T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER UZAYIN ELEMANLARININ TOPLAMI ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP

İshak AYDIN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Ocak 2020

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yardımcı olan, çalışmalar esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmayı titizlikle inceleyerek eksik ve hatalı kısımlar konusunda gerekli uyarıları yapan, değerli hocam, danışmanım ***Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP***'e;

Doktora öğrenimim boyunca desteklerinden ötürü ***TÜBİTAK***'a;
teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER UZAYIN ELEMANLARININ TOPLAMI ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP

DOKTORA TEZİ

İshak AYDIN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

Kuantum uzaylar(düzlemler), uzay(düzlem) kavramının bir genelleştirmesidir. Bir kuantum uzay, bir uzayın deformasyonudur öyle ki deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için kuantum uzay, o uzayla özdeşleşir. İlk olarak Drinfeld 1986'da, kuantum grup terminolojisini kullanmış daha sonra bir çok yazar bu konuya değişik yorumlar getirmiştir. Kuantum uzay terminolojisi ise ilk olarak Manin tarafından 1989'da kullanılmıştır.

Değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematiğin ve matematiksel fiziğin birçok farklı alanında önemli bir rol oynamaya başlamıştır. Değişmeli olmayan geometriye yön veren temel yapı bir birleşmeli cebir üzerindeki bir diferansiyel hesaptır.

Tez, beş bölümden oluşmaktadır ve orijinal kısımlar, dördüncü bölümden itibaren başlamaktadır.

İlk bölümde, tezin orijinal kısımlarında kullanılacak olan cebir, cebirlerin tensör çarpımı, serbet cebirler, dereceli cebirler, Hopf Cebiri, Z_3-dereceli cebir, komodül, bimodül, kuantum(süper) düzlem, kuantum süper uzay gibi temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde konuya dair bir literatür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümde, teze temel teşkil edecek Z_3-dereceli kuantum süper uzay, Z_3-dereceli diferansiyel hesap, sol(sağ) kovaryant bimodül gibi kavramlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Z_3-Dereceli kuantum süper uzayda bir toplama işlemi tanımlanmıştır. Bu uzayın elemanları 3-boyutlu kuantum süper vektör olarak adlandırılmıştır. Uzaydan alınan iki kuantum süper vektörün toplamı ele alınmış ve elde edilen yeni toplam

vektörünün bu uzaya ait olması için gereken şartlar araştırılmıştır. Bu tanımla birlikte elde edilen yapının bir süper Hopf cebiri yapısı taşıdığı gösterilmiştir. Daha sonra, koordinat fonksiyonları olarak kabul edilen toplam vektörünün bileşenlerinin birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri, Cartan-Maurer 1-formları ve kısmi türevleri tanımlanarak bunlar arasındaki değişim bağıntıları elde edilmiştir. Gerekli bağıntıların elde edilmesiyle bu yapının diferansiyel geometrisi kurulmuştur.

Tezin son bölümünde, çalışmanın sonuçları verilmiş ve ileride sağlayacağı katkılardan söz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Z_3-dereceli kuantum süper uzay, kuantum süper vektör, q-deformasyon, süper Hopf cebiri, Z_3-dereceli diferansiyel hesap

ABSTRACT

A DIFFERENTIAL CALCULUS ON THE ADDITION OF Z_3-GRADED QUANTUM SUPER SPACE ELEMENTS

PhD THESIS

İshak AYDIN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2020

Quantum(planes) spaces are not really (planes) spaces, they are a generalization of the concept of classical (planes) spaces. More precisely, a quantum space is a deformation of a space that, for particular values of the deformation parameter, coincides with the space. Quantum group terminology was first used by Drinfeld in 1986 and then many authors made different interpretations on the subject. Quantum space terminology was first used by Manin in 1989.

Noncommutative geometry, in recent years, started to play an important role in many different areas of mathematics and mathematical physics. The basic structure leading to the noncommutative geometry is a differential calculus on an associative algebra.

The thesis consists of five chapters and the original chapters begin with the fourth chapter.

In the first chapter of the basic concepts which are used in the sections such as algebra, tensor product, free algebra, graded algebra, Hopf Algebra, Z_3-graded algebra, comodule, bimodule, quantum(super) plane and Z_2- graded quantum super space are given.

In the second chapter, the literature concerning the subject is given.

In the third chapter definition of Z_3-graded quantum super space, Z_3-graded differential calculus, left(right) covariant bimodule and related theorems which are the basis of the thesis are given.

In the fourth chapter an operation was defined in the Z_3-graded quantum super space. The elements of this space were called 3-dimension quantum super vector. The sum of two quantum super vectors was considered and the necessary conditions were investigated for the addition to be a quantum super vector. It's shown that the obtained structure has a super Hopf algebra structure. Then, the first and second order differentials of the components of the addition

vector, which are accepted as coordinate functions, Cartan-Maurer 1-forms and partial derivatives were identified and the commutation relations between them were found. After then, we obtained the necessary relations and we construct a differential calculus of this structure.

Finally, the study is discussed and concluded in the last part of the thesis.

Key Words: Z_3-graded quantum super plane, quantum super vector, q-deformation, super Hopf algebra, Z_3-graded differential calculus

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
d	:Dış diferansiyel operatörü
$\tau(f)$	:f fonksiyonunun derecesi
$K\{x,\theta,\vartheta\}$	:Üreteçleri x, θ ve ϑ olan serbest cebir
I_q	:(…) ile oluşturulan $K\{x,\theta,\vartheta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali
$K_q[x,\theta,\vartheta]$	:$K\{x,\theta,\vartheta\}/I_q$ bölüm cebiri
$R_q^{(2,1)}$	:Üç boyutlu kuantum süper uzay üzerindeki polinomların cebiri
S_A	:A cebiri üzerindeki eş-ters operatörü
ε_A	:A cebiri üzerindeki eş-birim operatörü
$\triangle_A$	:A cebiri üzerindeki eş-çarpım operatörü
$\otimes$	:Tensör çarpım
∂	:Kısmi türev operatörü
$\wedge$	:Dış çarpım

1. GİRİŞ

V.G. Drinfeld, 1986'da *kuantum grubu* denilen yeni bir matematiksel konu inşa etmiştir. Bu matematiksel yapı daha sonra kuantum süper gruba genelleştirilmiştir. Faddeev ve ark. 1987'de bu konuyu Lie grup ve Lie cebiri teorisine adapte etmişlerdir.

Kuantum grupları, bilinen anlamda bir grup değildir yani cebirsel açıdan grup özelliklerinin tamamına sahip değildir. Kuantum grupları, grup kavramının bir deformasyonudur. Bir kuantum grubu, deformasyon parametresinin özel değeri ya da değerleri için, deforme edilen klasik grupla özdeşleşir.

Drinfeld, bir kuantum grubunu oluştururken, *SL(2)* özel lineer grubuna ait bir matrisin elemanlarını birer koordinat fonksiyonu gibi düşünmüş ve bu elemanlar arasında sağlanan bağıntıları sıfırdan farklı bir q kompleks parametresine bağlı olarak ortaya koymuştur. Bunun için *SL(2)* özel lineer grubunun Lie cebirinden yararlanmıştır.

Bundan ayrı olarak Manin, bir kuantum grubunu elde etmek için deforme edilmiş uzaylardan yararlanmış ve bu uzaylara *kuantum uzaylar* adını vermiştir. Kuantum gruplar gibi kuantum uzaylar da klasik uzayların deforme edilmiş halidir ve klasik uzayların bir genelleştirmesidir. Kuantum uzaylar da, deformasyon parametresinin özel değeri ya da değerleri için deforme edildikleri klasik uzaylarla özdeşleşir.

Kuantum yapılar değişmeli olmadığı için bu yapıların diferansiyel geometrisinin de değişmeli olmayacağı beklenir. 1990lı yıllarda, bu matematiksel yapıların değişmeli olmayan geometrisini inşa etmek için birçok çalışma yapılmıştır(Woronowicz, 1989; Wess ve Zumino, 1990; Soni, 1991; Chung, 1994; Kerner, 1996; Le Roy, 1996; Celik 1998; Kerner ve Abramoz, 1999 vd.).

1.1 Genel Tanım ve Özellikler

İleriki bölümlerde kullanılacak temel kavramlar bütünlük açısından bu kısımda tanıtılacak ve kuantum uzayların anlaşılabilmesi için gerekli olan temel cebirsel yapılar bu kısımda açıklanacaktır. Bu kısımda kaynak olarak Abe 1977 ve Kassell 1995 kitaplarından yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.1

Üzerinde toplama işlemi tanımlanmış bir G kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir **değişmeli grup** denir:

1- Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 + g_2 \in G$,

2- Her $g_1, g_2, g_3 \in G$ için $g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$,

3- Her $g \in G$ için $g + 0_G = g = 0_G + g$ olacak şekilde $0_G \in G$ elemanı mevcut,

4- Her $g \in G$ için $g + (-g) = 0_G = (-g) + g$ olacak şekilde $-g \in G$ mevcut,

5- Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$.

Örnek 1.1.1

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, toplama işlemiyle birlikte değişmeli bir gruptur.

Tanım 1.1.2

Üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir **birimli halka** denir:

1- $(R,+)$ bir değişmeli grup,

2- Her $a_1, a_2, a_3 \in R$ için $a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$ ve $(a_1 + a_2).a_3 = a_1.a_3 + a_2.a_3$,

3- Her $a_1, a_2, a_3 \in R$ için $a_1.(a_2.a_3) = (a_1.a_2).a_3$,

4- Her $a_1 \in R$ için $a_1.1_R = 1_R.a_1$ olacak şekilde $1_R \in R$ elamanı mevcuttur.

Bir halkada eğer her $a_1, a_2 \in R$ için $a_1.a_2 = a_2.a_1$ oluyorsa R 'ye **değişmeli halka** denir.

Örnek 1.1.2

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 1.1.3

Üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanmış birimli bir K halkasına, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir **cisim** denir:

1- $0_K \neq 1_K$,

2- $(K^*,\cdot)$ bir grup.

Burada $K^* = K - \{0_K\}$ ve 0_K , $(K,+)$ grubunun birim elemanı ve 1_K , $(K,+,\cdot)$ halkasının birim elemanıdır.

Örnek 1.1.3

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir cisimdir.

Tanım 1.1.4

$(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer;

$\varphi : R\text{x}M \to M,\ (a,x) \mapsto ax,\quad (\varphi : M\text{x}R \to M,\ (x,a) \mapsto xa)$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa, M 'ye bir **sol (sağ)** R **-modül,** kısaca sol (sağ) modül, φ dönüşümüne de sol (sağ) R - modül M 'nin **yapı dönüşümü** adı verilir:

$\forall a_1, a_2 \in R$ ve $\forall x_1, x_2 \in M$ için,

1- $a_1(x_1 + x_2) = a_1x_1 + a_1x_2,\qquad ((x_1 + x_2)a_1 = x_1a_1 + x_2a_1),$

2- $(a_1 + a_2)x_1 = a_1x_1 + a_2x_1,\qquad (x_1(a_1 + a_2) = x_1a_1 + x_1a_2),$

3- $(a_1.a_2)x_1 = a_1(a_2x_1),\qquad (x_1(a_1.a_2) = (x_1a_1)a_2),$

4- $1_R x_1 = x_1.\qquad (x_1 1_R = x_1).$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M 'ye kısaca **modül** denir. Ek olarak, R halkası bir cisim ise, M modülüne **vektör uzayı** veya bir **lineer uzay** denir.

Örnek 1.1.4

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

Örnek 1.1.5

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.1.5

V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $v \in V$, $v_1, v_2, ..., v_r \in V$ elemanlarının lineer birleşimi şeklinde yazılabiliyor ve $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$kümesi lineer bağımsızsa, $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ kümesine V uzayının bir **tabanı** denir. Tabandaki eleman sayısına o uzayın **boyutu** denir.

Tanım 1.1.6

V, K cismi üzerinde r-boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere, $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ bu uzayın bir tabanı olsun. Her $v \in V$ için $v = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i,\ a_i \in K$ yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür.

$x_i : V \to K,\ x_i(v) = a_i$ şeklinde tanımlı fonksiyonlara V 'nin **koordinat fonksiyonları** denir.

Örnek 1.1.6

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayının $\mathbb{R}$ cismi üzerindeki standart tabanı {(1,0), (0,1)} ve koordinat fonksiyonları x, y olmak üzere;

(3,5)=3(1,0)+5(0,1) şeklinde yazılır.

x((3,5))=3 ve y((3,5))=5’tir.

Tanım 1.1.7

V *ve* W, K cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$T : V \mapsto W$

dönüşümü, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a_1, a_2 \in K$ için

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$$

şartını sağlarsa, T 'ye bir **lineer dönüşüm** denir.

$T : V \mapsto K$ 'ya tüm lineer dönüşümlerin kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzay, V vektör uzayının **dual vektör uzayı** olarak adlandırılır ve V^* ile gösterilir.

Örnek 1.1.7

V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$T : V \mapsto V \quad \forall v \in V$ için $T(v) = v$

şeklinde tanımlı özdeşlik dönüşümü, lineerdir.

Tanım 1.1.8

U, V ve W , K cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi : U \times V \to W$ dönüşümü aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir **bi-lineer dönüşüm** denir:

$\forall\ u_1, u_2 \in U; \forall\ v_1, v_2 \in V$ ve $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in K$ için,

1- $\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v_1) = \lambda_1\varphi(u_1, v_1) + \lambda_2\varphi(u_2, v_1),$

2- $\varphi(u_1, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1\varphi(u_1, v_1) + \lambda_2\varphi(u_1, v_2).$

Örnek 1.1.8

$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$, $\varphi(u, v) = uv$ şeklinde tanımlı φ dönüşümü, bi-lineerdir.

Tanım 1.1.9

$V_1, V_2, ..., V_r$, K cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun.

$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to K$ dönüşümü, her $v_i, w_i \in V_i$ ve $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \in K$ için

$$f(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, \mathrm{k}_1\, v_i + \mathrm{k}_2\, w_i, v_{i+1}, ..., v_r) = \mathrm{k}_1\, f(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_r)$$

$$+ \mathrm{k}_2\, f(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, ..., v_r)$$

eşitliğini sağlıyorsa, f 'ye **r-lineer dönüşüm** denir. r=2 ise f 'ye bi-lineer dönüşüm denir.

Bu şekilde tanımlı bütün r-lineer dönüşümlerin kümesi, $L(V_1,V_2,...,V_r;K)$ ile gösterilir. Her $f\,,g\in L(V_1,V_2,...,V_r;K)$, her $v_1,v_2,...,v_r\in V_1\times V_2\times...\times V_r$ ve her $\mathrm{k}\in K$ için

$$(f+g)(v_1,v_2,...,v_r)=f\,(v_1,v_2,...,v_r)+g\,(v_1,v_2,...,v_r)$$

$$(\mathrm{k}f)\,(v_1,v_2,...,v_r)=\mathrm{k}\,.\,f\,(v_1,v_2,...,v_r)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $L(V_1,V_2,...,V_r;K)$ kümesi, K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.1.10

$L(V_1,V_2,...,V_r;K)$ vektör uzayına, **tensör uzayı** ve bu uzayın her bir elemanına r. dereceden bir **tensör** denir.

$L(V_1,V_2,...,V_r;K)=V_1^*\otimes V_2^*\otimes...\otimes V_r^*$ ile gösterilir ve bu uzaya $V_1^*,V_2^*,...,V_r^*$ dual vektör uzaylarının **tensörel çarpımı** denir.

$L(V_1,V_2,...,V_r;K)$ uzayında her i için $V_i=V$ alınırsa $L(V,V,...,V;K)$ tensör uzayına **kovaryant tensör uzayı**, bu uzayın her bir elemanına da r. dereceden **kovaryant tensör** denir.

$L(V,V,...,V;K)$ kovaryant tensör uzayında her V vektör uzayı yerine V 'nin dual uzayı V^* alınırsa elde edilen $L(V^*,V^*,...,V^*;K)$ tensör uzayına **kontravaryant tensör uzayı**, bu uzayın her bir elemanına da r. dereceden **kontravaryant tensör** denir.

Örnek 1.1.9

Lineer dönüşümler 1. dereceden, bilineer dönüşümler 2. dereceden tensördür.

İç çarpım dönüşümü, 2. dereceden kovaryant tensördür.

Bir vektör uzayının elemanları 1. dereceden kontravaryant tensördür.

Tanım 1.1.11

K cismi üzerinde; U, m boyutlu ve V, n boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U 'nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V 'nin taban elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde

$1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcuttur. Bir $U \otimes V$ vektör uzayı ve bir $\varphi : U \times V \to U \otimes V$ bi-lineer dönüşümü vardır öyle ki tüm W vektör uzayları için;

1- $\varphi(U \times V), U \otimes V$ uzayını gerer,

2- $\Psi : U \times V \mapsto W$ herhangi bir bi-lineer dönüşüm ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\Phi : U \otimes V \mapsto W$ lineer dönüşümü mevcuttur.

Bu durumda $U \otimes V$ uzayına, U ve V vektör uzaylarının **tensör çarpımı** denir.

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} a_i \vec{u_i}$ ve $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{v_j}$ olmak üzere $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1, j=1}^{m,n} a_i b_j \vec{u_i} \otimes \vec{v_j}$ şeklinde tanımlanır ve $\left\{ \vec{u_i} \otimes \vec{v_j} \right\}_{i=1, j=1}^{m.n}$ $U \otimes V$ uzayının bir tabanıdır.

$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \otimes \vec{v}$ ile gösterilir ve bi-lineerlik özelliğinden dolayı aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1- $\vec{u} \otimes (\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{v'}$; $\forall \vec{u} \in U, \forall \vec{v}, \vec{v'} \in V$,

2- $(\vec{u} + \vec{u'}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{u'} \otimes \vec{v}$; $\forall \vec{u}, \vec{u'} \in U$, $\forall \vec{v} \in V$,

3- $\mathrm{k}(\vec{u} \otimes \vec{v}) = (\mathrm{k}\vec{u}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes (\mathrm{k}\vec{v})$; $\forall \vec{u} \in U, \forall \vec{v} \in V, \forall \mathrm{k} \in K$.

Tanım 1.1.12

$T_1 : U_1 \mapsto V_1$, $T_2 : U_2 \mapsto V_2$, birer lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2 , \ \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm mevcuttur. Buradaki Φ ’ye T_1 ve T_2 dönüşümlerinin **tensör çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.13

A, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir K – cebiri, genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Bir cebir, iki tane lineer dönüşüm ile birlikte aşağıdaki (Birleşme ve Birim) aksiyomları sağlayan bir vektör uzayıdır:

$\mu : A \otimes A \to A,$
$\eta : K \to A,$

$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id})$ (Birleşme),
$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id})$ (Birim).

Birleşme aksiyomu, μ dönüşümünün birleşme özelliğine sahip olduğunu ifade ederken, Birim aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir $K-$**cebiri** (kısaca **cebir**) denir.

Örnek 1.1.10

M_{nxn} matris kümesi, matris toplamı ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Matris çarpımı işlemiyle birlikte M_{nxn} vektör uzayı, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir. μ ve η dönüşümleri her $\mathrm{A,B} \in M_{nxn}$,her $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$ ve $\mathrm{I}_{n \mathrm{x} n} \in M_{nxn}$ birim matrisi için,

$\mu : M_{nxn} \otimes M_{nxn} \to M_{nxn},\ \mu(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = \mathrm{A}.\mathrm{B},$
$\eta : \mathbb{R} \to M_{nxn},\ \eta(\mathrm{k}) = \mathrm{k}.\mathrm{I}_{n \mathrm{x} n},$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.14

A bir $K-$cebir ve $L \subseteq A$ olsun. $\forall x, y \in L, \forall a \in A, \forall \mathrm{k} \in K$ için;

1- $x + y \in L,$

2- $\mathrm{k}x \in L,$

3- $a.x \in L,$

oluyorsa, L 'ye A 'nın bir **sol ideali** denir. 1- ve 2-'ye ek olarak $x.a \in L$ oluyorsa L 'ye A 'nın bir **sağ ideali** denir. L, A 'nın hem sağ hem sol ideali ise L 'ye A 'nın bir **iki taraflı ideali** ya da kısaca **ideali** denir.

Örnek 1.1.11

$A = M_{nxn}$ matris cebiri ve $L = \{0_{nxn}\}$ olsun. Bu durumda L, A'nın iki taraflı idealidir.

Tanım 1.1.15

A bir $K-$cebir ve L, A'nın iki taraflı ideali olsun. $A/L = \{a + L : a \in A\}$ kümesi aşağıdaki tanımlanan işlemlerle birlikte bir cebir yapısına sahiptir ve **bölüm cebiri** olarak adlandırılır:

1-$(a+L)+(b+L) = (a+b)+L, \forall a,b \in A$,

2-$(a+L).(b+L) = (a.b)+L$, $\forall a,b \in A$,

3- $\mathrm{k}(a+L) = \mathrm{k}a + L$, $\forall a \in A, \forall \mathrm{k} \in K$.

Bölüm cebirinin sıfırı $0+L$ ve birimi $1+L$ dir.

Tanım 1.1.16

X boştan farklı bir küme olsun. X'in her bir elemanına bir **harf** denir. X'in harflerinin keyfi olarak, sonlu bir şekilde sıralanması ile oluşan $x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_p}$ dizisine X üzerinde bir **kelime** denir. $K\{X\}$, tabanı X in tüm $x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_p}$ kelimeler kümesinden oluşan vektör uzayı olsun ve (boş kelime) $\varnothing \in K\{X\}$ olsun. Bir kelime bir monomial olarak adlandırılır. $K\{X\}$ üzerinde iki kelimenin çarpımı (birbirine bağlanması) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_p})(x_{i_{p+1}}.x_{i_{p+2}}...x_{i_n}) = x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_p}x_{i_{p+1}}...x_{i_n}.$$

Bu tanımla birlikte $K\{X\}$, bir cebir yapısına sahip olur ve $K\{X\}$'e, X kümesi üzerindeki **serbest cebir** denir. Serbest cebirin birimi **1**$=\varnothing$ dir.

Eğer $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise $K\{X\} = K\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ yazılır.Bu durumda $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanlarına **cebirin üreteçleri** denir.

Örnek 1.1.12

n değişkenli $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ polinomlar cebiri, değişmeli bir serbest cebirdir ve üreteçler kümesi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 'dir.

Tanım 1.1.17

Bir A cebirinin aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde $(A_i)_{i\in N}$ altuzayları varsa A 'ya **dereceli cebir** denir:

1- $A = \underset{i\in N}{\oplus} A_i$,

2- $A_i.A_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \in N$.

$a_i \in A_i$ elemanlarına derecesi *i* olan *homojen elemanlar* denir.

Örnek 1.1.13

X bir küme olmak üzere $K\{X\}$ serbest cebiri, bir dereceli cebirdir. Burada, bir elemanın derecesi, bir kelimenin uzunluğu olarak tanımlanır.

$K\{X\} = A = \underset{i\in N}{\oplus} A_i$ olmak üzere;

A_i, uzunluğu *i* olan tüm kelimelerin ürettiği vektör uzayıdır.

Tanım 1.1.18

A bir cebir olmak üzere eğer bir $T : A \to A$ lineer dönüşümü, her $f_1, f_2 \in A$ için

$T(f_1.f_2) = T(f_1).T(f_2)$

eşitliğini sağlarsa, T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya c**ebir homomorfizmi** denir. Benzer şekilde $T(f_1.f_2) = T(f_2).T(f_1)$ eşitliği sağlanırsa, T 'ye bir **anti-lineer homomorfizm** veya c**ebir anti-homomorfizmi** denir.

Tanım 1.1.19

A , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir K – ko-cebiri, genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Bir ko-cebir, iki tane lineer dönüşüm ile birlikte aşağıdaki (Eş-Birleşme ve Eş-Birim) aksiyomları sağlayan bir K-vektör uzaydır:

$$\Delta : A \to A \otimes A,$$
$$\varepsilon : A \to K,$$

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta \quad \text{(Eş-Birleşme)},$$
$$\mu \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad \text{(Eş-Birim)}.$$

Δ'ya cebirin **eş-çarpması** ve ε dönüşümüne de cebirin **eş-birimi** denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η dönüşümleri için verilen (Birleşme ve Birim) özelliklere dual olan özelliklere sahiptir. K üzerindeki bir A vektör uzayıyla birlikte yukarıda tanımlanan Δ, ε lineer dönüşümleriyle ortaya çıkan (A, Δ, ε) üçlüsüne bir ***K*-kocebir** (kısaca **kocebir**) denir.

Örnek 1.1.14

V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\wp$, V'nin bir tabanı olsun. Aşağıdaki tanımlarla birlikte (V, Δ, ε) üçlüsü kocebir yapısına sahiptir:

$$\Delta : V \to V \otimes V,$$
$$\Delta(v) = v \otimes v, \forall v \in \wp,$$

$$\varepsilon : V \to K,$$
$$\varepsilon(v) = 1, \forall v \in \wp.$$

Tanım 1.1.20

A ve B K-cebir olsun. Bir $\nabla : A \to B$ lineer dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa ∇'ya bir ***K*-cebir homomorfizmi**(kısaca cebir homomorfizmi) denir:

$$\nabla \circ \mu_A = \mu_B \circ (\nabla \otimes \nabla),$$
$$\nabla \circ \eta_A = \eta_B.$$

Tanım 1.1.21

C ve D K-kocebir olsun. Bir $\Theta : C \to D$ lineer dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa Θ'ya bir ***K*-kocebir homomorfizmi**(kısaca kocebir homomorfizmi) denir:

$$\Delta_D \circ \Theta = (\Theta \otimes \Theta) \circ \Delta_C,$$
$$\varepsilon_D \circ \Theta = \varepsilon_C.$$

Tanım 1.1.22

(A,μ,η) üçlüsü bir K -cebir ve (A,Δ,ε) üçlüsü bir K -kocebir olsun. Aşağıdaki iki koşul birbirine denktir ve bu durumda $(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ beşlisine bir ***K*-bicebir** (kısaca **bicebir**) denir:

1- Δ,ε bir cebir homomorfizmidir.

2- μ,η bir kocebir homomorfizmidir.

Örnek 1.1.15

V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$T(V) = \bigoplus_{n\geq 0}(V^{\otimes n}) = K \oplus V \oplus V \otimes V \oplus V \otimes V \otimes V \oplus \ldots \oplus \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ tane}}$$

tensör cebiri olsun. Aşağıdaki tanımlarla birlikte $T(V)$ bir bicebirdir:

$$\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V),$$
$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \forall v \in V,$$

$$\varepsilon : T(V) \to K,$$
$$\varepsilon(v) = 0, \forall v \in V.$$

Tanım 1.1.23

$(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ bir *K*-bicebir olsun.

$$S : A \to A$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta$$

özelliğini sağlayan bir S cebir anti-homomorfizm (eş-ters) ile $(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ altılısına bir **Hopf cebiri** denir. Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf cebiri için, $(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ altılısı değil sadece A kullanılacaktır.

Örnek 1.1.16

V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $T(V)=\bigoplus_{n\geq 0}(V^{\otimes n})$ tensör cebiri olsun. Aşağıdaki tanımlarla birlikte $T(V)$ bir Hopf cebiridir:

$$\Delta : T(V) \rightarrow T(V) \otimes T(V),$$
$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \forall v \in V,$$

$$\varepsilon : T(V) \rightarrow K,$$
$$\varepsilon(v) = 0, \forall v \in V,$$

$$S : T(V) \rightarrow T(V),$$
$$S(v) = -v, \forall v \in V.$$

Tanım 1.1.24

C, bir kocebir olsun. Eğer bir M vektör uzayı ve bir lineer

$$\Lambda_M : M \rightarrow M \otimes C$$

dönüşümü için aşağıdaki diyagramlar değişmeli ise (M, Λ_M) ikilisine bir sağ $C-$ komodül denir. Bir sol $C-$ komodül de benzer şekilde tanımlanır.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes K & M \otimes C \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \\
 & M \arrow[u, "\Lambda_M"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes C \otimes C & M \otimes C \arrow[l, "\Lambda_M \otimes id"'] \\
M \otimes C \arrow[u, "id \otimes \Delta"] & M \arrow[l, "\Lambda_M"] \arrow[u, "\Lambda_M"']
\end{tikzcd}$$

Tanım 1.1.25

B bir bicebir ve ve M bir vektör uzayı olsun.

$$\Psi_M : M \otimes B \rightarrow M$$

dönüşümüyle birlikte (M, Ψ_M) ikilisi bir sağ B-modül olsun.

$$\Lambda_M : M \rightarrow M \otimes B$$

dönüşümüyle birlikte (M, Λ_M) ikilisi bir sağ B-komodül olsun.

Eğer M, hem sağ B-modül hem de sağ B-komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir sağ B **-bimodül** denir:

Ψ_M 'nin bir sağ B-komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Λ_M 'nin bir sağ B-modül homomorfizmi olmasıdır.

Bir sol B-bimodül de benzer şekilde tanımlanabilir.

1.2 Z_2 ve Z_3 - Dereceli Cebirler

Bu kısımda Z_2 ve Z_3 - dereceli cebirler tanıtılacak ve bu cebirlerin daha iyi anlaşılabilmesi için birer örnek verilecektir. Tanımlar ve örnekler için Kerner (2015)'ten yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.1

A, bir *K*-cebir olsun. A'nın alt uzayları A_0, A_1 arasında aşağıdaki özellikler sağlanırsa A'ya Z_2**-dereceli cebir** denir:

1- $A = \oplus A_i$, $i \in Z_2$,

2- $A_i.A_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \in Z_2$,

3- $a_i \in A_i$ homojen elemanının derecesi $\tau(a_i) = i$ olmak üzere; $a_i, a_j \in A$ homojen elemanları için $\tau(a_i.a_j) = [\tau(a_i) + \tau(a_j)](\text{mod}\, 2)$ eşitliği sağlanır.

Örnek 1.2.1

G, üreteçleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olan serbest cebir olsun. G'nin üreteçleri arasında aşağıdaki özellikler sağlansın:

1- $x_i x_j = -x_j x_i$, $(i, j = 1, 2, ...n)$,

2- x_i^2=0, $(i = 1, 2, ...n)$.

G cebirine Grassman cebiri denir ve bu cebir Z_2- dereceli cebirdir.

Tanım 1.2.2

A, bir K-cebir olsun. A'nın alt uzayları A_0, A_1, A_2 arasında aşağıdaki özellikler sağlanırsa A'ya Z_3 **-dereceli cebir** denir.

1- $A = \oplus A_i$, $i \in Z_3$,

2- $A_i.A_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \in Z_3$,

3- $a_i \in A_i$ homojen elemanının derecesi $\tau(a_i) = i$ olmak üzere; $a_i, a_j \in A$ homojen elemanları için $\tau(a_i.a_j) = [\tau(a_i) + \tau(a_j)](\bmod 3)$ eşitliği sağlanır.

Z_3 devirli grubu, kompleks düzlemde çarpımsal olarak 1 in küp kökleri ile temsil edilebilir. $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \left(i = \sqrt{-1}\right)$ olmak üzere $1 + q + q^2 = 0$ ve $q^3 = 1$ dir.

Z_3-dereceli $\left[u_i, u_j\right]$ komütatörü, $\tau(u_i) = i, \tau(u_j) = j$ olmak üzere

$$\left[u_i, u_j\right]_{Z_3} = u_i u_j - q^{ij} u_j u_i$$

şeklinde tanımlanır. Eğer u_i, u_j q-değişmeli iseler

$$u_i u_j = q^{ij} u_j u_i$$

eşitliği ortaya çıkar.

Örnek 1.2.2

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olmak üzere, bu matrislerin Hermityan eşlenikleri aşağıdaki gibidir.

$$Q_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \end{pmatrix}, Q_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Burada, $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ tür.

$\tau(Q_i) = 1$ ve $\tau(Q_i^\dagger) = 2$ $(i = 1,2,3)$ şeklinde tanımlansın. Q_i matrislerinin ürettiği uzay A_1 , $Q_i^\dagger$ matrislerinin ürettiği uzay A_2 olsun. $Q_i Q_j^\dagger$ $(i, j = 1,2,3)$ çarpım matrislerinin ürettiği uzay A_0 olmak üzere, $A = \oplus A_i$ cebiri Z_3 -dereceli bir cebirdir. Burada $\tau(Q_i Q_j^\dagger) = 0$ dır.

1.3 Z_2-Dereceli Kuantum Süper Uzay

Z_2 -dereceli kuantum süper uzaylara geçmeden önce Z_2 -dereceli kuantum (süper) düzlem ile ilgili bazı bilgiler verelim. Kuantum düzlem fikri ilk olarak 1988 yılında Manin tarafından ortaya atılmıştır.

Tanım 1.3.1

$K\{x,y\}$ bir serbest cebir olmak üzere; Manin (1988)'de kuantum düzlem, x ve y koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$xy=qyx,$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum düzlem;
I_q ; $xy - qyx$ elamanıyla oluşturulmuş, $K\{x,y\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x,y] = K\{x,y\}/ I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır. Burada $\tau(x) = 0 = \tau(y)$ dır.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir, polinomlar cebiridir ve $Fun(R_q^{\,2\,|\,0})$ ile gösterilir. Bu cebir $q \to 1$ limitinde değişmeli olur ve $\mathbb{C}[x,y]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür.

Tanım 1.3.2

$K\{x,\theta\}$ bir serbest cebir olmak üzere Manin (1989)'da kuantum süper düzlem; x ve θ koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$x\theta = q\theta x \ , \ \theta^2 = 0,$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum süper düzlem;

I_q ; $x\theta - q\theta x$ ve θ^2 elamanlarıyla oluşturulmuş, $K\{x,\theta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x,\theta] = K\{x,\theta\} \ / \ I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır. Burada $\tau(x) = 0, \tau(\theta) = 1$ dir.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir polinomlar cebiridir ve $Fun(R_q^{1\,|\,1})$ ile gösterilir. Bu cebir $q \to 1$ limitinde değişmeli olur ve $\mathbb{C}[x,\theta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür.

Tanım 1.3.3

$K\{x,y,\theta\}$ bir serbest cebir olmak üzere; Manin (1989)'da kuantum süper uzay, x, y ve θ koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$xy = qyx, \ x\theta = q\theta x \ , \ y\theta = q\theta y \ , \ \theta^2 = 0,$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum süper uzay;
I_q ; $xy\text{-}qyx, \ x\theta\text{-}q\theta x \ , \ y\theta\text{-}q\theta y \ , \ \theta^2$ elemanlarıyla oluşturulmuş, $K\{x,y,\theta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x,y,\theta] = K\{x,y,\theta\}/ \ I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır. Burada $\tau(x) = 0 = \tau(y), \tau(\theta) = 1$ dir.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir $Fun(R_q^{2|1})$ ile gösterilir ve q-değişmeli polinomlar cebiridir. Bu cebir $q \to 1$ limitinde değişmeli olur ve $\mathbb{C}[x,y,\theta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

V. Drinfeld 1986'da; adına kuantum grubu denilen ve daha sonra kuantum süper gruba genelleştirilen yeni bir matematiksel konu inşa edilmiştir.

Faddeev ve ark. 1987'de; bu konu Lie grup ve Lie cebiri teorisine sistematik bir şekilde adapte edilmiştir.

Woronowicz 1987'de; kuantum gruplar konusuna değişik yorumlar getirilmiştir.

Manin 1988'de; kuantum düzlem tanımlanarak, kuantum düzlemler yardımıyla kuantum gruplara değişik bir yorum getirilmiştir.

Manin 1989'da; kuantum düzlem, süper düzlem diye bilinen Z_2 -dereceli kuantum düzleme ve Z_2 -dereceli 3-boyutlu kuantum uzaylara genişletilmiştir.

Woronowicz 1989'da; kuantum gruplarının değişmeli olmayan diferansiyel geometrisi takdim edilmiştir. Burada kuantum grubu, temel değişmeli olmayan uzay olarak alınmış ve grup üzerindeki diferansiyel hesap, grubun özelliklerinden faydalanılarak elde edilmiştir.

Wess ve Zumino 1990'da; kuantum uzayların değişmeli olmayan diferansiyel geometrisini inşa etmek için çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar daha sonra Z_2 -dereceli olarak adlandırılan süper uzaylara genelleştirilmiştir. *(Soni, 1991); (Celik, 1998)*

Chung 1994'de; Z_2-dereceli kuantum düzlem üzerine yapılan diferansiyel hesap, Z_3-dereceli kuantum düzleme genelleştirilmiştir. Sonrasında Z_3-dereceli kuantum uzayların diferansiyel hesabı üzerine birçok çalışma yapılmıştır. *(Kerner 1996); (Le Roy 1996); (Kerner ve Abramov 1999); (Abramov ve Bazunova 2002); (Celik 2002); (El Baz ve ark. 2004)*

Celik 2016'da; en genel haliyle Z_3 –dereceli 3 boyutlu kuantum süper uzaylar tanımlanmış ve bu uzayın diferansiyel geometrisi inşa edilmiştir.

Abe 1977; tezin giriş kısmında bulunan temel bilgilerin yer aldığı önemli bir kaynak kitaptır. Modüller, cebirler, kocebirler, bicebirler gibi temel bilgilerin yanı sıra Hopf cebirleri de bu kitapta tanıtılmıştır. Cebirlerin tanımının alışılmışın dışında, belli özelliklere sahip dönüşümler ve bu dönüşümlerin değişmeli diyagramlar yardımıyla yapılmış olması önemlidir.

Kassel 1995; kuantum düzlemler, kuantum gruplar ve daha ilerisi için bilgi alınabilecek temel kaynaklardandır. Bu kitap, tez ile ilgili temel bilgilerin oluşturulmasında *(Abe 1977)* ile birlikte en büyük katkıyı sağlamıştır.

3.MATERYAL VE METOT

3.1 Materyal

Bu doktora tez çalışmasında temelde materyal olarak “ Z_3 -dereceli kuantum süper uzaylar”, “ Z_3 -dereceli diferansiyel cebir” ve “kovaryant diferansiyel bimodül” yapısı kullanılmıştır.

3.2 Metot

Bu kesimin alt başlıklarında çalışmaya yön veren temel tanım ve teoremler anlatılmıştır.

3.2.1 Z_3 -Dereceli Kuantum Süper Uzay

Celik (2016)’da yapılan çalışmada, Manin’in vurgusundan yola çıkılarak Z_2 -dereceli kuantum süper uzay, Z_3 -dereceli kuantum süper uzaya genişletilerek bu süper uzayın diferansiyel geometrisi inşa edilmiştir. Bu yapılırken, Z_2 -dereceli kuantum süper uzayı genelleştirmek için θ ve ϑ üreteçlerinin nilpotentlik dereceleri birer arttırılmıştır.

Tanım 3.2.1.1

$K\{x,\theta,\vartheta\}$ bir serbest cebir olmak üzere; Celik (2016)’da , Z_3 -dereceli kuantum süper uzay, x,θ ve ϑ koordinat fonksiyonları için, $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \left(i = \sqrt{-1}\right)$ olmak üzere;

$$x\theta = q\theta x,\; x\vartheta = q\vartheta x,\; \theta\vartheta = q^2\vartheta\theta,\; \theta^3 = 0 = \vartheta^3, \tag{3.1}$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum süper uzay;

I_q ; $x\theta - q\theta x,\; x\vartheta - q\vartheta x,\; \theta\vartheta - q^2\vartheta\theta,\; \theta^3, \vartheta^3$ elemanlarıyla oluşturulmuş, $K\{x,\theta,\vartheta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x,\theta,\vartheta] = K\{x,\theta,\vartheta\}/I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır. Burada $\tau(x) = 0, \tau(\theta) = 1, \tau(\vartheta) = 2$ dir.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir $Fun(R_q{}^{2\,|\,1})$ ile gösterilir ve q-değişmeli $\mathbb{C}\,[x, \theta, \vartheta\,]$ polinomlar cebiridir. Bu cebir q=1 durumunda değişmeli olur ve $\mathbb{C}[x, \theta, \vartheta\,]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür.

3.2.2 Z_3 -dereceli Kuantum Süper Uzayın Hopf Cebir Yapısı

Z_3 -dereceli kuantum süper uzayın Hopf cebir yapısına sahip olduğu Celik (2016)'da gösterilmiştir. Aşağıdaki bilgiler bahsi geçen makaleden alınmıştır.

$K_q[x, \theta\,, \vartheta\,]$ cebirine birim elemanın eklenmesiyle elde edilen cebiri A ile gösterelim. Kabul edelim ki x' in tersi mevcut, yani

$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ olsun.

Teorem 3.2.2.1

Eş-çarpım, eş-birim ve eş ters dönüşümlerinin koordinat fonksiyonları üzerine etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanmak üzere, A cebiri bir Hopf cebiridir. (Celik 2016).

$$\begin{aligned} &\Delta_A : A \to A \otimes A \\ &\Delta_A(x) = x \otimes x, \\ &\Delta_A(\theta) = x \otimes \theta + \theta \otimes 1, \\ &\Delta_A(\vartheta) = x^{-1} \otimes \vartheta + \vartheta \otimes x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_A : A \to K \\ &\varepsilon_A(x) = 1, \\ &\varepsilon_A(\theta) = 0, \\ &\varepsilon_A(\vartheta) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &S_A : A \to A \\ &S_A(x) = x^{-1}, \\ &S_A(\theta) = -x^{-1}\theta, \\ &S_A(\vartheta) = -q\vartheta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Δ_A eş-çarpım dönüşümü,

$$(id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes id)\ \circ \Delta_A \tag{3.5}$$

şeklindeki eş-birleşme özelliğine sahiptir ve (1) bağıntılarını korur.

ε_A eş-birim dönüşümü,

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A \tag{3.6}$$

özelliğini sağlar ve (1) bağıntılarını korur.

S_A eş-ters dönüşümü,

$$\mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A = \eta \circ \varepsilon_A = \mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A \tag{3.7}$$

özelliğini sağlar ve (1) bağıntılarını korur. Sonuç olarak A cebiri, bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

3.2.3 Z_3-dereceli Kuantum Süper Uzayın Diferansiyel Cebiri

Z_3-dereceli kuantum süper uzayın Z_3-dereceli diferansiyel cebir yapısına sahip olduğu Celik (2016)'da gösterilmiştir. Bunun için uzayın üreteçleri ile onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları ve gerekli diğer bağıntılar elde edilerek Z_3-dereceli kuantum süper uzay için değişmeli olmayan bir diferansiyel yapı kurulmuştur. Bu kısımda bu diferansiyel yapıyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.2.3.1

A, bir birleşmeli cebir ve Γ^n n-formların uzayı ve A-bimodül olsun. $\Gamma^\wedge = \oplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$ olsun. Burada $\Gamma^0 = A$'dır. Aşağıdaki tanımla birlikte $\Gamma^\wedge$, Z_3- dereceli bir diferansiyel cebirdir.(Celik 2016)

$\forall \delta \in \Gamma^n,\ \gamma \in \Gamma^\wedge$ için,

$$\mathrm{d} : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^3 = 0,\ (\mathrm{d}^2 \neq 0),\\
&\mathrm{d}(\delta \wedge \gamma) = (\mathrm{d}\,\delta) \wedge \gamma + q^{\tau(\delta)} \delta \wedge (\mathrm{d}\,\gamma),\\
&\mathrm{d}^2(\delta \wedge \gamma) = (\mathrm{d}^2\,\delta) \wedge \gamma + (q^{\tau(\delta)} + q^{\tau(\mathrm{d}\delta)})(\mathrm{d}\,\delta) \wedge (\mathrm{d}\,\gamma) + q^{2\tau(\delta)} \delta \wedge (\mathrm{d}^2\,\gamma).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Tanım 3.2.3.2

Σ, bir A Hopf cebiri üzerinde bimodül olsun. $\Delta^L : \Sigma \to A \otimes \Sigma$ lineer homomorfizmi aşağıdaki koşulları sağlarsa (Σ , Δ^L) ikilisine sol-kovaryant bimodül denir:

$$\begin{aligned}
&\Delta^L(x_1\rho_1 + \rho_2 x_2) = \Delta_A(x_1)\Delta^L(\rho_1) + \Delta^L(\rho_2)\Delta_A(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in A,\ \rho_1, \rho_2 \in \Sigma,\\
&(id \otimes \Delta^L) \circ \Delta^L = (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^L,\\
&\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta^L = id.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Tanım 3.2.3.3

Σ , bir A Hopf cebiri üzerinde bimodül olsun. $\Delta^R : \Sigma \to \Sigma \otimes A$ lineer homomorfizmi aşağıdaki koşulları sağlarsa (Σ , Δ^R) ikilisine sağ-kovaryant bimodül denir:

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2 \in A,\ \rho_1, \rho_2 \in \Sigma \text{ için,}\\
&\Delta^R(x_1\rho_1 + \rho_2 x_2) = \Delta_A(x_1)\Delta^R(\rho_1) + \Delta^R(\rho_2)\Delta_A(x_2),\\
&(\Delta^R \otimes id) \circ \Delta^R = (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta^R,\\
&\mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta^R = id.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Tanım 3.2.3.4

Σ bir A Hopf cebiri üzerinde bimodül olsun. (Σ , Δ^L) sol-kovaryant bimodül ve (Σ , Δ^R) sağ-kovaryant bimodül olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanırsa Σ 'na A üzerinde bikovaryant bimodül denir:

$$(\Delta^L \otimes id) \circ \Delta^R = (id \otimes \Delta^R) \circ \Delta^L. \tag{3.11}$$

Teorem 3.2.3.1

Aşağıdaki tanımla birlikte $\Gamma^\wedge$,sol kovaryant bimodül yapısına sahiptir:

(Celik 2016)

$$
\begin{aligned}
&\Delta^L : \Gamma^\wedge \to A \otimes \Gamma^\wedge\\
&\Delta^L(x_1 \rho x_2) = \Delta_A(x_1)\Delta^L(\rho)\Delta_A(x_2),\ \ \forall x_1, x_2 \in A,\ \rho \in \Gamma^\wedge,\\
&\Delta^L(\mathrm{d}x) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta_A(x),\ \ \forall x \in A,\\
&\Delta^L(\mathrm{d}\rho) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta^L(\rho),\ \ \forall \rho \in \Gamma^\wedge.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Burada $\sigma : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$, $\forall \rho \in \Gamma^\wedge$ için $\sigma(\rho) = q^{\tau(\rho)}\rho$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümdür.

Teorem 3.2.3.2

A cebirinin üreteçleri ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$
\begin{aligned}
&x\mathrm{d}x = q\mathrm{d}xx,\\
&x\mathrm{d}\theta = q^2\mathrm{d}\theta x,\\
&x\mathrm{d}\vartheta = q\mathrm{d}\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}x\vartheta,\\
&\theta\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\theta,\\
&\theta\mathrm{d}x = q\mathrm{d}x\theta + (1-q^2)\mathrm{d}\theta x,\\
&\theta\mathrm{d}\vartheta = q\mathrm{d}\vartheta\theta + (1-q^2)\mathrm{d}\theta\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}x = q\mathrm{d}x\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}\vartheta = q^2\mathrm{d}\vartheta\vartheta.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Teorem 3.2.3.3

A cebirinin üreteçlerinin birinci mertebe diferansiyellerinin kendi aralarındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\theta = q^2 \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Teorem 3.2.3.4

A cebirinin üreteçleri ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&x\mathrm{d}^2x = q\mathrm{d}^2x x + (q^2-1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x,\\
&x\mathrm{d}^2\theta = q^2\mathrm{d}^2\theta x + (q^2-1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&x\mathrm{d}^2\vartheta = q\mathrm{d}^2\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}^2x\vartheta + (q^2-1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\vartheta,\\
&\theta\mathrm{d}^2\theta = q^2\mathrm{d}^2\theta\theta + (q-q^2)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\theta\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2x\theta + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta x + (q-q^2)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\theta\mathrm{d}^2\vartheta = \mathrm{d}^2\vartheta\theta + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta\vartheta + (q-q^2)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}^2x = q^2\mathrm{d}^2x\vartheta + (1-q)\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\vartheta\mathrm{d}^2\theta = q\mathrm{d}^2\theta\vartheta + (1-q)\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\vartheta\mathrm{d}^2\vartheta = \mathrm{d}^2\vartheta\vartheta + (1-q)\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Teorem 3.2.3.5

Birinci mertebe diferansiyeller ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}^2x = q\mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}x,\\
&\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}^2\theta = q^2\mathrm{d}^2\theta \wedge \mathrm{d}x + (q-q^2)\mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}^2\vartheta = q\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}^2x = q\mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}^2\theta = \mathrm{d}^2\theta \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}^2\vartheta = \mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}\vartheta + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}x,\\
&\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}^2\theta = \mathrm{d}^2\theta \wedge \mathrm{d}\vartheta + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}\theta,\\
&\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}^2\vartheta = q^2\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Teorem 3.2.3.6

İkinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}^2\theta = \mathrm{d}^2\theta \wedge \mathrm{d}^2x,\\
&\mathrm{d}^2x \wedge \mathrm{d}^2\vartheta = q^2\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}^2x, \qquad (3.17)\\
&\mathrm{d}^2\theta \wedge \mathrm{d}^2\vartheta = q\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}^2\theta.
\end{aligned}$$

Tanım 3.2.3.5

Woronowicz (1989)'da; Cartan-Maurer 1-formları, Δ_A eş-çarpım dönüşümünün A'nın üreteçlerine etkisi kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$w_x = \mu \circ \left(S_A \otimes \mathrm{d}\right) \circ \Delta_A\left(x\right),\ x \in A.$$

Bu tanım kullanılarak, cebirin üreteçleri için Cartan-Maurer 1-formları Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&w_x = x^{-1}\mathrm{d}x,\\
&w_\theta = x^{-1}\mathrm{d}\theta, \qquad (3.18)\\
&w_\vartheta = -\vartheta\mathrm{d}x + x\mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.3.7

Cebirin üreteçleri ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki bağıntılar ve Cartan-Maurer 1-formlarının kendi aralarındaki bağıntılar Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&xw_x = qw_x x,\\
&xw_\theta = q^2 w_\theta x,\\
&xw_\vartheta = qw_\vartheta x,\\
&\theta w_x = q^2 w_x \theta + (q-1)w_\theta x,\\
&\theta w_\theta = qw_\theta \theta, \qquad (3.19)\\
&\theta w_\vartheta = w_\vartheta \theta,\\
&\vartheta w_x = q^2 w_x \vartheta,\\
&\vartheta w_\theta = qw_\theta \vartheta,\\
&\vartheta w_\vartheta = qw_\vartheta \vartheta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&w_x \wedge w_\theta = qw_\theta \wedge w_x,\\
&w_x \wedge w_\vartheta = qw_\vartheta \wedge w_x,\\
&w_\theta \wedge w_\vartheta = w_\vartheta \wedge w_\theta, \qquad (3.20)\\
&w_x \wedge w_x \wedge w_x = 0,\\
&w_\theta \wedge w_\theta \wedge w_\theta = 0.
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.3.8

Koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri ile koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\partial_x x = 1 + qx\partial_x + (q-1)\vartheta\partial_\vartheta,\\
&\partial_x \theta = q^2\theta\partial_x,\\
&\partial_x \vartheta = \vartheta\partial_x,\\
&\partial_\theta x = q^2 x\partial_\theta,\\
&\partial_\theta \theta = 1 + q\theta\partial_\theta + (q-1)(x\partial_x + \vartheta\partial_\vartheta),\\
&\partial_\theta \vartheta = q^2\vartheta\partial_\theta,\\
&\partial_\vartheta x = qx\partial_\vartheta,\\
&\partial_\vartheta \theta = q^2\theta\partial_\vartheta,\\
&\partial_\vartheta \vartheta = 1 + q\vartheta\partial_\vartheta.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Teorem 3.2.3.9

Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\partial_x\partial_\theta = q^2\partial_\theta\partial_x,\\
&\partial_x\partial_\vartheta = \partial_\vartheta\partial_x,\\
&\partial_\theta\partial_\vartheta = q\partial_\vartheta\partial_\theta.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Teorem 3.2.3.10

Kısmi türevler ile koordinat fonksiyonlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\partial_x \mathrm{d}x = q^2\mathrm{d}x\partial_x + (q^2-1)\mathrm{d}\theta\partial_\theta,\\
&\partial_x \mathrm{d}\theta = q\mathrm{d}\theta\partial_x,\\
&\partial_x \mathrm{d}\vartheta = q^2\mathrm{d}\vartheta\partial_x,\\
&\partial_\theta \mathrm{d}x = q^2\mathrm{d}x\partial_\theta,\\
&\partial_\theta \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\partial_\theta,\\
&\partial_\theta \mathrm{d}\vartheta = q^2\mathrm{d}\vartheta\partial_\theta,\\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}x = q^2\mathrm{d}x\partial_\vartheta,\\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\partial_\vartheta,\\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}\vartheta = q\mathrm{d}\vartheta\partial_\vartheta + (q-q^2)(\mathrm{d}x\partial_x + \mathrm{d}\theta\partial_\theta).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Teorem 3.2.3.11

Kısmi türevler ile koordinat fonksiyonlarının ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar, Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\partial_x \mathrm{d}^2x = q^2\mathrm{d}^2x\partial_x + (q^2-1)\mathrm{d}^2\theta\partial_\theta,\\
&\partial_x \mathrm{d}^2\theta = q\mathrm{d}^2\theta\partial_x,\\
&\partial_x \mathrm{d}^2\vartheta = q^2\mathrm{d}^2\vartheta\partial_x,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_x \mathrm{d}^2 x = q^2 \mathrm{d}^2 x \partial_x + (q^2 - 1)\mathrm{d}^2 \theta \partial_\theta, \\
&\partial_x \mathrm{d}^2 \theta = q \mathrm{d}^2 \theta \partial_x, \\
&\partial_x \mathrm{d}^2 \vartheta = q^2 \mathrm{d}^2 \vartheta \partial_x, \\
&\partial_\theta \mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}^2 x \partial_\theta, \\
&\partial_\theta \mathrm{d}^2 \theta = q \mathrm{d}^2 \theta \partial_\theta, \\
&\partial_\theta \mathrm{d}^2 \vartheta = \mathrm{d}^2 \vartheta \partial_\theta, \\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}^2 x = q^2 \mathrm{d}^2 x \partial_\vartheta, \\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}^2 \theta = q^2 \mathrm{d}^2 \theta \partial_\vartheta, \\
&\partial_\vartheta \mathrm{d}^2 \vartheta = q^2 \mathrm{d}^2 \vartheta \partial_\vartheta + (q^2 - q)\mathrm{d}^2 x \partial_x.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışma temelde Z_3-dereceli kuantum süper uzaylar üzerine kurgulanmıştır. İlk olarak Z_3-dereceli kuantum süper uzayların tanımı ve Hopf cebir yapısı kısaca tanıtılarak, Z_3-dereceli kuantum süper uzaylarda 3d kuantum süper vektörün tanımı yapılmış, sonrasında iki adet 3d kuantum süper vektörün toplamı tanımlanarak bu toplamın hangi koşullar altında yine bir 3d kuantum süper vektör olacağı ortaya konmuştur. Bunun için birinci vektörün bileşenleri ile ikinci vektörün bileşenleri arasında sağlanması gereken bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra bu toplam yapısının Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterilmiştir.

İlerleyen kısımlarda bu yapının diferansiyel geometrisi inşa edilmiştir. Bunun için sol kovaryant hesap kullanılmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:
-3d kuantum süper vektörün bileşenleri dediğimiz koordinat fonksiyonlarıyla, onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.
-Birinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir.
-Koordinat fonksiyonlarıyla onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

-İkinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarındaki bağıntılar ve birinci mertebe diferansiyeller ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

Cartan-Maurer 1-formları, eş-çarpım dönüşümünün cebirin üreteçlerine etkisi kullanılarak tanımlanmış ve bu tanım kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:
-Koordinat fonksiyonları ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki bağıntılar;
-Cartan-Maurer 1-formlarının kendi aralarındaki bağıntılar;
Tezin son kısmında ise koordinat fonksiyonlarının kısmi türevlerinin; koordinat fonksiyonları, bunların diferansiyelleri ile olan bağıntıları elde edilmiş ve son olarak kısmi türevlerin kendi aralarında sağlanan bağıntılar elde edilmiştir.

4.1 Z_3-Dereceli Kuantum Süper Uzay ve Hopf Cebiri

Tanım 4.1.1

$K\{x, \theta, \vartheta\}$ bir serbest cebir olmak üzere; Celik (2016)'da, Z_3-dereceli kuantum süper uzay x, θ ve ϑ koordinat fonksiyonları için;

$$x\theta = q\theta x,\ x\vartheta = q\vartheta x,\ \theta\vartheta = q^2\vartheta\theta,\ \theta^3 = 0 = \vartheta^3 \tag{4.1}$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum süper uzay;

I_q; $x\theta$-$q\theta x$, $x\vartheta$-$q\vartheta x$, $\theta\vartheta$-$q^2\vartheta\theta$, θ^3, ϑ^3 elemanlarıyla oluşturulmuş, $K\{x, \theta, \vartheta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x, \theta, \vartheta] = K\{x, \theta, \vartheta\}/I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır. $\tau(x) = 0, \tau(\theta) = 1, \tau(\vartheta) = 2$ dir.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir ($R_q^{\,2\,|\,1}$) ile gösterilir ve q-değişmeli $\mathbb{C}[x, \theta, \vartheta]$ polinomlar cebiridir. Bu cebir q=1 durumunda değişmeli olur ve $\mathbb{C}[x, \theta, \vartheta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür.

Z_3 -dereceli kuantum süper uzayın Hopf cebir yapısına sahip olduğu Celik (2016)'da gösterilmiştir. Aşağıdaki bilgiler ilgili makaleden alınmıştır.

$K_q[x, \theta, \vartheta]$ cebirine birim elemanın eklenmesiyle elde edilen cebiri A ile gösterelim. Kabul edelim ki x' in tersi mevcut, yani

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$$

olsun. Bu durumda A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan $\Delta_A : A \to A \otimes A$ eş-çarpım dönüşümünün koordinat fonksiyonları üzerine etkisi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} &\Delta_A : A \to A \otimes A \\ &\Delta_A(x) = x \otimes x, \\ &\Delta_A(\theta) = x \otimes \theta + \theta \otimes 1, \\ &\Delta_A(\vartheta) = x^{-1} \otimes \vartheta + \vartheta \otimes x. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bu dönüşüm,

$$(id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A \tag{4.3}$$

şeklindeki eş-birleşme özelliğine sahiptir ve (1) bağıntılarını korur.

A cebiri üzerindeki eş-birim ve eş-ters dönüşümleri ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_A : A \to K \\ &\varepsilon_A(x) = 1, \\ &\varepsilon_A(\theta) = 0, \\ &\varepsilon_A(\vartheta) = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &S_A : A \to A \\ &S_A(x) = x^{-1}, \\ &S_A(\theta) = -x^{-1}\theta, \\ &S_A(\vartheta) = -q\vartheta. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Bu dönüşümler,

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A, \tag{4.6}$$

$$\mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A = \eta \circ \varepsilon_A = \mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A, \tag{4.7}$$

özelliklerini sağlar ve (4.1) bağıntılarını korur. Netice itibariyle A cebiri, bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

Tanım 4.1.2

Bileşenleri x, θ ve ϑ olan ve bileşenleri arasında (4.1) bağıntıları korunan vektöre Z_3-dereceli uzayda **3d kuantum süper vektör** denir. Eğer X, bir 3d kuantum süper vektör ise,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

yazılır. Bu vektör, sadelik bakımından bundan sonra **kuantum süper vektör** olarak adlandırılacaktır.

4.2 3d Kuantum Süper Vektörlerin Toplanması

Z_3-dereceli uzayda iki kuantum süper vektörün toplamının hangi koşullar altında bir kuantum süper vektör olacağı bu kısımda incelenecektir.

Kabul edelim ki X_1ve X_2 kuantum süper uzayın elemanı yani birer kuantum süper vektör olsun. Bu durumda

$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix}$ ve $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}$ kuantum süper vektörleri için, hem $x_1, \theta_1, \vartheta_1$ koordinat fonksiyonları arasında hem de $x_2, \theta_2, \vartheta_2$ koordinat fonksiyonları arasında (4.1) bağıntıları sağlanır.

X_1ve X_2 'nin toplamı;

$$X_3 = X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ \theta_3 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere } X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} X_3 \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlansın. Amaç, X ile gösterilen toplam vektörünün yine kuantum süper uzaya ait olması yani bir kuantum süper vektör olması için X_1 ve X_2 vektörlerinin bileşenleri arasında sağlanması gereken bağıntıları bulmak olacaktır.

Teorem 4.2.1

Eğer $x_1, \theta_1, \vartheta_1$ koordinat fonksiyonları ile $x_2, \theta_2, \vartheta_2$ koordinat fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanırsa X vektörü, bir kuantum süper vektördür.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_2 x_1, \\ x_1\theta_2 &= q\theta_2 x_1, \\ x_2\theta_1 &= q\theta_1 x_2, \\ x_1\vartheta_2 &= q\vartheta_2 x_1, \\ x_2\vartheta_1 &= q\vartheta_1 x_2, \\ \theta_1\vartheta_2 &= q^2\vartheta_2\theta_1, \\ \theta_2\vartheta_1 &= q^2\vartheta_1\theta_2, \\ \theta_1\theta_2 &= q\theta_2\theta_1, \\ \vartheta_1\vartheta_2 &= q\vartheta_2\vartheta_1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

İspat:

Yukarıdaki bağıntılar kullanılarak (4.1) deki bağıntıların sağlandığı gösterilirse teorem ispat edilmiş olur.

Burada $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$ ve $\vartheta=\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
x\theta &= \frac{1}{2}(x_1+x_2)\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) \\
&= \frac{1}{4}(x_1\theta_1+x_1\theta_2+x_2\theta_1+x_2\theta_2) \\
&= \frac{1}{4}(q\theta_1x_1+q\theta_2x_1+q\theta_1x_2+q\theta_2x_2) \\
&= \frac{1}{4}q(\theta_1+\theta_2)(x_1+x_2) \\
&= q\theta x .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\vartheta &= \frac{1}{2}(x_1+x_2)\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\
&= \frac{1}{4}(x_1\vartheta_1+x_1\vartheta_2+x_2\vartheta_1+x_2\vartheta_2) \\
&= \frac{1}{4}(q\vartheta_1x_1+q\vartheta_2x_1+q\vartheta_1x_2+q\vartheta_2x_2) \\
&= \frac{1}{4}q(\vartheta_1+\vartheta_2)(x_1+x_2) \\
&= q\vartheta x .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta\vartheta &= \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\
&= \frac{1}{4}(\theta_1\vartheta_1+\theta_1\vartheta_2+\theta_2\vartheta_1+\theta_2\vartheta_2) \\
&= \frac{1}{4}(q^2\vartheta_1\theta_1+q^2\vartheta_2\theta_1+q^2\vartheta_1\theta_2+q^2\vartheta_2\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{4}q^2(\vartheta_1+\vartheta_2)(\theta_1+\theta_2)$$

$$=q^2\vartheta\theta\,.$$

$$\theta^3=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$$

$$=\frac{1}{8}(\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1+\theta_2^2)(\theta_1+\theta_2)$$

$$=\frac{1}{8}(\theta_1^3+\theta_1^2\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_1+\theta_1\theta_2^2+\theta_2\theta_1^2+\theta_2\theta_1\theta_2+\theta_2^2\theta_1+\theta_2^3)\,,$$

elde edilir. $\theta_1^3=0=\theta_2^3$ ve $1+q+q^2=0$ özdeşlikleri kullanılarak;

$$\theta^3=\frac{1}{8}(\theta_1^2\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_1+\theta_1\theta_2^2+\theta_2\theta_1^2+\theta_2\theta_1\theta_2+\theta_2^2\theta_1)$$

$$=\frac{1}{8}(q^2\theta_2\theta_1^2+q\theta_2\theta_1^2+\theta_2\theta_1^2+q^2\theta_2^2\theta_1+q\theta_2^2\theta_1+\theta_2^2\theta_1)$$

$$=\frac{1}{8}[(q^2+q+1)\theta_2\theta_1^2+(q^2+q+1)\theta_2^2\theta_1]$$

$$=0,$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vartheta^3=0$ olduğu gösterilerek ispat tamanlanır. ■

Hatırlatma 1:

$$\theta_1\theta_2=q\theta_2\theta_1,$$
$$\vartheta_1\vartheta_2=q\vartheta_2\vartheta_1,$$

bağıntılarından farklı olarak

$$\theta_1\theta_2=q^2\theta_2\theta_1,$$
$$\vartheta_1\vartheta_2=q^2\vartheta_2\vartheta_1,$$

şeklindeki bağıntılar kullanılırsa da (4.1) bağıntıları geçerliliğini korur fakat diferansiyel yapıyı kurarken gerekli olan bağıntılar teoremde verildiği şekliyledir.

Hatırlatma 2:

x_1^3 ve x_2^3 elemanları cebirin tüm elemanlarıyla değişmelidir dolayısıyla bu elemanlar cebirin merkezi elemanlarıdır.

x_1^3 ve x_2^3 elemanlarının, cebirin üreteçleri ile değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. (4.9) bağıntıları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&x_1x_2 = x_2x_1 \Rightarrow x_1^2x_2 = x_2x_1^2 \Rightarrow x_1^3x_2 = x_2x_1^3,\\
&x_1\theta_2 = q\theta_2x_1 \Rightarrow x_1(x_1\theta_2) = q^2(\theta_2x_1)x_1 \Rightarrow x_1(x_1x_1\theta_2) = (\theta_2x_1x_1)x_1 \Rightarrow x_1^3\theta_2 = \theta_2x_1^3,\\
&x_2\theta_1 = q\theta_1x_2 \Rightarrow x_2(x_2\theta_1) = q^2(\theta_1x_2)x_2 \Rightarrow x_2(x_2x_2\theta_1) = (\theta_1x_2x_2)x_2 \Rightarrow x_2^3\theta_1 = \theta_1x_2^3,\\
&x_1\vartheta_2 = q\vartheta_2x_1 \Rightarrow x_1(x_1\vartheta_2) = q^2(\vartheta_2x_1)x_1 \Rightarrow x_1(x_1x_1\vartheta_2) = (\vartheta_2x_1x_1)x_1 \Rightarrow x_1^3\vartheta_2 = \vartheta_2x_1^3,\\
&x_2\vartheta_1 = q\vartheta_1x_2 \Rightarrow x_2(x_2\vartheta_1) = q^2(\vartheta_1x_2)x_2 \Rightarrow x_2(x_2x_2\vartheta_1) = (\vartheta_1x_2x_2)x_2 \Rightarrow x_2^3\vartheta_1 = \vartheta_1x_2^3,
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki eşitlikler de gösterilebilir.

$$x_2^3x_1 = x_1x_2^3,\;\; x_2^3\vartheta_2 = \vartheta_2x_2^3,\;\; x_1^3\theta_1 = \theta_1x_1^3,\;\; x_2^3\theta_2 = \theta_2x_2^3,\;\; x_1^3\vartheta_1 = \vartheta_1x_1^3.$$

Hatırlatma 3:

$q = 1$ durumunda görüleceği üzere (4.9) bağıntıları değişmeli olur.

Örnek 4.2.1 :

(4.9) bağıntılarını sağlayacak şekilde $x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ bileşenleri için uygun matris temsilleri aşağıda verilmiştir:

$$x_1 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} c_1q^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1q & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$\vartheta_1 = \begin{pmatrix} 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vartheta_2 = \begin{pmatrix} 0 & c_2^{-1}q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matris temsillerinin (4.9) daki bağıntılardan birkaç tanesini sağladığı aşağıda gösterilmiştir:

$$x_1x_2=\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1q^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1q & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1q & 0 & 0 \\ 0 & c_1q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$x_2x_1=\begin{pmatrix} c_1q^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1q & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1q & 0 & 0 \\ 0 & c_1q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Görüldüğü gibi $x_1x_2=x_2x_1$ olur.

$$x_1\theta_2=\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & c_2q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_2x_1=\begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & c_2q & 0 \\ 0 & 0 & c_2q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $x_1\theta_2=q\theta_2x_1$ olur.

$$\theta_1\vartheta_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c_2^{-1}q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta_2\theta_1=\begin{pmatrix} 0 & c_2^{-1}q^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2^{-1}q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $\theta_1\vartheta_2=q^2\vartheta_2\theta_1$ olur.

4.3 Hopf Cebir Yapısı:

Bu kısmın amacı, bir önceki kısımda verilen toplama işlemi ile elde edilen A cebirinin Hopf cebir yapısına sahip olduğunu göstermektir.

Bunun için $\Delta_A,\varepsilon_A,S_A$ dönüşümlerinin sırasıyla toplam vektörünün bileşenlerine etkisinin tanımlanması gerekir.

$\Delta_A : A\to A\otimes A$

eş-çarpım dönüşümünün koordinat fonksiyonları üzerine etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\Delta_A(x) &= \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2),\\
\Delta_A(\theta) &= \frac{1}{2}(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1),\\
\Delta_A(\vartheta) &= \frac{1}{2}(x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Δ_A dönüşümünün, bu tanımla birlikte (4.1)de verilen bağıntıları koruduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta_A(x\theta) &= \Delta_A(x)\Delta_A(\theta)\\
&= \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)\frac{1}{2}(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)\\
&= \frac{1}{4}(x_1x_1 \otimes x_1\theta_1 + x_1\theta_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_1\theta_2 + x_1\theta_2 \otimes x_1\\
&\quad + x_2x_1 \otimes x_2\theta_1 + x_2\theta_1 \otimes x_2 + x_2x_2 \otimes x_2\theta_2 + x_2\theta_2 \otimes x_2)\\
&= \frac{1}{4}q(x_1x_1 \otimes \theta_1x_1 + \theta_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes \theta_2x_1 + \theta_2x_1 \otimes x_1\\
&\quad + x_1x_2 \otimes \theta_1x_2 + \theta_1x_2 \otimes x_2 + x_2x_2 \otimes \theta_2x_2 + \theta_2x_2 \otimes x_2)\\
&= \frac{1}{4}q(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)\\
&= q\Delta_A(\theta)\Delta_A(x)\\
&= \Delta_A(q\theta x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_A(\theta^3) &= \frac{1}{8}(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)\\
&\quad (x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)\\
&= \frac{1}{8}(x_1x_1 \otimes \theta_1\theta_1 + qx_1\theta_1 \otimes \theta_1 + x_1x_2 \otimes \theta_1\theta_2 + qx_1\theta_2 \otimes \theta_1 + \theta_1x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1\theta_1 \otimes 1\\
&\quad + \theta_1x_2 \otimes \theta_2 + \theta_1\theta_2 \otimes 1 + x_2x_1 \otimes \theta_2\theta_1 + qx_2\theta_1 \otimes \theta_2 + x_2x_2 \otimes \theta_2\theta_2 + qx_2\theta_2 \otimes \theta_2
\end{aligned}$$

$$+\theta_2 x_1 \otimes \theta_1 + \theta_2\theta_1 \otimes 1 + \theta_2 x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2\theta_2 \otimes 1)\ (x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)$$

$$= \frac{1}{8}(x_1^3 \otimes \underbrace{\theta_1^3}_{=0} + \underbrace{q^2 x_1 x_1 \theta_1}_{10} \otimes \theta_1\theta_1 + \underbrace{x_1 x_1 x_2}_{15} \otimes \theta_1\theta_1\theta_2 + \underbrace{q^2 x_1 x_1 \theta_2}_{9} \otimes \theta_1\theta_1 + \underbrace{q x_1 \theta_1 x_1}_{10} \otimes \theta_1\theta_1$$

$$+ \underbrace{q^2 x_1 \theta_1 x_1}_{3} \otimes \theta_1 + \underbrace{q x_1 \theta_1 x_2}_{13} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{q^2 x_1 \theta_1 \theta_2}_{4} \otimes \theta_1 + \underbrace{x_1 x_2 x_1}_{15} \otimes \theta_1\theta_2\theta_1$$

$$+ \underbrace{q^2 x_1 x_2 \theta_1}_{13} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{x_1 x_2 x_2}_{16} \otimes \theta_1\theta_2\theta_2 + \underbrace{q^2 x_1 x_2 \theta_2}_{14} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{q x_1 \theta_2 x_1}_{9} \otimes \theta_1\theta_1$$

$$+ \underbrace{q^2 x_1 \theta_2 \theta_1}_{4} \otimes \theta_1 + \underbrace{q x_1 \theta_2 x_2}_{14} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{q^2 x_1 \theta_2 \theta_2}_{5} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_1 x_1 x_1}_{10} \otimes \theta_1\theta_1 + \underbrace{q \theta_1 x_1 \theta_1}_{3} \otimes \theta_1$$

$$+ \underbrace{\theta_1 x_1 x_2}_{13} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{q \theta_1 x_1 \theta_2}_{4} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_1 \theta_1 x_1}_{3} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_1^3}_{=0} \otimes 1 + \underbrace{\theta_1 \theta_1 x_2}_{6} \otimes \theta_2 + \underbrace{q \theta_1 \theta_1 \theta_2}_{1} \otimes 1$$

$$+ \underbrace{\theta_1 x_2 x_1}_{13} \otimes \theta_2\theta_1 + \underbrace{q \theta_1 x_2 \theta_1}_{6} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_1 x_2 x_2}_{11} \otimes \theta_2\theta_2 + \underbrace{q \theta_1 x_2 \theta_2}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_1 \theta_2 x_1}_{4} \otimes \theta_1$$

$$+ \theta\, \underbrace{y_1 \theta_2 \theta_1}_{1} \otimes 1 + \underbrace{\theta_1 \theta_2 x_2}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{q \theta_1 \theta_2 \theta_2}_{2} \otimes 1 + \underbrace{x_2 x_1 x_1}_{15} \otimes \theta_2\theta_1\theta_1 + q^2\, \underbrace{x_2 x_1 \theta_1}_{13} \otimes \theta_2\theta_1$$

$$+ \underbrace{x_2 x_1 x_2}_{16} \otimes \theta_2\theta_1\theta_2 + \underbrace{q^2 x_2 x_1 \theta_2}_{14} \otimes \theta_2\theta_1 + \underbrace{q x_2 \theta_1 x_1}_{13} \otimes \theta_2\theta_1 + \underbrace{q^2 x_2 \theta_1 x_1}_{6} \otimes \theta_2$$

$$+ \underbrace{q x_2 \theta_1 x_2}_{11} \otimes \theta_2\theta_2 + \underbrace{q^2 x_2 \theta_1 \theta_2}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{x_2 x_2 x_1}_{16} \otimes \theta_2 \theta y_2 \theta_1 + \underbrace{q^2 x_2 x_2 \theta_1}_{11} \otimes \theta_2\theta_2 + x_2^3 \otimes \underbrace{\theta_2^3}_{=0}$$

$$+ \underbrace{q^2 x_2 x_2 \theta_2}_{12} \otimes \theta_2\theta_2 + \underbrace{q x_2 \theta_2 x_1}_{14} \otimes \theta_2\theta_1 + \underbrace{q^2 x_2 \theta_2 \theta_1}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{q x_2 \theta_2 x_2}_{12} \otimes \theta_2\theta_2$$

$$+ \underbrace{q^2 x_2 \theta_2 \theta_2}_{8} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_2 x_1 x_1}_{9} \otimes \theta_1\theta_1 + \underbrace{q \theta_2 x_1 \theta_1}_{4} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_2 x_1 x_2}_{14} \otimes \theta_1\theta_2 + \underbrace{q \theta_2 x_1 \theta_2}_{5} \otimes \theta_1$$

$$+ \underbrace{\theta_2 \theta_1 x_1}_{4} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_2 \theta_1 \theta_1}_{1} \otimes 1 + \underbrace{\theta_2 \theta_1 x_2}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{q \theta_2 \theta_1 \theta_2}_{2} \otimes 1 + \underbrace{\theta_2 x_2 x_1}_{14} \otimes \theta_2\theta_1$$

$$+ \underbrace{q \theta_2 x_2 \theta_1}_{7} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_2 x_2 x_2}_{12} \otimes \theta_2\theta_2 + \underbrace{q \theta_2 x_2 \theta_2}_{8} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_2 \theta_2 x_1}_{5} \otimes \theta_1 + \underbrace{\theta_2 \theta_2 \theta_1}_{2} \otimes 1$$

$$+ \underbrace{\theta_2 \theta_2 x_2}_{8} \otimes \theta_2 + \underbrace{\theta_2^3}_{=0} \otimes 1).$$

Diğer taraftan 1 ile numaralanmış terimler bir araya getirilip düzenlenirse

$$(\theta_1\theta_2\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1\theta_1) \otimes 1 = \underbrace{(1 + q + q^2)}_{0}\, \theta_1\theta_2\theta_1 \otimes 1 = 0$$

elde edilir.

Aynı şekilde 2,3,…,16 ile numaralanmış terimler kendi numaralarına göre bir araya getirilip düzenlenirse hepsinin 0’a eşit olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak

$\Delta_A(\theta^3)$ =0 elde edilir.

Benzer şekilde;

$$\Delta_A(x\vartheta) = \Delta_A(q\vartheta x),$$
$$\Delta_A(\theta\vartheta) = \Delta_A(q^2\vartheta\theta),$$
$$\Delta_A(\vartheta^3) = 0,$$

olduğu gösterilerek Δ_A dönüşümünün, (4.1)de verilen değişim bağıntılarını koruduğu gösterilir.

Yukarıdaki işlemlerde Δ_A dönüşümünün cebir homomorfizmi özelliklerinden ve (4.9) bağıntılarından yararlanılmıştır.

Δ_A dönüşümü için (4.3) numaralı eş-birleşme özelliğinin cebirin üreteçleri için sağlandığı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A\ (\vartheta) &= \frac{1}{2}(\Delta_A \otimes id)(x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2) \\
&= \frac{1}{2}[x_1^{-1} \otimes x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + (x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1) \otimes x_1 \\
&\quad + x_2^{-1} \otimes x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + (x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2) \otimes x_2] \\
&= \frac{1}{2}[x_1^{-1} \otimes (x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1) + \vartheta_1 \otimes (x_1 \otimes x_1) \\
&\quad + x_2^{-1} \otimes (x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2) + \vartheta_2 \otimes (x_2 \otimes x_2)] \\
&= \frac{1}{2}(id \otimes \Delta_A)(x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2) \\
&= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A(\vartheta).
\end{aligned}$$

(4.3) numaralı eş-birleşme özelliğinin benzer şekilde x, θ için de sağlandığı gösterilebilir.

$$\varepsilon_A : A \to K$$

eş-birim dönüşümünün x, θ ve ϑ üzerine etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_A(x) = 1, \\
&\varepsilon_A(\theta) = 0, \qquad\qquad (4.11)\\
&\varepsilon_A(\vartheta) = 0.
\end{aligned}$$

ε_A eş-birim dönüşümünün bir cebir homomorfizmi olmasından yararlanılarak (4.1) bağıntılarının korunduğu ve (4.6) numaralı

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A$$

eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Son olarak

$$S_A : A \to A$$

eş-ters dönüşümünün cebirin üreteçlerine etkisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} S_A(x) &= \frac{1}{2}(x_1^{-1} + x_2^{-1}), \\ S_A(\theta) &= -\frac{1}{2}(x_1^{-1}\theta_1 + x_2^{-1}\theta_2), \\ S_A(\vartheta) &= -\frac{1}{2}q(\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \tag{4.12}$$

S_A eş-ters dönüşümünün (4.1) bağıntılarını koruduğunu görmek için:

$$\begin{aligned} S_A(\theta\vartheta) = \ & \frac{1}{2}q(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{1}{2}(x_1^{-1}\theta_1 + x_2^{-1}\theta_2) \\ &= \frac{1}{2}(-q\vartheta_1 - q\vartheta_2)\frac{1}{2}(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2) \\ &= \frac{1}{4}q(\vartheta_1 x_1^{-1}\theta_1 + \vartheta_1 x_2^{-1}\theta_2 + \vartheta_2 x_1^{-1}\theta_1 + \vartheta_2 x_2^{-1}\theta_2) \\ &= \frac{1}{4}q^2(qx_1^{-1}\theta_1\vartheta_1 + qx_2^{-1}\theta_2\vartheta_1 + qx_1^{-1}\theta_1\vartheta_2 + qx_2^{-1}\theta_2\vartheta_2) \\ &= \frac{1}{4}q^2(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2)(-q\vartheta_1 - q\vartheta_2) \\ &= S_A(q^2\vartheta\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_A(\theta^3) &= \frac{1}{2}(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2)\frac{1}{2}(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2)\frac{1}{2}(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2) \\ &= \frac{1}{8}(x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1 + x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 + x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1 + x_2^{-1}\theta_2 x_2^{-1}\theta_2)(-x_1^{-1}\theta_1 - x_2^{-1}\theta_2) \\ &= \frac{1}{8}(-\underbrace{x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1}_{=0} - \underbrace{x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1}_{1} - \underbrace{x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1}_{1} - \underbrace{x_2^{-1}\theta_2 x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1}_{2} \\ &\quad - \underbrace{x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2}_{1} - \underbrace{x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 x_2^{-1}\theta_2}_{2} - \underbrace{x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2}_{2} - \underbrace{x_2^{-1}\theta_2 x_2^{-1}\theta_2 x_2^{-1}\theta_2}_{=0}). \end{aligned}$$

Diğer taraftan 1 ile numaralanmış terimleri toplayıp düzenlersek;

$$x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 + x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1 + x_2^{-1}\theta_2 x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_2) = \underbrace{(1+q+q^2)}_{0} x_1^{-1}\theta_1 x_1^{-1}\theta_1 x_2^{-1}\theta_2 = 0$$

elde edilir. 2 ile numaralanmış terimlerin toplamı da 0'a eşit olur. Sonuç olarak

$S_A(\theta^3) = 0$ olduğu gösterilir.

Benzer şekilde

$$S_A(x\theta) = S_A(q\theta x),$$
$$S_A(x\vartheta) = S_A(q\vartheta x),$$
$$S_A(\vartheta^3) = 0,$$

olduğu gösterilerek S_A eş-ters dönüşümünün, (4.1)de verilen bağıntıları koruduğu gösterilir. Bu eşitlikler gösterilirken, S_A dönüşümünün cebir-anti homomorfizmi özelliklerinden ve (4.9) bağıntılarından yararlanılmıştır. S_A dönüşümünün (4.7) numaralı

$$\mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A = \eta \circ \varepsilon_A = \mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A$$

özelliğini, cebirin üreteçleri için sağladığı kolayca gösterilir:

$$\begin{aligned}
\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A(x) &= \frac{1}{2}\mu \circ (S_A \otimes id)(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2) \\
&= \frac{1}{2}\mu \circ (x_1^{-1} \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes x_2) \\
&= \frac{1}{2}(1+1) \\
&= 1 \\
&= \eta \circ \varepsilon_A(x) \\
&= \frac{1}{2}\mu \circ (x_1 \otimes x_1^{-1} + x_2 \otimes x_2^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\mu \circ (id \otimes S_A)(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2) \\
&= \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A(x).
\end{aligned}$$

(4.7) numaralı özelliğin benzer şekilde θ, ϑ için de sağlandığı gösterilebilir.

Yukarıda tanımlanmış olan Δ_A eş-çarpım, ε_A eş-birim ve S_A eş-ters dönüşümleriyle A cebiri bir Hopf Cebiri yapısına sahip olur.

Not edelim ki; bundan sonraki kısımlarda, işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla (4.8) de yer alan $X = \frac{1}{2}X_3$ eşitliğindeki $\frac{1}{2}$ göz ardı edilerek;

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2, \\ \vartheta &= \vartheta_1 + \vartheta_2, \end{aligned}$$

alınacaktır.

4.4 3d Kuantum Süper Vektörlerin Toplamı Üzerine Bir Diferansiyel Hesap

Bu kısımda amaç, bir önceki kısımda verilen toplama işlemi ile elde edilen A Hopf cebirinin bir diferansiyel cebirini elde etmektir. Bunu elde etmek için koordinat fonksiyonlarının birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri alınıp, üzerlerine yeni yapılar kurulacaktır. Bunun için öncelikle d diferansiyel operatörünün özelliklerinden bahsetmek gerekir. d operatörü, A'nın üreteçlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.4.1

A, bir birleşmeli cebir ve Γ^n n-formların uzayı ve A-bimodül olsun. $\Gamma^\wedge = \oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma^n$ olsun. Burada $\Gamma^0 = A$ dır. Aşağıdaki tanımla birlikte $\Gamma^\wedge$, Z_3- dereceli bir diferansiyel cebirdir.(Celik 2016)

$\forall \delta \in \Gamma^n,\ \gamma \in \Gamma^\wedge$ için,

$\mathrm{d} : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^3 = 0,\ (\mathrm{d}^2 \neq 0), \\ &\mathrm{d}(\delta \wedge \gamma) = (\mathrm{d}\,\delta) \wedge \gamma + q^{\tau(\delta)}\delta \wedge (\mathrm{d}\,\gamma), \qquad (4.13) \\ &\mathrm{d}^2(\delta \wedge \gamma) = (\mathrm{d}^2\,\delta) \wedge \gamma + (q^{\tau(\delta)} + q^{\tau(\mathrm{d}\delta)})(\mathrm{d}\,\delta) \wedge (\mathrm{d}\,\gamma) + q^{2\tau(\delta)}\delta \wedge (\mathrm{d}^2\,\gamma). \end{aligned}$$

Tanım 4.4.2

$\Gamma^\wedge$, A Hopf cebiri üzerinde bimodül olsun. $\Delta^L : \Gamma^\wedge \to A \otimes \Gamma^\wedge$ lineer homomorfizmi aşağıdaki koşulları sağlarsa ($\Gamma^\wedge$, Δ^L) ikilisine sol-kovaryant bimodül denir:

$\forall x_1, x_2 \in A,\ \rho_1, \rho_2 \in \Gamma^{\wedge}$ için,

$$\begin{aligned}
&\Delta^L(x_1\rho_1 + \rho_2 x_2) = \Delta_A(x_1)\Delta^L(\rho_1) + \Delta^L(\rho_2)\Delta_A(x_2),\\
&(id \otimes \Delta^L) \circ \Delta^L = (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^L,\\
&\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta^L = id.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$\Delta^L(\mathrm{d}x) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta_A(x),\ \forall x \in A,$

Burada $\sigma : \Gamma^{\wedge} \to \Gamma^{\wedge},\ \forall \rho \in \Gamma^{\wedge}$ için $\sigma(\rho) = q^{\tau(\rho)}\rho$,

şeklinde tanımlı lineer dönüşümdür.

Sol kovaryant hesap yardımıyla cebirin üreteçleri ile onların diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları Celik (2016)'da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&x\mathrm{d}x = q\mathrm{d}xx,\\
&x\mathrm{d}\theta = q^2\mathrm{d}\theta x,\\
&x\mathrm{d}\vartheta = q\mathrm{d}\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}x\vartheta,\\
&\theta\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\theta,\\
&\theta\mathrm{d}x = q\mathrm{d}x\theta + (1-q^2)\mathrm{d}\theta x,\\
&\theta\mathrm{d}\vartheta = q\mathrm{d}\vartheta\theta + (1-q^2)\mathrm{d}\theta\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}x = q\mathrm{d}x\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\vartheta,\\
&\vartheta\mathrm{d}\vartheta = q^2\mathrm{d}\vartheta\vartheta.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Bilindiği gibi klasik diferansiyel hesapta fonksiyonlar, diferansiyelleriyle değişme özelliğine sahiptir. Cebirsel açıdan, 1-formların uzayı 1.mertebeden diferansiyellerle oluşturulmuş düzgün fonksiyonların cebiri üzerinde bir serbest bi-modüldür ve komutatiflik, sağ ve sol yapıların birbirine nasıl bağlandığını gösterir.

A cebiri değişmeli olmadığından, diferansiyel cebirinin de yani koordinat fonksiyonları ile onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyellerinin de değişmeli olmayacağı beklenir. Bu durumda diferansiyel yapıyı oluşturmak için, önce koordinat fonksiyonlarıyla onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntılarını bulmak gerekir. Sonrasında birinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarında, ikinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarında ve birinci mertebe diferansiyeller ile ikinci mertebe diferansiyellerin aralarındaki bağıntıları hesaplamak gerekir.

Koordinat fonksiyonlarıyla onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntılarını bulmak için gerekli olacak bir tanım vererek devam edelim.

Tanım 4.4.3

Δ^L sol- kovaryant dönüşümünün cebirin üreteçlerinin birinci mertebe diferansiyellerine etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\Delta^L(\mathrm{d}x) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta(x)$$

$$= (\sigma \otimes \mathrm{d})(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)$$
$$= x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2.$$

$$\Delta^L(\mathrm{d}\,\theta) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta(\theta)$$

$$= (\sigma \otimes \mathrm{d})(x_1 \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes 1 + x_2 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes 1)$$
$$= x_1 \otimes \mathrm{d}\,\theta_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,\theta_2.$$

$$\Delta^L(\mathrm{d}\,\vartheta) = (\sigma \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta(\vartheta)$$

$$= (\sigma \otimes \mathrm{d})(x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2)$$
$$= x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_1 + q^2 \vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_2 + q^2 \vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2.$$

Teorem 4.4.1

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$x_1 \mathrm{d}x_2 = q \mathrm{d}x_2 x_1,$$
$$x_2 \mathrm{d}x_1 = q \mathrm{d}x_1 x_2,$$
$$x_1 \mathrm{d}\theta_2 = q^2 \mathrm{d}\theta_2 x_1,$$
$$x_2 \mathrm{d}\theta_1 = q^2 \mathrm{d}\theta_1 x_2,$$
$$x_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = q \mathrm{d}\vartheta_2 x_1 + (q-1) \mathrm{d}x_1 \vartheta_2,$$
$$x_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = q \mathrm{d}\vartheta_1 x_2 + (q-1) \mathrm{d}x_2 \vartheta_1,$$
$$\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2 \theta_1,$$
$$\theta_2 \mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\theta_1 \theta_2,$$
$$\theta_1 \mathrm{d}x_2 = q \mathrm{d}x_2 \theta_1 + (1-q^2) \mathrm{d}\theta_1 x_2,$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_2 \mathrm{d}x_1 = q\mathrm{d}x_1\theta_2 + (1-q^2)\mathrm{d}\theta_2 x_1,\\
&\theta_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = q\mathrm{d}\vartheta_2\theta_1 + (1-q^2)\mathrm{d}\theta_1\vartheta_2,\\
&\theta_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = q\mathrm{d}\vartheta_1\theta_2 + (1-q^2)\mathrm{d}\theta_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}x_2 = q\mathrm{d}x_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}x_1 = q\mathrm{d}x_1\vartheta_2,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\theta_1\vartheta_2,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}\vartheta_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = q^2\mathrm{d}\vartheta_1\vartheta_2.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

İspat:

Sağlanması gereken bağıntılar aşağıdaki şekildedir. Bu bağıntılar yazılırken eşitliklerin sağındaki ve solundaki ifadelerin derecelerinin eşit olmasına dikkat edilmiştir. Amaç buradaki $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_i, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, I_i,\ (i, j = 1,2)$ katsayılarını bulmaktır.

$$
\begin{aligned}
&x_1 \mathrm{d}x_2 = A_1\mathrm{d}x_2 x_1,\\
&x_2 \mathrm{d}x_1 = A_2\mathrm{d}x_1 x_2,\\
&x_1 \mathrm{d}\theta_2 = B_{11}\mathrm{d}\theta_2 x_1 + B_{12}\mathrm{d}x_1\theta_2,\\
&x_2 \mathrm{d}\theta_1 = B_{21}\mathrm{d}\theta_1 x_2 + B_{22}\mathrm{d}x_2\theta_1,\\
&x_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = C_{11}\mathrm{d}\vartheta_2 x_1 + C_{12}\mathrm{d}x_1\vartheta_2,\\
&x_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = C_{21}\mathrm{d}\vartheta_1 x_2 + C_{22}\mathrm{d}x_2\vartheta_1,\\
&\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 = D_1\mathrm{d}\theta_2\theta_1,\\
&\theta_2 \mathrm{d}\theta_1 = D_2\mathrm{d}\theta_1\theta_2,\\
&\theta_1 \mathrm{d}x_2 = E_{11}\mathrm{d}x_2\theta_1 + E_{12}\mathrm{d}\theta_1 x_2,\\
&\theta_2 \mathrm{d}x_1 = E_{21}\mathrm{d}x_1\theta_2 + E_{22}\mathrm{d}\theta_2 x_1,\\
&\theta_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = F_{11}\mathrm{d}\vartheta_2\theta_1 + F_{12}\mathrm{d}\theta_1\vartheta_2,\\
&\theta_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = F_{21}\mathrm{d}\vartheta_1\theta_2 + F_{22}\mathrm{d}\theta_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}x_2 = G_{11}\mathrm{d}x_2\vartheta_1 + G_{12}\mathrm{d}\vartheta_1 x_2,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}x_1 = G_{21}\mathrm{d}x_1\vartheta_2 + G_{22}\mathrm{d}\vartheta_2 x_1,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}\theta_2 = H_{11}\mathrm{d}\theta_2\vartheta_1 + H_{12}\mathrm{d}\vartheta_1\theta_2,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}\theta_1 = H_{21}\mathrm{d}\theta_1\vartheta_2 + H_{22}\mathrm{d}\vartheta_2\theta_1,\\
&\vartheta_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = I_1 q^2\mathrm{d}\vartheta_2\vartheta_1,\\
&\vartheta_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = I_2 q^2\mathrm{d}\vartheta_1\vartheta_2.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

$A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_i, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, I_i,\ (i, j = 1,2)$ katsayılarının (4.16) da verilen şekilde olduğunu göstermek için Δ^L sol- kovaryant dönüşümünden yararlanacağız.

(4.15) ve (4.17) bağıntıları kullanılarak;

$$\Delta^L(x\,\mathrm{d}\,x) = (x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)(x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)$$

$$= x_1x_1 \otimes x_1\,\mathrm{d}\,x_1 + x_1x_2 \otimes x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + x_2x_1 \otimes x_2\,\mathrm{d}\,x_1 + x_2x_2 \otimes x_2\,\mathrm{d}\,x_2$$
$$= qx_1x_1 \otimes \mathrm{d}x_1x_1 + x_1x_2 \otimes A_1\mathrm{d}x_2x_1 + qx_2x_1 \otimes A_2\mathrm{d}x_1x_2 + qx_2x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_2,$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\Delta^L(\mathrm{d}\,xx) = (x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)(x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)$$

$$= (x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)$$
$$= x_1x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_1 + x_1x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_2 + x_2x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_1 + x_2x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_2,$$

elde edilir. (4.9) bağıntılarını da göz önüne alarak $\Delta^L(x\,\mathrm{d}\,x) = \Delta^L(q\,\mathrm{d}\,xx)$ eşitliğinden

$$A_1 = q = A_2$$

elde edilir.

Yine (4.15) ve (4.17) bağıntıları kullanılarak

$$\Delta^L(x\mathrm{d}\vartheta) = (x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)(x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_1 + q^2\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_2 + q^2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)$$

$$= 1 \otimes x_1\,\mathrm{d}\,\vartheta_1 + q^2x_1\vartheta_1 \otimes x_1\,\mathrm{d}\,x_1 + x_1x_2^{-1} \otimes x_1\,\mathrm{d}\,\vartheta_2 + q^2x_1\vartheta_2 \otimes x_1\,\mathrm{d}\,x_2$$
$$+ x_2x_1^{-1} \otimes x_2\,\mathrm{d}\,\vartheta_1 + q^2x_2\vartheta_1 \otimes x_2\,\mathrm{d}\,x_1 + 1 \otimes x_2\,\mathrm{d}\,\vartheta_2 + q^2x_2\vartheta_2 \otimes x_2\,\mathrm{d}\,x_2$$
$$= 1 \otimes [q\mathrm{d}\vartheta_1x_1 + (q-1)\mathrm{d}x_1\vartheta_1] + x_1\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_1 + x_1x_2^{-1} \otimes (C_{11}\mathrm{d}\vartheta_2x_1 + C_{12}\mathrm{d}x_1\vartheta_2)$$
$$+ q^2x_1\vartheta_2 \otimes A_1\mathrm{d}x_2x_1 + x_2x_1^{-1} \otimes (C_{21}\mathrm{d}\vartheta_1x_2 + C_{22}\mathrm{d}x_2\vartheta_1) + q^2x_2\vartheta_1 \otimes A_2\mathrm{d}x_1x_2$$
$$+ 1 \otimes [q\mathrm{d}\vartheta_2x_2 + (q-1)\mathrm{d}x_2\vartheta_2] + x_2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_2,$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\Delta^L[q\mathrm{d}\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}x\vartheta)]$$

$$= q(x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_1 + q^2\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_2 + q^2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)(x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)$$
$$+ (q-1)(x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2)(x_1^{-1} \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes x_1 + x_2^{-1} \otimes \vartheta_2 + \vartheta_2 \otimes x_2)$$
$$= q(1 \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_1x_1 + x_1^{-1}x_2 \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_1x_2 + q^2\vartheta_1x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_1 + q^2\vartheta_1x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_2$$
$$+ x_2^{-1}x_1 \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_2x_1 + 1 \otimes \mathrm{d}\,\vartheta_2x_2 + q^2\vartheta_2x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_1 + q^2\vartheta_2x_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_2)$$
$$+ (q-1)(1 \otimes \mathrm{d}\,x_1\vartheta_1 + x_2x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\,x_2\vartheta_1 + q^2x_1\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_1 + q^2x_2\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_1$$
$$+ x_1x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\,x_1\vartheta_2 + 1 \otimes \mathrm{d}\,x_2\vartheta_2 + q^2x_1\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_1x_2 + q^2x_2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\,x_2x_2),$$

elde edilir. (4.9) bağıntıları ve $\Delta^L(x\mathrm{d}\vartheta) = \Delta^L[q\mathrm{d}\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}x\vartheta)]$ eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = q = C_{12},\\
&C_{21} = (q-1) = C_{22},
\end{aligned}
$$

elde edilir. Δ^L dönüşümü benzer şekilde (4.15) teki tüm bağıntılara uygulandığı taktirde (4.17) deki katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = q = A_2,\\
&B_{11} = q^2, B_{12} = 0,\\
&B_{21} = q^2, B_{22} = 0,\\
&C_{11} = q = C_{21},\\
&C_{12} = (q-1) = C_{22},\\
&D_1 = 1 = D_2\\
&E_{11} = q = E_{21},\\
&E_{12} = (1-q^2) = E_{22},\\
&F_{11} = q = F_{21},\\
&F_{12} = (1-q^2) = F_{22},\\
&G_{11} = q, G_{12} = 0,\\
&G_{21} = q, G_{22} = 0,\\
&H_{11} = 1, H_{12} = 0,\\
&H_{21} = 1, H_{22} = 0,\\
&I_1 = q^2 = I_2.
\end{aligned}
$$

Bu da (4.16) da verilen katsayılarla aynıdır. ■

Teorem 4.4.2

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonlarının birinci mertebe diferansiyellerinin kendi aralarındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2 = q^2\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1 = q^2\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 = \mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 = \mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1,\\
&\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 = \mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 = \mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

İspat:

Δ^L sol- kovaryant dönüşümü, (3.14) teki ilgili bağıntılara uygulandığında (4.18) deki bağıntılar elde edilir. Bir tanesini gösterelim:

$$\Delta^L(\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\vartheta)=\Delta^L(\mathrm{d}\vartheta\wedge\mathrm{d}\theta)$$

$$\begin{aligned}
&=(x_1\otimes\mathrm{d}\theta_1+x_2\otimes\mathrm{d}\theta_2)(x_1^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_1+q^2\vartheta_1\otimes\mathrm{d}x_1+x_2^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_2+q^2\vartheta_2\otimes\mathrm{d}x_2)\\
&=1\otimes(\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_1)+x_1\vartheta_1\otimes(\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}x_1)+x_1x_2^{-1}\otimes(\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2)\\
&+x_1\vartheta_2\otimes(\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}x_2)+x_2x_1^{-1}\otimes(\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_1)+x_2\vartheta_1\otimes(\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}x_1)\\
&+1\otimes(\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_2)+x_2\vartheta_2\otimes(\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}x_2).
\end{aligned}$$

$$\Delta^L(\mathrm{d}\vartheta\wedge\mathrm{d}\theta)=(x_1^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_1+q^2\vartheta_1\otimes\mathrm{d}x_1+x_2^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_2+q^2\vartheta_2\otimes\mathrm{d}x_2)(x_1\otimes\mathrm{d}\theta_1+x_2\otimes\mathrm{d}\theta_2)$$

$$\begin{aligned}
&=1\otimes(\mathrm{d}\vartheta_1\wedge\mathrm{d}\theta_1)+q^2\vartheta_1x_1\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\theta_1)+x_2^{-1}x_1\otimes(\mathrm{d}\vartheta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1)\\
&+q^2\vartheta_2x_1\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\theta_1)+x_1^{-1}x_2\otimes(\mathrm{d}\vartheta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2)+q^2\vartheta_1x_2\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\theta_2)\\
&+1\otimes(\mathrm{d}\vartheta_2\wedge\mathrm{d}\theta_2)+q^2\vartheta_2x_2\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\theta_2).
\end{aligned}$$

(4.9) bağıntıları kullanılarak $\Delta^L(\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\vartheta)=\Delta^L(\mathrm{d}\vartheta\wedge\mathrm{d}\theta)$ eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\theta_2=q^2\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}x_1,\\
&\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\theta_1=q^2\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}x_2,\\
&\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2=\mathrm{d}\vartheta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1,\\
&\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_1=\mathrm{d}\vartheta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2,
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler (3.14) teki diğer bağıntılara uygulanarak (4.18) bağıntılarının yedi tanesi elde edilir. Geri kalan iki bağıntının elde edilmesi, (4.16) daki ilgili bağıntılara d operatörünün uygulanmasıyla elde edilir. Bir tanesini gösterelim;

$$\theta_1\mathrm{d}\theta_2\text{-}\mathrm{d}\theta_2\theta_1=0\Rightarrow\mathrm{d}(\theta_1\mathrm{d}\theta_2\text{-}\mathrm{d}\theta_2\theta_1)=0$$

$$\begin{aligned}
&=\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2+q\theta_1\mathrm{d}^2\theta_2-\mathrm{d}^2\theta_2\theta_1-q^2\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1\\
&=\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2+\mathrm{d}^2\theta_2\theta_1+(q^2-1)\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2-\mathrm{d}^2\theta_2\theta_1-q^2\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1\\
&=q^2\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2-q^2\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1\\
&=0,
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2=\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1$ elde edilir. ■

Koordinat fonksiyonlarıyla onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntılarını bulmak için Δ^L sol- kovaryant dönüşümünün, koordinat fonksiyonlarının ikinci mertebe diferansiyellerine etkisini tanımlamak gerekir.

Tanım 4.4.4

Δ^L sol- kovaryant dönüşümünün koordinat fonksiyonlarının ikinci mertebe diferansiyellerine etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\Delta^L(\mathrm{d}^2 x) = x_1 \otimes \mathrm{d}^2 x_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}^2 x_2,\\
&\Delta^L(\mathrm{d}^2 \theta) = x_1 \otimes \mathrm{d}^2 \theta_1 + x_2 \otimes \mathrm{d}^2 \theta_2,\\
&\Delta^L(\mathrm{d}^2 \vartheta) = x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}^2 \vartheta_1 + q\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}^2 x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}^2 \vartheta_2 + q\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}^2 x_2.
\end{aligned}$$

Teorem 4.4.3

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonları ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&x_1\mathrm{d}^2x_2 = q\mathrm{d}^2x_2x_1 + (q^2-1)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&x_2\mathrm{d}^2x_1 = q\mathrm{d}^2x_1x_2 + (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&x_1\mathrm{d}^2\theta_2 = q^2\mathrm{d}^2\theta_2x_1 + (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&x_2\mathrm{d}^2\theta_1 = q^2\mathrm{d}^2\theta_1x_2 + (q^2-1)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1,\\
&x_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 = q\mathrm{d}^2\vartheta_2x_1 + (q-1)\mathrm{d}^2x_1\vartheta_2 + (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2,\\
&x_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 = q\mathrm{d}^2\vartheta_1x_2 + (q-1)\mathrm{d}^2x_2\vartheta_1 + (q^2-1)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1,\\
&\theta_1\mathrm{d}^2\theta_2 = q^2\mathrm{d}^2\theta_2\theta_1 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&\theta_2\mathrm{d}^2\theta_1 = q^2\mathrm{d}^2\theta_1\theta_2 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1,\\
&\theta_1\mathrm{d}^2x_2 = \mathrm{d}^2x_2\theta_1 + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta_1x_2 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&\theta_2\mathrm{d}^2x_1 = \mathrm{d}^2x_1\theta_2 + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta_2x_1 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\theta_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 = \mathrm{d}^2\vartheta_2\theta_1 + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta_1\vartheta_2 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2,\\
&\theta_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 = \mathrm{d}^2\vartheta_1\theta_2 + (q^2-q)\mathrm{d}^2\theta_2\vartheta_1 + (q-q^2)\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1,\\
&\vartheta_1\mathrm{d}^2x_2 = q^2\mathrm{d}^2x_2\vartheta_1 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&\vartheta_2\mathrm{d}^2x_1 = q^2\mathrm{d}^2x_1\vartheta_2 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\vartheta_1\mathrm{d}^2\theta_2 = q\mathrm{d}^2\theta_2\vartheta_1 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&\vartheta_2\mathrm{d}^2\theta_1 = q\mathrm{d}^2\theta_1\vartheta_2 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1, \qquad (4.19)\\
&\vartheta_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 = \mathrm{d}^2\vartheta_2\vartheta_1 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2,\\
&\vartheta_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 = \mathrm{d}^2\vartheta_1\vartheta_2 + (1-q)\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1.
\end{aligned}$$

İspat:

(4.19) bağıntıları iki farklı yöntem ile elde edilebilir:

Bunlardan birincisi (4.16) bağıntılarına d dış diferansiyel operatörünü uygulamak ve ortaya çıkan sonuçları düzenlerken (4.18) bağıntılarından yararlanmaktır. Diğer yöntem ise (3.15) te yer alan bağıntılara Δ^L sol- kovaryant dönüşümünü uygulamaktır. İki yöntemle de aynı sonuçlar ortaya çıkacaktır.

(4.16) daki $x_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = q\mathrm{d}\vartheta_2 x_1 + (q-1)\mathrm{d}x_1\vartheta_2$ ve $x_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = q\mathrm{d}\vartheta_1 x_2 + (q-1)\mathrm{d}x_2\vartheta_1$ bağıntılarına d dış diferansiyel operatörü uygulanarak;

$$x_1 \mathrm{d}\vartheta_2 = q\mathrm{d}\vartheta_2 x_1 + (q-1)\mathrm{d}x_1\vartheta_2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathrm{d}[x_1 \mathrm{d}\vartheta_2 - q\mathrm{d}\vartheta_2 x_1 - (q-1)\mathrm{d}x_1\vartheta_2]{=}0\\
&\Rightarrow \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 + x_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 - q\mathrm{d}^2\vartheta_2 x_1 - q\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_1 - (q-1)\mathrm{d}^2 x_1\vartheta_2 - (q^2-q)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 = 0\\
&\Rightarrow x_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 - q\mathrm{d}^2\vartheta_2 x_1 - (q-1)\mathrm{d}^2 x_1\vartheta_2 - (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 = 0\\
&\Rightarrow x_1\mathrm{d}^2\vartheta_2 = q\mathrm{d}^2\vartheta_2 x_1 + (q-1)\mathrm{d}^2 x_1\vartheta_2 + (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2,
\end{aligned}$$

ve

$$x_2 \mathrm{d}\vartheta_1 = q\mathrm{d}\vartheta_1 x_2 + (q-1)\mathrm{d}x_2\vartheta_1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathrm{d}[x_2 \mathrm{d}\vartheta_1 - q\mathrm{d}\vartheta_1 x_2 - (q-1)\mathrm{d}x_2\vartheta_1]{=}0\\
&\Rightarrow \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 + x_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 - q\mathrm{d}^2\vartheta_1 x_2 - q\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_2 - (q-1)\mathrm{d}^2 x_2\vartheta_1 - (q^2-q)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 = 0\\
&\Rightarrow x_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 - q\mathrm{d}^2\vartheta_1 x_2 - (q-1)\mathrm{d}^2 x_2\vartheta_1 - (q^2-1)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 = 0\\
&\Rightarrow x_2\mathrm{d}^2\vartheta_1 = q\mathrm{d}^2\vartheta_1 x_2 + (q-1)\mathrm{d}^2 x_2\vartheta_1 + (q^2-1)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1,
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.15) te yer alan $x\mathrm{d}^2\vartheta = q\mathrm{d}^2\vartheta x + (q-1)\mathrm{d}^2 x\vartheta + (q^2-1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2$ bağıntısına Δ^L sol- kovaryant dönüşümü uygulanarak;

$$\Delta^L(x\mathrm{d}^2\vartheta) = (x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2)(x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\,\vartheta_1 + q\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}^2\,x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\,\vartheta_2 + q\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}^2\,x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \otimes x_1\,\mathrm{d}^2\,\vartheta_1 + qx_1\vartheta_1 \otimes x_1\,\mathrm{d}^2\,x_1 + x_1x_2^{-1} \otimes x_1\,\mathrm{d}^2\,\vartheta_2 + qx_1\vartheta_2 \otimes x_1\,\mathrm{d}^2\,x_2\\
&+ x_2x_1^{-1} \otimes x_2\,\mathrm{d}^2\,\vartheta_1 + qx_2\vartheta_1 \otimes x_2\,\mathrm{d}^2\,x_1 + 1 \otimes x_2\,\mathrm{d}^2\,\vartheta_2 + qx_2\vartheta_2 \otimes x_2\,\mathrm{d}^2\,x_2.
\end{aligned}$$

$$\Delta^L[q\mathrm{d}^2\vartheta x+(q-1)\mathrm{d}^2x\vartheta+(q^2-1)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2]$$

$$\begin{aligned}
&=q(x_1^{-1}\otimes\mathrm{d}^2\vartheta_1+q\vartheta_1\otimes\mathrm{d}^2x_1+x_2^{-1}\otimes\mathrm{d}^2\vartheta_2+q\vartheta_2\otimes\mathrm{d}^2x_2)(x_1\otimes x_1+x_2\otimes x_2)\\
&+(q-1)(x_1\otimes\mathrm{d}^2x_1+x_2\otimes\mathrm{d}^2x_2)(x_1^{-1}\otimes\vartheta_1+\vartheta_1\otimes x_1+x_2^{-1}\otimes\vartheta_2+\vartheta_2\otimes x_2)\\
&+(q^2-1)(x_1\otimes\mathrm{d}x_1+x_2\otimes\mathrm{d}x_2)(x_1^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_1+q^2\vartheta_1\otimes\mathrm{d}x_1+x_2^{-1}\otimes\mathrm{d}\vartheta_2+q^2\vartheta_2\otimes\mathrm{d}x_2)\\
&=q(1\otimes\mathrm{d}^2\vartheta x_1+q\vartheta_1x_1\otimes\mathrm{d}^2x_1x_1+x_2^{-1}x_1\otimes\mathrm{d}^2\vartheta_2x_1+q\vartheta_2x_1\otimes\mathrm{d}^2x_2x_1\\
&+x_1^{-1}x_2\otimes\mathrm{d}^2\vartheta_1x_2+q\vartheta_1x_2\otimes\mathrm{d}^2x_1x_2+1\otimes\mathrm{d}^2\vartheta_2x_2+q\vartheta_2x_2\otimes\mathrm{d}^2x_2x_2)\\
&+(q-1)(1\otimes\mathrm{d}^2x_1\vartheta_1+qx_1\vartheta_1\otimes\mathrm{d}^2x_1x_1+x_1x_2^{-1}\otimes\mathrm{d}^2x_1\vartheta_2+qx_1\vartheta_2\otimes\mathrm{d}^2x_1x_2\\
&+x_2x_1^{-1}\otimes\mathrm{d}^2x_2\vartheta_1+qx_2\vartheta_1\otimes\mathrm{d}^2x_2x_1+1\otimes\mathrm{d}^2x_2\vartheta_2+qx_2\vartheta_2\otimes\mathrm{d}^2x_2x_2)\\
&+(q^2-1)[1\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_1)+qx_1\vartheta_1\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_1)+x_1x_2^{-1}\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2)\\
&+qx_1\vartheta_2\otimes(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)+x_2x_1\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_1)+qx_2\vartheta_1\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1)\\
&+1\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_2)+qx_2\vartheta_2\otimes(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_2)],
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^L(x\mathrm{d}^2\vartheta)=\Delta^L[q\mathrm{d}^2\vartheta x+(q-1)\mathrm{d}^2x\vartheta+(q^2-1)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2]$ eşitliği (4.9) ve (4.18) bağıntıları kullanılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
x_1\mathrm{d}^2\vartheta_2&=q\mathrm{d}^2\vartheta_2x_1+(q-1)\mathrm{d}^2x_1\vartheta_2+(q^2-1)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}\vartheta_2,\\
x_2\mathrm{d}^2\vartheta_1&=q\mathrm{d}^2\vartheta_1x_2+(q-1)\mathrm{d}^2x_2\vartheta_1+(q^2-1)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}\vartheta_1,
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde iki yöntemle de (4.19) daki bağıntıların tümü elde edilir. ■

Teorem 4.4.4

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}^2x_2&=q\mathrm{d}^2x_2\wedge\mathrm{d}x_1,\\
\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}^2x_1&=q\mathrm{d}^2x_1\wedge\mathrm{d}x_2,\\
\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}^2\theta_2&=q\mathrm{d}^2\theta_2\wedge\mathrm{d}x_1+(q-q^2)\mathrm{d}^2x_1\wedge\mathrm{d}\theta_2,\\
\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}^2\theta_1&=q\mathrm{d}^2\theta_1\wedge\mathrm{d}x_2+(q-q^2)\mathrm{d}^2x_2\wedge\mathrm{d}\theta_1,\\
\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}^2\vartheta_2&=q\mathrm{d}^2\vartheta_2\wedge\mathrm{d}x_1,\\
\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}^2\vartheta_1&=q\mathrm{d}^2\vartheta_1\wedge\mathrm{d}x_2,\\
\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}^2\theta_2&=\mathrm{d}^2\theta_2\wedge\mathrm{d}\theta_1,\\
\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}^2\theta_1&=\mathrm{d}^2\theta_1\wedge\mathrm{d}\theta_2,\\
\mathrm{d}\theta_1\wedge\mathrm{d}^2x_2&=q\mathrm{d}^2x_2\wedge\mathrm{d}\theta_1,\\
\mathrm{d}\theta_2\wedge\mathrm{d}^2x_1&=q\mathrm{d}^2x_1\wedge\mathrm{d}\theta_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = \mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1,\\
&\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1 = \mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2 x_2 = \mathrm{d}^2 x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\\
&\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2 x_1 = \mathrm{d}^2 x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_1,\\
&\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 = \mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1 + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2,\\
&\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\theta_1 = \mathrm{d}^2\theta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2 + (q^2-1)\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\theta_1,\\
&\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1,\\
&\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

İspat:

Önceki ispatta (4.19) bağıntılarını elde etmek için iki farklı yöntem kullanıldı fakat bu ispatta (4.20) bağıntılarını elde etmek için dış diferansiyel operatörünün (4.19) bağıntılarına uygulanmasının tutarlı bir sonuç vermediği görüldü. İspat için Δ^L sol-kovaryant dönüşümünden yararlanıldı.

$$
\begin{aligned}
&\Delta^L(\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}^2\vartheta)\\
&\quad = (x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\vartheta_1 + q^2\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\vartheta_2 + q^2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}x_2)\\
&\quad (x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\vartheta_1 + q\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}^2 x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\vartheta_2 + q\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}^2 x_2)\\
&\quad = x_1^{-1}x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1) + q^2\vartheta_1 x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1) + x_2^{-1}x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1)\\
&\quad + q^2\vartheta_2 x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1) + q x_1^{-1}\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2 x_1) + q^2\vartheta_1\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2 x_1)\\
&\quad + q x_2^{-1}\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2 x_1) + q^2\vartheta_2\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}^2 x_1) + x_1^{-1}x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2)\\
&\quad + q^2\vartheta_1 x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2) + x_2^{-1}x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2) + q^2\vartheta_2 x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2\\
&\quad + q x_1^{-1}\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2 x_2) + q\vartheta_1\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2 x_2) + q x_2^{-1}\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2 x_2)\\
&\quad + q\vartheta_2\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}^2 x_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta^L(q^2\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}\vartheta)\\
&\quad = q^2(x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\vartheta_1 + q\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}^2 x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}^2\vartheta_2 + q\theta\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}^2 x_2)\\
&\quad (x_1^{-1} \otimes \mathrm{d}\vartheta_1 + q^2\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}x_1 + x_2^{-1} \otimes \mathrm{d}\vartheta_2 + q^2\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}x_2)\\
&\quad = q^2[x_1^{-1}x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1) + q x_1^{-1}\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_1) + x_1^{-1}x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2)\\
&\quad + q x_1^{-1}\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}x_2) + q\vartheta_1 x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2 x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1) + q\vartheta_1\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}^2 x_1 \wedge \mathrm{d}x_1)\\
&\quad + q\vartheta_1 x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2 x_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2) + q\vartheta_1\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}^2 x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) + x_2^{-1}x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1)\\
&\quad + q x_2^{-1}\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_1) + x_2^{-1}x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2) + q x_2^{-1}\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}x_2)\\
&\quad + q\vartheta_2 x_1^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2 x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1) + q\vartheta_2\vartheta_1 \otimes (\mathrm{d}^2 x_2 \wedge \mathrm{d}x_1) + q\vartheta_2 x_2^{-1} \otimes (\mathrm{d}^2 x_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2)\\
&\quad + q\vartheta_2\vartheta_2 \otimes (\mathrm{d}^2 x_2 \wedge \mathrm{d}x_2)].
\end{aligned}
$$

$\Delta^L(\mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}^2\vartheta) = \Delta^L(q^2\mathrm{d}^2\vartheta \wedge \mathrm{d}\vartheta)$ eşitliğinde uygun yerlerde (4.9) bağıntıları kullanılırsa;

$$\mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = q^2\,\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}\vartheta_1,$$

$$\mathrm{d}\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1 = q^2\,\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2,$$

elde edilir.

Δ^L sol- kovaryant dönüşümü (3.16) da yer alan ilgili diğer bağıntılara uygulandığında (4.20) bağıntılarının geri kalanları elde edilir. ■

Teorem 4.4.5

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonlarının ikinci mertebe diferansiyellerinin kendi aralarındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2 = \mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1,\\
&\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 = \mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1,\\
&\mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}^2\theta_1 = \mathrm{d}^2\theta_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2,\\
&\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1,\\
&\mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2,\\
&\mathrm{d}^2\theta_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 = \mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2\theta_1,\\
&\mathrm{d}^2\theta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = q\mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\theta_1,\\
&\mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1 = q\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2,\\
&\mathrm{d}^2\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_2 = \mathrm{d}^2\vartheta_2 \wedge \mathrm{d}^2\vartheta_1.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

İspat:

d dış diferansiyel operatörü, (4.20) bağıntılarına uygulanarak (4.21) numaralı bağıntılar kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2 = q\mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}x_1\\
&\Rightarrow \mathrm{d}(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2 - q\mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}x_1) = 0\\
&\Rightarrow \mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2 + q\mathrm{d}x_1 \wedge \underbrace{\mathrm{d}^3x_2}_{=0} - q\underbrace{\mathrm{d}^3x_2}_{=0} \wedge \mathrm{d}x_1 - \mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1 = 0\\
&\Rightarrow \mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2x_2 = \mathrm{d}^2x_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1,
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 = q\mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + (q-q^2)\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2 \\
& \Rightarrow \mathrm{d}(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 - q\mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_1 - (q-q^2)\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2) = 0 \\
& \Rightarrow \mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 + q\mathrm{d}x_1 \wedge \underbrace{\mathrm{d}^3\theta_2}_{=0} - q\underbrace{\mathrm{d}^3\theta_2}_{=0} \wedge \mathrm{d}x_1 - q\mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1 \\
& -(q-q^2)\underbrace{\mathrm{d}^3x_1}_{=0} \wedge \mathrm{d}\theta_2 - (q-q^2)q^2\mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 \\
& \Rightarrow \mathrm{d}^2x_1 \wedge \mathrm{d}^2\theta_2 = \mathrm{d}^2\theta_2 \wedge \mathrm{d}^2x_1,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.21) numaralı bağıntıların kalanı da elde edilir. Ayrıca, Δ^L sol- kovaryant dönüşümü (3.17) deki ilgili bağıntılara uygulandığında da (4.21) bağıntılarını elde etmek mümkündür. ■

Tanım 4.4.5

Woronowicz (1989)'da; Cartan-Maurer 1-formları, Δ_A eş-çarpım dönüşümünün A'nın üreteçlerine etkisi kullanılarak şu şekilde tanımlanmıştır:

$$w_x = \mu \circ (S_A \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta_A(x),\ x \in A.$$

Bu tanım yardımıyla toplam vektörünün bileşenleri için Cartan-Maurer 1-formları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
w_{x_1} &= x_1^{-1}\mathrm{d}x_1, \\
w_{x_2} &= x_2^{-1}\mathrm{d}x_2, \\
w_{\theta_1} &= x_1^{-1}\mathrm{d}\theta_1, \\
w_{\theta_2} &= x_2^{-1}\mathrm{d}\theta_2, \\
w_{\vartheta_1} &= -\vartheta_1\mathrm{d}x_1 + x_1\mathrm{d}\vartheta_1, \\
w_{\vartheta_2} &= -\vartheta_2\mathrm{d}x_2 + x_2\mathrm{d}\vartheta_2.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
w_x &= w_{x_1} + w_{x_2}, \\
w_\theta &= w_{\theta_1} + w_{\theta_2}, \\
w_\vartheta &= w_{\vartheta_1} + w_{\vartheta_2},
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.4.6

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonları ile onların Cartan-Maurer 1-formları arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
x_1 w_{x_2} &= q w_{x_2} x_1, \\
x_2 w_{x_1} &= q w_{x_1} x_2, \\
x_1 w_{\theta_2} &= q^2 w_{\theta_2} x_1, \\
x_2 w_{\theta_1} &= q^2 w_{\theta_1} x_2, \\
x_1 w_{\vartheta_2} &= q w_{\vartheta_2} x_1, \\
x_2 w_{\vartheta_1} &= q w_{\vartheta_1} x_2, \\
\theta_1 w_{x_2} &= q^2 w_{x_2} \theta_1 + (q-1) w_{\theta_1} x_1, \\
\theta_2 w_{x_1} &= q^2 w_{x_1} \theta_2 + (q-1) w_{\theta_2} x_2, \\
\theta_1 w_{\theta_2} &= q w_{\theta_2} \theta_1, \\
\theta_2 w_{\theta_1} &= q w_{\theta_1} \theta_2, \\
\theta_1 w_{\vartheta_2} &= w_{\vartheta_2} \theta_1, \\
\theta_2 w_{\vartheta_1} &= w_{\vartheta_1} \theta_2, \\
\vartheta_1 w_{x_2} &= q^2 w_{x_2} \vartheta_1, \\
\vartheta_2 w_{x_1} &= q^2 w_{x_1} \vartheta_2, \\
\vartheta_1 w_{\theta_2} &= q w_{\theta_2} \vartheta_1, \\
\vartheta_2 w_{\theta_1} &= q w_{\theta_1} \vartheta_2, \\
\vartheta_1 w_{\vartheta_2} &= q w_{\vartheta_2} \vartheta_1 + (q-q^2) \vartheta_2 \mathrm{d}x_2 \vartheta_1, \\
\vartheta_2 w_{\vartheta_1} &= q w_{\vartheta_1} \vartheta_2 + (q-q^2) \vartheta_1 \mathrm{d}x_1 \vartheta_2.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

İspat:

$\theta_1 w_{x_2} = q^2 w_{x_2} \theta_1 + (q-1) w_{\theta_1} x_1$ olduğunu ispat edelim:

$$\begin{aligned}
\theta_1 w_{x_2} &= \theta_1 x_2^{-1} \mathrm{d}x_2 \\
&= q x_2^{-1} \theta_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= q^2 x_2^{-1} \mathrm{d}x_2 \theta_1 + (q-1) x_2^{-1} \mathrm{d}\theta_1 x_2 \\
&= q^2 w_{x_2} \theta_1 + (q^2 - q) x_2^{-1} x_2 \mathrm{d}\theta_1 \\
&= q^2 w_{x_2} \theta_1 + (q-1) x_1^{-1} \mathrm{d}\theta_1 x_1^{-1} \\
&= q^2 w_{x_2} \theta_1 + (q-1) w_{\theta_1} x_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Burada (4.9) ve (4.16) bağıntılarından yararlanılmıştır. Benzer şekilde (4.24) teki diğer bağıntıların da sağlandığı gösterilebilir. ■

Teorem 4.4.7

Cartan-Maurer 1-formlarının kendi aralarındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&w_{x_1} \wedge w_{x_2} = w_{x_2} \wedge w_{x_1},\\
&w_{x_1} \wedge w_{\theta_2} = q w_{\theta_2} \wedge w_{x_1},\\
&w_{x_2} \wedge w_{\theta_1} = q w_{\theta_1} \wedge w_{x_2},\\
&w_{x_1} \wedge w_{\vartheta_2} = q w_{\vartheta_2} \wedge w_{x_1},\\
&w_{x_2} \wedge w_{\vartheta_1} = q w_{\vartheta_1} \wedge w_{x_2},\\
&w_{\theta_1} \wedge w_{\theta_2} = w_{\theta_2} \wedge w_{\theta_1},\\
&w_{\theta_1} \wedge w_{\vartheta_2} = w_{\vartheta_2} \wedge w_{\theta_1},\\
&w_{\theta_2} \wedge w_{\vartheta_1} = w_{\vartheta_1} \wedge w_{\theta_2},\\
&w_{\vartheta_1} \wedge w_{\vartheta_2} = w_{\vartheta_2} \wedge w_{\vartheta_1}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

İspat:

(4.9),(4.16) ve (4.18) bağıntıları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
w_{x_1} \wedge w_{\theta_2} &= x_1^{-1}\mathrm{d}x_1 x_2^{-1}\mathrm{d}\theta_2\\
&= x_1^{-1}\mathrm{d}x_1 x_2^{-1}\mathrm{d}\theta_2\\
&= q x_1^{-1} x_2^{-1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2\\
&= q x_2^{-1} x_1^{-1}\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_1\\
&= x_2^{-1}\mathrm{d}\theta_2 x_1^{-1}\mathrm{d}x_1\\
&= w_{\theta_2} \wedge w_{x_1},
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 4.4.8

Toplam vektörlerinin bileşenleri olan koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri ile koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_1} x_2 = q + q x_2 \partial_{x_1} + (q-1)\vartheta_2 \partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{x_2} x_1 = q^2 + q x_1 \partial_{x_2} + (q-1)\vartheta_1 \partial_{\vartheta_2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_1}\theta_2 = q^2\theta_2\partial_{x_1},\\
&\partial_{x_2}\theta_1 = q^2\theta_1\partial_{x_2},\\
&\partial_{x_1}\vartheta_2 = \vartheta_2\partial_{x_1},\\
&\partial_{x_2}\vartheta_1 = \vartheta_1\partial_{x_2},\\
&\partial_{\theta_1}x_2 = q^2 x_2\partial_{\theta_1},\\
&\partial_{\theta_2}x_1 = q^2 x_1\partial_{\theta_2},\\
&\partial_{\theta_1}\theta_2 = q + q\theta_2\partial_{\theta_1} + (q-1)(x_2\partial_{x_1} + \vartheta_2\partial_{\vartheta_1}),\\
&\partial_{\theta_2}\theta_1 = q^2 + q\theta_1\partial_{\theta_2} + (q-1)(x_1\partial_{x_2} + \vartheta_1\partial_{\vartheta_2}),\\
&\partial_{\theta_1}\vartheta_2 = q^2\vartheta_2\partial_{\theta_1},\\
&\partial_{\theta_2}\vartheta_1 = q^2\vartheta_1\partial_{\theta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}x_2 = qx_2\partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}x_1 = qx_1\partial_{\vartheta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}\theta_2 = q^2\theta_2\partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}\theta_1 = q^2\theta_1\partial_{\vartheta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}\vartheta_2 = q + q\vartheta_2\partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}\vartheta_1 = q^2 + q\vartheta_1\partial_{\vartheta_2}.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

İspat:

$$
\begin{aligned}
\partial_x x &= (\partial_{x_1} + \partial_{x_2})(x_1 + x_2)\\
&= \partial_{x_1}x_1 + \partial_{x_1}x_2 + \partial_{x_2}x_1 + \partial_{x_2}x_2\\
&= 1 + qx_1\partial_{x_1} + (q-1)\vartheta_1\partial_{\vartheta_1} + q + qx_2\partial_{x_1} + (q-1)\vartheta_2\partial_{\vartheta_1}\\
&\quad + q^2 + qx_1\partial_{x_2} + (q-1)\vartheta_1\partial_{\vartheta_2} + 1 + qx_2\partial_{x_2} + (q-1)\vartheta_2\partial_{\vartheta_2}\\
&= 1 + q(x_1 + x_2)(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) + (q-1)(\vartheta_1 + \vartheta_2)(\partial_{\vartheta_1} + \partial_{\vartheta_2})\\
&= 1 + qx\partial_x + (q-1)\vartheta\partial_\vartheta,
\end{aligned}
$$

olup (3.21) deki $\partial_x x = 1 + qx\partial_x + (q-1)\vartheta\partial_\vartheta$ bağıntısıyla uyumlu olduğu görülür. (4.26) daki diğer bağıntıların doğru olduğu benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 4.4.9

Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntılar aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_1}\partial_{x_2} = \partial_{x_2}\partial_{x_1},\\
&\partial_{x_1}\partial_{\theta_2} = q^2\partial_{\theta_2}\partial_{x_1},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_2}\partial_{\theta_1} = q^2\partial_{\theta_1}\partial_{x_2}, \\
&\partial_{x_1}\partial_{\vartheta_2} = \partial_{\vartheta_2}\partial_{x_1}, \\
&\partial_{x_2}\partial_{\vartheta_1} = \partial_{\vartheta_1}\partial_{x_2}, \\
&\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} = q\partial_{\theta_2}\partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{\theta_1}\partial_{\vartheta_2} = q\partial_{\vartheta_2}\partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{\theta_2}\partial_{\vartheta_1} = q\partial_{\vartheta_1}\partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{\vartheta_1}\partial_{\vartheta_2} = q\partial_{\vartheta_2}\partial_{\vartheta_1}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

İspat:

$\partial_\theta^3 = 0,\ \ \partial_\vartheta^3 = 0$ bağıntıları kullanılarak sırasıyla

$$\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} = q\partial_{\theta_2}\partial_{\theta_1},\ \ \partial_{\vartheta_1}\partial_{\vartheta_2} = q\partial_{\vartheta_2}\partial_{\vartheta_1},$$

elde edilir.

$\partial_{x_1}\mathrm{d}=q^2\mathrm{d}\partial_{x_1}$ eşitliği kullanılarak yapılan uzun işlemler sonucu

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} = \partial_{x_2}\partial_{x_1},$$

elde edilir. Geri kalan bağıntılar da benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 4.4.10

Kısmi türevler ile koordinat fonksiyonlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_1}\mathrm{d}x_2 = q^2\mathrm{d}x_2\partial_{x_1} + (q^2-1)\mathrm{d}\theta_2\partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{x_2}\mathrm{d}x_1 = q^2\mathrm{d}x_1\partial_{x_2} + (q-1)\mathrm{d}\theta_1\partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{x_1}\mathrm{d}\theta_2 = q\mathrm{d}\theta_2\partial_{x_1}, \\
&\partial_{x_2}\mathrm{d}\theta_1 = q\mathrm{d}\theta_1\partial_{x_2}, \\
&\partial_{x_1}\mathrm{d}\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}\vartheta_2\partial_{x_1}, \\
&\partial_{x_2}\mathrm{d}\vartheta_1 = q^2\mathrm{d}\vartheta_1\partial_{x_2}, \\
&\partial_{\theta_1}\mathrm{d}x_2 = q^2\mathrm{d}x_2\partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{\theta_2}\mathrm{d}x_1 = q^2\mathrm{d}x_1\partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{\theta_1}\mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2\partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{\theta_2}\mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\theta_1\partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{\theta_1}\mathrm{d}\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}\vartheta_2\partial_{\theta_1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\theta_2} \mathrm{d}\vartheta_1 = q^2 \mathrm{d}\vartheta_1 \partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{\vartheta_1} \mathrm{d}x_2 = q^2 \mathrm{d}x_2 \partial_{\vartheta_1}, \\
&\partial_{\vartheta_2} \mathrm{d}x_1 = q^2 \mathrm{d}x_1 \partial_{\vartheta_2}, \\
&\partial_{\vartheta_1} \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2 \partial_{\vartheta_1}, \\
&\partial_{\vartheta_2} \mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\theta_1 \partial_{\vartheta_2}, \\
&\partial_{\vartheta_1} \mathrm{d}\vartheta_2 = q \mathrm{d}\vartheta_2 \partial_{\vartheta_1} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_2 \partial_{x_1} + \mathrm{d}\theta_2 \partial_{\theta_1}), \\
&\partial_{\vartheta_2} \mathrm{d}\vartheta_1 = q \mathrm{d}\vartheta_1 \partial_{\vartheta_2} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_1 \partial_{x_2} + \mathrm{d}\theta_1 \partial_{\theta_2}).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

İspat:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\vartheta} \mathrm{d}\vartheta &= (\partial_{\vartheta_1} + \partial_{\vartheta_2})(\mathrm{d}\vartheta_1 + \mathrm{d}\vartheta_2) \\
&= \partial_{\vartheta_1} \mathrm{d}\vartheta_1 + \partial_{\vartheta_1} \mathrm{d}\vartheta_2 + \partial_{\vartheta_2} \mathrm{d}\vartheta_1 + \partial_{\vartheta_2} \mathrm{d}\vartheta_2 \\
&= q \mathrm{d}\vartheta_1 \partial_{\vartheta_1} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_1 \partial_{x_1} + \mathrm{d}\theta_1 \partial_{\theta_1}) + q \mathrm{d}\vartheta_2 \partial_{\vartheta_1} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_2 \partial_{x_1} + \mathrm{d}\theta_2 \partial_{\theta_1}) \\
&\quad + q \mathrm{d}\vartheta_1 \partial_{\vartheta_2} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_1 \partial_{x_2} + \mathrm{d}\theta_1 \partial_{\theta_2}) + q \mathrm{d}\vartheta_2 \partial_{\vartheta_2} + (q-q^2)(\mathrm{d}x_2 \partial_{x_2} + \mathrm{d}\theta_2 \partial_{\theta_2}) \\
&= q(\mathrm{d}\vartheta_1 + \mathrm{d}\vartheta_2)(\partial_{\vartheta_1} + \partial_{\vartheta_2}) + (q-q^2)[(\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2)(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) + (\mathrm{d}\theta_1 + \mathrm{d}\theta_2)(\partial_{\theta_1} + \partial_{\theta_2})] \\
&= q \mathrm{d}\vartheta \partial_{\vartheta} + (q-q^2)(\mathrm{d}x \partial_x + \mathrm{d}\theta \partial_{\theta}),
\end{aligned}
$$

olup (3.23) teki $\partial_{\vartheta} \mathrm{d}\vartheta = q \mathrm{d}\vartheta \partial_{\vartheta} + (q-q^2)(\mathrm{d}x \partial_x + \mathrm{d}\theta \partial_{\theta})$ bağıntısıyla uyumludur. (4.28) deki diğer bağıntıların doğru olduğu benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 4.4.11

Kısmi türevler ile koordinat fonksiyonlarının ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki değişim bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_1} \mathrm{d}^2 x_2 = q^2 \mathrm{d}^2 x_2 \partial_{x_1} + (q^2 - 1)\mathrm{d}^2 \theta_2 \partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{x_2} \mathrm{d}^2 x_1 = q^2 \mathrm{d}^2 x_1 \partial_{x_2} + (q - 1)\mathrm{d}^2 \theta_1 \partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{x_1} \mathrm{d}^2 \theta_2 = q \mathrm{d}^2 \theta_2 \partial_{x_1}, \\
&\partial_{x_2} \mathrm{d}^2 \theta_1 = q \mathrm{d}^2 \theta_1 \partial_{x_2}, \\
&\partial_{x_1} \mathrm{d}^2 \vartheta_2 = q^2 \mathrm{d}^2 \vartheta_2 \partial_{x_1}, \\
&\partial_{x_2} \mathrm{d}^2 \vartheta_1 = q^2 \mathrm{d}^2 \vartheta_1 \partial_{x_2}, \\
&\partial_{\theta_1} \mathrm{d}^2 x_2 = \mathrm{d}^2 x_2 \partial_{\theta_1}, \\
&\partial_{\theta_2} \mathrm{d}^2 x_1 = \mathrm{d}^2 x_1 \partial_{\theta_2}, \\
&\partial_{\theta_1} \mathrm{d}^2 \theta_2 = q \mathrm{d}^2 \theta_2 \partial_{\theta_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\theta_2}\mathrm{d}^2\theta_1 = q\mathrm{d}^2\theta_1\partial_{\theta_2},\\
&\partial_{\theta_1}\mathrm{d}^2\vartheta_2 = \mathrm{d}^2\vartheta_2\partial_{\theta_1},\\
&\partial_{\theta_2}\mathrm{d}^2\vartheta_1 = \mathrm{d}^2\vartheta_1\partial_{\theta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}\mathrm{d}^2x_2 = q^2\mathrm{d}^2x_2\partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}\mathrm{d}^2x_1 = q^2\mathrm{d}^2x_1\partial_{\vartheta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}\mathrm{d}^2\theta_2 = q^2\mathrm{d}^2\theta_2\partial_{\vartheta_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}\mathrm{d}^2\theta_1 = q^2\mathrm{d}^2\theta_1\partial_{\vartheta_2},\\
&\partial_{\vartheta_1}\mathrm{d}^2\vartheta_2 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_2\partial_{\vartheta_1} + (q^2-q)\mathrm{d}^2x_2\partial_{x_1},\\
&\partial_{\vartheta_2}\mathrm{d}^2\vartheta_1 = q^2\mathrm{d}^2\vartheta_1\partial_{\vartheta_2} + (q^2-q)\mathrm{d}^2x_1\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

İspat:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\vartheta}\mathrm{d}^2x &= (\partial_{\vartheta_1}+\partial_{\vartheta_2})(\mathrm{d}^2x_1+\mathrm{d}^2x_2)\\
&= \partial_{\vartheta_1}\mathrm{d}^2x_1 + \partial_{\vartheta_1}\mathrm{d}^2x_2 + \partial_{\vartheta_2}\mathrm{d}^2x_1 + \partial_{\vartheta_2}\mathrm{d}^2x_2\\
&= q^2\mathrm{d}^2x_1\partial_{\vartheta_1} + q^2\mathrm{d}^2x_2\partial_{\vartheta_1} + q^2\mathrm{d}^2x_1\partial_{\vartheta_2} + q^2\mathrm{d}^2x_2\partial_{\vartheta_2}\\
&= q^2(\mathrm{d}^2x_1+\mathrm{d}^2x_2)(\partial_{\vartheta_1}+\partial_{\vartheta_2})\\
&= q^2\mathrm{d}^2x\partial_{\vartheta},
\end{aligned}
$$

olup (3.24) teki $\partial_{\vartheta}\mathrm{d}^2x = q^2\mathrm{d}^2x\partial_{\vartheta}$ bağıntısıyla uyumludur. (4.29) daki diğer bağıntıların doğru olduğu benzer şekilde gösterilebilir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, temelde Z_3-dereceli kuantum süper uzaylar üzerine kurgulandı. Z_3-dereceli kuantum süper uzayların elemanları *3d kuantum süper vektör* olarak adlandırıldı ve bu vektörlerin toplamının da bir *3d kuantum süper vektör* olması için toplanan vektörlerin bileşenleri arasında sağlanması gereken şartlar ortaya kondu. Bu şartları sağlayan temsili matrisler ortaya konularak elde edilen yapı örneklendirildi. Elde edilen yapının bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterildi. Daha sonra, koordinat fonksiyonları olarak kabul edilen toplam vektörünün bileşenlerinin birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri, Cartan-Maurer 1-formları ve kısmi türevleri tanımlanarak bunlar arasındaki değişim bağıntıları bulundu. Sonuç olarak, elde edilen yapı için bir diferansiyel geometri yapısı oluşturuldu.[1]

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, ileriki çalışmalara katkı sağlaması bakımından önemli olması beklenmektedir. Tezde elde edilen bağıntıların Z_3-dereceli kuantum süper uzaya etki eden 3*3 boyutlu Z_3-dereceli $GL_q(2|1)$ kuantum süper grup yapısının ve devamında bu grup yapısının diferansiyel geometrisinin oluşturulmasına katkı sağlaması beklenmektedir.

---

[1] Bu çalışmada elde edilen bulgular aşağıdaki sempozyumda bildiri olarak sunulmuştur.

Aydın, İ. 2019. Addition of Z3 Graded Quantum Super Space Elements And Its Hopf Algebra. Presented at the 4th International Symposium on Innovative Approaches in Engineering and Natural Sciences, 22-24 Kasım 2019, Samsun.

Aydın, İ. 2019. A differential Calculus On The Addition of Z3 Graded Quantum Super Space Elements. Presented at the 4th International Symposium on Innovative Approaches in Engineering and Natural Sciences, 22-24 Kasım 2019, Samsun.

6. KAYNAKLAR

Abe, E., 1977. Hopf Algebras. Cambridge University Press, Cambridge.

Abramov, V., Bazunova, N. 2002. Algebra of differential forms with exterior differential $d^3 = 0$ in dimension one. Proceedings of the Sixth International Wigner Symposium, 2: 603-609.

Celik, S. 1998. Differential geometry of the – superplane. ***Journal of Physics A: Mathematical and General***, 31: 9695-9701.

Celik, S., 2002. Z_3 -graded differential geometry of the quantum plane. ***Journal of Physics A: Mathematical and General***, 35: 6307-6318.

Celik, S. 2016. A Differential Calculus on Z_3 -Graded Quantum Superspace ℝ q (2|1). ***Algebras and Representation Theory***, 19.3 713-730.

Chung, W.S. 1994. Quantum Z_3 -graded space. ***Journal of Mathematical Physics***, 35: 2497-2504.

Drinfeld, V. G. 1986. Quantum groups. Proc. ICM, Berkeley, 798-820.

El Baz, M., El Hassouni, A., Hassouni, Y., Zakkari, E.H. 2004. $d^3 = 0, d^2 = 0$ differential calculi on certain noncommutative (super) spaces. ***Journal of Mathematical Physics***, 45: 2314-2322.

Faddeev, L., Reshetikhin, N., Takhtajan, L. 1987. Quantisation of Lie groups and Lie algebras. Preprint LOMI.

Kassel, Christian. 1995. Quantum Groups. Springer-Verlag New York, Inc.

Kerner, R. 1996. Z_3 -graded exterior differential calculus and gauge theories of higer order. ***Letters in Mathematical Physics***, 36: 441-454.

Kerner, R. 2015. Ternary generalization of Heisenberg's algebra. In ***Journal of Physics: Conference Series*** (Vol. 624, No. 1, p. 012021). IOP Publishing.

Kerner, R., Abramov, V. 1999. On certain realizations of q-deformed exterior differential calculus. ***Reports on Mathematical Physics***, 43: 179-194.

Le Roy B. 1996. A Z_3 -graded generalization of supermatrices. ***Journal of Mathematical Physics***, 37: 474-483.

Manin, Yu I. 1988. Quantum groups and noncommutative geometry. Montreal University Preprint CRM-1561.

Manin, Yu I. 1989. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup. ***Commun. Math. Phys***. 123163-175.

Soni, S.K. 1991. Differential calculus on the quantum superplane. ***Journal of Physics A: Mathematical and General***, 24: 619-624

Wess, J., Zumino, B. 1990. Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. ***Nucl. Phys. B, Proc. Suppl***., 18: 302-312.

Woronowicz, S.L. 1987. Compact matrix pseudogroups. ***Communications in Mathematical Physics***, 111: 613-665.

Woronowicz, S.L. 1989. Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups). ***Communications in Mathematical Physics***, 122: 125-170.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: İshak AYDIN
Doğum Tarihi ve Yeri: 08.08.1988 Çaykara

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: ishakaydin@yandex.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2013
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Trabzon Affan Kitapçıoğlu Lisesi	2005

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	İshak AYDIN
ÖĞRENCİ NO	14804501
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2019/2020
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	
PROGRAM	Doktora
TEZ KONUSU	**Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER UZAYIN ELEMANLARININ TOPLAMI ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP**
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	74
BENZERLİK ORANI	%24
RAPORLAMA TARİHİ	29/01/ 2020

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 74 sayfalık kısmına ilişkin, 29/01/2020 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☒ ~~Alıntılar hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

İshak AYDIN
29/01/2020

Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP **Tez Danışmanı** 29/01/2020	**Prof. Dr. Sedat İLHAN** **Anabilim Dalı Başkanı V.** 29/01/2020

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.

KGK-FRM-340/00