

T.C.  
DİCLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DYNNIKOV KOORDİNATLARI VE  $\pi_1$ -TRAIN TRACK  
GRAFİKLERİ

Umut GÜNGÖRÜR

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI


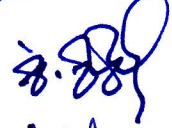

DIYARBAKIR

Ağustos-2018

T.C  
DİCLE UNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ  
DİYARBAKIR

Umut GÜNGÖRÜR tarafından yapılan “Dyannikov Koordinatları ve  $\pi_1$ -Train Track Grafikleri” konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

<u>Ünvanı</u>	<u>Adı Soyadı</u>	
Başkan: Dr. Öğr.Üyesi	S. Öykü YURTTAŞ	
Üye : Prof. Dr.	Hasan İlhan TUTALAR	
Üye : Doç Dr.	Ferihe Atalan OZAN	

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 21/09/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

( MÜHÜR )

## TEŞEKKÜR

Bu tezin yazımında ve 2 yıl süren yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini asla kesmeden değerli bilgilerini benimle paylaşan, her aşamasında zamanımı ayırıp sabırla yardım elini uzatan ve gelecekteki mesleki hayatımda da benimle paylaştığı bilgi ve birikimlerinden her daim yararlanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi S. Öykü Yurttaş'a teşekkürü bir borç bilirim. Böyle mükemmel ve üretken bir akademisyen ve harika bir insanın öğrencisi olmak benim için onurdur.

Danışmanım dışında bu süreçte hem kendi alanlarındaki tecrübelerle hem de tez yazımı konusundaki bilgi ve deneyimleriyle büyük yardımları dokunan Prof. Dr. H. Özlem Güney, Prof. Dr. Hasan İlhan Tutalar, Doç Dr. Ferihe ATALAN OZAN ve Dr. Öğr.Üy. Elif MEDETOĞULLARI hocalarıma teşekkür ederim.

Teşekkürlerin en büyüğü hayatımın her anında bana gösterdikleri sevgi ve destekten dolayı çok kıymetli aileme. Bana olan inançları ve güvenleri için annem Selma Güngörür ve babam Nedim Güngörür'e, bu hayattaki en büyük şansım en yakınım, kardeşim Utku Güngörür'e hep yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Son olarak, tez yazımı süresince verdikleri destekle motivasyonumu yüksek tutmamı sağlayan ve bu sürecin tamamlanmasına yardımcı olan dostlarım; Gamze Bodur'a, Gökçen Mutlu'ya, Esra Efetürk'e, Ece Köksal'a, Betül Top Çetinkaya'ya, Mehtap Çevik'e, Muammer Altunok'a ve bütün arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
ŞEKİL LİSTESİ.....	V
KISALTMA VE SİMGELER.....	VII
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ÖZETLERİ.....</b>	<b>3</b>
<b>3. MATERYAL ve METOT.....</b>	<b>5</b>
3.1. Çoklu Eğriler.....	5
3.2. Çoklu Eğrilerin Dynnikov Koordinatları.....	7
3.3. Güncelleme Kuralları.....	13
3.4. Train Track Grafikleri.....	15
3.5. Çoklu Eğrilerin Train Track Koordinatlarından Oluşturulması.....	18
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>19</b>
4.1. $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$ Bölgesinde Yol Bileşenleri.....	19
4.2. Çoklu Eğrilerin Geometrik Kesişim Sayısı.....	28
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....</b>	<b>33</b>
<b>6. KAYNAKLAR.....</b>	<b>35</b>
ÖZGEÇMİŞ.....	37

## ÖZET

### DYNNIKOV KOORDİNATLARI VE $\pi_1$ -TRAIN TRACK GRAFİKLERİ

#### YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut GÜNGÖRÜR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezin amacı  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski üzerinde tanımlı çoklu eğrilerin Dynnikov koordinatları ile  $\pi_1$ -train track koordinatları arasında geçiş formülleri tanıtmaktır.

Dynnikov koordinat sistemi  $D_n$  de tanımlı çoklu eğrilerin kümesi  $\mathcal{L}_n$  ile  $Z^{\{2n-4\}} \setminus \{0\}$  arasında birebir ve örten bir dönüşüm verir.  $\pi_1$ -train track koordinatları da  $\mathcal{L}_n$  için alternatif bir koordinat sistemi sunar. Bu tezde bu iki koordinat sistemi arasında geçiş formülleri sunulmuştur. Ayrıca bu formüllerden yararlanarak  $D_n$  de verilen iki çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısı  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden hesaplanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Çoklu eğriler, Dynnikov koordinatları,  $\pi_1$ -train track grafiği, geometrik kesişim sayısı.

## ABSTRACT

DYNNIKOV COORDINATES AND  $\pi_1$  –TRAIN TRACKS

MASTER OF SCIENCE THESIS

Umut GÜNGÖRÜR

UNIVERSITY OF DICLE  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATIC

2018

The aim of this thesis is to introduce transition formulae between Dynnikov coordinates and  $\pi_1$  –train track coordinates of multicurves on the  $n$  –punctured disk  $D_n$ .

Dynnikov coordinate system gives an explicit bijection between the set of multicurves  $\mathcal{L}_n$  on  $D_n$  and  $Z^{\{2n-4\}} \setminus \{0\}$ . An alternative way to coordinatize multicurves is achieved by  $\pi_1$  –train track coordinates. This thesis gives transition formulae between Dynnikov coordinates and  $\pi_1$  –train track coordinates of multicurves. This provides a way to compute the geometric intersection number of two multicurves on  $D_n$  in terms of  $\pi_1$  –train track coordinates.

**Key Words:** Multicurves, Dynnikov coordinates,  $\pi_1$  –train track coordinates, geometric intersection number.

## ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1.	$D_6$ da bir çoklu eğri	6
Şekil 3.2.	$i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2) = 10$	6
Şekil 3.3.	$\alpha_i$ ve $\beta_i$ yayları	7
Şekil 3.4.	$\delta(\mathcal{L}) = (2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$ üçgen koordinatları	8
Şekil 3.5.	Sağ ve Sol dönen bileşen	9
Şekil 3.6.	$\mathcal{L}$ nin üçgen koordinatları	10
Şekil 3.7.	$S_i$ bölgelerindeki bağlantılı bileşenlerin biraraya getirilmesi	11
Şekil 3.8.	$\delta(\mathcal{L}) = (2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$ karşılık gelen çoklu eğri	11
Şekil 3.9.	$\alpha_1 + \alpha_2$ toplamı tek sayı	12
Şekil 3.10.	$\rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; 1, 0)$	14
Şekil 3.11.	Bir işaretlenmiş noktalı 1-geçen ve işaretlenmiş nokta içermeyen bazı çokgenler	16
Şekil 3.12.	$D_4$ te bir $\pi_1$ -train track grafiği	16
Şekil 3.13.	$\tau$ nun bir lifli komşuluğu. Burada yeşil renkli lif singüler liftir	17
Şekil 3.14.	Kırmızı eğri $\tau$ tarafından taşınmaktadır	17
Şekil 3.15.	Her bir düğmede eğri parçaları tek türlü birleştirilir	18
Şekil 3.16.	Verilen bir eğrinin train track koordinatlarından oluşturulması	18
Şekil 4.1.	$\mathcal{L}$ nin $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$ ve $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$ bölgelerindeki yol bileşenleri	19
Şekil 4.2.	$\alpha_{2i-1, 2i+1}$ yol bileşenlerinin hesaplanması	21
Şekil 4.3.	$\alpha_{2i-1, 2j-1}$ yol bileşenlerinin hesaplanması	23
Şekil 4.4.	$x_i \alpha_{2j-1}$ yol bileşenlerinin hesaplanması	23
Şekil 4.5.	$x_{i,j}$ yol bileşenlerinin hesaplanması	24
Şekil 4.6.	Dynnikov koordinatları $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; -1, 1)$ olan $\mathcal{L}$ çoklu eğrisi	24
Şekil 4.7.	$\mathcal{L}$ nin train track koordinatları $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$	26

<b>Şekil 4.8.</b>	$x_i$ aralığını kesen yol bileşenleri	26
<b>Şekil 4.9.</b>	$K$ karesinde $\mathcal{L}$ nin yol bileşenleri	26
<b>Şekil 4.10.</b>	$\alpha_{2i-1}$ ve $\alpha_{2i}$ yayları üzerindeki kesişimler ile $\beta_i$ ve $x_i$ nin köşegenler olduğu dörtgen	28
<b>Şekil 4.11.</b>	$D_5$ te bazı elemanter eğriler	28
<b>Şekil 4.12.</b>	$S_{ij}$ bölgesindeki yol bileşenleri	29
<b>Şekil 4.13.</b>	$D_4$ te $\pi_1$ -train track grafiği tarafından taşınan $C_{34}$ elemanter ile $\mathbb{L}$ eğrisinin geometrik kesişimi	31
<b>Şekil 4.14.</b>	$D_3$ te farklı $\pi_1$ -train track grafikleri tarafından taşınan iki eğrinin geometrik kesişimi	32





## KISALTMA VE SİMGELER

$D_n$	: Düzlemde $n$ -noktası çıkarılmış disk
$\mathcal{L}_n$	: $D_n$ de çoklu eğrilerin kümesi
$\tau$	: Train track grafiği
$\partial D_n$	: $D_n$ diskinin dış sınırı
$i(L^1, L^2)$	: $L^1$ ve $L^2$ nin geometrik kesişim sayısı
CW	: CW kompleks
$\Delta_{2i-1}$	: $\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}, \beta_i$ yaylarıyla sınırlanan bölge
$\Delta_{2i}$	: $\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}, \beta_{i+1}$ yaylarıyla sınırlanan bölge
$\delta$	: Üçgen koordinat fonksiyonu
$S_i$	: $\Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$
$\rho$	: Dynnikov koordinat fonksiyonu
$\lceil x \rceil$	: $x$ den küçük olmayan en küçük tamsayı
$b_j^+$	: $\max(b_j, 0)$
$T_v(\tau)$	: $v$ düğmesinde tanjant vektörü
$\searrow$	: Deformasyon Retraksiyonu
$\mu$	: Çapraz Ölçüm
$W_z(\tau)$	: $\tau$ Çapraz Ölçüm Uzayı
$\mathcal{L} \prec \tau$	: $\mathcal{L}$ , $\tau$ tarafında taşınmaktadır
$\alpha_{i,j}$	: Uç noktaları $\alpha_i$ ve $\alpha_j$ üzerinde olan bağlantılı bileşenler
$x_i \alpha_j$	: Uç noktaları $x_i$ ve $\alpha_j$ üzerinde olan bağlantılı bileşenler
$x_{i,j}$	: Uç noktaları $x_i$ ve $x_j$ üzerinde olan bağlantılı bileşenler
$C_{ij}$	: $i$ den $j$ ye kadar işaretlenmiş noktaları kapsayan elemanter eğri
$MCG(D_n)$	: $D_n$ Gönderim Sınıfları Grubu
$\sigma_i$	: $i$ . Artin Örgü üreteci
$\sigma_i^{-1}$	: $i$ . Artin Örgü üretecinin tersi

## 1. GİRİŞ

Verilen bir yüzeyde tanımlı çoklu eğriler (birbirinden ayırık basit kapalı esas eğrilerin homotopi sınıflarının oluşturduğu sistemler) düşük boyutlu topoloji ve hesaplamalı topolojide merkezi bir rol oynamaktadır. Böyle sistemler genellikle Dehn–Thurston koordinatları veya train track koordinatları tarafından tanımlanmaktadır (Penner ve Harer 1992, Bestvina ve Handel 1995, Hamidi ve Chen 1996, Menzel ve Parker 2003, Parker ve Series 2004). Yüzeyin  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski ( $n$  adet işaretlenmiş noktalı disk) olması durumunda çoklu eğrileri tanımlamanın alternatif ve kullanışlı bir yolu çoklu eğrilerin kümesi ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayan Dynnikov koordinat sistemini kullanmaktır (Dynnikov 2002, Dynnikov ve Wiest 2007, Dehornoy 2008, Dehornoy ve ark. 2008, Yurttaş 2013, Yurttaş 2016, Yurttaş ve Hall 2017, Yurttaş ve Hall 2018).

Dinamik sistemlerde oldukça geniş bir uygulama alanı olan Dynnikov koordinat sistemi,  $n$ -Örgü Grubunda kelime probleminin çözümü (Dehornoy 2008), pseudo–Anosov tipinden örgülerin topolojik entropi ve diğer dinamiksel özelliklerinin hesaplanması (Hall ve Yurttaş 2009, Yurttaş 2016) gibi bir çok önemli problemin çözümünde kullanılmıştır. Ayrıca, bir çoklu eğrinin bağlantılı olup olmadığını polinomsal zamanda hesaplayan bir algoritmanın varlığı açık problemi uzun bir aradan sonra  $D_n$  durumu için Dynnikov koordinatları verilen bir çoklu eğrinin tam olarak kaç parçadan oluştuğunu kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma tanıtılarak çözülmüştür (Yurttaş ve Hall 2017). Bunun sonucu olarak  $D_n$  de verilen iki keyfi çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısı yine Dynnikov koordinatları cinsinden kuadratik zamanda çalışan bir algoritma ile hesaplanmıştır (Yurttaş ve Hall 2018).

Yüzey homeomorfizmalarının dinamiği (Fathi ve ark. 1979, Thurston 1988, Yurttaş 2016) ve eğriler ile ilgili kombinatorik problemleri (Yurttaş ve Hall 2017, Yurttaş ve Hall 2018, Schaefer ve ark. 2008) çalışmak için en sık kullanılan koordinat sistemlerinden biri de train track grafikleridir (Penner ve Harer 1992, Bestvina ve Handel 1995, Hamidi ve Chen 1996, Menzel ve Parker 2003, Parker ve Series 2004). Bir  $\tau$  train track grafiği *düğme* adı verilen köşeler ve *dal* adı verilen kenarlarından oluşan, her bir düğmede bir tek tanjant vektörü bulunan ve belli geometrik özellikleri sağlayan bir CW–komplekstir.  $\tau$  üzerinde bir *çapraz ölçüm*,  $\tau$  nun her bir dalına negatif olmayan ve *düğme koşulları* olarak adlandırılan belli lineer denklemleri sağlayan sayılar tayin eden bir fonksiyondur. Bir çapraz ölçüm ile donatılmış train track grafiğine *ölçülü train track grafiği* denir. Böyle grafikler çoklu eğrileri koordinatlandırmanın başka bir yolunu sunar. Daha açık olarak,  $\mathcal{W}(\tau)$ ,  $\tau$  ile ilişkili çapraz ölçümler uzayını belirtmek üzere, bir  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi,  $\mathcal{W}(\tau)$  uzayındaki bir çapraz ölçüm tarafından ortaya çıkıyorsa  $\mathcal{L}$ ,  $\tau$  tarafından taşınıyor denir ve ilgili ölçüler  $\mathcal{L}$  nin *train track koordinatları* olarak adlandırılır.

Bu tezin amacı  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski üzerinde tanımlı çoklu eğrilerin Dynnikov koordinatları ile  $\pi_1$ -train track koordinatları arasında geçiş formülleri tanıtmaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmış, sonuçlarımız için gerekli temel kavramlar ve terimler ikinci bölümde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölüm ise, sonuçlarımız için gerekli altyapı materyalini içermektedir. Daha açık olarak, üçüncü bölümde  $D_n$  de tanımlı çoklu eğrilerin kümesi ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  kümesi arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayan Dynnikov koordinat sistemi ve çoklu eğrilerin  $\pi_1$ -train track koordi-

natları detaylı bir şekilde incelenmiş, her iki koordinat sistemi için açıklayıcı örnekler sunulmuştur. Ayrıca,  $D_n$  in gönderim sınıfları etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden veren ve Dynnikov koordinatlarının örgülerin dinamiği üzerinde kullanımını olanaklı kılan güncelleme kuralları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bu tezin odak noktası olan koordinat sistemleri arasındaki geçiş formülleri açıklayıcı resimler ve örneklerle sunulmuştur. Böylece,  $D_n$  de verilen bir çoklu eğri ile elemanter bir eğrinin ve  $D_3$  de verilen iki keyfi çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazılmasına olanak sağlanmıştır.

Son olarak, beşinci bölümde, güncelleme kurallarının  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazımı ve bu tezde verilen sonuçların yüksek cinsli yüzeylere genelleştirme problemleri sorulmuştur.



## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde tezin oluşturulmasında önemli rol oynayan ve Dynnikov koordinat sistemi ile train track koordinatları aracılığıyla birçok dinamiksel ve kombinatorik problemin çözüldüğü kaynaklar listelenmiştir.

- **On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering;** 2002 yılında I. Dynnikov tarafından yazılan bu makalede Dynnikov koordinat sistemi tanıtılmış, Artin  $n$ -örgü grubunun  $\sigma_i$  ve  $\sigma_i^{-1}$  üreteçlerinin Dynnikov koordinatları cinsinden çoklu eğriler kümesi üzerindeki etkisi verilmiştir.
- **On computing the entropy of braids;** 2006 yılında J. Moussafir tarafından yazılan bu makalede verilen bir örgünün topolojik entropisinin yaklaşık değerini Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir metod sunulmuştur.
- **On the complexity of braids;** 2007 yılında I. Dynnikov ve B. Wiest tarafından yazılan bu makalede verilen bir örgünün cebirsel kompleksitesi tanıtılmış, bir çoklu eğriyi minimal bir eğri sistemine dönüştüren ‘rahatlatma algoritması’ verilmiştir.
- **Efficient solutions to the braid isotopy problem;** 2008 yılında P. Dehornoy tarafından yazılan bu makalede Artin grubunun kelime problemi için etkili bir çözüm sunulmuştur. Daha açık olarak verilen bir örgünün birim olup olmadığını Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir algoritma verilmiştir.
- **On the topological entropy of families of braids;** 2009 yılında T. Hall ve S.Ö. Yurttaş tarafından yazılan bu makalede örgülerin sonsuz bir ailesinin her bir üyesinin topolojik entropisini Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir metod tanıtılmıştır.
- **Geometric intersection of curves on punctured disks;** 2013 yılında S.Ö. Yurttaş tarafından yazılan bu makalede verilen bir çoklu eğrinin minimal bir eğri ile olan geometrik kesişim sayısını Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir formül verilmiştir.
- **Dynnikov and train track transition matrices of pseudo-Anosov braids;** 2016 yılında S.Ö. Yurttaş tarafından yazılan bu makalede Dynnikov matrisleri ile train track geçiş matrislerinin spektrumları kıyaslanmış, bu matrislerin belli koşullar altında özdeğer kümelerinin eşit olduğu ispatlanmıştır.
- **Counting components of an integral lamination;** 2017 yılında S.Ö. Yurttaş ve T. Hall tarafından yazılan bu makalede verilen bir çoklu eğrinin bağlantılı bileşen sayısını Dynnikov koordinatları yardımıyla kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma verilmiştir.
- **Intersections of multicurves from Dynnikov coordinates;** 2018 yılında S.Ö. Yurttaş ve T. Hall tarafından yazılan bu makalede verilen iki keyfi çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını Dynnikov koordinatları yardımıyla kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma verilmiştir.

- **Train-tracks for surface homeomorphisms**; 1995 yılında M. Bestvina ve M. Handel tarafından yazılan bu makalede Thurston'ın yüzey homeomorfizmaları sınıflandırma teoremi için algoritmik bir ispat verilmiştir. Bu ispat için train-track koordinatları kullanılmıştır.
- **Pseudo-Anosov diffeomorphisms of the twice punctured torus**; 2003 yılında C. Menzel ve J.R. Parker tarafından yazılan bu makalede  $\pi_1$ -train track grafikleri yardımıyla iki noktası çıkarılmış torusta verilen bir homeomorfizmanın izotopi sınıfının pseudo-Anosov olup olmadığını veren bir algoritma tanıtılmıştır.



### 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümün amacı  $D_n$  de verilen çoklu eğrilerin Dynnikov koordinatlarını ve  $\pi_1$ -train track koordinatlarını tanıtmaktır. Öncelikle, Dynnikov koordinat sistemi tanıtılacaktır. Bunun için, her bir çoklu eğriyi  $D_n$  yüzeyine gömülü  $3n - 5$  adet belli yay üzerindeki geometrik kesişim sayısını kullanarak  $\mathbb{Z}^{3n-5}$  kümesinin bir elemanı olarak tanıtan üçgen koordinatlarından faydalanılacaktır. *Dynnikov koordinatları* (Dynnikov 2002, Dynnikov ve Wiest 2007, Dehornoy 2008, Dehornoy ve ark. 2008, Yurttaş 2013, Yurttaş 2016, Yurttaş ve Hall 2017, Yurttaş ve Hall 2018) bu kesişim sayılarının belli bir lineer bileşimidir ve  $\mathcal{L}_n$  ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlamaktadır.

Daha sonra,  $D_n$  de belli topolojik ve geometrik özellikleri sağlayan bir CW kompleks olan train track grafikleri ve bu teze konu olan  $\pi_1$ -train track grafikleri tanıtılarak, ölçülü train track grafiklerinin üzerlerinde taşıdıkları çoklu eğrileri nasıl koordinatlandırdıkları açıklayıcı örneklerle anlatılacaktır.

#### 3.1. Çoklu Eğri

$D_n$ , düzlemde  $n$ -noktası çıkarılmış ( $n$  adet işaretlenmiş noktalı) bir disk olsun. Bu bölümde  $D_n$  de tanımlı çoklu eğriler tanıtılacak, çoklu eğriler ile ilgili bazı özellikler ve tanımlar verilecektir.

**Tanım 3.1.1.**  $\alpha(0, 1) \subset D_n$  özelliğindeki  $\alpha : [0, 1] \rightarrow D_n$  sürekli dönüşümüne  $D_n$  de bir *yol* adı verilir.  $\alpha$  nın  $\alpha(0)$  başlangıç ve  $\alpha(1)$  bitiş noktası olmak üzere iki uç noktası vardır. Eğer  $\alpha$ ,  $D_n$  de gömme (embedding) ise,  $\alpha$  ya *yay* adı verilir.  $S^1$  birim çember olmak üzere,  $\alpha : S^1 \rightarrow D_n$  sürekli dönüşümüne  $D_n$  de *kapalı eğri* denir ve eğer  $\alpha$  gömme ise  $\alpha$  nın görüntüsü  $D_n$  de *basit kapalı eğri* olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.2.**  $f$  ve  $g$ ,  $D_n$  de iki sürekli dönüşüm ve  $I = [0, 1]$  olsun.  $\forall t \in I, \forall x \in D_n, H(x, t) = f(x)$  ve  $H(x, t) = g(x)$  olacak şekilde bir  $H : D_n \times I \rightarrow D_n$  sürekli dönüşümü varsa  $f$  dönüşümü  $g$  dönüşümüne *homotopur* denir ve  $H$  ye *homotopi* adı verilir.  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $D_n$  de iki eğri olmak üzere  $\forall x \in D_n$ ,

$$H(x, 0) = \alpha(x), H(x, 1) = \beta(x) \quad \text{ve}$$

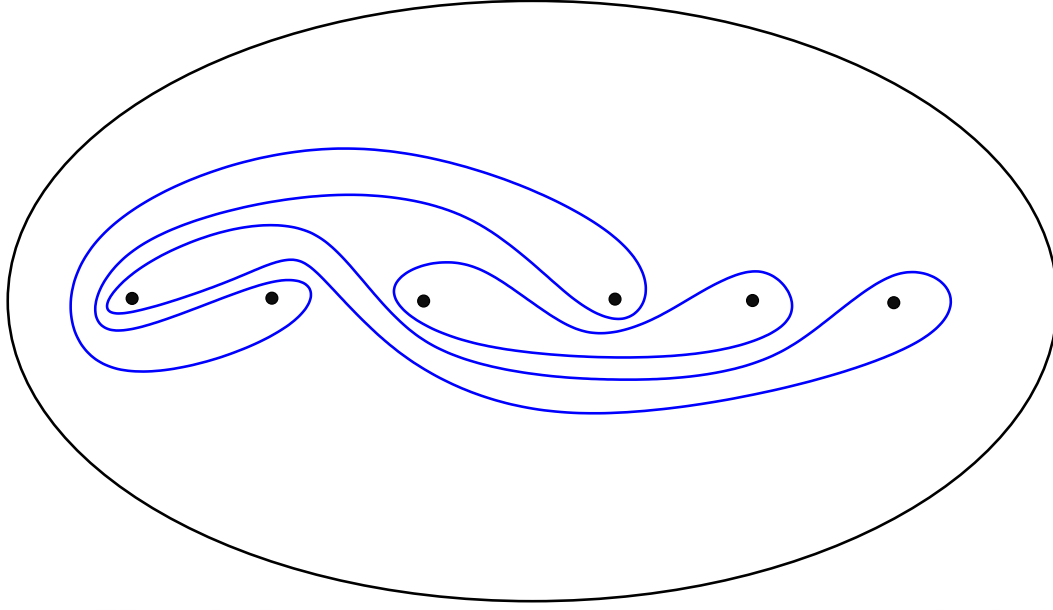
$$H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0), H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$$

olacak şekilde bir  $H : D_n \times I \rightarrow D_n$  sürekli dönüşümü varsa  $\alpha$  ve  $\beta$  ya *homotopik eğrilerdir* denir ve  $\alpha \simeq \beta$  ile gösterilir.

Aşağıdaki tanımın, Bölüm 3.4 de verilecek train track koordinatları tanımında önemli bir rolü vardır.

**Tanım 3.1.3.**  $A \subseteq X$  olsun.  $\forall x \in X, \forall a \in A, F(x, 0) = x, F(x, 1) \in A$  ve  $F(a, 1) = a$  olacak şekilde bir  $F : X \times [0, 1] \rightarrow D_n$  sürekli dönüşümü varsa  $F$  ye  $X$  in  $A$  altuzayına *deformasyon retraksiyonudur* denir. Bu durumda  $A, X$  in bir *deformatik retraktı* olarak adlandırılır.

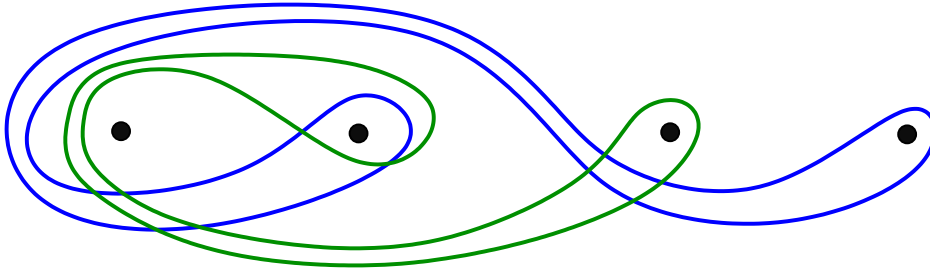
**Tanım 3.1.4.**  $D_n$  de disk, 1 adet işaretlenmiş noktası olan disk veya halka sınırlamayan basit kapalı eğriye *esas eğri* denir.  $D_n$  de birbiriyle kesişmeyen sonlu sayıda esas eğrinin homotopi sınıflarının



Şekil 3.1.  $D_6$  da bir çoklu eğri

bir birleşimi *çoklu eğri* olarak adlandırılır (Şekil 3.1).  $D_n$  de tanımlı çoklu eğrilerin kümesi  $\mathcal{L}_n$  ile gösterilir.

Şimdi, Bölüm 3 ve Bölüm 4 de verilen tanım ve sonuçlar için çok önemli olan eğrilerin (ve yayların) geometrik kesişimi kavramı ile devam edelim.



Şekil 3.2.  $i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2) = 10$

**Tanım 3.1.5.**  $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2 \in \mathcal{L}_n$  olsun.  $\mathcal{L}^1$  ve  $\mathcal{L}^2$  nin geometrik kesişim sayısı  $i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2)$

$$i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2) = \min(\#L^1 \cap L^2 : L^1 \in \mathcal{L}^1 \text{ ve } L^2 \in \mathcal{L}^2)$$

dır. Bir çoklu eğri ile bir yay arasındaki geometrik kesişim sayısı benzer şekilde tanımlanır.

Dolayısıyla, iki çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısı bu laminasyonların içinde bulunduğu homotopi sınıflarındaki temsilciler arasındaki minimum kesişim sayısıdır. Örneğin, Şekil 3.2 de verilen çoklu eğrilerin geometrik kesişim sayısı 10 dur. Çoklu eğrilerin geometrik kesişim sayıları ile ilgili uygulamalar Bölüm 4.2 de detaylı bir şekilde verilmiştir.

### 3.2. Çoklu Eğrilerin Dynnikov Koordinatları

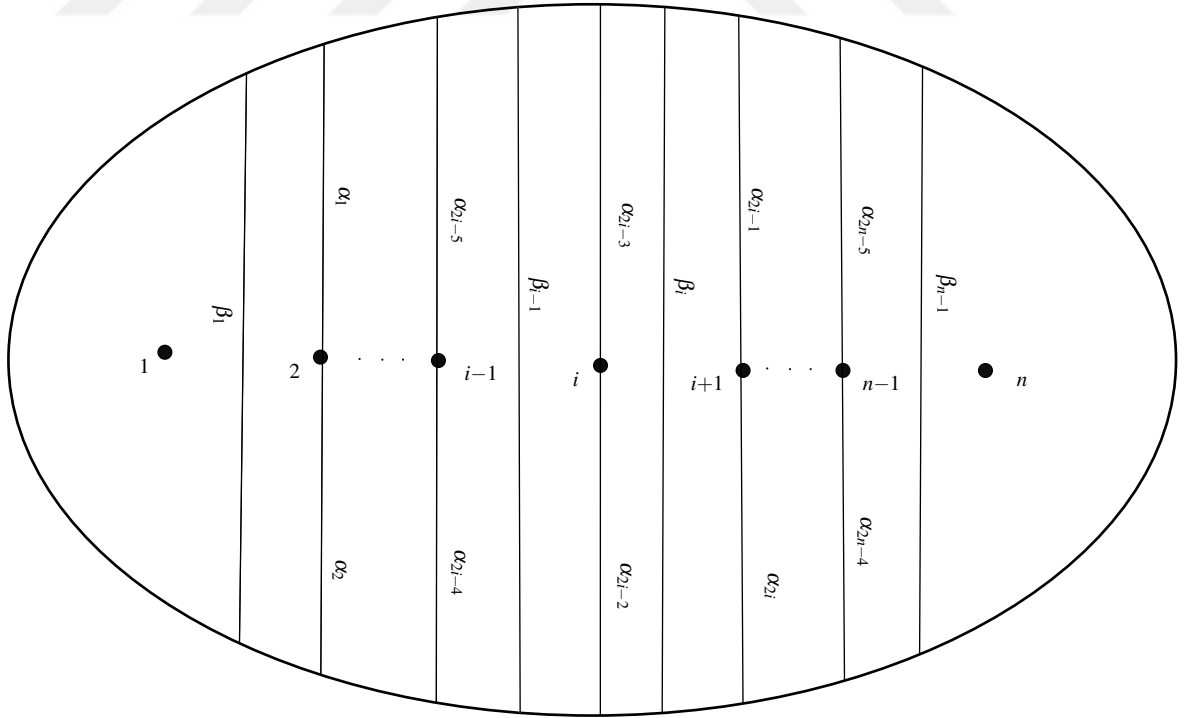
Bu bölümde, Dynnikov koordinat sistemi detaylı bir şekilde açıklanacak, birebir ve örten bir dönüşüm olan  $\rho : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  Dynnikov koordinat fonksiyonu tanıtılacaktır.  $D_n$  ( $n \geq 3$ ) düzlemde  $n$ -noktası çıkarılmış diskin standart bir modeli olsun (işaretlenmiş noktalar Şekil 3.3 de gösterildiği gibi diskin yatay eksenindedir).  $\mathcal{A}_n, D_n$  de uç noktaları diskin dış sınırı  $\partial D_n$  ve diskin işaretlenmiş noktaları üzerinde bulunan yayların kümesi olsun. Şekil 3.3 de gösterilen  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 2n-4$ ) ve  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) yaylarını düşünelim.  $\alpha_{2i-3}$  ve  $\alpha_{2i-2}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) yayları  $i$ -inci işaretlenmiş noktayı diskin sınırına birleştirirken,  $\beta_i$  yayının her iki uç noktası  $\partial D_n$  de yer alıp,  $i$ -inci ve  $i+1$ -inci işaretlenmiş noktalar arasından geçer.

Bu yaylar,  $2n-4$  tanesi üçgensel olmak üzere diski  $2n-2$  (kapalı) bölgeye ayırır. Diskin dış sınırı tek bir nokta ile eşleştirildiğinde  $i$ -inci işaretlenmiş noktanın ( $1 \leq i \leq n$ ) solunda ve sağında yer alan her bir bölge 3 yay tarafından sınırlandığından üçgenseldir.  $i$ -inci işaretlenmiş noktanın solundaki  $\Delta_{2i-3}$  bölgesi,  $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}$  ve  $\beta_{i-1}$  yaylarıyla ve sağındaki  $\Delta_{2i-2}$  bölgesi,  $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}$  ve  $\beta_i$  yaylarıyla sınırlıdır. Diskin en solundaki ve en sağındaki  $\Delta_0$  ve  $\Delta_{2n-3}$  bölgeleri sırasıyla,  $\beta_1$  ve  $\beta_{n-1}$  ile sınırlıdır.

$\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yaylarını minimum sayıda kesen *minimal* bir temsilcisi her zaman bulunabilir.  $\mathcal{L}$  nin *minimal* temsilcisi  $L$  ile gösterilir.

$\alpha_i$  ve  $\beta_i$ ,  $L$  nin sırasıyla  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yayları ile olan kesişim sayısına karşılık gelsin.

$\alpha_i$  ve  $\beta_i$  sembollerinin, ne zaman yaylara, ne zaman yaylar üzerindeki kesişim sayılarına karşılık geldikleri tez boyunca açıkça belirtilecektir.



Şekil 3.3.  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yayları

**Tanım 3.2.1.**  $\delta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  üçgen koordinat fonksiyonu,



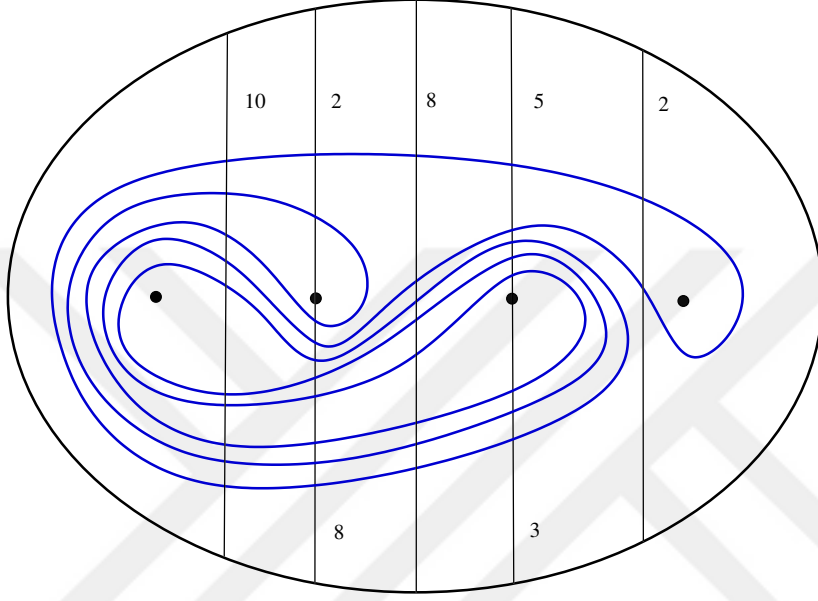
$$\delta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-4}; \beta_1, \dots, \beta_{n-1}).$$

olarak tanımlanır.

Örneğin, Şekil 3.4 de gösterilen  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisinin üçgen koordinatları

$$\delta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$$

olarak verilir.

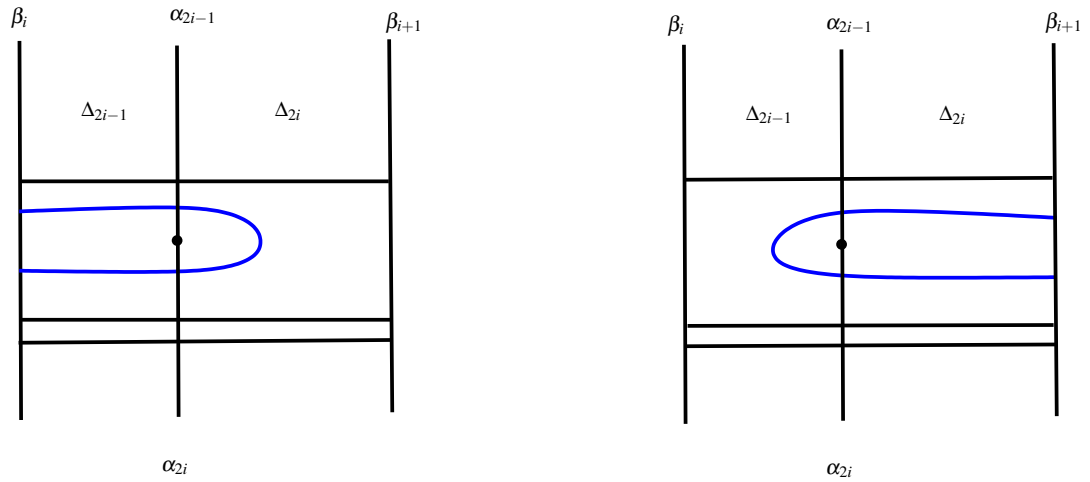


Şekil 3.4.  $\delta(\mathcal{L}) = (2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$  üçgen koordinatları

**Tanım 3.2.2.**  $S_i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$  ( $1 \leq i \leq n-2$ ) olarak tanımlansın.  $L$  nin  $S_i$  de bir yol bileşeni,  $L \cap S_i$  kümesinin bir bağlantılı bileşenidir.  $L$  minimal olduğundan  $S_i$  de 4 tip yol bileşeni vardır.

- (i) *Sağ dönen bileşen*; Her iki uç noktası  $\beta_i$  üzerinde olan ve hem  $\alpha_{2i-1}$  hem de  $\alpha_{2i}$  yayını kesen bileşen;
- (ii) *Sol dönen bileşen*; Her iki uç noktası  $\beta_{i+1}$  üzerinde olan ve hem  $\alpha_{2i-1}$  hem de  $\alpha_{2i}$  yayını kesen bileşen;
- (iii) *Üst yol bileşen*; Uç noktaları  $\beta_i$  ve  $\beta_{i+1}$  üzerinde olan ve  $\alpha_{2i-1}$  yayını kesen ancak  $\alpha_{2i}$  yayını kesmeyen bileşen;
- (iv) *Alt yol bileşen*; Uç noktaları  $\beta_i$  ve  $\beta_{i+1}$  üzerinde olan ve  $\alpha_{2i}$  yayını kesen ancak  $\alpha_{2i-1}$  yayını kesmeyen bileşendir.

**Uyarı 3.2.3.**  $L$  basit kapalı eğriler içerdiğinden  $L$  nin  $S_i$  de hem sağ ve hem de sol dönen bileşenleri bulunamaz.



Şekil 3.5. Sağ ve Sol dönen bileşen

**Tanım 3.2.4.** Her  $0 \leq i \leq n-1$  için,

$$b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2}. \quad (1)$$

olarak tanımlanır.

$|b_i|$ ,  $S_i$  de bulunan dönen bileşenlerin sayısını verir.  $\varepsilon_i = \text{sgn}(b_i)$ , dönen bileşenlerin sağ ya da sol dönen bileşen olup olmadığını belirler. Daha açık olarak,  $S_i$  de  $b_i > 0$  ise sağ dönen bileşen ve  $b_i < 0$  ise sol dönen bileşen vardır.

**Uyarı 3.2.5.**  $L$  nin en solundaki  $\Delta_0$  bölgesinde sadece sol dönen bileşen, en sağındaki  $\Delta_{2n-3}$  bölgesinde sadece sağ dönen bileşen vardır. Dönen bileşen sayıları,  $\Delta_0$  bölgesinde  $\frac{\beta_1}{2}$  ve  $\Delta_{2n-3}$  bölgesinde  $\frac{\beta_{n-1}}{2}$  ile bulunur.

$S_i$  de her alt ve üst bileşen sırasıyla  $\alpha_{2i}$  ve  $\alpha_{2i-1}$  yaylarıyla kesiştiğinden sıradaki Yardımcı Teoremin ispatı açıktır.

**Yardımcı Teorem 3.2.6.**  $S_i$  bölgesinde alt ve üst bileşenlerin sayıları sırasıyla,  $S_i^a = \alpha_{2i} - |b_i|$  ve  $S_i^u = \alpha_{2i-1} - |b_i|$  olarak verilir.

Yardımcı Teorem 3.2.7, Şekil 3.5 den kolaylıkla gözükmektedir.

**Yardımcı Teorem 3.2.7.** Her  $S_i$  için aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\max(\beta_i, \beta_{i-1}) = \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} \quad (2)$$

$$\min(\beta_i, \beta_{i-1}) = \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - 2|b_i|. \quad (3)$$

**Örnek 3.2.8.** Üçgen koordinatları  $(2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$  olan  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_4$  çoklu eğriyi çizebilmek için her  $S_i$  bölgesindeki dönen bileşen sayıları Tanım 3.2.4, alt ve üst bileşen sayıları Yardımcı Teorem 3.2.6 yardımıyla hesaplanır.

$\beta_1=10$  olduğundan  $\Delta_0$  bölgesinde 5 sol dönen bileşen ve  $\beta_3 = 2$  olduğundan  $\Delta_5$  bölgesinde 1 sağ dönen bileşen vardır.

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

olduğundan  $S_1$  bölgesinde 1 sağ dönen bileşen,

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$$

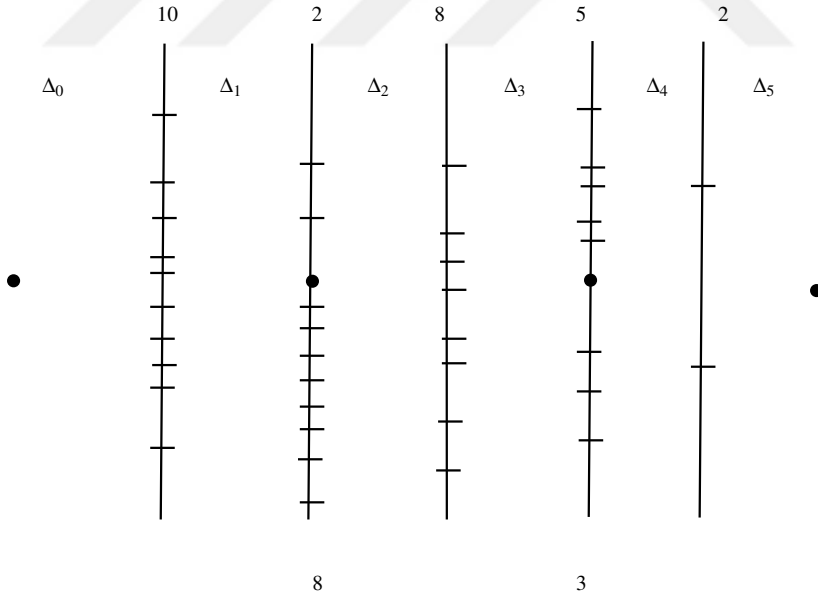
olduğundan  $S_2$  bölgesinde 3 sağ dönen bileşen vardır.

Şimdi Yardımcı Teorem 3.2.6 yardımıyla, her bir  $S_i$  bölgesindeki üst ve alt bileşen sayılarını hesaplayalım.

$$\alpha_1 - b_1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{ve} \quad \alpha_2 - b_1 = 8 - 1 = 7$$

olduğundan  $S_1$  de 1 üst bileşen ve 7 alt bileşen vardır.

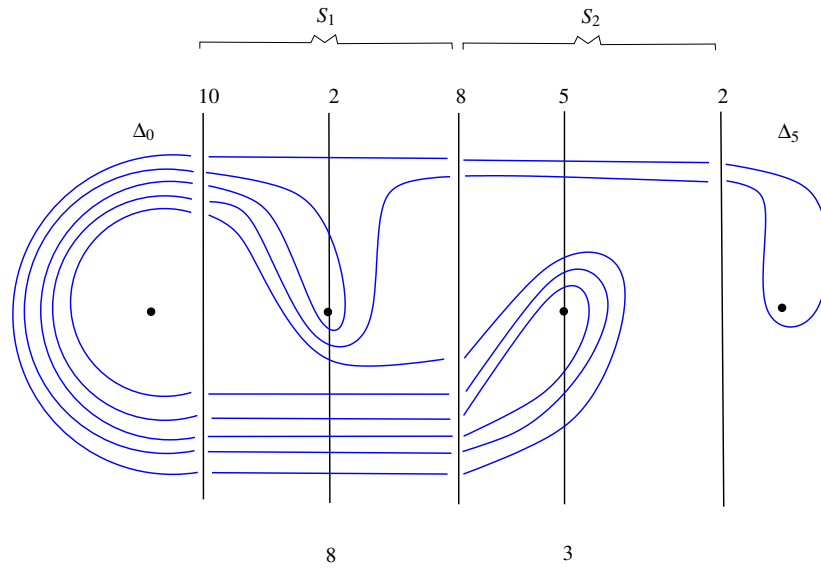
Benzer şekilde  $\alpha_3 - b_2 = 5 - 3 = 2$  ve  $\alpha_4 - b_2 = 3 - 3 = 0$  olduğundan  $S_2$  de 2 üst bileşen vardır ve hiç alt bileşen yoktur. Bu bilgiler ışığında önce Şekil 3.7 elde edilir. Hesaplanan bileşenler homotopi altında tek türlü birleştirilerek Şekil 3.8 deki çoklu eğri elde edilir.



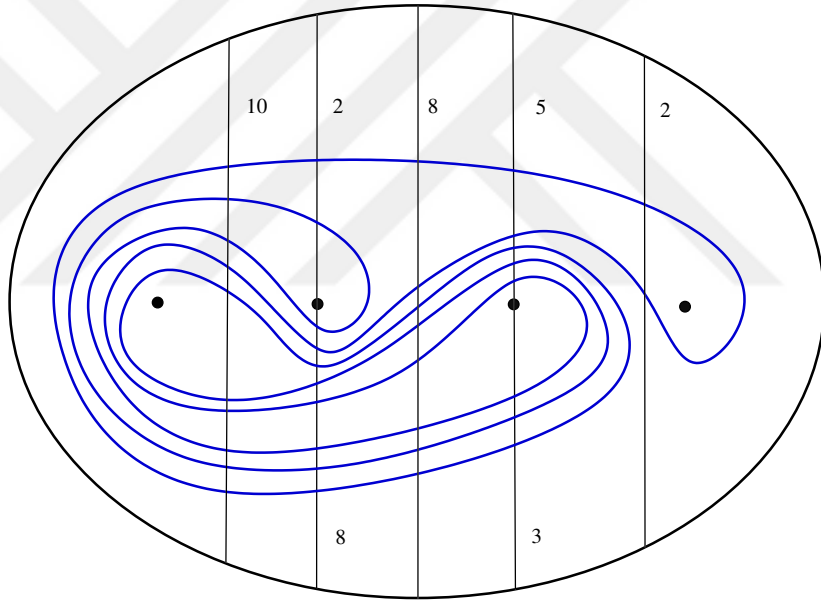
Şekil 3.6.  $\mathcal{L}$  nin üçgen koordinatları

**Yardımcı Teorem 3.2.9.**  $\delta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  üçgen koordinat fonksiyonu birebirdir.

**İspat.** Örnek 3.2.8 de olduğu gibi her bir  $S_i$  bölgesindeki alt, üst, sağ dönen ve sol dönen yol bileşenleri hesaplanır. Bu bileşenler homotopi altında tek türlü birleştirilerek  $L$  tek türlü belirlenir.



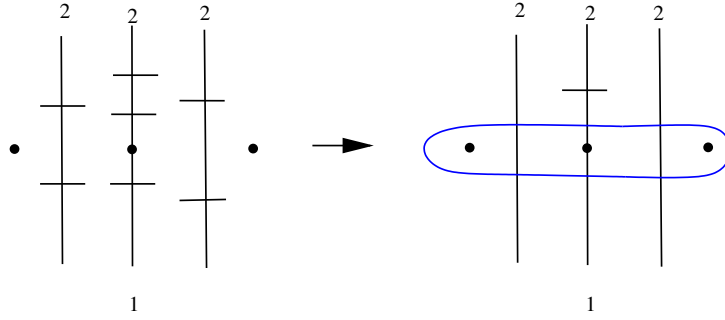
Şekil 3.7.  $S_i$  bölgelerindeki bağlantılı bileşenlerin biraraya getirilmesi



Şekil 3.8.  $\delta(\mathcal{L}) = (2, 8, 5, 3; 10, 8, 2)$  karşılık gelen çoklu eğri

**Uyarı 3.2.10.** Üçgen koordinatları her  $\Delta_i$  bölgesinde, üçgen eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 3.2.7'deki koşulları sağlamalıdır. Ayrıca  $\mathcal{L}$  basit kapalı eğrilerden oluştuğundan her bir  $\beta_i$  yayını (dolayısıyla her bir  $\alpha_{2i-1} \cup \alpha_{2i}$  birleşimini) çift sayıda kesmelidir. Bu nedenle  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  kümesinden alınan her vektör bir çoklu eğriye karşılık gelmeyebileceğinden  $\delta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  fonksiyonu örten değildir. Örneğin,  $(2, 1; 2, 2)$  üçgen koordinatları,  $\alpha_1 + \alpha_2$  toplamı tek sayı olduğundan basit kapalı bir eğri sistemine karşılık gelmez (Şekil 3.9).

**Tanım 3.2.11.** Dynnikov koordinat fonksiyonu  $\rho : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ ,

Şekil 3.9.  $\alpha_1 + \alpha_2$  toplamı tek sayı

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (4)$$

$1 \leq i \leq n-2$  olmak üzere

$$\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (a_1, \dots, a_{n-2}; b_1, \dots, b_{n-2}),$$

olarak tanımlanır.

$(\alpha; \beta)$  kesişim sayıları (dolayısıyla bunlara karşılık gelen çoklu eğri), Yardımcı Teorem 3.2.12 kullanılarak  $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  Dynnikov koordinatlarından bulunabilir.

**Yardımcı Teorem 3.2.12.**  $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  üçgen koordinatları aşağıda verilen bir ve yalnız bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisine karşılık gelir.

$$\beta_i = 2 \max_{1 \leq k \leq n-2} \left[ |a_k| + b_k^+ + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \right] - 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_j \quad (5)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0; \\ (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{1+\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Burada  $\lceil x \rceil$   $x$  den küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermektedir.

$b_j^+ = \max(b_j, 0)$  olsun. Yukarıdaki Yardımcı Teorem 3.2.12 nin ispatı (Hall ve Yurttaş 2009, Yurttaş 2013, Yurttaş 2016) da detaylı bir şekilde yapılmıştır. İspat, çoklu eğrilerin Dynnikov koordinatlarının aşağıdaki özelliklerine dayanmaktadır:

1.  $b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2}$  olduğundan  $\beta_1$  in bilinmesi halinde bütün  $\beta_i$  ler ve Yardımcı Teorem 3.2.7 yardımıyla her bir  $\alpha_i$  hesaplanabilir.

2.  $\beta_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) ve  $\alpha_i \geq b_{\lceil i/2 \rceil}$  ( $1 \leq i \leq 2n-4$ ) eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerden en az birinin eşitlik olması gerekmektedir (aksi takdirde çoklu eğri  $\partial D_n$  e paralel bir eğri içerir). Buradan,

$$\beta_1 = 2 \max_{1 \leq k \leq n-2} \left[ |a_k| + b_k^+ + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \right]$$

olarak bulunur.

**Örnek 3.2.13.**  $\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (-1, 1; 1, 0) \in \mathbb{Z}^4$  vektörünün Yardımcı Teorem 3.2.12 den yararlanarak  $\alpha$  ve  $\beta$  üçgen koordinatlarını hesaplayalım.

(5) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \max \left( |a_1| + b_1^+, |a_2| + b_2^+ + b_1 \right) \\ &= 2 \max(2, 2) = 4. \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\beta_2 = \beta_1 - 2b_1 = 4 - 2 = 2 \quad \text{ve} \quad \beta_3 = \beta_2 - 2b_2 = 2 - 0 = 2$$

elde edilir. (6) formülünden

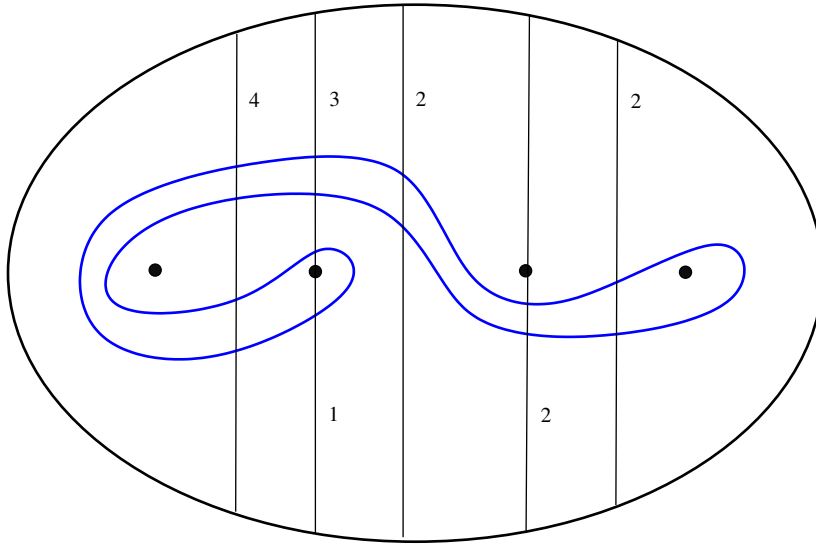
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-1)^1 a_{\lceil 1/2 \rceil} + \frac{\beta_{\lceil 1/2 \rceil}}{2} \\ &= (-1)a_1 + \frac{\beta_1}{2} = (-1) \cdot (-1) + \frac{4}{2} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$  ve  $\alpha_4 = 2$  olarak hesaplanarak  $\mathcal{L}$  nin üçgen koordinatları  $\delta(\mathcal{L}) = (3, 1, 0, 2; 4, 2, 2)$  olarak bulunur. Örnek 3.2.8 de olduğu gibi alt, üst, sağ ve sol dönen bileşen sayıları hesaplanarak Şekil 3.10 deki çoklu eğri elde edilir.

Şimdi  $D_n$  de tanımlı yönlendirilebilir homeomorfizmaların homotopi sınıflarına karşılık gelen örgüler (Artin 1925, Artin 1947) ve örgülerin çoklu eğriler kümesi üzerindeki etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden veren güncelleme kuralları (Dehornoy ve ark. 2008, Dynnikov 2002, Dynnikov ve Wiest 2007, Hall ve Yurttas 2009, Yurttas ve Hall 2017, Yurttas ve Hall 2018) tanıtılacaktır.

### 3.3. Güncelleme Kuralları

$D_n$  de yönlendirilebilir homeomorfizmaların homotopi sınıflarının grubu olan  $D_n$  in *Gönderim Sınıfları Grubu*  $MCG(D_n)$  ile gösterilsin. Yüzey homeomorfizmalarının dinamiksel özelliklerini anlamak için çoklu eğriler üzerindeki etkilerini anlamak gerekir.  $f : D_n \rightarrow D_n$  homeomorfizması  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisini  $f(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}_n$  laminasyonuna götürdüğünden  $MCG(D_n)$ ,  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisi iyi tanımlıdır.  $MCG(D_n)$ ,  $B_n/Z(B_n)$  bölüm grubuna izomorf olduğundan  $B_n$  örgü grubunun da  $\mathcal{L}_n$



Şekil 3.10.  $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; 1, 0)$

üzerindeki etkisi iyi tanımlıdır.  $D_n$  de gönderim sınıfları grubunun her bir elemanı örgülerle temsil edildiğinden örgülerin çoklu eğrileri birebir ve örten olacak şekilde tanımlayan Dynnikov koordinatları üzerindeki etkisini anlamak çok önemlidir.

**Teorem 3.3.5, güncelleme kuralları** (Dynnikov 2002, Hall ve Yurttaş 2009) olarak adlandırılan ve her bir  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, (1 \leq i \leq n-1)$  Artin örgü üreticinin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden vererek,  $B_n$  nin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden bulmaya olanak sağlayan kurallar sunmaktadır. Daha açık olarak güncelleme kuralları  $\rho(\sigma_i(\mathcal{L}))$  ve  $\rho(\sigma_i^{-1}(\mathcal{L}))$  vektörlerini  $\rho(\mathcal{L})$  cinsinden yazmamızı sağlar.

**Tanım 3.3.1.** (Artin 1925)  $B_n$  Artin örgü grubu ( $n$ -örgü grubu),  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  üreticileri aşağıdaki bağıntıları sağlayan sonlu üreteçli bir gruptur

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \quad |i-j| \geq 2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

**Tanımlar 3.3.2.**  $B_n$  de yarı twist

$$\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1)$$

ve tam twist

$$\theta_n = \Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n.$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 3.3.3.** (Chow 1948)  $n \geq 3$  için,  $B_n$  nin merkezi  $Z(B_n)$  tam twist tarafından üretilen sonsuz devirli bir altgruptur. Yani,  $Z(B_n) = \langle \theta_n \rangle$  dır.

**Teorem 3.3.4.**  $n = 0$  ve  $n = 1$  için  $MCG(D_n)$  aşıkardır.  $n > 1$  için  $MCG(D_n)$ ,  $B_n/Z(B_n)$  bölüm grubuna izomorftur.

Teorem 3.3.4,  $MCG(D_n)$  nin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisinin  $B_n$  nin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisini tanımladığını söylemektedir. Bununla birlikte örgülerin eğriler üzerindeki etkisi alışılmış notasyondan farklıdır: bileşke soldan sağa doğru alınır. Yani,  $C$  bir eğri  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$  olmak üzere  $(\beta_1\beta_2)(C) = \beta_2(\beta_1(C))$  dir.

$$\begin{aligned} [a+b] &= \max(a, b) \\ [ab] &= a+b \\ [a/b] &= a-b \\ [1] &= 0 \end{aligned}$$

olsun. Aşağıdaki teorem güncelleme kurallarını vermektedir.

**Teorem 3.3.5.**  $1 \leq i \leq n-1$  ve  $\sigma_i(a, b) = (a', b')$ ,  $\sigma_i^{-1}(a, b) = (a'', b'')$  olsun.  $O$  zaman  $j = i-1$  veya  $j = i$  dışında  $a'_j = a_j$ ,  $a''_j = a_j$ ,  $b'_j = b_j$  ve  $b''_j = b_j$  ve

- $i = 1$  ise

$$\begin{aligned} a'_1 &= \left[ \frac{a_1 b_1}{a_1 + 1 + b_1} \right], & b'_1 &= \left[ \frac{1 + b_1}{a_1} \right] \\ a''_1 &= \left[ \frac{1 + a_1(1 + b_1)}{b_1} \right], & b''_1 &= [a_1(1 + b_1)]; \end{aligned}$$

- $2 \leq i \leq n-2$  ise

$$\begin{aligned} a'_{i-1} &= [a_{i-1}(1 + b_{i-1}) + a_i b_{i-1}], & b'_{i-1} &= \left[ \frac{a_i b_{i-1} b_i}{a_{i-1}(1 + b_{i-1})(1 + b_i) + a_i b_{i-1}} \right] \\ a'_i &= \left[ \frac{a_{i-1} a_i b_i}{a_{i-1}(1 + b_i) + a_i} \right], & b'_i &= \left[ \frac{a_{i-1}(1 + b_{i-1})(1 + b_i) + a_i b_{i-1}}{a_i} \right]; \\ a''_{i-1} &= \left[ \frac{a_{i-1} a_i}{a_{i-1} b_{i-1} + a_i(1 + b_{i-1})} \right], & b''_{i-1} &= \left[ \frac{a_{i-1} b_{i-1} b_i}{a_{i-1} b_{i-1} + a_i(1 + b_{i-1})(1 + b_i)} \right], \\ a''_i &= \left[ \frac{a_{i-1} + a_i(1 + b_i)}{b_i} \right], & b''_i &= \left[ \frac{a_{i-1} b_{i-1} + a_i(1 + b_{i-1})(1 + b_i)}{a_{i-1}} \right]; \end{aligned}$$

- $i = n-1$  ise

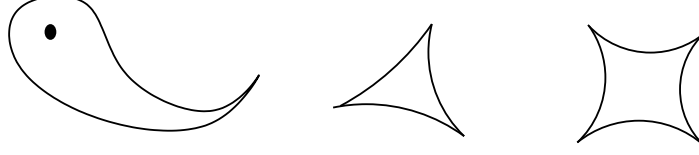
$$\begin{aligned} a'_{n-2} &= [a_{n-2}(1 + b_{n-2}) + b_{n-2}], & b'_{n-2} &= \left[ \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}(1 + b_{n-2})} \right] \\ a''_{n-2} &= \left[ \frac{a_{n-2}}{a_{n-2} b_{n-2} + 1 + b_{n-2}} \right], & b''_{n-2} &= \left[ \frac{a_{n-2} b_{n-2}}{1 + b_{n-2}} \right]. \end{aligned}$$

### 3.4. Train Track Grafikleri

Bu bölümde train track grafikleri (Bestvina ve Handel 1995, Hamidi ve Chen 1996, Menzel ve Parker 2003, Parker ve Series 2004) tanıtılacak, çoklu eğrilerin bu grafiklerle nasıl koordinatlandırıldığı gösterilecektir.



**Tanım 3.4.1.**  $D_n$  üzerinde  $\tau$  train track grafiği, *düğme* adı verilen köşelerden ve *dal* adı verilen kenarlardan oluşan ve her bir düğmesinde bir ve yalnız bir  $T_v(\tau)$  tanjant vektörü bulunan  $D_n$  e gömülü 1-boyutlu bir CW komplekstir. Ayrıca,  $D_n - \tau$  nun her bir bileşeni ya bir işaretlenmiş noktalı bir  $p$ -gen ( $p \geq 1$ ) ya da işaretlenmiş nokta içermeyen bir  $k$ -gen ( $k \geq 3$ ) olmalıdır (Şekil 3.11).



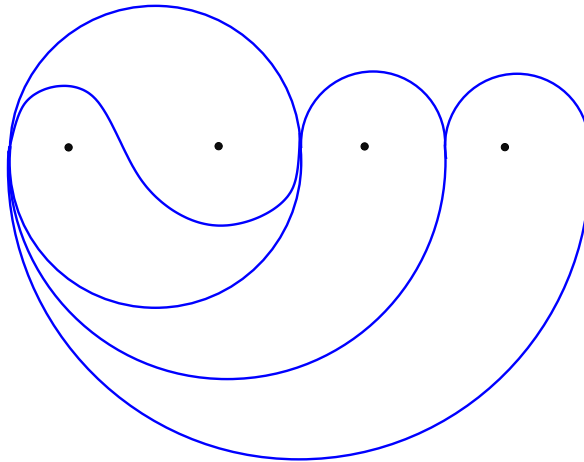
**Şekil 3.11.** Bir işaretlenmiş noktalı 1-gen ve işaretlenmiş nokta içermeyen bazı çokgenler

Her bir  $v$  düğmesinde  $T_v(\tau)$  tanjant vektörü için bir yön belirleyerek *gelendallar* ve *gidendallar* şöyle tanımlanabilir:  $v$  düğmesine bitişik bir  $e$  dalının yönü  $T_v(\tau)$  tanjant vektörünün yönüyle aynı ise  $e$  ye *gelendal*, aksi takdirde *gidendal* denir.  $D_n - \tau$  nun her bir bileşeni üçgen ya da bir 1-delikli 1-gen ise,  $\tau$  train track grafiğine *tamdır* denir.

Bu tezde özel bir train track grafiği olan  $\pi_1$ -train track grafikleri (Menzel ve Parker 2003, Parker ve Series 2004, Hamidi ve Chen 1996) kullanılacaktır (Şekil 3.14)

**Tanım 3.4.2** ( $\pi_1$ -Train Track Grafiği).  $D_n$  de  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ),  $i$ -inci işaretlenmiş nokta ile  $i + 1$ -inci işaretlenmiş nokta arasındaki aralığı gösterebilir.  $\tau$   $\pi_1$ -train track grafiği aşağıdaki koşulları sağlar:

- i.  $\tau$  nun tüm düğmeleri  $x$ -ekseni üzerindedir ve her bir  $x_i$  aralığında  $\tau$  nun en fazla bir düğmesi vardır.
- ii.  $v_i$  ve  $v_j$  sırasıyla  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarındaki düğmeler olmak üzere  $\tau$  nun  $v_i$  ve  $v_j$  yi birleştiren en fazla bir dalı vardır.
- iii.  $x_{ij}$ ,  $\tau$  nun  $v_i$  ve  $v_j$  düğmelerini birleştiren dalı olmak üzere  $i \neq j$  dir.



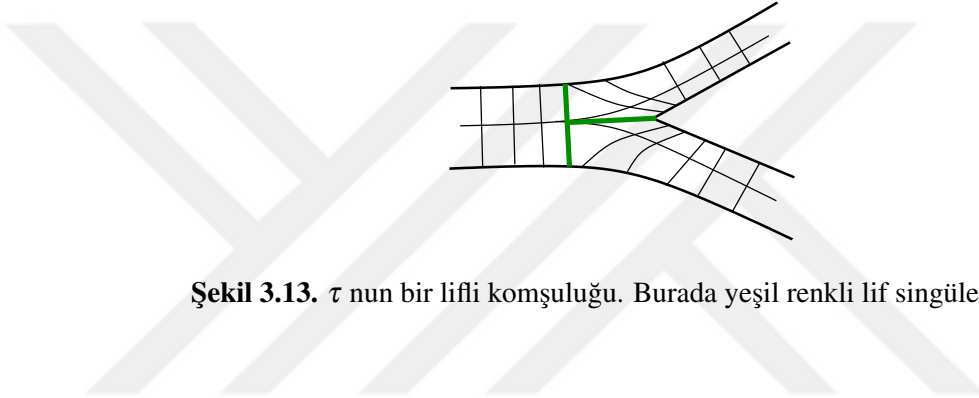
**Şekil 3.12.**  $D_4$  te bir  $\pi_1$ -train track grafiği

**Tanım 3.4.3.**  $\tau$  üzerinde tanımlı  $\mu$  çapraz ölçümü en az bir  $e$  dalı için  $\mu(e) \neq 0$  olacak şekilde  $\tau$  nun her bir dalına  $\mu(e) \in \mathbb{R}^+$  sayısı tayin eden ve *düğme koşulları* nı sağlayan bir fonksiyondur. Yani, her bir  $v$  düğmesi için

$$\sum_{v \text{ deki gelen dallar}} \mu(e) = \sum_{v \text{ deki giden dallar}} \mu(e)$$

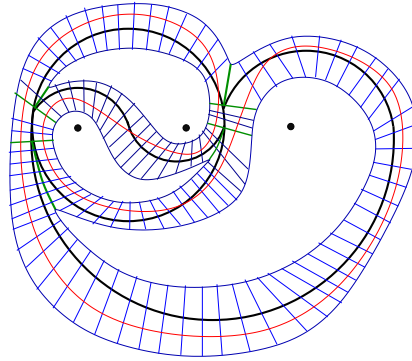
dir.  $\mu$  çapraz ölçümü ile donatılmış bir train track grafiğine *ölçülü train track grafiği* denir.  $\tau$  üzerinde tanımlı çapraz ölçümlerin uzayı  $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}}(\tau)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.4.4.**  $\tau$  nun  $N$  komşuluğunun Şekil 3.13 de olduğu gibi  $r : N \searrow \tau$  retraksiyonunun lifleri ile donatıldığı lifli komşuluğunu düşünelim. Burada,  $\tau$  nun her bir düğmesi için  $r^{-1}(v)$  Şekil 3.13 de gösterildiği gibi bir *singüler lif* tir. Verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin homotopi sınıfında  $N$  deki her bir life çapraz olan bir temsilcisi varsa  $\mathcal{L}$ ,  $\tau$  tarafından taşınıyor denir ve  $\mathcal{L} \prec \tau$  olarak yazılır.  $\tau$  tarafından taşınan çoklu eğrilerin uzayını  $\mathcal{L}(\tau)$  ile göstereceğiz.



**Şekil 3.13.**  $\tau$  nun bir lifli komşuluğu. Burada yeşil renkli lif singüler lifdir.

Şekil 3.14 de verilen bir  $\pi_1$ -train track grafiği tarafından taşınan bir eğriyi göstermektedir.

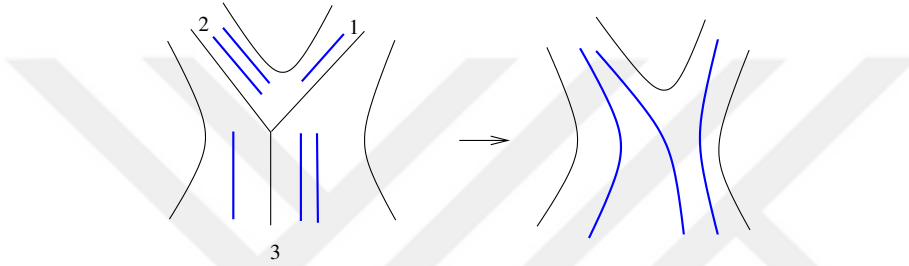


**Şekil 3.14.** Kırmızı eğri  $\tau$  tarafından taşınmaktadır

**Uyarı 3.4.5.** Yukarıdaki tanımlar ölçülü train track grafiklerinin  $\mathcal{L}_n$  çoklu eğriler uzayı için bir koordinat sistemi verdiğini söyler: Bir çoklu eğrinin  $\tau$  tarafından taşınabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\tau$  üzerinde tanımlı bir çapraz ölçüden elde edilmesidir (yani  $\tau$  nun her bir düğmesi için düğme koşullarını sağlamasıdır). Sezgisel olarak,  $\mathcal{L}$  deki her bir eğri tren raylarından geçen bir tren gibi düşünülebildiğinden train track tarafından taşınmayan bir eğri raylardan çıkan bir trene benzetilebilir. Ayrıca, aşağıda detaylı bir şekilde açıklandığı üzere verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $\tau$  train track koordinatları  $\tau$  nun her bir dalına paralel eğri parçası sayılarından oluşacağından  $\tau$  nun her bir  $e$  dalı için  $\mu(e) \in \mathbb{Z}^+$  dir.

### 3.5. Çoklu Eğrilerin Train Track Koordinatlarından Oluşturulması

$\tau, D_n$  de  $e_1, e_2, \dots, e_k$  dalları ile verilen bir train track grafiği olsun.  $\tau$  üzerinde  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)) \in \mathbb{Z}_+^k$  çapraz ölçümü verilsin.  $\tau$  nun  $N_\tau$  lifli komşuluğunda her bir  $i$  için  $e_i$  dalına paralel  $\mu(e_i)$  ayrık yay çizelim.  $\mu$  çapraz ölçüm olduğundan Tanım 3.4.3 gereği her bir  $v$  düğmesinde gelendalların sayısı giden dalların sayısına eşit olduğundan Şekil 3.15 da gösterildiği gibi gelendallar gidendallar ile ayrık bir şekilde tek türlü birleştirilerek basit kapalı bir eğri sistemi elde edilir.  $D_n - \tau, 0 - gen, 1 - gen, 2 - gen$ , bir noktası işaretlenmiş  $0 - gen$  veya halka içermediğinden  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k))$  bir çoklu eğri verir (Şekil 3.16). Buradan,  $\psi_\tau : \mathcal{W}_\mathbb{Z}(\tau) \rightarrow \mathcal{L}(\tau)$  fonksiyonuna ulaşılır. Tersine,  $\mathcal{L}$  nin  $\tau$  tarafından taşındığını varsayalım. O zaman,  $\mathcal{L}$  tarafından  $\tau$  nun  $e_1, \dots, e_k$  dallarına atanan  $\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)$  tamsayıları  $\mathcal{L}$  nin  $L \subseteq N_\tau$  temsilcisinin  $e_i$  dalı üzerinden (yön gözetmeksizin) geçme sayısı olarak verilir ve bunlar düğme koşullarını sağlar.

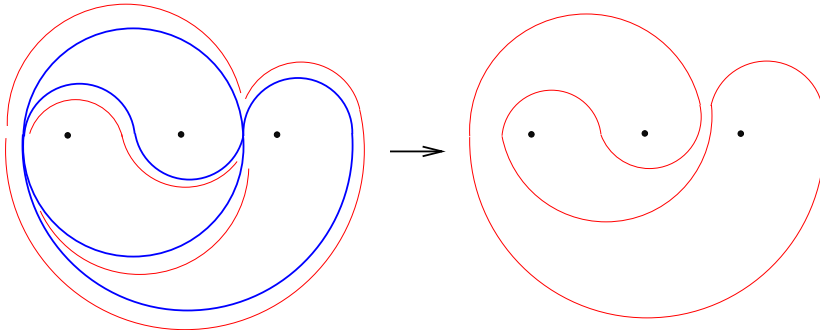


Şekil 3.15. Her bir düğmede eğri parçaları tek türlü birleştirilir

Buradan,  $\psi_\tau^{-1} : \mathcal{L}(\tau) \rightarrow \mathcal{W}_\mathbb{Z}(\tau)$  ters fonksiyonu elde edilir. Sonuç olarak,  $\psi_\tau : \mathcal{W}_\mathbb{Z}(\tau) \rightarrow \mathcal{L}(\tau)$  birebir ve örten bir dönüşümdür.

**Uyarı 3.5.1.**  $\tau, D_n$  de  $e_1, e_2, \dots, e_k$  dalları ile verilen bir train track grafiği ve  $\mathcal{L} \prec \tau$  olsun.  $\mathcal{L}$  nin  $\tau$  nun dallarına tayin ettiği  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)) \in \mathbb{Z}_+^k$  çapraz ölçümüne  $\mathcal{L}$  nin ( $\tau$  ya göre) *train track koordinatları* denir. Kolaylık açısından,  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k))$  koordinatlarını  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ile göstereceğiz.

Tez boyunca  $e_1, e_2, \dots, e_k$  sembollerinin, ne zaman dallara, ne zaman koordinatlara karşılık geldikleri açıkça belirtilecektir.

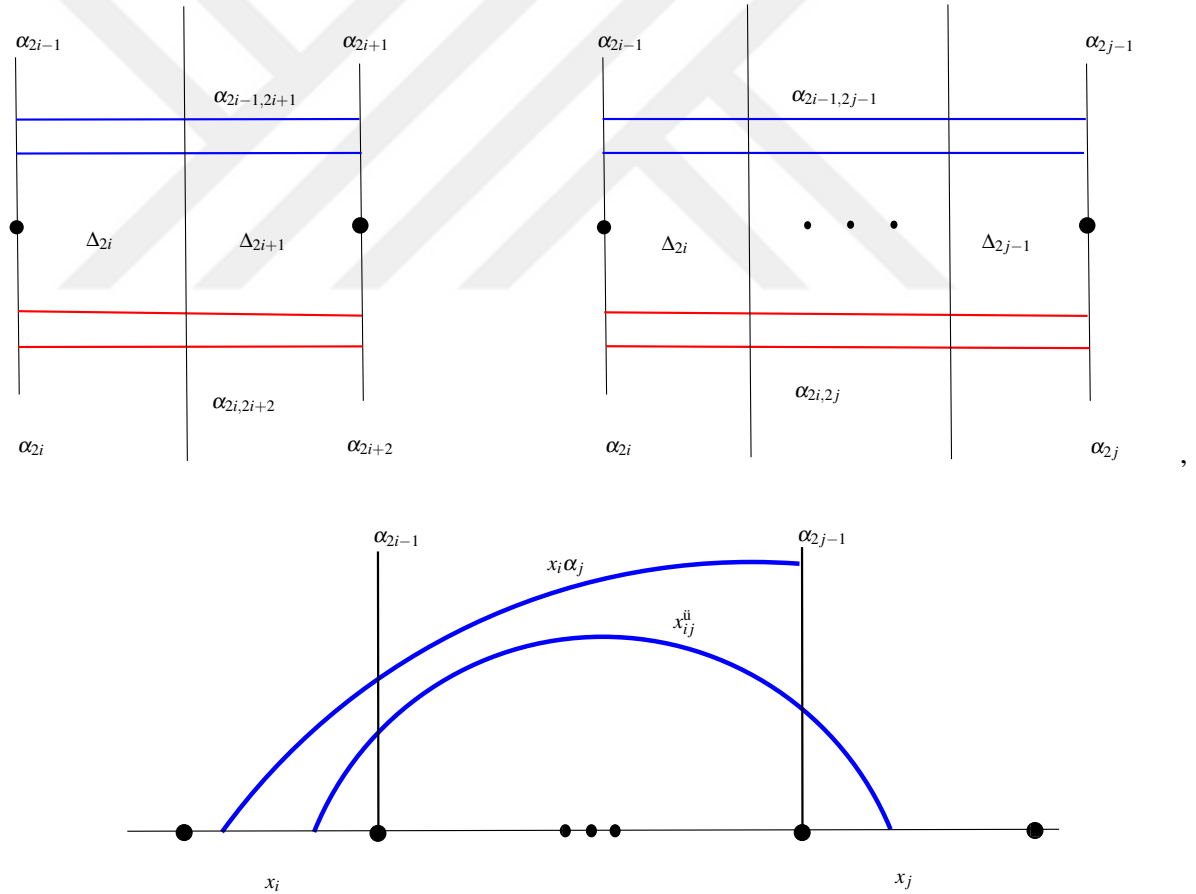


Şekil 3.16. Verilen bir eğrinin train track koordinatlarından oluşturulması

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, öncelikle  $D_n$  de verilen bir çoklu eğrinin  $\pi_1$ -train track koordinatlarını Dynnikov koordinatlarına bağlayan geçiş formülleri verilecektir. Daha sonra  $D_n$  de verilen keyfi bir çoklu eğrinin *elemanter* olarak adlandırılan özel bir çoklu eğri ile olan geometrik kesişim sayısı  $\pi_1$ -train track koordinatlarından hesaplanacaktır. Ayrıca,  $D_3$  te verilen keyfi iki çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını hesaplayan ve determinant hesabına dayanan iyi bilindik bir formülün  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazımı verilecektir. Bunun için Tanım 4.1.1 de tanıtılacak yol bileşenlerinden yararlanılacaktır. Bu bölümde, Dynnikov koordinatlarının hesaplanmasında ihtiyaç duymadığımız ancak  $\pi_1$ -train track koordinatlarının hesaplanması için gerekli olacak ek yaylar kullanılacaktır. Bunlar birinci işaretlenmiş noktanın üstünde ve altındaki  $\alpha_{-1}$ ,  $\alpha_0$  yayları ile solundaki  $\beta_0$  yayı ve  $n$ -inci işaretlenmiş noktanın üstünde ve altındaki  $\alpha_{2n-3}$  ve  $\alpha_{2n-2}$  yayları ile sağdaki  $\beta_n$  yayı olacaktır.

##### 4.1. $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$ Bölgesinde Yol Bileşenleri



Şekil 4.1.  $L$  nin  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  ve  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgelerindeki yol bileşenleri

**Tanımlar 4.1.1.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  nin *minimal* bir temsilcisi olsun ( $0 \leq i < j \leq n-1$ ).  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  yol bileşeni (sırasıyla  $\alpha_{2i,2i+2}$  yol bileşeni),  $L$  nin uç noktaları  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i+1}$  (sırasıyla  $\alpha_{2i}$  ve  $\alpha_{2i+2}$ ) yayları üzerinde olan  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  bölgesindeki bağlantılı bileşenidir (Şekil 4.1).

Benzer şekilde,  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgesinde  $L$  nin aşağıdaki bağlantılı bileşenlerini tanımlayabiliriz (Şekil 4.1):

- $\alpha_{i,j}$  yol bileşeni; uç noktaları  $\alpha_i$  ve  $\alpha_j$  üzerinde olan ve hiç bir  $x_k$  ( $1 + \lceil i/2 \rceil \leq k \leq \lceil j/2 \rceil$ ) aralığını kesmeyen
- $x_i \alpha_j$  yol bileşeni ; uç noktaları  $x_i$  aralığı ve  $\alpha_j$  yayı üzerinde olan ve hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq \lceil j/2 \rceil$ ) aralığını kesmeyen
- $x_{ij}^{\ddot{u}}$  yol bileşeni; uç noktaları  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarında olan, hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını ve  $\alpha_{2k}$  ( $i \leq k \leq j-1$ ) yayını kesmeyen
- $x_{ij}^a$  yol bileşeni; uç noktaları  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarında olan, hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını ve  $\alpha_{2k-1}$  ( $i \leq k \leq j-1$ ) yayını kesmeyen

bağlantılı bileşenlerdir.

**Uyarı 4.1.2.** Verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisi için Tanım 4.1.1 de hesaplanan  $x_{ij}$  sayılarının  $\mathcal{L}$  nin taşıdığı  $\pi_1$ -train track grafikleri hakkında bilgi verdiğine dikkat ediniz. Örneğin,  $x_{0,3}^{\ddot{u}} \neq 0$  özelliğindeki bir  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi Şekil 3.16 de verilen  $\pi_1$ -train track grafiği tarafından taşınmaz. Üstelik, verilen bir  $\tau$   $\pi_1$ -train track grafiği için  $\mathcal{L} \prec \tau$  ise  $x_{ij}$  sayıları Tanım 3.4.2 de verilen  $\pi_1$ -train track koordinatlarına ulaşmamızı sağlar. Ayrıca, train track koordinatlarından  $x_{ij}$  yol bileşenlerine ulaşabiliriz: Verilen bir  $e$  dalı diskin üst veya alt yarısında kapsıyor ise bir tek  $x_{ij}$  yol bileşenine karşılık gelirken  $e$  dalı diskin hem üst hem de alt yarısını kesiyorsa birden fazla  $x_{ij}$  yol bileşeninin bir birleşimidir (Örneğin, Şekil 4.7 de gösterilen  $\pi_1$ -train track grafiği için  $e_3$  dalı  $x_{1,2}^{\ddot{u}}$  ve  $x_{2,3}^a$  yol bileşenlerinin birleşimidir). Bu durumda, birleşimdeki  $x_{ij}$  yol bileşenlerinin sayısı  $e$  dalına karşılık gelen train track koordinatıdır.

**Yardımcı Teorem 4.1.3.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  nin minimal bir temsilcisi olsun.  $\lceil x \rceil$ ,  $x$  den küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere,  $L$  nin  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  bölgesindeki yol bileşenleri

$$\alpha_{i,i+2} = \min \left( \alpha_i - b_{\lceil i/2 \rceil}^+, \alpha_{i+2} - (-b)_{1+\lceil i/2 \rceil}^+ \right) \quad (7)$$

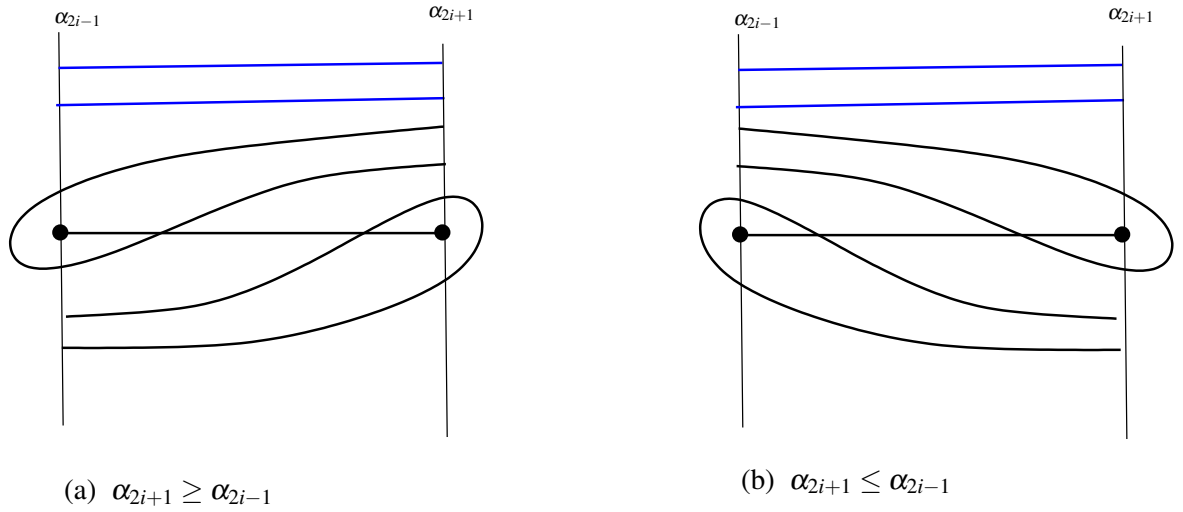
olarak verilir.

**Uyarı 4.1.4.**  $i = j$  durumu için formüllerin özel durumuna dikkat ediniz. Yani,  $\alpha_{i,i} = \alpha_i$  dir.

**İspat.** Genelliği kaybetmeden ispatı  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  için yapacağız.  $x_i$ ,  $L$  nin  $i+1$ -inci işaretlenmiş nokta ile  $i+2$ -inci işaretlenmiş nokta arasındaki aralığı kesme sayısını göstereceğiz.

(a)  $\alpha_{2i+1} \geq \alpha_{2i-1}$  olsun. Şekil 4.2(a) da gösterildiği gibi

$$\begin{aligned} \alpha_{2i+1} &= \alpha_{2i-1} - b_i^+ + x_i - b_i^+ \\ &= \alpha_{2i-1} + x_i - 2b_i^+ \end{aligned} \quad (8)$$



**Şekil 4.2.**  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

dır. Ayrıca

$$\alpha_{2i+1} = \alpha_{2i-1,2i+1} + x_i - b_i^+ \quad (9)$$

dır. (8) ve (9) dan

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \alpha_{2i-1} - b_i^+$$

bulunur.

(b)  $\alpha_{2i+1} \leq \alpha_{2i-1}$  iken Şekil 4.2(b) den yararlanarak

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \alpha_{2i+1} - (-b)_{i+1}^+$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \begin{cases} \alpha_{2i-1} - b_i^+ & \alpha_{2i+1} \geq \alpha_{2i-1} \\ \alpha_{2i+1} - (-b)_{i+1}^+ & \alpha_{2i+1} \leq \alpha_{2i-1} \end{cases}$$

bulunur. Benzer şekilde  $\alpha_{2i,2i+2}$  yol bileşeni

$$\alpha_{2i,2i+2} = \begin{cases} \alpha_{2i} - b_i^+ & \alpha_{2i+2} \geq \alpha_{2i} \\ \alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ & \alpha_{2i+2} \leq \alpha_{2i} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.  $\alpha_{2i+2} \geq \alpha_{2i}$  eşitsizliği

$$\alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ \geq \alpha_{2i} - b_i^+$$

eşitsizliğine ve  $\alpha_{2i+2} \leq \alpha_{2i}$  eşitsizliği

$$\alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ \leq \alpha_{2i} - b_i^+$$

eşitsizliğine denk olduğundan (Şekil 4.2)

$$\alpha_{i,i+2} = \min \left( \alpha_i - b_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}^+, \alpha_{i+2} - (-b)_{1+\lceil \frac{i}{2} \rceil}^+ \right)$$

yazılabilir.

**Yardımcı Teorem 4.1.5.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  nin minimal bir temsilcisi olsun.  $L$  nin  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgesindeki yol bileşenleri

$$\alpha_{2i-1,2j-1} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k-1,2k+1}) \quad (10)$$

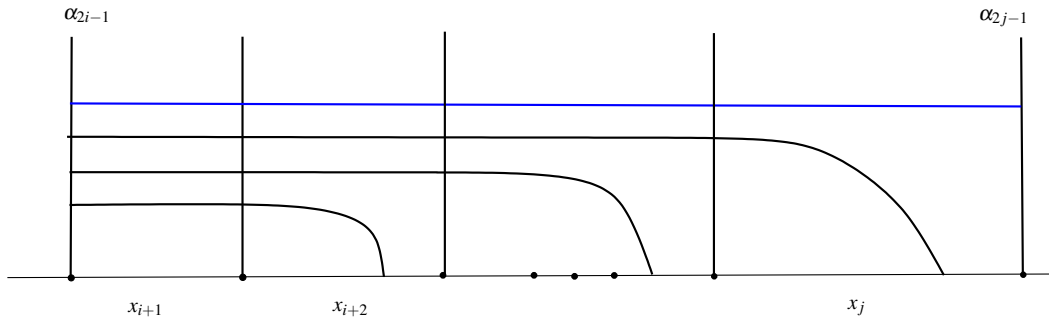
$$\alpha_{2i,2j} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k,2k+2}) \quad (11)$$

dır.

**İspat.** Genelliği kaybetmeden ispatı  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  için yapacağız.  $\alpha_{2i,2j}$  benzer şekilde hesaplanır. Şekil 4.3 de görüldüğü gibi  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  yol bileşeni her bir  $\alpha_{2k-1}$  ( $i \leq k \leq j$ ) yayını kesen ancak hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını kesmeyen bir yol bileşeni olduğundan böyle bileşenlerin sayısı  $\Delta_{2k-1} \cup \Delta_{2k}$  ( $i \leq k \leq j-1$ ) bölgelerindeki  $\alpha_{2k-1,2k+1}$  bileşenlerinin minimumuna eşittir. Yani,

$$\alpha_{2i-1,2j-1} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k-1,2k+1})$$

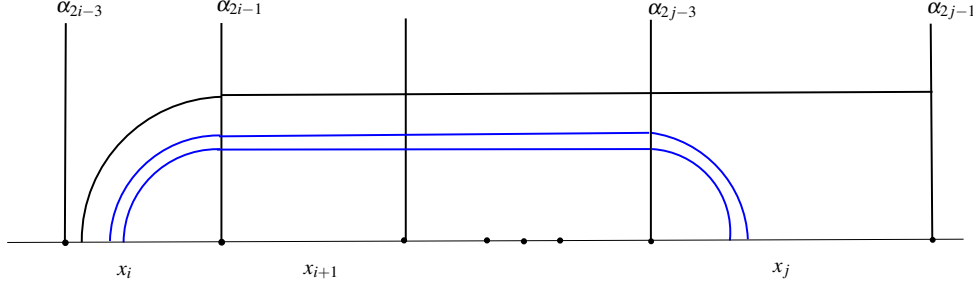
dır.



Şekil 4.3.  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  yol bileşenlerinin hesaplanması







Şekil 4.5.  $x_{ij}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

**İspat.** Tanımlar 4.1.1 gereği ve Şekil 4.5 ten

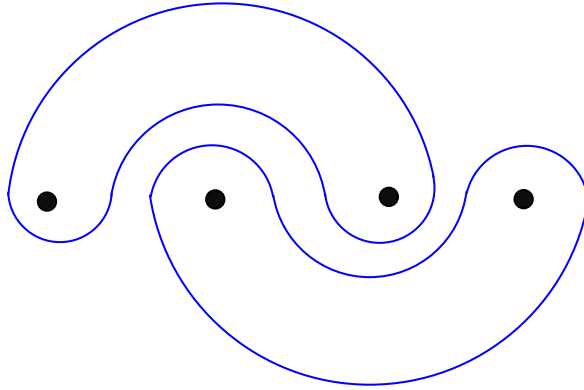
$$x_i \alpha_{2j-3} = x_{i,j}^{\ddot{u}} + x_i \alpha_{2j-1}$$

dolayısıyla (14) elde edilir. (15) benzer şekilde hesaplanır.

**Uyarı 4.1.9.** Yardımcı Teorem 4.1.6 da  $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$  ve Teorem 4.1.8 de  $x_{i,j} = x_{j,i}$  olduğuna dikkat ediniz.

**Örnek 4.1.10.**  $D_4$  te Dynnikov koordinatları  $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; -1, 1)$  olan çoklu eğriyi düşünelim. Yardımcı Teorem 3.2.12 yardımıyla  $\mathcal{L}$  nin üçgen koordinatları

$$\delta(\mathcal{L}) = (3, 1, 1, 3; 2, 4, 2)$$



Şekil 4.6. Dynnikov koordinatları  $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; -1, 1)$  olan  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi

olarak bulunur.

$\mathcal{L}$  nin  $x_{i,j}^{\ddot{u}}, x_{i,j}^a$  ( $0 \leq i, j \leq 4$ )  $\pi_1$ -train track koordinatlarını bulmak için Teorem 4.1.8 de belirtilen

$$x_{i,j}^{\ddot{u}} = x_i \alpha_{2j-3} - x_i \alpha_{2j-1}$$

$$x_{i,j}^a = x_i \alpha_{2j-2} - x_i \alpha_{2j}$$

formülleri kullanılır. Burada sadece  $x_{1,2}^{\ddot{u}}$  koordinatını hesaplayacağız. Diğer koordinatlar benzer şekilde bulunur.

$$x_{1,2}^{\ddot{i}} = x_1 \alpha_1 - x_1 \alpha_3$$

olduğundan  $x_1 \alpha_1$  ve  $x_1 \alpha_3$  sayılarını hesaplamalıyız. Yardımcı Teorem 4.1.6 dan,

$$x_1 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_1 - \alpha_{-1} \alpha_1$$

$$x_1 \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_{-1} \alpha_3$$

dır. Yardımcı Teorem 4.1.3 ve Yardımcı Teorem 4.1.5 ten,

$$\alpha_{-1,1} = \min(\alpha_{-1} - b_0^+, \alpha_1 - (-b)_1^+) = \min(1 - 0, 3 - 0) = 1$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_1 = 3$$

$$\alpha_{1,3} = \min(\alpha_1 - b_1^+, \alpha_3 - (-b)_2^+) = \min(3 - 0, 1 - 0) = 1$$

$$\alpha_{-1,3} = \min(\alpha_{-1,1}, \alpha_{1,3}) = \min(1, 1) = 1$$

bulunur. Dolayısıyla,  $x_1 \alpha_1 = 2$  ve  $x_1 \alpha_3 = 0$  olarak hesaplanır. Buradan,

$$x_{1,2}^{\ddot{i}} = x_1 \alpha_1 - x_1 \alpha_3 = 2$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$x_{0,1}^{\ddot{i}} = x_{0,2}^{\ddot{i}} = x_{0,4}^{\ddot{i}} = x_{1,3}^{\ddot{i}} = x_{1,4}^{\ddot{i}} = x_{2,3}^{\ddot{i}} = x_{2,4}^{\ddot{i}} = 0, x_{1,2}^{\ddot{i}} = 2, x_{3,4}^{\ddot{i}} = 1$$

olarak hesaplanır.  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi Şekil 4.6 da resmedilmiştir ve taşındığı  $\pi_1$ -train track grafiklerinden birisi Şekil 4.7 de gösterilmiştir.  $\mathcal{L}$  nin bu train track grafiğine göre koordinatları  $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (1, 1, 0, 0, 1)$  dır.

**Uyarı 4.1.11.**  $x_{i,j}$  yol bileşenleri verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $x_i$  aralığını kesme sayısının

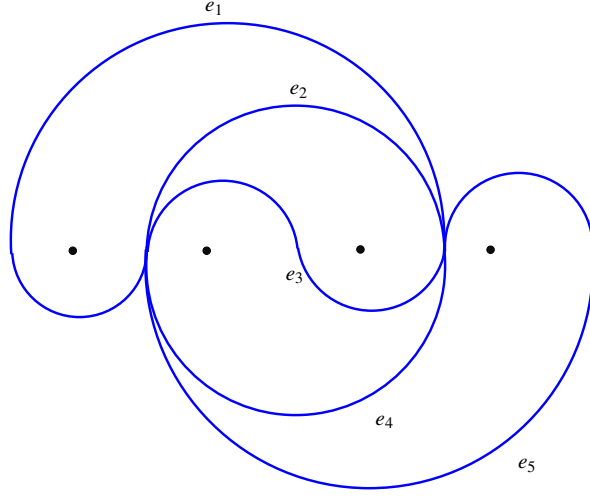
$$x_i = \sum_{m \neq i} x_{i,m}^{\ddot{i}} + x_{i,m}^a$$

olduğunu gözlemleyiniz.

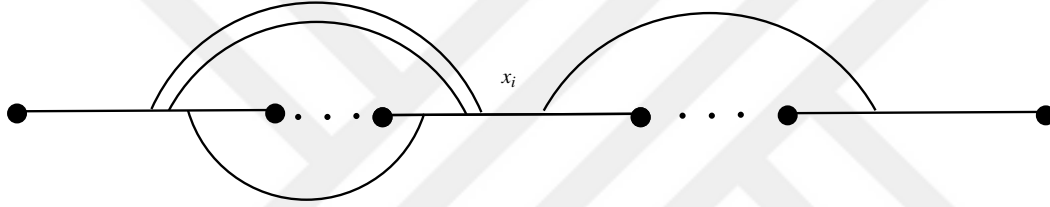
**Yardımcı Teorem 4.1.12.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  nin minimal bir temsilcisi olsun.  $K, D_n$  de tüm köşeleri işaretlenmiş noktalar üzerinde olan ve iç kısmında hiçbir işaretlenmiş nokta bulunmayan bir dörtgen olsun.  $x, y, z, t, e$  ve  $f$  sembolleri  $L$  nin  $K$  dörtgeninin Şekil 4.9 de gösterilen kenarları ve köşegenleri ile olan kesişim sayılarını gösterebilir. Bu durumda

$$e + f = \max(x + y, z + t) \quad (16)$$

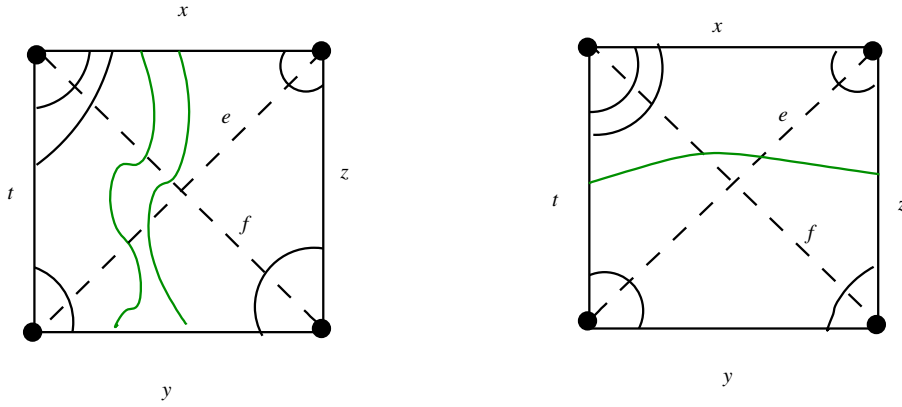
dir.



Şekil 4.7.  $\mathcal{L}$  nin train track koordinatları  $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$



Şekil 4.8.  $x_i$  aralığını kesen yol bileşenleri



Şekil 4.9.  $K$  karesinde  $L$  nin yol bileşenleri

**İspat.**  $\Omega$ ,  $K$  dörtgeni tarafından sınırlanan bölgeyi belirtsin.  $xy$  ve  $zt$ ,  $\Omega$  da  $L$  nin uç noktaları sırasıyla  $x$  ve  $y$  ile  $z$  ve  $t$  kenarları üzerinde bulunan eğri parçaları olsun.  $L \cap \Omega$  nın bileşenleri ayrık olduğundan ( $L$  basit kapalı eğrilerden oluştuğundan)  $xy$  ve  $zt$  sayılarından en az biri sıfır olmalıdır.  $xy = 0$  olduğunu varsayalım. O zaman,  $z + t \geq x + y$  ve

$$x = xz + xt$$

$$y = yz + yt$$

$$z = xz + yz + zt$$

$$t = xt + yt + zt$$

$$e = xz + yt + zt$$

$$f = xt + yz + zt$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} e + f &= xz + yz + xt + yt + 2zt \\ &= z + t \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,  $zt = 0$  ise  $x + y \geq z + t$  ve  $e + f = x + y$  bulunur. Bu durumda,

$$e + f = \max(x + y, z + t)$$

dır.

**Yardımcı Teorem 4.1.13.**  $x_{i,j}$  yol bileşenleri verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin üçgen koordinatları  $\delta(\mathcal{L}) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{3n-5} \setminus \{0\}$

$$\alpha_{2i-1} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq i \\ i+1 \leq m \leq n}} x_{k,m}^i \quad \text{ve} \quad \alpha_{2i} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq i \\ i+1 \leq m \leq n}} x_{k,m}^a$$

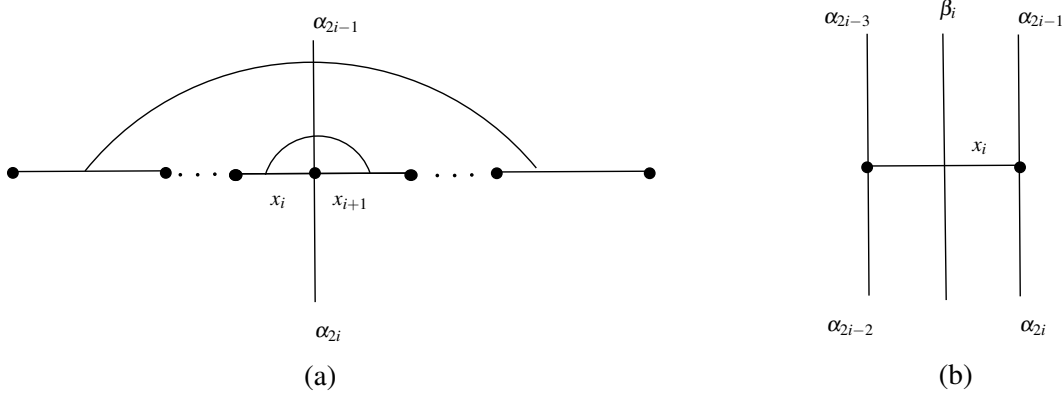
$$\beta_i = \max(\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-3} + \alpha_{2i}) - x_i$$

olarak verilir.

**İspat.**  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i}$  üzerindeki kesişimlerin, uç noktaları  $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktanın solunda ve sağındaki aralıklar üzerinde bulunan  $x_{k,m}$  bileşenlerinden geldiği Şekil 4.10(a) dan açıktır.  $\beta_i$  üzerindeki kesişim sayısını hesaplamak için Yardımcı Teorem 4.1.12 den yararlanacağız.  $D_n$  in sınırı  $\partial D_n$  tek bir  $O$  noktası ile eşleştirildiğinde  $i$  ve  $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktalar ile  $O$  noktasının köşeler,  $\alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-1}, \alpha_{2i-3}$  ve  $\alpha_{2i}$  yaylarının kenarlar,  $\beta_i$  yayı ile  $x_i$  aralığının köşegenler olduğu “dejenere” bir dörtgen elde edilir (Şekil 4.10(b)). O zaman (16) dan

$$\beta_i = \max(\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-3} + \alpha_{2i}) - x_i$$

bulunur.

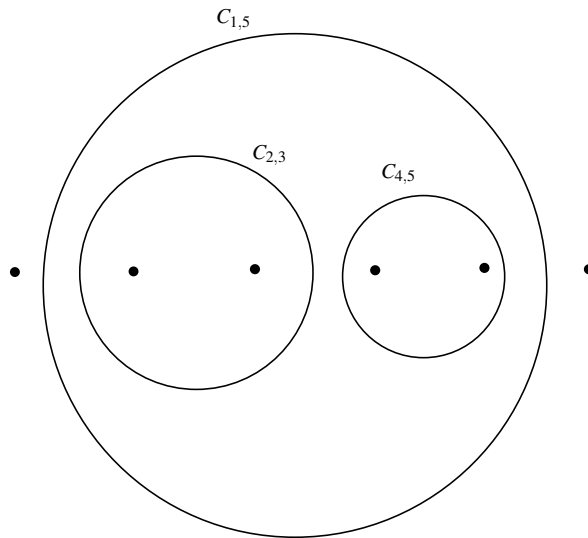


Şekil 4.10.  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i}$  yayları üzerindeki kesişimler ile  $\beta_i$  ve  $x_i$  nin köşegenler olduğu dörtgen

## 4.2. Çoklu Eğrilerin Geometrik Kesişim Sayısı

Hesaplamalı topolojide çoklu eğriler ile ilgili önemli bir kombinatorik bir problem, bir yüzeyde verilen iki çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını polinomsal zamanda hesaplayan bir algoritma bulmaktır. Literatürde bu tür algoritmalar verilmiş olsa da (Schaefer ve ark. 2008) global koordinatları (çoklu eğrileri tek türlü belirleyen koordinatlar) kullanan bir algoritma yüksek cinsli yüzeyler için halen bulunamamıştır. Bu problem  $D_n$  de tanımlı çoklu eğriler için Yurttaş ve Hall tarafından (Yurttaş ve Hall 2018) Dynnikov koordinat Sistemini kullanan ve kuadratik zamanda çalışan bir algoritma verilerek çözülmüştür. Ayrıca keyfi bir çoklu eğri ile *elemanter* olarak adlandırılan belli tipteki bir çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını hesaplayan bir formül Dynnikov koordinatları yardımıyla Yurttaş tarafından verilmiştir (Yurttaş 2013).

Yukarıda tanıtılan  $\pi_1$ -train track grafiği koordinatlarını Dynnikov koordinatlarına bağlayan geçiş formülleri sayesinde bu formüller train track grafiği koordinatları cinsinden de yazılabilecektir (Örnek 4.2.7 ve Örnek 4.2.8).



Şekil 4.11.  $D_5$  te bazı elemanter eğriler

**Tanım 4.2.1.**  $D_n$  de  $x$ -ekseni ile olan geometrik kesisim sayısı 2 olan basit kapalı eğriye *elemanterdir* denir. Her bir bağlantılı parçası elemantar olan çoklu eğriye elemantar çoklu eğri denir.  $1 \leq i < j < n$  veya  $1 < i < j \leq n$  için  $C_{ij} \in \mathcal{L}_n D_n$  de  $\{i, i+1, \dots, j\}$  işaretlenmiş noktaları kapsayan elemantar eğrilerin homotopi sınıfını gösterebiliriz (Şekil 4.11). O zaman,  $C_{ij}$  elemantar eğrisinin Dynnikov koordinatları  $i > 1$  için  $b_{i-1} = -1$ ,  $j < n$  için  $b_{j-1} = 1$  ve diğer tüm  $k$  indisleri için  $b_k = 0$  olmak üzere

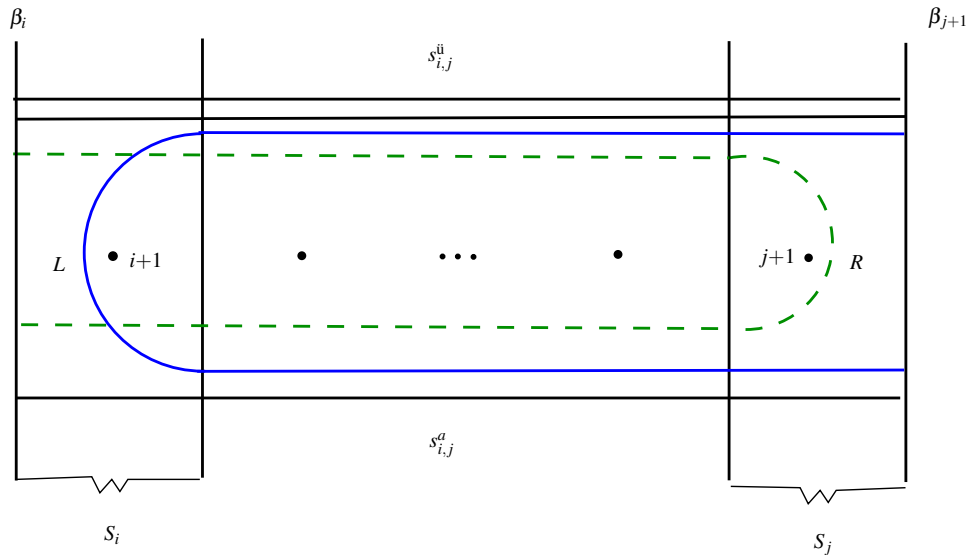
$$\rho(C_{ij}) = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_{n-2})$$

dir. Ayrıca,  $\tau$   $\pi_1$ -train track grafiği ve  $C_{ij} \prec \tau$  ise  $C_{ij}$  nin  $\tau$  ya göre koordinatları  $x_{i-1,j}^{\ddot{u}} = x^a = 1$  ve  $(k, m) \neq (i, j)$  için  $x_{k,m}^{\ddot{u}} = x_{k,m}^a = 0$  olarak verilir.

$D_n$  de verilen keyfi bir çoklu eğrinin *elemantar* olarak adlandırılan belli tipteki bir çoklu eğri ile olan geometrik kesişim sayısını Dynnikov koordinatlarından hesaplayan aşağıdaki sonuçların ispatları için (Yurttaş 2013, Yurttaş ve Hall 2018) e bakınız.

**Tanım 4.2.2.**  $S_{i,j} = \bigcup_{i \leq k \leq j} S_k$  olsun.  $L$  nin  $S_{i,j}$  de *yol bileşeni*  $L \cap S_{i,j}$  deki bağlantılı bileşendir.  $S_{i,j}$  de

$s_{i,j}^{\ddot{u}}$  *üst bileşenin* uç noktaları  $\beta_i$  ve  $\beta_{j+1}$  de olan ve hiç bir  $\alpha_{2k}$  ( $i \leq k \leq j$ ) yayını kesmeyen bileşendir.  $S_{i,j}$  de  $s_{i,j}^a$  *alt bileşeni* uç noktaları  $\beta_i$  ve  $\beta_{j+1}$  üzerinde olan ve hiç bir  $\alpha_{2k-1}$  ( $i \leq k \leq j$ ) yayını kesmeyen bileşendir. (Şekil 4.12).  $S_{i,j}$  de  $R_{i,j}$  *büyük sağ dönen bileşenin* her iki uç noktası  $\beta_i$  yayı üzerinde olan ve  $x$ -eksenini sadece  $\beta_{j+1}$  ile  $j+1$ -inci işaretlenmiş nokta arasında kesen bileşendir.  $S_{i,j}$  de  $L_{i,j}$  *büyük sol dönen bileşenin* her iki uç noktası  $\beta_{j+1}$  yayı üzerinde olan ve  $x$ -eksenini sadece  $\beta_i$  ile  $i+1$ -inci işaretlenmiş nokta arasında kesen bileşendir.



**Şekil 4.12.**  $S_{i,j}$  bölgesindeki yol bileşenleri

Yardımcı Teorem 3.2.6 yı kullanarak  $S_{i,j}$  bölgesindeki yol bileşenleri hesaplanabilir.

**Yardımcı Teorem 4.2.3.**  $S_{i,j}$  de alt ve üst yol bileşenleri sırasıyla

$$s_{i,j}^{\ddot{u}} = \min_{i \leq k \leq j} \{\alpha_{2k-1} - |b_k|\} \quad \text{and} \quad s_{i,j}^a = \min_{i \leq k \leq j} \{\alpha_{2k} - |b_k|\}$$

olarak verilir. Dolayısıyla,  $s_{i,j} = s_{i,j}^{\ddot{u}} + s_{i,j}^a$  toplamı  $S_{i,j}$  deki alt ve üst yol bileşenler toplamıdır. Ayrıca,

$$L_{i,j} = \min(s_{i+1,j}^{\ddot{u}} - s_{i,j}^{\ddot{u}}, s_{i+1,j}^a - s_{i,j}^a, (-b_i)^+)$$

$$R_{i,j} = \min(s_{i,j-1}^{\ddot{u}} - s_{i,j}^{\ddot{u}}, s_{i,j-1}^a - s_{i,j}^a, b_j^+)$$

Teorem 4.2.4 in ispatı (Yurttaş 2013, Yurttaş ve Hall 2018) da bulunabilir.

**Teorem 4.2.4.** Üçgen koordinatları  $(\alpha, \beta)$  olan  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisi verilsin.  $\mathcal{L}$  nin  $C_{ij} \in \mathcal{L}_n$  ile olan geometrik kesişim sayısı  $i(\mathcal{L}, C_{ij})$ ,

$$i(\mathcal{L}, C_{ij}) = \beta_{i-1} + \beta_j - 2(s_{i-1,j-1} - R_{i-1,j-1} - L_{i-1,j-1}) \quad (17)$$

olarak verilir.

Teorem 4.2.5 in ispatı (Yurttaş 2013) de bulunabilir.

**Teorem 4.2.5.**  $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2 \in \mathcal{L}_3$  çoklu eğrileri verilsin. Üçgen koordinatları  $\delta(\mathcal{L}^1) = (\alpha^1, \beta^1), \delta(\mathcal{L}^2) = (\alpha^2, \beta^2) \in \mathbb{Z}^4 \setminus \{0\}$  ve Dynnikov koordinatları  $\rho(\mathcal{L}^1) = (a^1, b^1), \rho(\mathcal{L}^2) = (a^2, b^2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  olsun. O zaman  $i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2)$  geometrik kesişim sayısı

$$i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2) = \begin{cases} \alpha_2^1 \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \alpha_2^2 & ; \quad b^1 b^2 \leq 0 \\ |\alpha_2^1 \alpha_1^2 - \alpha_1^1 \alpha_2^2| & ; \quad b^1 b^2 \geq 0 \end{cases}$$

dır.

**Uyarı 4.2.6.** Yardımcı Teorem 4.1.13 ü kullanarak Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 te verilen geometrik kesişim sayıları ile ilgili olan sonuçların  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazılabileceğine dikkat ediniz. Örnek 4.2.7 ve Örnek 4.2.8 bunu gerçekleştirmektedir.

**Örnek 4.2.7.**  $D_4$  yüzeyinde Şekil 4.13 de gösterilen  $\tau$   $\pi_1$ -train track grafiği verilsin.  $\tau$  tarafından taşınan  $\mathcal{L}$  ve  $\mathcal{L}'$  çoklu eğrilerinin koordinatları sırasıyla

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = (1, 1, 0, 2, 1, 1) \quad \text{ve} \quad (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6) = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$$

olsun. Buna göre  $\mathcal{L}' = C_{34}$  elemanter eğrisine karşılık gelir.  $\mathcal{L}$  in  $x_{i,j}$  yol bileşen sayıları

$$x_{0,1}^{\ddot{u}} = x_{0,3}^{\ddot{u}} = x_{0,4}^{\ddot{u}} = x_{1,3}^{\ddot{u}} = x_{1,4}^{\ddot{u}} = x_{2,3}^{\ddot{u}} = 0, \quad x_{0,2}^{\ddot{u}} = x_{1,2}^{\ddot{u}} = x_{2,4}^{\ddot{u}} = x_{3,4}^{\ddot{u}} = 1$$

$$x_{0,2}^a = x_{0,3}^a = x_{0,4}^a = x_{1,2}^a = x_{1,3}^a = x_{1,4}^a = 0, \quad x_{0,1}^a = x_{2,3}^a = 1, \quad x_{2,4}^a = 2$$

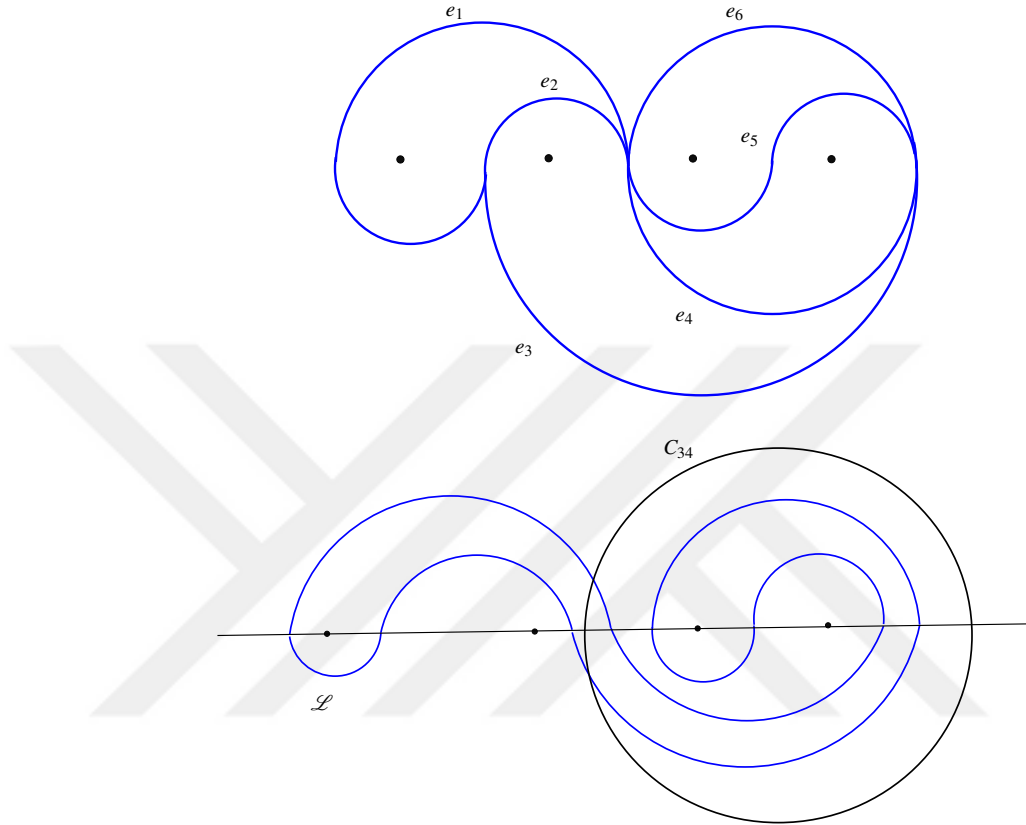
dır. Yardımcı Teorem 4.1.13 den

$$\tau(\mathcal{L}) = (2, 0, 1, 3; 2, 2, 4) \quad \text{ve} \quad \rho(\mathcal{L}) = (-1, 1; 0, -1)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.2.3 den  $S_{2,3} = 3, R_{2,3} = 1$  ve  $L_{2,3} = 2$  hesaplanır. Teorem 4.2.4 den

$$\begin{aligned}
i(\mathcal{L}, C_{34}) &= \beta_2 + \beta_4 - 2(S_{2,3} - R_{2,3} - L_{2,3}) \\
&= 2 + 0 - 2(S_{2,3} - R_{2,3} - L_{2,3}) = 2 - 2(3 - 2 - 1) = 2
\end{aligned}$$

bulunur.



**Şekil 4.13.**  $D_4$  te  $\pi_1$ -train track grafiği tarafından taşınan  $C_{34}$  elemanter ile  $L$  eğrilerinin geometrik kesişimi

**Örnek 4.2.8.**  $D_3$  yüzeyinde Şekil 4.14 da gösterilen  $\tau_1$  ve  $\tau_2$   $\pi_1$ -train track grafikleri verilsin.  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  tarafından taşınan  $\mathcal{L}^1$  ve  $\mathcal{L}^2$  çoklu eğrilerinin koordinatları sırasıyla  $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 1, 0, 1)$  ve  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = (1, 2, 1, 2)$  olsun. Buna göre,  $\mathcal{L}^1$  in  $x_{i,j}$  yol bileşen sayıları

$$x_{0,1}^{\ddot{u}} = x_{0,2}^{\ddot{u}} = x_{2,3}^{\ddot{u}} = 0, x_{1,3}^{\ddot{u}} = 1, x_{0,3}^{\ddot{u}} = x_{1,2}^{\ddot{u}} = 2$$

$$x_{0,1}^a = x_{2,3}^a = 2, x_{1,3}^a = 1, x_{0,2}^a = x_{0,3}^a = x_{1,2}^a = 2$$

ve  $\mathcal{L}^2$  in  $x_{i,j}$  yol bileşen sayıları

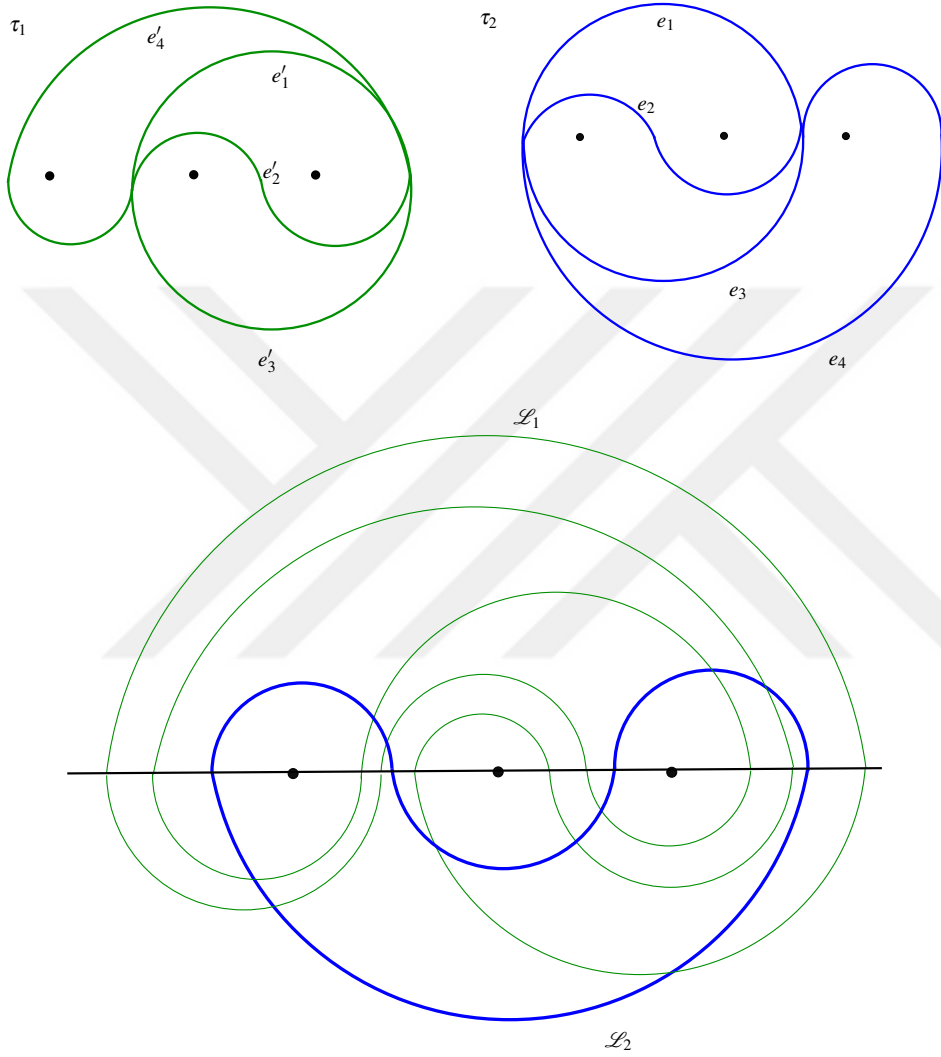
$$x_{0,1}^{\ddot{u}} = x_{2,3}^{\ddot{u}} = 1, x_{0,2}^{\ddot{u}} = x_{0,3}^{\ddot{u}} = x_{1,2}^{\ddot{u}} = x_{1,3}^{\ddot{u}} = 0$$

$$x_{0,3}^a = x_{1,2}^a = 1, x_{0,1}^a = x_{0,2}^a = x_{1,3}^a = x_{2,3}^a = 0$$



dır. Yardımcı Teorem 4.1.13 den  $\tau(\mathcal{L}^1) = (5, 1; 4, 6)$  ve  $\tau(\mathcal{L}^2) = (0, 2; 2, 2)$  ve  $\rho(\mathcal{L}^1) = (-2; -1)$  ve  $\rho(\mathcal{L}^2) = (1; 0)$  elde edilir. Teorem 4.2.5 ten,

$$\begin{aligned} i(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2) &= \alpha_2^1 \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \alpha_2^2 \\ &= (1 \times 0) + (5 \times 2) = 10 \end{aligned}$$



Şekil 4.14.  $D_3$  te farklı  $\pi_1$ -train track grafikleri tarafından taşınan iki eğrinin geometrik kesişimi

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski üzerinde çalışılmıştır. Daha açık olarak,  $D_n$  de verilen bir çoklu eğrinin Dynnikov koordinatları ile  $\pi_1$ -train track grafiği koordinatları arasında geçiş formülleri sunulmuştur. Bu formüllerden yararlanarak  $D_n$  de verilen bir çoklu eğri ile elemanter bir eğrinin ve  $D_3$  de verilen iki keyfi çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısı  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazılmıştır. Bu formüllerin,  $D_n$  de Dynnikov koordinatları ile dinamiksel ve kombinatorik problemlerin yüksek cinsli yüzeylerde train track koordinatları ile çözümüne ışık tutması beklenmektedir.

**Soru 1.** Tezdeki sonuçları yüksek cinsli yüzeylere uyarlayabilir miyiz?

Teorem 3.3.5, *güncelleme kuralları* (Dynnikov 2002, Hall ve Yurttaş 2009) olarak adlandırılan ve her bir  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, (1 \leq i \leq n-1)$  Artin örgü üreticinin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden vererek,  $B_n$  nin  $\mathcal{L}_n$  üzerindeki etkisini Dynnikov koordinatları cinsinden bulmaya olanak sağlayan kurallar sunmaktadır. Daha açık olarak güncelleme kuralları  $\rho(\sigma_i(\mathcal{L}))$  ve  $\rho(\sigma_i^{-1}(\mathcal{L}))$  vektörlerini  $\rho(\mathcal{L})$  cinsinden yazmamızı sağlar.

**Soru 2.** Güncelleme kurallarını  $\pi_1$ -train track koordinatları cinsinden yazınız.



## 6. KAYNAKLAR

- Artin, E. 1925. Theorie der Zöpfe. **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg** (4), Sayfa: 47–72.
- Artin, E. 1947. Theory of braids. **Ann. of Math.** 48(2), Sayfa: 101–126.
- Bestvina, M., Handel, M. 1995. Train-tracks for surface homeomorphisms. **Topology**, 34(1), Sayfa: 109–140.
- Chow, W-L. 1948. On the algebraical braid group. **Ann. of Math.** 49(2), Sayfa: 654–658.
- Dehornoy, P. 2008. Efficient solutions to the braid isotopy problem. **Discrete Appl. Math.**, 156(16), Sayfa: 3091–3112.
- Dehornoy, P., Dynnikov, I., Rolfsen, D., Wiest, B. 2008. Ordering braids, volume 148 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Dynnikov, I. 2002. On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering. **Uspekhi Mat. Nauk**, 57(3(345)), Sayfa: 151–152.
- Dynnikov, I., Wiest, B. 2007. On the complexity of braids. **J. Eur. Math. Soc. (JEMS)**, 9(4), Sayfa: 801–840.
- Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V. 1979. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, volume 66 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, Séminaire Orsay.
- Gover, P., Ross, S.D., Stremler, M.A., Kumar, P. 2012. Topological chaos, **braiding and bifurcation of almost cyclic sets**. **Chaos**, 22(4), Sayfa: 16.
- Hall, T., Yurttaş, S.Ö. 2009. On the topological entropy of families of braids. **Topology Appl.**, 156(8), Sayfa: 1554–1564.
- Hamidi-Tehrani, Hessam., Chen, Zong-He. 1996. Surface diffeomorphisms via train-tracks. **Topology Appl.** 73(2), Sayfa: 141–167.
- Menzel, C., Parker, J. R. 2003. Pseudo-Anosov diffeomorphisms of the twice punctured torus. **In Recent Advances in Group Theory and Low-Dimensional Topology**. 27, Sayfa: 141-154.
- Moussafir, J. 2006. On computing the entropy of braids, **Funct. Anal. Other Math.**, Cilt: 1, Sayfa: 37–46.
- Parker, J. R., Series, C. 2004. The mapping class group of the twice punctured torus. **London Math. Soc. Lecture Note Ser.** 311, Sayfa: 405–486. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Penner, R. C., Harer, J. L. 1992. *Combinatorics of train tracks*, **Annals of Mathematics Studies**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 125.

Schaefer, M., Sedgwick, E., Stefankovic, D. 2008. Computing Dehn twists and geometric intersection numbers in polynomial time, Proceedings of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG2008), Sayfa: 111-114.

Thurston, W.P. 1988. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, 19(2), Sayfa: 417–431.

Yurttas, S.Ö. 2013. Geometric intersection of curves on punctured disks. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, 65(4), Sayfa: 1554–1564.

Yurttas, S.Ö. 2016. Dynnikov and train track transition matrices of pseudo-Anosov braids. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, 36(1), Sayfa: 541–570.

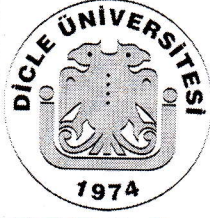
Yurttas, S.Ö., Hall, T. 2017. Counting components of an integral lamination. **Manuscripta Math.**, 153(1-2), Sayfa: 263–278.

Yurttas, S.Ö., Hall, T. 2018. Intersections of multicurves from Dynnikov coordinates. **Bull. Aust. Math. Soc.** 98(1), Sayfa: 149–158

## ÖZGEÇMİŞ

Umut GÜNGÖRÜR, 01.08.1990 tarihinde Diyarbakır'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Konya'da, liseyi Ankara Mehmet Emin Resulzade Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2008'de Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans öğrenimini 2014 yılında tamamladı. 2015 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde kadrolu öğretmen olarak görevini sürdürmektedir.





T.C.  
DİCLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	UMUT GÜNGÖRÜR
ÖĞRENCİ NO	16804001
EĞİTİM - ÖĞRETİM YILI	2018
YARIYIL	<input type="checkbox"/> Güz <input checked="" type="checkbox"/> Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Dynnikov Koordinatları ve $\pi_1$ -Train Track Grafikleri

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	45
BENZERLİK ORANI	% 13
RAPORLAMA TARİHİ	15/10/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 45 sayfalık kısmına ilişkin, 15/10/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *turnitin*. adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 13 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- Kabul/Onay sayfaları hariç,  
 Kaynakça hariç  
 Alıntılar hariç/dâhil  
 Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)  
UMUT GÜNGÖRÜR

(İmza)

15/10/2018

Dr. Öğr.Üyesi S. Öykü YURTTAŞ  
Tez Danışmanı

(İmza)

15/10/2018

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY  
Anabilim Dalı Başkanı