Ayrıca $1 \le a \le \dfrac{K-11}{8}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, K, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, 8a+12, ..., K-7, K-3, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ için,

eğer $x \ge K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $8a+4 \le x < K$ ise $d_{S_2}(x) = 4$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+4 \in S_2$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_2}(x) = 8$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+8 \in S_2$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_2 sayısal yarıgrubu saturateddir.

Teorem 4.1.2.15 $K > 12$ ve $K \equiv 4(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgruplarının hepsi saturateddir.

İspat: $K>12$ ve $K\equiv 4(\bmod 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.65'deki gibi aşağıdakilerden biridir:

$1\leq a\leq \dfrac{K-4}{8}$ olacak şekilde $a\in\mathbb{Z}$ için

$$S_1=<8,8a+2,8a+4,8a+6,K+1,K+3,K+5,K+7>$$

$1\leq a<b\leq \dfrac{K+4}{8}$ olacak şekildeki $a,b\in\mathbb{Z}$ için

$$S_2=<8,8a+4,8b-2,8b+2,K+1,K+3,K+5,K+7>$$

$1\leq a\leq \dfrac{K-12}{8}$ olacak şekilde $a\in\mathbb{Z}$ için

$$S_3=<8,8a+6,8a+10,8a+12,K+1,K+3,K+5,K+7>$$

$1\leq a<b\leq \dfrac{K-4}{8}$ olacak şekildeki $a,b\in\mathbb{Z}$ için

$$S_4=<8,8a+4,8b+2,8b+6,K+1,K+3,K+5,K+7>.$$

Bu durumda, $1\leq a\leq \dfrac{K-4}{8}$ olacak şekildeki $a\in\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}S_1&=<8,8a+2,8a+4,8a+6,K+1,K+3,K+5,K+7>\\&=\{0,8,16,...,8a,8a+2,8a+4,8a+6,...,K-4,K-2,K,\rightarrow\}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x\in S_1\setminus\{0\}$ olmak üzere

eğer $x>K$ ise $d_{S_1}(x)=1$ ve $x+d_{S_1}(x)=x+1\in S_1$,

eğer $8a+2\leq x\leq K$ ise $d_{S_1}(x)=2$ ve $x+d_{S_1}(x)=x+2\in S_1$,

eğer $x\leq 8a$ ise $d_{S_1}(x)=8$ ve $x+d_{S_1}(x)=x+8\in S_1$

yazılır. Dolayısıyla Teorem 4.1.1.6'dan S_1 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Öte yandan, $1 \leq a < b \leq \dfrac{K+4}{8}$ olacak şekildeki $a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, ..., 8b-4, 8b-2, 8b, 8b+2, 8b+4, K, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+1 \in S_2$,

eğer $8b-2 \leq K$ ve $8b-2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_2}(x) = 2$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+2 \in S_2$,

eğer $8a+4 \leq x \leq 8b-4$ ise $d_{S_2}(x) = 4$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+4 \in S_2$,

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_2}(x) = 8$ ve $x + d_{S_2}(x) = x+8 \in S_2$

olur. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_2 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Öte yandan $1 \leq a \leq \dfrac{K-12}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, 8a+10, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman $x \in S_3 \setminus \{0\}$ olmak üzere, x in yukarıdaki seçimine benzer işlemler yapılırsa S_3 sayısal yarıgrubunun saturated olduğu kolayca görülür.

Son olarak,

$$S_4 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

Arf sayısal yarıgrubu,

$$S_4 = \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, ..., 8b-4, 8b, 8b+2, 8b+4, 8b+6, ..., K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_4 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x > K$ ise $d_{S_4}(x) = 1$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+1 \in S_4$,

eğer $8b+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_4}(x) = 2$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+2 \in S_4$,

eğer $8a+4 \leq x \leq 8b$ ise $d_{S_4}(x) = 4$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+4 \in S_4$

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_4}(x) = 8$ ve $x + d_{S_4}(x) = x+8 \in S_4$

yazılır. Dolayısıyla Teorem 4.1.1.6'dan S_4 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Teorem 4.1.2.16 $K > 13$ ve $K \equiv 5(\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan bir ve yalnız bir saturated yarıgrup vardır ve

$$S = < 8, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6, K+7 >$$

şeklindedir.

İspat: $K > 13$ ve $K \equiv 5(\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.66'daki gibi aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 8, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+6, K+7 >$$

$$S_2 = < 8, K-2, K, K+1, K+2, K+4, K+5, K+7 > .$$

Bu durumda S_1 sayısal yarıgrubu,

$$S_1 = \{0, 8, 16, ..., K-3, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılırki Yardımcı Teorem 4.1.2.2'den S_1 sayısal yarıgrubu saturated olur.

Ancak S_2 sayısal yarıgrubunda,

$$d_{S_2}(K-2) = obeb(8, K-2) = 1 \text{ ve } (K-2) + d_{S_2}(K-2) = K-1 \notin S_2$$

olduğundan S_2 sayısal yarıgrubu saturated değildir.

Teorem 4.1.2.17 $K > 14$ ve $K \equiv 6(\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan saturated sayısal yarıgrup aşağıdakilerden biridir:

$1 \le a \le \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \le a < b \le \dfrac{K+2}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \leq a \leq \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 > .$$

İspat: $K > 14$ ve $K \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan *Arf* sayısal yarıgrubu Teorem 3.3.67 deki gibi aşağıdakilerden biridir:

$1 \leq a \leq \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_1 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \leq a < b \leq \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$1 \leq a < b \leq \dfrac{K+2}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

veya

$1 \leq a \leq \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_4 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$

$$S_5 = < 8, K-3, K, K+1, K+3, K+4, K+6, K+7 > .$$

Bu durumda,

$$S_1 = < 8, 8a+2, 8a+4, 8a+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$$
$$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+2, 8a+4, 8a+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. O zaman $x \in S_1 \setminus \{0\}$ için,

eğer $x > K$ ise $d_{S_1}(x) = 1$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+1 \in S_1$,

eğer $8a+2 \leq x \leq K$ ise $d_{S_1}(x) = 2$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+2 \in S_1$,

eğer $x \leq 8a$ ise $d_{S_1}(x) = 8$ ve $x + d_{S_1}(x) = x+8 \in S_1$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.1.1.6’dan S_1 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Öte yandan, $1 \le a < b \le \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$S_2 = < 8, 8a+4, 8b+2, 8b+6, K+1, K+3, K+5, K+7 >$

$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, ..., 8b-4, 8b, 8b+2, 8b+4, 8b+6, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$

biçiminde yazılır. Bu durumda $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere,

eğer $x > K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 1 \in S_2$,

eğer $8b+2 \le x \le K$ ise $d_{S_2}(x) = 2$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 2 \in S_2$,

eğer $8a+4 \le x \le 8b$ ise $d_{S_2}(x) = 4$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 4 \in S_2$

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_2}(x) = 8$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 8 \in S_2$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_2 saturated sayısal yarıgrup olur.

Ayrıca $1 \le a < b \le \dfrac{K+2}{8}$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$S_3 = < 8, 8a+4, 8b-2, 8b+2, K+1, K+3, K+5, K+7 >$

$= \{0, 8, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, ..., 8b-4, 8b-2, 8b, 8b+2, 8b+4, ..., K, \rightarrow\}$

şeklinde yazılır. O zaman, $x \in S_3 \setminus \{0\}$ için,

eğer $x > K$ ise $d_{S_3}(x) = 1$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 1 \in S_3$,

eğer $8b-2 \le x \le K$ ise $d_{S_3}(x) = 2$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 2 \in S_3$,

eğer $8a+4 \le x \le 8b$ ise $d_{S_3}(x) = 4$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 4 \in S_3$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_3}(x) = 8$ ve $x + d_{S_3}(x) = x + 8 \in S_3$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_3 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Şimdi de $1 \le a \le \dfrac{K-6}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$S_4 = < 8, 8a+6, 8a+10, 8a+12, K+1, K+3, K+5, K+7 >$

$= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+6, 8a+8, 8a+10, ..., K-4, K-2, K, \rightarrow\}$

biçiminde yazılır. Bu durumda, $x \in S_4 \setminus \{0\}$ olmak üzere, eğer $x > K$ ise $d_{S_4}(x) = 1$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 1 \in S_4$,

eğer $8a + 6 \le x \le K$ ise $d_{S_4}(x) = 2$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 2 \in S_4$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_4}(x) = 8$ ve $x + d_{S_4}(x) = x + 8 \in S_4$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 4.1.1.6'dan S_4 sayısal yarıgrubu saturated çıkar.

Ancak S_5 sayısal yarıgrubunda,

$$d_{S_5}(K-3) = obeb(8K-3) = 1 \text{ ve } (K-3) + d_{S_5}(K-3) = K-2 \notin S_5$$

olduğundan S_5 sayısal yarıgrubu saturated olmaz.

Teorem 4.1.2.18 $K > 15$ ve $K \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8)$ olmak üzere, katlılığı 8 ve ileticisi K olan saturated sayısal yarıgrup aşağıdakilerden biridir:

$$S_1 = < 8, K, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6, K+7 >$$

$1 \le a \le \dfrac{K-7}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$S_2 = < 8, 8a+4, K, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 >$$

İspat: $S_1 = < 8, K, K+2, K+3, K+4, K+5, K+6, K+7 > = \{0, 8, 16, ..., K, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu Yardımcı Teorem 4.1.2.2'ye göre saturateddir.

Ayrıca $1 \le a \le \dfrac{K-7}{8}$ olacak şekildeki $a \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} S_2 &= < 8, 8a+4, K, K+2, K+3, K+4, K+6, K+7 > \\ &= \{0, 8, 16, ..., 8a, 8a+4, 8a+8, 8a+12, ..., K-7, K-3, K, \rightarrow\} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu durumda, $x \in S_2 \setminus \{0\}$ olmak üzere

eğer $x \ge K$ ise $d_{S_2}(x) = 1$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 1 \in S_2$,

eğer $8a + 4 \le x < K$ ise $d_{S_2}(x) = 4$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 4 \in S_2$,

eğer $x \le 8a$ ise $d_{S_2}(x) = 8$ ve $x + d_{S_2}(x) = x + 8 \in S_2$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.1.6'dan S_2 saturated sayısal yarıgruptur.

Öte yandan $K \equiv 7(\bmod 8)$ olmak üzere katlılığı 8 ve ileticisi K olan ve teoremde bahsedilmeyen diğer *Arf* sayısal yarıgrubu,

$$S_3 = < 8, K-2, K, K+2, K+3, K+4, K+5, K+7 >$$

şeklindedir ama bu sayısal yarıgrup saturated değildir. Çünkü,

$$d_{S_3}(K-2) = obeb(8, K-2) = 1 \text{ ve } \quad (K-2) + d_{S_3}(K-2) = K-1 \notin S_3$$

çıkar.

Sonuç 4.1.2.19 $K > 8$ ve $K \not\equiv 1(\bmod 8)$ için, katlılığı 8 ve ileticisi K olan saturated sayısal yarıgruplarının sayısı $n_{SAT}(K,8)$ olmak üzere,

$$n_{SAT}(K,8) = \begin{cases} \dfrac{K}{8}\left(\dfrac{K}{8}+1\right)-1 & ; \text{ eğer } K \equiv 0(\bmod 8) \\ \left(\dfrac{K-2}{8}\right)^2 - \left(\dfrac{K-2}{8}\right)-1 & ; \text{ eğer } K \equiv 2(\bmod 8) \\ \dfrac{K-3}{8} & ; \text{ eğer } K \equiv 3(\bmod 8) \\ \left(\dfrac{K-4}{8}\right)\left(\dfrac{K+4}{8}\right)-1 & ; \text{ eğer } K \equiv 4(\bmod 8) \\ 1 & ; \text{ eğer } K \equiv 5(\bmod 8) \\ \left(\dfrac{K-6}{8}+1\right)^2 -1 & ; \text{ eğer } K \equiv 6(\bmod 8) \\ \dfrac{K-7}{8}+1 & ; \text{ eğer } K \equiv 7(\bmod 8) \end{cases}$$

şeklindedir**.**

Sonuç 4.1.2.20 $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ ve $m = 2,3,4,5,6,7,8$ için katlılığı m ve ileticisi $K = m.r$ olan $S_r = \langle m, mr+1, mr+2, \ldots, mr+(m-1) \rangle$ saturated sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(a) $F(S_r) = mr - 1$

(b) $n(S_r) = r$

(c) $G(S_r) = (m-1)r$.

Sonuç 4.1.2.21 $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ ve $m = 2,3,4,5,6,7,8$ için katlılığı m ve ileticisi $K = m.r$ olan $S_r = \langle m, mr+1, mr+2, ..., mr+(m-1) \rangle$ saturated sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda,

(a) $H(S_r) = \{1,2,3,...,m-1, m+1, m+2, m+3,...,2m-1,..., mr-1\}$

(b) $FH(S_r) = \{F(S_r), F(S_r)-1, F(S_r)-2,...,2,1\}$

(c) $EH(S_r) = \{F(S_r), F(S_r)-1, F(S_r)-2,..., F(S)-(m-2)\}$

eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 4.1.2.22 $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ ve $m = 2,3,4,5,6,7,8$ için katlılığı m ve ileticisi $K = m.r$ olan $S_r = \langle m, mr+1, mr+2, ..., mr+(m-1) \rangle$ saturated sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(a) Eğer $m \geq 3$ tek tamsayı ise, o zaman $\#FH(S_r) = \dfrac{(m-1)r}{2}$ olur.

(b) Eğer $m \geq 2$ çift tamsayı ise $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ olmak üzere

$$3x-1 \leq r \leq 3x+1 \text{ için } \#(FH(S_r)) = \frac{mr}{2} - x$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.2.23 $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ ve $m = 2,3,4,5,6,7,8$ için, katlılığı m ve ileticisi $K = m.r$ olan $S_r = \langle m, mr+1, mr+2, ..., mr+(m-1) \rangle$ saturated sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşitlikler vardır:

(a) $G(S_{r+1}) = G(S_r) + m - 1$

(b) Eğer $m \geq 3$ tek tamsayı ise o zaman $\#(FH(S_{r+1})) = \#(FH(S_r)) + \dfrac{m-1}{2}$ olur.

(c) Eğer $m \geq 2$ çift bir tamsayı ise o zaman $\#(FH(S_{r+1})) = \#(FH(S_r)) + \dfrac{m}{2}$ şeklindedir.

(d) $\#(EH(S_{r+1})) = \#(EH(S_r)) = m-1$ biçimindedir.

Sonuç 4.1.2.24 $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ ve $m = 2,3,4,5,6,7$; için katlılığı m ve ileticisi $K = m.r$ olan $S_r = \langle m, mr+1, mr+2, ..., mr+(m-1) \rangle$ saturated sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman,

(a) $EH(S_r) \subseteq FH(S_r) \subseteq H(S_r)$

(b) $r = 1,2$ için $EH(S_r) = FH(S_r)$

(c) $t = 1,2,...,r$ için $F(S_r) - (mt-1) \notin FH(S_r)$

ifadeleri doğrudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu doktora tez çalışmasında, katlılığı 9 dan küçük ve belli bir K ileticisine sahip olan saturated sayısal yarıgrupları üzerine çalışılmıştır. Saturated sayısal yarıgruplarının, *Arf* sayısal yarıgruplarının bir alt sınıfı olduğu bilinmektedir. Ama bunun tersi her zaman doğru olmayabilir.

Katlılığı m $(1 \leq m < 9)$ tam sayısı ve ileticisi K olan bu saturated sayısal yarıgrupları oluşturulurken $K \not\equiv 1(\operatorname{mod} m)$ olarak alınmıştır. Çünkü $K \equiv 1(\operatorname{mod} m)$ olması durumunda $r \in \mathbb{Z}^{+}$ için $K = mr + 1$ olup, $K - 1 = mr \in S$ bulunur ki buradan $F(S) = K - 1 \in S$ çelişkisi ortaya çıkar.

Bu çalışmamızda elde ettiğimiz, katlılığı m $(m > 2)$ asal sayısı olan saturated sayısal yarıgruplarının sayısı bir tane olmasına rağmen *Arf* sayısal yarıgruplarının sayısı bilinmemektedir.

Bu çalışmanın, sayısal yarıgruplarda özellikle *Arf* ve saturated sayısal yarıgruplar alanında çalışan bilim insanlarına bir kaynak olacağı düşüncesiyle, katlılığı 9 veya 9 dan büyük olan *Arf* sayısal yarıgruplarını ve bunlara bağlı olarak saturated sayısal yarıgruplarını bulma açık problemini önermekteyiz.

6. KAYNAKLAR

Abhyankar, S.S. 1967. Local rings of high embedding dimension, ***Amer J. Math.*** 89, 1073-1077.

Arf, C. 1949. Une interpretation algebrique de la suite ordres de multiplicite d'une branche algebrique, ***Proc. London Math. Soc.,*** 20, 256-287.

Barucci V., Dobbs, D.E. and Fontana, M. 1997. Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analyticalle irreducible local domains, ***Memoirs of The Amer. Math.,***598, 13-25.

Bertin, J. and Carbonne, P. 1977. Semi-groupes d'entires et applications aux branches, ***Journal of Algebra,*** 49, 81-95.

Bras-Amoros, M. 2003. Improvements to evaluation codes and new characterizations of Arf semigroups, Applied Algebra Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, 15th International Symposium, AAECC-15, Toulouse, France, May 12-16, 2003, Proceedings, 204-215.

Brauer, A. 1942. On a problem of partitions, ***Amer. J. Math***., 64, 299-312.

Brown. W. C. and Curtis, F. 1991. Numerical semigroups of maksimal and almost maksimal lenght, ***Semigroup Forum***, 42, 219-235.

Campillo, A. and Ruiz, J.M. 1990. Some remarks on Pythagorean real curve germs, ***Journal of Algebra***, 128 (2), 271-275.

Campillo, A., Farran, J. I. and Munuera, C. 2000. On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups, ***IEEE Trans. Inform. Theory***, 46 (7), 2634-2638.

Curtis, F. 1990. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup, ***Math.Scand.,*** , 67,190-192.

Çelik, A., Süer, M. ve İlhan, S. 2016. Bazı saturated sayısal yarıgrupları üzerine, International Engineering, Science and Educations Conference, 1-3 December 2016 Diyarbakır, 127-131.

D’Anna, M. 1998. Type Sequences of Numerical Semigroups, ***Semigroup Forum,*** 56, 1-31.

Dobbs, D.E. and Matthews, L.G. 2001. On comparing two chain of numerical semigroups and detecting Arf semigroups, ***Semigroup Forum,*** 63, 237-246.

Fröberg, R., Gottlieb, C. and Haggkvist, R. 1987. On numerical semigroups, ***Semigroup Forum***, 35, 63-83.

Garcia-Sanchez, P.A., Heredia, B.A., Karakaş, H.İ. and Rosales, J.C. 2017. Parametrizing Arf numerical semigroups***, Journal of Algebra and Its Applications,***

16 (11) , 31 pages.

Gilvan, O. 2004. Numerical semigroups whose last gap is large, ***Semigroup Forum,*** 69, 423-430.

Howie, J.M. 1976. An introduction to semigroup theory, Academic Press**,** New York.

Howie, J.M. and Ruskuc, N. 1997. Semigroups and Applications, World Scientific Publishing, London.

İlhan, S. 2006. On A Class of Telescopic Numerical Semigroups, ***International Journal of Contemporary Matematical Sciences***, 1 (2), 81-83.

İlhan, S. and Süer, M. 2016. On the saturated numerical semigroups, ***Open Mathematics,*** 14, 827-831.

İlhan, S. and Karakaş, H.İ. 2017. Arf numerical semigroups, ***Turkish Journal of Mathematics***, 41, 1448-1457.

İlhan, S. and Çelik, A. 2017. L-sequences of saturated numerical semigroups with multiplicity ≤ 7, ***Journal of Semigroup Theory and Applications***, 6, 1-9.

İlhan, S., Süer, M. and Çelik, A. 2016. On the fundamental gaps of some saturated numerical semigroups with multiplicity 4, ***International Journal of Algebra,*** 10 (8), 373-380.

İlhan,S. and Çelik, A. 2016. On the saturated numerical semigroups with multiplicity 3 and 5, International Engineering, Science and Educations Conference, 1-3 December 2016, Diyarbakır, 583-589.

İlhan, S. and Çelik, A. 2018. On the some saturated numerical semigroups with multiplicity 8, ***Journal of Semigroup Theory and Applications***, 8, 1-8.

Kunz, E. 1970. The value semigroup of an one dimensional Gorenstein ring, ***Proc. Amer. Math. Soc***., 25, 748-751.

Lipman, J. 1971. Stable ideals and Arf rings**,** ***Amer. J. Math.,*** 93, 649–685.

Madero, M. and Herzinger, K. 2005. The Apery sets of numerical semigroups, ***Algebra Communications***, 33, 3831-3838.

Robles-Perez, A. M., Rosales, J.C. and Vasko, P. 2009. The doubles of a numerical semigroup, ***Journal of Pure and Applied Algebra***, 213, 387-396.

Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez P.A. 1999. Finitelly generated commutative monoids, Nova Science Publishers, 185, New York.

Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez P.A. 2009. Numerical Semigroups, Springer**,** 181, New York.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I. and Branco M.B. 2004. Saturated numerical semigroups, ***Houston Journal of Mathematics***, 30 (2), 321-330.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I. and Branco M.B. 2004. Arf numerical semigroups, ***Journal of Algebra***, 276, 3-12.

Rosales, J.C. and Vasco, P. 2010. The Frobenius variety of the saturated numerical semigroups, ***Houston Journal of Mathematics***, 36 (2), 357-365.

Rosales, J. C. and Garcia-Sanchez, P. A. 2005. Pseudo-symmetric numerical semigroups with three generators, ***Journal of Algebra,*** 291, 46-54.

Rosales, J. C. 1996. On symmetric numerical semigroups, ***Journal of Algebra***, 182, 422-434.

Rosales, J.C. 2008. One half of a pseudo-symmetric numerical semigroup, ***London Mathematical Society***, 40, 347-352.

Rosales, J. C. 2005. Numerical semigroups with multiplicity three and four, ***Semigroup Forum***, 71, 323-331.

Rosales, J.C. 2000. Numerical semigroups with Apery sets of unique expression, ***Journal of Algebra***, 226, 479-487.

Rosales, J. C. 2005. Fundamental gaps of numerical semigroups generated by two elements***, Linear Algebra and its Applications***, 405, 200-208.

Rosales, J. C. and Branco, M. B. 2002. Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, ***Journal of Pure And Applied Algebra***, 171, 3003-314.

Ruiz, J.M. 1985. Pythagorean real curve germs, ***Journal of Algebra***, 94, 126-144.

Sally, J.D. 1979. Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, ***Journal of Algebra***, 56, 168-183.

Süer, M. and İlhan, S. 2017. On a family of saturated numerical semigroups with multiplicity four, ***Turkish Journal of Mathematics***, 41, 132-137.

Süer, M., İlhan, S. ve Çelik A. 2017. Katlılığı 6 olan saturated sayısal yarıgruplar üzerine, ***Batman Üniversitesi Yaşam Bilimleri Dergisi,*** 2 (2), 98-106.

Süer, M. 2016. All Arf or saturated numerical semigroups with multiplicity 7, International Engineering, Science and Educations Conference, 1-3 December 2016, Diyarbakır, 387-396.

Süer, M., Karakaş, H.İ. and İlhan, S. 2018. Arf numerical semigroups with multiplicity eight, (incelemede).

Sylvester, J.J. 1884. Mathematical questions with their solutions, ***Educational Times,*** 41, 1-21.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılı Adıyaman doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adıyaman'da tamamladım. 2008 yılında Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans, 2013 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında doktora öğrenimime başladım. Halen özel bir eğitim kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	AHMET ÇELİK
ÖĞRENCİ NO	14804503
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	DOKTORA
TEZ KONUSU	SATURATED SAYISAL YARIGRUPLAR ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	75
BENZERLİK ORANI	%20
RAPORLAMA TARİHİ	16/08/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 75 sayfalık kısmına ilişkin, 16/08/2018 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *TURNITIN* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 20' dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)

(Ahmet ÇELİK)

(İmza)	(İmza)
17 /08/2018	17/08/2018
Prof. Dr. Sedat İLHAN	Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**