

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU İŞARETLENMİŞ NOKTALI TOR YÜZEYLERİNDE
GENELLEŞTİRİLMİŞ DYNNIKOV KOORDİNATLARI

Alev MERAL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz-2019

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini büyük bir ilgi, hoşgörü ve sabırla benimle paylaşan, destek ve yardımlarını hiçbir zaman benden esirgemeyen çok değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Saadet Öykü YURTTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca hem kendi alanlarındaki tecrübeleriyle, hem de tez yazımı konusunda bana büyük yardımları olan çok kıymetli eşdanışmanım Doç. Dr. Semra PAMUK ve çok kıymetli hocam Doç. Dr. Mehmetcik PAMUK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca olduğu gibi, doktora eğitimim sürecinde de hep yanımda olan, dualarıyla ve destekleriyle güç ve huzur bulduğum, canımdan çok sevdiğim çok değerli Anneme ve Babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu doktora tezinin gerçek sahipleri kıymetli Annem ve Babamdır.

Tez yazımı konusunda değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan Prof. Dr. Sedat İLHAN, Doç. Dr. Ferihe ATALAN OZAN, Dr. Öğr. Üyesi Abdullah BAYKAL, Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY hocalarıma ve ayrıca Halide GÜMÜŐ'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
ŞEKİL LİSTESİ	VI
KISALTMA VE SİMGELER	VII
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL VE METOT	5
3.1. Genel Tanımlar ve Özellikler	5
3.2. Dynnikov Koordinatları	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	21
4.1. Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi	22
4.2. İntegral Laminasyonların Elemanter Eğriler ile Geometrik Kesişimi	58
4.3. Ölçülen Yapraklanmaların Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi	63
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	67
6. KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	71

ÖZET

SONLU İŞARETLENMİŞ NOKTALI TOR YÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ DYNNIKOV KOORDİNATLARI

DOKTORA TEZİ

Alev MERAL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Bu tezde, sonlu sayıda işaretlenmiş noktalı disk yüzeyinde tanımlı Dynnikov koordinat sistemi, 1 adet sınır bileşeni ve n ($n \geq 2$) adet işaretlenmiş noktası olan 1 cinsli S_n yüzeyine genelleştirilmiştir. Daha açık olarak, S_n yüzeyinde tanımlı integral laminasyonların kümesi ile $\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ kümesi arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayan *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi* tanıtılmıştır. Bu koordinat sistemi S_n 'de tanımlı ölçülen yapraklanmalar uzayına da genişletilmiştir.

Anahtar kelimeler: İntegral Laminasyon, Geometrik Kesişim Sayısı, Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinatları.

ABSTRACT

GENERALIZED DYNNIKOV COORDINATES ON THE FINITELY PUNCTURED TORUS

PhD THESIS

Alev MERAL

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2019

In this thesis, we generalize the Dynnikov coordinate system on the finitely punctured disk to an orientable surface S_n of genus 1 with n ($n \geq 2$) punctures and 1 boundary component. In particular, we introduce the generalized Dynnikov coordinate system which gives a bijection from the set of integral laminations on S_n to $\mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ where $\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$, which can also be generalized to the set of measured foliations on S_n .

Keywords: Integral Lamination, Geometric Intersection Number, Generalized Dynnikov Coordinates.

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
3.1.	Tor yüzeyi	7
3.2.	S_3 yüzeyi	8
3.3.	S_2 'deki bir integral laminasyon	11
3.4.	(a), işaretlenmiş nokta sınırlandıran bir eğri sistemidir. (b), sınıra paralel eğri içeren bir eğri sistemidir.	11
3.5.	Homotopik eğriler içeren bir integral laminasyon	12
3.6.	Standart bir D_7 diski	13
3.7.	α_i, β_i yayları ve $U_i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$ bölgeleri	14
3.8.	$\Theta(\mathcal{L}) = (7, 1, 1, 7; 6, 8, 6)$	15
3.9.	<i>Yukarı bileşenler</i> mavi doğrular, <i>aşağı bileşenler</i> yeşil doğrular, <i>sol dönen bileşen</i> mor eğri ve <i>sağ dönen bileşen</i> kahverengi eğri ile gösterilmiştir.	15
4.1.	$\alpha_i, \beta_i, \gamma$ yayları ve c eğrisi	22
4.2.	\mathcal{L} 'nin geometrik kesişim sayıları	23
4.3.	<i>Yukarı bileşenler</i> mavi doğrular, <i>aşağı bileşenler</i> yeşil doğrular, <i>sol dönen bileşen</i> mor eğri ve <i>sağ dönen bileşen</i> kahverengi eğri ile gösterilmiştir.	24
4.4.	(a) c eğrileri, (b) ön cins bileşeni, (c) arka cins bileşeni	25
4.5.	(a) Burgu yapmayan kesen bileşen, (b) Negatif yönde 1 adet burgu yapan kesen bileşen, (c) Pozitif yönde 1 adet burgu yapan kesen bileşen	25
4.6.	\mathcal{L} aynı anda c eğrisi ve kesen bileşen içeremez.	26
4.7.	Burgu sayıları arasındaki fark 1'den büyük olan iki kesen bileşen kesişirler.	27
4.8.	L , 1 adet c eğrisi içerir.	30
4.9.	Yeşil kesen eğrisi 2 defa burgu yapmıştır, kırmızı kesen eğrisi 2 defa burgu yapmıştır, mavi kesen eğrisi 1 defa burgu yapmıştır.	31
4.10.	$\alpha_{2i} \cup \alpha_{2i-1}$ 'ler ve β_i 'ler çift, fakat c tek	32
4.11.	Geometrik kesişim sayıları aynı olan iki farklı integral laminasyon	35
4.12.	G bölgesinin üçgenleştirilmesi	36
4.13.	Yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı	37
4.14.	En az bir $m_i = 0$	40
4.15.	Her $m_i \neq 0$ durumu	40
4.16.	Her bir U_i ve G bölgelerindeki yol bileşenlerin yerleştirilmesi	50
4.17.	$\Phi(\mathcal{L}) = (1, -1; 0, 1; -1; 2)$	50
4.18.	Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i > 0$)	53
4.19.	Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i = 0$)	55
4.20.	Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i < 0$)	58

4.21.	$u_{i,j}^y$ ve $u_{i,j}^a$	58
4.22.	x yolu	59
4.23.	1. elemanter eğri	60
4.24.	2. elemanter eğri	60
4.25.	3. elemanter eğri	60
4.26.	4. elemanter eğri	61
4.27.	5. elemanter eğri	61
4.28.	$i(\mathcal{L}, C_{12}) = 2$	62
4.29.	S_n° 'deki yapraklanmaların 1-çatalı, 3-çatalı ve 4-çatalı tekil noktaları	63
4.30.	$x \in S_n \setminus \partial S_n$ yakınındaki yapraklar	64
4.31.	Çapraz yaylar	64
4.32.	$\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ ve $\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2) = \mu(\alpha)$	65



KISALTMA VE SİMGELER

g	: Cins sayısı
s	: Sınır sayısı
S_n	: n adet işaretlenmiş nokta, 1 adet sınır ve cinse sahip yüzey
D_n	: n adet işaretlenmiş noktalı disk
\mathbb{Z}^{2n-4}	: $2n - 4$ boyutlu tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n+3}$: $3n + 3$ boyutlu negatif olmayan tam sayılar kümesi
\mathbb{R}^{2n-4}	: $2n - 4$ boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\geq 0}^{3n+3}$: $3n + 3$ boyutlu negatif olmayan reel sayılar kümesi
c	: Basit kapalı eğri
T	: Toplam burgu sayısı
\mathcal{L}	: İntegral laminasyon
\mathcal{T}^2	: Tor yüzeyi
\circ	: Fonksiyonların bileşkesi
∂S_n	: S_n yüzeyinin sınırı
N	: İşaretlenmiş noktaların sonlu bir kümesi
S_n°	: S_n 'nin içi
\mathcal{H}_n	: D_n 'deki yayların kümesi
Θ	: D_n 'deki üçgen koordinat fonksiyonu
ρ	: D_n 'deki Dynnikov koordinat fonksiyonu
\mathcal{A}_n	: S_n 'deki yaylar ile c eğrisinin kümesi
G	: S_n 'deki cins bölgesi
$p(c)$: c eğrilerinin sayısı
t	: Küçük burgu sayısı
c^+	: Kesen bileşen sayısı
l	: Ön cins bileşen sayısı
l'	: Arka cins bileşen sayısı
$[x]$: x 'den küçük olmayan en küçük tam sayı
Φ	: Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu
μ	: Çapraz ölçüm
$[\alpha]$: α 'nın izotopi sınıfı
$i(L_1, L_2)$: L_1 ile L_2 'nin geometrik kesişim sayısı

1. GİRİŞ

Birbirinden ayık sonlu sayıda basit kapalı esas eğrinin oluşturduğu sistemler yüzeylerin gönderim sınıf gruplarında merkezi bir rol oynamaktadır. Böyle sistemler kombinatorik olarak genellikle train track veya Dehn–Thurston koordinatları ile tanımlanmaktadır (Penner ve Harer 1992, Bestvina ve Handel 1995, Hamidi ve Chen 1996). Fakat, bu koordinat sistemleri ile sistemin kaç parçadan oluştuğunu hesaplayan temel bir problem bile bugüne kadar sadece 2 cinsli yüzeyler için çözülebilmektedir (Haas ve Susskind, 1992). Yüzeyin sonlu adet işaretlenmiş noktalı D_n ($n \geq 3$) diski olması durumunda, integral laminasyonları koordinatlandırmanın alternatif ve etkili bir yolu *Dynnikov koordinat sistemi*'ni kullanmaktır (Dynnikov 2002). Dynnikov koordinat sistemi D_n 'deki integral laminasyonların kümesi ile $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm vermektedir ve bu dönüşüm D_n 'deki ölçülen yapraklanmaların uzayı ile $\mathbb{R}^{2n-4} \setminus \{0\}$ arasında bir homeomorfizmaya genişletilebilmektedir. 2002 yılında Dynnikov tarafından tanıtılan Dynnikov koordinatları ve n -örgü grubunun Dynnikov koordinatları cinsinden etkisini veren kurallar bir çok dinamiksel ve kombinatorik problemin çözümünde kullanılmıştır. Dynnikov koordinatları, (Dehornoy ve ark. 2002, Dehornoy 2008)'de n -örgü grubunda kelime probleminin çözümünde çalışılmıştır.

Daha sonra Moussafir örgülerin topolojik entropilerini yaklaşık olarak hesaplayan bir metot tanıtmıştır (Moussafir 2006). Yurttaş, Moussafir'in tekniğinden esinlenerek Dynnikov koordinatları yardımıyla pseudo-Anosov örgü ailelerinin topolojik entropisini hesaplayan bir metot geliştirmiştir (Yurttaş 2011). Ayrıca, Dynnikov koordinatları verilen bir integral laminasyonun tam olarak kaç parçadan oluştuğunu kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma tanıtılarak yüzeyin D_n olması durumunda bir integral laminasyonun bağlantılı olup olmadığını polinomsal zamanda hesaplayan bir algoritmanın varlığı açık problemi Yurttaş ve Hall tarafından 2017 yılında çözülmüştür. Böylece, D_n de verilen iki integral laminasyonun geometrik kesişim sayısı yine Dynnikov koordinatları cinsinden

kuadratik zamanda çalışan bir algoritma ile hesaplanmıştır (Yurttaş ve Hall 2018).

Bu tezin amacı D_n 'de tanımlı olan Dynnikov koordinat sistemini, n ($n \geq 2$) adet işaretlenmiş noktalı ve 1 adet sınır bileşeni olan 1 cinsli S_n yüzeyine genelleştirmektir. Daha açık olarak, S_n yüzeyinde verilen integral laminasyonları birebir ve örten bir şekilde tanımlayan bir fonksiyon geliştirmektir. Bunun için, S_n yüzeyine gömülü $3n + 2$ adet yay ve 1 adet kapalı eğriden oluşan bir sistem kullanılmıştır. Verilen bir \mathcal{L} integral laminasyonu (sırasıyla \mathcal{F} ölçülen yapraklanması), bu sistemdeki yaylar ve eğri ile olan geometrik kesişim sayıları (sırasıyla yaylar ve eğri üzerine tayin edilen ölçüler) kullanılarak $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n+3} \setminus \{0\}$ (sırasıyla $\mathbb{R}_{\geq 0}^{3n+3} \setminus \{0\}$) kümesinin bir elemanı tarafından tanımlanmıştır. S_n 'de tanımlı integral laminasyonların kümesi \mathcal{L}_n ve ölçülen yapraklanmaların kümesi $\mathcal{MF}(S_n)$ olsun. *Genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları* yukarıda bahsedilen geometrik kesişim sayılarının (sırasıyla ölçülerin) bir lineer bileşimidir.

$\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olmak üzere genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu, \mathcal{L}_n kümesi ile $\mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm ve $\mathcal{MF}(S_n)$ uzayı ile $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ arasında bir homeomorfizma vermektedir. Teorem 4.1.25 genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini vermektedir.

Bu tez 5 kesimden oluşmaktadır. Sonuçlarımız için gerekli temel tanım ve teoremler üçüncü kesimde verilmiştir. Ayrıca, üçüncü kesimde D_n 'de tanımlı integral laminasyonların Dynnikov koordinatları detaylı bir şekilde ve örneklerle açıklanmıştır.

Bu tezin asıl sonuçları dördüncü kesimde verilmiştir. Daha açık olarak, dördüncü kesimde genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu ve tersi tanıtılmış; ilgili sonuçlar ve ispatlar açıklayıcı örnek ve şekillerle desteklenmiştir.

Son olarak beşinci kesimde, bu tez çalışmasında oluşturulan, S_n yüzeyi üzerinde tanımlı integral laminasyonları ve ölçülen yapraklanmaları tek türlü olarak koordinatlayan genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi kullanılarak gelecekte yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu kesimde, bu tezin oluşmasında önemli rol oynayan, daha önce yapılmış olan çalışmalar özetler halinde listelenmiştir.

Dynnikov 2002'de Dynnikov koordinat sistemi tanıtılmış, Artin n -örgü grubunun σ_i ve σ_i^{-1} üreteçlerinin Dynnikov koordinatları cinsinden integral laminasyonlar kümesi üzerindeki etkisi verilmiştir.

Epstein 1966'da verilen bir yüzeyde basit kapalı eğriler için homotopi ve izotopi kavramlarının aynı olduğunu bulmuştur. *Yurttaş 2013*'de verilen bir integral laminasyonun elemanter bir eğri ile olan geometrik kesişim sayısını Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir formül verilmiştir.

Yurttaş 2011'de Dynnikov koordinat sistemi yardımıyla n adet işaretlenmiş noktası bulunan D_n diskinde tanımlı pseudo-Anosov örgülerin dinamiksel özellikleri çalışılmıştır.

Thurston 1988'de izotopi altında yüzey homeomorfizmaları sınıflandırılmış, ünlü Nielsen–Thurston sınıflandırma teoremi tanıtılmıştır.

Fathi ve ark. 1979, Thurston'ın 1976-1977'de Orsay'de verdiği seminerlerin notlarını ve Thurston'ın yüzey homeomorfizmaları teorisi ile ilgili bir çok tanım ve sonucu içermektedir.

Bestvina ve Handel 1995, Thurston'ın yüzey homeomorfizmaları sınıflandırma teoreminin algoritmik bir ispatını sunmaktadır.

Yurttaş ve Hall 2017 verilen bir integral laminasyonun bağlantılı bileşen sayısını Dynnikov koordinatları yardımıyla kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma sunulmuştur.

Yurttaş ve Hall 2018'de verilen iki keyfi integral laminasyonun geometrik kesişim sayısını Dynnikov koordinatları yardımıyla hesaplayan bir algoritma elde edilmiştir.

Moussafir 2006'da verilen bir örgünün topolojik entropisinin yaklaşık değerini Dynnikov koordinatları cinsinden hesaplayan bir metot verilmiştir.

Dehornoy 2008'de Artin grubunun kelime problemi için etkili bir çözüm sunulmuştur.

Menzel ve Parker 2003'de π_1 -train track grafikleri yardımıyla iki noktası işaretlenmiş torda verilen bir homeomorfizmanın izotopi sınıfının pseudo-Anosov olup olmadığını veren bir algoritma sunulmuştur.

Penner ve Harer 1992'de Dehn–Thurston koordinatları ve train track grafikleri çalışılmıştır.



3. MATERYAL VE METOT

Bu kesimde, sonuçlarımız için gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir. Kesim 3.1, yüzey ve integral laminasyonlar ile ilgili genel tanım ve özellikleri içermektedir. Kesim 3.2’de ise bu teze ilham kaynağı olan ve D_n ’de tanımlı integral laminasyonların kümesini birebir ve örten olarak koordinatlandıran Dynnikov koordinat sistemi detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Kesim 4’de verilecek sonuçlar ve izlenecek olan yol, Kesim 3.2’de tanımlanan kavramların S_n yüzeyine bir genelleştirmesi olacaktır.

3.1. Genel Tanımlar ve Özellikler

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme ve τ da X ’in kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ ’in bir alt koleksiyonu olsun.

$\tau 1$). X ve \emptyset kümeleri τ ’ya aittir. (Yani $X, \emptyset \in \tau$ ’dur.)

$\tau 2$). τ ’nun herhangi bir alt koleksiyonuna ait kümelerin birleşkesi yine τ ’ya aittir.

(Yani I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ ’dur.)

$\tau 3$). τ ’ya ait iki kümenin kesişimi yine τ ’ya aittir. (Yani $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$ ’dur.)

özellikleri sağlanıyorsa τ ’ya X üzerinde bir *topoloji* denir. τ koleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) sıralı ikilisine bir *topolojik uzay* denir. Eğer bir karışıklık meydana gelmeyecekse bazen X ’in kendisine bir *topolojik uzay* denir.

Tanım 3.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ ’nun bir elemanına X ’deki bir *açık küme* denir. Böylece, (X, τ) topolojik uzayındaki τ ’nun elemanlarına X ’in *açık alt kümeleri* denir.

Tanım 3.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve I bir indis kümesi olmak üzere $\{U_i | i \in I\}$, (X, τ) uzayının açık kümelerinden oluşan bir koleksiyon olsun.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

ise $\{U_i | i \in I\}$ koleksiyonuna X 'in *bir açık örtüsü* denir. $\{U_i | i \in I\}$ koleksiyonu X 'in açık bir örtüsü ve $J \subseteq I$ olmak üzere $\{U_i | i \in J\}$ koleksiyonu X 'in bir örtüsü ise $\{U_i | i \in J\}$ koleksiyonuna $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün bir *alt örtüsü* denir. Bu durumda J sonluysa $\{U_i | i \in J\}$ koleksiyonuna $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün *sonlu bir alt örtüsü* denir.

Tanım 3.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına veya kısaca X 'in kendisine *kompakt topolojik uzay* denir. Bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu hiç bir alt örtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım 3.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir.

Tanım 3.1.6. $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ birebir örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise f 'ye bir *homeomorfizm* denir. (X, τ_1) ve (Y, τ_2) uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara *homeomorfik uzaylar* denir.

Tanım 3.1.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x noktasının bir *komşuluğu* denir. Diğer bir deyişle τ 'nun x 'i içeren her elemanına x noktasının bir *komşuluğu* denir.

Tanım 3.1.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ özelliğindeki X 'in U ve V küme çiftine (X, τ) uzayının bir *ayrışımı* denir.

Tanım 3.1.9. (X, τ) uzayının açık kümelerden oluşan hiç bir ayrışımı yoksa (X, τ) uzayına *bağlantılı uzay* denir.

Tanım 3.1.10. X bir topolojik uzay olsun. X için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa X bir *k-boyutlu topolojik manifold (topolojik k-manifold)* dur denir:

X1). X bir Hausdorff uzayıdır.

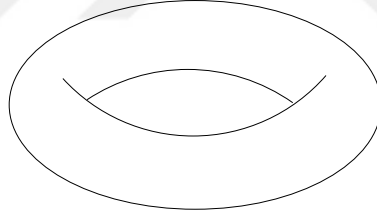
X2). X 'in her bir açık alt kümesi \mathbb{R}^k 'ya veya \mathbb{R}^k 'nin bir açık alt kümesine homeomorftur.

X3). X sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir.

Tanım 3.1.11. 2-boyutlu manifoldlara *yüzey* denir.

Örnek 3.1.12. Tor yüzeyini (Şekil 3.1) düşünelim. Bu yüzeyi şu şekilde elde ederiz: Bir çember ve kendisiyle aynı düzlemde yatan fakat kesişmeyen bir doğru alalım. Çember ve doğrunun ortak düzlemini doğru etrafında 360 derece döndürelim. Bu esnada çemberin taradığı yüzey bir tor yüzeyidir. Tor yüzeyinin de her bir noktası için \mathbb{R}^2 'deki bir açık kümeye homeomorf olan bir açık küme bulabiliriz. Bunun için, tor olarak adlandırılan cisim \mathbb{R}^2 'ye oturtalım. Tor yüzeyinde aldığımız bir p noktasının bir V açık komşuluğunun bu \mathbb{R}^2 düzlemine dik izdüşümü olan V' 'ne bakalım.

$V' \subset \mathbb{R}^2$ 'dir ve V' de bir açık kümedir. V' 'nün boyutu 2 olduğu için tor yüzeyi bir 2-manifold'dur ve \mathcal{T}^2 ile gösterilir.



Şekil 3.1: Tor yüzeyi

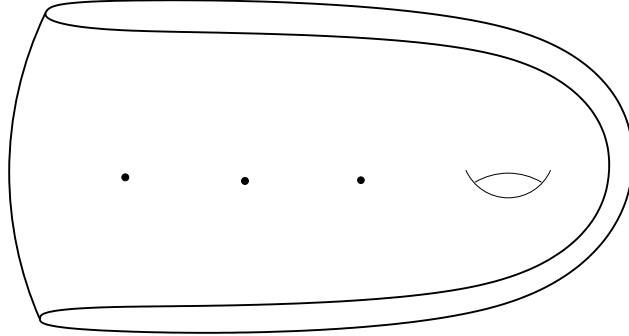
Tanım 3.1.13. 2-boyutlu bir nesne, bir yüzey üzerinde bulunduğu yere tekrar geldiğinde kendi ayna görüntüsü olacak şekilde sürekli olarak hareket ettirilemiyorsa bu yüzeye *yönlendirilebilir yüzey* denir. Aksi takdirde bu yüzey *yönlendirilemez* olurdu. Yani, eğer X yüzeyinde sürekli bir şekilde ilerleyen tutarlı bir rotasyon tanımlanabiliyorsa bu X yüzeyi yönlendirilebilirdir.

Tanım 3.1.14. Yönlendirilebilir yüzeyleri oluşturan kulpların sayısına *bu yüzeylerin cinsi* denir. Örnek vermek gerekirse, bir simitin yüzeyini düşündüğümüzde cinsi 1'dir. Çünkü tek bir kulptan oluşur.

Tanım 3.1.15. Verilen iki yüzeyin her birinden alınan birer disk, bunların iç yüzeylerinden çıkarılırsa ve bu yüzeyler disklerin çıkarıldığı yerlerinden birbirlerine yapıştırılırsa elde edilen yeni yüzeye bu yüzeylerin *bağlantılı toplamı* denir. Cinsi g_1 ile cinsi g_2 olan iki yüzeyin bağlantılı toplamı bize cinsi g olan yeni bir yüzey verir.

Tanım 3.1.16. Tanım 3.1.10'deki **X2)**. koşulunda \mathbb{R}^k yerine, \mathbb{R}^k 'da sonuncu koordinatı negatif olmayan noktaların kümesi olarak temsil edilen \mathbb{K}^k konulduğunda, Tanım 3.1.10, *sınırı olan (sınırlı) topolojik bir manifold* tanımına dönüşür. Bu durumda **X2)**. koşulunda homeomorfizma kelimesinin anlamlı olabilmesi için \mathbb{K}^k üzerinde bir topoloji bulunması gerekir. X manifoldunun bir noktası x , \mathbb{K}^k 'da açık V kümesine homeomorfik x 'in açık komşuluğu U olsun. Bu homeomorfizma altında x , V 'nin sınırına gönderiliyorsa, x noktasına manifoldun *sınır noktası*, tüm sınır noktalarının kümesine *manifoldun sınırı* denir. X manifoldunun sınırı ∂X ile gösterilir.

Bu tez çalışmasında yüzeyimiz, n adet işaretlenmiş nokta, 1 adet sınır, 1 adet cins içeren, kompakt, yönlendirilebilir S_n yüzeyi (Şekil 3.2) olacaktır.



Şekil 3.2: S_3 yüzeyi

Şimdi de S_n yüzeyi üzerindeki integral laminasyonları tanımlayabilmek için gerekli olan temel tanım, teorem ve özellikleri verelim.

Tanım 3.1.17. Topolojik bir nesnenin, bağlantılılığını veya cebirsel özelliklerini koruyacak şekilde belirli bir alandaki temsiline *gömme* denir. Örneğin, topolojik bir uzayın gömmesi açık kümeleri korur.

Bir Y uzayının diğ er bir X uzayına kısıtlanan özellikleri X uzayının özellikleri ile aynı olduğ unda, X uzayı Y uzayına gömülür. Örneğ in, rasyonel sayılar gerç ek sayılara, tam sayılar ise rasyonel sayılara gömülür. Geometride küre, birim küre olarak \mathbb{R}^3 içine gömülür.

Tanım 3.1.18. N , S_n 'deki iş aretlenmiş noktaların sonlu bir kümesi olmak üzere, $\alpha((0, 1)) \subset S_n \setminus N$ özelliğ ine sahip $\alpha : [0, 1] \rightarrow S_n$ sürekli dönüşümüne S_n 'de bir *yol* denir. α , başlangıç noktası $\alpha(0)$ ve bitiş noktası $\alpha(1)$ olan iki adet uç noktaya sahiptir. Uç noktaları eşit olan yola ise *kapalı eğri* denilmektedir ve c ile gösterilmektedir.

Tanım 3.1.19. α , S_n 'de bir yol olsun. α yolu S_n 'e gömülü ise α 'nın görüntüsü S_n 'de bir *yay* olarak adlandırılır. c kapalı eğrisi kesişmiyor ve S_n 'e gömülü ise c 'nin görüntüsüne S_n 'de bir *basit kapalı eğri* denir.

Böylece, yay ve basit kapalı eğri, görüntüleri S_n 'nin alt kümesi olan birer dönüşüm olarak değil, doğrudan S_n 'nin birer alt kümesi olarak tanımlanır.

Uyarı 3.1.20. S_n 'de bir $f : S_n \rightarrow S_n$ homeomorfizması birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olan bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.21. S_n 'de α ve β iki yol olsun. α ve β yolları arasındaki *homotopi*, bir $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S_n$ sürekli dönüşümüdür ve bu dönüşüm aşağıdaki bütün koşulları sağlar:

$$(i) \text{ Her } x \in [0, 1] \text{ için } H(x, 0) = \alpha(x) \text{ ve } H(x, 1) = \beta(x),$$

$$(ii) \text{ Her } t \in [0, 1] \text{ için } H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0) \text{ ve } H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1),$$

ve α ve β yollarının iki uç noktası dışındaki noktalarının hiçbiri N kümesinde bulunamayacağı için

$$(iii) \text{ Her } x \in (0, 1) \text{ ve her } t \in [0, 1] \text{ için } H(x, t) \notin N.$$

dir. α ve β yolları arasında böyle bir H homotopisi varsa α ve β yolları *homotopiktir* denir ve $\alpha \simeq \beta$ ile gösterilir. Her $t \in [0, 1]$ için $H(x, t)$ bir gömme ise, yani α ve β yollarının

görüntüleri S_n 'de birer yay ise, o zaman bu yaylar *izotopiktir* ve bu durumda H , α 'dan β 'a bir *izotopi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.22. α ve β , S_n 'de iki yay olsun. $\beta = f \circ \alpha$ özelliğini sağlayan ve birim fonksiyona izotopik olan bir f homeomorfizması var ise α ve β yaylarına *ambient izotopiklerdir* denir. Benzer şekilde c_1 ve c_2 , S_n 'de iki basit kapalı eğri olmak üzere, $f(c_1) = c_2$ özelliğini sağlayan ve birim fonksiyona izotopik olan bir f homeomorfizması var ise c_1 ve c_2 eğrileri *ambient izotopiklerdir*.

∂S_n ve N 'de ortak uç noktaları olan yaylar ve S_n 'deki basit kapalı eğriler için homotopi ve izotopi kavramları aynı olur.

Teorem 3.1.23 (Epstein 1966). α ve β , uç noktaları $\partial\alpha$ ve $\partial\beta$

$$\partial S_n \cap \alpha = \partial\alpha = \partial S_n \cap \beta = \partial\beta$$

özelliğini sağlayan ve uç noktalarını sabit tutan S_n 'de homotopik iki yay olsun. O zaman, bu yaylar ∂S_n 'de ve $S_n \setminus N$ 'nin kompakt bir alt kümesinin dışında sabitlenen bir izotopi ile ambient izotopiklerdir.

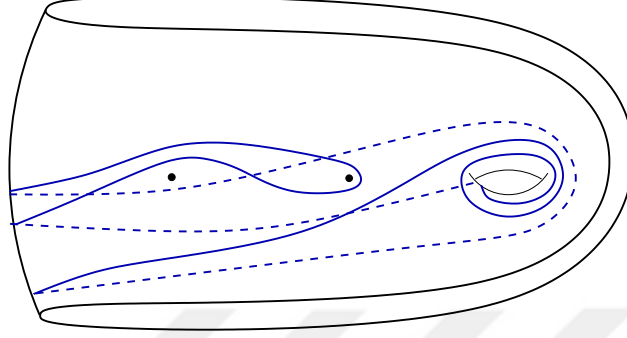
Teorem 3.1.24 (Epstein 1966). S_n 'deki iki homotopik basit kapalı eğri izotopiktir. Bu eğriler S_n° 'de bulunuyorlarsa, onlar S_n° 'nin kompakt bir alt kümesinin tümleyeninde sabitlenen bir izotopi ile ambient izotopiklerdir.

Tanım 3.1.25. İşaretlenmiş nokta içermeyen bir diski, sadece 1 adet işaretlenmiş nokta içeren bir diski veya işaretlenmiş nokta içermeyen bir halkayı sınırlandıran S_n 'deki bir basit kapalı eğriye *esas olmayan eğri* denir. Aksi takdirde bu eğriye *esas eğri* denir.

Tanım 3.1.26. S_n 'deki sonlu sayıda esas basit kapalı eğrinin izotopi sınıflarının ayrık bir birleşimine S_n 'de bir \mathcal{L} *integral laminasyonu* denir. S_n 'deki integral laminasyonların kümesi \mathcal{L}_n ile gösterilir.

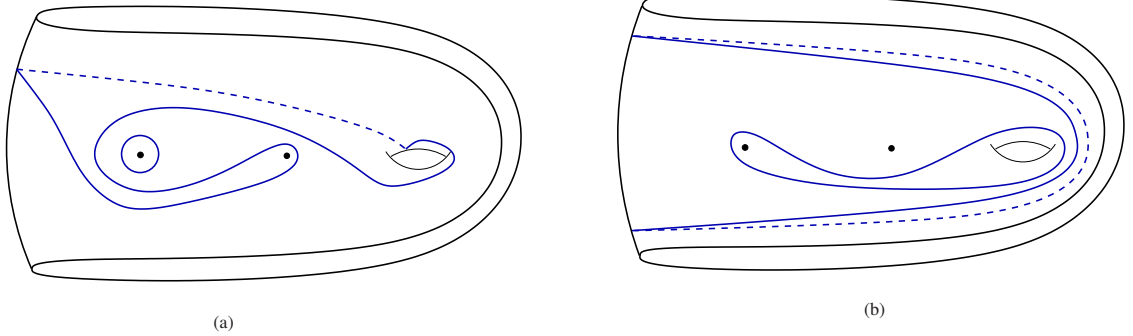
Aşağıda S_n 'de integral laminasyon ve integral laminasyon olmayan eğri sistemlerine ait örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1.27. Şekil 3.3, S_2 'de bir integral laminasyon örneğini göstermektedir.



Şekil 3.3: S_2 'deki bir integral laminasyon

Örnek 3.1.28. Şekil 3.4 (a) ve (b)'deki basit kapalı eğrilerin ayrık birleşimleri integral laminasyon değildir. Çünkü Şekil 3.4 (a), işaretlenmiş noktayı sınırlandıran eğri içermektedir. Şekil 3.4 (b), ∂S_2 'ye paralel eğri içermektedir.

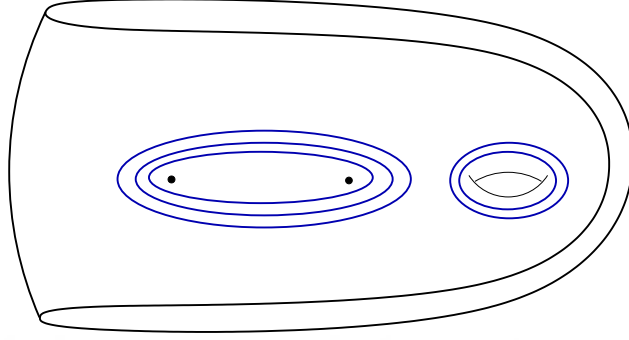


Şekil 3.4: (a), işaretlenmiş nokta sınırlandıran bir eğri sistemidir. (b), sınıra paralel eğri içeren bir eğri sistemidir.

Uyarı 3.1.29. Bir \mathcal{L} integral laminasyonunun eğrileri karşılıklı olarak homotopik olabilirler (Şekil 3.5).

Aşağıda birbirlerine homotopik eğriler içeren bir integral laminasyon örneği verilmiştir.

Örnek 3.1.30. Şekil 3.5’de işaretlenmiş noktaları saran eğriler ile cinsi sınırlandıran eğriler kendi aralarında birbirlerine homotopik olmalarına rağmen bu eğri sistemi bir integral laminasyondur.



Şekil 3.5: Homotopik eğriler içeren bir integral laminasyon

Tanım 3.1.31. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}_n$ olsun. \mathcal{L}_1 ve \mathcal{L}_2 ’nin *geometrik kesişim sayısı* $i(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ ile tanımlanır. Yani,

$$i(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \min(\#L_1 \cap L_2 : L_1 \in \mathcal{L}_1 \text{ ve } L_2 \in \mathcal{L}_2)$$

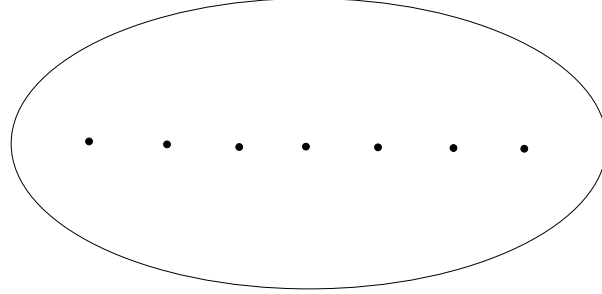
olarak yazılır ($\#$, kesişim sayısını ifade etmektedir.). Bir integral laminasyon ile bir yay arasındaki geometrik kesişim sayısı benzer şekilde tanımlanır.

Dolayısıyla iki integral laminasyonun geometrik kesişim sayısı, bu laminasyonların içinde bulunduğu homotopi sınıflarındaki temsilciler arasındaki minimum kesişim sayısıdır.

3.2. Dynnikov Koordinatları

Literatürde g adet cins ve b adet sınır bileşenlerine sahip olan bir S yüzeyi üzerindeki integral laminasyonlara ve ölçülen yapraklanmalara koordinatlar veren koordinat sistemleri vardır. Bu sistemler için (Penner ve Harer 1992, Bestvina ve Handel 1995, Hamidi ve Chen 1996, Menzel ve Parker 2003, Parker ve Series 2004) kaynaklarına bakabilirsiniz. n adet işaretlenmiş noktaya sahip olan standart bir D_n diski üzerindeki integral laminasyonları ve ölçülen yapraklanmaları koordinatlandırmak için alternatif bir yol

bulunmuştur (Dyannikov 2002). Standart bir diskte işaretlenmiş noktalar diskin yatay ekseninde yer almaktadır (Şekil 3.6). Bu kesimde kısaca *Dyannikov Koordinat Sistemi* olarak adlandırılan bu alternatif yolu tanıtacağız.



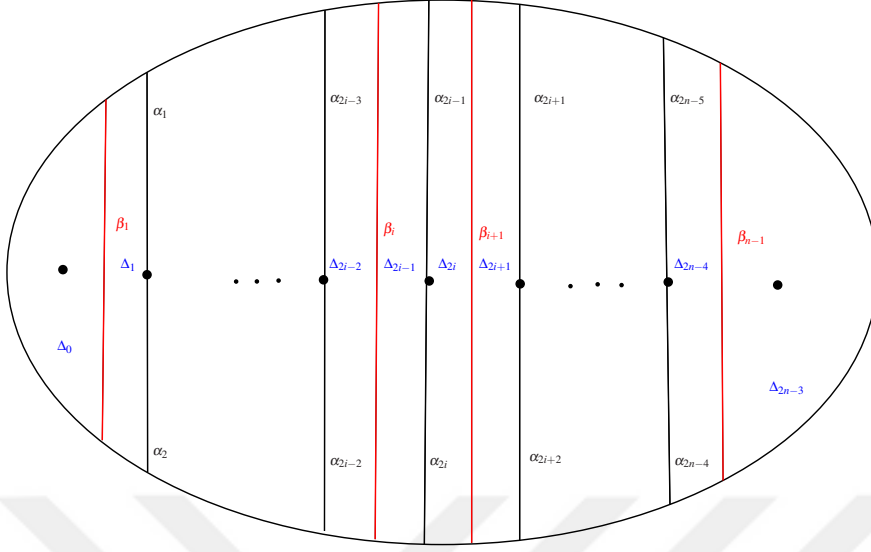
Şekil 3.6: Standart bir D_7 diski

Dyannikov koordinat sistemi, D_n üzerindeki ölçülen yapraklanmaların uzayından $\mathbb{R}^{2n-4} \setminus \{0\}$ 'a bir homeomorfizm vermektedir. Ayrıca bu sistem, D_n üzerindeki integral laminasyonların kümesinden $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ 'a birebir ve örten bir fonksiyon sağlamaktadır. Bu tez çalışması ile sadece D_n üzerinde kullanılan Dyannikov koordinat sistemi S_n yüzeyine genişletilmiştir. Bu kesimde araştırma bulguları kesiminde elde edilen sonuçlar için temel olacak bazı önemli tanımlar verilecektir.

İlk olarak D_n üzerindeki integral laminasyonları birebir ve örten bir şekilde tanımlayan Dyannikov koordinat sisteminden bahsedelim. Bu bilgiler verildikten sonra integral laminasyonlar için elde edilen sonuçlar D_n üzerindeki ölçülen yapraklanmalara genişletilecektir.

Her bir uç noktası ∂D_n 'de ya da işaretlenmiş noktada bulunan D_n 'deki yayların kümesi \mathcal{K}_n olarak alınsın. Bu durumda, Şekil 3.7'de görüldüğü gibi $\alpha_i \in \mathcal{K}_n$ ($1 \leq i \leq 2n-4$) ve $\beta_i \in \mathcal{K}_n$ ($1 \leq i \leq n-1$) olur. Δ_{2i-3} , i . işaretlenmiş noktanın solunda kalan ve $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}, \beta_{i-1}$ yayları tarafından sınırlanan bölgedir. Benzer şekilde, Δ_{2i-2} , i . işaretlenmiş noktanın sağında kalan ve $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}, \beta_i$ yayları tarafından sınırlanan bölgedir. Δ_0 bölgesi β_1 ile sınırlanıyorken, Δ_{2n-3} bölgesi β_{n-1} ile tanımlanmaktadır. Şekil 3.7'de görülen β_i ve β_{i+1} yayları tarafından sınırlanan bölge

$U_i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$ ($1 \leq i \leq n-2$) ile gösterilmektedir.



Şekil 3.7: α_i, β_i yayları ve $U_i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$ bölgeleri

D_n 'deki $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun α_i ve β_i yaylarını minimum sayıda kesen L minimal temsilcisi her zaman bulunmaktadır. L 'nin α_i ve β_i yayları ile olan kesişim sayıları sırasıyla α_i ve β_i ile gösterilsin. α_i ve β_i sembollerinin ne zaman yaylara, ne zaman yaylar üzerindeki kesişim sayılarına karşılık geldikleri çalışmada açıkça belirtilmektedir.

Tanım 3.2.1. D_n 'deki $\Theta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$ üçgen koordinat fonksiyonu,

$$\Theta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-4}; \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$$

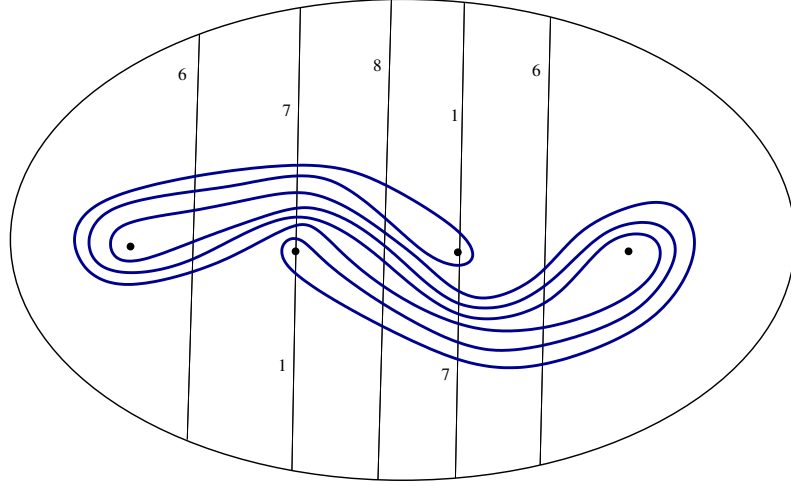
olarak tanımlanır.

Örneğin, Şekil 3.8'de gösterilen \mathcal{L} integral laminasyonunun üçgen koordinatları

$$\Theta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (7, 1, 1, 7; 6, 8, 6) \text{ 'dır.}$$

Tanım 3.2.2. $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ 'nin bir minimal temsilcisi olmak üzere $L \cap U_i$ ($1 \leq i \leq n-2$) kümesinin bir bağlantılı bileşenine L 'nin U_i 'de bir *yol bileşeni* denir. L 'nin U_i 'de 4 tip yol bileşeni vardır:

(i) Uç noktaları β_i ve β_{i+1} yayları üzerinde bulunan ve α_{2i-1} yayını kesen *yukarı bileşen*;

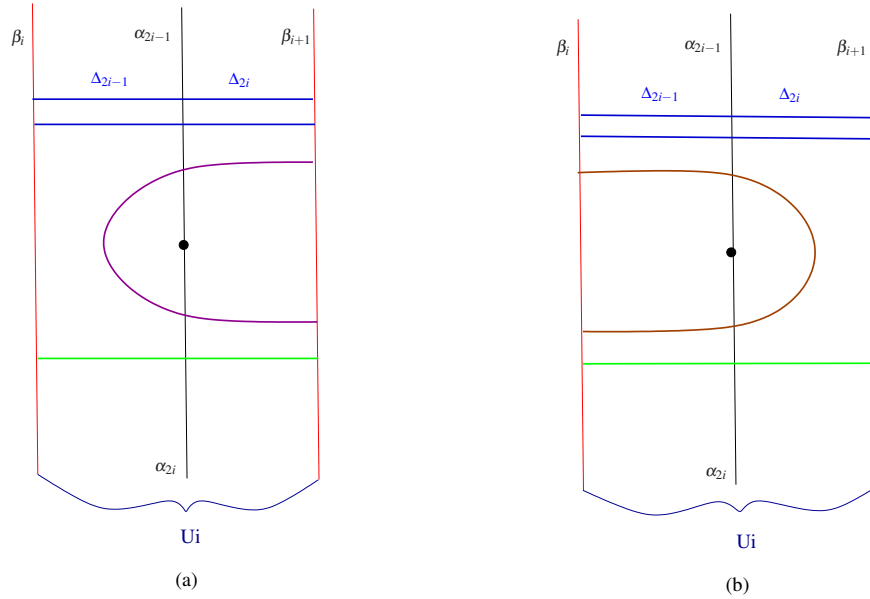


Şekil 3.8: $\Theta(\mathcal{L}) = (7, 1, 1, 7; 6, 8, 6)$

(ii) Uç noktaları β_i ve β_{i+1} yayları üzerinde bulunan ve α_{2i} yayını kesen *aşağı bileşen*;

(iii) Her bir uç noktası β_i yayı üzerinde bulunan ve α_{2i-1} ile α_{2i} yaylarını kesen *sağ dönen bileşen* (Şekil 3.9 (b));

(iv) Her bir uç noktası β_{i+1} yayı üzerinde bulunan ve α_{2i-1} ile α_{2i} yaylarını kesen *sol dönen bileşen* (Şekil 3.9 (a)).



Şekil 3.9: Yukarı bileşenler mavi doğrular, aşağı bileşenler yeşil doğrular, sol dönen bileşen mor eğri ve sağ dönen bileşen kahverengi eğri ile gösterilmiştir.

Uyarı 3.2.3. L 'deki eğriler birbirleri ile kesişmedikleri için her bir U_i bölgesinde tek tip dönen bileşen olabilir: sağ dönen ya da sol dönen.

Uyarı 3.2.4. D_n 'nin uç bölgelerinde tek tip yol bileşeni bulunmaktadır: Δ_0 'de sol dönen, ve Δ_{2n-3} 'de sağ dönen.

Yardımcı Teorem 3.2.5. D_n 'de $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ 'nin üçgen koordinatları $\Theta(\mathcal{L}) = (\alpha; \beta)$ olsun.

Her $1 \leq i \leq n-2$ için U_i bölgesindeki dönen bileşenlerin sayısı

$$b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (3.2.1)$$

olmak üzere, $|b_i|$ olarak verilir. Bu bileşenler $b_i < 0$ ise sol dönen, $b_i > 0$ ise sağ dönendir.

Uyarı 3.2.6. Dönen bileşen sayıları Δ_0 bölgesinde $\frac{\beta_1}{2}$ ve Δ_{2n-3} bölgesinde $\frac{\beta_{n-1}}{2}$ ile bulunur.

Yardımcı Teorem 3.2.7. D_n 'de $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ 'nin üçgen koordinatları $\Theta(\mathcal{L}) = (\alpha; \beta)$ olsun.

Her $1 \leq i \leq n-2$ için U_i bölgesindeki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı sırasıyla,

$$u_i^y = \alpha_{2i-1} - |b_i| \quad \text{ve} \quad u_i^a = \alpha_{2i} - |b_i| \quad (3.2.2)$$

ile verilir.

Yardımcı Teorem 3.2.8. D_n 'de $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ 'nin üçgen koordinatları $\Theta(\mathcal{L}) = (\alpha; \beta)$ olsun.

Üçgen koordinat fonksiyonu $\Theta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$ birebirdir.

İspat. Her bir U_i bölgesindeki yukarı, aşağı, sağ ve sol bileşenlerin sayıları hesaplanır. Bu bileşenler uygun homotopi altında tek türlü birleştirilir ve böylece \mathcal{L} tek türlü belirlenir.

□

Aşağıdaki yardımcı teoremin ispatı (Yurttaş 2011)'de bulunabilir.

Yardımcı Teorem 3.2.9. D_n 'de her bir U_i bölgesi için aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

Sol dönen bileşen olduğunda ($b_i < 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_{i+1}$$

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - \beta_i = 2|b_i|;$$

Sağ dönen bileşen olduğunda ($b_i > 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_i$$

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - \beta_{i+1} = 2|b_i|;$$

Döner bileşen olmadığında ($b_i = 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_i = \beta_{i+1}.$$

Uyarı 3.2.10. D_n 'de $(\alpha; \beta)$ üçgen koordinatları verildiğinde, bu koordinatlar her bir Δ_i bölgesinde üçgen eşitsizliğini ve Yardımcı Teorem 3.2.9'daki koşulları sağlamalıdır. Ayrıca \mathcal{L} basit kapalı eğrilerden oluştuğundan her bir β_i yayını ve her bir $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}$ 'i çift sayıda kesmelidir. Dolayısıyla \mathbb{Z}^{3n-5} kümesinden alınan her $(\alpha; \beta)$ vektörü bir integral laminasyona karşılık gelmeyebilir. Bu nedenle $\Theta : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$ üçgen koordinat fonksiyonu örten değildir.

Şimdi D_n 'de \mathcal{L}_n 'i birebir ve örten bir şekilde koordinatlandıran *Dynnikov koordinat sistemini* verelim.

Tanım 3.2.11. Dynnikov koordinat fonksiyonu $\rho : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$,

$$\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (a_1, \dots, a_{n-2}, b_1, \dots, b_{n-2})$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $1 \leq i \leq n-2$ olmak üzere,

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (3.2.3)$$

dir.

Örnek 3.2.12. Şekil 3.8’de verilen ve üçgen koordinatları $\Theta(\mathcal{L}) = (7, 1, 1, 7; 6, 8, 6)$ olan \mathcal{L} integral laminasyonunun Dynnikov koordinatlarını bulalım.

Denklem (3.2.3)’i kullanarak

$$a_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

$$a_2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{6 - 8}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{8 - 6}{2} = 1$$

elde ederiz. O halde Şekil 3.8’de verilen \mathcal{L} integral laminasyonunun Dynnikov koordinatları

$$\rho(\mathcal{L}) = (-3, 3; -1, 1)$$

ile verilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem kullanılarak D_n ’deki $(\alpha; \beta)$ kesişim sayıları, $(a; b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ Dynnikov koordinatlarından bulunabilir. Böylece $(\alpha; \beta)$ kesişim sayılarına karşılık gelen integral laminasyon tek türlü olarak çizilebilir.

Yardımcı Teorem 3.2.13. $(a; b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ olsun. O zaman $(a; b)$, üçgen koordinatları aşağıda verilen bir ve yalnız bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun Dynnikov koordinatlarıdır.

$$\beta_i = 2 \max_{1 \leq k \leq n-2} \left[|a_k| + \max(b_k, 0) + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \right] - 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_j \quad (3.2.4)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{if } b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0; \\ (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{1+\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{if } b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Burada $\lceil x \rceil$, x 'den küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermektedir.

Yardımcı Teorem 3.2.13'in ispatı (Yurttaş 2011)'de detaylı bir şekilde bulunabilir.





4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kesimde D_n 'de tanımlı ve birçok dinamiksel ve kombinatorik problemin çözümünde kullanılan (Moussafir 2006, Dehornoy 2008, Yurttaş 2011, Yurttaş ve Hall 2017, Yurttaş ve Hall 2018) Dynnikov koordinat sistemi, S_n ($n \geq 2$) yüzeyinde tanımlı integral laminasyonları birebir ve örten olarak koordinatlandıran *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemine* genişletilmiştir. Bu koordinat sistemini kurabilmek için S_n yüzeyini $2n$ adet üçgensel bölge ve 1 adet üçgen olmayan fakat cins içeren bölgeye ayıran $3n + 2$ adet yay ve 1 adet kapalı eğriden oluşan bir sistem kullanılmıştır. Verilen bir integral laminasyonun, bu sistemdeki yaylar ve eğri ile olan geometrik kesişim sayılarının Tanım 4.1.23'de tanıtılan lineer bileşimleri integral laminasyonun genelleştirilmiş Dynnikov Koordinatları olarak adlandırılmıştır. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu $\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olmak üzere \mathcal{L}_n kümesi ile $\mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm vermektedir ve bu koordinat fonksiyonu Tanım 4.3.6'da $\mathcal{MF}(S_n)$ uzayı ile $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ arasında bir homeomorfizmaya genişletilmiştir. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersi Teorem 4.1.25'de verilmiştir.

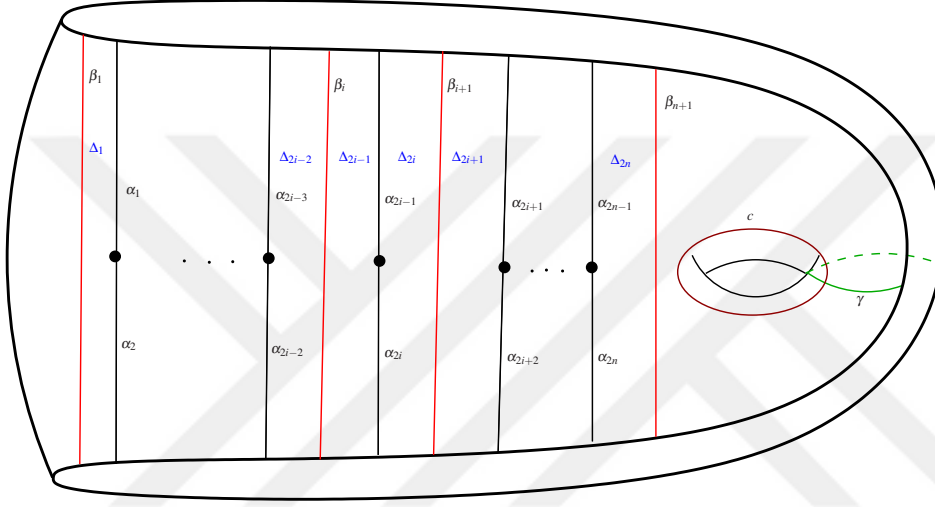
Kesim 4.1'de, genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemini oluşturmak için kullanılan α_i ($1 \leq i \leq 2n$), β_i ($1 \leq i \leq n + 1$), γ yayları ve c basit kapalı eğrisi tanıtılmış, bu yaylar ve eğri tarafından sınırlandırılan belli bölgelerde \mathcal{L} 'nin yol bileşenleri olarak adlandırılan bağlantılı bileşenleri sınıflandırılmıştır. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu tanıtılırken yol bileşenlerinden faydalanılmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş Dynnikov koordinatlarından α_i , β_i , γ yayları ve c üzerindeki geometrik kesişim sayılarını veren dolayısıyla karşılık gelen integral laminasyonu tek türlü oluşturabilmemize olanak sağlayan Teorem 4.1.25 sunulmuştur.

Kesim 4.2'de Yurttaş ve Hall 2018'de verilen keyfi bir integral laminasyonun elemanter eğriler ile olan geometrik kesişim sayısı formülü S_n yüzeyine uygulanmıştır.

Kesim 4.3’de, integral laminasyonlar için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları ölçülen yapraklanmalara genişletilmiştir.

4.1. Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi

Şekil 4.1’de gösterilen, uç noktaları ∂S_n ’de ve işaretlenmiş noktalar üzerinde bulunan α_i ($1 \leq i \leq 2n$), β_i ($1 \leq i \leq n+1$), γ yaylarını ve cinsi bir defa saran c kapalı eğrisini düşünelim. Bu yaylar ve eğri ailesini \mathcal{A}_n ile gösterelim.



Şekil 4.1: α_i , β_i , γ yayları ve c eğrisi

∂S_n tek bir nokta ile eşleştirildiğinde, i . işaretlenmiş noktanın ($1 \leq i \leq n$) sağındaki ve solundaki her bir bölge üç adet yay tarafından sınırlandığından bu bölgelerin her biri üçgenseldir. Dolayısıyla S_n yüzeyi $2n$ adet üçgensel bölge ve 1 adet üçgen olmayan fakat cins içeren bölgeden oluşmaktadır. i . işaretlenmiş nokta etrafındaki üçgensel bölgeler sol tarafında α_{2i-1} , α_{2i} , β_i yayları tarafından, sağ tarafında ise α_{2i-1} , α_{2i} , β_{i+1} yayları tarafından sınırlanan bölgelerdir. α_{2i-1} , α_{2i} , β_i ile sınırlanan bölge Δ_{2i-1} ; α_{2i-1} , α_{2i} , β_{i+1} ile sınırlanan bölge Δ_{2i} olmak üzere $U_i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$ (Şekil 4.3) olarak tanımlanır. β_{n+1} , β_1 yayları ve ∂S_n tarafından sınırlanan bölge ise G ile gösterilir (Aslında G bölgesi S_n yüzeyinin arka tarafında bulunan ve β_1 ’e izotopik olan yay, β_{n+1} yayı ve ∂S_n tarafından sınırlanmaktadır. Fakat bir koordinat sisteminde aynı anda iki izotopik kopya bulunamayacağından, hem G bölgesinin tanımı hem de yüzeyin arka tarafındaki eğri hareketleri

için β_1 kesişim sayısı seçilmiştir.).

$\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ yaylarını ve c kapalı eğrisini minimum sayıda kesen minimal bir temsilcisi L her zaman bulunabilir. Tez boyunca verilen bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun L minimal temsilcisi kullanılacaktır.

Tanım 3.1.31'den $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; \beta_1, \dots, \beta_{n+1}; \gamma; c) \in \{\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n+3}\} \setminus \{0\}$ vektörü, L 'nin ilgili yaylar ve basit kapalı eğri ile olan kesişim sayılarını gösterebilir. L, c 'nin $p(c)$ adet kopyasını içerir ise $p(c) > 0$ olmak üzere,

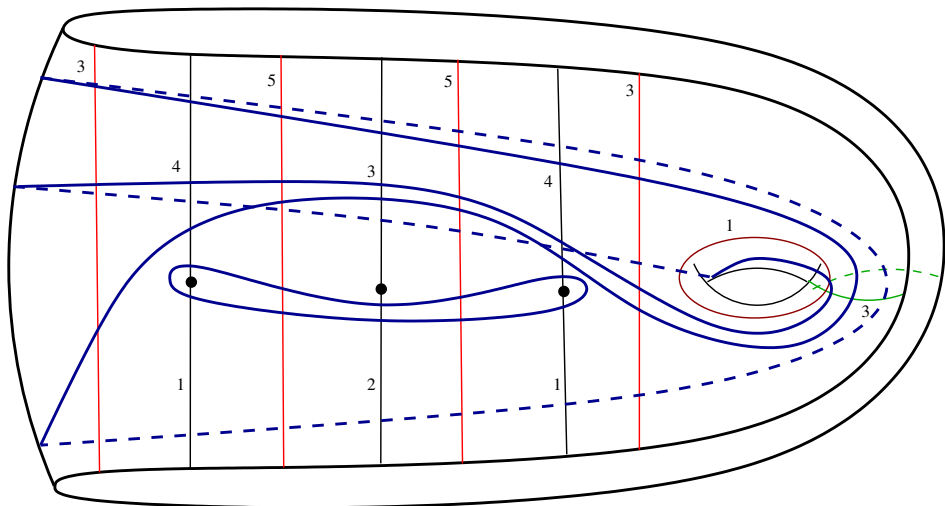
$$c = -p(c) \quad (4.1.1)$$

yazılacaktır. Tez boyunca

$$c^+ = \max(c, 0) \quad (4.1.2)$$

olarak alınacaktır. $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ ve c sembollerinin ne zaman yaylara ve eğriye, ne zaman yaylar ve eğri üzerindeki kesişim sayılarına karşılık geldikleri çalışma boyunca belirtilecektir.

Örnek 4.1.1. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4; \gamma; c) = (4, 1, 3, 2, 4, 1; 3, 5, 5, 3; 3; 1)$ kesişim sayıları verilen L Şekil 4.2'de gösterildiği gibidir.

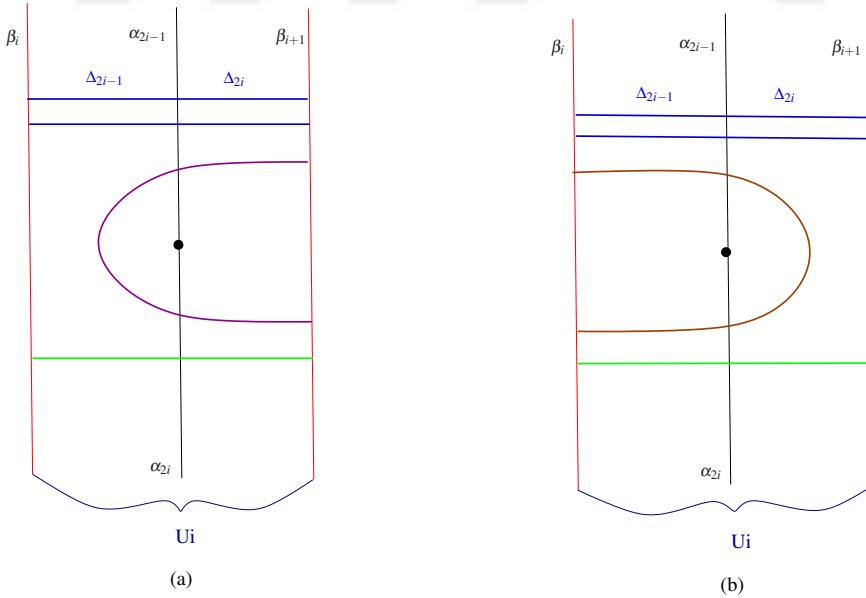


Şekil 4.2: \mathcal{L} 'nin geometrik kesişim sayıları

Tanım 4.1.2. L bir integral laminasyon olmak üzere, $L \cap U_i$ ($1 \leq i \leq n$) ve $L \cap G$ 'nin her bir bağlantılı bileşenine *yol bileşeni* denir.

L minimal olduğundan Şekil 4.3'de gösterildiği gibi $L \cap U_i$ 'de 4 tip yol bileşeni, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'de gösterildiği gibi $L \cap G$ 'de 6 tip yol bileşeni vardır. U_i bölgelerindeki yol bileşenleri Tanım 3.2.2'deki gibidir. Yani:

1. Uç noktaları β_i ve β_{i+1} yayları üzerinde bulunan ve α_{2i-1} yayını kesen *yukarı bileşen*;
2. Uç noktaları β_i ve β_{i+1} yayları üzerinde bulunan ve α_{2i} yayını kesen *aşağı bileşen*;
3. Her bir uç noktası β_i yayı üzerinde bulunan ve α_{2i-1} ile α_{2i} yaylarını kesen *sağ dönen bileşen* (Şekil 4.3 (b));
4. Her bir uç noktası β_{i+1} yayı üzerinde bulunan ve α_{2i-1} ile α_{2i} yaylarını kesen *sol dönen bileşen* (Şekil 4.3 (a));



Şekil 4.3: *Yukarı bileşenler* mavi doğrular, *aşağı bileşenler* yeşil doğrular, *sol dönen bileşen* mor eğri ve *sağ dönen bileşen* kahverengi eğri ile gösterilmiştir.

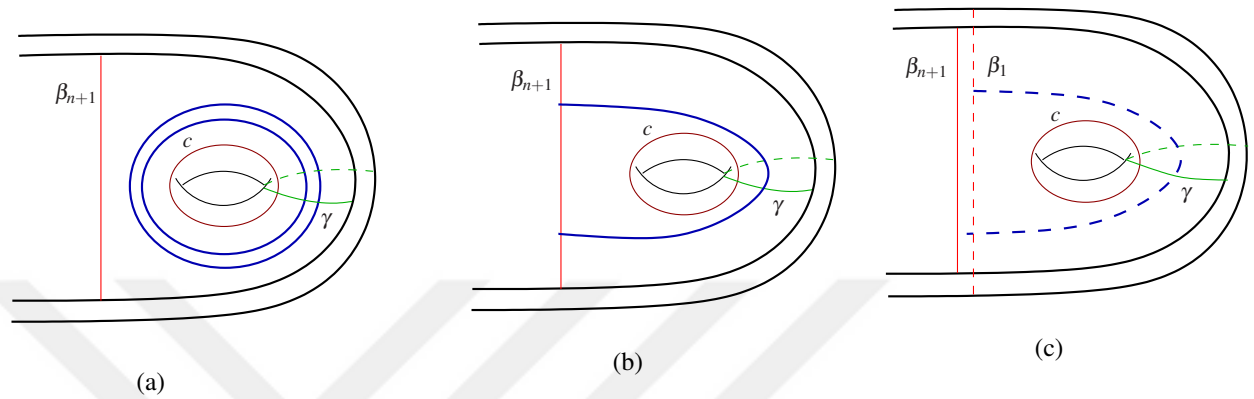
5. Yüzeyin cinsini sınırlayan basit kapalı c eğrisi (Şekil 4.4 (a));

6. c eğrisini kesmeyen ve her bir uç noktası β_{n+1} üzerinde bulunan *ön cins bileşen*

(Şekil 4.4 (b));

7. c eğrisini kesmeyen ve her bir uç noktası β_1 üzerinde bulunan *arka cins bileşen*

(Şekil 4.4 (c));



Şekil 4.4: (a) c eğrileri, (b) ön cins bileşeni, (c) arka cins bileşeni

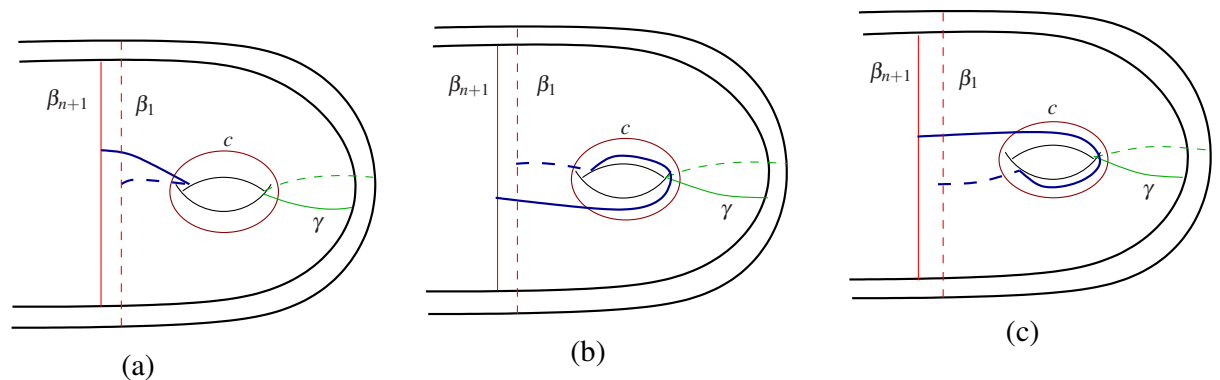
8. Uç noktaları β_1 ve β_{n+1} üstünde olan ve c eğrisini kesen *kesen bileşenleridir*

(Şekil 4.5). Burada 3 adet kesen bileşen vardır. Bunlar,

a. *Burgu yapmayan kesen bileşen* (Şekil 4.5 (a)) (Burada, verilen bir kesen bileşene ait *burgu sayısı*, ilgili bileşenin γ yayını kesme sayısı olarak tanımlanır (Şekil 4.5).);

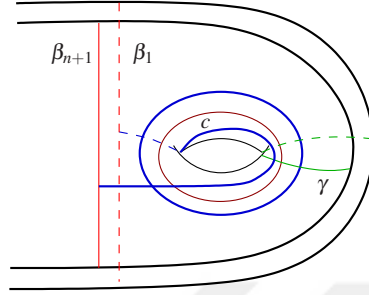
b. *Negatif yönde burgu yapan* (saat yönü) kesen bileşen (Şekil 4.5 (b));

c. *Pozitif yönde burgu yapan* (saat yönünün tersi) kesen bileşen (Şekil 4.5(c)).



Şekil 4.5: (a) Burgu yapmayan kesen bileşen, (b) Negatif yönde 1 adet burgu yapan kesen bileşen, (c) Pozitif yönde 1 adet burgu yapan kesen bileşen

Uyarı 4.1.3. Bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonu birbirleriyle kesişmeyen eğrilerden oluştuğundan her bir U_i bölgesinde sağ dönen veya sol dönen bileşenden en fazla biri olabilir. Benzer sebepten G bölgesinde hem c eğrisi hem de kesen bileşenler bulunamaz (bkz. Şekil 4.6). Ayrıca G bölgesinde tek tip ön cins ve tek tip arka cins bileşen olduğuna dikkat



Şekil 4.6: \mathcal{L} aynı anda c eğrisi ve kesen bileşen içeremez.

ediniz.

Uyarı 4.1.4. c^+ sayısının kesen bileşenlerin sayısını verdiğine dikkat ediniz.

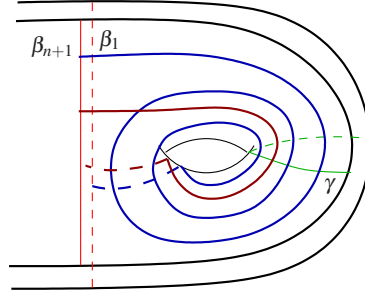
Uyarı 4.1.5. \mathcal{L} birbiriyle kesişmeyen eğrilerden oluştuğundan kesen bileşenlerin burgularının yönleri aynı olmak zorundadır. Ayrıca G bölgesinde verilen iki farklı kesen bileşenin burgu sayıları arasındaki fark 1'den büyük olamaz (bkz. Şekil 4.7). Buna göre t küçük burgu sayısı; $t + 1$ büyük burgu sayısı olmak üzere G bölgesindeki toplam burgu sayısı T kesen bileşenlere ait burgu sayılarının toplamıdır. Böylece G 'de verilen herhangi iki kesen bileşenin burgu sayıları arasındaki fark 0 ise,

$$T = tc^+$$

dir. Diğer taraftan verilen iki kesen bileşenin burgu sayısı arasındaki fark 1 ise G bölgesinde verilen $t + 1$ burgulu kesen bileşen sayısı $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, t burgulu kesen bileşen sayısı $c^+ - m$ olmak üzere

$$T = m(t + 1) + (c^+ - m)t$$

dir.



Şekil 4.7: Burgu sayıları arasındaki fark 1'den büyük olan iki kesen bileşen kesişirler.

Şimdi de L 'nin G bölgesindeki yol bileşenlerini hesaplayalım.

Yardımcı Teorem 4.1.6. L , $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. G bölgesindeki ön cins bileşenlerin sayısı l ve arka cins bileşenlerin sayısı l' olsun. Buna göre

$$l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2}$$

ile verilir.

İspat. β_{n+1} 'i sadece kesen (Şekil 4.5) ve ön cins bileşenler (Şekil 4.4 (b)) kesmektedirler. β_{n+1} , her bir kesen bileşen tarafından bir defa ve her bir ön cins bileşen tarafından iki defa kesildiğinden $\beta_{n+1} = c^+ + 2l$ 'dir. Buradan $l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2}$ elde edilir. Benzer şekilde β_1 'i sadece kesen (Şekil 4.5) ve arka cins bileşenler (Şekil 4.4 (c)) kesmektedirler. β_1 , her bir kesen bileşen tarafından bir defa ve her bir arka cins bileşen tarafından iki defa kesildiğinden $\beta_1 = c^+ + 2l'$ 'dir. Buradan $l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2}$ elde edilir.

□

Örnek 4.1.7. Şekil 4.2'deki ön cins ve arka cins bileşen sayılarını Yardımcı Teorem 4.1.6 yardımıyla hesaplayalım.

$$l = \frac{\beta_4 - c^+}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

olduğundan G bölgesinde 1 adet ön cins ve 1 adet arka cins bileşen bulunmaktadır.

Aşağıdaki yardımcı teorem ile kesenlerin toplam burgu sayılarını hesaplayabiliriz:

Yardımcı Teorem 4.1.8. L , $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. L 'nin kesen parça sayılarının yapmış olduğu toplam burgu sayısı T olsun. O zaman,

$$|T| = \begin{cases} 0 & \text{eğer } c^+ = 0; \\ \gamma - \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} - \frac{\beta_1 - c^+}{2} & \text{eğer } c^+ \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.3)$$

olarak verilir. Kesen bileşenler pozitif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir (sgn , işaret (signum) fonksiyonudur.).

İspat. L 'nin kesen bileşenlerinin yapmış olduğu toplam burgu sayısı $|T|$ olsun. γ yayı her bir c eğrisi (Şekil 4.4 (a)) ve her bir ön ve arka cins bileşen (Şekil 4.4 (b) ve (c)) tarafından birer kez ve her bir kesen bileşen tarafından ilgili burgu sayısı (Şekil 4.5) kadar kesilmektedir. Ancak Uyarı 4.1.3'den dolayı L 'de aynı anda burgular ve c eğrileri olamaz. Bu nedenle γ koordinatı en fazla ya ön cins, arka cins bileşenler ile burgular ya da ön cins, arka cins bileşenler ile c eğrileri tarafından kesilebilmektedir. Bu nedenle l ön cins bileşen sayısı, l' arka cins bileşen sayısı, ve $|T|$ kesen bileşenlerin toplam burgu sayısını göstermek ve $c^+ \neq 0$ olmak üzere,

$$\gamma = l + l' + |T| \quad (4.1.4)$$

dir. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$\gamma = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} + \frac{\beta_1 - c^+}{2} + |T|$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|T| = \gamma - \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} - \frac{\beta_1 - c^+}{2}$$

dir. □

Aşağıdaki yardımcı teoremi kullanarak c eğrilerinin (Şekil 4.4 (a)) sayılarını hesaplayabiliriz:

Yardımcı Teorem 4.1.9. L , $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. Bu durumda, L 'nin içerdiği c eğrilerinin sayısı,

$$p(c) = \begin{cases} \gamma - \frac{\beta_{n+1}}{2} - \frac{\beta_1}{2} & \text{eğer } c^+ = 0; \\ 0 & \text{eğer } c^+ \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

olarak verilir.

İspat. $c^+ = 0$ olduğundan $\gamma = l + l' + p(c)$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1}{2}$$

dir. Buradan $p(c) = \gamma - \frac{\beta_{n+1}}{2} - \frac{\beta_1}{2}$ elde edilir. \square

Örnek 4.1.10. Kesişim sayılarından bazıları $\beta_1 = 2$, $\beta_{n+1} = 4$, $\gamma = 4$, $c = 0$ özelliğinde olan L 'nin ön cins ve arka cins bileşen sayıları Yardımcı Teorem 4.1.6'den sırasıyla

$$l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

ve

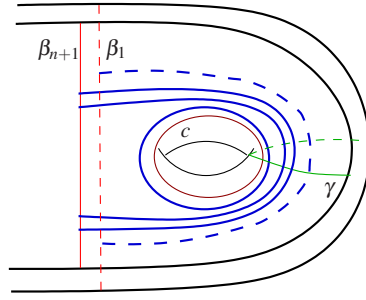
$$l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

dir. Buradan Yardımcı Teorem 4.1.9 gereği

$$p(c) = \gamma - l - l' = 4 - 2 - 1 = 1$$

olarak bulunur. Dolayısıyla L 'nin c eğrileri lokal olarak Şekil 4.8'de gösterildiği gibidir.

Geometrik kesişim sayıları verilen bir integral laminasyonun kesen bileşenlerine ait burğu sayıları Uyarı 4.1.5 ve Yardımcı Teorem 4.1.8 kullanılarak bulunabilir. Aşağıdaki yardımcı teorem, verilen bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun her bir kesen bileşeninin burğu sayısını vermektedir.



Şekil 4.8: L , 1 adet c eğrisi içerir.

Yardımcı Teorem 4.1.11. L , $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. G bölgesinde $|T|$, toplam burgu sayısı; m , $t + 1$ burgulu kesen bileşen sayısı ve $c^+ \neq 0$ olmak üzere,

$$m \equiv |T| \pmod{c^+} \quad \text{ve} \quad t = \frac{|T| - m}{c^+} \quad (4.1.6)$$

ile hesaplanır.

İspat. Uyarı 4.1.5'den

$$|T| = m(t + 1) + (c^+ - m)t$$

dir. Buradan

$$|T| = m + tc^+$$

bulunur. Dolayısıyla

$$m \equiv |T| \pmod{c^+} \quad \text{ve} \quad t = \frac{|T| - m}{c^+}$$

elde edilir. □

Örnek 4.1.12. Kesişim sayılarından bazıları $\beta_1 = 5$, $\beta_{n+1} = 5$, $\gamma = 7$, $c = 3$ özelliğinde olan L 'nin ön cins ve arka cins bileşen sayıları Yardımcı Teorem 4.1.6'dan sırasıyla

$$l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

ve

$$l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

dir. Buradan Yardımcı Teorem 4.1.8'den

$$|T| = \gamma - l - l' = 7 - 1 - 1 = 5$$

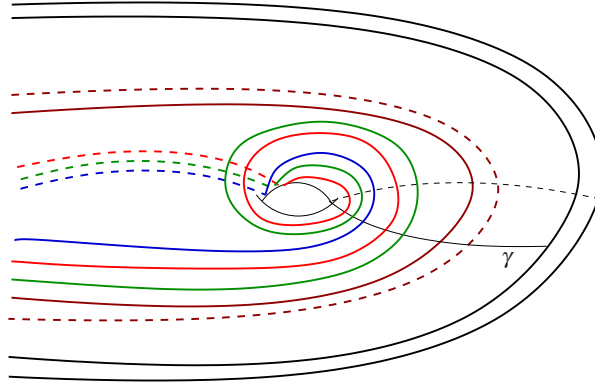
olarak bulunur. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 4.1.11'den büyük burgulu kesen bileşen sayısı

$$m = |T| \pmod{c^+} = 5 \pmod{3} = 2$$

ve küçük burgulu sayısı

$$t = \frac{|T| - m}{c^+} = \frac{5 - 2}{3} = 1$$

bulunur. t adet burgulu yapan kesenlerin sayısı ise $c^+ - m = 3 - 2 = 1$ olur. O zaman 1 adet $t = 1$ defa burgulu yapan kesen ve 2 adet de $t + 1 = 1 + 1 = 2$ defa burgulu yapan kesen bileşen vardır. Dolayısıyla L 'nin kesen bileşenleri lokal olarak Şekil 4.9'da gösterildiği gibidir.



Şekil 4.9: Yeşil kesen eğrisi 2 defa burgulu yapmıştır, kırmızı kesen eğrisi 2 defa burgulu yapmıştır, mavi kesen eğrisi 1 defa burgulu yapmıştır.

Uyarı 4.1.13. $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları her zaman bir integral laminasyon vermeyebilir. Çünkü kesişim sayıları, her bir Δ_i bölgesinde üçgen eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 4.1.14 ile Yardımcı Teorem 4.1.15'de verilen koşulları sağlamayabilir.

Örneğin, kesişim sayıları

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4; \gamma; c) = (1, 1, 1, 1, 1, 1; 0, 2, 0, 2; 2; 1)$$

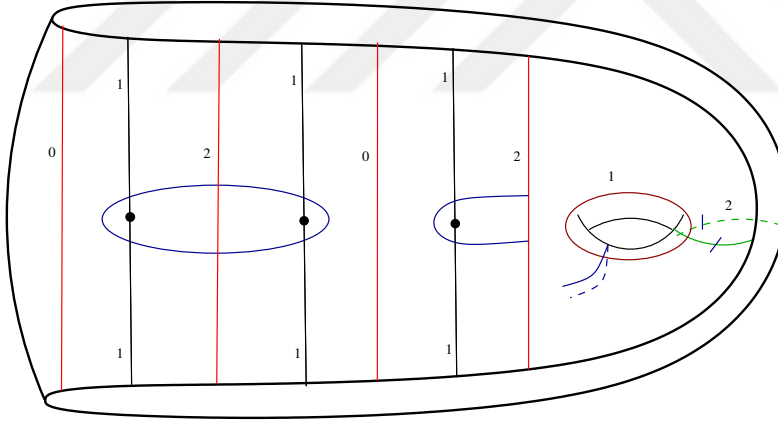
olan bir integral laminasyon oluşturulamaz. Çünkü Yardımcı Teorem 4.1.6'ya göre ön cins ve arka cins bileşen sayısı sırasıyla,

$$l = \frac{\beta_4 - c^+}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

ve

$$l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

olur. Böyle bir durumda Şekil 4.10'da görüldüğü gibi herhangi bir integral laminasyon çizilemez.



Şekil 4.10: $\alpha_{2i} \cup \alpha_{2i-1}$ 'ler ve β_i 'ler çift, fakat c tek

Aşağıdaki yardımcı teoremin ispatı (Yurttaş 2011)'de verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.1.14. D_n 'de her bir U_i bölgesi için aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

Sol dönen bileşen olduğunda ($b_i < 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_{i+1}$$

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - \beta_i = 2|b_i|;$$

Sağ dönen bileşen olduğunda ($b_i > 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_i$$

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - \beta_{i+1} = 2|b_i|;$$

Döner bileşen olmadığında ($b_i = 0$),

$$\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_i = \beta_{i+1}.$$

Yardımcı Teorem 4.1.15. $L, (\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. O zaman $\beta_i - \beta_{i+1}$ ve $\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1} - c^+$ ($1 \leq i \leq n$) çifttir.

İspat. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan l ön cins sayısı ve l' arka cins sayısı olmak üzere

$$\beta_{n+1} = c^+ + 2l$$

olduğundan c^+ çift (tek) ise β_{n+1} 'de çifttir (tektir). Benzer şekilde

$$\beta_1 = c^+ + 2l'$$

olduğundan c^+ çift (tek) ise β_1 'de çifttir (tektir). Ayrıca Yardımcı Teorem 3.2.5'den

$$b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

olduğundan

$$\beta_{i+1} = \beta_i - 2 \sum_{j=1}^i b_j$$

yazılabilir. Dolayısıyla c^+ çift (tek) ise her bir β_i ($1 \leq i \leq n+1$) çifttir (tektir).

Yardımcı Teorem 4.1.14 gereği $b_i > 0$ olduğunda $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_i$ ve $b_i < 0$ olduğunda $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} = \beta_{i+1}$ 'dir. Dolayısıyla c^+ çift (tek) iken $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}$ 'de çifttir (tektir).

c^+ çift iken $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}$ çift, c^+ tek iken $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}$ tek olduğundan $\alpha_{2i} + \alpha_{2i-1} - c^+$ sayısı her zaman çifttir.

□

Uyarı 4.1.16. $c^+ = 0$ olduğunda Yardımcı Teorem 4.1.6 gereği l ve l' formülleri

$$\beta_{n+1} = 2l \quad \text{ve} \quad \beta_1 = 2l'$$

olup, her bir β_i çift olur.

Tanım 4.1.17. $L, (\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. Her $1 \leq i \leq n$ için U_i bölgesindeki dönen bileşenlerin sayısını

$$b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \tag{4.1.7}$$

olmak üzere, $|b_i|$ sayılarını tanımlayalım. Burada $b_i < 0$ ise dönen bileşen *sol*, $b_i > 0$ ise dönen bileşen *sağdır* denir.

Yardımcı Teorem 4.1.18. $L, (\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilsin. Her $1 \leq i \leq n$ için U_i bölgesindeki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı sırasıyla u_i^y ve u_i^a olmak üzere,

$$u_i^y = \alpha_{2i-1} - |b_i| \tag{4.1.8}$$

ve

$$u_i^a = \alpha_{2i} - |b_i| \tag{4.1.9}$$

ile verilir.

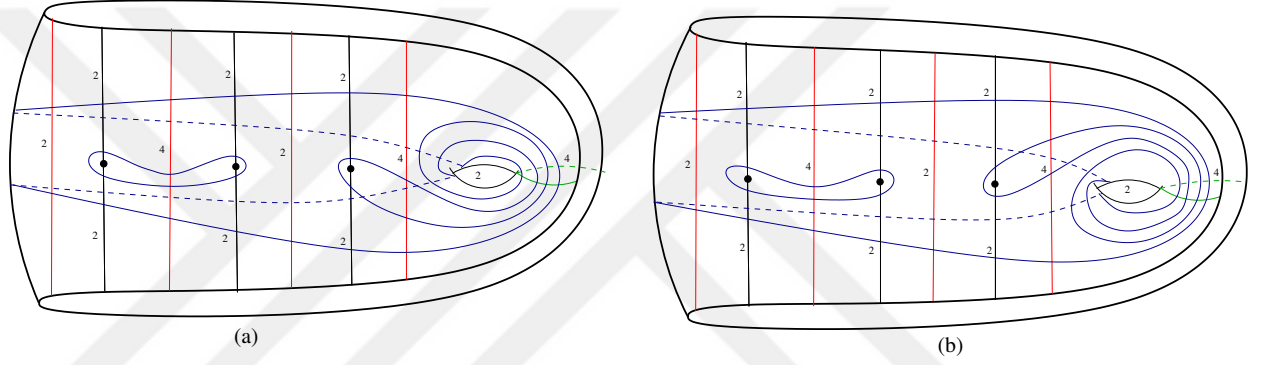
İspat. U_i bölgesinde her bir yukarı ve aşağı bileşen sırasıyla α_{2i-1} ve α_{2i} yayları ile kesiştiklerinden ispat Şekil 4.3'den açıktır. □

Uyarı 4.1.19. Verilen iki farklı integral laminasyon $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}_n$ 'nin geometrik kesişim sayıları aynı olabilir.

Örneğin, Şekil 4.11’de verilen her iki integral laminasyonun geometrik kesişim sayıları

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4; \gamma; c) = (2, 2, 2, 2, 2, 2; 2, 4, 2, 4; 4; 2)$$

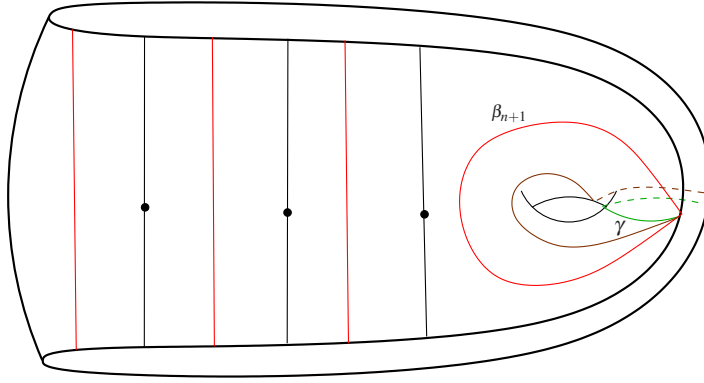
vektörü ile verilse de Şekil 4.11 (a)’daki integral laminasyonun kesen bileşenleri negatif yönde burğu, Şekil 4.11 (b)’deki integral laminasyonun kesen bileşenleri pozitif yönde burğu yaptığından bu integral laminasyonlar farklıdır. Dolayısıyla geometrik kesişim sayıları birebir bir fonksiyon vermemektedir.



Şekil 4.11: Geometrik kesişim sayıları aynı olan iki farklı integral laminasyon

Uyarı 4.1.20. Yukarıdaki örnekte aynı geometrik kesişim sayılarının iki farklı integral laminasyona karşılık gelme sebebinin, kesen bileşenlerin yönlerinin farklı olmasından kaynaklandığını; dolayısıyla kesen bileşenlere ait burğulara yön vererek $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ geometrik kesişim sayılarından birebir bir fonksiyon elde edebiliriz. Bununla birlikte Şekil 4.12’de gösterildiği gibi sisteme yeni bir yay ekleyerek ∂S_n ve β_{n+1} tarafından sınırlanan bölge bir üçgensel bölgeye dönüştürülebilir ve bu durumda (Yurttaş 2013)’da ispatlandığı gibi geometrik kesişim sayıları birebir bir fonksiyon verirdi. Ancak Tanım 4.1.23’de anlatacağımız birebir ve örten olan genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu için bu yay gerekli değildir.

Şimdi, integral laminasyonları birebir ve örten bir şekilde tanımlayan *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemini* oluşturmak için $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun

Şekil 4.12: G bölgesinin üçgenleştirilmesi

$(\alpha; \beta; \gamma; c)$ geometrik kesişim sayıları cinsinden sağladığı özellikleri sıralayalım:

Özellikler 4.1.21. $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayıları ile verilen $L \in \mathcal{L}$ minimal temsilcisini ele alalım. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

1. Yardımcı Teorem 4.1.15'den $\beta_i - \beta_{i+1}$ çifttir. Ayrıca her bir U_i bölgesinde dönen bileşenlerin sayısı Tanım 4.1.17'de verildiği gibidir. Yani, $b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2}$ olmak üzere $|b_i|$ dönen bileşenlerin sayısını verir. Burada $b_i < 0$ ise dönen bileşen sol, $b_i > 0$ ise dönen bileşen sağdır.

2. Yardımcı Teorem 4.1.18'den her bir U_i bölgesindeki yukarı bileşenlerin sayısı $u_i^y = \alpha_{2i-1} - |b_i|$ ve aşağı bileşenlerin sayısı $u_i^a = \alpha_{2i} - |b_i|$ şeklindedir.

3. G bölgesinde tek tip ön cins ve tek tip arka cins bileşen vardır ve bu bileşenlerin sayısı Yardımcı Teorem 4.1.6'de verildiği gibidir. Yani,

$$l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2}$$

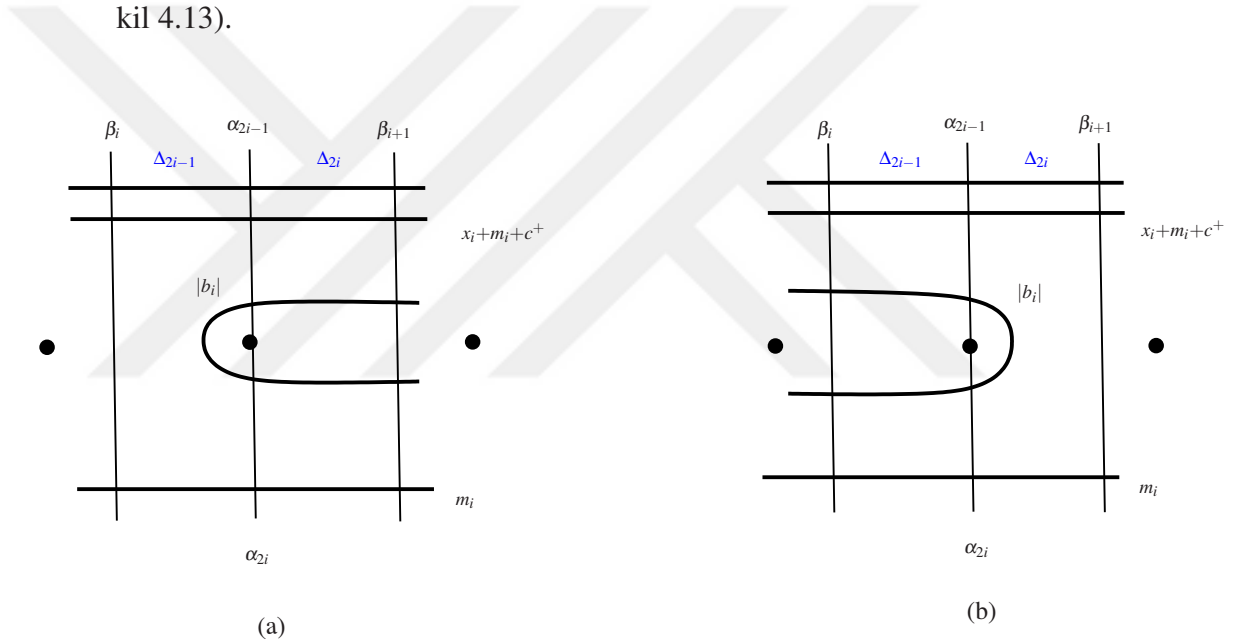
olur.

4. G bölgesindeki kesen bileşenlerin burgularının yönleri aynıdır ve iki farklı kesen bileşenin burğu sayıları arasındaki fark en fazla 1'dir. Uyarı 4.1.5'de tanımlanan

toplam burgu, küçük burgu ve büyük burgu sayıları Yardımcı Teorem 4.1.8 ve Yardımcı Teorem 4.1.11’de verildiği gibidir.

Kesen bileşenler pozitif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ olarak yazılacaktır.

5. $x_i = |\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}| - c^+$ ve $m_i = \min(\alpha_{2i} - |b_i|, \alpha_{2i-1} - |b_i|)$ olsun. O zaman x_i , U_i bölgesinde aşağı ve yukarı bileşenler arasındaki farktan kesen bileşen sayısı çıkarıldığı zaman elde ettiğimiz sayıdır. m_i ise bu bileşenlerin minimumudur (Şekil 4.13).



Şekil 4.13: Yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı

6. Yardımcı Teorem 4.1.15’den x_i sayısı çifttir.

$$2a_i = \alpha_{2i} - \alpha_{2i-1} - c^+ \quad (1 \leq i \leq n)$$

olsun. x_i çift olduğundan a_i bir tam sayıdır.

$b_i \geq 0$ olduğunda

$$\beta_i = \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1},$$

$b_i \leq 0$ olduğunda

$$\beta_{i+1} = \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}$$

dir. Buradan

$$\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1} = 2a_i + c^+$$

eşitliğini yazarız. Burada,

$b_i \geq 0$ olduğunda

$$\alpha_{2i-1} = \frac{-2a_i - c^+ + \beta_i}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_{2i} = \frac{2a_i + c^+ + \beta_i}{2},$$

$b_i \leq 0$ olduğunda

$$\alpha_{2i-1} = \frac{-2a_i - c^+ + \beta_{i+1}}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_{2i} = \frac{2a_i + c^+ + \beta_{i+1}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\lceil x \rceil$, x 'den küçük olmayan en küçük tam sayıyı göstermek üzere her

$1 \leq i \leq 2n$ için α_i :

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{2(-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + (-1)^i c^+ + \beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0; \\ \frac{2(-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + (-1)^i c^+ + \beta_{\lceil 1+i/2 \rceil}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

7. Şekil 4.13'den $1 \leq i \leq n$ için

$$\beta_i = \begin{cases} 2m_i + |2a_i + c^+| & \text{eğer } b_i \leq 0; \\ 2m_i + |2a_i + c^+| + 2b_i & \text{eğer } b_i \geq 0. \end{cases}$$

olduğu açıkça hesaplanabilir. Yani,

$$\beta_i = 2m_i + 2 \max(b_i, 0) + |2a_i + c^+|$$

dir. Tanım 4.1.17'den

$$\beta_{n+1} = \beta_i - 2 \sum_{j=i}^n b_j$$

olduğundan $1 \leq i \leq n$ için

$$\beta_{n+1} = 2m_i + 2 \max(b_i, 0) + |2a_i + c^+| - 2 \sum_{j=i}^n b_j \quad (4.1.11)$$

dir.

8. l ve l' sırasıyla ön cins ve arka cins sayılarını, m_i ($1 \leq i \leq n$) U_i bölgesinde yukarı ve aşağı bileşen sayılarının minimumunu gösterebilir. L sınıra paralel bir eğri içermeyeceğinden m_i , l , ve l' sayılarından en az biri sıfır olmalıdır.

Şimdi olası durumları inceleyelim:

Durum 1: En az bir $1 \leq i \leq n$ için $m_i = 0$ olsun.

Denklem (4.1.11)'den

$$\beta_{n+1} = 2 \max(b_i, 0) + |2a_i + c^+| - 2 \sum_{j=i}^n b_j$$

olur. Eğer $m_i > 0$ ise

$$\beta_{n+1} > 2 \max(b_i, 0) + |2a_i + c^+| - 2 \sum_{j=i}^n b_j$$

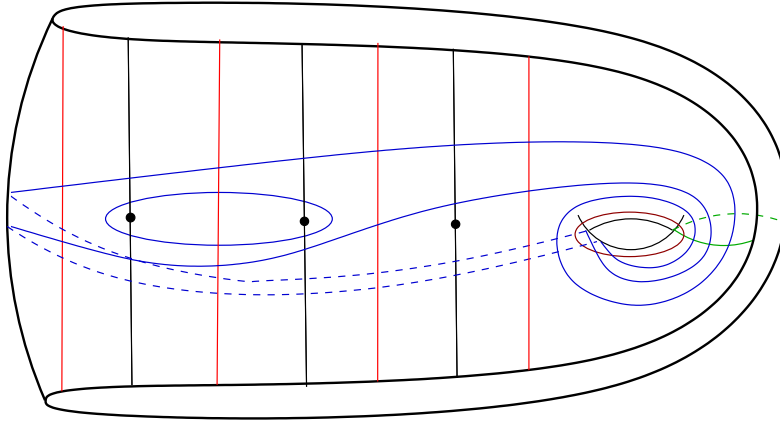
olur. Sonuç olarak Denklem (4.1.11)'den,

$$\beta_{n+1} = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right] \quad (4.1.12)$$

elde edilir. Bu durum için bir örnek Şekil 4.14'de resmedilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$\beta_{n+1} = c^+ + 2l \quad \text{ve} \quad \beta_1 = c^+ + 2l'$$

Şekil 4.14: En az bir $m_i = 0$

yazılır. Bu durumda

$$\beta_{n+1} \geq c^+ \quad \text{ve} \quad \beta_1 \geq c^+$$

olur. O zaman Tanım 4.1.17 gereği

$$\beta_{n+1} = \beta_1 - 2 \sum_{i=1}^n b_i \geq c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i$$

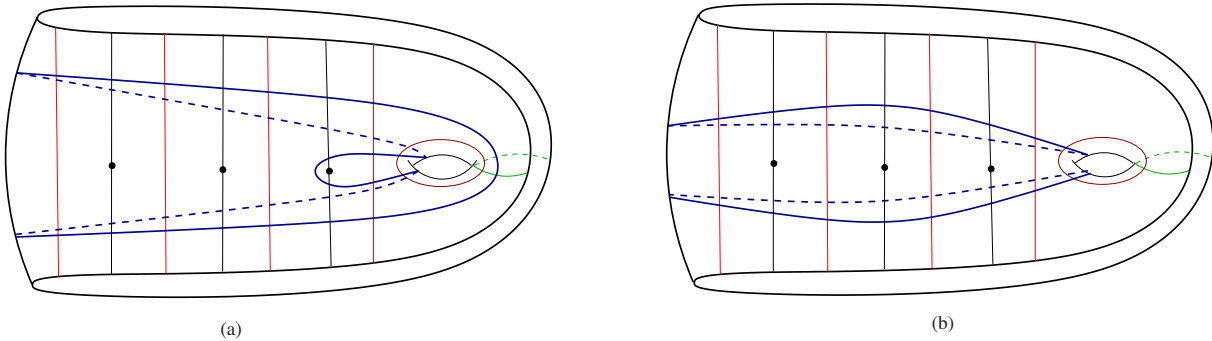
olduğundan

$$\beta_{n+1} \geq \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i) \quad (4.1.13)$$

elde edilir.

Durum 2: Her $1 \leq i \leq n$ için $m_i \neq 0$ olsun.

Bu durumda integral laminasyon Şekil 4.15'te resmedildiği gibi her bir U_i bölgesinde her bir yukarı ve aşağı bileşen sayısı sıfırdan farklı olan eğriler içerir.

Şekil 4.15: Her $m_i \neq 0$ durumu

Ayrıca ön cins ve arka cins bileşen sayılarından en az biri sıfır olmalıdır. Aksi takdirde integral laminasyon Şekil 3.4 (b)'de gösterildiği gibi sınıra paralel eğriler içerir. Dolayısıyla 3 ihtimal vardır:

i. $l = 0$ ve $l' = 0$ durumu:

Bu durumda Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$\beta_1 = \beta_{n+1} = c^+ \quad (4.1.14)$$

olur. O zaman Tanım 4.1.17 gereği $\beta_{n+1} = \beta_1 - 2 \sum_{i=1}^n b_i$ olduğundan

$$\beta_{n+1} = c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i$$

bulunur. Buradan Denklem (4.1.14)'den

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0$$

eşitliği elde edilir.

ii. $l > 0$ ve $l' = 0$ durumu:

$l' = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.6 gereği

$$\beta_1 = c^+$$

ve böylece Tanım 4.1.17'den

$$\beta_{n+1} = c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i$$

yazılır. Ayrıca $l > 0$ olduğundan

$$\beta_{n+1} = c^+ + 2l > c^+$$

elde edilir.

$$\beta_{n+1} = c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i = c^+ + 2l$$

denklemden

$$l = - \sum_{i=1}^n b_i$$

bulunur. $l > 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^n b_i < 0$$

çıkar.

iii. $l = 0$ ve $l' > 0$ durumu:

$l = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.6 gereği

$$\beta_{n+1} = c^+$$

ve $l' > 0$ olduğundan

$$\beta_1 = c^+ + 2l' > c^+$$

dır. O zaman Tanım 4.1.17'den

$$\beta_{n+1} = c^+ + 2l' - 2 \sum_{i=1}^n b_i$$

dir. Sonuç olarak

$$\beta_{n+1} = c^+ + 2l' - 2 \sum_{i=1}^n b_i = c^+$$

eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^n b_i > 0$$

bulunur.

(i), (ii) ve (iii) durumları birleştirilirse

$$\beta_{n+1} = \begin{cases} c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i & \text{eğer } \sum_{i=1}^n b_i < 0; \\ c^+ & \text{eğer } \sum_{i=1}^n b_i > 0; \\ c^+ & \text{eğer } \sum_{i=1}^n b_i = 0 \end{cases} \quad (4.1.15)$$

olarak bulunur. Ayrıca Denklem (4.1.11)'den her $m_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) olduğundan

$$\beta_{n+1} \geq \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right] \quad (4.1.16)$$

dir.

Kısalık olması açısından

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right]$$

alalım. (4.1.13) ve (4.1.16) eşitsizliklerinden

$$\beta_{n+1} = \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) \quad (4.1.17)$$

bulunur. Tanım 4.1.17'den her $1 \leq i \leq n$ için

$$\beta_i = 2 \sum_{j=i}^n b_j + \beta_{n+1} \quad (4.1.18)$$

elde edilir.

9. Sıfır burgulu kesen bileşenler dışındaki G bölgesindeki her bir yol bileşeni γ yayını bir kez kestiğinden $p(c) \neq 0$ olduğunda

$$\gamma = l + l' + p(c)$$

ve $p(c) = 0$ olduğunda

$$\gamma = l + l' + |T|$$

dir. Denklem (4.1.1)'den

$$p(c) = -c$$

dir. Dolayısıyla

$$\gamma = \begin{cases} |T| + l + l' & \text{eğer } c > 0; \\ |c| + l + l' & \text{eğer } c \leq 0 \end{cases} \quad (4.1.19)$$

dır. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2}$$

ve Denklem (4.1.17) ve Denklem (4.1.18)'den sırasıyla

$$\beta_{n+1} = \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) \quad \text{ve} \quad \beta_1 = 2 \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa)$$

dır. Buradan

$$\gamma = \begin{cases} |T| + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c > 0; \\ |c| + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c \leq 0 \end{cases} \quad (4.1.20)$$

elde edilir.

Yukarıda α_i , β_i ve γ yayları üzerindeki geometrik kesişim sayılarını a_i , b_i ve T sayıları cinsinden ifade ettik. Şimdi \mathcal{L}_n kümesini birebir ve örten bir şekilde koordinatlandırılan *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemini* tanımlayabiliriz.

Uyarı 4.1.22. $|T|$ kesen bileşenlerin toplam burğu sayısı olmak üzere, $c \leq 0$ iken $T \neq 0$ özelliğinde integral laminasyonların olamayacağına dikkat ediniz.

Tanım 4.1.23. $\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olsun. *Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu* $\Phi : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ her $1 \leq i \leq n$ için

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1} - c^+}{2}, \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (4.1.21)$$

ve

$$|T| = \begin{cases} 0 & \text{eğer } c^+ = 0; \\ \gamma - \frac{\beta_{n+1}-c^+}{2} - \frac{\beta_1-c^+}{2} & \text{eğer } c^+ \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.22)$$

olmak üzere,

$$\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; T; c)$$

şeklinde tanımlanır. Kesen bileşenler pozitif yönde burgu yaptığında $\mathbf{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burgu yaptığında $\mathbf{sgn}(T) = -1$ 'dir (\mathbf{sgn} , işaret (signum) fonksiyonudur.).

Örnek 4.1.24. Şekil 4.2'deki \mathcal{L} integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatlarını hesaplayalım.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4; \gamma; c) = (4, 1, 3, 2, 4, 1; 3, 5, 5, 3; 3; 1)$$

olduğundan Denklem (4.1.21)'den

$$a_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - c^+}{2} = \frac{1 - 4 - 1}{2} = -2$$

$$a_2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_3 - c^+}{2} = \frac{2 - 3 - 1}{2} = -1$$

$$a_3 = \frac{\alpha_6 - \alpha_5 - c^+}{2} = \frac{1 - 4 - 1}{2} = -2$$

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{5 - 5}{2} = 0$$

$$b_3 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

dir. Ayrıca $c^+ = \max(c, 0) = \max(1, 0) = 1$ olduğundan Denklem (4.1.22) gereği

$$|T| = \gamma - \frac{\beta_4 - c^+}{2} - \frac{\beta_1 - c^+}{2} = 3 - \frac{3-1}{2} - \frac{3-1}{2} = 1$$

dir. Kesen bileşen negatif yönde burgu yaptığından $T = -1$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\Phi(\mathcal{L}) = (-2, -1, -2; -1, 0, 1; -1; 1)$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki teorem *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini* vermektedir:

Teorem 4.1.25. $(a; b; T; c) \in \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ olsun. O zaman $(a; b; T; c)$ vektörü, geometrik kesişim sayıları aşağıda verilen bir ve yalnız bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonuna karşılık gelir.

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right]$$

olmak üzere

$$\beta_i = 2 \sum_{j=i}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa), \quad \beta_{n+1} = \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) \quad (4.1.23)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{2(-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + (-1)^i c^+ + \beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0; \\ \frac{2(-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + (-1)^i c^+ + \beta_{(1+\lceil i/2 \rceil)}}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0 \end{cases} \quad (4.1.24)$$

ve

$$\gamma = \begin{cases} |T| + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c > 0; \\ |c| + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c \leq 0 \end{cases} \quad (4.1.25)$$

dır. Burada $\lceil x \rceil$, x 'den küçük olmayan en küçük tam sayıdır. Kesen bileşenler pozitif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir (sgn ,

işaret (signum) fonksiyonudur.).

İspat. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$, genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c)$ olan bir integral laminasyon olsun. Öncelikle $\Phi : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun birebir olduğunu göstereceğiz. $L \in \mathcal{L}$ minimal temsilcisine karşılık gelen $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayılarının (4.1.23), (4.1.24) ve (4.1.25) eşitliklerinde verildiği gibi olduğu Özellikler 4.1.21’de gösterilmiştir. O zaman her bir U_i bölgesindeki yukarı, aşağı, sağ veya sol dönen bileşen sayıları; G bölgesindeki c eğrilerinin ve ön cins, arka cins ve kesen bileşenlerin sayıları ile her bir kesen bileşene ait burgu sayısı ve yönü Kesim 4.1’de verildiği gibi hesaplanır ve böylece Uyarı 4.1.20’de belirtildiği gibi kesen bileşenlere ait burgulara yön vererek U_i ve G bölgesindeki yol bileşenleri uygun izotopi altında tek türlü birleştirilebilir. Buradan Φ birebirdir.

Şimdi $\Phi : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ ’nin örten olduğunu görelim. $(a; b; T; c) \in \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ olsun. (4.1.23), (4.1.24) ve (4.1.25) eşitlikleri tarafından tanımlanan $(\alpha, \beta, \gamma, c)$ geometrik kesişim sayılarının, $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c)$ özelliğinde bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonuna karşılık geldiğini göstereceğiz. Öncelikle, $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ geometrik kesişim sayılarına sahip bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatlarının $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c)$ olduğu açıktır. Ayrıca $T < 0$ durumu kesen bileşenin negatif yönde burgu yaptığını, $T > 0$ durumu ise kesen bileşenin pozitif yönde burgu yaptığını gösterir. Özellikler 4.1.21’de oluşturulduğu gibi $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ kesişim sayılarından, her bir U_i ($1 \leq i \leq n$) bölgesi ve G bölgesine birbiriyle kesişmeyen yol bileşenleri çizilebilir. Bu yol bileşenlerini birleştirerek birbiriyle kesişmeyen basit kapalı eğrilerin bir ailesi elde edilir. Özellikler 4.1.21’de oluşturulduğu üzere elde edilen eğri sisteminde, her bir U_i bölgesinde dört tip yol bileşen olduğundan işaretlenmiş nokta sınırlayan bir eğri bulunmamaktadır. Ayrıca, m_i, l ve l' sayılarından en az birisi sıfır olduğundan eğri sistemi sınıra paralel bir eğri de içermemektedir. Dolayısıyla bu eğri sistemi kesişim sayıları $(\alpha; \beta; \gamma; c)$ olan bir integral laminasyondur. \square

Örnek 4.1.26. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_2$ integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c) = (1, -1; 0, 1; -1; 2)$ olsun. L minimal temsilcisine karşılık gelen keşişim sayılarını bulalım. $c = 2 > 0$ olduğundan $p(c) = 0$ ve $c^+ = 2$ 'dir. Teorem 4.1.25'den α , β ve γ keşişim sayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} \kappa &= \max_{1 \leq k \leq 2} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^2 b_j \right] \\ &= \max \left[2 \max(b_1, 0) + |2a_1 + c^+| - 2 \sum_{j=1}^2 b_j, 2 \max(b_2, 0) + |2a_2 + c^+| - 2 \sum_{j=2}^2 b_j \right] \\ &= \max [2 \max(0, 0) + |2 \cdot 1 + 2| - 2(0 + 1), 2 \max(1, 0) + |2 \cdot (-1) + 2| - 2 \cdot 1] \\ &= \max [0 + 4 - 2, 2 + 0 - 2] = 2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^2 b_i, \kappa) \\ &= \max(2, 2 - 2(0 + 1), 2) = 2 \end{aligned}$$

dir. Denklem (4.1.18)'den

$$\beta_1 = 2(b_1 + b_2) + \beta_3 = 2(0 + 1) + 2 = 4$$

$$\beta_2 = 2b_2 + \beta_3 = 2 + 2 = 4$$

elde edilir. Denklem (4.1.24)'den $b_1 = 0$ olduğundan $\alpha_1 = 0$ ve $\alpha_2 = 4$ 'dür. $b_2 > 0$ olduğundan $\alpha_3 = 2$ ve $\alpha_4 = 2$ bulunur. $c > 0$ olduğundan Denklem (4.1.25)'den,

$$\begin{aligned} \gamma &= |T| + \sum_{j=1}^2 b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^2 b_i, \kappa) - c^+ \\ &= |T| + b_1 + b_2 + \max(c^+, c^+ - 2(b_1 + b_2), \kappa) - c^+ \\ &= 1 + 0 + 1 + \max(2, 2 - 2(0 + 1), 2) - 2 = 2 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi G ve U_i bölgelerindeki yol bileşen sayılarını hesaplayalım. Uyarı 4.1.4'den $c^+ = 2$ olduğundan 2 adet kesen bileşen vardır. $T = -1$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.8'den toplam burgu sayısı $|T| = 1$ 'dir ve kesen bileşenler negatif yönde burgu yapmaktadır. Yardımcı Teorem 4.1.11'den 1 adet 1 burgulu, 1 adet 0 burgulu kesen bileşen vardır. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_3 - c^+}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0 \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

olduğundan 1 adet arka cins vardır, fakat ön cins bulunmamaktadır.

Denklem (4.1.7)'den,

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{4 - 4}{2} = 0$$

olduğundan U_1 bölgesinde dönen bileşen yoktur.

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

olduğundan, U_2 bölgesinde 1 adet sağ dönen bileşen vardır.

Denklem (4.1.8) ve Denklem (4.1.9)'dan her bir U_i bölgesindeki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayıları aşağıdaki gibidir:

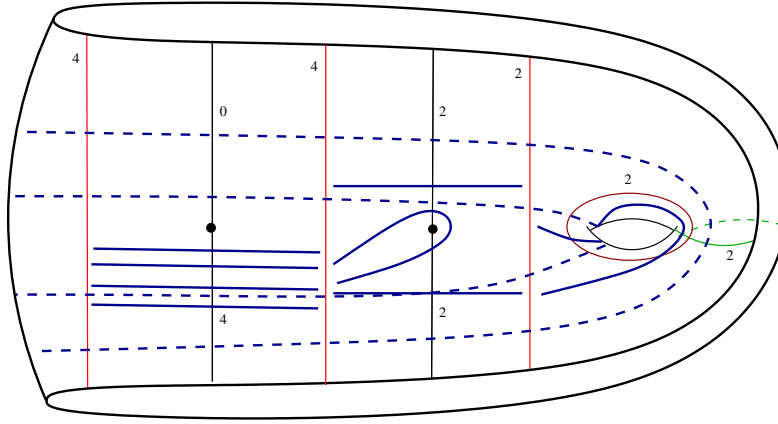
$$u_1^y = \alpha_1 - |b_1| = 0 - 0 = 0 \quad \text{ve} \quad u_1^a = \alpha_2 - |b_1| = 4 - 0 = 4$$

olduğundan U_1 bölgesinde yukarı bileşen yoktur ve 4 adet aşağı bileşen vardır.

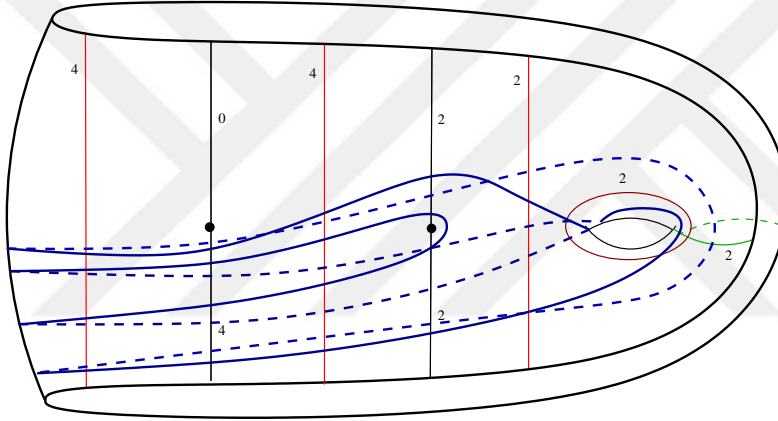
$$u_2^y = \alpha_3 - |b_2| = 2 - 1 = 1 \quad \text{ve} \quad u_2^a = \alpha_4 - |b_2| = 2 - 1 = 1$$

olduğundan U_2 bölgesinde 1 adet yukarı bileşen ve 1 adet aşağı bileşen vardır.

Buradan Şekil 4.16 elde edilir. Bu ise Şekil 4.17'deki integral laminasyonu verir.



Şekil 4.16: Her bir U_i ve G bölgelerindeki yol bileşenlerin yerleştirilmesi



Şekil 4.17: $\Phi(\mathcal{L}) = (1, -1; 0, 1; -1; 2)$

Örnek 4.1.27. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_3$ integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları

$$\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c) = (-3, -1, -1; -2, 4, 0; 0; 2) \in \mathbb{Z}^8 \setminus \mathcal{V}_3$$

olsun. L minimal temsilcisine karşılık gelen kesişim sayılarını bulalım. $c = 2 > 0$ olduğundan $p(c) = 0$ ve $c^+ = 2$ 'dir. Teorem 4.1.25'den α , β ve γ kesişim sayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq 3} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^3 b_j \right]$$

gereği $\kappa = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) \\ &= \max(2, 2 - 2(-2 + 4 + 0), 0) = 2\end{aligned}$$

dir. Denklem (4.1.18)'den

$$\beta_1 = 2(b_1 + b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(-2 + 4 + 0) + 2 = 6$$

$$\beta_2 = 2(b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(4 + 0) + 2 = 10$$

$$\beta_3 = 2b_3 + \beta_4 = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

elde edilir. Denklem (4.1.24)'den $b_1 < 0$ olduğundan $\alpha_1 = 7$ ve $\alpha_2 = 3$ 'dür. $b_2 > 0$ olduğundan $\alpha_3 = 5$ ve $\alpha_4 = 5$ 'dir. $b_3 = 0$ olduğundan $\alpha_5 = 1$ ve $\alpha_6 = 1$ bulunur. $c > 0$ olduğundan Denklem (4.1.25)'den,

$$\begin{aligned}\gamma &= |T| + \sum_{j=1}^3 b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) - c^+ \\ &= |T| + b_1 + b_2 + b_3 + \max(c^+, c^+ - 2(b_1 + b_2 + b_3), \kappa) - c^+ \\ &= 0 - 2 + 4 + 0 + \max(2, 2 - 2(-2 + 4 + 0), 0) - 2 = 2\end{aligned}$$

dir. Şimdi G ve U_i bölgelerindeki yol bileşen sayılarını hesaplayalım. Uyarı 4.1.4'den $c^+ = 2$ olduğundan 2 adet kesen bileşen vardır. $T = 0$ olduğundan bu kesen bileşenler burğu yapmamaktadır. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_4 - c^+}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0 \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

olduğundan ön cins bulunmamaktadır. 2 adet arka cins vardır.

Denklem (4.1.7)'den,

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{6 - 10}{2} = -2$$

dir. $b_1 < 0$ olduğundan U_1 bölgesinde 2 adet sol dönen bileşen vardır.

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

dir. $b_2 > 0$ olduğundan U_2 bölgesinde 4 adet sağ dönen bileşen vardır.

$$b_3 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

olduğundan U_3 bölgesinde dönen bileşen yoktur.

Denklem (4.1.8) ve Denklem (4.1.9)'dan her bir U_i bölgesindeki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayıları aşağıdaki gibidir:

$$u_1^y = \alpha_1 - |b_1| = 7 - 2 = 5 \quad \text{ve} \quad u_1^a = \alpha_2 - |b_1| = 3 - 2 = 1$$

olduğundan U_1 bölgesinde 5 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

$$u_2^y = \alpha_3 - |b_2| = 5 - 4 = 1 \quad \text{ve} \quad u_2^a = \alpha_4 - |b_2| = 5 - 4 = 1$$

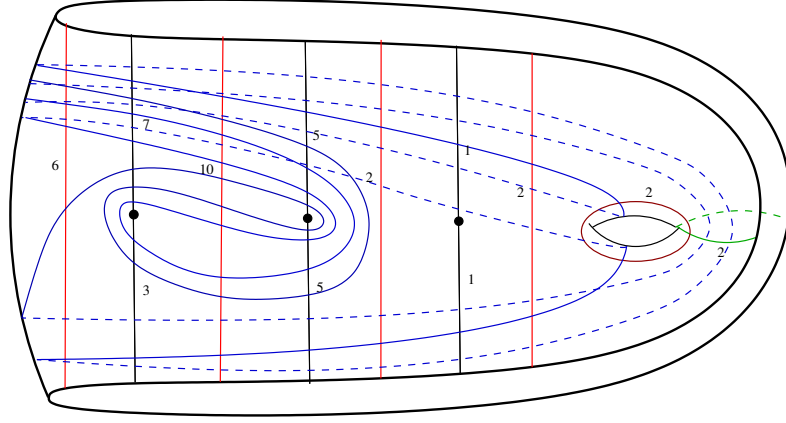
olduğundan U_2 bölgesinde 1 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

$$u_3^y = \alpha_5 - |b_3| = 1 - 0 = 1 \quad \text{ve} \quad u_3^a = \alpha_6 - |b_3| = 1 - 0 = 1$$

olduğundan U_3 bölgesinde 1 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

Hesaplanan bileşenler uygun izotopi altında tek türlü birleştirilerek Şekil 4.18'deki integral laminasyon elde edilir. Her $m_i \neq 0$ durumundaki bu örnekte Denklem (4.1.15) gereği $\sum_{i=1}^3 b_i > 0$ olduğundan β_4 'ün c^+ 'a eşit olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 4.1.28. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_3$ integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c) = (-2, -2, -2; 0, 0, 0; 0; 3)$ olsun. L minimal temsilcisine karşılık gelen kesişim sayılarını bulalım. $c = 3 > 0$ olduğundan $p(c) = 0$ ve $c^+ = 3$ 'dür.



Şekil 4.18: Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i > 0$)

Teorem 4.1.25'den α , β ve γ kesişim sayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq 3} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^3 b_j \right]$$

gereği $\kappa = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) \\ &= \max(3, 3 - 2(0 + 0 + 0), 1) = 3 \end{aligned}$$

dür. Denklem (4.1.18)'den

$$\beta_1 = 2(b_1 + b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(0 + 0 + 0) + 3 = 3$$

$$\beta_2 = 2(b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(0 + 0) + 3 = 3$$

$$\beta_3 = 2b_3 + \beta_4 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

elde edilir. Denklem (4.1.24)'den $b_1 = 0$ olduğundan $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 1$ 'dir. $b_2 = 0$ olduğundan $\alpha_3 = 2$ ve $\alpha_4 = 1$ 'dir. $b_3 = 0$ olduğundan $\alpha_5 = 2$ ve $\alpha_6 = 1$ bulunur. $c > 0$

olduğundan Denklem (4.1.25)'den,

$$\begin{aligned}\gamma &= |T| + \sum_{j=1}^3 b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) - c^+ \\ &= |T| + b_1 + b_2 + b_3 + \max(c^+, c^+ - 2(b_1 + b_2 + b_3), \kappa) - c^+ \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \max(3, 3 - 2(0 + 0 + 0), 1) - 3 = 0\end{aligned}$$

dır.

Şimdi G ve U_i bölgelerindeki yol bileşen sayılarını hesaplayalım. Uyarı 4.1.4'den $c^+ = 3$ olduğundan 3 adet kesen bileşen vardır. $T = 0$ olduğundan bu kesen bileşenler burğu yapmamaktadır. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_4 - c^+}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0 \quad \text{ve} \quad l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

olduğundan ön cins ve arka cins bileşen bulunmamaktadır.

Denklem (4.1.7)'den,

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$$b_3 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

olduğundan U_i bölgelerinde dönen bileşen bulunmamaktadır.

Denklem (4.1.8) ve Denklem (4.1.9)'dan U_i bölgelerindeki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayıları aşağıdaki gibidir:

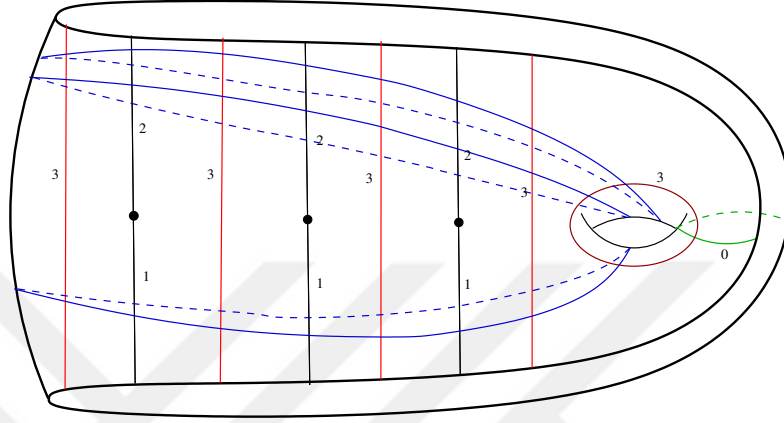
$$u_1^y = \alpha_1 - |b_1| = 2 - 0 = 2 \quad \text{ve} \quad u_1^a = \alpha_2 - |b_1| = 1 - 0 = 1$$

$$u_2^y = \alpha_3 - |b_2| = 2 - 0 = 2 \quad \text{ve} \quad u_2^a = \alpha_4 - |b_2| = 1 - 0 = 1$$

$$u_3^y = \alpha_5 - |b_3| = 2 - 0 = 2 \quad \text{ve} \quad u_3^a = \alpha_6 - |b_3| = 1 - 0 = 1$$

olduğundan U_i bölgelerinde 2 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

Hesaplanan bileşenler uygun izotopi altında tek türlü birleştirilerek Şekil 4.19'daki integral laminasyon elde edilir. Her $m_i \neq 0$ durumundaki bu örnekte Denklem (4.1.15) gereği $\sum_{i=1}^3 b_i = 0$ olduğundan β_4 'ün c^+ 'a eşit olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 4.19: Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i = 0$)

Örnek 4.1.29. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_3$ integral laminasyonunun genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları $\Phi(\mathcal{L}) = (a; b; T; c) = (-2, -2, -1; 0, -1, -1; -5; 3)$ olsun. L minimal temsilcisine karşılık gelen kesişim sayılarını bulalım. $c = 3 > 0$ olduğundan $p(c) = 0$ ve $c^+ = 3$ 'dür. Teorem 4.1.25'den α , β ve γ kesişim sayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq 3} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^3 b_j \right]$$

gereği $\kappa = 5$ olduğundan

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) \\ &= \max(3, 3 - 2(0 - 1 - 1), 5) = 7 \end{aligned}$$

dir. Denklem (4.1.18)'den

$$\beta_1 = 2(b_1 + b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(0 - 1 - 1) + 7 = 3$$

$$\beta_2 = 2(b_2 + b_3) + \beta_4 = 2(-1 - 1) + 7 = 3$$

$$\beta_3 = 2b_3 + \beta_4 = 2 \cdot (-1) + 7 = 5$$

elde edilir. Denklem (4.1.24)'den $b_1 = 0$ olduğundan $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 1$ 'dir. $b_2 < 0$ olduğundan $\alpha_3 = 3$ ve $\alpha_4 = 2$ 'dir. $b_3 < 0$ olduğundan $\alpha_5 = 3$ ve $\alpha_6 = 4$ bulunur. $c > 0$ olduğundan Denklem (4.1.25)'den,

$$\begin{aligned} \gamma &= |T| + \sum_{j=1}^3 b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^3 b_i, \kappa) - c^+ \\ &= |T| + b_1 + b_2 + b_3 + \max(c^+, c^+ - 2(b_1 + b_2 + b_3), \kappa) - c^+ \\ &= 5 + 0 - 1 - 1 + \max(3, 3 - 2(0 - 1 - 1), 5) - 3 = 7 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi G ve U_i bölgelerindeki yol bileşen sayılarını hesaplayalım. Uyarı 4.1.4'den $c^+ = 3$ olduğundan 3 adet kesen bileşen vardır. $T = -5$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.8 gereği toplam burgu sayısı $|T| = 5$ 'dir ve kesen bileşenler negatif yönde burgu yapmaktadır. Yardımcı Teorem 4.1.11'den 2 adet 2 burgulu, 1 adet 1 burgulu kesen bileşen vardır. Yardımcı Teorem 4.1.6'dan

$$l = \frac{\beta_4 - c^+}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

adet ön cins bileşen bulunmaktadır. Yardımcı Teorem 4.1.6 gereği

$$l' = \frac{\beta_1 - c^+}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

olduğundan arka cins bileşen bulunmamaktadır.

Denklem (4.1.7)'den,

$$b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

dir. $b_1 = 0$ olduğundan U_1 bölgesinde dönen bileşen yoktur.

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

dir. $b_2 < 0$ olduğundan U_2 bölgesinde 1 adet sol dönen bileşen vardır.

$$b_3 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2} = \frac{5 - 7}{2} = -1$$

dir. $b_3 < 0$ olduğundan U_3 bölgesinde 1 adet sol dönen bileşen vardır.

Denklem (4.1.8) ve Denklem (4.1.9)'dan yukarı ve aşağı bileşenlerin sayıları aşağıdaki gibidir:

$$u_1^y = \alpha_1 - |b_1| = 2 - 0 = 2 \quad \text{ve} \quad u_1^a = \alpha_2 - |b_1| = 1 - 0 = 1$$

olduğundan U_1 bölgesinde 2 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

$$u_2^y = \alpha_3 - |b_2| = 3 - 1 = 2 \quad \text{ve} \quad u_2^a = \alpha_4 - |b_2| = 2 - 1 = 1$$

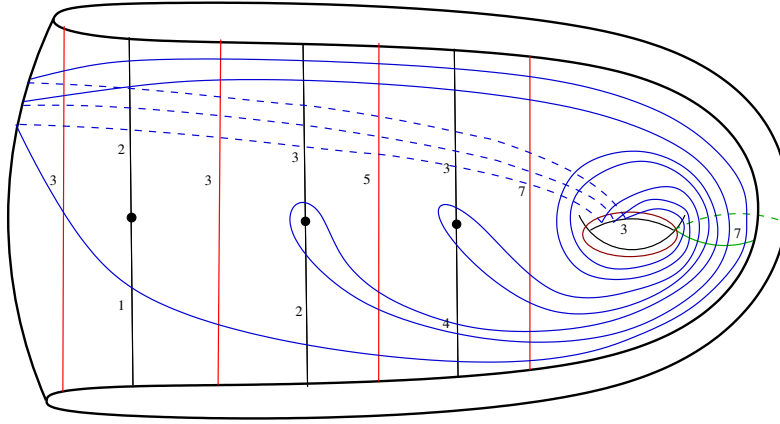
olduğundan U_2 bölgesinde 2 adet yukarı bileşen, 1 adet aşağı bileşen vardır.

$$u_3^y = \alpha_5 - |b_3| = 3 - 1 = 2 \quad \text{ve} \quad u_3^a = \alpha_6 - |b_3| = 4 - 1 = 3$$

olduğundan U_3 bölgesinde 2 adet yukarı bileşen, 3 adet aşağı bileşen vardır.

Hesaplanan bileşenler uygun izotopi altında tek türlü birleştirilerek Şekil 4.20'deki integral laminasyon elde edilir. Her $m_i \neq 0$ durumundaki bu örnekte Denklem (4.1.15) gereği $\sum_{i=1}^3 b_i < 0$ olduğundan β_4 'ün $c^+ - 2\sum_{i=1}^3 b_i$ 'e eşit olduğuna dikkat ediniz.

Bir sonraki kesimde (Yurttaş 2011, Hall ve Yurttaş 2018)'de verilen, D_n 'deki integral laminasyonların elemanter eğriler ile olan geometrik kesişim sayılarını veren formülleri elde etmek için kullanılan materyalleri S_n 'e genelleştireceğiz.

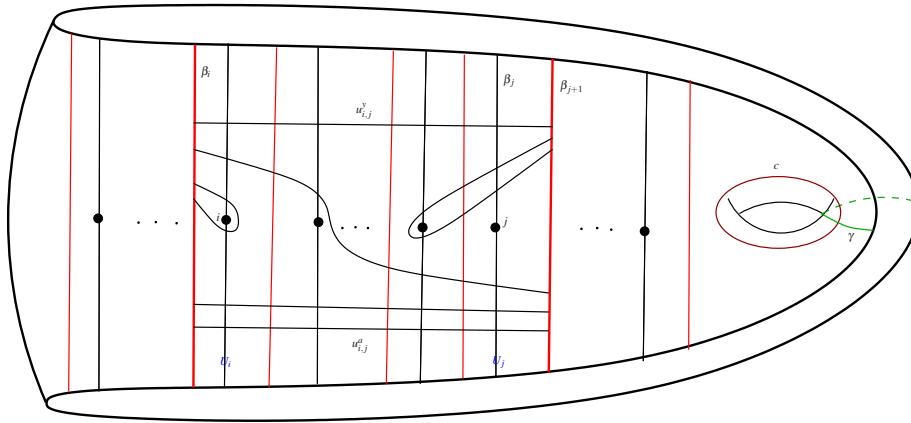


Şekil 4.20: Her $m_i \neq 0$ örneği ($\sum_{i=1}^n b_i < 0$)

4.2. İntegral Laminasyonların Elemanter Eğriler ile Geometrik Kesişimi

Bu kesimde S_n 'de tanımlı elemanter eğriler (Dynnikov ve Wiest 2007, Yurttaş 2011, Hall ve Yurttaş 2018) detaylı bir şekilde anlatılacaktır.

Tanım 4.2.1. $U_{i,j} = \bigcup_{i \leq k \leq j} U_k$ olmak üzere, L 'nin $U_{i,j}$ 'deki bir *yol bileşeni*, $L \cap U_{i,j}$ 'nin bir bileşenidir. $U_{i,j}$ 'deki bir *yukarı bileşen*, β_i ve β_{j+1} 'de uç noktalara sahiptir ve herhangi bir α_{2k} ($i \leq k \leq j$)'i kesmez. $U_{i,j}$ 'deki bir *aşağı bileşen*, β_i ve β_{j+1} 'de uç noktalara sahiptir ve herhangi bir α_{2k-1} ($i \leq k \leq j$)'i kesmez (Şekil 4.21).



Şekil 4.21: $u_{i,j}^y$ ve $u_{i,j}^a$

Yardımcı Teorem 4.1.18'i kullanarak $U_{i,j}$ 'deki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı hesaplanabilir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. $U_{i,j}$ 'deki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısı sırasıyla

$$u_{i,j}^y = \min_{i \leq k \leq j} \{\alpha_{2k-1} - |b_k|\} \quad \text{ve} \quad u_{i,j}^a = \min_{i \leq k \leq j} \{\alpha_{2k} - |b_k|\}$$

dır. Böylece $u_{i,j} = u_{i,j}^y + u_{i,j}^a$ sayısı, $U_{i,j}$ 'deki yukarı ve aşağı bileşenlerin sayısını verir.

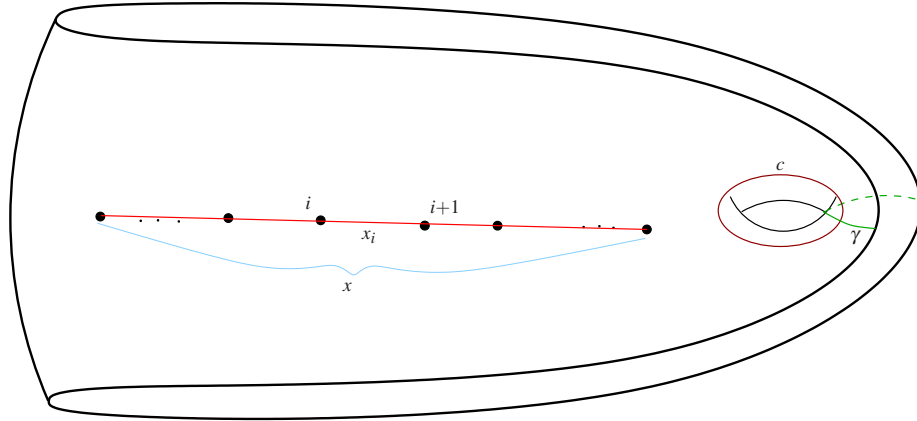
İspat. Yardımcı Teorem 4.1.18'den, $1 \leq k \leq n$ için $u_k^y = \alpha_{2k-1} - |b_k|$ ve $u_k^a = \alpha_{2k} - |b_k|$ 'dır. O zaman $u_{i,j}^y = \min_{i \leq k \leq j} \{u_k^y\}$ ve $u_{i,j}^a = \min_{i \leq k \leq j} \{u_k^a\}$ 'dır. Böylece

$$u_{i,j} = \min_{i \leq k \leq j} \{u_k^y\} + \min_{i \leq k \leq j} \{u_k^a\}$$

dır. □

Uyarı 4.2.3. $U_{i,j}$ 'deki basit kapalı eğri olmayan yol bileşenlerinin sayısı $\frac{\beta_i + \beta_{j+1}}{2}$ ile verilir (Şekil 4.21).

Tanım 4.2.4. S_n 'de x_i , i . işaretlenmiş nokta ile $i+1$. işaretlenmiş nokta arasındaki aralık olmak üzere $x = \bigcup_{i=1}^{n-1} x_i$ yolunu alalım (Şekil 4.22). Esas basit kapalı bir C eğrisi verildi-



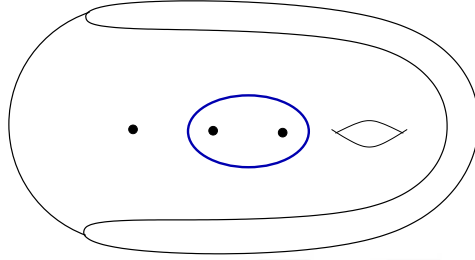
Şekil 4.22: x yolu

ğinde $\|C\|$, C 'nin x -yolu ile kesişimlerinin minimum sayısını belirtir. O zaman $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ verildiğinde \mathcal{L} 'nin normu $\|\mathcal{L}\| = \sum \|C_i\|$ olarak tanımlanır. Burada $\{C_i\}$, \mathcal{L} 'nin bağlantılı bileşenleridir. C_i , x yolunu en fazla iki defa kesiyor ($\|C_i\| \leq 2$) ise, C_i 'nin *elemanter*

olduğunu söyleriz. O zaman, \mathcal{L} 'nin her bir C_i bağlantılı bileşeni *elemanter* ise, \mathcal{L} *elemanterdir*.

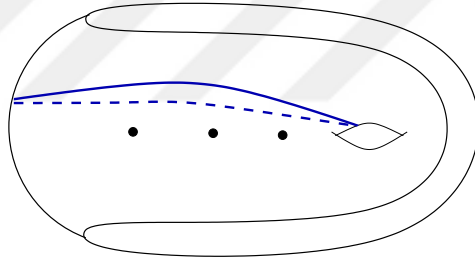
S_n 'de 5 çeşit elemanter eğri bulunmaktadır:

(1) x -yolunu tam olarak iki defa kesen eğri (Şekil 4.23);



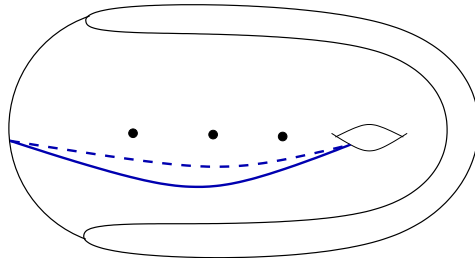
Şekil 4.23: 1. elemanter eğri

(2) x -yolunu hiç kesmeyen, c eğrisini bir defa kesen ve bütün işaretlenmiş noktaların yukarısında kalan eğri (Şekil 4.24);



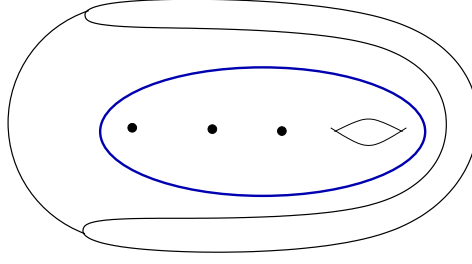
Şekil 4.24: 2. elemanter eğri

(3) x -yolunu hiç kesmeyen, c eğrisini bir defa kesen ve bütün işaretlenmiş noktaların aşağısında kalan eğri (Şekil 4.25);



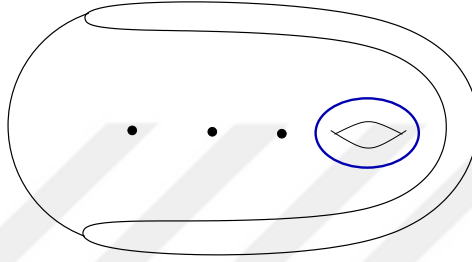
Şekil 4.25: 3. elemanter eğri

(4) x yolunu bir defa kesen ve cinsi kapsayan eğri (Şekil 4.26);



Şekil 4.26: 4. elemanter eğri

(5) c eğrisinin kendisidir (Şekil 4.27).



Şekil 4.27: 5. elemanter eğri

Şimdi de S_n 'deki elemanter eğrileri onların genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları cinsinden tanımlayalım.

(1) $C_{ij} \in \mathcal{L}_n$ ($1 \leq i < j \leq n$), işaretlenmiş noktaların $\{i, i+1, \dots, j\}$ kümesini kapsayan bir diski sınırlandıran S_n 'deki elemanter eğrilerin izotopi sınıfını belirtsin. Böylece, $i \geq 1$ olduğunda $b_i = -1$, $j \leq n$ olduğunda $b_j = 1$ ve diğer bütün durumlar için $b_k = 0$ olmak üzere

$$\Phi(C_{ij}) = (0, 0, \dots, 0; b_1, b_2, \dots, b_n; 0; 0)$$

dır. Örneğin Şekil 4.23, C_{23} elemanter eğrisini gösterir.

(2) C_y , x -yolunu hiç kesmeyen, c eğrisini bir defa kesen ve bütün işaretlenmiş noktaların yukarısında kalan eğri olmak üzere

$$\Phi(C_y) = (-1, -1, \dots, -1; 0, 0, \dots, 0; 0; 1)$$

dir.

(3) C_a , x -yolunu hiç kesmeyen, c eğrisini bir defa kesen ve bütün işaretlenmiş

noktaların aşağısında kalan eğri olmak üzere

$$\Phi(C_a) = (0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0; 1)$$

dir.

(4) $C_i \in \mathcal{L}_n$ ($1 \leq i \leq n$), işaretlenmiş noktaların $\{i, i+1, \dots, n\}$ kümesini ve cinsi kapsayan bir diski sınırlandıran S_n 'deki elemanter eğrilerin izotopi sınıfını belirtsin. Böylece, $1 \leq i \leq n$ olduğunda $b_i = -1$ ve diğer bütün durumlar için $b_k = 0$ olmak üzere

$$\Phi(C_i) = (0, 0, \dots, 0; b_1, b_2, \dots, b_n; 0; 0)$$

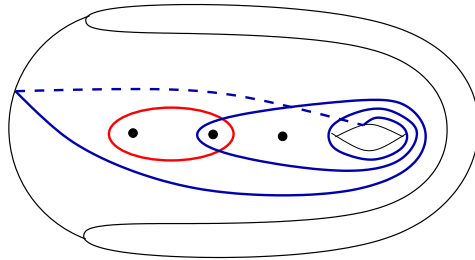
dir.

(5) c , c eğrisinin kendisi olmak üzere

$$\Phi(c) = (0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0; -1)$$

dir.

C_{ij} ve C_i 'nin \mathcal{L} ile geometrik kesişim sayıları, (Yurttaş ve Hall 2018) Yardımcı Teorem 9'da verilen formül üzerinde gerekli düzenlemeler yapılarak S_n 'de de bulunabilir. Örneğin Şekil 4.28'de resmedilen, \mathcal{L} 'nin C_{12} ile geometrik kesişim sayısı $i(\mathcal{L}, C_{12}) = 2$ elde edilir.



Şekil 4.28: $i(\mathcal{L}, C_{12}) = 2$

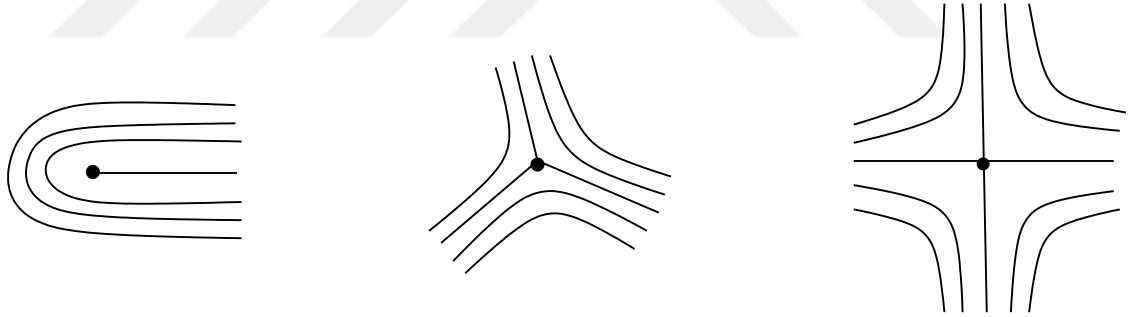
İntegral laminasyonlar için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları Kesim 4.3'de doğal bir şekilde ölçülen yapraklanmalara genişletilebilir.

4.3. Ölçülen Yapraklanmaların Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi

Bu kesimde Kesim 4.1’de elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi ölçülen yapraklanmalara genişletilecektir.

Tanım 4.3.1. S_n ’de bir \mathcal{F} tekil yapraklanması, S_n ’nin yaprak adı verilen birbirinden ayrık yol bağlantılı alt kümelerine bir parçalanışıdır ve aşağıdaki koşulları sağlar:

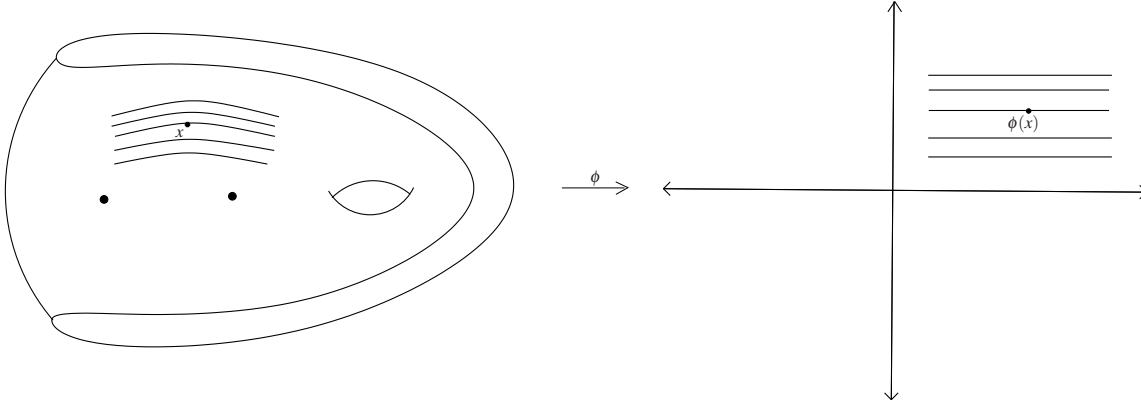
- i. Başlangıcı tekil nokta olan yaprak parçalarına *çatal* denir. Tekil noktalar, $p \geq 1$ çatal sayılarına göre sınıflandırılır. S_n° ’deki bir p -çatalı tekil nokta civarındaki harita lokal olarak Şekil 4.29’deki gibidir. 1-çatalı tekil noktalar sadece S_n ’nin işaretlenmiş noktalarında olabilir.
- ii. Sonlu bir J tekil nokta kümesi dışındaki her $x \in S_n \setminus \partial S_n$ noktası Şekil 4.30’da gösterildiği gibi, $U \cap$ yaprak bileşenlerini yatay doğrulara taşıyan bir $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ haritası tarafından kapsanır.



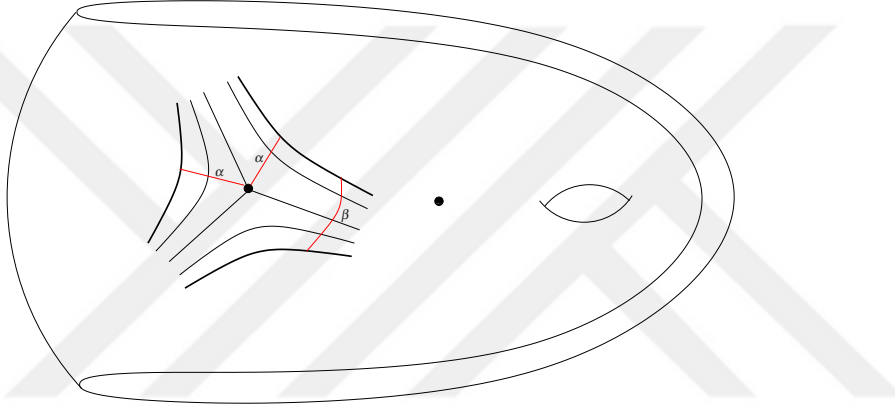
Şekil 4.29: S_n° ’deki yapraklanmaların 1-çatalı, 3-çatalı ve 4-çatalı tekil noktaları

Tanım 4.3.2. S_n ’de bir α yayı, Şekil 4.31’de gösterildiği gibi \mathcal{F} tekil yapraklanmasının tüm yapraklarını çapraz bir şekilde kessin ve bir $s \in J$ tekil noktasına girdiği bölge çıktığı bölgeden farklı olsun. Bu durumda α yayı \mathcal{F} ’ye *çaprazdır* denir.

Tanım 4.3.3. Bir \mathcal{F} yapraklanması verildiğinde, \mathcal{F} üzerindeki bir *çapraz ölçüm* μ , her çapraz α yayına bir $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ pozitif sayısı atayan ve Şekil 4.32’de resmedilen aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:



Şekil 4.30: $x \in S_n \setminus \partial S_n$ yakınındaki yapraklar

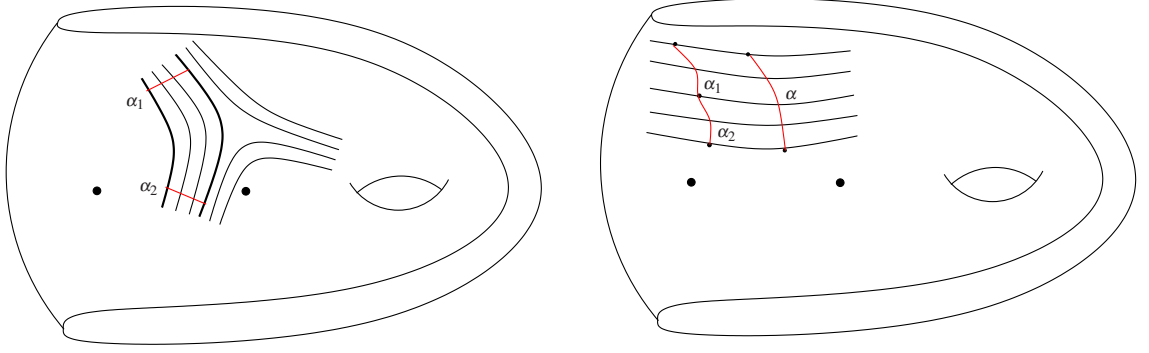


Şekil 4.31: Çapraz yaylar

- i. α_1 ve α_2 çapraz yayları, uç noktaları aynı yapraklar üzerinde olan diğer çapraz yaylar aracılığı ile birbirine izotop ise $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ 'dir.
- ii. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \partial \alpha_1 \cap \partial \alpha_2$ olacak şekilde $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ ise $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$ 'dir.

Tanım 4.3.4. S_n 'de bir (\mathcal{F}, μ) ölçülen yapraklanması, bir μ çapraz ölçümü ile donatılmış tekil yapraklanmadır.

Tanım 4.3.5. (\mathcal{F}, μ) , S_n 'de bir ölçülen yapraklanma ve α , S_n 'de bir yay olsun. Yapraklanma üzerinde tanımlı μ ölçümünü kullanarak $\mu(\alpha)$ ölçüsü, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ α 'nın yapraklanmaya çapraz birbirinden ayrık alt yayları olmak üzere



Şekil 4.32: $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ ve $\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2) = \mu(\alpha)$

$$\mu(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^k \mu(\alpha_i)$$

olarak tanımlanır. $[\alpha]$, uç noktalara göre alınan izotopiler altında α 'nın izotopi sınıfını belirtsin. β yayları α 'a izotop ve (\mathcal{F}, μ) 'e çapraz olmak üzere

$$\mu[\alpha] = \inf_{\beta \in [\alpha]} \mu(\beta)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, C elemanter kapalı esas eğrisi ve onun izotopi sınıfı $[C]$ için $\mu(C)$ ve $i(\mathcal{F}, [C])$ tanımlanabilir.

Tanım 4.3.6. $\mathcal{V}_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olsun. $\Phi : \mathcal{M}\mathcal{F}(S_n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu, her $1 \leq i \leq n$ için

$$a_i = \frac{\mu([\alpha_{2i}]) - \mu([\alpha_{2i-1}]) - \mu([c^+])}{2}, \quad b_i = \frac{\mu([\beta_i]) - \mu([\beta_{i+1}])}{2}$$

ve

$$|T| = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \mu([c^+]) = 0; \\ \mu([\gamma]) - \frac{\mu([\beta_{n+1}]) - \mu([c^+])}{2} - \frac{\mu([\beta_1]) - \mu([c^+])}{2} & \text{eğer } \mu([c^+]) \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\Phi(\mathcal{F}) = (a; b; T; c) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; T; c)$$

olarak tanımlanır. Kesen bileşenler pozitif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif

yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir.

Teorem 4.3.7. $(a; b; T; c) \in \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \mathcal{V}_n$ olsun. O zaman $(a; b; T; c)$ vektörü,

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right]$$

olmak üzere,

$$\mu([\beta_i]) = 2 \sum_{j=i}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa), \quad \mu([\beta_{n+1}]) = \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa)$$

$$\mu([\alpha_i]) = \begin{cases} \frac{2(-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + (-1)^i c^+ + \mu([\beta_{\lceil i/2 \rceil}])}{2} & \text{eğer } b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0; \\ \frac{2(-1)^i a_{\lfloor i/2 \rfloor} + (-1)^i c^+ + \mu([\beta_{\lfloor i/2 \rfloor}])}{2} & \text{eğer } b_{\lfloor i/2 \rfloor} \leq 0 \end{cases}$$

ve

$$\mu([\gamma]) = \begin{cases} T + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c > 0; \\ |c| + \sum_{j=1}^n b_j + \max(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa) - c^+ & \text{eğer } c \leq 0 \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $(\mathcal{F}, \mu) \in \mathcal{MF}(S_n)$ ölçülen yapraklanmasına karşılık gelir.

Burada $\lceil x \rceil$, x 'den küçük olmayan en küçük tam sayıdır. Kesken bileşenler pozitif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burgu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir.

İspat. İspat, Teorem 4.1.25'in ispatı ile aynıdır. □

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tez çalışmasında, daha önce sadece D_n üzerindeki integral laminasyonları ve ölçülen yapraklanmaları tek türlü olarak tanımlayan Dynnikov koordinat sistemi S_n yüzeyine genelleştirilmiştir. S_n yüzeyindeki integral laminasyonları ve ölçülen yapraklanmaları tek türlü koordinatlayan *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi* ile birçok yeni problem çözülmesi planlanmaktadır. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

- (i) Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sisteminin $g > 1$ cinsli yüzeylere genelleştirilmesi,
- (ii) Tezde verilen formüllerden, integral laminasyonları çizen ve geometrik kesim sayılarını hesaplayan C++ programı yazılması (Dynn. exe'nin genelleştirilmiş hali),
- (iii) Dynnikov koordinat sistemi kullanılarak çözülmüş problemleri (Dehornoy ve ark. 2002, Moussafir 2006, Dehornoy 2008, Yurttaş 2011, Yurttaş ve Hall 2017, Yurttaş ve Hall 2018) yüksek cinsli yüzeylerde çözmek.



6. KAYNAKLAR

- Bestvina, M., Handel, M. 1995. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1): 109-140.
- Dehornoy, P. 2008. Efficient solutions to the braid isotopy problem. *Discrete Appl. Math.*, 156(16): 3091-3112.
- Dehornoy, P., Dynnikov, I., Rolfsen, D., Wiest, B. 2002 . Why are braids orderable?. *Panoramas et Syntheses [Panoramas and Syntheses]*. Societe Mathematique de France, Paris, 14.
- Dynnikov, I. 2002. On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering. *Uspekhi Mat. Nauk*, 57(3(345)): 151-152.
- Dynnikov, I., Wiest, B. 2007. On the complexity of braids. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 9(4):801-840.
- Epstein, D. B. A. 1966. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math*, 115: 83-107.
- Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V. 1979. *Travaux de Thurston sur lessurfaces*, volume 66 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, Séminaire Orsay.
- Hamidi-Tehrani, Hessam., Chen, Zong-He. 1996. Surface diffeomorphisms via train-tracks. *Topology Appl.*, 73(2): 141-167.
- Menzel, C., Parker, J. R. 2003. Pseudo-Anosov diffeomorphisms of the twice punctured torus. In *Recent Advances in Group Theory and Low-Dimensional Topology*, 27: 141-154.
- Moussafir, J. 2006. On computing the entropy of braids, *Funct.Anal. Other Math.*, 1: 37–46.
- Parker, J. R., Series, C. 2004. The mapping class group of the twice punctured torus. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 311: 405-486.
- Penner, R. C., Harer, J. L. 1992. *Combinatorics of train tracks*, *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 125.
- Thurston, W. P. 1988. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 19(2): 417-431, 1988.
- Yurttaş, S. Ö. 2011. Dynnikov Coordinates and pseudo-Anosov braids. *Doktora tezi*, Liverpool Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Liverpool, 168.
- Yurttaş, S.Ö. 2013. Geometric intersection of curves on punctured disks. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 65(4): 1554-1564.
- Yurttaş, S.Ö., Hall, T. 2017. Counting components of an integral lamination. *Manuscripta Math.*, 153(1-2): 263-278.

Yurttas, S.Ö., Hall, T. 2018. Intersections of multicurves from Dynnikov coordinates. Bull. Aust. Math. Soc. 98(1): 149-158



ÖZGEÇMİŞ

17 Mayıs 1985 tarihinde Kırıkkale’de doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Kırıkkale’de tamamladım. Yabancı dil ağırlıklı (süper) lisenin İngilizce hazırlık ve birinci sınıflarını Kırıkkale’de, ikinci ve üçüncü sınıflarını Ankara’da tamamladım ve liseyi birincilikle bitirdim. 2004 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandım ve 2008 yılında matematik bölümünü de birincilikle bitirdim. Aynı yıl Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü’nde Matematik Öğretmenliği anabilim dalında tezsiz yüksek lisans ve Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik anabilim dalında tezli yüksek lisans hak kazandım. 2009 yılında tezsiz yüksek lisans programından mezun oldum ve aynı yıl Orta Doğu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü Finansal Matematik anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım ve 2013 yılında mezun oldum. 2014 yılında Ankara’da özel bir teknik lisede matematik öğretmeni olarak göreve başladım ve bir dönem ders verdikten sonra Öğretim Üyesi Yetiştirme (ÖYP) programıyla Dicle Üniversitesi’nde 2015 Şubat itibarıyla araştırma görevlisi olarak göreve ve aynı zamanda da doktora programına başladım. Şu anda Dicle Üniversitesi’nde araştırma görevlisi olarak göreve devam etmekteyim.