TRABZON ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

# VEKTÖR UZAYLARININ ÖĞRETİMİNE YÖNELİK ÖĞRENME ORTAMININ TASARLANMASI, UYGULANMASI VE DEĞERLENDİRİLMESİ

**DOKTORA TEZİ**

Gökay AÇIKYILDIZ

TRABZON
Haziran, 2019

**TRABZON ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI ANABİLİM DALI**

**MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

# VEKTÖR UZAYLARININ ÖĞRETİMİNE YÖNELİK ÖĞRENME ORTAMININ TASARLANMASI, UYGULANMASI VE DEĞERLENDİRİLMESİ

**Gökay AÇIKYILDIZ**

**Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Danışmanı**

**Doç. Dr. Temel KÖSA**

**TRABZON**

**Haziran, 2019**

**Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'ne**

**Bu çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 20 / 06 / 2019**

| | | |
|---|---|---|
| **Tez Danışmanı** | **: Doç. Dr. Temel KÖSA** | ................. |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Adnan BAKİ** | ................. |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Selahattin ARSLAN** | ................. |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Yasin SOYLU** | ................. |
| **Üye** | **: Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK** | ................. |

**Onay**

**Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.**

**Prof. Dr. Bülent GÜVEN**
**Enstitü Müdürü**

# ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

**Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Trabzon Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.**

**Gökay AÇIKYILDIZ**

**20 / 06 / 2019**

## ÖN SÖZ

Lineer cebir modern matematikte merkezi rol oynayan bir matematik dalıdır. Geometrik temsil ve sayısal tekniklerden soyut matematiğe kadar uzanan yelpazesiyle geniş bir kapsama sahip olan Lineer Cebir soyut yapısıyla öğrencilerin öğrenirken, öğretim elemanlarının öğretirken güçlük çektiği önemli bir derstir. Hem matematiğin diğer dalları ile hem de arkeoloji, demografi, elektrik mühendisliği, trafik analizi, fraktal geometri, görelilik ve tarih gibi birçok farklı sahada uygulama alanına sahiptir. Lineer cebirin gerek matematik gerekse günlük hayatımızla ilişkisi araştırmacıların dikkatini çekmiş ve yapılan çalışmalarla öğretimi üzerine teoriler oluşturulmuş, pedagojik prensipler belirlenmiş ve öğretimine yönelik birçok öneride bulunulmuştur. Bu çalışma kapsamında literatürde yer alan kuramlar ve öneriler göz önünde bulundurularak vektör uzayları öğretimine yönelik bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışma süresince danışmanlığımı üstlenerek gerek konunun belirlenmesinde gerekse çalışmanın yürütülmesi sırasında engin bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım değerli hocam, Doç. Dr. Temel KÖSA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisansa başladığım ilk günden bugüne kadar çalışmalarım sırasında görüş ve önerilerinden daima yararlandığım değerli hocalarım Prof. Dr. Adnan BAKİ, Prof. Dr. Selahattin ARSLAN, Prof. Dr. Bülent GÜVEN, yüksek lisans danışmanım Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK, Doç. Dr. Gönül MUHCU GÜNEŞ, Dr. Öğr. Üyesi Müjgan BAKİ, destekleri için Prof. Dr. Ayşegül Sağlam ARSLAN, Dr. Öğr. Üyesi Erdem ÇEKMEZ ve Mustafa GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Öğretmenlik kariyerim boyunca çalışmış olduğum kurumlarda her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen bütün öğretmen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Tasarlanan öğrenme ortamının uygulanması aşamasında gönüllü olarak uygulamalara katılan tüm öğretmen adaylarına teşekkürlerimi sunarım. Çalışmam süresinde maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve destek olan ablam Doç. Dr. Derya ÇELİK ve eşi Hasan ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak bugünlere gelmemde büyük emekleri olan annem Bilginur AÇIKYILDIZ babam Atilla AÇIKYILDIZ ile birlikte kardeşlerim Deniz AÇIKYILDIZ, Gökmen AÇIKILDIZ ablam Leyla GENÇER ve eşi Muhammet Murat GENÇER'e destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2019

Gökay AÇIKYILDIZ

# İÇİNDEKİLER

## ÖZET

### Vektör Uzaylarının Öğretimine Yönelik Olarak Öğrenme Ortamının Tasarlanması, Uygulanması ve Değerlendirilmesi

Lineer Cebir, sosyal bilimlerde ve fen bilimlerinde yaygın bir kullanım alanına sahip olup soyut yapısıyla öğrencilerin öğrenirken, öğretim elemanlarının öğretirken güçlük çektiği önemli bir derstir. Lineer cebir matris cebiri ve vektör uzayları teorisi olmak üzere iki bölümden oluşmakta olup vektör uzayları teorisi soyut yapısı nedeniyle öğrencilerin en çok güçlük yaşadığı bölümdür.

Bu çalışmayla, vektör uzayları öğretimine yönelik bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimleri üzerindeki etkisini ortaya koymaya çalışılmıştır. Çalışmada vektör uzayları teorisinin temel kavramları olan alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarına odaklanılmıştır. Tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılan çalışma birinci döngüde 51, ikinci döngüde 44 ve üçüncü ve son döngüde 11 ikinci sınıf matematik öğretmen adayı ile birlikte yürütülmüştür. İlk iki döngüden elde edilen bulgular yardımıyla tasarlanan öğrenme ortamına son hali verilerek araştırmanın final döngüsüne hazır hale getirilmiştir. Çalışmanın ikinci ve üçüncü problemlerine üçüncü döngüden elde edilen bulgular üzerinden cevap aranmıştır. Çalışma kapsamında derslerin bir bölümü sınıf ortamında bir bölümü de bilgisayar laboratuvarında gerçekleştirilmiştir. Bilgisayar laboratuvar derslerinde GeoGebra yazılımı kullanılarak oluşturulan şablonlar özel olarak hazırlanan çalışma yapraklarıyla birlikte uygulanmış ve her hafta düzenli olarak kavram odaklı ödevler dağıtılmıştır. 6 hafta süren uygulama öncesinde ve sonrasında öğrenci düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla sırasıyla başlangıç ve final testleri uygulanmıştır. Ayrıca bütün öğrencilerle süreç boyunca verilen ödevler üzerinden düşünme biçimlerini daha net bir şekilde tespit edebilmek için klinik mülakatlar yapılmıştır. Üçüncü döngü sonrasında ders öğretmeni ve öğrencilerin öğrenme ortamına ilişkin görüşlerini belirlemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüştür. Ayrıca süreç boyunca sınıf ortamındaki gözlemlerde alan notları tutulmuş ve dersler video kaydına alınmıştır. Öğrencilerin düşünme biçimlerini belirlemeye yönelik hazırlanan başlangıç ve final testleri nitel veri analizi kullanılarak soru soru analiz edilmiştir. Ödevler üzerinden yapılan klinik mülakatlar bilgisayar ortamında yazıya dökülmüş ve klinik mülakatların analizinden elde edilen veriler öğrencilerin final testine verdikleri cevapların yorumlanmasında kullanılmıştır. Üçüncü

döngü sonrasında yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır.

Araştırma bulgularının analizi sonucunda öğrenme ortamının tasarım ilkeleri teknoloji kullanımı, temsil dillerinin kullanımı, ödevler, çalışma yaprakları, grup çalışması ve ders öğretmeninin rolü başlıkları altında toplanmıştır. Bununla birlikte öğrenme ortamının öğrencilere görsellik, aktif olma, düzenli çalışma, sınava hazırlanma gibi birtakım fırsatlar sunmuştur. Vektör uzaylarının öğretimi için tasarlanan öğrenme ortamı öğrencilerin düşünme biçimleri üzerinde etkili olmuş ve öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlamıştır. Vektör uzayları ve alt uzaylar kavramı öğrencilerin analitik yapısal düşünme biçimini sergilemede en çok başarılı oldukları konular olup kullanılan dillerin öğrencilerin düşünme biçimleri üzerinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları zorluklar; harf sembollerinin kullanımı ve yorumlanması, elemanları fonksiyon olan bir vektör uzayından vektör belirleme, formalizm ve denklem sistemlerinin çözümü kümesini bulma ve yorumlama olarak belirlenmiştir. Ayrıca, uygulamalar esnasında verilen ödevlerin, öğrenci sınav kaygılarını azaltarak analitik yapısal düşünme biçimi sergilemelerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Lineer cebir öğretiminde, gelişen teknolojiler de göz önünde bulundurularak, tasarlanan öğrenme ortamı bir bütün olarak uygulanabileceği gibi belirli bir kavram odağında da uygulanabilir.

**Anahtar Kelimeler:** Lineer Cebir, Vektör Uzayları, Düşünme Biçimleri, Öğrenme Ortamı, Öğretmen Adayları

# ABSTRACT

**Designing, Implementing and Evaluating the Learning Environment for Teaching Vector Spaces**

Linear Algebra is widely used in social sciences and physical sciences., it is an important lesson that students have difficulty while learning and teachers have difficulty in teaching with its abstract structure. Linear algebra consists of two parts: matrix algebra and vector spaces theory. Vector spaces theory, because of its abstract structure, is the part that students have difficulties.

The aim of this study is to design, implement and evaluate a learning environment for teaching vector spaces. For this purpose, it is aimed to reveal the effect of the designed learning environment on students' modes of thinking. The study focused on the concepts of subspaces, linear combination, span, linearly dependence, linearly independence, basis and dimension that are the main concepts of vector spaces theory. Design-based research method was used as research method. Design-based research consisted of three cycles. There were 51 candidate teachers in the first cycle, 44 candidate teachers in the second cycle and 11 candidate teachers in the third cycle. The learning environment designed with the help of the findings obtained from the first two cycles was finalized and prepared for the final cycle of the research. The second and third problems of the study were searched on the basis of the findings obtained from the third cycle. Within the scope of the study, some of the courses were carried out in the classroom and some of them in the computer laboratory. In the computer laboratory courses, the templates created using GeoGebra software were applied together with specially prepared worksheets and concept-oriented assignments were regularly distributed to the students every week. Initial and final tests were applied respectively before and after 6 weeks of practice in order to determine students' modes of thinking. In addition, clinical interviews were conducted with all students in order to more clearly determine the modes of thinking through assignments given throughout the process. After the third cycle, semi-structured interviews were conducted in order to determine the views of the teachers and students about the learning environment. In addition, field notes were kept in the classroom observations throughout the process and the lessons were recorded on video. The initial and final tests prepared to determine students' modes of thinking were analyzed question by question using qualitative data analysis. The data obtained from the analysis of clinical interviews were used to interpret students' responses to the final test. Content analysis was used to analyze the data obtained from semi-structured interviews after the third cycle.

As a result of the analysis of the research findings, the design principles of the learning environment were gathered under the headings of the use of technology, use of modes of description, assignments, worksheets, group work and the role of the teacher. However, the learning environment provided students with opportunities such as visuality, being active, working regularly, preparing for the exam. The learning environment designed for teaching vector spaces contributed to the development of students' modes of thinking. The concept of vector spaces and subspaces are the subjects that students are most successful in exhibiting analytic-structural thinking and it is concluded that the mode of description used are effective on the students' modes of thinking. The difficulties the students have; use and interpretation of letter symbols, formalism, vector determination from a vector space whose elements are functions and finding and interpreting the set of solution of equation systems. In addition, it was concluded that the assignments given during the practices were effective in exhibiting analytic-structural thinking reducing the test anxiety of the students. In linear algebra teaching, considering the developing technologies, the designed learning environment can be applied as a whole or it can be applied in a specific concept focus.

**Keywords:** Linear Algebra, Vector Spaces, Thinking Mode, Candidate Teachers, Learning Environment

# TABLOLAR LİSTESİ

## ŞEKİLLER LİSTESİ

| Şekil No | Şekil Adı | Sayfa No |
|---|---|---|

# KISALTMALAR LİSTESİ

**NCTM** : National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

**LACSG** : Linear Algebra Cirruculum Study Group (Lineer Cebir Öğretim Programı Çalışma Grubu)

**ATLAST** : Augmenting the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools (Yazılım Araçlarını Kullanarak Lineer Cebir Öğretimini Geliştirme)

**TTA** : Tasarım Tabanlı Araştırma

**BCS** : Bilgisayar Cebir Sistemleri

**DGY** : Dinamik Geometri Yazılımları

**DMY** : Dinamik Matematik Yazılımları

**BT** : Başlangıç Testi

**FT** : Final Testi

**ÖX** : X Kodlu Öğrenci

**Ö** : Ders Öğretmeni

# 1. GİRİŞ

Lineer cebir, matematiğin; vektörler, vektör uzayları, lineer dönüşümler, lineer denklem sistemleri ve matrisleri inceleyen önemli çalışma alanlarından biridir. Analiz, analitik geometri, diferansiyel denklemler, cebir ve soyut cebir dersleri ile ilişkisi bakımından da oldukça önemli bir derstir. Sosyal bilimlerde ve fen bilimlerinde yaygın bir kullanım alanına sahip olan lineer cebirin anatomi, elektrik – elektronik mühendisliği, bilgisayar ve bilişim sistemleri, genetik, fizik ve istatistik gibi birçok alanda da uygulamaları vardır. Günümüzde bilim adamları ve mühendisler yakın bir geçmişe kadar hayal edemeyecekleri karmaşıklıkta problemlerin çözümünde lineer cebirden yararlanmaktadır. Lineer cebirde özdeğer ve özvektör kavramı, istatistikte faktör analizinde temel oluşturmakta olup elektrik devreleri, bilgisayar işlemcileri, programlama, kimyasal denklemlerin denkleştirilmesi ve bilgisayar tomografisi gibi farklı alanlarda lineer denklem sistemleri ve matrislerden yararlanılır. En çok tanınan ve kullanılan arama motoru olan Google da matris ve özdeğer kavramlarından yararlanarak geliştirdiği algoritmayla hızlı ve güvenilir aramaların gerçekleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Harel (1989a), lineer cebirdeki konuların kendi içinde olduğu kadar yaşamın her alanında bulunması gereken nitelikte olduğundan hareketle pek çok müfredat için gerekli bir ders olduğunu belirtmiştir.

Öğrencilere matematiksel soyutlama yapmayı öğrenme fırsatı sunan bir ders olması, lineer cebiri önemli kılan nedenler arasında gösterilmektedir (Harel, 1989; Kolman ve Hill, 2008). Matematiksel ispata giriş yapılan derslerden biri olan lineer cebir genellikle öğrencilerin matematiğin soyut yapısıyla ilk kez karşılaştıkları bir derstir. Lineer cebirin soyut matematiksel düşünmeyi ortaya koyan uygun bir ders olmasının bir nedeni de kavramların birçoğunun geometrik bir yorumlamaya sahip olmasıdır. Böylelikle lineer cebir, öğrencinin geometrik sezgisini geliştirmeye ve sonuçları görselleştirebilmesine yardımcı olur. Geometri ve cebir derste bir bütün içerisinde yer alır. Kavramların geometrik temsilleri cebirsel olarak gösterilir ve genelleme süreci de doğal olarak ortaya çıkar. Örneğin, $R^2$ ve $R^3$'teki vektörlerin özellikleri $R^n$'ye genişletilir ve daha sonra matrislerin ve fonksiyonların vektör uzaylarına genellenir (Williams, 2009).

Lineer cebir dersi genel olarak Matris Cebiri ve Vektör Uzayları Teorisi olmak üzere iki temel bölüme ayrılabilir. Matris Cebiri; matrisler, matrislerde işlemler ve özelliklerini, determinantlar ve lineer denklem sistemleri ile çözüm yöntemlerini içermektedir. Vektör Uzayları Teorisi; vektör uzayları, alt uzaylar, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban ve boyut gibi kavramları içermektedir. Çok daha soyut bir yapıya sahip olması sebebiyle vektör uzayları teorisi öğrencilerin en çok güçlük yaşadığı bölümdür.

Dorier'e (1995) göre lineer cebir öğrenme ile ilgili olarak öğrencilerin sahip olduğu zorluklar, onun soyut ve formal doğasının bir sonucudur.

Lineer cebir öğretimi üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde ağırlıklı olarak vektör uzayları ve lineer dönüşümler üzerinde durulduğu görülmektedir (Britton ve Henderson, 2009; Doğan, 2010; Donevska-Todorova, 2018; Dorier 1995a; Dorier 1998; Dorier, Robert, Robinet ve Rogalski, 2000; Dreyfus ve Hillel, 1998; Harel, 1987; Harel 1989b; Klasa, 2009; Pecuch-Herrero, 2000; Sierpinska, Dreyfus ve Hillel, 1999; Stewart ve Thomas, 2010). Araştırmaların vektör uzayları teorisi üzerinde yoğunlaşmasının sebebi, bu kavramların soyut bir yapıya sahip olması ve dolayısıyla hem öğrenmede hem de öğretmede güçlükler yaşanmasından kaynaklanmaktadır. Carlson'e (1993) göre öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun lineer cebir dersi alıncaya kadar ki matematiksel deneyimleri işlemsel ağırlıklıdır. Ancak lineer cebirin içeriği, öğrencilerin önceki hesaplama odaklı derslerine taban tabana zıt olacak şekilde, oldukça soyut ve formal bir yapıya sahiptir. Öğretilen matematiksel içeriğin doğasındaki bu değişimin sorunsuz bir şekilde işlemesi öğrenciler için çok zordur. Carlson (1993), kavramların öğrencilerin önceden öğrendiği matematiksel fikirlerle ilişkilendirilmeksizin, örnekler ve uygulamalara yer vermeden öğretildiğini ifade etmektedir. Bu yüzden öğrenciler erken bir şekilde aşina oldukları kavramları formalize edilmiş yeni kavramlarla ilişkilendirmek için mücadele etmektedir.

Robert ve Robinet (1989), öğrencilerin lineer cebir dersine ilişkin temel eleştirilerini formalizmin kullanımı, yeni tanımların çokluğu ve matematikte önceden bildikleriyle yeni öğrendikleri arasında bağlantı kuramamak olarak belirlemişlerdir. Dorier ve arkadaşları (2000) bunu "Formalizm zorluğu" olarak adlandırmış ve birçok durumda formalizm engelinin öğrenci zorluklarının nedeni olduğunu rapor etmiştir. Öğretmen ve öğrenciler, formalizmi öğrenme açısından oldukça zorlu bir engel olarak tanımlamaktadır. Öğrenciler adeta kendilerini yeni bir gezegendeymiş gibi hisseder ne var ki bu yeni dünyada kendilerine yol gösterecek yeteneklere sahip değillerdir. Öğretmenler, genellikle öğrencilerinin küme teorisi ve mantığın temel araçlarını düzensiz bir şekilde kullanmasından, Kartezyen geometrideki eksikliklerinden ve aynı zamanda vektör uzayları teorisinin temel kavramlarının geometrik temsillerini inşa edecek sezgileri kullanamamasından yakınmaktadırlar (Dorier vd., 2000). Britton ve Henderson (2009) alt uzay kavramına yönelik öğrenci zorluklarını inceledikleri çalışmalarında, ispat ve mantıkla ilgili harf sembollerinin kullanımı ve yorumlanmasında öğrencilerin zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir.

Hillel'e (2000) göre öğrencilerin lineer cebir dersindeki zorluklarının temel sebeplerinden biri ispat ve ispata dayalı teoriler konusundaki deneyimsizlikleridir.

Öğrencilerin ispata dayalı zorluklarının yanı sıra lineer Cebir dersi birçok yeni kavram ve bu kavramların özelliklerini içermektedir. Öğrencilerin mantık, küme teorisi ve ispata dayalı teoriler konusundaki eksikliklerine, lineer cebir dersinde karşılaştıkları yeni kavramlar ve dersin soyut yapısı eklenince öğrenciler için zorlu bir öğrenme sürecinin ortaya çıkacağını söylemek mümkündür. Bununla birlikte üniversite düzeyinde lineer cebir dersleri öğrencilerden kavramlarla ilgili belli durumlarda değil ($R^2$, $R^3$, 2x2 tipinde matrisler, …) en genel durumlarda (V vektör uzayı, lineer dönüşüm sınıfları, cebirsel yapılar, …) düşünme ve çalışmalarını istemektedir (Hillel, 2000). Ayrıca öğrencilerden bu yapılar üzerinde dönüşümler tanımlama, farklı şekillerde temsil etmeleri de beklenmektedir. Hillel (2000), lineer cebir dersindeki temel zorluklardan bir diğerini de derslerde ve kitaplarda kullanılan diller olarak ifade etmiş ve lineer cebirde kullanılan dilleri Geometrik, Cebirsel ve Soyut olmak üzere üç temel bölüme ayırmıştır. Her bir dil içerisinde vektörler, vektörler üzerindeki işlemler ve dönüşümler özel tanımlara ve gösterimlere sahiptir. Örneğin bir vektör geometrik dilde bir ok olarak, cebirsel dilde sayılardan veya sembollerden oluşan satır veya sütün matrisi ve soyut dilde bir vektör uzayının elemanı olarak sunulmaktadır. Sınıf içi öğretim yapılırken veya ders kitaplarında, kavramlar ve ilişkili süreçler tanımlanırken bu üç temsil dili bir arada kullanılır. Sürekli olarak birinden diğerine geçiş yapılır. Bu tanımlama ve temsil dilleri arasındaki ayırımı yapamayan bir öğrenci için birinden diğerine geçişi anlamak ve takip etmek temel zorluk nedenleri arasında yer almaktadır.

Sierpinska (2000), lineer cebirde kullanılan üç düşünme biçimi tanımlamıştır. Bu düşünme biçimleri Sentetik-Geometrik, Analitik-Aritmetik ve Analitik-Yapısal düşünme biçimleridir. Lineer cebirde öğrencilerin farklı tanımlama ve temsil dilleri ile ilgili anlamalarının gelişimi için Sierpinska (2000) bu üç temel düşünme biçiminin gelişimine ihtiyaç olduğunu dile getirmiştir. Sentetik düşünme biçimi ile analitik düşünme biçimleri arasında temel farklılıklar vardır. Bunlardan biri, sentetik düşünme biçiminde, öğrencilerin tanımlama yapmaksızın verilen matematiksel nesneleri betimlemeye çalışmasıdır; analitik düşünme biçimlerinde ise, öğrencilerin nesneleri tanımlarını ve özelliklerini kullanarak anlamaya çalışmasıdır (Sierpinska 2000). Bu düşünme biçimleri yukarıda açıklanan temsil dilleri ile açık bir şekilde ilişkilidir. Sentetik-geometrik düşünme biçiminde öğrencilerin kullandığı dil, $R^2$ ve $R^3$'ün geometrik dilidir. Analitik-aritmetik düşünme biçiminde öğrenciler $IR^n$ teorisinin cebirse dilini kullanırken, analitik-yapısal düşünme biçimine sahip öğrenciler genel soyut teorisinin soyut dilini kullanmaktadır (Turğut, 2010). Ancak tanımlanan düşünme biçimleri ve temsil dilleri tam olarak aynı şey değildirler. $IR^n$'de çalışan öğrencilerin birden fazla düşünme biçimini kullanması mümkündür. Analitik-yapısal düşünme biçimi en üst düzey düşünme biçimidir ve bu düşünme yapısına sahip bir öğrenci diğer düşünme biçimlerinin karakteristiklerini sergileyebilir.

Harel (1989a), öğrencilerin lineer cebir kavramlarını anlamada ve kullanmadaki temel güçlüklerinin nedenini, sağlam sezgisel bir temele dayandırılmaksızın soyut kavramların çok hızlı bir şekilde verilmesi olduğunu belirtmiştir. Yine, Harel (2000), yaptığı araştırmadan elde ettiği bulgulardan hareketle lineer cebir öğretimine ilişkin üç temel pedagojik prensip önermiştir. Bunlar; Somutluk, Gereklilik ve Genellenebilirlik prensipleridir. Somutluk prensibinde öğrenciler soyutlama yapmaya imkân veren somut modeller üzerinde çalışır. Gereklilik prensibi öğrencilerin aktif katılımlarının sağlandığı ve öğrenciler tarafından benimsenen eğitimsel aktiviteleri içerir. Genellenebilirlik prensibi ise somut model üzerinden yürütülen öğretimsel aktivitelerin öğrencilerin kavram ile ilgili genellemelere ulaşmasını amaçlar.

1990'lı yıllarda 16 matematik eğitimcisinin oluşturduğu Lineer Cebir Öğretim Programı Çalışma Grubu (LACSG; Linear Algebra Curriculum Study Group) yaptığı araştırmalar neticesinde lineer cebir öğretiminde yeni yaklaşımların benimsenmesini önermiştir. David Carlson, Charles Johnson, David Lay ve Duane Porter öncülüğünde kurulan grup, lineer cebir öğretiminin geliştirilmesine katkı sağlamayı ve bu konuya sağlam ve sürdürülebilir bir ilgi çekmeyi amaçlamıştır. Grup araştırmalara dayalı olarak (Harel, 1989a, 1989b, 1990) lineer cebiri öğretme ve öğrenmeyi kapsayan epistemolojik ve pedagojik düşünceleri, üyelerinin sahip olmuş olduğu büyük tecrübeleri ve lineer cebirle ilişkili diğer disiplinlerdeki araştırmacıların görüşlerini kaynak göstererek bir takım tavsiyelerde bulunmuştur. LACSG araştırma grubunun lineer cebir dersinin öğretimine yönelik tavsiyeleri Carlson ve diğerleri (1993) tarafından şu şekilde sıralanmıştır.

1. Lineer cebir ders içeriği farklı disiplinlerin ihtiyacına cevap verecek şekilde düzenlenmeli
2. Lineer cebir dersi en az iki dönemlik bir ders olarak yürütülmeli
3. İlk dönem lineer cebir derslerinde ispata çok fazla vurgu yapılmamalı
4. Lineer cebir derslerinde teknolojiden yararlanılmalı
5. Geometrik temsillerden yararlanmalı
6. Ders içeriği matrislerde işlemler, lineer denklem sistemleri ve çözümü, determinantlar, $R^n$ de lineer birleşim, lineer bağımsızlık, taban, alt uzaylar, … şeklinde düzenlenmelidir.

Yukarıdaki öneriler arasında, içinde bulunulan döneme göre en dikkat çekici ve yenilikçi önerilerden biri, lineer cebir derslerinde teknolojiden yararlanılması fikridir. Basit fiziksel veya görsel temsillerin olmadığı konularda matematik, öğrenciler için zorlaşır. Bilgisayar kullanımının yararlı olabileceği yollardan biri, birçok önemli matematiksel nesne ve süreç için somut temsiller sağlamaktır (Dubinsky, 1997). Birçok araştırmacı lineer cebir öğretiminde teknoloji desteğinin oldukça önemli olduğunu vurgulamakta (Aydın, 2007; Aydın, 2009a; Aydın, 2009b; Dikovic, 2007; Dorier, 2002; Harel 2000; Pecuch-Herrero, 2000; Wu, 2004) ve araştırmacılar tarafından birçok farklı uygulama önerilmektedir. Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, 2000 yılında yayımladığı raporunda teknolojik araçların görsel gücünün, öğrencilerin tek başlarına yapamayacakları görselleştirmeleri kolaylaştırabileceğini belirtmiştir (NCTM, 2000). Gelişen teknolojilerden bir tanesi olan bilgisayar ortamında kullanılan dinamik geometri yazılımları (DGY), öğrencilerin elektronik ortamlarda soyut matematiksel kavramları somutlaştırabilmelerine olanak sağlamaktadır. Böylelikle öğrenciler; hesaplama, varsayımda bulunma, ispat yapma ve genelleme gibi soyut işlemleri etkin bir şekilde gerçekleştirebilmektedir (Baki, Güven ve Karataş, 2002).

Bu çalışma kapsamında vektör uzayları ile ilgili temel kavramların (vektör uzay, alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımsızlık, taban ve boyut) öğretimine yönelik literatürde ortaya koyulan öğrenci zorlukları ve somut öneriler göz önünde bulundurularak teknoloji destekli bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu genel amaç göz önünde bulundurulduğunda mevcut çalışmada aşağıdaki araştırma problemlerine cevap aranmıştır:

1. Vektör uzaylarının öğretimi için hazırlanan öğrenme ortamının tasarım ilkeleri nelerdir?
2. Vektör uzaylarıyla ilgili temel kavramların (alt uzay, germe, lineer bağımsızlık, baz, boyut) öğretimi için tasarlanan öğrenme ortamı, öğrencilerin düşünme biçimlerini nasıl etkilemektedir?
3. Vektör uzayı öğretimi için tasarlanan zenginleştirilmiş öğrenme ortamına ilişkin;
   3.a. Uygulama öğretmenin görüşleri nelerdir?
   3.b. Öğrencilerin görüşleri nelerdir?

## 1. 1. Araştırmanın Amacı

Öğrenciler için öğrenmeyi sağlayacak öğretim yöntemini seçmek, buna uygun planlar yapmak öğrenme ortamı tasarımı olarak adlandırılabilir (Güven ve Karataş, 2004). Teknolojik gelişmeler, yeni öğrenme yaklaşımları ve geleneksel öğretmen rollerinin değişmesi öğrenme ortamlarının tasarımını önemli kılmış ve büyük ölçüde değiştirmiştir.

Lineer cebir, doğası gereği soyut bir yapıya sahip olmasının yanı sıra farklı temsil dilleri ile birlikte farklı tanım ve notasyonları içeren bir derstir. Lineer cebir öğretiminde yıllarca, soyuttan somuta doğru bir öğretme yaklaşımına sahip olan Bourbaki stili benimsenmiştir. Lineer cebirin formal yapısıyla birlikte Bourbaki stilinin derse çok soyut bir giriş yapması öğrenciler için temel zorluklardan biri olarak ortaya çıkmıştır. 1980'li yılların başından itibaren çoğu eğitimci ve ders kitabı yazarı bu yaklaşımdan vazgeçerek yeni yaklaşımları benimsemeye başlamıştır. Yeni yaklaşımda lineer cebir dersine geometrik bir formda başlangıç yapılıyor, daha sonra $R^2$, $R^3$, $R^n$ ve V vektör uzayında kavramların cebirsel ve soyut temsillerine yer veriliyordu. Her ne kadar lineer cebir öğretiminde somuttan soyuta doğru yeni yaklaşımlar benimsenmişse de geleneksel öğretime dayalı sınıf ortamlarında öğrencilerin vektör uzayı teorisi ile ilgili anlamalarını güçlendirmek pek mümkün olamamıştır (Dogan, 2001; Hillel ve Sierpinska, 1994). Öğrencilerin vektör uzayları ile ilgili kavramları öğrenmede aktif rol alabilecekleri ve daha derin anlamlara sahip olması, öğrenme ortamlarının tasarlanmasına bağlıdır.

Konuyla ilgili literatürde yapılan çalışmalar doğrultusunda lineer cebir öğretimine yönelik farklı prensipler ve öneriler ortaya konmuştur. Bu önerilerin dikkate alınması ve prensiplerin karşılanması için, belli bir yapıya sahip olacak şekilde özel olarak hazırlanmış materyallere ve teknolojik tasarımlara yer verilmelidir. Öğretiminde farklı temsil dillerinin kullanıldığı vektör uzayları teorisinde bu dillerin bir arada yer aldığı ve öğrencilerin temsil dilleri arasındaki farkı, diller arasındaki geçişleri anlamasına olanak sağlayacak şekilde kullanılacak etkinliklerin öğrenciler için etkili bir öğrenme aracı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin sadece konuları pekiştirmesinin dışında temsil dillerini kullanmasına imkân veren ve kendi düşünme biçimlerini yansıtabildikleri ödevler de konunun öğretiminde önemli bir yere sahiptir. Kuşkusuz, etkinliklerle birlikte dinamik geometri yazılımlarıyla hazırlanmış, vektör uzayları kavramlarının somutlaştırılmasına yardımcı ve etkinliklerle uyumlu olacak şekilde hazırlanmış materyaller de öğrencilerin anlamasına katkıda bulunacaktır. Ayrıca öğrenme ortamı tasarlanırken benimsenen tasarım ilkeleri araştırma sonucunda düzenlenerek son halini alacak ve bu tip bir öğrenme ortamının sahip olması gereken özellikler ortaya koyulacaktır.

Bu çalışmanın amacı vektör uzayları ile ilgili temel kavramların (alt uzay, lineer birleşim, lineer bağımsızlık, germe, baz) öğretimine yönelik teknoloji destekli öğrenme ortamın tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesidir. Bu amaç doğrultusunda ve kuramsal yapı çerçevesinde teknoloji destekli bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Tasarlanan bu öğrenme ortamı gerçek sınıf ortamlarında uygulanarak tasarım ilkelerinin oluşturulması, öğrencilerin vektör uzayı teorisinin temel kavramlarıyla ilgili düşünme biçimleri üzerindeki etkisi, öğrencilerin ve ders öğretmeninin bu öğrenme ortamına ilişkin görüşleri incelenmiştir.

## 1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Literatürde öğrencilerin lineer cebir öğrenmeye ilişkin zorlukları olduğunu ortaya koyan birçok çalışma bulunmaktadır (Britton ve Henderson, 2009; Harel, 1989a; Hillel, 2000; Dorier, 1995 Dorier vd., 2000). Hillel'e (2000) göre lineer cebir kavramları üç farklı tanımlama ve ilişkili olarak temsil biçimine sahiptir. Kavramlar ve ilişkili süreçlerin tanımlanmasında bu üç temsil biçiminin kullanımı, bu tanımlama ve temsil biçimlerinden birinden diğerine geçiş öğrencilerin temel zorluk nedenleri arasında yer almaktadır. Sierpinska (2000) sentetik-geometrik, analitik-aritmetik, analitik-yapısal olmak üzere lineer cebirde kullanılan üç düşünme biçimi tanımlamıştır. Lineer cebirde öğrencilerin farklı tanımlama ve temsil biçimleri ile ilgili anlamalarının gelişimi için Sierpinska (2000) üç temel düşünme biçiminin gelişimine ihtiyaç olduğunu ifade etmiştir.

Lineer cebir dersi soyut yapısından dolayı birçok öğrenci tarafından zor bir ders olarak tanımlanmaktadır (Dorier ve Sierpinska, 2001). Dorier ve Sierpinska (2001), öğrencilerin lineer cebir dersini neden zor bulduklarını üç sebeple açıklamaktadır:

1. Lineer cebirin aksiyomatik yaklaşımı birçok öğrenciye gereksiz görünmektedir. Birinci sınıf üniversite öğrencilerinin ulaşabileceği tüm lineer problemler, vektör uzayları teorisini kullanmadan çözülebilir. Bu nedenle, vektör uzayları teorisinin öğrenciler için entelektüel bir gereklilik olarak algılanma şansı çok azdır.
2. Lineer cebir dersi dillerin ve temsillerin patlayıcı bir birleşimidir. Doğrular ve düzlemler geometrik dili; n boyutlular, matrisler ve lineer denklemler cebirsel dili; vektör uzayları ve lineer dönüşümler soyut dili yansıtmaktadır. Öğretmenler ve ders kitapları bu diller ve temsil biçimleri arasında dönüşümler yapmak ve geçerliliklerini tartışmak için yeterli zamanı ayırmadan sürekli olarak hareket ederler.
3. Lineer cebir çok yüksek seviyede bilişsel bakış açısı gerektirmektedir. En genel seviyede, lineer cebirin anlaşılması, çeşitli diller (örneğin matris teorisi dili ve vektör uzay teorisi dili), bakış açıları (Kartezyen ve parametrik) ve arasında hareket etmede belli bir düzeyde "bilişsel esneklik" gerektirir.

Vektör uzayı teorisinin öğretiminde entelektüel ihtiyacın karşılanmasına yönelik yapılması gerekenlere Harel (2000) gereklilik prensibinde ders içi etkinliklerinin ve problem çözme aktivitelerinin önemine vurgu yapmıştır. Dorier ve Sierpinska'nın (2001) ifade ettiği öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin kaldırılması veya en aza indirilmesi için lineer cebir öğretiminde Harel'in prensiplerinin karşılanmasının, temsil dilleri arasındaki geçişlerin uygun ve anlaşılır şekilde yapılmasının, lineer cebirin gerektirdiği bilişsel bakış açısına sahip olabilmek için farklı düşünme biçimlerinin varlığına ve gelişiminin sağlanmasına ihtiyaç olduğunu söylemek mümkündür. Bununla birlikte yapılan uluslararası araştırmalar öğrencilerin çoğunlukla işlemsel bilgilerini geliştirdiklerini ve düşünme seviyelerini üst bir seviyeye ilerletemediklerini göstermektedir (Alves Dias ve Artigue, 1995; Hillel ve Sierpinska, 1994; Stewart, 2008). Bu nedenlerle, öğrencilerin lineer cebir ile ilgili temel kavramlardaki eksiklikleri alandaki yeni yaklaşım ve öneriler dikkate alınarak geliştirilecek öğrenme-öğretme ortamlarına ihtiyaç vardır.

Literatür incelendiğinde lineer cebir öğretimi üzerine yapılan çalışmaların matematiğin diğer alanlarıyla kıyaslandığında çok daha sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. 1990'lı yıllarda, 16 matematik eğitimcisinin oluşturduğu LACSG çalışma grubunun etkisiyle lineer cebir öğrenme-öğretme üzerine çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu araştırmaların birçoğu "On the Teaching of Linear Algebra" adlı kitapta toplanmıştır. Ancak bu tarihten sonra lineer cebir ile ilgili sınırlı sayıda araştırma yapılmıştır (Stewart ve Thomas, 2007). Lineer cebir öğretimi ile yapılan çalışmalara daha çok yabancı araştırmacıların öncülük ettikleri görülmektedir (Britton ve Henderson, 2009; Donevska-Todorova, 2018; Dorier, 2000; Gueudet-Chartier, 2004; Harel, 2000; Pecuch-Herrero, 2000; Sierpinska, 2000; Stewart ve Thomas, 2010; Tabaghi ve Sinclair, 2013). Yurt içinde lisansüstü düzeyde yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu daha çok analiz konularına odaklanırken lineer cebir odaklı (Birinci, 2016; Konyalıoğlu, 2003; Soylu, 2005; Turğut, 2010) çalışma sayısı daha azdır. Diğer taraftan lineer cebir öğretimine yönelik lisans düzeyinde yapılan çalışmaların çok azı ders içeriğine odaklanırken (Harel, 2000) birçok çalışma lineer cebir öğretiminde öğrenci zorluklarına odaklanmıştır (Britton ve Henderson, 2009; Dorier, 1995a; Dorier vd 2000; Harel, 1989a; Hillel, 2000). Bu bağlamda içerik odaklı olarak yürütülen bu çalışmanın gerek yurt içi gerekse yurt dışında lineer cebir öğretimine destek olması açısından gerekli ve önemli olduğu söylenebilir.

Yapılan çalışmalar, lineer cebir öğretimine yönelik bazı somut öneriler ortaya koymuştur (Atlast Project, 1995; Carlson, Johnson, Lay ve Porter, 1993; Doğan-Dunlap, 2010; Harel, 2000; Tabaghi, 2012). Bu öneriler lineer cebir öğretiminde teknolojiye yer verilmesi, geometrik temsillerin kullanılması, öğrenci merkezli bir öğretimin benimsenmesi ve daha fazla somutlaştırma tekniklerinin kullanılması olarak sıralanabilir. Bu somut öneriler dikkate alındığında öğrencilerin anlamada en fazla zorluk çektiği vektör uzayı teorisiyle ilgili temel kavramların öğretimine yönelik öğrenme ortamlarının tasarlanması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Harel'in prensiplerini karşılamaya destek olması açısından öğrenme-öğretme ortamlarında MATLAB, Derive gibi Bilgisayar Cebir Sistemi (BCS) yazılımlarına veya Cabri ve GeoGebra gibi dinamik matematik/geometri yazılımlarına yer verilebilir. BCS ile karşılaştırıldığında GeoGebra daha kolay kullanıma sahip bir yazılımdır ve basit kullanışlı bir ara yüze sahiptir. Dinamik geometri yazılımları öğrencilerin matematik projelerini, çoklu temsilleri, deneyim ve keşfederek öğrenme yoluyla desteklemektedir (Kutluca ve Zengin, 2011). Diğer taraftan dinamik geometri yazılımları öğrencilerin formalizmin zorluğundan kaçınmalarına olanak sağlamakla birlikte kendi matematiksel nesnelerini inşa etmelerine yardımcı olmaktadır (Tabaghi, 2012). Dahası, gelişen teknolojinin getirdiği yenilikler vektör uzayları ile ilgili temel kavramların öğretiminde geçmişte görselleştirilmesi mümkün olmayan veya kısıtlı bir görsel destek sağlayan kavramlar içinde birçok yeniliğin sağlanmasını ve uygulanmasını mümkün kılmaktadır. Böylelikle yazılımların desteklediği öğrenme ortamlarında vektör uzaylarına ilişkin temel kavramların geometrik temsilleri üzerinde çalışılabilir. Bu yolla belli bir kavramı hem geometrik hem de aritmetik-cebirsel olarak temsil etmek mümkündür. Böylece öğrencilere soyut fikirler üzerinde çalışmak üzere somut bir içerik sunulabilir. Öğrenciler bu içerikle etkileşim sırasında bir kavramın geometrik ve cebirsel temsillerinden hareketle değişmez nitelikteki özellikleri tanımlayabilirler ve bu onları söz konusu ilişki ve özelliği kavramsallaştırmaya ve daha çok boyutlu uzaylara genellemeye götürebilir. Baki (2002), bilgisayar donanımlı ortamlarda küçük gruplarla çok daha verimli ve işlevsel öğrenme ortamlarının oluşturulabileceğini, böylece karmaşık problemlerin farklı çözüm yolları geliştirerek çözülebileceğini, mantıksal çıkarımlarda bulunarak genellemeler yapılabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca, bilgisayar yazılımlarını kullanarak matematiksel modelin veya ilişkilerin sayısal ve grafiksel olarak görüntülenmesinin sağlayabileceğini ifade ederek, teknoloji, birlikte çalışma ve matematiksel modelleme arasındaki ilişkinin önemine vurgu yapmaktadır. Bu bağlamda teknoloji kullanımı, soyut lineer Cebir kavramlarını somutlaştırabilmeye, bu kavramların birbirleri ile ilişkilerini keşfetmeye ve bu kavramların cebirsel özellikleri ile ilgili genelleme yapmaya olumlu etkiler yapacağından lineer Cebir öğretimi açısından önemlidir.

Sonuç olarak, (i) vektör uzayı teorisinin soyut ve teorik doğası (Dorier vd, 1995), (İİ) yeni tanımların çokluğu (Dorier vd. 2000; Hillel, 2000), (iii) formalizm sorunu (Dorier, 2000), (iv) küme teorisi, mantık ve ispatla ilgili öğrencilerin eksiklikleri (Britton ve Henderson, 2009; Dorier, 2000; Hillel, 2000), (v) var olan temsil dillerinin özensizce kullanılması (Hillel, 2000), (vi) geometrik temsillere kısıtlı veya yanlış yorumlara neden olacak bir şekilde yer verilmesi (Nardi, 1997; Sierpinska, 2000) ve (vi) üniversite seviyesinde lineer Cebir derslerinin öğrencilerden kavramlar ve ilişkili prosedürler hakkında belli durumlarda değil en genel durumlarda düşünme ve çalışmalarını istemesi (Sierpinska, 2000) lineer Cebir öğrenme ve öğretme de karşılaşılan temel zorluklardır. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek için yapılan öneriler göz önüne alındığında öğrencilerin soyutlama yapmasına imkân veren görselleştirme tekniklerinin ve geometrik temsillerin kullanıldığı, farklı düşünme biçimlerini harekete geçirecek ve öğrencileri bir üst düşünme biçimine taşıyacak ders içi sunum ve etkinliklerin yer aldığı teknoloji destekli zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamının tasarlanmasına ihtiyaç vardır.

Bu tez çalışmasının kuramsal çerçevesini Hillel (2000), Harel (2000) ve Sierpinska'nın (2000) teorileri oluşturmaktadır. Bu kuramsal çatı altında hazırlanacak ders içi sunumlar, etkinlikler, düzenli olarak verilen görevler ve dinamik matematik yazılımı ile oluşturulmuş şablonlar, zenginleştirilmiş öğrenme ortamının temel yapısını oluşturup öğrencilerin vektör uzayı kavramları ile ilgili anlamalarında önemli bir yere sahip olacağı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin düşünme biçimleri üzerine daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde belli kavramlara odaklandıkları görülmüştür (Çelik, 2015; Doğan-Dunlap, 2010). Bu araştırma kapsamında vektör uzaylarının temel kavramları olan alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut konuları bir bütün olarak ele alınmıştır. Araştırma bu yönüyle literatürde yer alan diğer çalışmalardan farklılaşmaktadır.

Araştırmada belli amaçlar göz önünde bulundurularak vektör uzayı konusunun öğretimi için bir öğrenme ortamının tasarlanmış, belli tasarım prensipleri belirlenmiş ve döngüsel olarak uygulanarak değerlendirilmiştir. Dolayısıyla izlenen yol, karşılaşılan sorunlar ve nedenleri ile yapılan düzenlemeler göz önüne alınarak ortaya konulan işleyiş, lineer Cebir dersini veren öğretim elemanları tarafından kendi derslerinde kullanılabilir ya da tasarım prensiplerini dikkate alarak içeriği kendileri düzenleyebilirler. Bu bağlamda araştırma sonucunda ortaya konulan işleyişin lineer Cebir öğretimine önemli ölçüde katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Lineer cebir öğretimine yönelik olarak hazırlanan teknoloji destekli zenginleştirilmiş öğrenme ortamının değerlendirilmesi ve geliştirilmesinde lineer cebir dersini veren öğretmenlerin ve geleceğin öğretmenleri olacak öğretmen adaylarının görüşlerini belirlemek önem arz etmektedir. Araştırmada ortaya çıkacak sonuçlar, bundan sonraki dönemlerde lineer Cebir dersini öğrenme ve öğretme sürecinde gerek öğretmen adayları gerekse öğretmenler için yaşanan zorlukların giderilmesi ve öğrenme ortamının geliştirilmesi için yapılması gereken düzenlemelere katkı sağlaması ve buna benzer diğer çalışmalara örnek teşkil etmesi bakımından oldukça önemlidir.

### 1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Kuramsal çerçeveye uygun olarak tasarlanan öğrenme ortamı; vektör uzayları, alt uzaylar, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut kavramları ile sınırlı tutulmuştur.
2. Bu araştırma Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde 6 haftalık uygulama süreci, 11 öğrenci ve 2017-2018 eğitim öğretim yılı bahar dönemi ile sınırlıdır.

## 1. 4. Araştırmanın Varsayımları

Araştırmada bulguların etkin bir şekilde çözümlenmesi ve yorumlanması bakımından;

1. Mülakatlara cevap veren öğrencilerin samimi oldukları,
2. Öğrencilerin araştırma bünyesinde uygulanan testlerde gerçek düşüncelerini ortaya koydukları varsayılmıştır.

## 1. 5. Tanımlar

*Bilgisayar Cebir Sistemleri:* Bilgisayar Cebir Sistemleri (BCS) matematiksel nesnelerin gösteriminde kullanılan semboller üzerinde işlem yapmayı içeren bilgisayar sistemleridir.

*Dinamik Geometri Yazılımları:* Dinamik Geometri Yazılımları (DGY) kavramların görsel temsillerini kullanmak ve görsel düşünmeyi sağlamak için kavramların geometrik yapılarını dinamik olarak değiştirmeyi mümkün kılan yazılımlardır.

*Dinamik Matematik Yazılımları:* BCS ile DGY'nin sahip olduğu karakteristik özellikleri bir arada sunan, program içerisinde oluşturulan matematiksel nesnelerin geometrik ve cebirsel temsillerini aynı anda sunan bilgisayar yazılımlarının ortak adı (Hohenwarter ve Preiner,2007).

# 2. LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde, araştırmanın kuramsal çerçevesine ve literatürde yer alan ilgili çalışmalara ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

## 2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu bölümde, araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturan Harel'in tasarım prensiplerine, Sierpinska'nın düşünme biçimlerine ve Hillel'in lineer cebir öğretiminde kullanılan temsil dillerine yer verilmiştir.

### 2.1.1. Harel Tasarım Prensipleri

Harel (1989b), tam deneysel olarak yürüttüğü çalışmasında mühendislik fakültesinde öğrenim gören 72 üniversite ikinci sınıf öğrencisinin lineer cebir dersindeki başarılarını karşılaştırmıştır. A grubu olarak adlandırılan grupta yalnızca kavramlara ilişkin soyut tanımlamalara ve bunlar üzerinden yürütülen cebirsel işlemlere yer verilmiştir. Buna bir bakıma geleneksel cebir öğretimi de denilebilir. B grubunda ise kavramlara ilişkin soyut tanımlama ve işlemlerin yanı sıra bu kavramların geometrik yorumlarına da yer verilmiştir. Dört haftanın sonunda iki gruba vektör uzay kavramı üzerine bir test uygulanmıştır. Harel, uygulamadan elde ettiği öğrenci cevaplarını sınıflandırırken altı değişkeni göz önünde bulundurmuştur. Bunlar; geometrik tanım (GT), cebirsel tanım (CT), doğru cevap (DC), yanlış cevap (YC), doğru gerekçelendirme (DG) ve yanlış gerekçelendirme (YG) şeklinde belirtilmiştir. GT ve CT kategorileri arasında karşılaştırma yapıldığında, beklenildiği gibi B grubunda GT kategorisindeki cevaplar A grubuna göre daha sık görülmüş, A grubunda ise CT kategorisindeki cevaplar B grubuna oranla daha sık kullanılmıştır. DC ve YC kategorilerinde yapılan karşılaştırma sonucunda B grubundaki öğrencilerin daha çok "doğru cevap" verdiklerini göstermiştir. Son olarak doğru ve yanlış gerekçelendirme açısından yapılan kıyasta A grubunun nerdeyse yarısı YG kategorisinde cevap verirken B grubundaki öğrencilerin dörtte birinden daha azı YG kategorisinde cevap vermiştir. Sonuç olarak iki grup başarıları açısından karşılaştırıldığında, B grubundaki öğrenciler lineer cebir kavramları ile ilgili testteki sorulara daha fazla doğru cevap vermiştir. Ayrıca açıklamalarını desteklemede daha fazla geometrik yorum kullanmıştır. B grubunda A grubundan daha çok geometrik tanımın ortaya çıkması, A grubunda is B grubundan daha çok cebirsel tanımlamaların ortaya çıkması gerçeği, öğrenciler tarafından seçilen tanımlama türünün ve eğitim yaklaşımının birbirinden bağımsız olmadığını doğrulamaktadır. Diğer taraftan geometrik yaklaşımlarla yapılan somutlaştırmaların öğrencilerin anlamasına katkı sağladığı ortaya çıkmaktadır.

Bu sonuçlardan hareketle Harel (2000), lineer cebir öğretimine yönelik üç temel pedagojik prensip önermiştir. Bu prensipler;

1. Somutluk
2. Gereklilik
3. Genellenebilirlik

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi bu pedagojik prensiplerin kapsamı açıklanacaktır.

*Somutluk Prensibi:*

Somutluk prensibinin temel ilkesi şu şekilde özetlenebilir;

> Öğrenciler verilen bir modelden belli bir matematiksel yapıya (modelin ilişkili olduğu) soyutlama yapabilmesi için modelin bileşenlerinin öğrencilerin gözünde kavramsal bir nesne olması gerekir. Bir başka deyişle modelin bileşenleri öğrenciler için üzerinde zihinsel prosedürlerin yürütülebileceği bir girdi olarak görülmelidir (Harel, 2000, s.180).

Soyut matematiksel bir kavramı, somut bir kavram üzerinden öğretebilmek için bu somut kavram, öğrencilerin soyut kavramın doğasını anlamalarına olanak verecek düzeyde olmalıdır (Harel, 2000'den akt. Aydın, 2007, s. 217). Somutluk prensibi, öğrencilerin kendileri için somut olan bir içerikte belli bir kavramla ilgili anlamaları inşa edebileceği fikrine dayanmaktadır. Örneğin, analizde türev kavramından bahsedebilmek için öğrencinin fonksiyon kavramını bir matematiksel nesne olarak algılaması, $P_4(R)$ üzerinde lineer birleşim kavramından bahsedebilmek için öğrencilerin bu kümenin elemanı olan her bir polinomu bir nesne-vektör olarak görmesi gerekmektedir. Genel vektör uzayı kavramının daha az soyut olduğu düşünülen yapılar üzerinden genelleme yoluyla öğretilmeye çalışıldığı birçok durumda bu ilke dikkate alınmamaktadır. Çünkü birçok durumda öğrenciler daha az soyut olduğu düşünülen yapının bileşenlerini, üzerinde işlem yapabilecekleri zihinsel bir kavram olarak henüz yapılandırmamıştır.

Vektörlerin lineer bağımsızlığının daha az soyut olduğu düşünülen bir durumda ele alındığını düşünelim: $P_4(R)$ de $A = \{x, x^2, x^3, x^4\}$ kümesinin lineer bağımsızlığını incelendiği durumda öğrenciler ilk olarak;

$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$ eşitliğini yazarlar. Ancak;

1. Fonksiyon kavramı bir vektör olarak görülmediği
2. Eşitliğin sağ tarafındaki sıfır vektörü reel sıfır olarak düşünüldüğü
3. Yukarıdaki eşitlik iki polinomun eşitliği olarak algılanmadığı

için birçok öğrenci yukarıdaki ifadeyi x'e bağlı bir denklem olarak görmektedir.

Sonuç olarak bu bağlam öğrencilerin için somut bir bağlam değildir. Başka bir deyişle bir vektör olarak fonksiyon kavramı öğrenciler için somut değildir. Çünkü öğrenci modelin bileşenlerini tam olarak kavramsallaştıramamıştır. Somutluk prensibinin temel dayanağı öğrenciler somutlaştırdıkları içerikteki bir kavramı anlamalarını kendileri inşa eder. Böyle bir içerik hem yeterli kavram imajlarını oluşturmak için bir dayanak hem de ileride soyutlama yapmak için bir kaynak olarak hizmet eder.

Öğrencilerin somutlaştırdıkları içerikteki bir kavramla ilgili anlamalarını inşa edilebilmeleri öğrenme-öğretme ortamı tasarlamada temel kriter olmalıdır. Bu noktadan hareketle Harel (2000), soyut lineer cebir kavramlarının geometrik biçimlerine vurgunun öğrencilerin kavramlarla ilgili sağlam temel oluşturmalarına katkı sağlayacağı sonucuna ulaşmıştır. Ancak Harel bu noktada lineer cebir derslerinin geometri ile başlaması gerektiği ve cebir kavramlarının geometri üzerinden genellemelerle inşa edilebileceği şeklinde bir çıkarımın ise doğru olmayacağı konusunda ısrarcıdır. Örneğin, lineer bağımlılık kavramını $R^2$ veya $R^3$ deki uygulamalardan hareketle aynı doğru veya düzlem üzerinde bulunma şeklinde genel vektör uzaylarına genellemesi mümkün değildir. Cebir kavramlarını biçimlendirmeden önce geometri ile giriş yapıldığında birçok öğrencinin kavrama ilişkin anlamaları geometrik vektörler dünyasında sınırlı kalacak ve genel duruma taşınamayacaktır. Sonuç itibari ile Harel'in (2000) bahsettiği somutluk sadece geometrik temsillerle sınırlı değildir. Önemli olan öğrencinin kavramsallaştırdığı dolayısıyla onun için somut olan bir model üzerinden anlamlandırma yapmaktır.

*Gereklilik Prensibi:*

Gereklilik prensibinin temel ilkesi şu şekilde özetlenebilir;

Öğrenciler için öğrenme, öğretilecek şeyin öğrenciler tarafından bir ihtiyaç olarak görülmesidir. Burada 'ihtiyaç' kelimesiyle kastedilen sosyal veya ekonomik olmaktan ziyade entelektüel bir ihtiyaçtır. (Harel, 2000, s.185)

Gereklilik ilkesi Piaget'in varsayım ilkesine dayanmaktadır. Bu varsayım aynı zamanda Brousseau (1997) tarafından ayrıntılarıyla açıklanmış "Öğretici Durumlar Teorisince" benimsenmiştir (Soylu, 2005). Var olan kavramları düzenlemek için temel araç doğru problem çözme aktiviteleridir. Bu aktiviteler öğrencinin problem çözmek için var olan kavramları uygulaması ve bilişsel bir çatışmayla karşılaştığı zaman bu kavramları düzenlemesidir. Böyle bir çatışma veya Piaget'in dediği gibi dengesizlik öğrenciyi sorgulamaya itebilir ve problemi çözmek için yeni çözüm yolları arayabilir. Bu bilişsel çatışmalar ve öğrenciler tarafından keşfedilen çözümler ileri düzeyde kavramlara yönelik aşamalı bir geçiş oluşturur. Böylece bu prensibin arkasındaki fikir şöyle ifade edilebilir;

eğitimsel ortamlar öğrencilerin matematiksel kavramları soyutlaştırabilmesine neden olacak uygun kısıtlamaları(çatışmaları) içermelidir.

Gereklilik prensibi, öğrencilerin lineer cebir dersine aktif olarak katılmalarını ifade eder (Aydın, 2007) ve eğitimsel aktiviteler bu prensibin hayata geçirilmesinde önemli yer almaktadır. Eğitimsel aktivitelerin öğrenciler tarafından gerçekçi ve kabul görülmüş problem durumlarını sunması gerekmektedir. Aktiviteler boyunca öğrencilerin bir problemin çözümünde veya bir bilişsel çatışmanın çözümlenmesinde nasıl sonuca gideceklerini hissetmeleri gerekmektedir. Ders içerisinde yer verilen problemler öğrencilerin kavramları kolayca kavramalarına yardımcı olabilir ancak kavramlar arasındaki ilişkileri görmelerine yardımcı olmayabilir. Özel bir örnekle veya etkinliklerle öğrencilerin kavramlar arasındaki bağlantıları hissetmeleri ve görmelerini sağlamak kavramsal bir anlamanın oluşmasına zemin hazırlar ve böylece gereklilik prensibi uygulanmış olur. Benzer durumları lineer cebir dersinden de vermek mümkündür. Örneğin, vektör uzayı olma aksiyomlarının sadece $R^n$ nin özellikleriyle gösterilmesi vektör uzayı tanımını farklılaştırarak gereklilik prensibine aykırı bir örnek oluşturur. $R^n$ nin özellikleri ile vektör uzayı aksiyomlarının gösterimi öğrenciler için son derece anlaşılırdır ancak bu durum matematikteki varsayımsal yaklaşımı benimseyen ileri düzey öğrencilerin ilgisini çekmenin garantisini vermeyebilir. Bu bakımdan vektör uzayları aksiyomları gösterirken belli özelliklere sahip çember, düzlem, doğrular ve soyut matematiksel nesnelerden oluşan örneklere bir arada yer verilerek dikkat çekme ve öğrencilerin öğretilmek istenen şeyi bir ihtiyaç olarak görmeleri sağlanabilir. Bu nedenle vektör uzayları ile ilgili verilecek örneklerin birçok farklı durumu kapsayacak, öğrencilerin ilgisini çekecek ve kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılmasına olanak sağlayacak şekilde düzenlenmesi gerekecektir. Bununla birlikte, gereklilik ilkesinin belirtilmesi sadece o konunun günlük hayatla ilişkisinin kurulması ile değil aynı zamanda anlatılan konunun diğer matematiksel kavramlardaki yerinin ve öneminin vurgulanması şeklinde de olabilir (Soylu, 2005)

*Genellenebilirlik Prensibi*

Somutluk ve gereklilik prensipleri üçüncü prensip olan Genellenebilirlik prensibi ile tamamlanır. Gereklilik prensibinin temel ilkesi şu şekilde özetlenebilir;

> Öğretim soyut bir model ile ilgili olduğunda, yani somutluk prensibini sağlayan bir model, bu modeldeki eğitimsel aktiviteler kavramların genellenebilirliğine olanak sağlaması ve teşvik etmesi gerekmektedir. (Harel, 2000, s. 187)

Bu prensip öğrenme sürecinden çok öğretim materyallerinin seçimine ilişkin didaktik kararlarla ilişkilidir. Öğretim somut bir modelle ilişkilendirildiğinde bir somutluk prensibini destekleyici bir durum olur, bu model üzerinden yürütülen öğretimsel aktiviteler kavramın genellenebilirliğini sağlayabilir. Bu süreçte somutluk ilkesini karşılamak amacıyla yapılan etkinlikler önemlidir. Kullanılan somut modeller, soyut kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasına ve özümsenmesine olanak verecek şekilde düzenlenmelidir (Turğut, 2010). Model üzerinden yürütülen çalışmalar ile genel kavrama ulaşılabilmelidir. Modelin çok spesifik olduğu ve genel kavramla ortak noktasının çok sınırlı olduğu durumlarda genelleme gerçekleşmeyebilir. Geometrik içerikte aynı doğru ve düzlem üzerinde olma şeklinde tanımlanan lineer bağımlılık fikri genel vektör uzaylarına kolaylıkla genellenebilir bir durum değildir. Ancak boyut kavramı ile ilgili olarak R de iki vektörün, $R^2$ de üç vektörün lineer bağımlı olduğunun gösterilmesinin ardından n boyutlu bir vektör uzayında n+1 tane vektörün daima lineer bağımlı olduğu fikri geometrik içerikten başlanarak genel vektör uzaylarına genellenebilir bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Harel ‘in (2000) önermiş olduğu pedagojik prensiplerden, bu çalışma kapsamında tasarlanan öğrenme ortamının temel bileşenlerinin (çalışma yaprakları, GeoGebra şablonları, ödevler) hazırlanmasında ve uygulanmasında yararlanılmıştır. Türkiye’de yapılan çalışmalar incelendiğinde Harel’in (2000) prensiplerine yer veren çalışmalar mevcuttur (Aydın, 2007; Turğut, 2010). Turğut (2010), teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yeteneklerini incelediği çalışmasının öğretim sürecinde Harel (2000)’in öğretim ilkelerini baz almış ve öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimini amaçlamış ve teknoloji destekli öğrenme ortamının öğrencilerin uzamsal yeteneklerine etkisini incelemiştir. Bu araştırmada farklı olarak kuramsal çatıda Hillel’in (2000) temsil dillerine yer verilerek öğrenme ortamı tasarımı yapılmış ve öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisi incelenmiştir. Aydın (2007), bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir dersinin öğrenilmesine etkisini belirlemek amacıyla Harel’in (2000) pedagojik prensiplerini öğretim dizaynı ile birleştirmiştir. Bu çalışmada da yalnızca çalışma yaprakları, şablonlar ve ödevler hazırlanırken değil aynı zamanda öğrenme ortamı tasarım ilkeleri belirlenirken de bu prensiplerden yararlanılmıştır.

Harel’in (2000) prensiplerinin karşılanması bakımından bu çalışmada hazırlanan çalışma yapraklarında yer verilen örneklerin öğrencilerin kavramların doğasını anlayabilecekleri, birçok farklı durumu bir arada bulunduracak şekilde kapsamlı ve somuttan soyuta doğru bir yaklaşıma sahip olmasına dikkat edilmiştir. Ancak somutluk prensibinin tam olarak karşılanması uygun somut modellere yer verilmesine ve bu modellerin öğrencilerin genelleme yapmasına olanak sağlamasına bağlıdır. Bu bakımdan çalışma yapraklarıyla etkileşimli olarak teknolojiden yararlanılarak geometrik temsillere yer verilmesi görsel olarak zengin bir içerik sunarak öğrencilerin ilgisini çekebileceği ve ihtiyaçlarının karşılanmasında onlara yardımcı olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca bilgisayar destekli bir öğrenme ortamı, ödevler, çalışma yaprakları ve grup çalışmasıyla yapılacak bir öğrenmenin öğrencilerin aktif olarak dersi takip etmesine olanak sağlayarak kavramlara yönelik birçok farklı problem durumunun incelenmesine yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bu bakımdan ele alındığında öğrenme ortamı aynı zamanda problem çözme aktivitesi olarak görülebilir ve bu nedenle gereklilik prensibinin karşılanmasında önemli bir etken olarak düşünülmektedir.

Genellenebilirlik prensibinin karşılanmasının ilk iki prensibin başarılı bir şekilde uygulanmasıyla gerçekleşeceğini söylemek mümkündür. Özellikle soyutlama yapmaya olanak veren somut örneklere iyi bir şekilde araştırma sonrasında yer vermek ve genelleme yapmaya imkân vermeyen örneklerin neler olduğunu net bir şekilde ortaya koyarak ayırımı yapmak önemlidir. Bu nedenle hem ders içi etkinlik ve ödevlerde hem de ders sonrası için verilen görevlerde bu önem göz önünde bulundurularak öğrencilerden genelleme yapmalarına imkân verecek eğitimsel aktivitelerin yapılmasına karar verilmiştir.

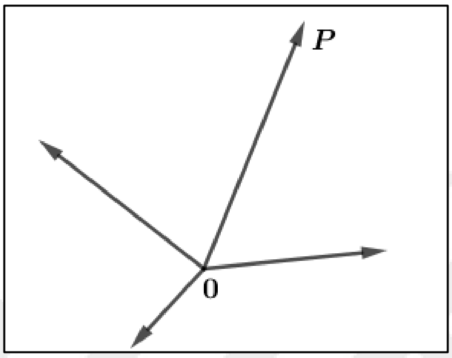
### 2. 1. 2. Hillel Temsil Dilleri

Lineer cebir öğrenmedeki temel zorluklardan biri Hillel (2000) tarafından derslerde ve kitaplarda kullanılan dillerin çeşitliliği olarak ifade edilmiştir. Hillel (2000) lineer cebirde kullanılan dilleri üç temel bölüme ayırmıştır.

- *Genel soyut teorinin "Soyut dili"*
  Genel teorinin kavramlarını ve dilini kullanır (vektör uzayları, alt uzaylar, lineer bağımsızlık, germe, boyut, çekirdekleri içeren)
- *$R^n$ teorisinin "Cebirsel dili"*
  $R^n$ de daha spesifik bir teorinin kavramlarını ve dilini kullanır (sıralı n'liler, matrisler, rank, denklem sistemlerinin çözümü, satır uzayları gibi)
- *İki ve üç boyutlu uzayların "Geometrik dili"*
  $R^2$ ve $R^3$ uzaylarının kavram ve dilini kullanır (yönlü doğru parçası, noktalar, düzlemler, geometrik dönüşümler gibi).

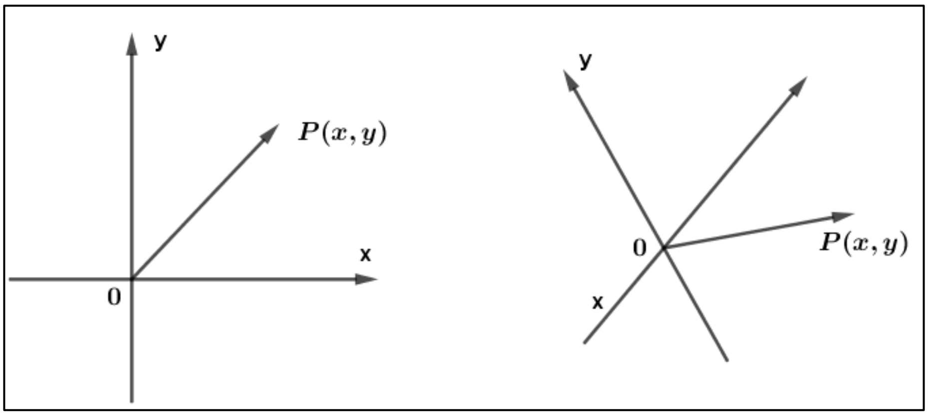
Bir arada bulunan bu diller bazen birbirinin yerine kullanılabilir, ancak kesinlikle birbirine eşdeğer nitelikte değillerdir. Her bir dilde vektörler, vektör işlemleri ve dönüşümler özel tasvirlere, terminolojiye ve gösterime sahiptir. Sınıf içi öğretim yapılırken veya ders kitaplarında, kavramlar ve ilişkili süreçler tanımlanırken bu üç temsil dili bir arada kullanılır. Sürekli olarak birinden diğerine geçiş yapılır. Bu tanımlama ve temsil dilleri arasındaki ayırımı yapamayan bir öğrenci için bir dilden diğerine geçişi anlamak ve takip etmek temel zorluk nedenleri arasında yer almaktadır (Britton ve Henderson, 2009; Hillel, 2000).

Geometrik dile ait olarak vektörler ile ilgili tasvirler; yönlü doğru parçaları, oklar ve düzlem veya uzayda noktalar olarak yapılabilir. Geometrik dil, sentetik (coordinate-free) ve analitik (coordinate geometry) tanımları içerir. Sentetik dilde sıfırdan farklı vektörler yönlü doğru parçaları (oklar) ile temsil edilir. Bu yüzden büyüklüğe ve yöne sahiptirler. Bir vektör başlangıç ve bitiş noktası dikkate alınarak OP veya u notasyonu ile Şekil 1'deki gibi temsil edilir. Sıfır vektörü ise sıfır büyüklüğe ve yöne sahip olmayan O noktası ile temsil edilir. Toplama ve skalerle çarpma geometrik olarak sırasıyla "paralelkenara tamamlama" ve vektörün boyunu yönü aynı kalacak veya ters dönecek şekilde uzatma veya kısaltma olarak tanımlanmaktadır.




Şekil 1. Vektörlerin geometrik gösterimi

Analitik tanımlar hem geometrik hem de aritmetik özelliklere sahiptirler. Geometrik dilde vektörler iki veya üç boyutlu uzayda koordinat sisteminde oklar ile temsil edilir. Genellikle Şekil 1'deki gibi koordinat sistemlerindeki gösterimleri kullanılır. Bununla birlikte daha genel koordinat sistemleri de kullanılabilir (Şekil 2) ki bu taban fikrinin anlaşılmasına da yardımcı olabilir.




Şekil 2. Koordinat sistemlerinde vektörlerin gösterimi

Toplama ve skalerle çarpma geometrik dilde olduğu gibi geometrik olarak tanımlanabilir. Alternatif olarak bitiş noktalarının koordinatları dikkate alınarak işlemler tanımlanabilir ve geometrik olarak iki vektörün toplamının bu vektörler yardımı ile oluşturulan paralelkenarın köşegeni olduğu gösterilebilir.

$R^n$ nin cebirsel dilinde vektörler bileşenleri reel sayılar olan $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ şeklindeki sıralı n'liler ile temsil edilir. Vektörel toplama ve skalerle çarpma vektörleri temsil eden bileşenler kullanılarak cebirsel biçimde tanımlanmıştır. Soyut dilde u, v gibi harflerle temsil edilen vektörler vektör uzayının birer elemanıdır. Toplama ve skalerle çarpma aksiyomları sağlayan ikili işlemler olarak tanımlanmıştır. Tablo 1'de vektörler ve vektörler işlemlerin farklı temsil dilleri ile kullanımları örneklendirilmiştir

Tablo 1. Hillel Temsil Dillerinde Vektörler ve Vektörel İşlemler

| | Vektörler | Vektör işlemleri |
|---|---|---|
| Geometrik Dil | 2 boyutlu düzlem veya 3 boyutlu uzayda vektörler yönlü doğru parçası olarak tanımlanır ve oklar ile temsil edilir. | Toplama ve skalerle çarpma geometrik olarak tanımlanabilir. Örneğin; Geometrik olarak iki vektörün toplamının bu vektörler yardımı ile oluşturulan paralelkenarın köşegenidir. |
| Cebirsel Dil | Vektörler bileşenleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reel sayılar olmak üzere $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gibi sıralı n'liler ile temsil edilir. | Vektörel toplama ve skalerle çarpma vektörleri temsil eden bileşenler kullanılarak cebirsel biçimde tanımlanmıştır. Örneğin; $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+ y_1, \ldots, x_n+ y_n)$ |
| Soyut Dil | Vektörler, bir vektör uzayının elemanları olarak tanımlanır ve u, v,.. ile temsil edilir. | Toplama ve skalerle çarpma vektör uzayı olma şartlarını sağlayan ikili işlemler olarak tanımlanmıştır. |

Hillel'in (2000) üç başlık altında ele aldığı diller incelendiğinde vektörlerin $R^2$ veya $R^3$ uzayında ifade edilmesi için düzlemlerin çizilerek gösterilmesi / temsil edilmesi geometrik dili, bu vektörlerin sıralı ikililer ya da üçlüler ile temsil edilmesi veya parametreye bağlı ifade edilmesi cebirsel dili, vektör uzaylarının bir parçası olarak u ve v vektörlerinin tanımlanması ise soyut dil olarak örneklendirilebilir.

Hillel'in (2000) tanımlamış olduğu diller ders içerisinde ve ders kitaplarında sürekli olarak kullanılır ve sürekli olarak birinden diğerine geçişler yapılmaktadır. Bu dilleri arasındaki ayırımı yapamayan bir öğrenci için birinden diğerine geçişi anlamak ve takip etmek temel zorluk nedenleri arasında yer almaktadır. Literatür incelendiğinde benzer olarak Medina (2000), öğrencilerin formal tanımlarda kullanılan dil veya sembolleri anlamada zorluklar yaşadığını ifade etmiş, Britton ve Henderson (2009) öğretmenlerin belirli bir kavramın öğretiminde ayırımı net bir şekilde yapmaksızın diller arasında geçişler yapıyor olmasını öğrenciler açısından zorluk olduğunu belirtmiştir. Bu zorluklar göz önünde bulundurulduğunda lineer cebir öğretimine yönelik olarak hazırlanan eğitimsel faaliyetlerde dillerin kullanımına özen göstermenin son derece önemli olduğu anlaşılmaktadır. Bu araştırmada öğrencilerin farklı dilleri tanıması ve kullanması açısından ders içi sunumların, etkinliklerin ve ders sonrasında verilen ödevlerin farklı dilleri içermesine yönelik olarak ders içeriği hazırlanmıştır. Her bir kavrama yönelik geometrik, cebirsel ve soyut dili içerek şekilde hazırlanan etkinlikler ve ödevler teknoloji birlikte öğrencilere uygulanarak dillerin kullanımına ve diller arasında geçişlerin yapılmasına olanak sağlanması amaçlanmıştır.

### 2. 1. 3. Sierpinska Düşünme Biçimleri

Sierpinska (2000), öğrencilerin lineer cebir derslerinde sergiledikleri düşünme biçimlerini incelemiştir. Çalışma sonunda ortaya koyulan düşünme biçimleri Sentetik-Geometrik, Analitik-Aritmetik ve Analitik-Yapısal olmak üzere üç başlık altında ele alınmıştır. Sierpinska (2000), düşünme biçimlerini ilk olarak geometrik ve analitik olarak ikiye ayırmış, daha sonra ise analitik düşünme biçimi başlığı altında aritmetik ve yapısal düşünme arasındaki farklılıkları ifade etmiştir.

Sentetik-Geometrik düşünme biçiminin temel özellikleri geometrik temsillerin kullanımı ve kullanılan kavramlarla ilgili tanımlara yer verilmemesidir. Örnek olarak, sentetik geometrik düşünme biçimine sahip öğrenciler tarafından verilen bir doğru düzlemde belli bir şekli olan nesne olarak görülür ve bu doğrunun özelliklerinden bahsedilebilir. Ancak bu özellikler doğruyu tanımlamaktan ziyade yalnızca betimlemek olacaktır. Oysaki bir kavramla ilgili bir tanım yapmak için onun özellikleri hakkında çok daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır ve bunun için farklı bir düşünme biçiminin kullanımına ihtiyaç vardır. Analitik düşünme biçiminde bir doğru belli bir özellikte noktalar kümesi veya boyutu verilen bir uzaydaki vektörler olarak tanımlanır. Matematiksel nesneler hakkında sentetik ve analitik düşünme biçimleri arasında temel farklılık; sentetik modda nesneler bir bakıma direk olarak zihne aktarılır ve daha sonra betimleye çalışılır, analitik modda ise nesneler dolaylı olarak verilir ve sadece kendi özelliklerinin tanımıyla inşa edilir. Bu nedenle sentetik düşünme biçimi öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarında sıklıkla kullandıkları pratik düşünme şekli, analitik düşünme biçimi de teorik düşünme şekli olarak düşünülebilir (Sierpinska, 2000).

Sentetik ve analitik düşünme biçimleri arasındaki bir diğer fark, her bir düşünme biçiminin kendine özel temsilleri kullanmasıdır. Genel olarak sentetik düşünme biçiminde geometrik temsiller kullanılırken analitik düşünme biçiminde ise sayısal ve cebirsel temsiller kullanılır. Örneğin sentetik düşünme biçiminde öğrenciler $R^2$ ve $R^3$ teki vektörlerin konumlarını göz önünde bulundurarak onların lineer bağımsız olup olmadıklarına karar verebilirler. Sentetik düşünme biçiminde öğrenciler vektörleri ve onların lineer bağımsızlıklarını betimler fakat tanımlayamazlar (Doğan-Dunlap, 2010). Bununla birlikte analitik düşünme biçiminde öğrenciler lineer bağımsızlığın formal tanımını kullanılırlar.

Sierpinska (2000) analitik düşünme biçimini analitik-aritmetik ve analitik-yapısal olmak üzere ikiye ayırır. Analitik-aritmetik düşünme biçimi hesaplamaları sadeleştirmek ve doğru yapmayı hedeflerken, analitik-yapısal düşünme biçimi kavramlar hakkındaki bilgimizi genişletmeyi hedefler. Eğer a'nın b ye eşit olduğunu biliyorsak, a ve b hakkında çok daha fazlasını bilmemiz gerekir. Analitik-aritmetik düşünme biçiminde matematiksel bir nesne hesaplamaya imkân tanıyan bir formül ile tanımlanır, analitik-yapısal düşünme biçiminde ise aksiyomlar kümesi tarafından en iyi şekilde tanımlanmıştır (Sierpinska 2000, s. 234). Örneğin, analitik-aritmetik düşünme biçimi bakış açısında önemli olan regüler matrislerin terslerinin hesaplanmasına imkân veren uygun formül ve teknikleri doğru bir şekilde kullanmaktır. Ancak, analitik-yapısal düşünme biçiminde bir matrisinin tersine sahip olma özelliğinin tanımlamasının önemi vardır. Analitik-yapısal düşünme biçiminde, akıl yürütme, bir sistem içindeki kavramlar arasındaki mantıksal ve anlamsal bağlantıya dayanır; kavramlar arasındaki ilişkiler, daha genel kavramlarla ilişkilerine dayanarak yapılır (Sierpinska 2000). Lineer bağımlılık/bağımsızlık açısından analitik-aritmetik düşünme biçiminde öğrenciler hesaplamaya dayalı olarak ya tanımı kullanarak veya vektörlerden bir matris oluşturarak vektörlerin lineer bağımsızlığını belirleyebilirler. Analitik-yapısal düşünme biçiminde öğrenciler vektörleri vektör uzayları ile bağlantılı olarak dikkate alabilir ve ilişki kavramları (lineer kombinasyon, boyut) veya teoremleri kullanarak vektörlerin lineer bağımsızlıklarını belirleyebilirler. Tablo 2'de Sierpinska'nın lineer cebire özgü düşünme biçimlerine yer verilmiştir.

Tablo 2. Sierpinska'nın Düşünme Biçimleri (Dogan'dan (2018) uyarlanmıştır.)

| Düşünme Biçimleri | | Temsiller | Öğrenci Yeterliği |
|---|---|---|---|
| Sentetik-Geometrik | | Grafik temsiller<br>Verilen şekle/duruma bağlı çıkarımlar; mevcut yapıyı tanımlamaktan ziyade betimlemeye yönelik açıklamalar içerir. | Öğrenciler $R^2$ ve $R^3$'te grafikleriyle verilen vektörlerin lineer bağımlılık ve bağımsızlıklarını belirleyebilirler. |
| Analitik | Analitik-Aritmetik | Sayısal Temsiller<br>Bir kavram, hesaplama yapmaya imkân veren bir formül ile tanımlanır. | Öğrenciler vektörlerden matrisler oluşturabilirler, matrisleri eşolon forma çevirebilir ve burada lineer bağımlılık/bağımsızlığa karar verebilirler. |

Tablo 2'nin devamı

| Düşünme Biçimleri | Temsiller | Öğrenci Yeterliği |
|---|---|---|
| Analitik-Yapısal | Nesneleri bir sistem içinde düşünme Tanımlar ve bunlara ait özellikler kullanılır. Bir nesne en iyi özellikler kümesi olarak tanımlanır. | Vektörlerin lineer bağımlılık ve bağımsızlıklarına karar vermede vektör uzaylarının boyutlarını kullanma |

Sierpinska'nın (2000) düşünme biçimlerine ilişkin oluşturduğu kavramsal çatı incelendiğinde sentetik – geometrik düşünme biçimi, vektörlerin herhangi bir koordinat sistemine bağlı olmadan sentetik olarak ya da bir koordinat sistemi ile analitik olarak temsil edildiği basamaktır. Örneğin bu düşünme biçimine sahip kişiler vektörlerin lineer bağımsızlığına karar vermede analitik düzlemden faydalanabilir, görsel olarak vektörlerin birbiri cinsinden yazılıp yazılamayacağına karar verebilir.

Analitik-aritmetik düşünme biçiminde vektörlerin sayılarla veya değişkenlerle temsil edilmesi ve lineer birleşim veya tanım kullanarak lineer bağımlılık/bağımsızlığa karar verilmesi söz konusudur. Örneğin analitik düzlemde verilen vektörlerin genel olarak ifade edilmesi ($\vec{u} = (x, y)$ gibi) ve bu formlardan faydalanarak gerek lineer birleşim tanımı gerekse elde edilecek matrisin eşelon forma dönüştürülerek lineer bağımlılık ya da bağımsızlığa karar verilmesi bu düşünme biçimi altında ele alınabilir. Analitik-yapısal düşünme biçiminde ise vektörlerin bulundukları düzlemden hareketle ya da baz-taban boyutlarını kullanarak lineer bağımlılık/bağımsızlığa ulaşma fikri vardır (Dorier, 1997; Hillel, 2000; Sierpinska, 2000).

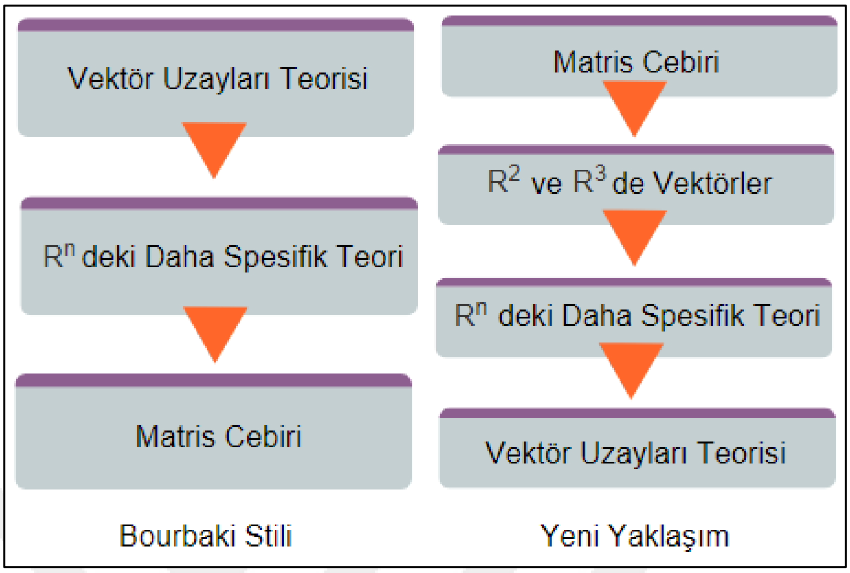
Literatürde Sierpinska'nın düşünme biçimleri çatısını gerek lineer cebir öğretim sürecinde gerekse öğretimi değerlendirme boyutunda kullanan çalışmalar yer almaktadır (Çelik, 2015; Doğan-Dunlap, 2010; Doğan, 2018; Turğut, 2010). Turğut (2010) düşünme biçimlerini Harel (2010) ve Van Hiele (1986) öğretim ilkeleri ile birlikte baz alarak teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yetenekleri üzerindeki etkisini incelemiştir. Çelik (2015), öğrencilerin lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili öğrencilerin düşünme biçimlerini ortaya koymayı amaçlamıştır. Doğan-Dunlap (2010), çalışmasında öğrencilerin lineer bağımsızlık sorularına verdikleri cevaplarda sergiledikleri düşünme biçimlerindeki farklılıkları ortaya koymuştur. Doğan (2018) çalışmasında dinamik görsel yaklaşımların lineer bağımsızlık, germe ve geren küme kavramları üzerine düşünme biçimlerini araştırmıştır. Çelik (2015) ve Doğan (2018) çalışmalarının değerlendirme kısmında Sierpinska'nın (2000) düşünme biçimleri çatısından yararlanmış ve bu çalışmalarda lineer bağımsızlık ve germe kavramları ele alınmıştır. Çalışmalar özellikle lineer bağımsızlık ve germe kavramlarına yönelik öğrencilerin verdikleri cevapların hangi düşünme biçimi ile ilişkili olduğu konusunda fikirler sunmuştur. Bu fikirlerden hareketle vektör uzayları teorisinin diğer temel kavramları olan vektör uzayı, alt uzay, lineer birleşim, taban ve boyut kavramları üzerine de öğrencilerin düşünme biçimlerini ortaya koymak mümkün olabilir.

Bu çalışmada teknoloji destekli tasarlanan bir öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisi incelenmekte olup gerek öğretim sürecinde gerekse değerlendirme sürecinde Sierpinska'nın çatısından yararlanılmıştır. Öğretim faaliyetleri tasarlanırken farklı düşünme biçimlerini harekete geçirecek şekilde etkinlikler, sorular ve görevlere yer verilmiştir. Her ne kadar analitik-yapısal düşünme biçimi en üst düzey düşünme biçimi olsa da öğrencilerin bütün düşünme biçimlerine sahip olması ve gerektiğinde uygun düşünme biçimi kullanması önemlidir. Bu nedenle analitik-yapısal düşünme biçiminin gelişiminin diğer düşünme biçimlerinin gelişimine ihtiyaç duyacağı söylenebilir. Ayrıca bu çalışma kapsamında lineer bağımsızlık ve germe dışında vektör uzayları teorisinin diğer temel kavramlarına da odaklanılmıştır. Böylece lineer cebir öğretiminde farklı kavramlar açısından düşünme biçimlerinin ortaya konması şeklinde bir ürün sunması amaçlanmıştır. Bunun dışında, Sierpinska'nın düşünme biçimleri çatısı sadece lineer cebire özgü olduğundan çalışma bu yönüyle genel düşünme biçimleri ile ilgili diğer çalışmalardan ayrılmaktadır.

### 2. 1. 4. Lineer Cebir Öğretimi ve Teknoloji

Lineer cebir dersi genel olarak Matris Cebiri ve Vektör Uzayları Teorisi olmak üzere iki temel bölüme ayrılmaktadır. Matris Cebiri; matrisler, matrislerde işlemler ve özelliklerini, determinantlar ve lineer denklem sistemleri ile çözüm yöntemlerini içermektedir. Vektör Uzayları Teorisi; vektör uzayları, alt uzaylar, lineer birleşim, germe lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut gibi kavramları içermektedir. Çok daha soyut bir yapıya sahip olması sebebiyle vektör uzayları teorisi öğrencilerin daha fazla zorluk yaşadığı bölümdür.

Lineer cebir ders içeriğinin yapısına bakıldığı zaman iki çeşit yaklaşımın kullanıldığı görülmektedir. Bu yaklaşımlar Bourbaki stili ve yeni yaklaşım olarak isimlendirilmektedir. Bourbaki stiline sahip ders kitapları genelden özele gidiş takip edilerek hazırlanmıştır. Bu yaklaşımda lineer cebir dersine ilk olarak vektör uzayları teorisi ile giriş yapılıp ardından $R^n$ deki daha spesifik teori ile devam edilmektedir. 1980'li yılların başından itibaren çoğu eğitimci ve ders kitabı yazarı bu yaklaşımdan vazgeçerek yeni yaklaşımı benimsemeye başlamıştır. Yeni yaklaşımda lineer cebir dersine geometrik bir formda başlangıç yapılmakta, daha sonra $R^2$, $R^3$, $R^n$ ve V'de kavramların cebirsel ve soyut temsillerine yer verilmektedir. Başka bir deyişle, Bourbaki Stili ve Yeni Yaklaşımın sırasıyla soyuttan somuta ve somuttan soyuta bir öğretim prensibi benimsediklerini söylemek mümkündür. Şekil 3' te Bourbaki Stili ve Yeni Yaklaşıma göre lineer cebir öğretim süreci gösterilmiştir.




Şekil 3. Lineer cebir öğretiminde benimsenen yaklaşımlar

Bourbaki stili genellikle konuların yoğun olarak yalın ve kendine özgü gösterimlerini içeren, diyagramların ve dış motivasyonların harici tutulduğu bir yapıya sahiptir. Kavramlar ve teoremler ayrıntılı bir şekilde aksiyomatik bir yolla sunulur ve sistemli olarak daha genelden özele doğru gidecek şekilde ele alınır. Lineer cebir lisans programlarında genellikle ilk iki yılda verilen bir derstir ve formal anlamda matematik çalışma konusunda deneyimsiz öğrenciler için Bourbaki stilinin derse çok soyut bir giriş yapığını söylemek mümkündür.

Üniversite düzeyi öğretimde matematik derslerinde teknolojiden yararlanma gittikçe yaygınlaşmaktadır. Teknoloji kullanmaktaki asıl amaç, matematiksel yapıların çoklu temsiller yoluyla aktif olarak araştırılması için bir ortam sağlamak veya öğrencilere matematiğin kalem ve kâğıt ile mümkün olmayan bazı yönlerini göstermektir (Dikovic, 2007). Geleneksel bir yaklaşım olan düz anlatım yoluyla öğretimin artık lineer cebir öğretiminde özellikle vektör uzayları teorisinin anlatımında yeterli olmayacağı söylenebilir. Çünkü soyut kavramlar üzerine öğrenci anlamalarını inşa etme sürecinde çok daha işlevsel olabilecek yöntemlere ihtiyaç vardır. Lineer cebir gibi doğası gereği soyut bir derste konuşarak, göstererek anlatmak öğrencilerin soyut kavramları anlamalarının gelişimine önemli bir ölçüde katkı yapmayabilir. Bu nedenle lineer cebir öğretiminde özellikle görselleştirme tekniklerinin kullanılması ve öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişmesi için teknolojiden yararlanılmasına ihtiyaç olduğunu söylemek mümkündür.

Lineer cebir öğretiminde teknolojinin oynayacağı birkaç rol vardır. Bu roller; matematiksel yapıların özelliklerinin keşfedilmesine yönelik öğrenme ortamlarının sağlanması için hesaplama yükünün ortadan kaldırılması, görselleştirme sunulması ve çeşitli yazılım araçlarının kullanılarak tecrübe edinilmesidir (Dikovic, 2007). Literatür incelendiğinde lineer cebir öğretiminde bilgisayar destekli eğitimin web öğrenme-öğretme sistemleri ve matematik yazılım programları kullanılarak gerçekleştirildiği görülmüştür (Doğan, 2018; Hillel, 2001; Klasa, 2009; Pecuch-Herrero, 2000; Turğut, 2018). Matematik yazılım programların sağlayacağı avantajlar vardır. Bu avantajlar; anlık sayısal ve sembolik hesaplamalar, veri toplama, analiz, keşfetme ve görselleştirme, modelleme, iki ve üç boyutta grafik ile animasyon sunumu ve uygulama geliştirme olarak sıralanabilir. Lineer cebirde özellikle cebirsel işlemlerin ağırlıklı olduğu matris cebiri bölümünde bilgisayar cebir sistemleri yazılımları kullanılırken vektör uzayları teorisi bölümünde hem bilgisayar cebir sistemi yazılımları hem de dinamik geometri/matematik yazılımlarından yararlanılmıştır. Grafik hesap makineleri ve bilgisayar cebir sistemleri kavramların statik ve cebirsel temsillerini resmetmekte ve aynı zamanda hesaplamaları kolaylaştırmaktadır. Diğer taraftan dinamik geometri yazılımları öğrencilerin formalizmin zorluğundan kaçınmalarına olanak sağlamakla birlikte kendi matematiksel nesnelerini inşa etmelerine yardımcı olmaktadır (Tabaghi, 2012).

Birçok araştırmacı lineer cebir öğretiminde teknoloji kullanımının önemine vurgu yapmış (Aydın, 2007; Aydın, 2009a; Aydın, 2009b; Dikovic, 2007; Dorier, 2002; Harel 2000; Pecuch-Herrero, 2000; Wu, 2004) ve birçok farklı uygulama araştırmacılar tarafından önerilmiştir. Özellikle soyut lineer cebir kavramlarının öğretiminde kavramların geometrik temsillerine yer verilmesi, görselleştirme tekniklerinin kullanılması ve geometrik nesnelerin dinamik yapısının yazılımlar aracığıyla takip edilmesi öğrencilerin kavramlarla ilgili sağlam anlamalar oluşturmasına katkı sağlamaktadır. Ek olarak, lineer cebir öğretiminde bilgisayarlar, öğrencilerin geometrik sezgisini, iki ve üç boyutta görselleştirmeler yoluyla canlandırabilir veya bilgisayarlar, geleneksel şekilde aritmetik olarak çok karmaşık olan teorik konuları içeren soruları sormayı mümkün kılar. Lineer cebirin ustalığı, birçok aritmetik işlemi gerçekleştirebilmeyi gerektirir. Öğrenciler bu işlemleri yaparken sıklıkla hata yaparlar. Yazılımın kullanımı mantıklı bir şekilde bu sorunu önler ve öğrencinin temel kavramlar üzerine yoğunlaşmasını sağlar (Dikovic, 2007).

Hızla gelişen teknolojilerin ortaya çıkmasıyla birlikte, 90'lı yıllardan beri lineer cebir öğretiminde matematiksel kavramların görselleştirilmesine çok daha fazla önem veren bazı reform hareketleri gerçekleştirilmiştir. Bu reform hareketlerinden biri ATLAST projesi ve diğeri LACSG grubudur. ATLAST (Augmenting the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools), 1992'de S. Leon tarafından organize edilmiş, LASCG D. Lay önderliğinde 1992 yılında kurulmuş daha sonra D. Carlson (1993) ve birçok matematikçi ile birlikte devam edilmiştir. ATLAST lineer cebir öğretiminde yazılım kullanılmasını kolaylaştırmak ve teşvik etmek için yapılan bir projedir. ATLAST projesi LACSG grubunun lineer cebir öğretimi yapmış olduğu önerileri baz almış ve bu önerilerin uygulanmasına yönelik çalışmalar yapmıştır. Proje kapsamında lineer cebir dersi için bilgisayar uygulamaları ile uygun projeler geliştirilmiş ve yazılımların lineer cebir derslerinin nasıl bir parçası olacağı üzerinde çalışılmıştır. ATLAST projesinde MATLAB, Mathematica ve Maple yazılımları kullanılmıştır. Proje sonucunda ortaya çıkan bilgisayar uygulamaları, öğrencilerin önemli lineer cebir kavramlarını görselleştirmesi ve keşfetmesine yardımcı olmak üzere geliştirilen ders planları ATLAST kitabında yayınlanmıştır. LACSG grubunun çalışmalarına daha sonraki bölümlerde ayrıntılı bir şekilde yer verilecektir.

Dinamik geometri yazılımları (DGY) ifadesi, Cabri Geometri, Cinderella, Geometer’s Sketchpad gibi geometri için geliştirilmiş olan özel geometri yazılımlarının ortak adıdır. Matematik öğrenme-öğretme etkinlikleri için açık yapıda dinamik geometri yazılımları öğrencilere düzlemde ve uzayda geometrik nesnelerin özelliklerini, birtakım ilişkileri inceleme ve keşfetme fırsatı sunan eğitimsel araçlardır. DGY’lerin diğer geometri yazılımlarından farklı özellikleri, oluşturulan şekillerin farklı dönüşümlerle değiştirilebilmesi ve hareket ettirilebilmesidir (Goldenberg 1999; Hazzan ve Goldenberg, 1997). Oluşturulan şekillerin sürüklenebilmesi dinamik geometri yazılımlarının en önemli özelliğidir (Hoyles ve Noss, 1994). Şekilleri sürükleme yardımıyla, öğrenci şeklin birtakım özelliklerini değiştirirken değişmeyen özellikleri gözlemleyerek keşfedebilir. Böylece öğrenciye mantıksal çıkarımlarda bulunma fırsatı sunar. Böylece öğrenci bu çıkarımını birçok örnekle destekler ya da reddedebilir (Güven ve Karataş, 2004).

Bilgisayar Cebir Sistemleri (BCS) matematiksel nesnelerin gösteriminde kullanılan semboller üzerinde işlem yapmayı içeren bilgisayar sistemleridir. BCS işlevselliğinin özü sembolik biçimlerdeki matematiksel ifadeleri işleme koyabilmesidir. BCS hem sayı hem de grafik gösterimlerini kullanarak sembolik matematiksel özellikler ve arasındaki ilişkileri ele alır. Sayısal, cebirsel, grafiksel ve istatistiksel gösterimler gibi çeşitli temsil olanakları sunarak kullanıcıların matematik üzerine tartışmak ve çalışmak için önemli bir platform oluşturmaktadır (Pierce ve Stacey, 2002; Tuluk ve Kaçar, 2007). BCS adı altında gruplanan yazılımların bazıları Derive, Maple, Mathematica, Reduce, MatLab, MuMath ve Mathcad örnek olarak verilebilir. BCS yazılımları kullanıcıya cebirsel denklemleri, eşitsizlikleri çözme ve fonksiyonların grafiklerini oluşturma gibi olanaklar sunmaktadır. Bu yazılımların matematik eğitiminde kullanılmasının en yaygın gerekçesi olarak, zaman alıcı ve yorucu hesaplamaların bu yazılımlar sayesinde kolayca yapılabilmesi ve bunun sonucunda öğrencilerin işlemler yerine kavramlara yoğunlaşma imkânı bulması, bunun yanında öğretmene öğrenci ile sınıf etkileşimini daha yoğun olarak gerçekleştirme fırsatı sunması olarak ileri sürülmektedir (Baki, 2001; Muhundan, 2005).

Hohenwarter ve Jones'a (2007) göre matematik öğrenimi ve öğretimini destekleyen yazılımlar içinde BCS (sembolik ifadelerin kullanımına dayanır) ve DGY (nokta, doğru ve daire gibi yapılar arası bağlantılar üzerine yoğunlaşır) en önemlileridir. BCS nümerik ve cebirsel hesaplama programıyken DGY'ler grafik ve dinamik gösterim programlarıdır (Lu, 2008). Dinamik öğrenme ortamları öğrencilerin keşfederek öğrenmelerini sağlarken BCS öğrencilerin düşünme süreçlerine odaklanır (Little, 2008). Bazı DGY yazılımları geometrik nesnelerin sembolik formda cebirsel özelliklerini içermesine rağmen BCS yazılımlarında olduğu kadar cebirsel ifadeler üzerinde işlem gerçekleştirememektedir. Diğer taraftan bazı BCS yazılımları program içerisinde sembolik olarak girilen matematiksel ifadelerin karşılık geldiği grafik gösterimlerini ekrana yansıtır. Ancak objenin cebirsel ifadesinde bir değişiklik meydana geldiğinde eş zamanlı olarak grafiksel gösterime bu değişiklikleri yansıtmamaktadır.

Son on yıl içinde hem BCS hem de DGY yazılımlarının özelliklerini barındıran yazılımlar ortaya çıkmıştır. Bu yazılımlar arasında en dikkat çekenlerden birisi GeoGebra'dır. GeoGebra her obje için iki bileşen oluşturmaktadır; cebirsel bileşen objenin açık, kapalı veya parametrik formda denklemini, geometrik bileşen ise objenin çözüm kümesinin grafiksel temsilini ekranda yansıtmaktadır. Geogebra yazılımı içerisinde bir objenin her iki temsiline de kullanıcı tarafından müdahalede bulunulabilmektedir (Çekmez, 2013). Lineer cebir dersinin içeriği matris cebiri ve vektör uzayları teorisi olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Matris cebiri matrislerde işlemler, determinantlar ve lineer denklem sistemlerini ile bu sistemlerin çözümünü içermesi bakımından BCS yazılımlarının kullanılmasının uygun olduğu bölümdür. Vektör uzayları teorisi bölümü vektör uzayı, alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarını içermektedir. Bu kavramların öğretiminde $R^2$ ve $R^3$ deki vektörler ve geometrik nesnelerle birlikte matris, polinom ve fonksiyonlara yer verilerek kavramların farklı temsilleri kullanılır. Vektör uzayları teorisinin içeriği göz önüne alındığında öğretiminde BCS yazılımlarının yanı sıra DGY'nın da kullanımına ihtiyaç vardır. Bu nedenle BCS ve DGY programlarının sahip olduğu karakteristik özellikleri ve dinamik matematik yazılımları (DMY) olarak adlandırılan programlarda biri olan Geogebra'nın araştırmada kullanılmasına karar verilmiştir.

### 2. 1. 5. Lineer Cebir Öğretimi ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Doğan (2018), lineer bağımsızlık ve germe konularında dinamik görsellerin kullanımının öğrencilerin zihinsel yapıları üzerindeki etkisini araştırmıştır. Bu etkiyi ortaya koymak için dinamik görsel temsilleri kullanılarak öğretim gören öğrenciler ile geleneksel eğitim araçlarıyla öğretim gören öğrencilerin düşünme biçimleri, mülakatlara verdikleri cevaplar kullanılarak karşılaştırılmıştır. Araştırmada kuramsal çatı olarak Sierpinska'nın öğrenci düşünme biçimleri teorisi kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu 12 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrenciler A, B ve C şeklinde üç gruba ayrılmıştır. Her grupta da aynı ders kitapları kullanılmış ve derslerde formal tanımlar, teoremler ve aritmetik hesaplamalara yer verilmiştir. Araştırmanın verileri ders sonrası ve ödevlerin tamamlanmasının ardından öğrencilerle önceden belirlenmiş sorulardan oluşan yaklaşık bir saat süren mülakatlarla elde edilmiştir. Mülakat soruları temel vektör uzayları kavramları olan lineer bağımsızlık, germe ve geren kümeler kavramlarından hazırlanmıştır. Veriler farklı eğitimsel araçların uygulandığı 3 gruptan toplanarak, öğrencilerin bilişsel şemalarındaki benzerlikler ve farklılıklar araştırılmıştır. İlk grup hem derslerde hem de ödevlerinin bir bölümünde tamamıyla dinamik görsel temsillere maruz bırakılmıştır. İkinci gruba dinamik görsel temsillerin yer aldığı ev ödevleri ile birlikte geleneksel öğretim araçları verilmiştir. Üçüncü grup ise herhangi bir dinamik görsel temsillere yer verilmemiştir. Mülakatlara verilen cevapların analizinde nitel bir yaklaşım olan sabit karşılaştırma yöntemi kullanılmıştır. Transkript edilen mülakatlar üç uzman tarafından Sierpinska'nın (2000) çatısına göre değerlendirilerek düşünme biçimleriyle ilişkilendirilmiştir. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar öğrencilerin kullandıkları düşünme biçimi sayısına göre geometrik/cebirsel geometrik/aritmetik aritmetik/cebirsel hepsi yalnızca geometrik yalnızca aritmetik ve yalnız cebirsel olarak sınıflandırılmıştır. Doğan "yapısal" ifadesi yerine alternatifli olarak "cebirsel" ifadesini kullanmış ve buna gerekçe olarak Sierpinska'nın çatısında analitik-yapısal düşünme biçiminin çoğunlukla cebirsel/sembolik temsillere odaklanmasını göstermiştir. Bulgular geometrik/cebirsel nitelikteki cevapların her üç grupta da en yüksek yüzdeye sahip olduğunu ortaya koymuştur. Dinamik geometrik temsillerle öğrenim gören A ve B grubunda öğrencilerin zihinsel yapıları ağırlıklı olarak geometrik varlıklarla (entity) şekillendirilirken geleneksel öğrenim gören C grubundaki öğrencilerin çoğunlukla sayısal olarak şekillendirdiği ortaya çıkmıştır. Araştırmacı dinamik geometri ödevlerinin hem sınıf içi hem de sınıf dışı aktivitelerine eş zamanlı olarak yer verilmesi destekleyici bir başlangıç bilgisinin yapılandırılmasında kayda değer faydaları olabileceğini belirtmiştir.

Konyalıoğlu ve diğerleri (2005), lineer cebir dersinde görselleştirme tekniğinin, öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerindeki etkisini araştırmıştır. Lineer cebir dersini alan 60 öğrenci deney ve kontrol olmak üzere iki gruba ayrılmıştır. Öğrenciler rastgele olacak şekilde 30 kişilik iki gruba ayrılmıştır. Bütün öğrencilere lineer cebir için vektör kavramıyla ilgili gerekli temel bilgiler verilmiştir. Süreçte vektör uzay kavramı deney grubuna haftada iki saat geometrik ve bir saat cebirsel ağırlıklı olmak üzere üç saatte verilmiştir. Kontrol grubunda ise lineer dersi iki saat cebirsel ve bir saat geometrik ağırlık olarak verilmiştir. Dört hafta sonunda iki gruba da aynı test uygulanmıştır. Testte yer alan sorular vektör uzayları kavramıyla ilgili problemlerden oluşmaktadır. Dört haftalık uygulama sonrasında yapılan son test sonucunda grupların puanları arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre deney ve kontrol grupları arasında işlemsel bilgi bakımından bir farka rastlanmamış, deney grubundaki öğrencilerin kavramsal bilgi bakımından daha başarılı olduğunu göstermiştir. Çalışmada uygulanan öğretim yönteminin, matematikteki diğer soyut kavramların öğretiminde de kullanılabileceği önerilmiştir.

Donevska-Todorova (2018), araştırmasında lineer cebirde öğrenci yeterliliklerinin geliştirilmesi için dijital kaynakların potansiyelini incelemiştir. Araştırmada teknoloji ile geliştirilmiş öğrenme ve öğretme ortamlarının işlemsel ve kavramsal anlamayla birlikte görselleştirme ve çoklu temsillerde öğrenci yeterliliklerinin gelişimine nasıl katkı sağlayabileceği ortaya konulmaya çalışılmıştır. Öğrenci yeterliliklerinde; argümanlar ve ispatlar ileri sürme, matematiksel kavramların sunumu, matematiğin sembolleri, formal ve teknik elemanları ile etkileşim içinde olma, matematiksel iletişim hususlarına odaklanılmıştır. Ayrıca araştırma da i) Belirli bir dijital kaynağın kullanımını verimli kılan nedir? ii) Lineer cebir öğretim ve öğrenimi için teknoloji tabanlı materyallerin ideal nitelikleri nelerdir ve bu nitelikleri nasıl ölçebiliriz? iii) Bir yazılımın diğer bir yazılıma karşın, örneğin DGY ile BCS, avantajları nelerdir? iv) Ne zaman ve nasıl uygulanması gerekir? v) Lineer cebir dersinde hangi yeni dijital destek biçimleri motivasyonu, iletişimi ve işbirliğini artırabilir? soruları yöneltilmiş ve cevap aranmıştır. Yapılan analizler, aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve yapılar aracılığıyla lineer cebirin soyut doğasının öğrenilmesi ve anlaşılması basit bir BCS veya DGY kullanımıyla anlaşılır bir hale gelmediğini göstermiştir. Yeterliliklerin gelişiminde hangi dijital aracın etkin olduğunu; argümanlar ve ispatlar ileri sürmede BCS ve DGY, matematiksel kavramların sunumunda DGY, matematiğin sembolleri, formal ve teknik elemanları ile etkileşim içinde olmada BCS ve matematiksel iletişimde BCS, DGY ve görsel ortamlar olarak ifade etmiştir. Özellikle, özel olarak tasarlanmış teknolojik temelli ortamların, diller ve düşünme biçimleri arasında daha kolay ve daha etkili geçişlere olanak sağlayabileceği ve lineer cebirdeki kavramların anlaşılması, temsil edilmesi ve tanımlanması için öğrenci yeterliliklerinin gelişimini kolaylaştırabileceği sonucuna varılmıştır. Ayrıca dokunmatik ve çoklu dokunuşlu yeni gelişen teknolojik cihazların gelecekteki araştırmalar için yeni sorular ortaya çıkaracağı belirtilmiştir. Araştırma sonucunda lineer cebir kavramlarıyla ilgili üç tanımlama ve düşünme biçiminin iç içe olduğu bir modelin öğrenme ve öğretme ortamları tasarımı için uygun olduğunu önerilmiştir.

Dikovic (2007), geçmişte verdiği lineer cebir derslerinin ışığında, öğrencilerin sayısal, sembolik ve görsel gösterimlerini geliştirmek için teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin önemli olduğuna vurgu yapmıştır. Dikovic, çalışmasında lineer denklem sistemlerinin analitik ve özel çözümlerini, determinant ve matris sistemleri için bazı örnekleri teknoloji destekli olarak sunmuştur. Araştırma sonucuna göre teknoloji, öğrencilere ve öğretmenlere öğrenmeyi kişiselleştirebilme olanağı sunmaktadır. Bu kişiselleştirmeler tanımlayıcı örnekler oluşturmak, arzu edilen derinlikte kavramlarla ilgili anlamayı gerçekleştirmek, kendi problemlerini ve bu problemlerin çözümü için uygun araçları seçmek şeklindedir. Araştırmanın sonucunda metodolojik olarak matematiksel yazılımları içeren çeşitli öğretim-öğrenme ortamlarının gelecekte geliştirilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Klasa (2009) çalışmasında hem dinamik geometri yazılımı Cabri hem de bilgisayar cebiri sistemi Maple tarafından desteklenen lineer cebir dersine yönelik bir öğrenme ortamının öğrenme üzerindeki etkilerini incelemiştir. Çalışmanın kuramsal çatısını APOS teorisi oluşturmaktadır. Çalışmada lineer cebir öğretiminde bazı zorlukların olduğu konular (lineer dönüşümler, özvektörler ve özdeğerler, kuadratik formlar, konikler ve tekil değerler) için Cabri ve Maple destekli matematiksel tasarımlar sunulmuştur ve "Görselleştirme ve manipülasyon Doğrusal cebir öğrenmesini geliştirebilir ve kolaylaştırabilir mi?" sorusuna cevap aranmıştır. Uygulamaların ardından öğrencilere test uygulanmış ve bazı sorular yöneltilmiştir. Araştırma sonucunda bilgisayar cebir sistemi Maple ve geometrik yazılımların özellikle Cabri'nin kinestatik öğrenme yaklaşımı sayesinde zor matematik kavramlarının öğrenilmesini kolaylaştırdığı sonucuna ulaşılmıştır.

Turğut (2018) çalışmasında lineer cebir dersindeki 2 ve 3 boyutlu lineer dönüşümlerde dinamik geometri yazılımlarının öğretime entegrasyonunu incelemiştir. Çalışmasında dinamik matematik yazılımlarından Geogebra'daki sürükleme, sürgü, döndürme, 3D grafik ve ApplyMatrix yapı araçlarını kullanmıştır. Semiyotik potansiyel analiz kullanılarak, öğrenciler için bir ödev hazırlanmış ve bu ödev üzerinden öğrencilerle çiftler halinde klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri video kayıtları, alan notları ve öğrencilerden elde edilmiştir. Elde edilen veriler semiyotik arabuluculuk teorisi referans alınarak semiyotik bir mercek içinde analiz edilmiştir. Sonuçlar, DGY'nin 3D lineer dönüşümleri karakterize etmek için etkili bir semiyotik arabuluculuk aracı olarak kabul edilebileceğini ortaya koymuştur.

Pecuch-Herrero (2000), sınıflardaki geleneksel olmayan öğretim yaklaşımları ve teknolojideki değişimlerin doğrultusunda lineer cebir dersinin öğretimi ve öğrenilmesi adına farklı stratejiler geliştirmiştir. Araştırmada, farklı stratejiler ve sınıf için geliştirilen bilgisayar projeleri ele alınmıştır. Bu stratejiler; i) Bilgisayar araştırmaları aracığıyla yeni kavramların keşfedilmesi, ii) Lineer dönüşümler konusunu mümkün olan en kısa sürede öğretilmei, iii) Geometrinin ön planda tutulması, iv) Portfolyo oluşturma yoluyla matematiği yazma öğretimi, v) Uygulamalar ve motivasyon için bilgisayar projelerinin kullanılması. Araştırmada Arizona üniversitesi tarafından geliştirilen LINALG adlı bilgisayar cebir sistemi programını kullanmış ve özdeğerler ile özvektörler üzerine çalışılmıştır. Program oldukça kolay bir kullanıma sahip olmakla birlikte öğrenciler için birçok proje ve ev ödevlerini içermektedir. Derslerde yeni kavramlarla ilgili tanımlara yer verilmiş, önemli noktalar ana hatlarıyla belirtilmiş ve zaman zaman geometrik örnekler kullanılmıştır. Sonuçlar, öğrenmedeki gelişimin, sadece teknolojinin kullanımından ziyade, çalışmasında açıklanan öğretim stratejilerinin birleşiminden kaynaklandığını ve bilgisayarla öğretim, bilgisayarla bireysel çalışmalara çok fazla önem verilmesi durumunda öğrenme kalitesini düşürebileceğini göstermiştir. Ayrıca eleştirel düşünmeyi destekleyen ve öğrenciler ile öğretmenler arasındaki iletişimi artıran öğretim stratejileriyle birlikte derslerin yürütülmesinde teknolojiyi öğretime dâhil etmenin öğrencilerin başarılarını artırdığı sonucuna ulaşılmıştır.

Tabaghi ve Sinclair (2013) çalışmalarında dinamik geometri taslağı ile etkileşimli olarak özdeğerler ve özvektörler kavramları üzerine öğrenci düşüncelerine odaklanmıştır. Araştırmada enstrümantal oluşum teorisi kullanılmış ve özellikle araştırmaları sırasınca öğrenciler tarafından kullanılan farklı sürükleme modelleri takip edilmiştir. Aynı zamanda ortamın kinestatik ve dinamik özellikleri göz önüne alındığında, öğrencilerin ortaya çıkan görsel ve kinestatik anlamalarını analiz etmek için somut biliş (embodied cognition) teorileri kullanılmıştır. Araştırmada Sketchpad yazılımına kullanılmıştır. Çalışma grubu dört tanesi lisans öğrencisi ve bir tanesi mezun öğrenci olmak üzere beş öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmanın verileri öğrencilere verilen ödevler üzerinden yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar aracığıyla elde edilmiştir. Analizler, literatürde baskın olarak rapor edilen analitik-aritmetik düşünme tarzının (ve sonucunda yöntemsel bilgi) aksine, araştırmaya katılan öğrencilerin sentetik geometrik bir düşünce biçimi geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca, öğrencilerin sentetik-geometrik düşünme biçimlerinin özvektörlerin ve özdeğerlerin hareket temelli kavramlarını güçlü bir şekilde öne çıkardıkları bulunmuş ve böylece araştırmacılar öğrencilerin düşüncelerini dinamik-sentetik-geometrik olarak nitelendirmişlerdir.

Soylu (2005), çalışmasında lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramların anlatımında geometri yardımıyla somutlaştırma yönteminin etkinliğine odaklanmıştır. Çalışmanın amacı, öğrencilerin lineer dönüşümler, lineer dönüşümlere karşılık gelen matrisler, lineer dönüşümün çekirdeği ve değer kümesi, lineer dönüşümlerin bileşkesi ve determinant konuları ile ilgili kavramların öğretiminde somutlaştırma yöntemleri ile geleneksel öğretim yönteminin karşılaştırılmasıdır. Çalışmanın örneklemini aynı öğretim üyesinin ders verdiği üniversite ikinci sınıf 86 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrenciler somutlaştırma yönteminin kullanıldığı deney ve geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubu olarak iki gruba rastgele atanmıştır. Araştırma beş haftalık bir uygulama süresinde yürütülmüştür. Araştırmanın verileri, Lineer Cebir Bilgi Testi, Matematik Dersi Tutum Ölçeği, Bilimsel İşlem Beceri Testi ve zorunlu iki vize ve bir final sınavı olmak üzere başlıca dört ölçekten elde edilmiştir. Verilerin analizinde yüzde-frekans, çift katlı ve bağımsız t-testi ve araştırmanın yapıldığı üniversitede o dönem kullanılmakta olan bağıl değerlendirme sistemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, somutlaştırma yönteminin kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramlarla ilgili başarı artışının, geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrencilerin başarı artışından daha fazla olduğu görülmüştür. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin matematiğe karşı tutumları arasından istatiksel olarak önemli bir fark olmamıştır. Ancak, öğrencilerin lineer dönüşümlerle ilgili kavramları etkili ve kalıcı öğrenmelerinde geometri ile somutlaştırma yönteminin önemli bir etkisinin olduğu sonucuna varılmıştır.

Stewart ve Thomas (2010) çalışmalarında öğrencilerin lineer cebirde taban, germe ve lineer bağımsızlık kavramlarına yönelik fiziksel, sembolik ve formal anlamalarını ortaya koymayı amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma grubunu A grubunda 16 ve B grubunda 11 öğrenci olmak üzere toplam 25 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Uygulanan lineer cebir derslerinin ardından çeşitli lineer cebir kavramlarından oluşan 14 soruluk bir test uygulanmış ve A grubundan sekiz, B grubundan iki öğrenci ile mülakatlar yapılmıştır. Stewart ve Thomas geleneksel sınıfta öğrenim gören öğrencilere oranla deney grubundaki öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle taban, germe ve lineer bağımsızlık kavramlarının tanımlarıyla ilgili mantıksal çıkarımlarda bulunduklarını ortaya koymuştur. Özellikle deney grubundaki öğrencilerin bir vektör kümesinin olası bütün lineer birleşimleri ile germeyi ilişkilendirmede geleneksel sınıfa göre daha başarılı oldukları ortaya konulmuştur. Çalışmadan elde edilen sonuçlar göstermiştir ki öğrenciler sembolik dünyada matris temsilleri kullanarak işlemsel bir biçimde çalışma eğilimdedirler. Ayrıca sonuçlar taban bulmada matris işlemlerine yapılan vurgunun öğrencilerin kavramı anlamasına yardım edemeyebileceğini ve görsel ve fiziksel özelliklerin bu bağlamda faydalı olabileceğini ortaya koymuştur. Stewart ve Thomas lineer birleşim kavramının germe ve taban konularıyla olan yakın ilişkisinden dolayı lineer cebir derslerinde lineer birleşim kavramına daha fazla zaman ayrılmasını önermiştir. Ayrıca onlar Sierpinska'nın (2000) geometrik temsillerin kullanımı ile ilgili uyarını göz önünde bulundurarak öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişimi için görsel örneklere daha fazla yer verilmesini önermiştir.

Britton ve Henderson (2009), lineer cebirde öğrencilerin sahip oldukları ortak yanlış anlamaları ve hataları özellikle kapalılık özellikleri ve vektör uzayının elemanı olarak fonksiyon kavramı çerçevesinde incelemiştir. Çalışma da ilk olarak geçmiş yıllarda yapılan çalışmalar sunulmuş, öğrencilerin lineer cebir dersini neden bu kadar zor bulduklarının sebeplerine ilişkin çeşitli teorilerden yararlanılmıştır. Bu çalışma kapsamında lineer cebir 2 dersini alan ve çoğunluğu mühendislik bölümünde öğrenim gören 500 öğrenciye alt uzay kavramıyla ilgili iki soru yöneltilmiştir. Veriler iki öğrenci grubuna iki ardışık yılda yapılan uygulamadan toplanmıştır. Sorular birinci grupta yer alan öğrencilere sınav şartları altında, ikinci gruptaki öğrencilere ise ödev olarak verilmiştir. Birinci sorudan elde edilen bulgular formalizm zorluğu, mantık ve küme teorileri ile ilgili deneyimsizlikler ve lineer cebir öğretiminde kullanılan dillerin çeşitliliğinden kaynaklanan zorluklar olmak üzere literatürde daha önce belirtilen tüm zorluklarla karşılaşıldığını ortaya koymuştur. İkinci sorudan elde edilen bulgular ise öğrencilerin bir vektör uzayının elemanı olarak fonksiyonlarla ilgili zorluklara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Ayrıca öğrenciler toplama ve skalerle çarpma ile ilgili olarak sorularda verilen kümelerin kapalılığını göstermekle ilgili zorluklar yaşamıştır ve bu özellikleri genel vektörler yerine belli vektörler seçerek göstermeye çabalamışlardır.

Wawro, Sweeney ve Rabin (2011) çalışmalarında öğrencilerin alt vektör uzayında sahip oldukları kavram imajlarına ve bu imajların formal kavram tanımı ile etkileşimine odaklanmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu 8 lisans öğrencisi oluşturmaktadır. 8 lisans öğrencisi ile mülakat yapılmış ve onlara alt uzayın formal tanımını düşünerek $R^{6}$'nın alt uzaylarını nasıl tanımlayabilecekleri istenmiştir. Tall ve Vinner kavram imajı ve kavram tanımı çalışmanın teorik çatısını oluşturmaktadır. Yapılan analiz ile alt uzay kavramı ile ilgili öğrenciler tarafından tekrarlanan kavram görüntüleri tespit edilmiştir. Bunlar geometrik obje, cebirsel obje ve bütünün parçası olarak adlandırılmıştır. Çalışmada öğrencilerin kavram imajları ve formal tanımı nasıl yorumladıkları, öğrencilerin formal tanımı bir ihtiyaç olarak tanımladığı durumlar ve öğrencilerin ifade ettiği alt uzayın nitelikleri arasındaki koordinasyona ilişkin bulgular sunulmuştur.

Bogomolny (2006) çalışmasında öğrencilerin vektörler, vektör uzayları, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, lineer dönüşümler ve taban kavramları ile ilgili anlamalarına odaklanmış öğrencilerin konuyla ilgili verdikleri örneklerin kendi anlamalarını nasıl etkilediğini incelemiştir. Lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili yaptığı analizlerde germe kavramını da ele almıştır. Çalışmada yalnızca öğrencilerin bu kavramlarla ilgili zorlukları değil aynı zamanda bu zorlukların kaynağını da tanımlamaya çalışmıştır. Araştırmanın diğer bir odağı ise öğrencilerin ortaya attığı örneklerin öğrencilerin anlamalarını ortaya koymada nasıl bir etkisinin olduğunu göstermektir. Araştırmanın çalışma grubu 68 öğrenciden oluşmaktadır ve tam olarak altı öğrenci klinik mülakatlara katılmak için gönüllü olmuştur. Çalışmanın teorik çatısını Tall ve Vinner kavram imajı ve kavram görüntüsü ve Dubinsky'nin APOS teorisi oluşturmaktadır. Veri toplamak amacıyla öğrencilerin üç ev ödevine verdiği cevaplar, sınıf içi gözlemler ve 6 öğrenci ile yapılan mülakatlar kullanılmıştır. Çalışma öğrencilerin lineer cebirin yukarıda bahsedilen anahtar kavramları ile ilgili bazı zorluklara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Çalışma sonunda çoğu öğrencinin lineer bağımsızlık kavramını özümsemeden ziyade bir süreç olarak anladıklarını bulmuştur. Öğrenciler lineer bağımsızlığı vektörler arasındaki bir ilişkiden ziyade eşelon forma dönüştürme olarak düşünme eğilimi göstermişlerdir. Çoğu öğrenci de germe kavramı ile ilgili olarak cebirsel ve geometrik temsilleri ilişkilendirememiştir. Bogomonly, ödevlerin (example generation tasks) öğrencilerin kavram imajlarını değerlendirmede etkili bir araç olduklarını belirtmiş ve önermiştir.

Hristovitch (2001) çalışmasında lineer bağımsızlık kavramını anlamak amacıyla öğrenciler tarafından kullanılan anahtar nitelikteki bilişsel süreçleri tanımlamaya çalışmıştır. Ayrıca öğrencilerin anlamalarını işlemsel anlamalardan yapısal anlamaya dönüştürmede metaforlar, analojiler ve sembollerin rolünü tanımlamaya çalışmıştır. Kavram gelişimi hakkında teorik çerçevesini Sfard (1991,1997) teorilerine dayandırmıştır. Lineer cebir dersine kayıtlı 60 lisans öğrencisi çalışmanın katılımcılarıdır. Gönüllü 12 öğrenci ile de mülakat yapılmıştır. Veri toplama aracı olarak sınıf gözlemlerinden elde ettiği alan notları, iki quiz ve mülakatları kullanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin çok az bir kısmı lineer cebir kavramlarıyla ilgili yapısal anlamalara sahip olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte Hristovitch öğrencilerin lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili anlamalarının işlemsel anlama ile başladığını ve Sfrad'ın teorisi yardımı ile yapısal anlamaya doğru gelişebileceği sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca Hristovitch lineer cebir dersindeki kavramlarla ilgili öğrencileri işlemsel anlamaya yönlendirecek şekilde yapılan tanımların ve ağırlıklı olarak hesaplamaya yapmayı gerektiren ödevlerin yapısal anlamaya geçişte öğrenci zorluklarına neden olduğunu belirtmiştir.

Nardi (1997) matematiksel soyutlamanın gelişimi sürecinde yeni başlayan öğrencilerin yaşadığı zorlukları ortaya koymayı amaçlamıştır. Çalıştığı kavramlardan biri de geren kümelerdir. Öğrencilerin anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla Oxford üniversitesinde birinci sınıf öğrencilerini bir öğreticinin bir veya iki öğrenci ile ders içeriği ve çeşitli problemler üzerinde tartıştığı, haftalık olarak düzenlenen ve yaklaşık 30-60 dakika arasında süren oturumlar boyunca gözlemlendi. Nardi, 20 öğrencinin 6 hafta süresince oturumlarını gözlemleyerek bunlardan 6 öğrenci ile 8. hafta ve dönemin son haftasında mülakatlar yaptı. Ders süreci boyunca örneklerin çoğu iki boyutlu düzlemlerle ilgili olarak sunulmuştur. Nardi geren kümelerle ilgili öğrenci anlamalarının üç ayrı özelliğini ortaya çıkarmıştır. İlk olarak, öğrenciler ağırlıklı olarak $R^2$ den görsel imgelere güvenmektedir. Nardi sınırlı görselleştirmenin anlamayı engellediği varsayımında bulunmuştur. İkinci olarak, öğrencilerin geren kümelerle ilgili kavram imajlarında taban kavramının baskın olduğudur. Nardi formal olarak germenin taban için temel bir kavram olmasına rağmen, öğrencilerin kavramsal gelişiminin bu formal tanımı takip etmeyebileceğini ortaya atmıştır. Üçüncü olarak, öğrenciler “germe” ve “geren küme” terimlerini ya değiştirilebilir bir biçimde ya da birbirinin yerine kullanmıştır. Ancak Nardi bu durumu kavramsal bir karışıklık için bir belirti olarak değerlendirmemiştir. Araştırma lineer cebir kavramlarının formal sunumunun öğrencilerin uygun kavram imajları oluşturmaları için her zaman yeterli olmadığını ortaya koymuştur.

Hadded (1999) çalışmasında lineer cebir öğrenme ve öğretme sürecinde yaşanan zorlukları araştırmıştır. Çalışma birinci bölümünde lise seviyesinde lineer cebir dersinin öğretiminde karşılaşılan zorluklar; ikinci bölüm ise Cabri yazılımıyla hazırlanan vektör ve lineer dönüşüm kavramlarının öğretiminde karşılaşılan zorluklar olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Araştırma sonunda belirlenen zorluklar üç başlık altında toplanmıştır. Bu zorluklar; lineer cebirin doğası ile ilgili zorluklar, lineer cebir öğretimindeki didaktik kararlarla ilgili zorluklar, öğrencilerin düşünme biçimleri ve matematiksel ön bilgileriyle ilgili zorluklar şeklinde belirtilmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin kavramların anlaşılmasına yönelik zorluklara sahip oldukları ortaya çıkartılmıştır.

Konyalıoğlu (2003), öğrencilerin vektör uzayları ile ilgili başarılarına işlemsel öğrenmelerine, kavramsal öğrenmelerine ve matematiğe karşı tutumlarına görselleştirme yaklaşımının etkisini geleneksel ders anlatım yöntemi ile karşılaştırarak araştırmıştır. Araştırma grubunu aynı öğretim üyesinin ders verdiği iki farklı şubedeki İlköğretim Matematik bölümünde öğrenin gören 103 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Şubelerden biri, görselleştirme yaklaşımlarının kullanılacağı deney grubu diğer şube ise normal öğretim yöntemlerinin kullanılacağı kontrol grubu olarak belirlenmiştir. Uygulama beş haftalık bir sürede gerçekleştirilerek araştırmanın verileri lineer cebri bilgi testi, matematik tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi olmak üzere üç ölçekten elde edilmiştir. Araştırma sonuçları vektör uzayları konusundaki kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının normal öğretim yöntemlerinden daha başarılı olduğunu göstermiştir. Ayrıca deney grubundaki öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarının ve kavramsal öğrenmelerinin kontrol grubundaki öğrencilere göre istatiksel olarak daha yüksek olduğu gösterilmiştir.

Birinci (2016), matematik öğretmen adaylarının vektör uzayları teorisinin temel kavramlarıyla ilgili lineer cebir kavramlarında ortaya koydukları anlama boyutlarını uzamsal yeteneğin ve matematiksel düşünme yapılarının nasıl farklılaştırdığını araştırmıştır. Araştırmanın çalışma grubu ortaöğretim bölümü matematik öğretmenliği lisans programına kayıtlı olan Lineer Cebir dersi alan 41 öğretmen adayından oluşmaktadır. Araştırmanın verileri Lineer Cebir Testi, Purdue Uzamsal Görselleştirme Testi ve Matematiksel Süreç Aracı olmak üzere üç ölçekten elde edilmiş ve öğrencilerin bu testlerdeki performanslarına göre seçilen öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Veri analizleri sonucunda, öğretmen adaylarının her bir lineer cebir kavramı için çeşitli imgeler kullandıkları ve bu imgelerin kavramlara göre farklılaştığı, ilişkili kavramların tanım ve tariflerinde kullanılan ortak kelime yüzdesinin yüksek olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarında sergiledikleri performanslar kavram bazında farklılaştığı gibi bireysel farklılık olarak katılımcıların matematiksel düşünme yapılarına ve uzamsal yeteneklerine göre de farklılaşmaktadır.

Turğut'un (2010) çalışması deneysel ve betimsel olmak üzere iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine, uzamsal yeteneklerine ve başarılarına etkisini belirlemek amaçlanmış ikinci bölümde ise öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri, uzamsal yetenekleri, cinsiyet, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasındaki ilişkiyi belirlemek amaçlanmıştır. Deneysel araştırmanın çalışma grubunu 85 ilköğretim matematik öğretmen adayı deneysel araştırmanın çalışma grubunu ise 193 ilköğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veri toplama sürecinde açık uçlu sorulardan oluşan testlerden yararlanılmış ve dört test uygulanmıştır. Araştırmanın deneysel bölümünden elde edilen bulguların analizinden elde edilen sonuçlara göre, teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney grubu ile kontrol grubu öğrencilerinin uzamsal test ve lineer cebir testi ortalama puanları arasında deney grubu lehine anlamlı farklılık oluşmuştur. Araştırmanın betimsel bölümünden elde edilen bulguların analizinden elde edilen sonuçlara göre, öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile cinsiyetleri ve geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Ancak öğrencilerin akademik başarı ve uzamsal yetenekle lineer cebir başarısı arasında orta düzeyde pozitif ilişkilere rastlanmıştır.

Aydın (2007), araştırmasında lineer cebir dersinin öğrenilmesinde bazı özel öğretim yöntemlerinin etkisini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma kontrol gruplu ön test ve son test modeline uygun deneysel bir çalışmadır. Araştırmacı, deney grubunda bilgisayar destekli olarak Harel'in (2000) somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik prensipleri doğrultusunda meta kaldıraç ve uzun dönem yaklaşımlarını benimseyen bir öğretim yöntemini uygulamıştır. Araştırma, İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde 2. sınıfında öğrenim gören 32 öğrenci deney grubunda ve 32 öğrenci kontrol grubunda olmak üzere toplamda 64 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmanın deneysel verileri oluşan 10 adet açık uçlu sorudan oluşan bir sınavdan elde edilmiş ve sınavdan elde edilen veriler

SPSS istatistik paket programı kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmanın bulgularının analizinden elde edilen sonuçlara göre deney ve kontrol grubunun başarı düzeyleri arasında deney grubu lehine anlamlı farklılık oluşmuştur. Sonuçlar, lineer cebir öğretiminin, bütün programı kapsayacak aktivitelerle desteklenerek yapılması durumunda, öğrenciler üzerinde olumlu değişiklikler yapabileceğini göstermiştir.

Aydın (2009b), çalışmasında lineer cebir öğretimine etki eden faktörleri kuramsal bir çerçeve altında tartışmıştır. Aydın çalışmasında matematik eğitimi araştırmalarının yardımıyla lineer cebiri etkileyen faktörleri incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmacının başlıca; i) İspatlara ne kadar önem verilmelidir? ii) Ne kadar soyut olmalı? iii) Teknoloji ile ne gibi katkılar yapılabilir? iv) Öğrenciler doğrusal cebiri nasıl öğrenir ve hangi öğretim yöntemleri daha etkilidir? sorularına cevap aramıştır. Lineer cebiri etkileyen faktörler genel olarak; formalizm, öğretim programı, öğrencilerin öğrenme profilleri, öğretme stratejileri ve lineer cebir öğretiminde teknoloji kullanımı olarak belirlenmiş ve ayrıca lineer cebir öğretim elemanlarına araştırmacı tarafından önerilerde bulunulmuştur.

Gueudet-Chartier (2000) yeni çalışmalar ve tarihsel temelden hareketle lineer cebir ve geometri arasında ilişkilendirmeye dönük epistemolojik bir çalışma yürütmüştür. Çalışmasında öğretmenlerin geometri anlatımında Fischbein'ın sezgisel modelini kullandığını belirtmiş ve bu model hakkında bilgilere yer vermiştir. Çalışmada şu üç soruya cevap aranmıştır; i) Lineer cebir dersinde kullanılabilecek geometrik modeller nelerdir? ii) Matematik öğretmenleri ve öğrenciler geometrik ve biçimsel modelleri nasıl kullanmaktadır? iii) Model kullanımlarının öğrencilerin uygulama ve düşünme süreçleri üzerindeki sonuçları nelerdir? Çalışmada geometrik sezginin gerekliliğine öğretmen ve ders kitapları tarafından sıklıkla ortaya atılmasına rağmen, gerçekte geometri kullanımı çoğu zaman yüzeysel olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte çok iyi öğrencilerin geometrik referansları çok nadiren kullandığı, genellikle formal seviyede işlemleri yürüttüklerini ortaya konulmuştur. Ayrıca geometrik temsiller veya dilin kullanılması öğrenme ortamı açısından pozitif bir faktör olabileceği fakat kontrol altında tutulması ve ilişkilerin açık olduğu içeriklerde kullanılması sonucuna ulaşılmıştır.

Medina (2000) üç öğrencinin lineer bağımsızlık, geren kümeler ve taban kavramıyla ilgili kavram imajlarının gelişimini ve bu gelişimi etkileyen faktörleri araştırmıştır. Kurs boyunca her katılımcı ile 4 defa mülakat yapmıştır. Katılımcılar ders süresince Lay'in (2003) ders kitabının kullanıldığı lineer cebir dersi öğrencileridir. Çalışmasında öğrencilerin formal tanımları ezberlemek yerine kendi cümlelerine güvendiklerini buna gerekçe olarak da ya tanımların önemli olduğuna inanmadıklarını ya da tanımlarda kullanılan dili veya notasyonları çok zor bulduklarını ifade etmiştir. Medina öğrenciler için lineer bağımsızlık kavramını anlamanın germe kavramını anlamaktan daha kolay olduğu buldu. Medina, lineer bağımsızlık kavramının $R^2$ de geometrik bir modele sahipken germe kavramının böyle bir modele sahip olmamasını bu durumun oluşmasına gerekçe göstermiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerin lineer birleşim konusundaki zayıf anlamaları geren kümelerle ilgili zayıf kavram imajlarının oluşmasına bir neden olarak ortaya çıkmıştır. Öğrencilere formal tanımlardan hareketle anlamalarını inşa etmektense sezgisel anlamalarına güvenmeyi tercih etmişlerdir. Araştırmanın sonucuna göre öğrencilerin kavramsal olarak lineer cebiri anlamaları gerektiklerini bilmelerine rağmen anlamaları öncelikli olarak işlemseldir.

Zamora (2010) araştırmasında öğrencilerin lineer bağımsızlık kavramı üzerine düşünme biçimlerinin ve bu kavramla ilgili metonimi (metonymy) ve metaforların neler olduğunun belirlenmesini amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma grubunu lineer cebir dersi alan 3 lisansüstü öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrenciler farklı birimlerden gönüllüler arasından gelişigüzel bir şekilde seçilmiştir. Temel amaç, her öğrencinin farklı akıl yürütme biçimlerinin varlığını ve yanıtlarının bir parçası olarak metafor / metonimi kullanmanın farklı yönlerini analiz etmek şeklinde belirlenmiştir. Araştırmanın verileri sekiz soruluk bir test ve öğrencilerle birebir yapılan mülakatlardan elde edilmiştir. Analizlerden elde edilen bulgular öğrencilerin lineer cebir kavramlarını biçimlendirmek için kullandıkları bilişsel yapılara ışık tutmuştur. Ayrıca bulgular öğrencilerin grafiksel, cebirsel ve sayısal temsillere farklı seviyelerde maruz kalma bağlamında bir düşünme tarzından diğerine geçme şekilleri hakkında bazı ipuçları vermiştir. İlk lineer cebir dersinden önce alınmış olan derslerde edinilen önceki bilgilerin, öğrencilerin akıl yürütme ve bir temsile geçme yetenekleri üzerinde önemli bir rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Parker (2010) çalışmasında germe ve lineer bağımsızlık konularında öğrencilerin sezgileri, kullanılan dil ve öğrenme arasındaki olası ilişkileri ortaya koymayı amaçlamıştır. Öğrenme, öğrencilerin lineer bağımsızlık ve germe kavramlarını anlamalarının doğası yorumlanarak değerlendirilmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu lineer cebir dersini alan yedi öğrenci oluşturmaktadır. Araştırma bir özel durum çalışmasıdır. Araştırmanın verileri kişisel öğrenci verileri ve eğitim ortamı verileri olmak üzere iki başlık altında toplanmıştır. Kişisel öğrenci verileri ev ödevleri, sınavlar, günlükler ve görüşmelerden eğitim ortamı verileri ise gözlemler, video kayıtları, eğitimsel artefakların ve ders kitaplarından oluşmaktadır. Araştırmanın bulguları öğrencilerin sezgileri, kullanılan dil ve anlamaları arasında bir bağlantı olduğunu göstermiştir. Zayıf anlamaya sahip öğrenciler yüksek seviyede müdahaleci sezgiye ve zayıf yazma becerilerine sahipken güçlü anlamaya sahip öğrenciler düşük seviyede müdahaleci sezgiye ve güçlü yazma becerilerine sahiptir. Öğrencilerin tanımlara ilişkin kavramsal anlayışları, öğrenciler arasında, işlemsel anlayışlarından daha fazla farklılaşmıştır. Araştırmanın bulguları doğrultusunda ileri düzeyde matematik derslerinde öğrenci öğrenimini geliştirmek için öğrencilerin sezgilerinin iyileştirecek ve dil becerilerinin gelişiminde onları cesaretlendirecek eğitim uygulamalarının kullanılması yaklaşımı önerilmiştir.

Çelik (2015), çalışmasında soyut dildeki lineer bağımlı/bağımsız vektörlerle ilgili problemleri çözerken lisans öğrencilerinin düşünme biçimlerini araştırmıştır. Çalışmada aynı zamanda öğrencilerin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları hakkında anlamalarına odaklanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu 186 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğrencilerin dört soruya verdikleri yanıtlar ve sekiz öğrenci ile yapılan mülakatlardan elde edilen veriler öğrencilerin düşünme biçimlerini tanımlamak için kullanılmıştır. Verilerin analizinde nitel yaklaşım benimsenmiş ve araştırmanın kavramsal altyapısında Sierpinska'nın (2000) düşünme biçimleri çatısından yararlanılmıştır. İçerik analizi sonucunda 12 tanesi aritmetik, 2 tanesi geometrik ve 1 tanesi yapısal olmak üzere 15 tane düşünme biçimi ortaya çıkarılmıştır. Aritmetik modda öğrencilerin (yaklaşık olarak katılımcıların %68'i) çoğunluğu soyut moddaki problemlere ilişkin hatalar içeren uygun olmayan çözümler sunmuştur. Geometrik düşünme modundaki cevaplar (%10) matematiksel genelleme ile ilgili zorlukların göstergesi olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca, analitik-yapısal düşünme biçimindeki cevap oranı çok düşüktü (%5). Sonuç olarak, bulgular, öğrencilerin düşünme modları ile lineer cebir problemlerinin soyut doğası arasındaki tutarsızlık görüşünü desteklemektedir. Verilen problemler lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarını tanımlayarak kolayca çözülebilecek olmasına rağmen, öğrenciler problemlerin çözümünde çoğunlukla aritmetik ve cebirsel işlemleri kullanmışlardır. Araştırmacı öğrencilerin soyutlama süreçlerinin gelişimine yardımcı olması için uygun öğrenme ortamlarının tasarlanmasını ve bu ortamların öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme biçimlerine etkisinin araştırılmasın önermiştir.

Doğan-Dunlap (2010) araştırmasında, lineer cebir öğrencilerinin iki farklı etkinlikten lineer bağımsızlık sorularına verdikleri cevaplarda sergiledikleri düşünme biçimleri türlerindeki farklılıkları ortaya koymayı amaçlamıştır. Birinci etkinlikte kavramların sayısal temsilleriyle ikinci etkinlikte ise interaktif bir modül aracığıyla vektör ve vektör uzayları kavramlarının grafiksel temsilleriyle desteklenmiştir. Araştırmada ikinci etkinlikteki düşünme biçimlerine üzerine odaklanılmış ve birinci etkinlikle ilgili kısaca bilgilere yer veriliştir. Araştırmanın çalışma grubunu 45 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin düşünme biçimleri belirlemek için nitel analiz tekniği uygulanmış ve Sierpinska'nın düşünme biçimleri çatısı göz önünde bulundurulmuştur. Analizler sonucunda öğrencilerin düşünme biçimleriyle ilgili birinci etkinlikte 15 ve ikinci etkinlikten 17 kategori ortaya çıkmıştır. Sonuç olarak analizlerin, geometrik temsillerin aritmetik ve cebirsel modların yerine geçmediği fakat öğrencileri çoklu düşünme biçimlerini kullanmaya teşvik ettiği düşüncesini desteklediği ortaya çıkmıştır. Özelikle, aritmetik ve cebirsel modların varlığında geometrik temsiller öğrencilerin bir kavramın farklı temsil yönlerini esnek bir şekilde ele almaya başlamasına yardımcı olmuştur.

### 2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

1990 yılında 16 matematik eğitimcisinin katılımıyla oluşturulan LACSG çalışma grubu, lineer cebir öğrenimi ve öğretimine yönelik çalışmaları ve bu çalışmalar doğrultusunda birtakım tavsiyeleri olmuştur (Carlson vd. 1993). David Carlson, Charles Johnson, David Lay ve Duane Porter kuruculuğunda oluşturulan grubun amacı lisansüstü lineer cebir öğretim programının geliştirilmesine sağlam ve sürdürülebilir bir ilgi başlatmaktır.

LACSG çalışma grubunun tavsiyelerinin dayandığı üç ana kaynak vardır. Birinci kaynak araştırmaya dayalı bilgidir. Öğrencilerin nasıl öğrendiği, matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiği ve lineer cebiri öğretme ve öğrenmeyi kapsayan epistemolojik ve pedagojik düşüncelerin neler olduğu bilgisidir. Örneğin geometrik yorumlara güçlü bir vurgu yapan LACSG tavsiyesi, geometrik düşünmenin öğrencilerin anlamalarına önemli bir katkı sağlayacağıdır. İkinci kaynak LACSG üyelerinin lineer cebir öğretiminde sahip oldukları bireysel tecrübeleridir. Bu tecrübeler müfredatla ilgili önerilerin uygulanabilirliği ve pedagojik yaklaşımların yararını ölçmede son derece değerlidir. Üçüncü kaynak ise lineer cebirin kendi disiplinlerindeki rolü hakkında araştırma yapan danışmanlar ve onların öğretim programının nasıl geliştirilebileceği hakkındaki görüşleridir. Böylelikle lineer cebir içeriğinin farklı disiplinlerin ihtiyacına cevap verecek şekilde düzenlenmesi sağlanabilir.

LACSG tarafından yapılan diğer öneriler lineer cebir dersi en az iki dönemlik bir ders olarak yürütülmesi, ilk dönem lineer cebir derslerinde ispata vurgu çok fazla yapılmaması ve lineer cebir dersinde teknolojiden yararlanılmasıdır. Öğrencilerin matrisleri ve çok boyutu somutlaştırmasında yardımcı olacak şekilde bazı yazılımlar tavsiye edilmiştir. Son olarak grup lineer cebir dersi için aşağıdaki çekirdek öğretim programının önermektedir.

1. Matrislerde toplama ve çarpma
2. Lineer denklemler sistemi
3. Determinantlar
4. $R^n$ nin özellikleri
    a. Lineer birleşim, lineer bağımlılık ve bağımsızlık
    b. $R^n$ nin tabanları
    c. $R^n$ alt vektör uzayları
5. Lineer dönüşümler olarak matrisler
6. Rank

7. Lineer denklem sistemleri
8. İç çarpım
9. Özdeğer ve Özvektörler

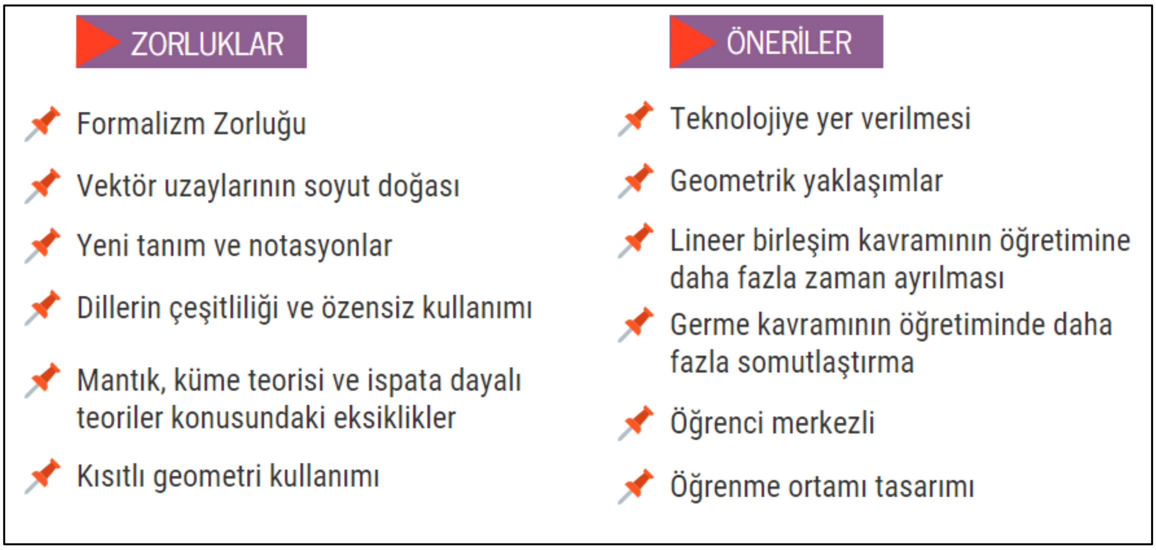
Literatür incelendiğine matematiğin diğer dallarıyla kıyaslandığında lineer cebir ile ilgili sınırlı sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir. Ayrıca lineer cebir öğretimi ile ilgili araştırmalara daha çok yabancı araştırmacıların liderlik ettikleri görülmüştür. Uluslararası araştırmalar, lineer cebir dersinde öğrencilerin çoğunlukla analitik aritmetik düşünme biçimini geliştirdiklerini göstermektedir ki bu durum da prosedürel bilginin gelişmesine yol açmaktadır (Alves Dias ve Artigue 1995; Hillel ve Sierpinska 1994; Stewart 2008). Yapılan bazı araştırmalar öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun lineer cebir kavramlarıyla ilgili kavramsal bir anlama oluşturmada zorluklar yaşadıklarını ve anlamalarının daha çok işlemsel olduğunu göstermektedir (Bogomolny, 2006; Çelik, 2015; Doğan-Dunlap, 2010; Hristovich, 2001; Medina 2000). Bogomonly (2006), Medina (2000) ve Hristovitch (2001) lineer bağımsızlık kavram ile ilgili öğrenci zorluklarını tanımlamıştır. Bogomonly ve Medina germe kavramı ile ilgili benzer zorlukları rapor etmiştir. İki araştırmacıda öğrencilerin Sierpinska'nın (2000) tanımladığı pratik düşünmeye benzer nitelikte düşündüklerini ortaya çıkarmıştır. Medina (2000), öğrencilerin lineer bağımsızlık, germe ve taban kavramları hakkında kavram imajlarının gelişimini incelediği araştırmasında öğrencilerin formal tanımlardan hareketle anlamalarını oluşturmaktansa sezgisel anlamalarına güvenmeyi tercih ettiklerini ve bu durumun kavramların birbiriyle karışmasına neden olduğunu ortaya koymuştur. Medina aynı zamanda öğrencilerin lineer birleşim kavramıyla ilgili zayıf anlamalarının olduğunu ve bunun germe kavramıyla ilgili zayıf kavram imajlarına sahip olmalarının nedeni olabileceğini ifade etmiştir.

Hristovitch (2001) öğrencilerin seçmiş olduğu metafor ve analojilerin onları lineer bağımsızlık ile ilgili kavram yanılgılarına götürdüğünü belirtmiştir ki burada sezgisel çıkarımlar etkili olmuştur. Bogomolny (2006) ve Hristovitch (2001) az sayıda öğrencinin kavramsal anlamayı nasıl geliştirdiklerini tartışmıştır. Çelik (2015) ve Doğan-Dunlap (2010) lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili öğrencilerin düşünme biçimlerini araştırmayı amaçlamıştır. Çelik (2015), lisans öğrencilerinin lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarını anlamaları ve bu kavramlarla ilgili öğrencilerin düşünme biçimlerini araştırdığı çalışmasında öğrencilerin verilen problemlerin çözümünde daha çok aritmetik veya cebirsel işlemleri kullandıklarını tespit etmiştir. Çelik (2015), soyutlama seviyesini artırarak kavramların tanımlandığı ve uygulandığı somuttan soyuta (iki ve boyutun koordinat geometrisi, $R^n$, genel vektör uzayları) doğru uygun öğrenme ortamlarının tasarlanmasını ve bu ortamların öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme biçimlerine etkisinin araştırılmasını önermiştir. Araştırmalar lineer cebir kavramlarıyla ilgili kavramsal bir anlama oluşturmada zorluklar yaşadıklarını ve anlamalarının daha çok işlemsel olduğunu göstermiştir.

Nardi (1997) ve Stewart ve Thomas (2010) öğrencilerin taban kavramı ile ilgili bilişsel gelişimini, özellikle germe ve lineer bağımsızlık kavramlarından sonra taban kavramının verildiği formal yapıyı dikkate alarak, incelemişlerdir. Stewart ve Thomas (2010) lineer birleşim kavramının önemine vurgu yaparak hem germe hem de lineer bağımsızlık kavramları ile yakın ilişkisinden dolayı lineer cebir derslerinde lineer birleşim kavramının öğretimine daha fazla zaman ayrılması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca araştırmalarında öğrencilerin kavramsal anlamadan çok işlemsel anlamaya güvenme eğilimde olduklarını bu nedenle öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişmesi için daha fazla görsel örneklerin kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Nardi (1997) çalışmasında öğrencilerin $R^2$'deki görsel imajlara aşırı derecede güvendiklerini ve bu sınırlı imajların öğrencilerin anlamalarını engelleyebileceği varsayımında bulunmuştur. Ayrıca taban, germe ve geren küme kavramları için görselleştirmeye destek olası açısından tek bir görsel modelin ($R^2$ de düzlemler) kullanımını eleştirmiştir. Nardi (1997) ile Stewart ve Thomas (2010)'ın öğrencilerin bazen bu kavramları karıştırdığı yönündeki bulguları, lineer cebir kavramlarının formal sunumunun öğrencilerin uygun kavram imajları oluşturmaları için her zaman yeterli olmadığını ortaya koymuştur. Literatür incelendiğinde geometrik temsillerin kullanımının lineer cebir öğretiminde önemli bir yeri olduğu görülmektedir (Dorier ve Sierpinska 2001; Harel 1989a; Harel 2000; Konyalıoğlu 2003; Robert, Robinet ve Tenaud, 1987; Soylu 2005). Literatürden anlaşıldığı üzere lineer cebir derslerinde geometriye yer verilmesi gerektiği ancak kısıtlı ve aşırı vurgunun öğrencilerin lineer cebir kavramlarını anlamalarında uygunsuz çıkarımlarda bulunmalarına neden olacaktır.

Bazı araştırmalar lineer cebir öğretiminde teknolojinin ve görselleştirme yaklaşımlarının etkisini incelemişlerdir (Doğan, 2018; Donevska-Todorova, 2018; Konyalıoğlu, 2005; Pecuch-Herrero, 2000; Tabaghi ve Sinclair, 2013;). Doğan (2018) dinamik görsel yaklaşımların öğrencilerin zihinsel yapılarına etkisini araştırmıştır. Lineer bağımsızlık, germe ve geren küme kavramları üzerinde çalışarak öğrencilerin daha çok geometrik/cebirsel nitelikte cevaplar verdiğini ortaya koymuştur. Konyalıoğlu (2003) çalışmasında vektör uzayı kavramıyla ilgili görselleştirme yaklaşımlarının öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerine etkisi araştırmıştır. Araştırmacı görselleştirme yaklaşımlarının öğrencilerin kavramsal öğrenmelerine katkı sağladığı sonucuna ulaşmıştır. Tabaghi ve Sinclair (2013) ile Pecuch-Herrero (2000) özdeğer ve özvektör kavramları üzerine teknoloji destekli araştırmalar yürütmüşlerdir. Tabaghi ve Sinclair (2013) literatürde baskın olarak rapor edilen analitik-aritmetik düşünme tarzının aksine, araştırmaya katılan öğrencilerin sentetik-geometrik bir düşünce biçimi geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Pecuch-Herrero (2000) teknolojiyi öğretime dâhil etmek öğrencilerin başarılarını artırdığını ortaya koymuştur.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde özellikle lineer bağımsızlık kavramı olmak üzere belirli kavramlar üzerinde öğrencilerin anlamaları ve sahip oldukları zorluklar üzerine çalışılmıştır. Çalışmalardan çıkan sonuçlar öğrencilerin kavramsal anlamalar oluşturmakta zorluklar yaşadıklarını çoğunlukla işlemsel bilgilerini geliştirdiklerini ve sezgisel anlamalarına güvenmeyi tercih ettiklerini ortaya koymuştur. Çalışmalar bir taraftan öğrencilerin lineer cebir öğretiminde yaşadıkları zorlukları ortaya koyarken bir taraftan da bazı önerilerde bulunmuştur. Şekil 4'te literatür taraması sonucu lineer cebir öğretiminde öğrencilerin karşılaştığı zorluklara ve bu zorluklara karşın verilen önerileri göstermektedir.




Şekil 4. Lineer cebir öğretiminde öğrenci zorlukları ve öneriler

Şekil 4'den de görüldüğü üzere öğrencilerin sahip oldukları zorluklar ve lineer cebir öğretimine yönelik olarak yapılan öneriler dikkate alındığında vektör uzayları teorisinin öğretimine yönelik olarak bir öğrenme ortamı tasarımı düşünülmüştür.

Son dönemde yapılan çalışmalarda teknolojinin öğrencilerin anlamalarını veya zihinsel yapılarını nasıl etkilediği incelenmiş ve ortaya olumlu sonuçlar çıkmıştır. Birçok araştırma lineer cebir öğretiminde teknolojiden yararlanılması konusunda ortak görüş bildirmişlerdir. Bununla birlikte kavramların geometrik temsillerine vurgunun öğrencilerin kavramlarla ilgili sağlam anlamalar oluşturmasına katkı sağlayacağı belirtilmiştir (Harel 2000). Ancak geometrik vurguyla ilgili gerek yurt içi gerekse yurt dışı çalışmalardan çıkan sonuçlar geometriye aşırı vurgunun öğrencileri daha çok sezgisel anlamalara güvenmeye ittiğini ve bu nedenle belli bir plan doğrultusunda geometriye yer verilmesi gerektiğini ortaya koymuştur (Harel, 2000; Medina, 2000; Nardi, 1997; Soylu, 2005). Geometrik temsillerin kullanımına benzer bir şekilde, Harel (2000) teknoloji kullanımın özensiz olmaması gerektiğini ifade etmiştir. Bu konuda literatürden elde sonuçlar doğrultusunda teknolojinin ve kavramlara ilişkin geometrik yaklaşımın belli bir kuramsal çerçeve ve sistematikle öğrenme ortamının bir parçası olmasına karar verilmiştir. Bu nedenle Harel'in (2000) lineer cebir öğretimine yönelik önerdiği pedagojik prensiler doğrultusunda ve literatürde ortaya çıkan diğer önerilerde göz önünde bulundurularak teknolojiye ve kavramların geometrik temsillerine yer verilmesinin uygun olacağı düşünülmüştür.

Hillel (2000) lineer cebir öğrenmedeki temel zorluklardan biri tarafından derslerde ve kitaplarda kullanılan dillerin çeşitliliği olarak ifade etmiştir. Sınıf içi öğretim yapılırken veya ders kitaplarında sürekli olarak bir dilden diğerine geçiş yapılır. Bu temsil dilleri ve tanımlamalar arasındaki ayırımı yapamayan bir öğrenci için birinden diğerine geçişi anlamak ve takip etmek temel zorluk nedenleri arasında yer almaktadır (Britton ve Henderson, 2009; Hillel, 2000; Medina, 2000). Bu nedenle gerek ders içi sunumlar yapılırken gerekse kavramların öğretimine yönelik etkinlikler hazırlanırken temsil dillerinin kullanıma özen göstererek farklı dillere yer vermek ve öğrencileri bu dilleri öğrenmeye ve etkili bir şekilde kullanmaya teşvik etmek önemlidir. Sierpinska (2000) lineer cebirde öğrencilerin farklı tanımlama ve temsil dilleri ile ilgili anlamalarının gelişimi için üç temel düşünme biçiminin gelişimine ihtiyaç olduğunu dile getirmiştir. Buradan hareketle vektör uzayları öğretimine yönelik olarak tasarlanacak bir öğrenme ortamının öğrencilerin yalnızca temsil dillerini kullanması ve geliştirmesi açısından değil aynı zamanda farklı düşünme biçimlerini sergilemelerine olanak sağlayacak şekilde olması gerektiği düşünülmüştür. Bu bakımdan tasarlanan öğrenme ortamında kavramların farklı gösterimlerine, farklı temsil dillerinin kullanıldığı sorulara yer vermek ve ayrıca farklı düşünme biçimlerinin sergilenebileceği problemler üzerinde çalışacak şekilde etkinlikler ve ödevler hazırlamak öğrencilerin anlamalarının gelişimi açısından önemlidir.

Diğer taraftan literatürde daha önce lineer cebir öğretimine yönelik olarak verilen önerilerin dışında tasarlanacak öğrenme ortamına yönelikte tavsiyelerde bulunulmuştur. Çelik (2015) çalışmasında öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına yönelik düşünme biçimlerini araştırmayı amaçladığı araştırmasında öğretmen adaylarının literatüre benzer bir şekilde problemlerin çözümünde çoğunlukla aritmetik ve cebirsel işlemleri kullandıklarını bulmuştur. Çelik (2015), öğrencilerin soyutlama süreçlerinin gelişimine yardımcı olması için uygun öğrenme ortamlarının tasarlanmasını ve bu ortamların öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme biçimlerine etkisinin araştırılmasın önermiştir. Benzer bir şekilde Parker'da (2010) germe ve lineer bağımsızlık hakkında öğrencilerin sezgileri, kullanılan dil ve öğrenim kalitesi arasındaki olası ilişkileri ortaya çıkarmayı amaçladığı çalışmasının bulguları doğrultusunda ileri düzeyde matematik derslerinde öğrenci öğrenimini geliştirmek için öğrencilerin sezgilerinin iyileştirecek ve dil becerilerinin gelişiminde onları cesaretlendirecek eğitim uygulamalarının kullanılması yaklaşımı önermiştir. Donevska-Todorova (2018), teknoloji ile geliştirilmiş bir öğrenme ortamının öğrencilerin yeterliliklerinin gelişimine nasıl katkı sağlayabileceğini araştırmış ve tanımla ve düşünme biçimlerinin iç içe olduğu bir modelin öğrenme ve öğretme ortamları tasarımı için uygun olduğunu önermiştir. Donevska-Todorova'nın (2018) çalışmasından farklı olarak bu çalışma da etkinlikler ve ödevler hazırlanırken Harel'in (2000) somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik prensiplerinin karşılanması hedeflenmiştir.

Literatürde incelendiğine özellikle vektör uzaylarının öğretimine yönelik olarak teknoloji destekli bir öğrenme ortamının tasarlanmasına ihtiyaç olduğu düşünülmüş ve bu amaca hizmet etmek için bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Öğrenme ortamı tasarlanırken öncelikli olarak literatürde yer alan öğrenci zorlukları ve öneriler göz önüne bulundurulmuştur ve ardından araştırmanın kuramsal çerçevesi oluşturulmuştur. Bu araştırmada, Hillel'in temsil dilleri ve Sierpinska'nın düşünme biçimleri teorilerinin iç içe olduğu ve Harel'in prensipleriyle desteklenen bir öğrenme ortamı tasarımı lineer cebir öğretiminde kullanılmıştır. Böylelikle hem literatürde bu yönde yapılan öneriler karşılanması hem de ortaya atılan öğrenme ve öğretme modellerinin gelişimine katkı sağlanması düşünülmüştür. Ayrıca öğrenme ortamı literatürdeki birçok araştırmadan farklı olarak yalnızca vektör uzaylarının birkaç kavramına yönelik olarak değil daha kapsamlı olacak şekilde vektör uzayları, alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut kavramları içermektedir.

## 3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın tasarımı, araştırmanın yürütülmesinde kullanılan yöntem, katılımcılar, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve veri analizi ile ilgili açıklamalar yer almaktadır.

### 3. 1. Araştırma Modeli

Bu çalışma, tasarım tabanlı araştırma yöntemi ile yürütülmüştür. Tasarım tabanlı araştırmalar için literatürde farklı tanımlar ve isimlendirmeler bulunmaktadır. Bunlar; 1) Tasarım deneyleri (Brown, 1992; Collins, 1992), 2) Tasarım tabanlı araştırma (The Design-Based Research Collective, 2003), 3) Tasarım araştırması (Cobb, 2001; Edelson, 2002), 4) Geliştirme araştırması (van den Akker, 1999) veya gelişimsel araştırma (Richey ve Nelson, 1996), 5) Biçimlendirici araştırma (Walker, 1992) ve 6) Aksiyon araştırması (Stringer, 1999) şeklindedir. Bazılarının farklı odak noktaları olmasına rağmen hepsinde temel fikirler birbirini desteklemektedir. Wang ve Hannafin (2005) tasarım tabanlı araştırmayı analiz, tasarım, geliştirme ve uygulama süreçlerinin döngüsel olarak yapıldığı araştırmalar olarak tanımlamıştır. Tasarım tabanlı araştırma, araştırmacı ve katılımcıların işbirliği içinde olduğu eğitim uygulamalarının, tasarım ilkelerinin ve kuramlarının geliştirilmesi ve düzenlenmesi için yapılan sistematik ve esnek bir araştırma yöntemleridir. Tasarım tabanlı araştırma birliği (Design Based Research Collective, 2003), tasarım tabanlı araştırmanın kapsamlı bir şekilde tanımını yapan ilk topluluktur. Tasarım tabanlı araştırma kavramı bu topluluk tarafından tercih edilmiş ve tasarım tabanlı araştırma kavramı literatürde yaygın olarak kullanılmaya başlamıştır (Kuzu, Çankaya ve Mısırlı, 2011). Bu çalışmada da araştırma modelinin ismi tasarım tabanlı araştırma şeklinde ifade edilmiştir.

Tasarım tabanlı araştırmalar (TTA) diğer tasarım araştırma yöntemlerden; tasarım – analiz – yeniden tasarım aşamalarının etkili bir şekilde döngüsel bir süreç içermesi (Kuzu vd., 2011; Herrington, McKenney, Reeves ve Oliver, 2007) ve katılımcılarla araştırmacıların sürecin başından sonuna kadar aktif rol alması yönüyle farklılaşmaktadır. Ayrıca TTA'lar süreç boyunca yapılan tüm düzenleme ve değişikliklerin ayrıntılı bir şekilde rapor haline getirildiği çalışmalardır (Reeves, 2000).

Wang ve Hannafin (2005) tasarım tabanlı araştırmaların beş temel özelliğinin bulunduğunu belirterek her bir özellikle ilgili ana fikirlere değinmişlerdir. Kuzu vd (2011), bu beş temel özelliği Tablo 3'te gösterildiği şekilde özetlemiştir.

Tablo 3. Tasarım Tabanlı Araştırmaların Özellikleri

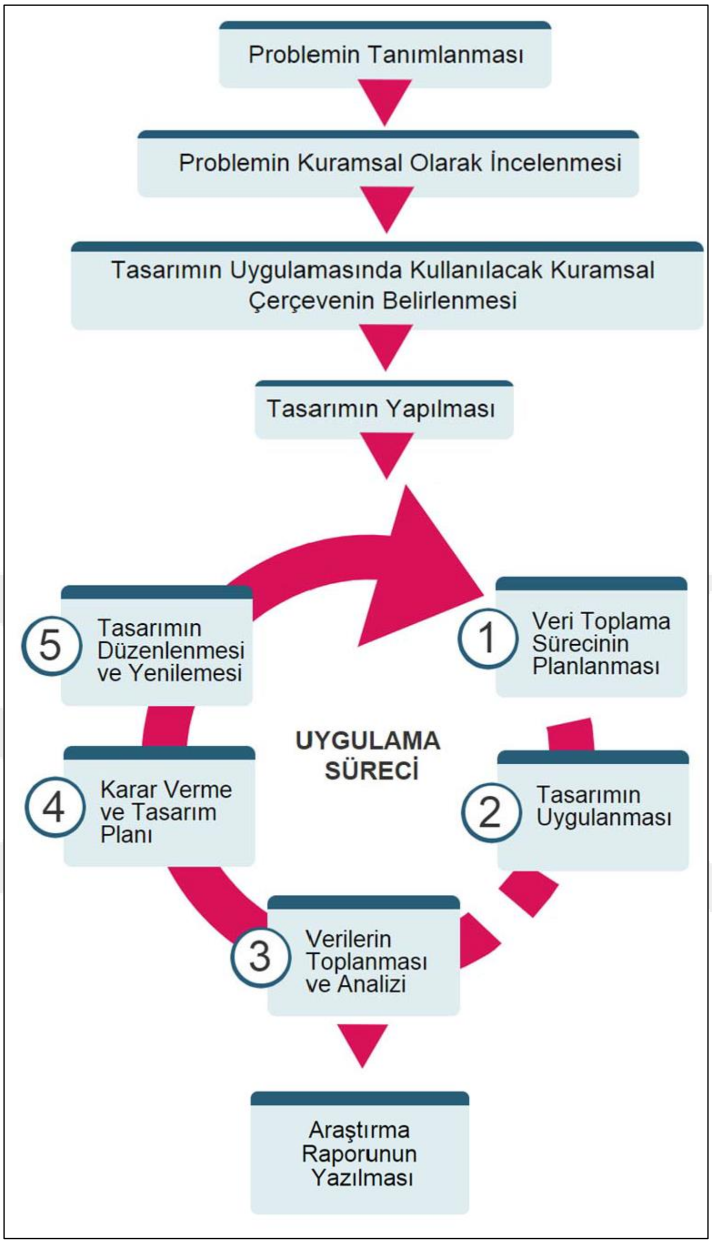
| Özellikler | Açıklamalar |
|---|---|
| Faydacı | • Tasarım tabanlı araştırma kuram ve uygulamayı ayırır.<br>• Kuramın değeri uygulamaya olan katkısıyla belirlenir (Cobb ve diğerleri, 2003). |
| Belli bir temeli olan | • Tasarım kuram temellidir ve ilgili araştırma, kuram ve uygulamaya dayalı olarak yapılır (Cobb vd, 2003). |
| Etkileşimli, kendini tekrarlayan, esnek | • Tasarımcılar tasarım sürecinde yer alırlar ve katılımcılarla birlikte çalışırlar.<br>• Kendini tekrarlayan analiz, tasarım, uygulama ve yeniden tasarım süreçleri vardır.<br>• Ana plan yeteri kadar detaylandırılmaz, böylece tasarımcılar değişiklikler yapabilirler. |
| Bütünleyici | • Araştırmanın güvenirliğini arttırmak için karma araştırma yöntemleri kullanılmaktadır.<br>• Kullanılan araştırma yöntemi araştırmanının farklı aşamalarında ortaya çıkabilecek ihtiyaca göre değişebilir. |
| İçeriksel | • Araştırma süreci, araştırmanın bulguları ve ana plan üzerinde yapılan değişikler doküman haline getirilir.<br>• Araştırma sonuçları tasarım süreciyle bağlantılıdır.<br>• Geliştirilen ilkelerin uygulanmasında rehberliğe ihtiyaç vardır. |

TTA yöntemi ile tasarım ve araştırma süreçleri birbiriyle bütünleşir. TTA'lar faydacı, belli bir temele sahip, etkileşimli, döngüsel, esnek, bütünleyici ve içeriksel özellikleriyle teknoloji ile pekiştirilmiş öğrenme ortamlarının tasarımını destekler (Wang ve Hannafin, 2005). TTA yöntemi; konuya özgü yenilikçi etkinlik, eğitsel materyal, müfredat ve teknoloji destekli eğitsel ortamların ya da öğrenme ve öğretmeyi etkileyecek yeni kuramların tasarlanabilmesi amacıyla kullanılabilecek etkili bir araştırma sürecidir (Barab ve Squire, 2004; Brown, 1992; Collins, 1992; Kuzu vd., 2011). TTA'ların en önemli ayırt edici özelliği bir yenilik üretiminde kullanılıyor olmasıdır. Bu yenilik eğitim araştırmalarında değerlendirildiğinde yeni bir öğrenme ortamı, yeni bir eğitim uygulaması veya yeni bir kuram olabilir (Kuzu vd., 2011).

Bu çalışmada vektör uzayı ile ilgili temel kavramların öğretimine yönelik teknoloji destekli bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Literatür incelendiğinde vektör uzayı kavramına yönelik öğrenci zorlukları ve bu zorluklara karşılık birtakım öneriler sunulmuştur. Bu zorluklar ver öneriler göz önünde bulundurularak tasarımın kuramsal alt yapısı belirlenmiş ve tasarım ilk olarak Harel (2000), Hillel (2000) ve Sierpinska'nın (2000) teorileri üzerine temellendirilmiştir. Böylece araştırmanın ilk tasarımı yapılırken tasarım ilkeleri araştırmanın kuramsal çatısına göre şekil almıştır. Öğrenme ortamı tasarlanırken hazırlanan çalışma yaprakları, Geogebra şablonları, ödevler ve ders içi sunumlarda Harel'in (2000) pedagojik prensiplerinin karşılanmasına yönelik adımlar atılmış ve Hillel'in (2000) bahsettiği temsil dillerinin kullanımına özen gösterilmiştir. Örneğin somutluk prensibi gereği kavramlarım geometrik temsilleri dinamik bir şekilde sunularak somut bir model oluşturulmuş, çalışma yapraklarında bu somut modellere karşılık gelen cebirsel temsiller verilerek üzerinde çalışılmış ve ardından kavramlara ilişkin en genel formda anlamlar oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu süreçte geometrik, cebirsel ve soyut dil olmak üzere farklı diller kullanarak kavramlara ilişkin ifadelere ve sorulara çalışma yaprakları ve ödevlerde yer verilmiştir. Çalışma yaprakları ve ödevler aynı zamanda birer problem çözme aktivitesi olarak tasarlanarak ve ders sürecinde lineer cebirin günlük hayatla ilişkisine dair örnekler durumlar verilerek gereklilik prensibinin karşılanması amaçlanmıştır. Böylece öğrencilerin Sierpinska'nın (2000) ifade ettiği düşünme biçimlerini geliştirme ve farklı düşünme biçimlerini sergileyebilecekleri bir öğrenme ortamı oluşturulmuştur. Tasarlanan öğrenme ortamına üç döngüyle tasarım, analiz ve tekrar tasarım adımları uygulanmıştır. İlk iki döngü araştırmacı tarafından yürütülerek öğrenme ortamına yönelik tasarım ilkeleri belirlenmiş ve tasarım üçüncü döngüye hazır bir hale getirilmiştir. Üçüncü döngü farklı bir matematik eğitimcisi tarafından uygulanırken araştırmacı gözlemci rolü üstlenerek ders öğretmeniyle birlikte alan notları tutmaya devam etmiştir. Öğrenme ortamının tasarım ilkeleri üçüncü döngüden elde edilen bulgularla sonrasında son halini almıştır. Üç döngü boyunca TTA'ların esnek yapısından yararlanılarak tasarımla ilgili olumsuz veya değişiklere ihtiyaç duyulan durumlar rapor edilmiş ve her bir döngü sonrasında düzenlemelere gidilmiştir. Her bir döngüden sonra yapılan düzenlemeler rapor haline getirilerek program revizyonu başlığı haline bulgularda sunulmuştur. Bu bağlamda Tablo 3'te verilen TTA'nın özellikleri göz önünde bulundurularak araştırmada tasarım tabanlı araştırma yöntemi benimsenmiştir.

### 3. 2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Çalışmada tasarım – uygulama – geliştirme ve değerlendirme aşamaları üç döngü boyunca gerçekleştirilmiş ve her döngüde yapılan değişiklikler ayrıntılı bir şekilde raporlaştırılmıştır. Böylece her bir döngüden elde edilen veriler gözden geçirilerek, daha başarılı döngüler gerçekleştirmek için düzenlemeler yapılmış ve daha verimli bir tasarım ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Şekil 5'te tasarım tabanlı araştırmadaki uygulama basamakları akış şeması olarak gösterilmiştir.




Şekil 5. TTA uygulama basamakları (Kuzu vd., 2011)

Literatür araştırması sonucunda vektör uzayları konusuyla ilgili öğrenme-öğretme zorluklarına yönelik öneriler dikkate alınarak oluşturulan kavramsal çatı ile ortaya konulan ilkeler doğrultusunda öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Öğrenme ortamının temel bileşenleri; çalışma yaprakları ve grup çalışması, Geogebra şablonları ve ödevler olmak üzere üç kısımdan oluşmaktadır. Tasarlanan öğrenme ortamının gerçek sınıf ortamında uygulanabilmesi için vektör uzayları konusu üzerinden 6 haftalık bir uygulama planı oluşturulmuştur. Vektör uzayları ile ilgili her bir kavramın öğretimine yönelik olarak kazanımlardan hareketle ders planları oluşturulmuş çalışma yaprakları, ödevler ve Geogebra şablonları tasarlanmıştır. Uygulama öncesinde ve sonrasında öğrencilerin düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla başlangıç ve final testleri hazırlanmıştır. Öğrencilerin testlere verdikleri cevapları uygun düşünme biçimleri ile ilişkilendirebilmek için her bir test için birer rubrik hazırlanmıştır. Rubrikler hazırlanırken literatürde öğrencilerin düşünme biçimlerine yönelik çalışmalardan yararlanıldığı gibi, ilk iki döngüde öğrencilerin testlere, ödevlere verdikleri cevaplardan yararlanılarak bir soru havuzu oluşturulmuş bununla birlikte araştırmacının ve alanında uzman üç matematik eğitimcisinin görüşleri dikkate alınmıştır. Başlangıç ve final testleri, öğrencilerin soruları cevaplarken kullandıkları düşünme biçimlerini ortaya koymayı amaçlayan sorulardan oluşmaktadır. Bunun için bu konuda yazılmış tezler ve makaleler ile akademik ders kitapları incelenmiştir. Düşünme biçimlerini belirlemeye uygun olduğu düşünülen sorular tespit edilmiş veya oluşturulmuştur. Bu iki test çalışmanın amacının ne olduğu açıklanarak, 3 matematik eğitimcisinin görüşlerine sunulmuştur. Matematik eğitimcilerinden gelen dönütler ışığında yazılı sınav soruları düzenlenmiştir. Ancak hazırlanan materyaller ve testlerde her bir döngü sonucunda görülen eksiklikler veya geliştirmeye yönelik olarak bazı eklemeler sonucunda değişiklikler yapılmıştır. Bu değişiklikler ileride ayrıntılı bir şekilde sunulacaktır.

Çalışmanın üç döngüden oluşan uygulama sürecinin ilk iki döngüsü araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Birinci ve ikinci döngü aynı sınıfın farklı şubelerinde birer hafta arayla uygulanmış ve birinci döngüde ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören ikinci sınıf 51, ikinci döngüde ise 44 öğrenci ile çalışılmıştır. Tasarımın uygulama aşamasında araştırmacı her bir dersi kayda alarak ders sonrası gözlemlerini bir sonraki döngünün daha verimli olması ve karşılaşılacak olası bütün durumların ayrıntılı bir şekilde sunulması için raporlaştırmıştır. İlk iki döngüde araştırmanın başında ve sonunda sırasıyla başlangıç ve final testleri uygulanmıştır. Öğrencilerin başlangıç ve final testlerine verdikleri cevaplar oluşturulan rubriklere göre analiz edilmiş ve uygun düşünme biçimleri ile ilişkilendirilerek cevap türlerinin son döngü öncesinde belirlenmesi hedeflenmiştir. 6 haftalık süreç boyunca öğrencilere iki adet ödev verilmiştir. Ayrıca araştırmacının raporlarına ek olarak Geogebra şablonları, çalışma yapraklarıyla ve ödevlerle ilgili öğrencilerden elde edilen veriler üç matematik eğitimcisi tarafından değerlendirilerek gerek görülen düzenlemeler ve eklemeler yapılmıştır.

İlk iki döngü sonrasında elde edilen bulgular sonucunda öğrenme ortamının tasarım ilkeleri teknoloji kullanımı, temsil dillerinin kullanımı, ödevler, çalışma yaprakları ve grup çalışması olarak beş başlık altında toplanmıştır. Başlıklar belirlenirken temel olarak araştırmanın kuramsal çerçevesi ve öğrenme ortamının bileşenleri göz önünde bulundurulmuştur. Örneğin teknoloji kullanımı yalnızca yazılımların direk olarak öğrenme ortamına entegre olması olarak düşünülmemiştir. Temelinde somutlaştırma, farkı gösterimlere yer verme, düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlama gibi kuramsal çerçevenin temel prensiplerini barındırması hedeflenmiş ve döngülerden elde edilen bulgularla tasarım ilkeleri belirlenmiştir. Böylece teknoloji öğrenme ortamına entegre ederken nelere dikkat edilmesi gerektiğinden yazılımın nasıl kullanılması gerektiğine dair bazı ilkeler ortaya konulmuştur. Benzer bir şekilde temsil dillerinin kullanımına çalışma yapraklarında, GeoGebra şablonlarında, ödevlerde ve ders içi sunumlarda nasıl yer verilmesi gerektiğine dair ilkeler iki döngü sonucunda ortaya koyulmuştur. Bununla birlikte ödevler, çalışma yaprakları tasarlanırken ve grup çalışması yapılırken araştırmanın kuramsal çerçevesi, literatürde yer alan öneriler ve döngülerden elde edilen bulgular ışığında ilkeler belirlenerek tasarım üçüncü döngü öncesinde hazır hale getirilmiştir.

Çalışmanı son döngüsü aynı üniversitede ortaöğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören ikinci sınıf 11 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. İki döngü sonucunda yapılan değişikliklerle son halini alan tasarım, alanında uzman bir matematik eğitimcisi tarafından uygulanmış ve uygulama sonucunda araştırmacıyla birlikte kendisi de süreç boyunca gözlemlerini raporlaştırmıştır. Öğretimin öncesinde ders hocasına hazırlanan ders planları, öğrenme ortamı ve temel bileşenleri hakkında detaylı bilgiler verilmiş ve dikkat edilmesi gereken bütün noktalara hassasiyetle değinilmiştir. Her ders öncesinde ve sonrasında ders hocası ile görüşmeler yapılarak raporlar yazılmış ve bu raporlara yansıma raporu adı verilmiştir. Diğer döngülerde olduğu gibi araştırmanın başında ve sonunda sırasıyla başlangıç ve final testleri her biri 75'er dakika olacak şekilde uygulanmıştır. Ayrıca diğer döngülerden farklı olarak başlangıç testi, uygulamanın sonunda bir kez daha uygulanmıştır. İlk iki döngüden sonra her kavramla ilgili olarak öğrencilere düzenli olarak ödevler verilmesine karar verilmiş ve bu ödevlerde yer alan sorular üzerinden klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Böylelikle öğrenme ortamını değerlendirebilmek için veriler elde edilmiştir. Ayrıca uygulama sonrasında ders öğretmeni ve öğrencilerin, öğrenme ortamına yönelik görüşleri alınmıştır. Bu görüşler ve alan notları sonrasında öğrenme ortamının tasarımına yönelik belirlenen tasarım ilklerine öğretmenin rolü adı altında bir başlık daha eklenmiştir. Bununla birlikte teknoloji kullanımı, temsil dillerinin kullanımı, ödevler, çalışma yaprakları, grup çalışması başlıkları altında verilen ilkelere araştırma bulguları ışığında eklemeler yapılarak öğrenme ortamı tasarım ilkelerine son hali verilmiştir.

Çalışmanın son aşamasında, uygulama sonunda elde edilen verilerin analizi yapılmıştır. Başlangıç ve final testleri 2017-2018 bahar döneminde uygulanmış ve daha önceden hazırlanan rubrik, literatür ve ilk iki döngüden elde edilen cevapların kategorizasyonu göz önünde bulundurularak değerlendirilmiştir. Böylece öğrencilerin cevaplarının sentetik-geometrik, analitik-aritmetik veya analitik-yapısal düşünme biçimlerinden hangisi ile ilişkili olduğu tespit edilmiştir.

### 3. 3. Çalışma Grubu

Lineer cebir dersi ülkemizde eğitim fakültelerinde genel olarak ikinci yılda verilen bir ders olup matris cebiri ve vektör uzayları teorisi olarak iki temel bölümden oluşmaktadır. Matris cebiri kısmı ikinci yılın birinci döneminde vektör uzayları teorisi ise ikinci döneminde verilmektedir. Bu nedenle her bir döngü çalışmanın yapıldığı eğitim öğretim yılının ikinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Her bir döngünün çalışma grubunu farklı sayıda öğrenci oluşturmaktadır. Aşağıda Tablo 4'te üç döngüde yer alan öğrencilerin sayısına ve araştırmanın yapıldığı tarihlere yer verilmiştir.

Tablo 4. Çalışma Grubu

| Döngüler | Öğrenci Sayısı | Tarih | Bölüm | Üniversite |
|---|---|---|---|---|
| 1. Döngü | 51 | 2016/2017 Bahar Dönemi | İlköğretim Matematik Öğretmenliği | Karadeniz Teknik Üniversitesi |
| 2. Döngü | 44 | 2016/2017 Bahar Dönemi | İlköğretim Matematik Öğretmenliği | Karadeniz Teknik Üniversitesi |
| 3. Döngü | 11 | 2017/2018 Bahar Dönemi | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği | Karadeniz Teknik Üniversitesi |

Bir ve ikinci döngünün çalışma grupları lineer cebir dersini alan aynı sınıfın 51 kişilik A ve 44 kişilik B şubelerinin üniversite ikinci sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Dersler A ve B şubelerinde birer hafta ara ile uygulanmıştır. Birinci döngü için hazırlanan tasarım A şubesinde uygulanmış ve alan notları tutulmuştur. Alan notlarının analizleri sonucu elde edilen bulgular doğrultusunda birtakım revizyonlar yapılmıştır. Bu revizyonlar çalışma yapraklarının tasarımı, çalışma yapraklarında kullanılan dil ve GeoGebra şablonlarına yöneliktir. Yapılan revizyonlardan bir hafta sonra tasarım B şubesine uygulanmıştır. Altı haftalık bir süreç boyunca tasarım A ve B şubelerinde bu şekilde uygulanmıştır. Vektör uzayları teorisi, matris cebiri kısmından sonra lineer cebir dersinin bahar döneminde okutulan kısmıdır. Bu nedenle araştırmanın üçüncü döngüsü ertesi yıl aynı üniversitede lineer cebir dersini alan ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümüne kayıtlı ve devam eden 11 ikinci sınıf öğrencisi ile birlikte uygulanmıştır.

### 3. 4. Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri dört farklı kaynak yoluyla elde edilmiştir. Bunlar; başlangıç testi, final testi, mülakatlar (klinik mülakatlar, yarı yapılandırılmış mülakatlar) ve alan notları ile video kayıtlarıdır. Her bir döngüde araştırma sürecinde yararlanılan veri toplama araçları Şekil 6'da gösterilmiştir.


Şekil 6. Veri toplama araçları uygulama tablosu

Şekil 6'da görüldüğü gibi her döngüde uygulama öncesi ve sonrasından sırasıyla başlangıç (BT) ve final testleri (FT) uygulanmıştır. Ancak üçüncü döngüde ilk iki döngüyle karşılaştırıldığında bazı farklılıklar mevcuttur. Üçüncü döngüde uygulama süreci boyunca öğrencilerle klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakatlar, vektör uzaylarıyla ilgili temel kavramların her birini kapsayan 6 adet ödev üzerinden gerçekleştirilmiştir. İlk iki döngüde iki olan ödev sayısı, üçüncü döngüde alan notları ve gözlemler sonucunda her bir kavramla ilişkili olacak şekilde altı adet olarak düzenlenmiş ve bu ödevlerden üzerinden klinik mülakatların gerçekleştirilmesine karar verilmiştir. Üçüncü döngüde uygulama sonrası BT bir kez daha uygulanmıştır. Böylece final testinin yanı sıra başlangıç testi üzerinden de öğrencilerin düşünme biçimlerinde yaşanabilecek değişiklerin ortaya konulması amaçlanmıştır. Uygulama sonrası uygulanan başlangıç testi BT1 uygulama sonrasından uygulanan başlangıç testi BT2 olarak isimlendirilmiştir. Bununla birlikte öğrenciler ve ders öğretmeninin öğrenme ortamına yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla üçüncü döngünün sonunda öğrenciler ve ders öğretmeniyle mülakatlar yapılmıştır.

### 3. 4. 1. Başlangıç testi

Lineer cebir öğretimine yönelik araştırma kapsamında hazırlanan öğrenme ortamının uygulanmasına başlanmadan önce öğrencilerin düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla Başlangıç Testi (BT) uygulanmıştır (Bkz Ek1). Başlangıç testinde yer alan sorular lineer cebirin birinci dönem konuları olan matrisler, lineer denklem sistemleri ile vektör kavramlarından oluşmaktadır. Çalışmanın başında öğrencilerin, Sierpinska'nın (2000) tanımladığı sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimlerinden hangisine sahip olduklarını belirlemede BT kullanılmıştır. Böylelikle öğrencilerin süreç içerisindeki gelişimlerinin takip edilmesi ve tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine nasıl etki ettiğinin gözlenmesi hedeflenmiştir. BT geliştirilirken literatürden yararlanarak Hillel'in (2000) tanımladığı geometrik dil, cebirsel dil ve soyut dil olmak üzere temsil dillerinin kullanımına özen gösterilmiş böylece soruların öğrencileri belli bir çözüme yöneltmesinin önüne geçilmesi hedeflenmiştir. Farklı düşünme biçimlerini harekete geçirecek şekilde hazırlanan BT'de sorular vektör kavramı ve Matris cebiri konularından seçilmiştir. İlk iki döngüde BT testinde toplam 9 soru yer alırken üçüncü döngüde soru sayısı bir azaltılarak 8 soruya indirilmiştir. Matris kavramıyla ilgili yedinci soru sıklıkla öğrenciler tarafından ilişkisiz cevapların verilmesi nedeniyle BT'den çıkarılmıştır. Hazırlanan sorularda üç uzman matematik eğitimcisinin görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Bu düzenlemeler sadece BT'nin hazırlanma aşamasında değil her döngü sonunda ayrı ayrı ele alınarak süreç içerisinde devam etmiştir. Böylece farklı düşünme biçimlerinin sergilenmesine olanak vermeyen, ifade edilme biçiminde veya yapısında öğrencilerin anlamada zorlandıkları yerler belirlenerek sorular amaca hizmet edecek şekilde düzenlenmiş veya değiştirilmiştir.

### 3. 4. 2. Final testi

Lineer cebir öğretimine yönelik olarak tasarlanan öğrenme ortamının uygulanmasının ardından öğrencilerin düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla Final Testi (FT) uygulanmıştır (Bkz Ek2). Tıpkı BT de olduğu gibi, öğrencilerin FT ye verdikleri cevaplar yardımıyla Sierpinska'nın (2000) tanımladığı sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimlerinden hangisine sahip olduklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Böylece öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerini nasıl etkilediği sorusuna cevap aranmıştır. Geometrik, cebirsel ve soyut dilin kullanımına özen gösterilmiş ve öğrencilerin soruları cevaplarken farklı düşünme biçimlerini kullanarak cevap verebileceği sorular seçilmiştir. Hazırlanan sorulara üç uzman matematik eğitimcisinin görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Yapılan bu düzenlemeler her döngü sonrasında devam edecek şekilde sürekli olarak yapılmıştır. FT'de yer alan birinci soru vektör uzayı, ikinci soru alt uzay, üçüncü soru germe, dördüncü soru lineer bağımlılık/bağımsızlık, beş ve altıncı sorular taban kavramıyla ilişkili olacak şekilde hazırlanmıştır. İlk iki döngüde uygulan final testlerinden farklı olarak testin bütün konuları kapsaması açısından son döngüdeki final testine vektör uzayı kavramına yönelik bir soru eklenmiştir. FT ve BT'de yapılan değişiklik ve düzenlemelerin tümü ayrıntılı bir şekilde tasarım ve uygula süreçlerine yönelik bulgular kısmında ayrı bir başlık altında sunulmuştur.

### 3. 4. 3. Klinik Mülakatlar

Klinik mülakat, üzerinde çalışılan konu hakkında bireyin sahip olduğu bilgileri derinlemesine incelemek ve ortaya çıkarmak için araştırmacı ve birey (görüşülen kişi) arasında yapılan karşılıklı görüşmeler olarak tanımlanabilir (Zazkis ve Hazzan, 1999; Karataş ve Güven, 2003). Bu metodun esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Goldin 1998; Zazkis ve Hazzan 1999; Karataş ve Güven, 2003).

Bu çalışmada öğrencilerin vektör uzayları ile ilişkili kavramlara yönelik anlamalarına ve düşünme biçimlerine odaklanılmıştır. Uygulama süreci boyunca öğrencilerin düşünme biçimlerindeki gelişimlerini değerlendirebilmek amacıyla geliştirilen ödevlerin hepsi tamamıyla açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Öğrencilerin ödevlere verdikleri yazılı cevapların gerekçelerini ve bu cevapların altında yatan düşüncelerini ortaya koymak için üçüncü döngüdeki tüm öğrencilerle klinik mülakatlar yapılmıştır. Her bir öğrenci ile her hafta düzenli olarak verilen ve sırasıyla vektör uzayları, alt uzay, lineer birleşim-germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban-boyut kavramları ile ilgili olan ödevler üzerinden klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Her biri yaklaşık olarak 15-20 dakikalık bu görüşmelerde öğrencilere ödevlerine verdikleri cevaplar gösterilerek elde ettikleri cevaplarla ilgili olarak açıklamalar istenmiştir. Bu süreçte araştırmacı öğrencilere açıklamaları doğrultusunda "Niçin bunu yaptın?", "Nasıl böyle düşündün?" gibi birtakım sorular yöneltmiştir. Böylece öğrencilerin yazılı olarak verdiği cevaplarının gerekçeleri ve düşünceleri altında yatan fikirlerin ortaya çıkartılması çalışılmıştır. Her bir görüşme ayrı ayrı kayda alınarak daha sonra transkript edilmiştir.

### 3. 4. 4. Mülakatlar

Bir olayın, durumun ya da sürecin derinlemesine incelenme ihtiyacı olunan durumlarda mülakat ile daha hızlı ve doğru bilgi elde edilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Yarı yapılandırılmış mülakatlar ise sorularda esneklik sağlaması nedeniyle araştırmacıya kapsamlı bilgi elde etme fırsatı verir (Çepni, 2007). Yarı yapılandırılmış mülakat tekniği sahip olduğu belirli düzeyde standartlık ve aynı zamanda esneklik nedeni ile eğitim bilim araştırmalarında daha uygun bir teknik görünümü vermektedir (Ekiz, 2003).

Yapılan bu araştırmada öğrencilerin ve ders öğretmeninin Lineer Cebir öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamına ilişkin görüşlerinin belirlenmesi amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme formu hazırlanmıştır. Görüşme formunda öğrencilere ve ders öğretmenine öğrenme ortamı, GeoGebra yazılımı, ödevler, çalışma yaprakları, grup çalışması ve motivasyon başlıkları altında sorular yöneltilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme formu araştırmanın üçüncü ve son döngüsünün uygulanmasından hemen sonra gerçekleştirilmiştir. Her bir öğrenci ile yaklaşık olarak 25-30 dakikalık bir sürede görüşme yapılmıştır. Öğrencilerin görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla 15 adet açık uçlu soru oluşturulmuştur (Bkz Ek3). Sorular öğrenme ortamı, yazılım, etkinlikler ve grup çalışması, görevler ve motivasyon başlıkları altında öğrencilere yöneltilmiştir. Öğrencilerin görüşme formuna benzer bir şekilde aynı başlıklar altında 15 adet açık uçlu sorudan oluşan bir görüşme formu uygun yönergeler ekleyerek ders öğretmeni için oluşturulmuştur (Bkz Ek4). Görüşme formunda öğrenme ortamı ile ilgili 2, yazılım ile ilgili 4, görevler ile ilgili 4, etkinlik ve grup çalışması ile ilgili 2 ve motivasyon ile ilgili 3 soru yöneltilmiştir. Yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlarla tasarlanan öğrenme ortamıyla ilgili öğrencilerin ve ders öğretmeninin görüşleriyle birlikte öğrenme ortamının ve temel bileşenlerinin olumlu olumsuz yanlarını da ortaya çıkarmak hedeflenmiştir.

### 3. 4. 5. Alan Notları ve Video Kayıtları

Alan notları, nitel araştırmalarda birincil kayıt aracı olarak kullanılmaktadır. Bu notlar; insanlar, olaylar, etkinlikler ve karşılıklı konuşmalar hakkında bilgilerle dolu; düşünceler, önseziler ve ortaya çıkan örüntülere ilişkin notların alındığı ve araştırmacının gözlemleriyle birlikte bireysel tepkilerini de gözlemleyebileceğimiz bir yerdir (Glesne, 2012; Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmacı ve ders hocası tarafından sınıf ortamındaki gözlemlerde alan notları tutulmuştur. Alan notlarında araştırmacı ve ders hocası tarafından gözlem verilerine ve süreç ile ilgili yorumlara yer verilmiştir. Alan notlarıyla süreç boyunca hem tasarlanan öğrenme ortamıyla ilgili ortaya çıkan sorunlar hem de öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ve anlamadıkları bölümler rapor haline getirilmiştir. Böylece her bir döngü sonrasında alan notları yardımıyla tasarımla ilgili yapılması gereken değişiklikler ve düzenlemeler yapılarak tasarımın geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bununla birlikte her ders boyunca video kayıtları yapılmıştır. Video kayıtları her hafta düzenli olarak kayıt yapılan günlerin tarihleri atılarak bilgisayar ve harici belleğe arşivlenmiş ve uygulama sürecinde veya uygulamadan sonraki zamanlarda izlenmiştir.

### 3. 5. Verilerin Analizi

Veri toplama araçlarından elde edilen nitel verilerin nasıl analiz edildiği ile ilgili bilgiler aşağıdaki bölümlerde ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

#### 3. 5. 1. Başlangıç Testinin Analizi

Öğrencilerin başlangıç testine vermiş oldukları cevaplar nitel veri analizi tekniği kullanılarak soru soru analiz edilmiştir. Veri analizinde amaç öğrencilerin vermiş oldukları cevapları Sierpinska'nın düşünme biçimleriyle ilişkilendirerek hem öğrencilerin düşünme biçimlerini belirlemek hem de verilen cevap türlerini benzerliklerine göre kategorize etmek olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak hangi cevap türünün hangi düşünme biçimi ile ilişkili olduğunu saptamak amacıyla bir rubrik geliştirilmiştir. Rubriğin geliştirilmesinde ilk olarak literatürdeki benzer çalışmalardan yararlanılmıştır. Literatürden elde edilen bilgilerin ışığında araştırmanın ilk döngülerinde öğrencilerin başlangıç testi ve ödevlerine verdikleri cevaplar kullanılarak cevap türleri belirlenmiş ve bu cevaplar düşünme biçimleriyle ilişkilendirilerek bir havuz oluşturulmuştur. Son olarak alanında uzman üç matematik eğitimcisinin görüşleri ve tecrübeleri doğrultusunda BT de yer alan sorulara verilecek bütün cevap türleri ve bu cevapların ilişkili olduğu düşünme biçimleri belirlenerek rubriğe (Bkz Ek5) son hali verilmiştir. Elde edilen her bir kategoriye bir kod atanarak başlangıç testine verilen cevaplar bu kodlara göre analiz edilmiştir. Kodlama işlemi farklı zamanlarda araştırmacı tarafından tekrar edilmiş, bu şekilde zamanlama üçgenlemesi yapılmıştır. Daha sonra üçüncü döngü öncesinde kodlama işlemi alanında uzman başka bir matematik eğitimcisine yaptırılmış ve kodlayıcılar arasındaki görüş birliği 0,93 olarak belirlenmiştir.

#### 3. 5. 2. Final Testinin Analizi

Öğrencilerin final testine vermiş oldukları cevaplar nitel veri analizi tekniği kullanılarak soru soru analiz edilmiştir. FT'nin analizinde BT ile aynı yol takip edilmiştir. Öğrencilerin FT ye vermiş oldukları cevap türlerini ve bu cevapların ilişkili olduğu düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla FT içinde bir rubrik geliştirilmiştir. Rubriğin geliştirilmesinde literatürdeki benzer çalışmalardan yararlanılmıştır. Literatürden elde edilen bilgilerin ışığında araştırmanın ilk döngülerinde öğrencilerin FT ve ödevlerine verdikleri cevaplar kullanılarak cevap türleri belirlenmiş ve bu cevaplar düşünme biçimleriyle ilişkilendirilerek bir havuz oluşturulmuştur. Son olarak alanında uzman üç matematik eğitimcisinin görüşleri ve tecrübeleri doğrultusunda vektör uzayları teorisinin temel kavramlarıyla ilgili sorulara verilecek bütün cevap türleri ve bu cevapların ilişkili olduğu düşünme biçimleri belirlenerek rubriğe (Bkz Ek6) son hali verilmiştir. Bu aşamada matematik eğitimcileri birbirilerinden bağımsız olarak cevap türleri ve ilişkili oldukları düşünme biçimleri üzerinde çalışmıştır. Daha sonra elde ettikleri rubrikleri birbirleriyle karşılaştırmış ve kodlayıcılar arasındaki görüş birliği 0,81 olarak belirlenmiştir. Sonuç olarak tıpkı BT de olduğu gibi elde edilen her bir kategoriye bir kod atanarak üçüncü döngünün sonunda uygulanan FT ye verilen cevaplar bu kodlara göre analiz edilmiştir.

### 3. 5. 3. Klinik Mülakatların Analizi

Ses kayıt cihazı kullanılarak kayda alınan klinik mülakatlar ardından analiz edilmek amacıyla bilgisayar ortamında yazıya dökülmüştür. Öğrencilerle yapılan görüşme notları dikkatli bir şekilde birkaç kez okunmuştur. Klinik mülakatları yapmadaki amaç öğrencilerin vermiş oldukları cevaplarının altında yatan sebepler olduğundan, okuma işlemi bu soruya cevap verebilecek fikirleri ortaya koymak amacıyla yapılmıştır. Klinik mülakat verileri analiz edilirken öğrencilerin sorulara vermiş oldukları yazılı cevapların gerekçelerini açıkladıkları bölümler belirlenerek öğrencilerin cevaplarının altında yatan gerekçelerin ortaya konulması hedeflenmiştir. Klinik mülakatların analizinden elde edilen veriler öğrencilerin FT'ye verdikleri cevapların ne anlama geldiğinin yorumlanmasında kullanılacak şekilde gerçek görüşme kayıtları olduğu gibi sunulmuştur.

### 3. 5. 4. Mülakatların Analizi

Üçüncü döngü sonrasında yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler içerik analizi kullanılarak analiz edilmiştir. İçerik analizinde yapılan işlem temel olarak, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayacağı bir şekilde organize ederek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Verilerin analizine ilk olarak ses kayıtlarının dikkatli bir şekilde dinlenerek transkript edilmesiyle başlanmıştır. Sonrasında içerik analizinin verilerin kodlanması, temaların bulunması, verilerin kodlara ve temalara göre organize edilmesi ve tanımlanması, bulguların yorumlanması aşamaları takip edilmiştir. Elde edilen veriler araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Kodlama işlemi yapılırken öğrencilerin ve ders öğretmenin verdikleri cevaplar dikkatli bir şekilde okunmuş ve kodlar ifadeleri en iyi şekilde temsil edecek şekilde oluşturulmuş ve atanmıştır. Öğrencilerin ve ders öğretmenin vermiş olduğu cevaplardan elde edilen kodların tümü göz önünde bulundurularak verilen cevaplar araştırmacı tarafından yeniden gözden geçirilmiştir. Daha sonra farklı bir matematik eğitimcisi tarafından cevaplar bir kez daha gözden geçirilmiş ve gerekli görüldüğünde yeni kodlar belirlenmiş ya da kodlarda değişikliğe gidilmiştir. Böylelikle yanlış veya eksik kodlamaların önüne geçmeye çalışılmış ve benzer kodlardan mümkün olanları birleştirilmiştir. Örneğin başlangıç testinin birinci sorusunda vektör çiziminin yapıldığı sorulara VÇ kodu, üçüncü sorusunda vektör çizimlerinin yapıldığı cevaplara VGÇ kodu atanmıştır. Başlangıçta farklı sorular olmalarından hareketle farklı kodlar atanmasına rağmen her iki soruda da cevap olarak vektörel çizimlerden yararlanılması nedeniyle VÇ (vektörel çizim) kodu atanmıştır. Yapılan kodlama işlemi ile elde edilen kodlardan aralarından anlam açısından ilişkisi olanlar bir araya getirilmiştir. İlişkili kodların bir araya getirilmesiyle temalar oluşturulmuş ve bu temalara isimler verilmiştir. Veriler daha sonra kodlar ve temaların organize edilmesi ve tanımlanmasıyla okuyucuların anlayacağı bir şekle getirilmiştir. Böylece Lineer Cebir öğretimine yönelik olarak tasarlanan öğrenme ortamına ilişkin öğrenciler ve ders öğretmeninin görüşleri kodlar ve kodlarla ilişkili temalar kullanılarak ortaya konulmuş ve yorumlanmıştır.

### 3. 5. 5. Alan Notları ve Video Kayıtlarının Analizi

Ders hocası ve araştırmacı tarafından tutulan alan notları ile elde edilen gözlem verileri her bir uygulamadan sonra dikkatli bir şekilde gözden geçirilerek bilgisayar ortamına aktarılıp rapor haline getirilmiştir. Elde edilen bu ayrıntılı raporlar sayesinde her bir döngüde tasarımın düzeltilmesi ve yenilenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda alan notlarında yer alan bilgiler kullanılarak tasarımın parçaları olan GeoGebra yazılımda, öğrencilere verilen ödevlerde, kavramların öğretimine yönelik olarak hazırlanan etkinliklerde ve dersin sunum ve içeriğinde düzenlemeler yapılmıştır. Video kayıtları da ders sonralarında ve belirli aralıklarla izlenerek süreç takip edilmiş ve alan notlarının analizinde kullanılmıştır. Ayrıca video kayıtları, alan notları ışığında tasarımın amacına ulaşıp ulaşmadığına ışık tutmak amacıyla izlenmiştir.

# 4. BULGULAR

## 4. 1. Tasarım ve Uygulama Süreçlerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde tasarlanan öğrenme ortamının düzenlenmesine ve geliştirilmesine yönelik olarak atılan adımlarla üçüncü ve son döngü öncesinde öğrenme ortamının tasarım ilkelerinin belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu doğrultuda alan notları ve video kayıtlarının analizinde elde edilen sonuçlar eşliğinde birinci ve ikinci döngüde yapılmasına karar verilen düzenlemeler ve değişiklikler bu bölümde sunulmuştur.

### 4. 1. 1. Birinci Döngü Tasarım Çalışması

#### 4. 1. 1. 1. Çalışma Hikayesi

Çalışma üniversite 2. sınıf öğrencileri ile haftada 4 saat olmak üzere 6 hafta boyunca uygulanmıştır. Lineer cebir dersi bir yıllık süreçte verilen bir derstir. Güz döneminde Matris Cebiri bahar döneminde ise Vektör Uzayları Teorisi kısmı verilmektedir. Bu nedenle çalışmanın birinci döngüsü 2016-2017 eğitim öğretim yılının bahar döneminde 51 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Uygulama vektör uzayları ile ilgili temel kavramlar olan vektör uzay, altuzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarını kapsamaktadır. Uygulamaya geçmeden önce öğrencilerin genel olarak düşünme biçimlerini belirleyebilmek amacıyla başlangıç testi uygulanmıştır. Testin uygulanmasından sonraki süreçte ilk olarak öğrencilere Geogebra yazılımı ile ilgili iki saatlik bir ders verilmiştir. Bu iki saatlik ders süresi boyunca Geogebra programının temel işlevleri verilmiş bununla birlikte özellikle derste kullanılacak bölümlere vurgu yapılmıştır. Çalışma grubunda eğitim araştırmacının kendisi tarafından verilerek araştırmacı araştırmacı-uygulamacı rolünü üstlenmiştir. Derslerin bir bölümü sınıf ortamında yürütülürken bir bölümü de laboratuvar ortamında yürütülmüştür. Etkinlikler laboratuvar derslerinde öğrenciler ile ikişer kişilik gruplar halinde uygulanmıştır. Ders süresince öğrencilerden GeoGebra yazılımıyla etkileşimli olarak çalışma yapraklarını doldurmaları istenmiştir. Uygulama süresince öğrencilere iki adet ödev verilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin vektör uzaylarının temel kavramlarıyla ilgili düşünme biçimlerini belirleyebilmek amacıyla final testi uygulanmıştır. 6 haftalık süreç boyunca bütün dersler video kaydına alınmış ve her bir ders sonrasında araştırmacı tarafından yansıma raporları yazılmıştır. Video kayıtları, yansıma raporları ve araştırmacının gözlemleri dikkate alınarak çalışma yapraklarında, GeoGebra şablonlarında, ödevlerde ve ders içi sunumlarda gerek dillerin kullanımı, düşünme biçimlerinin gelişimi gerekse soruların anlaşılması ve zaman yönünden oluşabilecek sıkıntıları ortadan kaldırmak açısından düzenlemeler yapılmıştır.

#### 4. 1. 1. 2. Birinci Döngüye Yönelik Program Revizyonu

Bu bölümde birinci döngü sonrasında tasarlanan öğrenme ortamıyla ilgili yapılan düzenlemelere yer verilmiştir. Tasarımla ilgili düzenlemeler yapılırken süreç içerisinde düzenli olarak tutulan alan notları ve video kayıtlarının analizinden yararlanılmıştır. Düzenlemeler işlenen kavramların isimlerinin olduğu başlıklar altında ayrı ayrı verilmiştir

*Vektörler, Vektörel Toplam ve Skalerle Çarpım ($R^2$ ve $R^3$)*

Vektörler, vektörel toplama ve skalerle çarpım kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan çalışma yaprakları iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde düzlemde vektörler, vektör ailesi, konum vektörü ve vektörlerin gösterimi konuları, ikinci kısımda ise vektörel toplama ve skalerle çarpım konuları ele alınmıştır.

Etkinliğin ikinci kısmında herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir. Birinci kısımda ise hem çalışma yaprağında hem de Geogebra uygulamasında bazı değişikliklere gidilmiştir. Etkinliğin birinci kısmında öğrencilere hazır bir Geogebra şablonu verilmiş ve bu şablon üzerinden onay kutularını işaretleyerek geometrik şekilleri oluşturmaları istenmiştir. Ancak bu kısımda değişikliğe gidilerek hazır şablonun yerine geometrik yapıları program aracığıyla öğrencilerin oluşturmasının daha faydalı olacağı düşünülmüştür. Daha önce öğrencilere Geogebra dersi verilmiş olmasına rağmen uygulamanın ilk etkinliği olması sebebiyle geometrik yapıları öğrencilerin kendilerinin oluşturmasının onlara hem programı daha çok tanıma hem de keşfetme odaklı çalışmalarına olanak sağlayacağı düşünülmüştür. Çünkü ilerleyen süreçte öğrencilerin diğer kavramlara yönelik GeoGebra şablonlarında vektör oluşturmakta zorlandıkları ve araştırmacıdan sürekli yardım almak istedikleri gözlenmiştir. Vektör uzayları konusu boyunca $R^2$ ve $R^3$ de vektör çizimlerinden sıkça yararlanılacağı için öğrencilerin geometrik yapıları kendilerinin oluşturması bu konuda pratik sahibi olmaları açısından önemlidir. Programdaki bu değişikliğe bağlı olarak da ilk sorunun yönergesi tekrar gözden geçirilerek değiştirilmiştir. Aşağıda Şekil 43'te vektör kavramına yönelik çalışma yaprağının ilk iki sorusunda yapılan değişiklilere yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 1. Döngü | **1** Geogebra programında verilen noktaları kullanarak başlangıç noktası O ve bitiş noktası M olan bir yönlü doğru parçası oluşturup **Etkinlik 1** onay kutusunu işaretleyiniz.<br><br>**2** **'Yönlü Doğru Parçalarını Oluştur'** kutucuğunu işaretleyiniz. |
| 2. Döngü | **1** Geogebra programını kullanarak başlangıç noktası A ve bitiş noktası B olan bir yönlü doğru parçası oluşturunuz.<br><br>**2** Geogebra programında  komutunu kullanarak AB ile eş en az 5 tane yönlü doğru parçası oluşturunuz. |

Şekil 7. Birinci döngü sonrasında etkinlik 1'de yapılan değişiklik

Şekil 7'de görüldüğü üzere birinci döngüdeki çalışma yaprağındaki yönergeler ikinci döngüde gösterildiği gibi düzenlenmiştir. Bunların dışında birinci kısmın 2. sorusunun c şıkkında uygulamada esnasında öğrencilerin anlamakta biraz zorlandıkları gözlenmiştir. Öğrencilere ikinci sorunun c şıkkında ekrandaki vektör ailesini tek bir nokta ile eşleştirmenin mümkün olup olmadığı sorusu yöneltilmiş ve bazı öğrenciler bu ifadeyle ne anlatılmak istediğini anlamadıklarını ifade etmiştir. Bu bölümde vektörlerin geometrik gösteriminden çıkarak cebirsel olarak ifade edilmesi ve öğrencilerin analitik-aritmetik bir düşünme yapısına taşınması hedeflenmiştir. Bu amaçla öğrencilere vektör ailesini temsil eden konum vektörü ve onun koordinatları örnek gösterilerek vektör nokta ilişkisini görmelerine rehberlik edilmiştir. İkinci sorunun c şıkkıyla ilgili çalışma yaprağında bir değişikliğe gidilmemesine rağmen bu kısımlar not alınarak bir sonraki döngüde öğrencilere gerekli açıklamaların yapılmasına karar verilmiştir.

*Vektör Uzayı ve Altuzay*

Vektör uzayı ve altuzayı kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan uygulama, Etkinlik 1 ve Etkinlik 2 adıyla iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde vektör uzayı ikinci bölümde alt uzay kavramları ele alınmıştır.

Çalışma yapraklarında genel olarak çok fazla bir değişikliğe gidilmemiştir. Yalnızca Etkinlik 1 de a, b, c ve d olmak üzere dört şıktan oluşan ilk sorunun a ve b şıkları birleştirilmiştir. Benzer bir şekilde a, b ve c olmak üzere üç şıktan oluşan ikinci sorunun a ve b şıkları birleştirilmiştir. Öğrencilerin soruları okurken anlam bütünlüğünü sağlamakta zorlandıkları gözlenmiştir. Karşılaşılan bu olumsuzluklar nedeniyle ve soruların bütünlüğünün sağlanması amacıyla böyle bir değişikliğe gidilmiştir. Aşağıda Şekil 8'de altuzay etkinliğinin birinci sorusunda yapılan düzenlemeye yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| **1a.** Geogebra yazılımında yandaki gibi bir çember oluşturunuz ve bu çemberin iç bölgesinde veya üzerinde olacak şekilde çeşitli vektörler belirleyiniz.<br>**1b.** Bu vektörleri kullanarak sırasıyla vektör uzayı olma şartlarının gerçekleşip gerçekleşmediğini inceleyiniz. | **1a.** Geogebra yazılımında yandaki gibi bir çember oluşturunuz ve bu çemberin iç bölgesinde veya üzerinde olacak şekilde çeşitli vektörler belirleyiniz ve bu vektörleri kullanarak sırasıyla vektör uzayı olma şartlarının gerçekleşip gerçekleşmediğini inceleyiniz. |

Şekil 8. Alt uzay etkinliğinin birinci sorusunda yapılan düzenleme

Şekil 8'de görüldüğü gibi benzer şekilde ikinci soruda değişiklik yapılarak soru düzenlenmiştir. Etkinliklerdeki sorularda bunun dışında değişikliğe gidilmemiş ancak sorular öğrenciler tarafından anlaşılmış olmasına rağmen etkinlik planlanan süreden daha uzun sürmüştür. Öğrencilerin özelikle ilk iki soruda çizmeleri istenen geometrik yapıları oluşturmakta zaman kaybettikleri gözlenmiş ve rapor edilmiştir. Buna rağmen Geogebra uygulamasıyla ilgili bir değişikliğe gidilmemiş ve ikinci döngüde de benzer bir durum yaşanması durumunda yeniden değerlendirilmesine karar verilmiştir.

*Lineer Birleşim ve Germe*

Lineer birleşim ve germe kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan uygulama Etkinlik 1, Etkinlik 2, Etkinlik 3 ve Etkinlik 4 olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İlk üç etkinlik lineer birleşim kavramının son etkinlik ise germe kavramının öğretimine yönelik olarak hazırlanmıştır.

Bu etkinliğin uygulanmasında dikkat çeken en önemli hususlar zaman sorunu ve motivasyon kaybı olarak ortaya çıkmıştır. Etkinlikte farklı vektör ve bu vektörlerle ilgili farklı durumların yer alması soru sayısının fazla olmasına neden olmuş bu durumda etkinlik için ayrılan süresinin uzamasına neden olmuştur. Öğrenciler her ne kadar etkinlikte yer alan soruların anlaşılmasında ve çözülmesinde genel olarak zorluk yaşamasalar da sürenin uzaması motivasyonlarının düşmesine neden olmuştur. Lineer birleşim ve germe kavramları birbiriyle iç içe doğal olarak ilişkili kavramlardır. Bu nedenle bir bütün olarak ele alınarak işlenmesi gerekmektedir. Bu bakımdan etkinliğin bütünlüğünü koruyacak şekilde sadeleştirmelerin ve etkinliğin daha akıcı olacak şekilde yeniden düzenlenmeler yapılmıştır.

İlk olarak etkinliği biraz daha sadeleştirmek amacıyla uygulamada yer alan Etkinlik 1'in çıkartılmasına karar verilmiştir. Etkinlik 1, beş şıkkın yer aldığı bir sorudan oluşmaktadır. Aşağıda Şekil 45'te Etkinlik 1 de yer alan sorulara yer verilmiştir.

1. $v_1 = (1,0,1)$ ve $v_2 = (0,1,1)$ ve $v_3 = (2,1,3)$ vektörleri verilsin. Bu vektörlerin aşağıda verilen lineer birleşimlerini hesaplayınız.

b) $1.v_1$+$0.v_2$+$0.v_3$
c) $3.v_3$
d) $2.v_1+\frac{3}{2}.v_2-1.v_3$
e) $2.v_1+1.v_2$
f) $a.v_1+b.v_2+c.v_3$

$v = (5,1,6)$ vektörü $v_1, v_2$ ve $v_3$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir mi? Cebirsel ve grafiksel olarak gösteriniz.

Şekil 9. Lineer birleşim etkinliğinden çıkarılan sorular

Etkinlik 1, Şekil 9'da görüldüğü gibi verilen üç vektör ve bu vektörlerin farklı lineer birleşimleriyle ilgili soruları içermektedir. Takip eden diğer etkinliklerde de benzer durum verilen her vektör veya vektörler için öğrencilere soru olarak yöneltilmiş ve tekrar durumuna düşülerek zaman ve motivasyon kaybı gerçekleştiği görülmüştür. Bu sonuçtan hareketle Etkinlik 1'den kaldırılmasına karar verilmiştir.

Bundan sonraki kısımda uygulamadaki sorularla ilgili bir değişikliğe gidilmemiştir. Ancak etkinliğin daha anlaşılır ve akıcı olması için Etkinlik 2 ve Etkinlik 3 kapsadıkları farklı durumlar göz önüne alınarak dört parçaya bölünmüştür. Etkinlik 2, düzlemde tek vektör ve biri diğerinin skaler katı olan iki vektörü içeren durumlara, Etkinlik 3 ise düzlemde farklı iki vektör ile birbirinin lineer birleşimi olarak yazılabilen üç vektörü içeren durumlara odaklanmıştır. Yapılan değişiklikle;

1. Etkinlik 1, tek vektör ve lineer birleşimleri
2. Etkinlik 2, biri diğerinin skaler katı olan iki vektör ve lineer birleşimleri
3. Etkinlik 3, farklı (biri diğerinin skaler katı olmayan)iki vektör ve lineer birleşimleri
4. Etkinlik 4, birbirinin lineer birleşim olarak yazılabilen üç vektör ve lineer birleşimleri

olacak şekilde etkinlikler düzenlenmiştir.

Etkinliklerde yer alan sorularda farklı durumlarda vektörlerin geometrik ve cebirsel gösterimlerine yer verilmiştir. Böylece öğrencilerin kavramların farklı temsilleri arasındaki farklılıkları gözlemleyebilmesi ve doğru bir şekilde kullanabilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca lineer birleşim ve germe kavramlarının en soyut formda anlaşılabilmesi için geometrik ve cebirsel gösterimlerin anlaşılır ve akıcı bir şekilde sunulmasının gerekli olduğu düşünülmüştür.

Lineer birleşim ve germe kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan Geogebra şablonu daha çok geometrik yapıları öğrencilerin kendilerinin oluşturacağı şekilde hazırlanmış ve bu durumda bir değişikliğe gidilmemiştir. Etkinliklerle ilgili birinci döngüde yaşanan zaman ve motivasyonla ilgili sorunların devam etmesi durumunda ise Geogebra şablonunun yeniden gözden geçirilmesine ve etkinliklerin daha akıcı hale getirebilecek bir şablonun tasarlanmasına karar verilmiştir.

*Lineer Bağımlılık/Bağımsızlık*

Lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan uygulama tek bir bölümden oluşmaktadır. Etkinliğin bir bütün olarak uygulanmasının etkinliğin anlaşılmasını zorlaştırdığı ve uygulamaya boyunca öğrencilerin zaman zaman sıkılmalarına neden olduğu gözlenmiştir. Bu duruma etki eden bir diğer faktöründe etkinliğe yönelik hazır bir Geogebra şablonunun olmayışı gösterilebilir. Öğrencilere hazır bir şablon verilmemiş bunun yerine programı kullanarak ihtiyaç duydukları geometrik yapıları oluşturmaları istenmiştir. Ancak birçok öğrenci programı kullanmayı pek tercih etmemiş ve böylelikle çalışma yapraklı odaklı bir etkinlik olmuştur. Bu nedenle özellikle etkinliğin ilk bölümünde somuttan soyuta doğru bir öğrenme gerçekleşmemiş ve programı kullanmayan öğrencilerin direk olarak soyutlamaya kalkışması sorularla ilgili varsayım üretmelerini zorlaştırmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin Geogebra programını aktif olarak kullandıkları derslere daha motive olduklarını göz önüne aldığımızda hazır bir Geogebra şablonunun geliştirilmesine ve etkinliğin üç bölüme ayrılarak anlaşılmasının kolaylaştırılması düşünülmüştür.

Tek bir bölümden oluşan etkinlik ilk olarak üç bölüme ayrılmasına karar verilmiştir. Buna göre;

1. Etkinlik 1, farklı sayıdaki vektör kümelerinin lineer bağımsızlığına yönelik gerekli ve yeter şartların belirlenmesine ilişkin kısım
2. Etkinlik 2, lineer bağımsızlıkla ilgili doğru/yanlış sorularının yer aldığı kısım
3. Etkinlik 3, vektörlerin geometrik gösterimlerinden hareketle lineer bağımsızlıklarının incelendiği kısım

olmak üzere üç bölüme ayrılmıştır. Böylelikle her bir etkinliğin ayrı ayrı uygulanması ve daha anlaşılır hale getirilmesi hedeflenmiştir. Bununla birlikte etkinliklerde yer alan sorularda değişiklikler ve eklemeler yer almıştır.

Etkinlik 1 de yer alan üçüncü ve dördüncü sorularla ilgili değişikliğe giderken öncelikle ikili ve üçlü vektör kümelerinin lineer bağımsızlıklarının inceleneceği örnekler belirlenmiştir. Ardından bu örnekler üzerinden verilen vektör kümelerinin lineer bağımsızlığına yönelik gerekli ve yeter şarta ilişkin öğrencilerin varsayımları sorulmuştur. Aşağıdaki şekilde üçüncü soru ve bu soruda yapılan değişikliklere yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 1. Döngü | 3. 2'dekine benzer şekilde kendi deneyim ve gözlemlerinize bağlı olarak $R^{3}$'de **iki vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız. |
| 2. Döngü | 3. $R^3$ de u=(1,-3,2), v=(0,5,2), w= (-8,12,-4), z=(3,-9,6) ve t=(2,-3,1) vektörlerini alalım. Bu vektörlerin her birini Geogebra ekranında oluşturunuz.<br><br>4. Şimdi {u, v}, {u, w}, {u, z}, {u, t}, {v, w}, {v, z}, {v, t}, {w, z}, {w, t} ve {z, t} kümelerinin her birinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. Elde ettiğiniz deneyim ve gözlemlerinize bağlı olarak $R^{3}$'de **iki vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız. |

Şekil 10. Lineer bağımsızlık etkinliğinin 3. sorusunda yapılan değişiklik

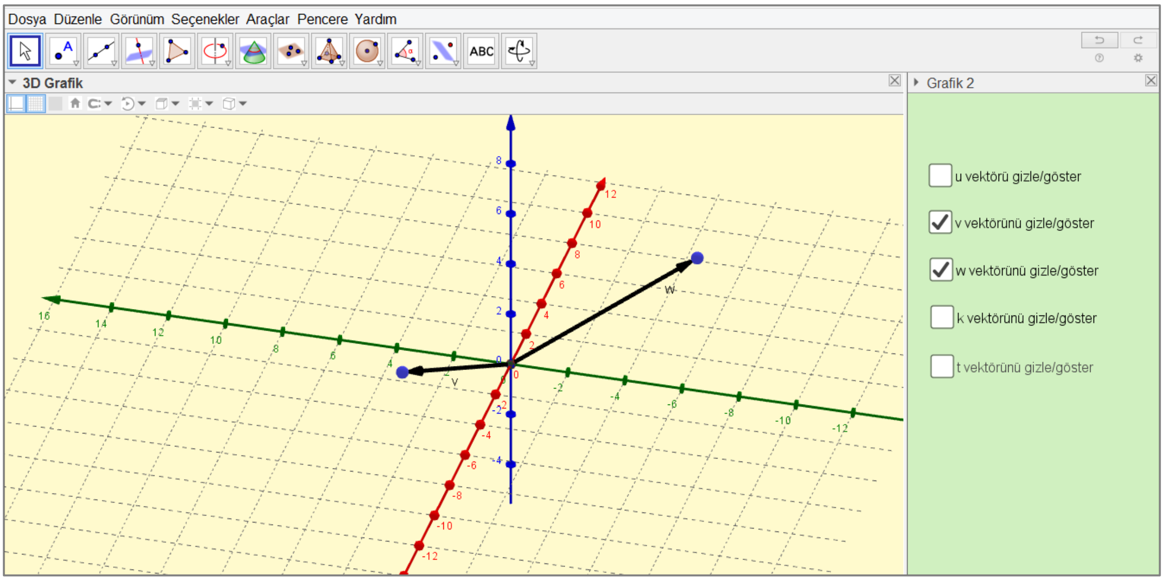
Şekil 10'da görüldüğü gibi yukarıda bahsedilen değişikliklerin ardından ikinci döngüde yer alacak şekilde düzenlenen soruya yer verilmiştir. Görüldüğü gibi direk olarak iki vektörün lineer bağımsızlığı hakkında öğrencilerin fikirlerini sormak yerine daha önceden belirlenen vektörler verilerek bu vektörlerden oluşan ikili vektör kümeleri üzerinden öğrencilere sorular yöneltilmiştir. İlk kısımda öğrenciler GeoGebra programını uygun bir şekilde kullanamamış ve direk olarak kavramın soyut yapısıyla karşı karşıya gelmişlerdir. Bu durum sonucunda kavramla ilgili sezgisel bir anlamanın oluşmadığı dolayısıyla somut içerikten hareketle soyutlama yapma imkanının gerçekleşmediği sonucuna varılmıştır. Ayrıca sorularda kavramlarla ilgili farklı gösterimlere yeterince yer verilmediği görülmüştür. Bu nedenle çalışma yaprağında ilk olarak belirli vektörler verilmiş ve soruyla ilgili Geogebra şablonu hazırlanarak öğrencilerin programı daha etkin bir şekilde kullanması ve somut gösterimlerden yararlanması hedeflenmiştir. Böylelikle bu kısımda programın keyfi kullanımı zorunluluk haline getirilmiştir. Yapılan değişikliklerle birlikte hem farklı temsiller kullanılarak hem de somut içerik daha etkin bir şekilde sunularak öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlaması hedeflenmiştir.

Üçüncü sorudaki değişikliğe benzer bir şekilde ve aynı gerekçelerle dördüncü soruda da değişikliğe gidilmiştir. Etkinliğin dördüncü sorusunda bu sefer üç vektörden oluşan bir vektör kümesinin lineer bağımsızlığına yönelik gerekli ve yeter şarta ilişkin öğrencilerin varsayımları sorulmuştur. Aşağıdaki şekilde üçüncü soru ve bu soruda yapılan değişikliklere yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 1. Döngü | 4. $R^3$'de **üç vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız. |
| 2. Döngü | 6. u=(-6,7,2), v=(3,2,4), w=(4,-1,2), z=(6,4,8), t=(2,0,-4) vektörlerini alalım. Bu vektörlerin her birini Geogebra ekranında oluşturunuz.<br>7. {u, v, w} {v, w, z} {u, w, t} {v, z, t} kümelerinin her birinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. Elde ettiğiniz deneyim ve gözlemlerinize bağlı olarak $R^3$'de **üç vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız. |

Şekil 11. Lineer bağımsızlık etkinliğinin 4. sorusunda yapılan değişiklik

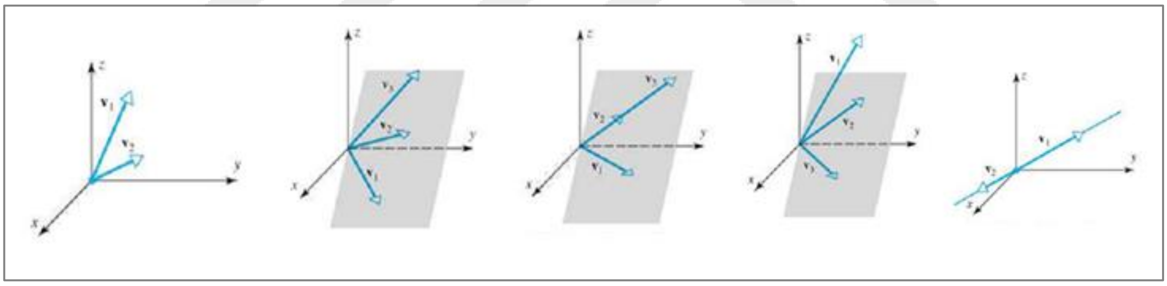
Şekil 11'de görüldüğü gibi yukarıda bahsedilen değişikliklerin ardından ikinci döngüde yer alacak şekilde düzenlenen soruya yer verilmiştir. Sorularda yapılan bu değişikliklerle birlikte verilen vektör kümelerinin bulunduğu bir Geogebra şablonu hazırlanmıştır. Öğrencilerin bu GeoGebra şablonunu kullanarak hızlı bir şekilde vektörleri oluşturması ve etkinliği tamamlaması hedeflenmiştir. Aşağıdaki şekilde Geogebra şablonuna ait bir resim yer almaktadır.




Şekil 12. Tasarlanan GeoGebra şablonu

Şekil 12'de görüldüğü gibi ekranın sağ tarafındaki onay kutularını işaretleyerek öğrencilerin istedikleri vektörleri hızlı bir şekilde oluşturmaları hedeflenmiştir.

Lineer bağımsızlıkla ilgili doğru/yanlış sorularının yer aldığı kısım Etkinlik 2 olarak ayrıldıktan sonra bu kısma bir soru daha eklenmesine karar verilmiş ve “Sıfır vektörünün olduğu her küme lineer bağımlıdır” sorusu eklenmiştir. Etkinlik 1 de sıfır vektörünü içeren bir küme bulunmaktadır ve öğrenciler bu kümenin lineer bağımlılık/bağımsızlığını cebirsel olarak kontrol etmişlerdir. Bu kümenin lineer bağımsızlığına ilişkin bir sorunun öğrencilerin bu konudaki düşüncelerini öğrenmek açısından eklenmesinin önemli olduğuna karar verilmiştir. Böylece öğrencilerin cebirsel olarak çözüm geliştirdikleri bir durumla ilgili en genel formda nasıl düşündüklerini ortaya koymak amaçlanmıştır. Etkinlik 3’te yer alan düşünülen sorularda ise bir değişikliğe gidilmemiş buna karşın bazı eklemelere yer verilmiştir. Etkinlik 1’de yapılan değişikliklere paralel olarak bu kısımda $R^3$ deki vektörlerinde geometrik gösterimlerine yer verilmiş böylelikle öğrencilere hem $R^2$ hem de $R^3$ deki vektörlerin geometrik gösterimleriyle lineer bağımsızlıkları arasındaki ilişkiyi daha iyi anlama fırsatı sunulmuştur. Ayrıca Etkinlik 3’e yapılan eklemelerle sadece $R^2$ deki somut temsillere yer vermekten kaynaklanabilecek kısıtlı öğrenmenin önüne geçilmesi hedeflenmiştir. Aşağıdaki şekilde Etkinlik 3’e eklenen vektörlerin geometrik gösterimlerine yer verilmiştir.



Şekil 13. Lineer bağımlılık/bağımsızlık etkinliğine eklenen şekiller

Şekil 13’de görüldüğü gibi yapılan bu değişiklik ve eklemelerle lineer bağımlılık/bağımsızlık etkinliği ikinci döngü için düzenlemiştir.

*Taban ve Boyut*

Taban ve boyut kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan uygulama Etkinlik 1 ve Etkinlik 2 olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. İlk etkinlik taban kavramının ikinci etkinlik ise hem taban hem boyut kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanmıştır. Etkinlik 1’de $R^2$ nin elemanlarından oluşan 3 adet vektör kümesi verilmiş ve bu vektör kümelerinin $R^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığının araştırılması hedeflenmiştir. Ayrıca öğrencilerden GeoGebra programını kullanarak verilen vektör kümelerini çizmeleri istenmiştir.

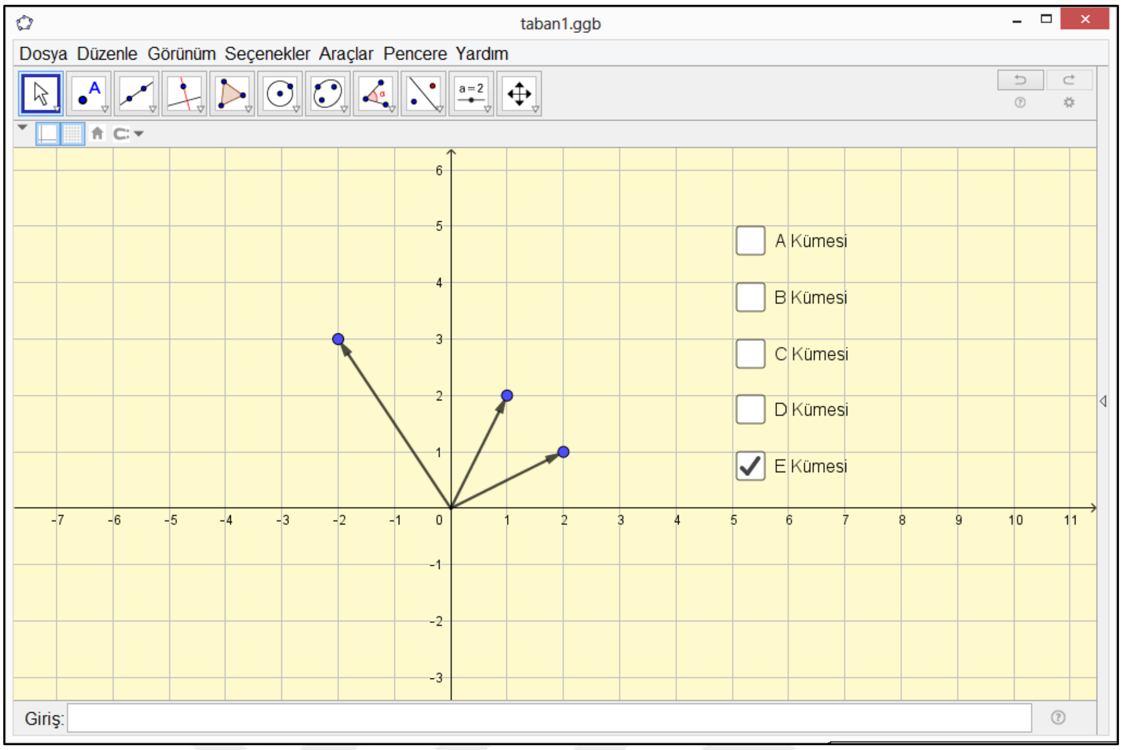
Etkinlik 1'deki yer alan sorularla ilgili öğrencilerin anlamadıkları bir bölümle karşılaşılmamıştır. Ancak etkinliğin ilerleyen kısımlarında öğrencilerin tabana ve boyut kavramlarıyla ilgili çıkarımlarda bulunmakta zorlandıkları gözlenmiş ve rapor edilmiştir. Bu duruma yönelik olarak verilen kümelerin $R^2$ vektör uzayının tabanlarına yönelik olası bütün durumları kapsamadığı fark edilmiş ve bu nedenle öğrencilerin belli durumlar üzerinden öğrenmelerinin gerçekleştiği sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin kavrama yönelik olarak analitik-aritmetik düşünme biçimlerinin gelişimi açısından da çalışma yaprağında verilen kümelerin birçok farklı durumu karşılayacak şekilde düzenlenmesi ve öğrencilere mantıksal çıkarımlar yapma fırsatı vermesi yönünde düzenlemeler yapılmıştır. Bu nedenle ilk olarak birinci soruda verilen küme sayısı üçten beşe çıkarılmış ve diğer olası durumlarda soruya eklenmiştir. Aşağıda şekilde etkinlik 1'in ilk sorusunda yapılan değişikliğe yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 1. Döngü | 1) Bilgisayarınızdan Taban1 isimli dosyayı açınız. Aşağıda verilen vektör kümelerini programda işaretleyerek ayrı ayrı gösteriniz. Vektör kümelerinin $R^2$ vektör uzayının birer tabanı olup olmadığını aşağıdaki tabloyu doldurarak inceleyiniz.<br>**A** = {(1, 2), (2, 4)} **B** = {(1, 1), (-2,3)} **C** = {(2, 5), (0, 0)} |
| 2. Döngü | 1) Bilgisayarınızdan Taban1 isimli dosyayı açınız. Aşağıda verilen vektör kümelerini programda işaretleyerek ayrı ayrı gösteriniz. Vektör kümelerinin $R^2$ vektör uzayının birer tabanı olup olmadığını aşağıdaki tabloyu doldurarak inceleyiniz.<br>**A** = {(1, 2)} **B** = {(1, 2), (2, 4)} **C** = {(1, 1), (-2,3)} **D** = {(2, 5), (0, 0)} **E** = {(1, 2), (-2, 3), (2,1)} |

Şekil 14. Taban etkinliğinin 1. sorusunda yapılan değişiklik

Şekil 14'de görüldüğü gibi tek bir elemandan ve üç elemandan oluşan iki vektör kümesi daha eklenerek olası bütün durumlara yer verilmiştir.

Etkinlikle ilgili karşılaşılan bir diğer durum ise öğrenciler geometrik yapıları oluştururken zaman kaybetmişlerdir. Ayrıca her ne kadar vektörel çizimler yapacak olmalarına rağmen bazı öğrenciler geometrik yapıların oluşturulmasında zorluk yaşamışlardır. Bu sorunun üstesinden ve öğrencilerin sağlıklı bir şekilde somut örnekler üzerinde çalışabilmesi için bir GeoGebra şablonun oluşturulmasına karar verilmiştir. Aşağıdaki şekilde tasarlanan GeoGebra şablonuna ait ekran görüntüsüne yer verilmiştir.




Şekil 15. Taban etkinliği için hazırlanan GeoGebra şablonu

Şekil 15'de görüldüğü gibi vektör kümelerinin hızlı ve sağlıklı bir şekilde çizilebilmesi için vektör kümeleri hazırlanan şablonla öğrencilere hazır olarak verilmiştir. Bunun dışında doğru yanlış sorularından oluşan Etkinlik 2 kısmında herhangi bir değişikliğe gidilmesine ihtiyaç duyulmamıştır.

### 4. 1. 2. İkinci Döngü Tasarım Çalışması

#### 4. 1. 2. 1. Çalışma Hikayesi

Çalışma üniversite 2. sınıf öğrencileri ile haftada 4 saat olmak üzere 6 hafta boyunca uygulanmıştır. Lineer cebir dersi bir yıllık süreçte verilen bir derstir. Güz döneminde Matris Cebiri bahar döneminde ise Vektör Uzayları Teorisi kısmı verilmektedir. Bu nedenle çalışmanın birinci döngüsü 2016-2017 eğitim öğretim yılının bahar döneminde 44 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Uygulama, birinci döngüde olduğu gibi vektör uzayları ile ilgili temel kavramlar olan vektör uzay, altuzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarını kapsamaktadır. İkinci döngüde dersler birinci döngü ile birer hafta arayla yapılmıştır. İkinci döngüde genel olarak birinci döngü ile benzer basamaklar takip edilmiştir. Uygulamaya geçmeden önce öğrencilerin genel olarak düşünme biçimlerini belirleyebilmek amacıyla başlangıç testi uygulanmıştır. Testin uygulanmasından sonraki süreçte ilk olarak öğrencilere Geogebra yazılımı ile ilgili iki saatlik bir ders verilmiştir. Bu iki saatlik ders süresi boyunca Geogebra programının temel işlevleri verilmiş bununla birlikte özellikle derste kullanılacak bölümlere vurgu yapılmıştır. Çalışma grubunda eğitim araştırmacının kendisi tarafından verilerek araştırmacı araştırmacı-uygulamacı rolünü üstlenmiştir. Derslerin bir bölümü sınıf ortamında yürütülürken bir bölümü de laboratuvar ortamında yürütülmüştür. Etkinlikler laboratuvar derslerinde öğrenciler ile ikişer kişilik gruplar halinde uygulanmıştır. Ders süresince öğrencilerden GeoGebra yazılımıyla etkileşimli olarak çalışma yapraklarını doldurmaları istenmiştir. Birinci döngüde olduğu gibi ikinci döngüde de öğrencilere iki adet ödev verilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin vektör uzaylarının temel kavramlarıyla ilgili düşünme biçimlerini belirleyebilmek amacıyla final testi uygulanmıştır. 6 haftalık süreç boyunca bütün dersler video kaydına alınmış ve her bir ders sonrasından araştırmacı tarafından yansıma raporları yazılmıştır. Video kayıtları, yansıma raporları ve araştırmacının gözlemleri dikkate alınarak tıpkı birinci döngüde olduğu gibi çalışma yapraklarında, GeoGebra şablonlarında, ödevlerde ve ders içi sunumlarda gerek dillerin kullanımı, düşünme biçimlerinin gelişimi gerekse soruların anlaşılması ve zaman yönünden oluşabilecek sıkıntıları ortadan kaldırmak açısından düzenlemeler yapılmıştır.

#### 4. 1. 2. 2. İkinci Döngüye Yönelik Program Revizyonu

Bu bölümde ikinci döngü sonrasında tasarlanan öğrenme ortamıyla ilgili yapılan düzenlemelere yer verilmiştir. Tasarımla ilgili düzenlemeler yapılırken süreç içerisinde düzenli olarak tutulan alan notları ve video kayıtlarının analizinden yararlanılmıştır. Düzenlemeler işlenen kavramların isimlerinin olduğu başlıklar altında ayrı ayrı verilmiştir.

*Vektörler, Vektörel Toplam ve Skalerle Çarpım ($R^2$ ve $R^3$)*

Vektörler, vektörel toplama ve skalerle çarpım kavramlarının yer aldığı etkinliğin gerek biçimsel olarak düzenlenmesi gerekse her bir konu başlığına ayrı ayrı odaklanılması amacıyla üç bölüme ayrılması planlanmıştır. İki bölümden oluşan ve ilk bölümde vektörler, ikinci bölümde vektörel toplama ve skalerle çarpım kavramlarını içeren etkinlik yapılan değişiklikle;

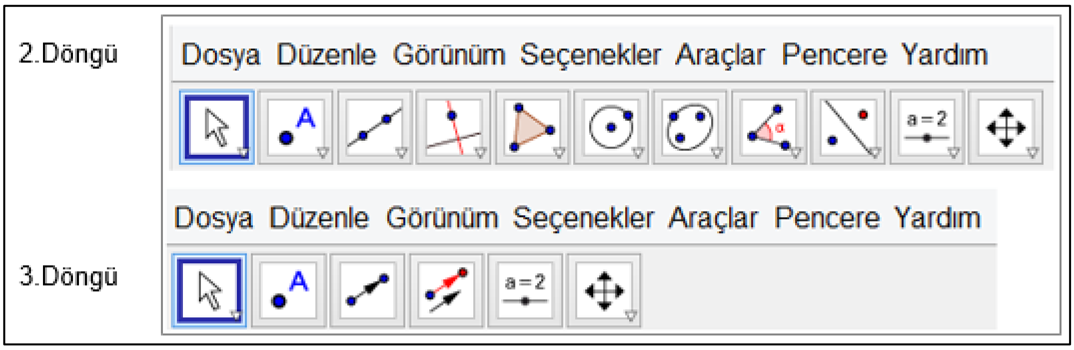
1. Vektörler, çalışma yaprağı 1
2. Vektörel toplama, çalışma yaprağı 2
3. Skalerle çarpım, çalışma yaprağı 3

olacak şekilde düzenlenmiştir. Her bir konu başlığına karşılık bir çalışma yaprağı hazırlanarak etkinliği daha anlaşılır ve biçimsel olarak daha düzgün bir hale getirilmesine çalışılmıştır. Bunun dışında vektörler ve vektörel toplama kavramlarını içeren kısımlarında değişikliğe gidilmesine gerek duyulmamış bu kısımda sadece bazı soruların soruş biçimi ve yönergeleri değiştirilmiştir. Bu değişikliklere gidilmesinde öğrencilerin sorunun anlaşılmasıyla ilgili sıkça soru sormaları etkili olmuştur. Bu şekilde değişiklikler yapılarak soruların daha açık ve anlaşılır olmasına katkı sağlayacağına karar verilmiştir. Aşağıdaki şekilde bu değişikliklere yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 2.Döngü | **1** Bilgisayarınızdan Etkinlik 2 dosyasını açarak $\bar{u}$ = (2,3) ve $\bar{v}$ = (3,-4) vektörlerini ardından yazılımın özelliklerini kullanarak $\bar{u}$ + $\bar{v}$ vektörünü oluşturunuz.<br>**2** Toplam vektörü düzlemde hangi noktaya karşılık gelmektedir? Cevabı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız. |
| 3.Döngü | **1)** **u**=(2,3) ve **v**=(3,-4) vektörleri veriliyor.<br>**a)** Geogebra programını kullanarak u ve v vektörlerini oluşturunuz ve ardından Geogebra programını kullanarak **u + v** toplam vektörünü elde etmeye çalışınız.<br>**b)** Toplam vektörü düzlemde hangi noktaya karşılık gelmektedir. Cevabı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız. |

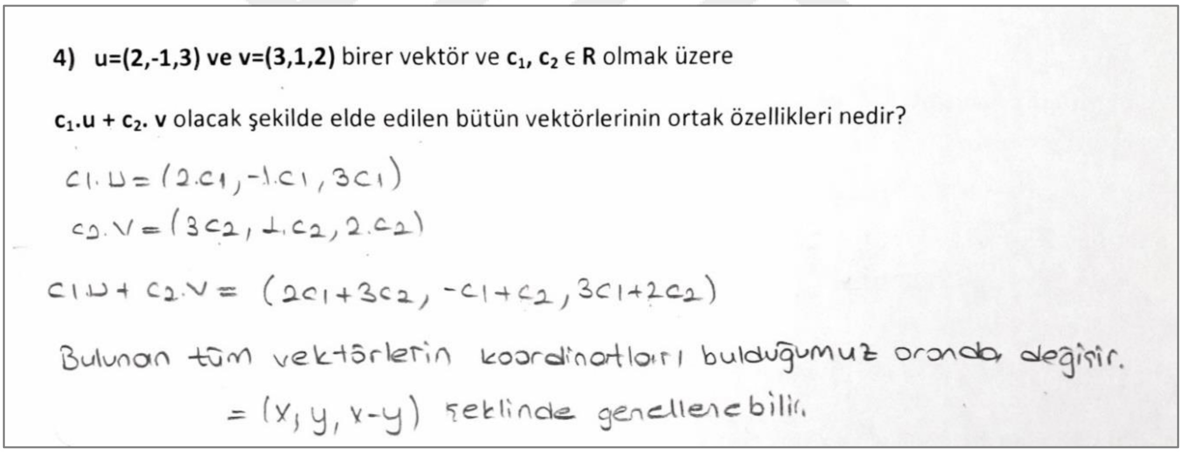
Şekil 16. Vektör etkinliğinin 1 ve 2. sorularında yapılan değişiklik

İkinci döngüdeki yönergeler Şekil 16'da görüldüğü gibi düzenlenerek üçüncü döngüde için hazırlanmıştır. Bu soruyla aynı formatta sorulan ve $R^3$ teki vektörleri içeren diğer soruda da benzer bir şekilde değişikliğe gidilerek düzenleme yapılmıştır. Buna ek olarak Geogebra programının araç çubuğunda özelleştirme yapılmış etkinlik süresince sadece öğrencilerin kullanacakları özelliklerin araç çubuğunda yer alması düşünülmüştür. Çünkü uygulama boyunca bazı öğrencilerin süreçte işlerine yaramayacak özellikleri kullanmaya çalıştığı bazı öğrencilerin ise keyfi olarak Geogebra yazılımını kullandığı gözlenmiştir. Böylelikle öğrencilerin araç çubuğunda yer alan ve konu ile ilgili geometrik yapıların oluşturulmasında ihtiyaç olmayan diğer özelliklerle zaman kaybetmesinin önüne geçilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca zaman zaman bazı öğrencilerin etkinlikten bağımsız olarak geometrik şekillerin çizimiyle ilgilendikleri gözlenmiştir. Bu durumun önüne geçmek ve zaman kaybını önlemek için böyle bir değişikliğin yapılması uygun görülmüştür. Aşağıda şekilde üst kısımda 1 ve 2. döngülerde kullanılan araç çubuğu alt kısımda 3. döngüde kullanılması düşünülen araç çubuğuna yer verilmiştir.




Şekil 17. Geogebra araç çubuğunda yapılan değişiklikler

Şekil 17'de bahsedilen ve daha çok biçimsel olarak yapılan değişikliklerden farklı olarak skalerle çarpma bölümünde soru çıkarılıp soru eklenmesine karar verilmiştir. Bu kısımda öğrencilere $R^2$ den bir vektör verilerek ve bu vektörün bir c reel sayı skaleri ile çarpılmasının Geogebra programıyla incelenmesi istenmiştir. Ardından aşağıdaki şekildeki soruya yer verilmiştir.



**4) u=(2,-1,3) ve v=(3,1,2)** birer vektör ve $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere

$c_1.u + c_2.v$ olacak şekilde elde edilen bütün vektörlerinin ortak özellikleri nedir?

$c_1.u = (2.c_1, -1.c_1, 3c_1)$

$c_2.v = (3c_2, 1.c_2, 2.c_2)$

$c_1u + c_2v = (2c_1+3c_2, -c_1+c_2, 3c_1+2c_2)$

Bulunan tüm vektörlerin koordinatları bulduğumuz oranda değişir.

$= (x, y, x-y)$ şeklinde genellenebilir.

Şekil 18. Öğrencilerin 4. soruya verdiği cevap

Öğrencilerin soruya verdikleri cevaplar çoğunlukla Şekil 18'de gösterildiği gibidir. Aslında soru ile öğrencilerin daha önceki somut deneyimlerinden hareketle vektörel toplama ve skaler çarpma kavramları ile ilgili düşünmelerini (i) analitik-aritmetik düşünme biçimine taşımak, (ii) vektör uzayı kavramı öncesi $R^2$ ve $R^3$ deki vektörlerin toplamının ve skalerle çarpımının yine aynı küme yer aldığı fikrine ulaşmak amaçlanmıştır. Ancak sorunun çözümüyle iki vektörün lineer birleşimlerinin kümesinin elde edildiği ve arzulanan sonuca ulaşılamadığı gözlenmiştir. Çünkü öğrenciler çözümlerinde yalnızca aritmetik işlemlere yer vererek soruda istenilen özelliklere yönelik açıklama yapmamışlardır. Bu nedenle bu sorunun çıkarılarak yerine öğrencilerin somut deneyimlerini artırmak amacıyla

$R^2$ de bir vektör ve bir c reel sayı skaleri ile çarpımına benzer bir şekilde $R^3$ ten bir örnek verilmiştir. Aşağıdaki şekilde bu soruya yer verilmiştir.

**4** GeoGebra'nın 3 boyutlu grafik ekranında $\bar{u}$ = (3, 1, 2) vektörünü oluşturunuz.

Yazılımın sürgü komutunu kullanarak $\bar{u}$ vektörü için bir sürgü oluşturunuz. Sürgüyü hareket ettirdiğinizde u vektöründe nasıl bir değişiklik olmaktadır? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

**5** Sürgünün 2 ve – 3 değerleri için oluşan vektörleri cebirsel olarak hesaplayınız. Oluşan vektörleri nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

Şekil 19. Vektörler etkinliğinde 4. soruda yapılan değişiklikler

Şekil 19'da görüldüğü gibi yapılan değişikliklerin ardından etkinlik biçimsel düzenlenmelerle birlikte 3. döngüye hazırlanmıştır.

*Vektör Uzayı ve Alt Uzay*

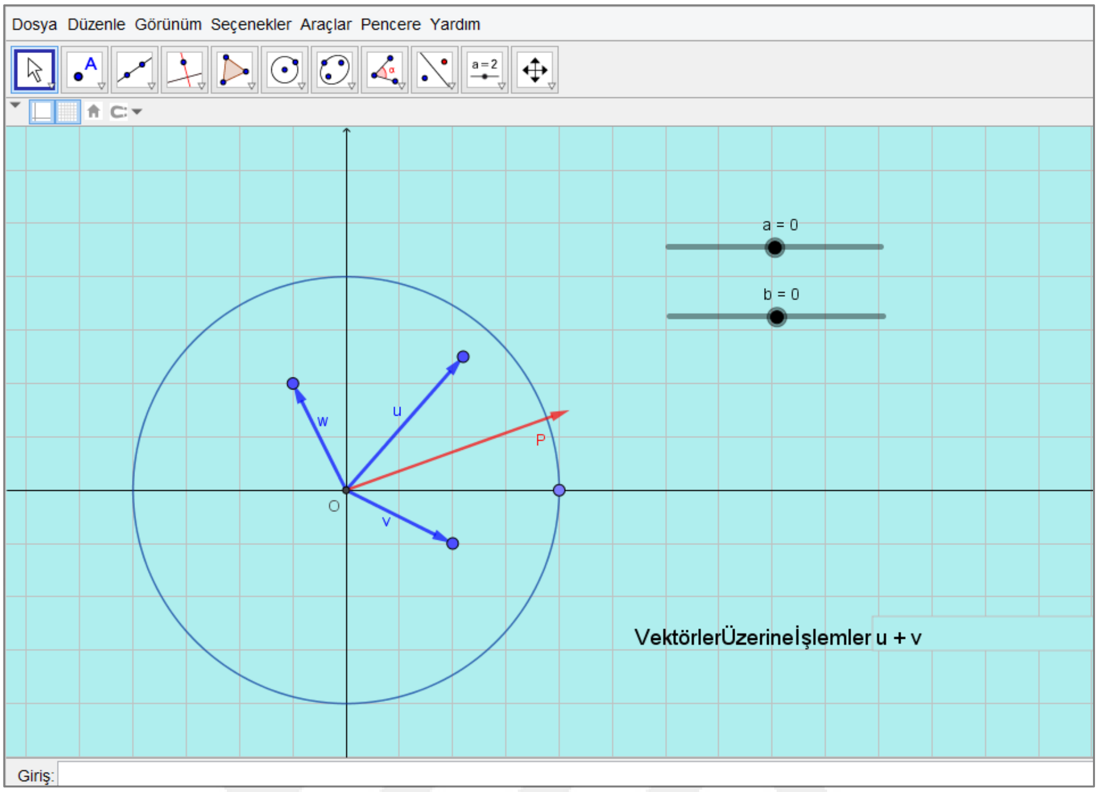
Vektör uzayı ve altuzay kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan etkinlerin uygulamasında birinci ve ikinci döngüde karşılaşılan en önemli problem etkinlikler için tasarlanan sürenin üzerine çıkılmış olmasıdır. Vektör uzay etkinliği dört farklı kümenin geometrik gösterimlerinden hareketle vektör uzayı olma şartlarının kontrol edildiği problemleri barındırmaktadır. Her bir kümenin geometrik olarak inşası öğrencilere bırakılmış ve öğrencilerin bu yapıları oluşturması ya zaman almış ya da çizememişlerdir. Bu durumda doğal olarak sürenin uzamasına neden olmuştur. Öğrencilerin geometrik yapıları oluşturamaması etkinlikle hedeflenen vektör uzayı kavramının somutlaştırılmasına engel olmuştur. Bununla birlikte sürenin uzamasına neden olan bir diğer faktörde alt uzay etkinliğinde yer alan ve her bir problem durumu için vektör uzay olma şartlarının yer aldığı tablonun doldurulmasında geçen zamandır. Aşağıdaki şekilde bu tabloya yer verilmiştir.

| Vektör uzayı olma şartları | Problem 1 | Problem 2 | Problem 3 | Problem 4 |
|---|---|---|---|---|
| u + v ϵ V | | | | |
| u + v = v + u | | | | |
| (u + v) + w = u + (v + w) | | | | |
| u + 0 = u | | | | |
| u + (-u) = 0 | | | | |
| cu ϵ V | | | | |
| c(u + v) = cu + cv | | | | |
| (c + d)v = cv + dv | | | | |
| c(dv) = (cd)v | | | | |
| 1u = u | | | | |

Şekil 20. Alt uzay etkinliğinde yer alan tablo

Şekil 20’de çalışma yaprağında yer alan vektör uzay olma şartlarına yer verilmiştir. İlk olarak tabloda 1’den 10’a kadar sadece numaralandırılarak gösterilen vektör uzayı olma şartları özelliklerin kendileri yazılarak değiştirilmiştir. Çünkü, uygulama boyunca öğrencilerin özellikleri farklı sıralamalarla kullandığı, sürekli birbirlerine ve ders öğretmenine sorular sorarak sınıfta konudan bağımsız bir şekilde tartışma ortamı oluştuğu gözlenmiştir. Bu durumun dersin uzamasına yol açtığı gibi dersin akışını olumsuz etkilediği rapor edilmiştir. Oluşan bu problemin üstesinden gelmek için şekil %56’da da verildiği gibi hangi özelliğin kaç numaralı özellik olduğunun karıştırılmasının önüne geçmek için bu tip bir düzenleme yapılmıştır. Yapılan bu düzenlemenin ardından tablo alt uzay etkinliğinden çıkarılarak vektör uzayı etkinliğinin olduğu bölüme aktarılmıştır. Tablonun vektör uzayı etkinliğine taşınmasıyla öğrencilerin bir taraftan her bir problem durumunun vektör uzayı olma şartlarını incelerken bir taraftan da tabloyu doldurarak zamandan tasarruf etmesi hedeflenmiştir.

Yapılan bu değişikliğin ardından öğrencilerin vektör uzayı etkinliğinde yer alan geometrik yapıları oluşturmada yaşadıkları zorlukları aşmak için hazır Geogebra şablonlarının hazırlanmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir. Böylece verilen kümelerle ilişkili geometrik yapıların hızlı ve doğru bir şekilde oluşturulması buna bağlı olarak öğrencilerin sezgisel anlamalarını güçlendirmek hedeflenmiştir. Çünkü öğrenciler yapıları oluşturma da zorluk yaşadıkları gözlenmiş ve bu durum zaman kaybı yaşanmasına neden olmuştur. Ayrıca yaşanan bu zorluklar kavramın öğretilmesinde somut modellere yer verilmesi ve onun üzerinden sezgisel anlamalar oluşturulması amacını sekteye uğratmıştır. Çizimleri gerçekleştiremeyen bazı öğrencilerin etkinlikleri bırakıp ders öğretmenini beklediği görülmüştür. Bu nedenle her bir problem durumu için sırasıyla Problem1, Problem2, Problem3 ve Problem4 isimleri verilen Geogebra uygulamaları hazırlanarak öğrencilerin vektör uzayı olma şartlarından her birini hızlıca kontrol etmesi amaçlanmıştır. Ayrıca öğrencileri analitik düşünme biçimlerine taşıyacak somut içeriğin doğru olarak araştırmacı tarafından hazırlanmasının öğrencilerin yanlış somut veriler üzerinden varsayımlarda bulunmasının da önüne geçecektir. Aşağıdaki şekilde Problem1’e ait Geogebra şablonuna yer verilmiştir.




Şekil 21. Alt uzay etkinliği tasarlanan GeoGebra şablonu

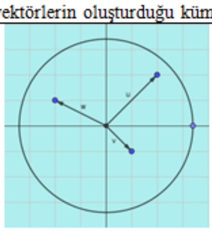
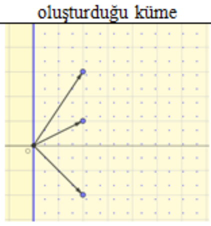
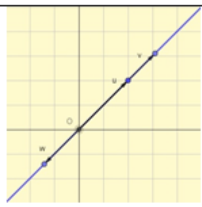
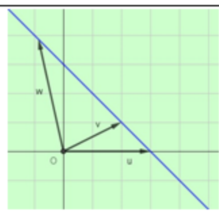
Şekil 21'de görüldüğü gibi problemde yer alan geometrik yapı (bu soruda çember), vektörler ve sürgüler öğrencilere şablonla hazır olarak sunulmuştur. Öğrencilerin programda yer alan "Vektörler Üzerine İşlemler" kısmına vektör uzayı olma şartlarını yazarak kontrol etmesi ve programın dinamik yapısını kullanarak somut içeriğe doğru ve hızlı bir şekilde ulaşması hedeflenmiştir. Diğer problem durumları içinde aynı teknik kullanılarak şablonlar oluşturulmuştur. Bununla birlikte "Vektörler Üzerine İşlemler" komutu kavramların geometrik ve cebirsel gösterimleri arasındaki bağlantının kurulduğu bir komut olarak işlev görmesi araştırmanın amacına da hizmet etmesi amacıyla GeoGebra şablonunda yer verilmiştir.

Vektör uzayı ile ilgili etkinlik Çalışma Yaprağı 5, alt uzay ile ilgili etkinlik ise Çalışma Yaprağı 6 olarak isimlendirilmiştir. Ayrıca vektör uzayı olma şartlarının tamamının öğrenciler tarafından geometrik olarak gösterilmesi için yeni bir etkinlik düzenlenmiştir. Çünkü ilk iki döngü süresince öğrencilerin vektör-vektör uzayı arasındaki ilişkiyi tam olarak kuramadıkları öğrencilere verilen ödevler üzerinden gözlenmiştir. Bu etkinlikte $R^2$'nin vektör uzayı olduğunun geometrik olarak Geogebra ile gösterilmesi hedeflenmiş ve bu etkinlik Çalışma Yaprağı 4 olarak isimlendirilmiştir.

Geogebra uygulaması kısmında yapılan düzenlemelere rağmen etkinliklerde yer alan soruların yapısıyla ilgili değişiklilere gidilmemiş ancak soruların sunuşunda ve etkinliklerin biçimsel formatında öğrencilerde merak uyandırmak ve etkinliği daha akıcı hale getirmek amacıyla düzenlemeler yapılmıştır. Her bir kümeye ait tanımlar ile geometrik gösterimleri bir bütün olarak çalışma yaprağında sunulmuş ve tek bir soru üzerinden kümelerin $R^2$'de tanımlanan standart işlemlere göre vektör uzayı olma şartlarını sağlayıp sağlamadığının öğrenciler tarafında araştırılması istenmiştir. Ayrıca etkinlikte kümelerin cebirsel gösterimlerine de yer verilerek farklı gösterimlere yer verilmesi hedeflenmiştir. Aşağıdaki şekilde yapılan düzenlemelerin ardından çalışma yaprağı 5'e yer verilmiştir.

**ÇALIŞMA YAPRAĞI 5**

Bilgisayarınızdan Problem 1, Problem 2, Problem 3 ve Problem 4 isimli GeoGebra dosyalarını ayrı ayrı açarak her bir kümenin $R^2$'de tanımlanan standart işlemlere göre vektör uzayı olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını araştırınız. Yaptığınız incelemeler sonunda grup arkadaşınızla aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **Problem 1** | **Problem 2** | **Problem 3** | **Problem 4** |
|---|---|---|---|
| Merkezi orijin, yarıçapı r olan bir çemberin iç bölgesindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | Düzlemde $x \geq 0$ bölgesi üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | $y = mx$ doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | $y = mx + n$ doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme |
|  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx + n, n \neq 0\}$ |

| **Vektör uzayı olma şartları** | **Problem 1** | **Problem 2** | **Problem 3** | **Problem 4** |
|---|---|---|---|---|
| **u + v ϵ V** | | | | |
| **u + v = v + u** | | | | |
| **(u + v) + w = u + (v + w)** | | | | |
| **u + 0 = u** | | | | |
| **u + (-u) = 0** | | | | |
| **cu ϵ V** | | | | |
| **c(u + v) = cu + cv** | | | | |
| **(c + d)v = cv + dv** | | | | |
| **c(dv) = (cd)v** | | | | |
| **1u = u** | | | | |

Şekil 22. Yapılan düzenlemelerin ardından çalışma yaprağı 5

Şekil 22'de görüldüğü gibi problemlerin bu şekilde sunularak daha sade ve anlaşılır olmaları amaçlanmıştır. Ayrıca farklı dilleri kullanmaya teşvik etmesi açısından öğrencilere ek kâğıt verilerek geometrik çözümlerinin dışında da varsa farklı çözümler geliştirmeleri istenmiştir. Çünkü öğrenciler genellikle verilen problem durumlarını geometrik çıkarımları kullanarak çözmüş ancak cebirsel çözümler geliştirmedikleri gözlenmiştir. Etkinlikler öğrencilerin bütün düşünme biçimlerini geliştirmek ve temsil dillerini kullanmasına yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu nedenle öğrencilere ek kâğıt verilerek alternatif çözümler üretmeleri istenmiştir.

*Lineer Birleşim ve Germe*

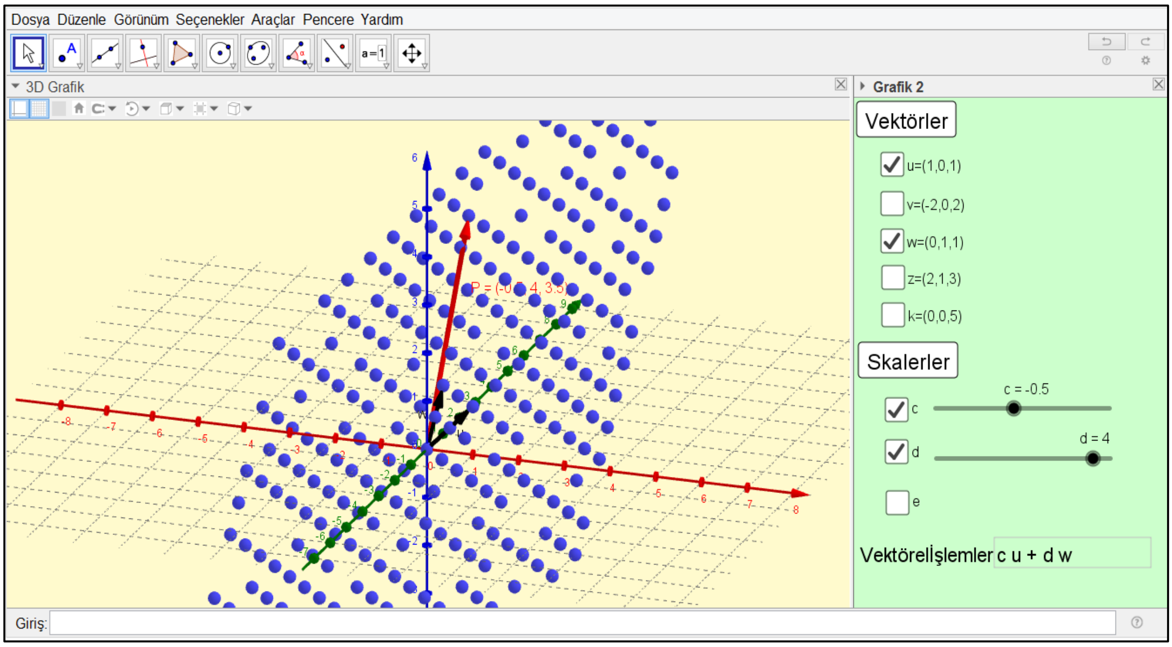
Lineer birleşim ve germe kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan etkinliklerin uygulanmasının ardından Geogebra şablonunda ve etkinliklerde bazı değişiklerin yapılmasına karar verilmiştir. Etkinlikler birinci döngüye oranla daha akıcı bir şekilde uygulanmasına rağmen zamanla ilgili sıkıntının bu etkinlikte de devam ettiği gözlenmiştir. Bu sorunu ortadan kaldırmaya yönelik olarak etkinliği biraz daha sadeleştirmek ve daha anlaşılır kılmak için bazı sorular birleştirilerek yeniden sorulmuştur. Bununla birlikte etkinliklerde biçimsel olarak da değişikliğe gidilmiştir. Aşağıdaki şekilde çalışma yaprağının yedi ve sekizinci sorularında yapılan düzenlemeye yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 2.Döngü | 7. $v_1$ *ve* $v_2$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilen tüm vektörler için cebirsel bir tanımlama yapınız. Yaptığınız tanımlamaya dayalı olarak $v_1$ *ve* $v_2$ vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin kümesinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini tahmin ediniz.<br><br>8. Şimdi Geogebra yazılımında Ekranda $v_1$ *ve* $v_2$ vektörlerini oluşturunuz. "iz" komutunu aktif hale getiriniz ve sürgüde $c_1$ ve $c_2$ skalerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz $c_1.v_1 + c_2.v_2$ vektörlerinin geometrik yerini arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız. |
| 3.Döngü | 7 İşlem pencerenize $cu + dv$ yazınız. Elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz. Sürgüde $c$ ve $d$ skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz $cu + dv$ vektörlerinin oluşturduğu kümenin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız. Bu kümeyi cebirsel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Ulaştığınız sonuçları aşağıdaki boşluğa yazınız. |

Şekil 23. Lineer birleşim etkinliğinin 7 ve 8. sorularında yapılan değişiklikler

İkinci döngüdeki yönergeler Şekil 23'deki gibi düzenlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin cebirsel sorulara daha ayrıntılı cevaplar verirken Geogebra programını kullanarak geometrik yaklaşımlarda bulunmaları gereken sorulara daha kısa cevaplar verdikleri gözlenmiştir. Bunun nedeni olarak öğrencilerin programı daha çok kontrol amaçlı olarak kullandıkları sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin cebirsel soruların çözümüne daha yatkın olduğu düşünülerek etkinliklerde soruların soruş sırasında değişiklikler yapılarak Şekil 23'de de görüldüğü üzere geometrik yaklaşım gerektiren soruların bir adım öne geçirilmesi düşünülmüştür. Bu duruma benzer olarak etkinlikte yer alan diğer sorularda da aynı değişikliğe gidilmiştir.

Uygulama esnasında bazı sorularda istenilen geometrik yapıların oluşturulması öğrencilerin zamanını almış bu durumda etkinlik için belirlenen sürenin uzamasına neden olmuştur. Bu bakımdan birinci döngüde karşılaşılan bu sorun devam etmiş bu nedenle Geogebra şablonunda değişikliklere gidilmiştir. İlk olarak şablonda biçimsel olarak değişikliğe gidilmiş ve vektörler ile sürgüler ayrı başlıklar altında sunulmuştur. Öğrencilerin birden fazla vektörle işlem yapmaları gereken kısımlarda basit hatalar yaptıkları (yanlış skaler ile vektörün çarpılması, sürgülerin yanlış kullanımı vs.) bu nedenle zaman kaybettikleri gözlenmiştir. Bu basit hataların önüne geçmek ve çok daha kısa sürede geometrik yapıları oluşturmak için Geogebra şablonuna 'Vektörel İşlemler' adı altında bir girdi alanı eklenmesine karar verilmiştir. Girdi alanı istenilen işlemin cebirsel olarak yazılıp "enter" tuşuna basıldığında geometrik karşılığını ekrana yansıtan bir özelliktir. Aşağıdaki şekilde yapılan düzenlemelerin ardından Geogebra şablonuna yer verilmiştir.




Şekil 24. Lineer birleşim germe etkinliğinde yer alan GeoGebra şablonu

Şekil 24'ün sağ alt kısmında yer alan vektörel işlemler alanına "cu + dw" ifadesi yazılarak elde edilen vektör ekranda kırmızı bir vektör olarak yansımıştır. Böylece öğrencilerin geometrik şekilleri oluşturmada ve bundan kaynaklanan kavrama ilişkin çıkarımlar yapmakla ilgili yaşadıkları zorlukların üstesinden gelinmesi hedeflenmiştir. Ayrıca etkinliğin uygulama süresinin daha kısaltılması hedeflenmiştir. Yapılan bu değişikliklerin ardından etkinliğe çalışma yaprağı 8 adı verilmiştir.

*Lineer Bağımlılık/Bağımsızlık*

Lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarının öğretimine yönelik olarak hazırlanan etkinliklerde genel olarak daha çok biçimsel olarak değişikliği gidilmiş ve bununla birlikte bazı sadeleştirmeler yapılmıştır. İlk döngüde hazırlanan etkinlik çok sözel kalmış ve bu yönde bazı değişiklikler yapılmıştı. İkinci döngüde ise sorularda verilen vektör kümelerinin fazla oluşundan dolayı her birinin ayrı ayrı incelenmesinin zaman aldığı ve benzer durumların tekrarlandığı gözlenmiştir. Ders boyunca da öğrencilerin tepkilerinden soruda verilen kümelerin lineer bağımsızlığına ilişkin çözümler yaparken sıkıldıkları ve yoruldukları rapor edilmiştir. Bu bakımdan sorularda öğrencilere lineer bağımsızlıklarını incelemeleri için verilen vektör kümeleri yeniden gözden geçirilerek tekrar eden durumlar belirlenmiş ve sadeleştirilerek en az sayıda vektör kullanarak en etkili şekilde öğrenmenin sağlanması hedeflenmiştir. Örneğin ikinci soruda öğrencilere $R^3$ te beş vektör ve bu beş vektör ile oluşturulacak tüm ikili vektör kümeleri verilmiştir. Yapılan incelemenin ardından 10 tane olan vektör kümesi sayısı tekrar eden örneklerin çıkarılmasıyla 6 taneye düşürülmüştür. Aşağıdaki şekilde soru ve soruda yapılan değişikliklere yer verilmiştir.

2.Döngü

3. $R^3$ de u=(1,-3,2), v=(0,5,2), w= (-8,12,-4), z=(3,-9,6) ve t=(2,-3,1) vektörlerini alalım. Bu vektörlerin her birini Geogebra ekranında oluşturunuz.

4. Şimdi {u, v}, {u, w}, {u, z}, {u, t}, {v, w}, {v, z}, {v, t}, {w, z}, {w, t} ve {z, t} kümelerinin her birinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. Elde ettiğiniz deneyim ve gözlemlerinize bağlı olarak $R^3$'de **iki vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız.

3.Döngü

3 Geogebra programınızda LBZ dosyasını açınız. Geometri pencerenizde yer alan u = (1,-3,2), v = (-3, 3, 1), w = (2,-6, 4), k = (-1,-3,5) vektörlerini aşağıdaki sorulara uygun olacak şekilde aktif hale getirerek vektör kümelerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz.

| **Vektör Kümesi** | **L.Bağımlı** | **L.Bağımsız** | **Çözüm** | **Vektörlerin Birbirine Göre Konumu** |
|---|---|---|---|---|
| {u, v} | | | | |
| {u, w} | | | | |
| {u, k} | | | | |
| {v, w} | | | | |
| {v, k} | | | | |
| {w, k} | | | | |

4 Yukarıda yaptığınız çalışmalardan $R^3$'de iki vektörün lineer bağımsız olmasına yönelik bir **gerek ve yeter şart** belirlenebilir mi? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

Şekil 25. Lineer bağımsızlık etkinliğinin 3 ve 4. sorularında yapılan değişiklikler

Şekil 25'tekine benzer bir şekilde etkinlikte yer alan 5 ve 6 sorularda değişikliğe gidilerek 6 altı olan vektör kümesi sayısı tekrar eden durumların çıkarılmasıyla 4'e düşürülmüştür. Bunun yanı sıra etkinliğin bu kısmında öğrencilerin karışık bir şekilde not tuttukları ve bu yüzden varsayım üretmede zaman kaybettikleri gözlenmiştir. Bu nedenle sorular öğrencilerin çözümlerini daha düzenli bir şeklide yapacağı ve yorumlayacakları bir tablo formatında düzenlenerek sunulmuştur. Etkinliğin birinci kısmında yapılan bu değişikliklerin ardından Etkinlik 2 ve etkinlik 3'te değişikliğe gidilecek bu durumla karşılaşılmamış araştırmacı sadece etkinlik 3'te yer alan şekilleri daha profesyonel bir şekilde yeniden çizerek etkinliğe eklemiştir. Ayrıca etkinlik çalışma yaprağı 10 olarak isimlendirilmiştir.

*Taban ve Boyut*

İkinci döngünün uygulanmasından sonra taban ve boyut kavramına yönelik olarak hazırlanan etkinliklerde gerek biçimsel olarak gerek içerik olarak bazı düzenlemelere yer verilmiştir. Doğru yanlış sorularının yer aldığı etkinlik 2 kısmında bir değişikliğe gidilmemiştir. Bütün düzenlemeler etkinlik 1'de gerçekleştirilmiştir.

Etkinlik 1 adı altında yapılan uygulama esnasından öğrencilerin zorlandıkları herhangi bir durumla karşılaşılmamıştır. Ancak etkinlik gözden geçirildiğinde yalnızca $R^2$ vektör uzayına ait vektör kümelerinin taban olma durumları incelenmiştir. Öğrencilerin taban ve boyut kavramıyla ilgili öğrenmelerinin yalnızca $R^2$ vektör uzayı ile sınırlı kalmaması ve daha sağlıklı bir şekilde genelleme yapabilmeleri için etkinlik 1'e $R^3$ vektör uzayına ait vektör kümelerinin de eklenmesine karar verilmiştir. $R^3$ vektör uzayının taban olma durumlarının inceleneceği kümeleri belirlerken $R^2$ de olduğu gibi olası bütün durumları içerek kümeler seçilmiştir. Aşağıdaki şekilde etkinlik 1'e eklenen soruya yer verilmiştir.

2) Şimdi Geogebra programında Taban2 isimli dosyayı açınız. $\vec{u}$ = (2, 1, 3), $\vec{v}$ = (-1, -2, 4), $\vec{w}$ = (-2, 3, 1), $\vec{z}$ = (-3, -3, 1) vektörlerini aşağıdaki sorulara uygun olacak şekilde aktif hale getiriniz ve programı kullanarak sırasıyla aşağıda verilen vektör kümelerinin $R^3$ vektör uzayı için taban olup olamayacağını inceleyiniz.

| Vektör Kümesi | LB | LBS | G | Taban | Açıklama |
|---|---|---|---|---|---|
| {u, v} | | | | | |
| {u, v, w} | | | | | |
| {u, v, z} | | | | | |
| {u, w, z} | | | | | |
| {u, v, w, z } | | | | | |

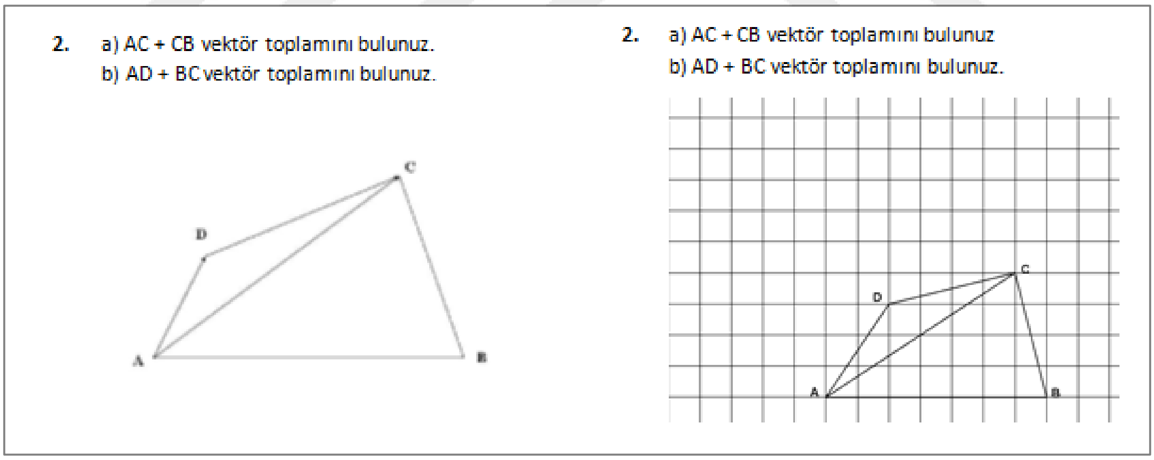
Şekil 26. Taban etkinliğine eklenen sorular

Ayrıca Şekil 26'da görüldüğü gibi öğrencilerin çözümlerini yapabilecekleri bir tablo oluşturulmuş ve etkinliğe eklenmiştir. İlk iki döngüde öğrencilerin çözümlerini yaparken fazla küme olmasından dolayı soruları karıştırdıkları bu nedenle çıkarım yaparken zaman kaybettikleri ve zorlandıkları gözlemiştir. Bu durumun önüne geçmek ve öğrencilerin doğru çıkarımlar yapmalarına olanak sağlaması açısından tablo eklenmesi uygun görülmüştür. $R^3$ vektör uzayına dair eklenen bu soruyla ilişkili olarak bir GeoGebra şablonu $R^2$ deki soruya benzer bir yapıyla hazırlanarak uygulamaya dahil edilmiştir. Son olarak Etkinlik 1 ve Etkinlik 2 birleştirilerek Çalışma yaprağı 11 adıyla son halini almıştır.

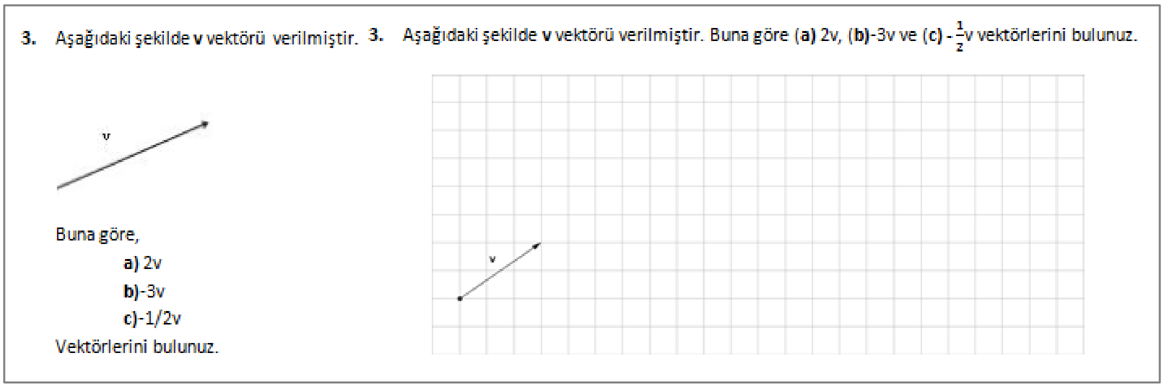
*Başlangıç ve Final Testleri*

BT'de ilk olarak testin uygulanması için öğrencilere verilen süre 75 dakika olmasına rağmen öğrencilerin testi daha kısa sürede çözdükleri gözlenmiştir. Bu nedenle bir sonraki döngü için BT testinin süresinin bir saate düşürülmesine karar verilmiştir.

Birinci döngü sonrasında BT'nin ikinci ve üçüncü sorularında değişikliğe gidilmesine karar verilmiştir. Karar verilen değişiklikler sorunun yapısıyla ilgili bir değişiklik değildir. Geometrik bir dille sorulması hedeflenen soruda kare ızgaralar kullanılmamış ve bu nedenle öğrencilerin istenilen şekilleri orantılı bir şekilde çizemedikleri gözlenmiştir. Öğrenciler birim kareleri kendilerinin çizerek oluşturmaya çalıştıkları görülmüş bu nedenle ikinci ve üçüncü sorularda bir sonraki döngü için kare ızgaraların kullanılmasına karar verilmiştir. Aşağıdaki şekillerde bu sorularda gerçekleştirilen değişikliklere yer verilmiştir.




Şekil 27. Başlangıç testinin ikinci sorusunda yapılan değişiklik




Şekil 28. Başlangıç testinin üçüncü sorusunda yapılan değişiklik

Şekil 27 ve Şekil 28'de BT'nin ikinci ve üçüncü sorularında yapılan düzenlemelere yer verilmiştir. BT' nin yedinci ve sekizinci sorularında da değişikliğe gidilmiştir. BT nin yedinci sorusunun öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılmadığı ve cevap vermekte güçlük çektikleri gözlenmiştir. Bu nedenle ilişkisiz cevapların artmış ve bu cevapların düşünme biçimleriyle ilişkilendirilmesinde zorluklar yaşanmıştır. Sorunun BT testi için uygun olup olmadığından emin olmak için bir sonraki döngüde de yer verilmesine ve aynı sorunun devam etmesi halinde testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Bu durum tasarım tabanlı araştırma yönteminin araştırmacıya sağladığı bir esneklik olarak görülebilir. Ancak ikinci döngüde de aynı sorunun devam etmesi nedeniyle bu soruya üçüncü döngüde yer verilmemiştir.

İlk iki döngünün sonunda BT nin matematik eğitimcileri tarafından değerlendirilmesi sonucunda ikinci, üçüncü ve yedinci sorularının sonunda yer alan "bulunuz." ve "ne söylenebilir?" ifadeleri yerine "gösteriniz." İfadesinin kullanılmasına karar verilmiştir. "Gösteriniz." ifadesinin kullanılmasıyla öğrencilerin zihinlerindeki düşünme biçiminin ortaya çıkmasına katkı sağlayacağı ve belli bir çözüme yöneltmeyeceği düşünülmüştür.

Araştırmanın ilk iki döngüsü aynı sınıfın farklı şubelerinde birer hafta ara ile gerçekleştirildiğinden FT her iki sınıfa da aynı anda uygulanmıştır. Bu nedenle birinci döngü ile ikinci döngü arasında herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. FT nin hazırlanmasında BT ye benzer işlemler uygulanmıştır. FT geliştirilirken kuramsal çerçeve ile ilgili literatürden yararlanarak her bir temsil dilini barındıran ve farklı düşünme biçimlerini harekete geçirebilecek soruların seçilmesine dikkat edilmiştir. Hazırlanan sorulara üç uzman matematik eğitimcisinin görüşleri alınarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. FT testinde sorular vektör uzayları teorisi konusundan seçilmiş ve ilk iki döngü sonunda uygulanan testte 5, üçüncü döngünün sonunda uygulanan testte 6 soru öğrencilere yöneltilmiştir. Üçüncü döngünün sonunda uygulanan testin kapsayıcı olması bakımından FT ye vektör uzayı kavramı ile ilgili bir soru eklenmesi uygun görülmüştür.

Aşağıda Tablo 33'de ilk iki döngüde ve son döngüde uygulanan FT ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Tablo 5. Döngülerde Sınav Sorularının İlişkili Olduğu Kavramlar

| Soru | 1. ve 2. Döngü | 3. Döngü |
|---|---|---|
| 1. | Alt uzay | Vektör Uzayı |
| 2. | Germe | Alt Uzay |
| 3. | Lineer Bağımlılk/Bağımsızlık | Germe |
| 4. | Taban-Boyut | Lineer Bağımlılık/Bağımsızlık |
| 5. | Taban | Taban-Boyut |
| 6. | - | Taban |

Üçüncü döngüde FT ye vektör uzayı kavramı ile ilgili bir soru eklenerek her konu ile ilgili bir sorunun bulunması sağlanmıştır. Lineer birleşim kavramının germe, lineer bağımsızlık ve taban kavramları ile yakından ilişkili olduğu göz önünde bulundurularak başlı başına lineer birleşim kavramı ile ilgili bir soru yöneltilmemiştir. İlk iki döngüde FT de yer alan sorularla ilgili gerek sınav esnasında gerekse sınavdan sonra yapılan değerlendirmelerde herhangi bir sorunla karşılaşılmamıştır. Ancak 1. ve 2. Döngü sonucunda alt uzay, germe ve taban kavramları ile ilgili sorularda birtakım değişikliğe gidilmiştir. FT sınavları aynı zamanda öğrencilerin lineer cebir vize sınavlarının yerini almaktadır. Bu nedenle bazı sorularda kullanılan dil ve yapısı bozulmadan düzenlemeler yapılması etik açıdan uygun görülmüştür. Örneğin alt uzay kavramına yönelik olarak ilk iki döngüde hazırlanan soru üçüncü döngüde yine cebirsel dil kullanılarak yöneltilmiş ancak verilen kümenin yapısından ve tanımlanan işlemlerde değişikliğe gidilmiştir. Benzer bir şekilde diğer kavramlarla ilişkili sorularda da verilen kümelerin aynı olmamasına dikkat edilerek düzenlemeler yapılmıştır.

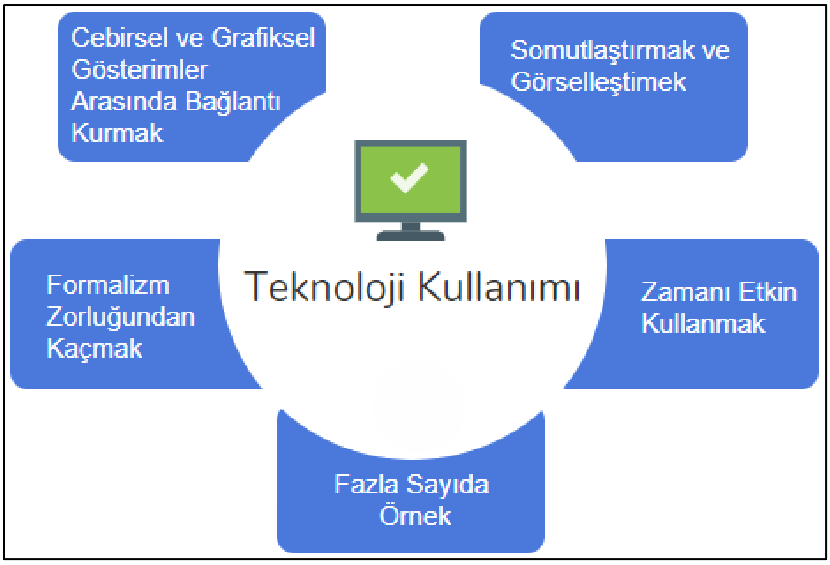
### 4. 1. 3. Öğrenme Ortamı Tasarım İlkeleri

Bu araştırmada lineer cebir öğretimine yönelik bir öğrenme ortamının tasarlanması uygulanması ve değerlendirmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda literatür incelenerek lineer cebir öğretimine yönelik öğrenci zorlukları, öğrenme ve öğretmeye yönelik ilkeler ve öneriler dikkate alınarak oluşturulan kuramsal çatı çerçevesinde bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Tasarlanan öğrenme ortamı iki döngülük bir uygulama sürecinden geçmiş, bu süreç boyunca tasarımda birtakım revizyonlar yapılarak son hali verilmiş ve bazı tasarım ilkeleri belirlenmiştir. Aşağıdaki şekilde lineer cebir öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamının tasarım ilkelerine yer verilmiştir.


Şekil 29. Öğrenme ortamı ilkeleri

Şekil 29'da görüldüğü gibi tasarlanan öğrenme ortamına yönelik prensipler teknoloji kullanımı, temsil dilleri, ödevler, çalışma yaprakları ve grup çalışması olarak belirlenmiştir.

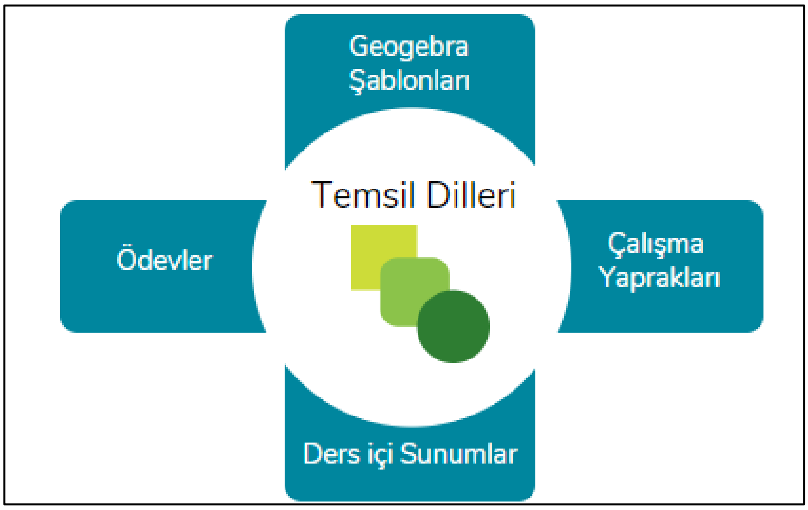
Teknoloji kullanımı aynı zamanda literatürde lineer cebir öğretimine yönelik olarak yapılan önerilerden biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğrenme ortamına teknolojinin entegrasyonunu sağlamak için dersler bilgisayar destekli olarak laboratuvar ortamında yapılmıştır ve derslerde dinamik matematik yazılımı olan Geogebra kullanılmıştır. Aşağıda Şekil 30'da teknoloji kullanımına yönelik ilkelere yer verilmiştir.




Şekil 30. Teknoloji kullanımına yönelik ilkeler

Dinamik matematik programı olarak Geogebra matematiksel nesnelerin hem geometrik hem de cebirsel gösterimlerine yer veren bir yazılımdır. Geogebra yazılımı kullanılarak her bir kavrama yönelik olarak özel şablonlar hazırlanmıştır. Şablonlar öğrencilerin kavramların grafiksel ve cebirsel gösterimleri üzerinde çalışarak bu gösterimler arasındaki bağlantıyı kurmalarına yardımcı olacaktır. Görselleştirme öğrencilerin kavramlarla ilgili anlamalarına yardımcı olmakla birlikte öğrencilerin derse dikkatlerini vermelerini sağlayan bir etkendir. Bununla birlikte öğrencilerin somut modeller üzerinde çalışması sağlanarak kavramların yalnızca formal yapısı üzerinde değil sezgisel yapısına da vurgu yapılacaktır. Böylelikle literatürde de bahsedilen formalizm zorluğundan kaçınarak somut modeller öğrencilerin soyut kavramları anlamalarına ve özümsemelerine yardımcı olacak şekilde hazırlanacaktır. Bununla birlikte teknoloji kullanımı derslerde zamanın çok daha etkin bir şekilde kullanılmasına olanak sağlayarak öğrenciler daha kısa sürede çok sayıda örnek üzerinde çalışma fırsatı verecektir.

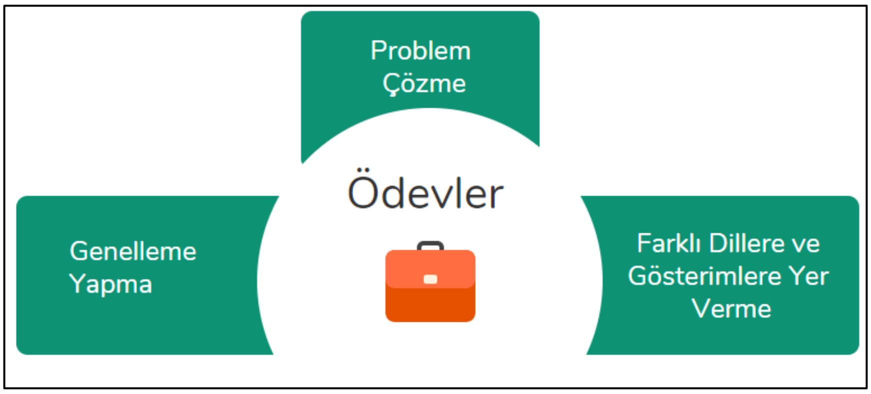
Araştırmanın kuramsal çerçevesini de oluşturan Hillel'in tanımlamış olduğu lineer cebir dersinde kullanılan diller tasarlanan öğrenme ortamının temel prensiplerinden biridir. Öğrenme ortamı tasarlanırken öğrencilerin formal tanımlarda kullanılan dil ve sembolleri anlamada yaşadıkları zorluklar ile kavramların öğretiminde net bir ayırım yapmadan diller arasında geçişlerden kaynaklanan zorluklar göz önünde bulundurarak GeoGebra şablonları, çalışma yaprakları, ders içi sunular ve ödevler hazırlanmıştır. Aşağıda Şekil 31'de temsil dillerinin kullanımına yönelik ilklere yer verilmiştir.




Şekil 31. Temsil dillerine yönelik ilkeler

Öğrencilerin farklı dilleri tanıması ve kullanması açısından GeoGebra şablonlarının, ders içi sunumların, etkinliklerin ve ders sonrasında verilen ödevlerin farklı dilleri içermesine dikkat edilmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları farklı düşünme biçimlerini uygun bir şekilde sergileyebilmesi için dilleri tanıması ve kullanmasına imkân verecek şekilde ders içeriği oluşturulmuştur. Teknoloji kullanımın bir parçası olan GeoGebra şablonları öğrencilerin sezgisel anlamalarının gelişimine katkı sağlamanın yanında kavramların cebirsel ve grafiksel gösterimleri arasındaki bağlantıyı kurmalarında önemlidir. Benzer bir şekilde ödevler, çalışma yaprakları ve ders içi sunumlarında da geometrik, cebirsel ve soyut dillere belli bir sistematikle yer verilmiş ve öğrencilerin dilleri tanıması ve etkin bir şekilde kullanması hedeflenmiştir. Hillel'in temsil dilleri ve Sierpinska'nın düşünme biçimleri arasındaki ilişki göz önünde bulundurulduğunda öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişiminde dillerin öğrenme ortamında yer alan eğitimsel faaliyetlerin bir parçası olması araştırmanın amacı açısından önemlidir. Dikkat edilecek olursa araştırmanın kuramsal çatısı öğrenme ortamının tasarım ilkelerinin de temelini oluşturmaktadır. Geogebra şablonları, ders içi sunumlar, çalışma yaprakları ve ödevler hazırlanırken sadece öğrencilerin temsil dillerinin kullanımı ve düşünme biçimlerinin gelişimine odaklanılmamış aynı zaman Harel'in somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik prensiplerinin de karşılanması hedeflenmiştir. Etkinliklerde kavramlarını somut modellerine ve geometrik temsillerine birçok farklı problem ve durum üzerinden yer verilerek öğrencilerin uygun çıkarımlarda bulunmaları amaçlanmıştır.

Her bir ders sonrası öğrencilere verilen ödevler öğrenme ortamının ilkelerinden biri olmakla birlikte klinik mülakatlar ödevler üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu bakımdan ödevlerin hazırlanması son derece önem arz etmektedir. Bu nedenle ödevler hazırlanırken belli bir sistematik takip edilmiş araştırmanın kuramsal çerçevesinde yer alan prensiplerin karşılanması hedeflenmiştir. Aşağıda Şekil 32'de ödevlere yönelik ilkelere yer verilmiştir.




Şekil 32. Ödevlere yönelik ilkeler

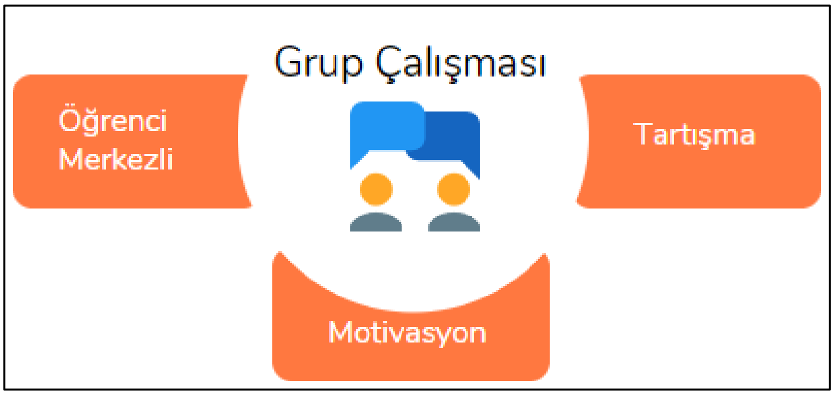
Şekil 32'de görüldüğü gibi ödevlere yönelik ilkeler genelleme yapma, problem çözme ve farklı dillere ve gösterimlere yer verme şeklinde belirlenmiştir. İlk iki döngü sürecinde alan notları, ders içi gözlemler ve edinilen tecrübeler sonucunda verilen ödevler konusunda bazı değişikliklere gidilmiştir. İlk iki döngüde birçok kavramı bir arada içerecek şekilde verilen ödevler öğrenciler tarafından sıradan bir aktivite olarak görülmüş ve gereken özveri gösterilmemiştir. Bununla birlikte öğrencilerin vektör uzaylarının temel kavramına yönelik derinlemesine olarak düşüncelerini ortaya koyabilmek açısından kavram odaklı olacak şekilde ödevlerin hazırlanması uygun görülmüştür. Böylelikle öğrencilere vektör, vektör uzayları, alt uzay, lineer birleşim-germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban- boyut kavramlarının her birine yönelik olarak belli bir yapıya göre hazırlanmış ödevler haftalık olarak verilmiştir. Ödevlerin genel olarak somuttan soyuta doğru bir yapıya sahip olması amaçlanmıştır. İlk olarak kavramların geometrik temsillerinin yer aldığı sorulara yer verilmiştir. Ardından kavramların cebirsel gösterimlerinin yer aldığı sorulara son olarak da soyut formda sorulara yer verilmiştir. Böylece kavramlara ilişkin farklı dillere ve gösterimlere yer verilerek bu gösterimler arasındaki bağlantılıların kurulması ve öğrencilere genelleme yapma fırsatı verilmesi hedeflenmiştir. Ödevler aynı zamanda problem çözme aktiviteleridir. Öğrencilerin ilgililerini çekecek ve dersle ilgili anlamalarını zenginleştirecek sorulardan oluşmaktadır. Ödevlerin sahip oldukları bu yapıyla aynı zamanda Harel'in gereklilik ve genellenebirlik ilkelerini karşılaması hedeflenmiştir.

Çalışma yapraklarının tasarlanmasında da ödevlerinkine benzer bir yapı oluşturulmuş ve bu yapı sistematik olarak her bir çalışma yaprağına uygulanmıştır. Somut model kurma, genelleme yapmayı hedefleme ve farklı dilleri barındırma çalışma yaprakları hazırlanırken dikkat edilen temel unsurlar olmuştur. Aşağıda Şekil 33'de çalışma yapraklarına yönelik ilkelere yer verilmiştir.


Şekil 33. Çalışma yapraklarına yönelik ilkeler

Şekil 33’te görüldüğü gibi çalışma yapraklarına yönelik ilkeler merak etme, açık ve anlaşılır olma, genelleme yapma, farklı dillere yer verme, yazılımla uyumlu ve keşfetme olarak belirlenmiştir. Merak öğrenmenin ön koşullarından biridir. Çalışma yapraklarında yer alan etkinliklerin merak uyandıracak bir yaklaşımla sistematik olarak etkinliklerin içerisine gizlenmesi gerekmektedir. Çalışma yapraklarının uygulaması sürecinde öğrenciye en az yardım sağlanması gerekir. Bu nedenle, çalışma yapraklarında açık ve anlaşılır yönergeler kullanılmış ve öğrencilerin sık sık öğretmenin yardımına ihtiyaç duymaması amaçlanmıştır. Çalışma yaprakları bilginin doğrudan aktarıldığı değil öğrencileri bir araştırma ve keşfetme sürecine götürecek nitelikte olması gerekmektedir. Ayrıca dersin akıcı olması, zamanla ilgili sıkıntıların yaşanmaması için çalışma yapraklarının GeoGebra yazılımıyla uyumlu olması sağlanmalıdır. Bununla birlikte öğrenme ortamının diğer öğelerinin de sahip olduğu gibi çalışma yaprakları hazırlanırken kavramların farklı temsillerine yer verilmiştir. Çalışma yaprakları Geogebra şablonlarıyla birlikte başlayan, kavramların geometrik ve cebirsel yaklaşımları arasındaki bağlantıyı kurarak en genel formda kavramların anlaşılmasını sağlayan bir sistematiğe göre hazırlanmıştır. Bununla birlikte çalışma yaprakları hazırlanırken grup çalışmasına uygun olacak şekilde yönergelere ve sunumlara yer verilmesine dikkat edilmiştir.

Çalışma yapraklarında yer alan etkinliklerin grup çalışmaları göz önüne alınarak hazırlanması amaçlanmıştır. İki kişilik gruplar öğrencilerin fikirlerini rahatlıkla ifade edebilmeleri ve görev paylaşımı yapabilmeleri açısından grup çalışması açısından idealdir. Aşağıda Şekil 34’te grup çalışmasına yönelik ilkelere yer verilmiştir.




Şekil 34. Grup çalışmasına yönelik ilkeler

Şekil 34’te görüldüğü gibi grup çalışmasına yönelik ilkeler öğrenci merkezli, tartışma ve motivasyon şekilden belirlenmiştir. Öğrenme ortamı bilgiyi doğrudan aktaran değil, bilginin öğrenciler tarafından kurulmasını amaçlayacak şekilde öğrenci merkezli bir yaklaşımla hazırlanmıştır. Öğrenciler ders süresince çalışma yaprakları ve GeoGebra şablonları üzerinde çalışırken ders öğretmeninden önce birbiriyle fikir alışverişinde bulunabilir, ikilimde kaldıkları konular üzerinde tartışabilirler. Grup çalışması şeklinde çalışmak bilginin kurulmasında öğrencilerin daha sağlam adımlar atmaları sağlayarak derse karşı motivasyonlarını artırmalarında önemli bir unsur görevi görecektir.

## 4. 2. Öğrencilerin Düşünme Biçimlerine Yönelik Bulgular

Bu araştırmada vektör uzaylarıyla ilgili temel kavramların öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerini nasıl etkilediğini belirlemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin düşünme biçimlerini belirleyebilmek amacıyla araştırmanın öncesinde ve sonrasında sırasıyla Başlangıç ve Final testleri uygulanmıştır. Ayrıca Başlangıç testi araştırmanın sonrasında bir kez daha uygulanmıştır. Araştırma öncesinde ve sonrasında uygulanan başlangıç testleri sırasıyla BT1 ve BT2 olarak adlandırılmıştır.

BT ve FT testleri birinci ve ikinci döngüde de uygulanmış ve elde edilen bulgular analiz edilerek üçüncü döngü öncesinde vektör uzayları konusuyla ilgili öğrencilerin sorulara verdikleri cevap türleri belirlenmiştir. Elde edilen cevap türleri benzerlik ve farklılıklarına göre kategorilere ayrılarak her bir kategori düşünme biçimleriyle ilişkilendirilmiştir. Böylece hem kavramlarla ilişkili cevap türleri belirlenerek bir soru havuzu elde edilmiş hem de üçüncü döngü öncesinde BT ve FT testlerinin analizinde kullanılmak üzere rubriklerin oluşturulmasında kullanılmıştır. Bu bölümde çalışmanın tasarımındaki üçüncü döngüye ait Başlangıç ve Final Testlerinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

### 4. 2. 1. Başlangıç Testinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin çalışma öncesinde düşünme biçimlerini belirlemek için lineer Cebir dersinin ilk dönem konularından oluşan Başlangıç testi çalışmanın başlangıcında ve çalışmanın bitiminde öğrencilere uygulanmıştır. Başlangıç testlerinde öğrencilerin cevaplarına atanan kodların düşünme biçimlerine göre dağılımının yüzde ve frekans analizleri Tablo 6’daki gibidir.

Tablo 6. Kodların Düşünme Biçimlerine Göre Yüzde ve Frekansları

| | Düşünme Biçimleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Test | Sentetik-Geometrik | | Analitik-Aritmetik | | Analitik-Yapısal | | Toplam |
| | n | % | n | % | n | % | n |
| BT1 | 49 | 54,44 | 37 | 41,11 | 4 | 4,44 | 90 |
| BT2 | 36 | 40,90 | 30 | 34,09 | 22 | 25 | 88 |

Tablo 6 incelendiğinde BT1 için toplam 90, BT2 için ise toplam 88 kod atandığı görülmektedir. Testlerdeki toplam kod sayısı arasındaki fark bazı öğrencilerin cevaplarına birden fazla kod atanmasından kaynaklanmaktadır. BT1'de 49 (%54,44) ve BT2'de 37 (%41,11) olmak üzere her iki testte de en çok kod atanan düşünme biçimi sentetik-geometrik düşünme biçimi olmuştur. En az kod atanan düşünme biçimi BT1'de 4 (%4,44) ve BT2'de 22 (%25) ile analitik-yapısal düşünme biçimi olmuştur. BT1 ve BT2 testleri arasında en dikkat çekici nokta ise sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimleriyle ilişkili olarak atanan kod sayıları BT2'de, BT1'e oranla azalırken analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod sayısı artmıştır. BT1'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkili kod sayısı yalnızca 4 iken bu sayı BT2 testinde 22 olmuştur. Aşağıda yer alan Tablo 7'de öğrencilerin BT1 ve BT2 testlerine verdikleri cevapların ilişkili oldukları düşünme biçimleri ve atanan kodları verilmiştir.

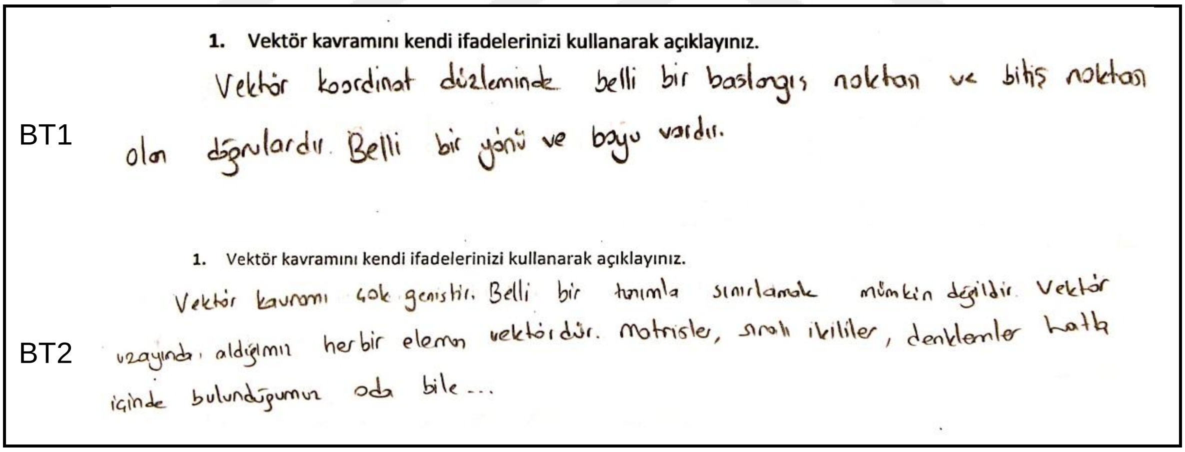
Tablo 7. Öğrencilerin BT1 ve BT2 Testlerine Verdileri Cevapların İlişkili Olduğu Düşünme Biçimleri ve Kodları

| Öğrenci \ Testler | Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| Ö1 | VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VYD | MTK | MTK | MK | MK | Dİ | DY |
| Ö2 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VVU | MY | MY | MK | MK | Dİ | DY |
| Ö3 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MTK | MY | MD | MD | Dİ | Dİ |
| Ö4 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VV | MY | MY | MÇ | MÇ | Dİ | Dİ |
| Ö5 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MY | MY | MÇ | MÇ | DY | DY |
| Ö6 | VAT<br>VAS | VUE | VK | VU | VK<br>VÇ | VÇ | VA | VA | VSD | VVU | MTK | MY | MD | MD | DB | DB |
| Ö7 | VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD | VYD | MTK | MY | MK | MK | Dİ | Dİ |
| Ö8 | VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD | VYD | MY | MY | MK | MK | DY | DY |
| Ö9 | VB<br>VÇ | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD<br>VÇ | VV | MTK | MTK | MK | MK | DY | DY |
| Ö10 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MTK | MTK | MK | MK | DB | DB |
| Ö11 | VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VVU | MTK | MY | MK | MK | Dİ | Dİ |

Geometrik  Aritmetik  Yapısal

Tablo 7’de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar sarı, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar yeşil ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kodlar mavi renkle ifade edilmiştir. Yine Tablo 6’dan bazı sorulara verilen cevaplarda hem düşünme biçiminin hem de kodların değiştiği görülmektedir. Bazı sorulara verilen cevaplarda düşünme biçimi ve kodlar bakımından herhangi bir değişiklik yokken bazı sorularda ise düşünme biçimi aynı olmasına rağmen kodlar değişmiştir.

BT testinin birinci sorusuna her iki uygulamada da verilen cevaplar incelendiğinde BT1 de yalnızca Ö6 kodlu öğrencinin cevabının analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili, diğerlerinin hepsinin sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili olduğu görülmektedir. BT1’de VT, VB ve VÇ olmak üzere sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili üç kod bulunmaktadır. Birinci soruya BT2 testinde verilen cevapların hepsi analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili ve aynı koda sahiptir. Birinci soruda 4 öğrenci (Ö1, Ö7, Ö8, Ö9) VB kodundan VUE koduna, 6 öğrenci (Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö10, Ö11) VT kodundan VUE koduna ve bir öğrenci (Ö6) VAT/VAS kodundan VUE koduna geçmiştir. Aşağıda Şekil 35’de BT1’de VB, BT2’de VUE olarak kod atanan Ö7 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.


BT1

1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

Vektör koordinat düzleminde belli bir baslangıs noktası ve bitiş noktası olan doğrulardır. Belli bir yönü ve boyu vardır.

BT2

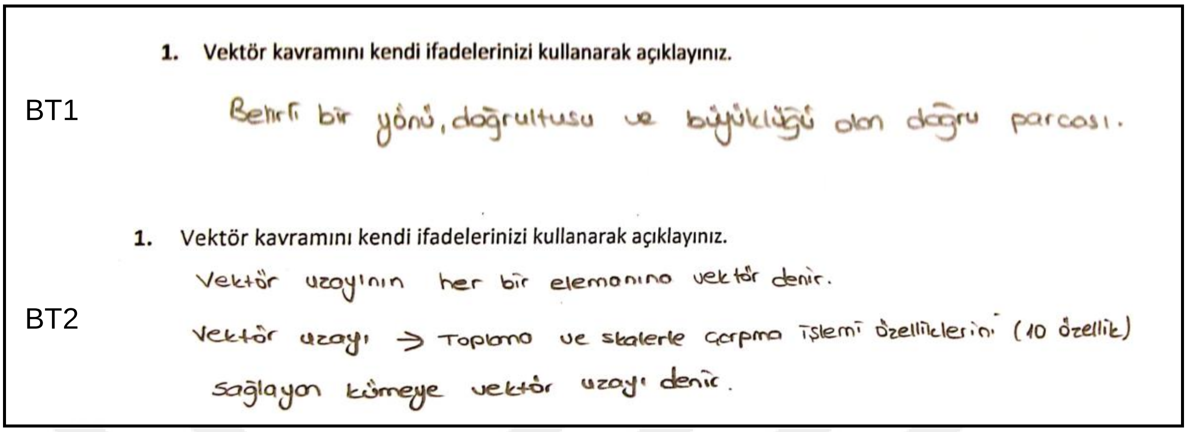
1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

Vektör kavramı çok geniştir. Belli bir tanımla sınırlamak mümkün değildir. Vektör uzayında aldığımız herbir eleman vektördür. Matrisler, sıralı ikililer, denklemler hatta içinde bulunduğumuz oda bile...

Şekil 35. Ö7 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 35’de Ö7 kodlu öğrenci BT1 ve BT2 testlerinde birinci soruya verdiği cevaplar alt alta verilmiştir. Ö7 kodlu öğrencinin BT1’de birinci soruya verdiği cevapta vektörü yönü ve boyu olan doğrular olarak betimlediği görülmektedir. Ö7 kodlu öğrencinin vektörü betimlerken kullandığı geometrik nesne bir doğrudur. Ö7 kodlu öğrenci BT2 testinde aynı soruya cevap verirken vektör kavramının çok geniş olduğunu belirterek vektör uzayının her bir elamanın bir vektör olduğunu ifade etmiştir. BT1’de geometrik bir nesne olarak görülen vektör BT2’de matrisler, denklemler ve sıralı ikililer gibi soyut matematiksel bir nesne olarak görülmüştür.

Aşağıda Şekil 36'da BT1 de VT, BT2 de VUE olarak kod atanan Ö3 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.



BT1

1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

Belirli bir yönü, doğrultusu ve büyüklüğü olan doğru parcası.

BT2

1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

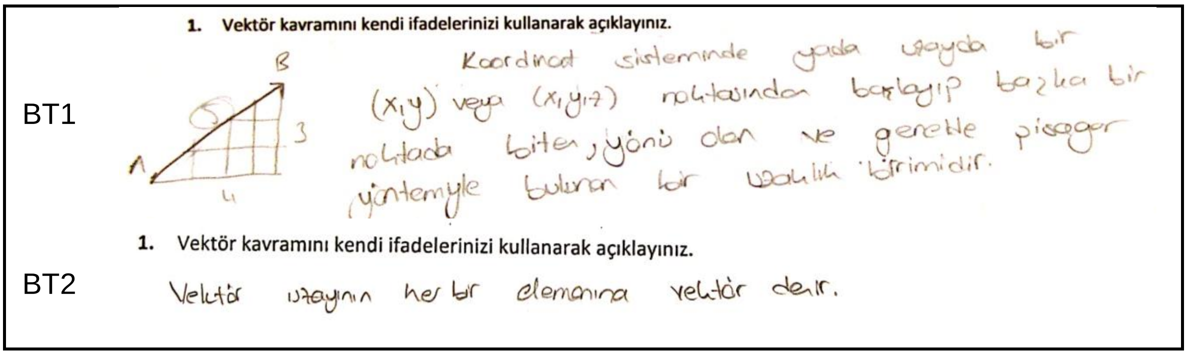
Vektör uzayının her bir elemanına vektör denir.

Vektör uzayı → Toplama ve skalerle çarpma işlemi özelliklerini (10 özellik) sağlayan kümeye vektör uzayı denir.

Şekil 36. Ö3 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 36'ya bakıldığında Ö3 kodlu öğrencinin BT1'de vektör kavramını yönü doğrultusu ve büyüklüğü olan bir doğru parçası olarak tanımladığı görülmektedir. BT2'de ise vektör, vektör uzayının her bir elemanı olarak tanımlanmış ve bununla birlikte vektör uzayının tanımına yer verilmiştir. Görüldüğü gibi BT1'de düzlem veya uzayda bir doğru parçası olarak tanımlanan vektör BT2'de belirli özellikleri sağlayan bir kümenin elemanı olarak tanımlanmış yani soyut bir nesne olarak ifade edilmiştir.

Aşağıda Şekil 37'de BT1 de VAT/VAS, BT2 de VUE olarak kod atanan Ö6 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.



BT1

1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

Koordinat sisteminde yada uzayda bir (x,y) veya (x,y,z) noktasından başlayıp başka bir noktada biten, yönü olan ve genelde pisagor yöntemiyle bulunan bir uzunluk birimidir.

BT2

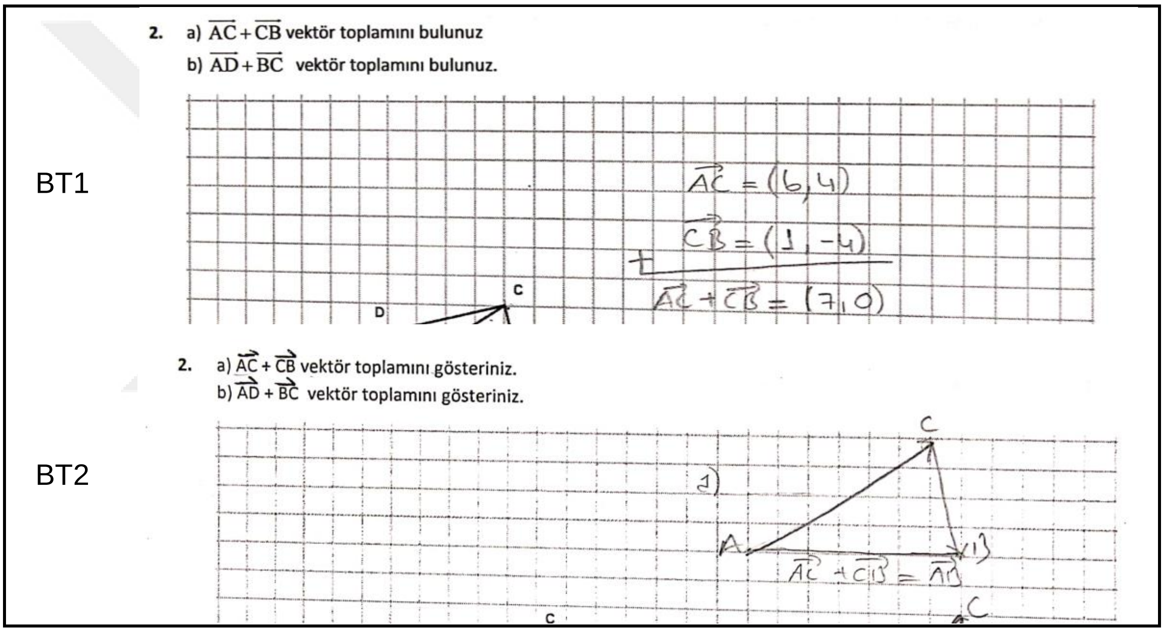
1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

Vektör uzayının her bir elemanına vektör denir.

Şekil 37. Ö6 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 37'ye bakıldığında Ö6 kodlu öğrencinin BT1'de vektör kavramını koordinat düzleminde sıralı ikili ve sıralı üçlüler olarak ifade ettiği görülmektedir. Ö6 kodlu öğrenci BT2 testine verdiği cevapta vektörü vektör uzayının her bir elemanı olarak tanımlamaktadır. BT1'de daha çok cebirsel yönüne vurgu yapılarak tanımlanan vektör kavramı, BT2'de diğer bütün öğrencilerin de yaptığı gibi soyut bir nesne olarak en genel formda tanımlanmıştır.

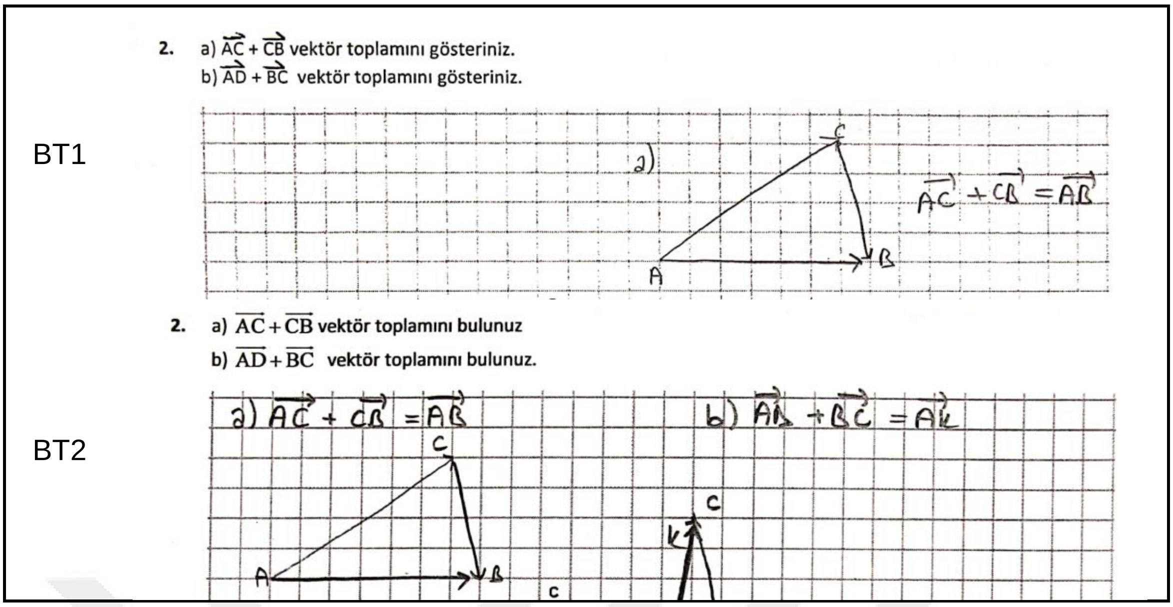
İkinci soruya her iki testte verilen cevaplar incelendiğinde BT1'de yalnızca Ö6 kodlu öğrencinin cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili iken diğer hepsi sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kod VU, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod ise VK'dır. İkinci soruya BT2 testinde verilen cevaplara atanan kodların hepsi sentetik- geometrik düşünme biçimiyle ilişkili VU kodudur. Ö6 kodlu öğrencinin VK kodundan VU koduna geçiş yaparken diğer bütün öğrencilerin cevaplarına her iki testte de VU kodu atanmıştır. Aşağıda Şekil 38'de BT1 de VK, BT2 de VU olarak kod atanan Ö6 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.




Şekil 38. Ö6 kodlu öğrencinin ikinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 38'de Ö6 kodlu öğrencinin BT1'e verdiği cevaba bakıldığında vektörlere koordinatlar atayarak bu koordinatlar üzerinden aritmetik işlemler yaptığı görülmektedir. Ö6 kodlu öğrenci BT2'de ise uç uca ekleme yöntemini kullanarak vektör toplamını elde etmiştir. BT1'de cebirsel bir formda ikinci soruya cevap veren Ö6 kodlu öğrenci BT2'de geometrik bir yaklaşımla soruya cevap vermiştir.

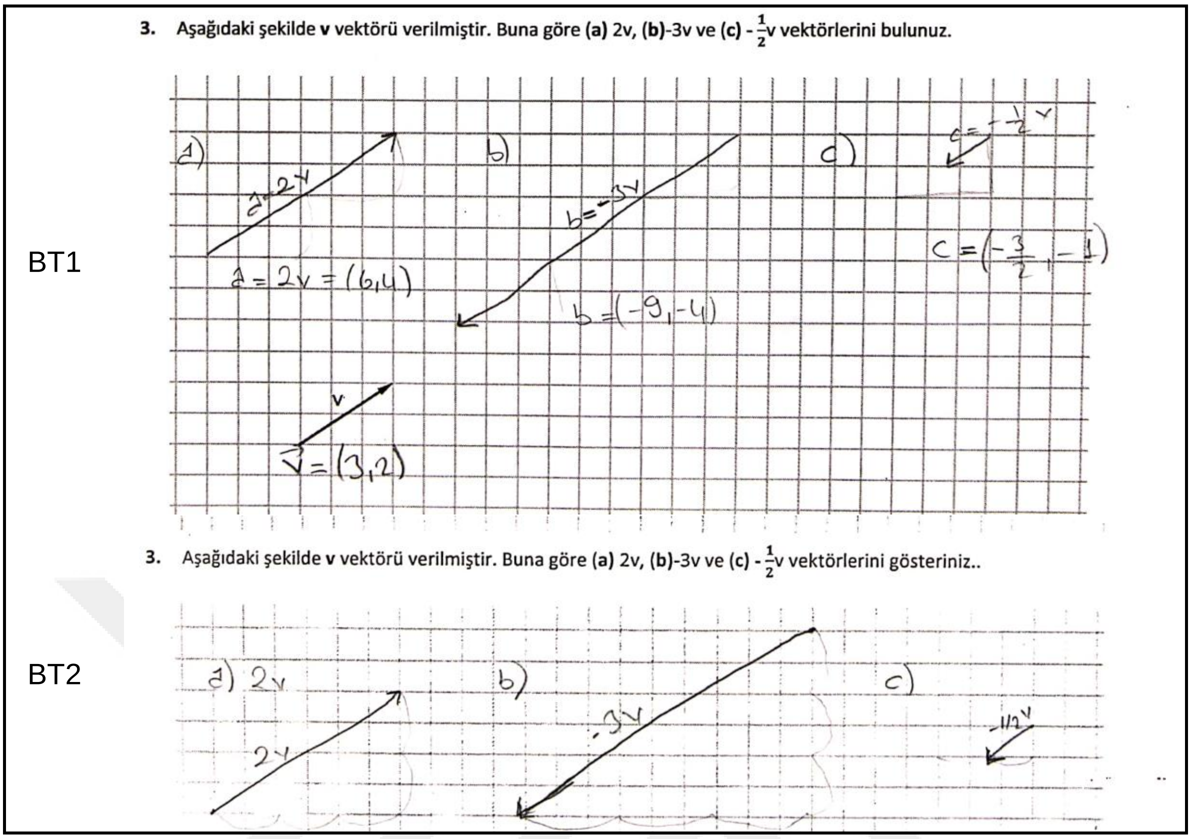
Ö6 kodlu öğrencinin dışındaki bütün öğrenciler ikinci soruya hem BT1 hem de BT2 de VU koduyla cevap vermiştir. Aşağıdaki Şekil 39'da Ö2 kodlu öğrencinin ait cevaplara yer verilmiştir.



Şekil 39. Ö2 kodlu öğrenci ikinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 39’dan da görüldüğü gibi Ö2 kodlu öğrenci her iki testte de uç uca ekleme yöntemini kullanarak soruya sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Diğer öğrenciler de soruda benzer bir yaklaşım sergilemiştir.

Üçüncü soruya bütün öğrenciler her iki teste de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili aynı cevap türünü vermiştir. Öğrencilerin cevaplarına VÇ kodu atanmıştır. Yalnızca Ö6 kodlu öğrenci BT1’deki çözümünde ek olarak analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili cevap bulunmaktadır. Bu nedenle Ö6 kodlu öğrenci BT1’deki cevabına VK/VÇ kodu atanmıştır. Aşağıda Şekil 40’da BT1 de VK/VÇ, BT2 de VÇ olarak kod atanan Ö6 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.

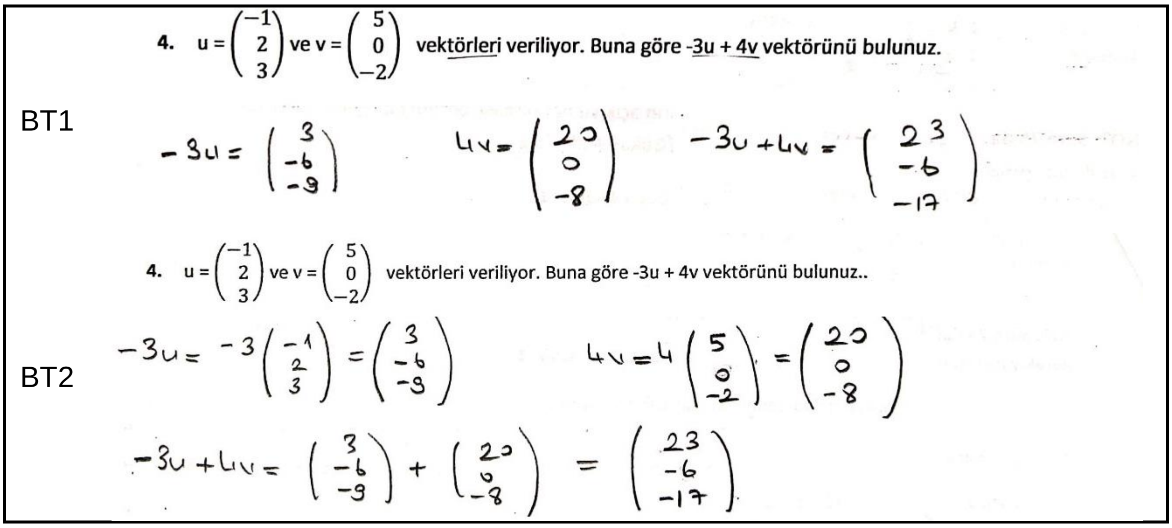



Şekil 40. Ö6 kodlu öğrencinin üçüncü soruya verdiği cevaplar

Şekil 40'da görüldüğü gibi Ö6 kodlu öğrenci BT1'de üçüncü soruya hem geometrik çizimler yaparak hem de vektörlerin koordinatlarını hesaplayarak cevap vermiştir. Bu nedenle Ö6 kodlu öğrenci BT1'deki cevabı hem sentetik-geometrik hem de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilerek VK, VÇ kodları birlikte atanmıştır. Ö6 kodlu öğrencinin BT2'deki cevabına bakıldığında üçüncü soruya geometrik çizimler yaparak cevap verdiği görülmektedir.

Ö6 kodlu öğrencinin dışındaki bütün öğrenciler hem BT1 hem de BT2 testinde üçüncü soruya yalnızca geometrik çizimler yaparak cevap vermiştir. Öğrencilerin her iki testte de üçüncü soruya verdikleri cevapları Ö6 kodlu öğrencinin BT2'de cevabına benzerdir.

Dördüncü soruya bütün öğrenciler hem BT1 hem de BT2'de aynı cevap türünü vermiştir. Öğrencilerin vermiş oldukları cevap türü analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiş ve bu cevap türüne VA kodu atanmıştır. Aşağıda Şekil 41'de Ö10 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevaplara yer verilmiştir.




Şekil 41. Ö10 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevaplar

Şekil 41'de görüldüğü Ö10 kodlu öğrenci her iki testte de vektörde tanımlanan işlemlere göre çarpma ve toplama işlemlerini analitik-aritmetik olarak yapmıştır. Diğer bütün öğrenciler de hem BT1 hem de BT2'de Ö10 kodlu öğrencininkine benzer çözümler yapmıştır.

Beşinci soruya BT1'de verilen cevaplardan 5'i aritmetik düşünme biçimiyle 6'sı sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar VV ve VSD, sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar VÇ ve VYD'dir. Öğrenciler beşinci soruya BT2'de verdikleri cevaplarda üç düşünme biçimini de sergilemiştir. BT2'de verilen cevapların 3'ü sentetik-geometrik (VYD), 3'ü analitik-yapısal (VVU) ve beş tanesi analitik-aritmetik (VV) düşünme biçimleriyle ilişkilidir. Beşinci soruda 2 öğrenci (Ö2, Ö11) VÇ kodundan VVU koduna, 2 öğrenci (Ö4, Ö9) VÇ kodundan VV koduna, bir öğrenci (Ö6) VSD kodundan VVU koduna ve bir öğrenci (Ö1) VV kodundan VYD koduna geçiş yapmıştır. Aşağıda Şekil 42'de BT1 de VÇ, BT2 de VVU olarak kod atanan Ö2 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.

**5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?**

BT1

$k.\vec{v}+m.\vec{v}=(k+m).\vec{v}$ şeklinde yazılabilir.

$\vec{v}$ olsun. $k\vec{v}$ olsun. $m\vec{v}$ olsun. $k\vec{v}+m\vec{v}=$ $\vec{kv}+\vec{mv}$ ve $(k+m)\vec{v}=$ olur.

ikiside aynı vektördür.

**5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?**

BT2

v bir vektör ise bir vektör uzayının elemanıdır.

vektör uzayının özelliklerinden; $(k+m)v = kv + mv$ söylenebilir.

Şekil 42. Ö2 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 42'den Ö2 kodlu öğrenci BT1'de soruya beşinci soruya cevap verirken vektörel çizimlerden yararlandığı görülmektedir. Ö2 kodlu öğrencinin cevabından vektörleri düzlemde oklar olarak düşündüğü anlaşılmaktadır. Ö2 kodlu öğrenci BT2'de beşinci soruya cevap verirken soruda verilen vektörü soyut bir nesne olarak görmüş ve vektör uzayı özellikleri ile verilen ifadeyi ilişkilendirmiştir. Ö2 kodlu öğrenci BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap verdiği soruya BT2'de daha genel forma cevap vererek analitik-yapısal nitelikte bir cevap vermiştir. Ö11 kodlu öğrenci de benzer bir yaklaşım sergileyerek beşinci soruya cevap vermiştir.

Aşağıda Şekil 43'de BT1 de VSD, BT2 de VVU olarak kod atanan Ö6 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.

**5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?**

BT1

$v=(3,2)$ $k=-3$ $m=2$

$k.v+m.v=(-9,-6)+(6,4)=(-3,-2)$

$(k+m).v=(-3,-2)$ $k.v+m.v=v\,(k+m)$

**5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?**

BT2

Vektör uzayı özelliklerinin 8.'sinden

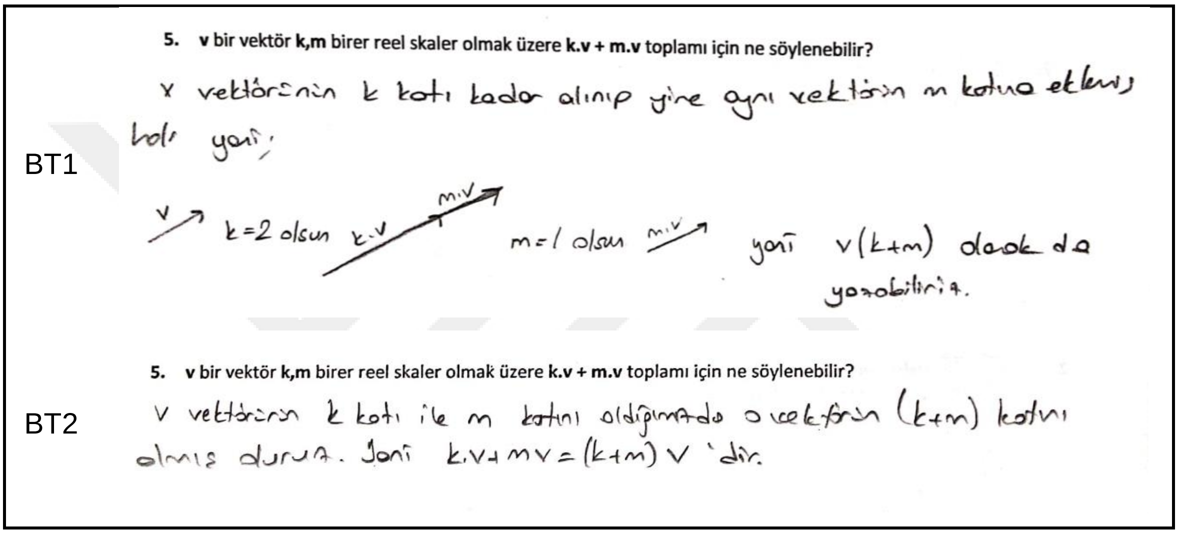
$\forall\, v\in V$ ve $k,m\in\mathbb{R}$ ise $(k+m).v=k.v+m.v$ dir.

Yani $(k+m).v$ 'ye eşit old. söylenir.

Şekil 43. Ö6 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 43'de Ö6 kodlu öğrenci BT1'de beşinci soruda verilen vektör ve skalerler için özel değerler vererek aritmetik işlemler yapmış böylece elde ettiği ifadelerin birbirine eşit olduğunu göstermeye çalışmıştır. Ö6 kodlu öğrenci BT2'de beşinci soruya cevap verirken soruda verilen ifadeyi vektör uzayı olma özellikleriyle ilişkilendirerek (k+m).v=kv+mv eşitliğini göstermiştir. Ö6 kodlu öğrenci BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap verdiği soruya BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili bir cevap vermiştir.

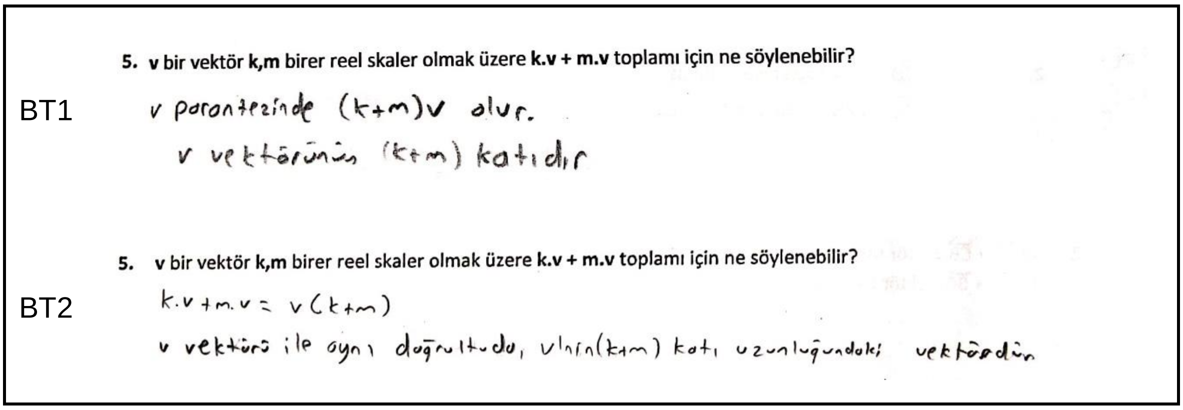
Aşağıda Şekil 44'de BT1 de VÇ, BT' de VV olarak kod atanan Ö4 kodlu öğrenci ait cevaplara yer verilmiştir.




Şekil 44. Ö4 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 44'de Ö4 kodlu öğrencinin BT1'de soruya beşinci soruya cevap verirken geometrik çizimlerden yararlandığı görülmektedir. Ö4 kodlu öğrencinin cevabından vektörlerin düzlemde yönlü doğru parçaları olarak ele alındığı anlaşılmaktadır. Ö4 kodlu öğrenci BT2'de beşinci soruya cevap verirken sözel olarak açıklamalara yer vermiş ve ortak çarpan parantezine alarak soruya cevap vermiştir. BT1'de beşinci soruya geometrik bir yaklaşımla cevap veren Ö4 kodlu öğrenci, BT2'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili olacak şekilde cevap vermiştir. Ö9 kodlu öğrenci de benzer şekilde beşini soruya BT1 ve BT2'de cevaplar vermiştir.

Aşağıda Şekil 45'te BT1 de VV, BT2 de VYD olarak kod atanan Ö1 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.


BT1

5. **v** bir vektör **k,m** birer reel skaler olmak üzere **k.v + m.v** toplamı için ne söylenebilir?

v parantezinde (k+m)v olur.

v vektörünün (k+m) katıdır

BT2

5. **v** bir vektör **k,m** birer reel skaler olmak üzere **k.v + m.v** toplamı için ne söylenebilir?

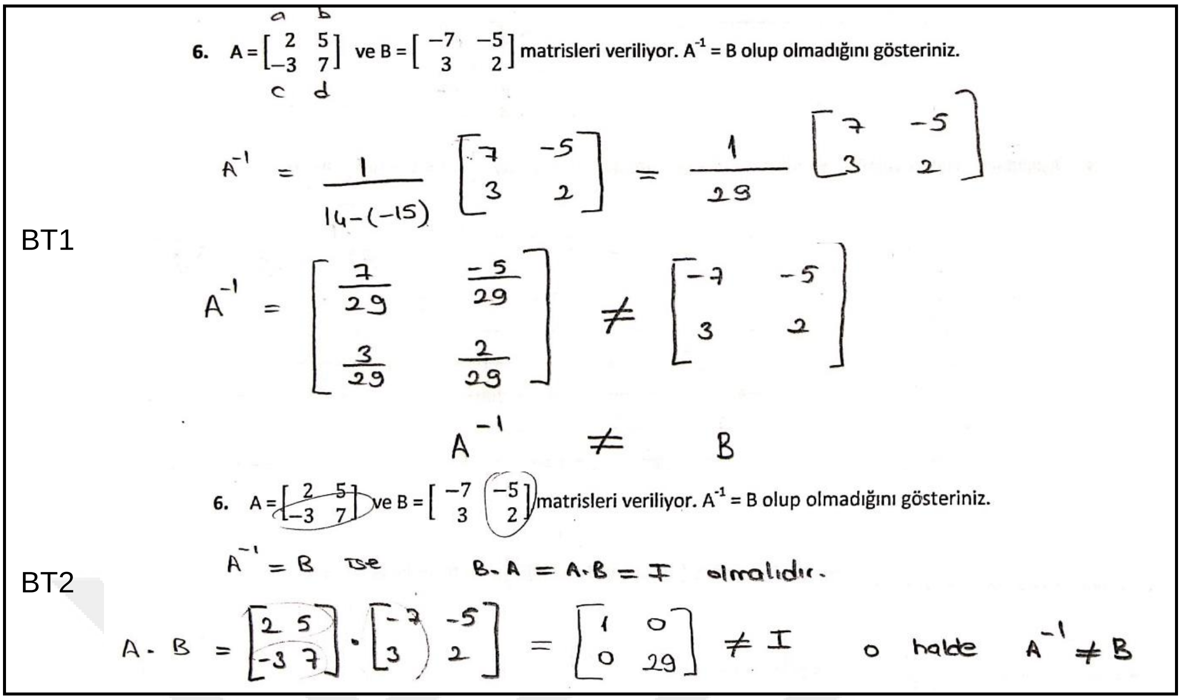
k.v+m.v = v(k+m)

v vektörü ile aynı doğrultuda, v'nin (k+m) katı uzunluğundaki vektördür

Şekil 45. Ö1 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 45'te Ö1 kodlu öğrenci BT1'de beşinci soruya cevap verirken paranteze alma işleminden yararlanarak cevabını sözel olarak açıkladığı görülmektedir. Ö1 kodlu öğrenci BT2'de beşinci soruya cevap verirken çözümünde doğrultu ve uzunluk gibi geometrik betimlere yer vermiştir. Ö1 kodlu öğrenci BT1 de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle soruya yaklaşırken BT2 de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle soruya cevap vermiştir.

Altıncı soruya BT1'de verilen cevaplardan 4'ü analitik-yapısal düşünme biçimiyle 7'si analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Analitik-aritmetik düşünme ve analitik-yapısal düşünme biçimleriyle sırasıyla MTK ve MY olmak üzere birer kod atanmıştır. Öğrenciler altıncı soruya BT2'de verdikleri cevaplarda yine aynı kodlara rastlanmış ancak MY kodlarının sayısında artış gözlenmiştir. Altıncı soruda dört öğrenci (Ö3, Ö6, Ö7, Ö11) MTK kodundan MY koduna geçiş yapmıştır. Bütün geçişler MTK kodundan MY koduna doğru gerçekleşmiştir. Başka bir deyişle başlangıç testinin altıncı sorusunda analitik-aritmetik düşünme biçiminden analitik-yapısal düşünme biçimine doğru bir geçiş gerçekleşmiştir. Aşağıda Şekil 46'da BT1 de MTK, BT2 de MY olarak kod atanan Ö3 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.

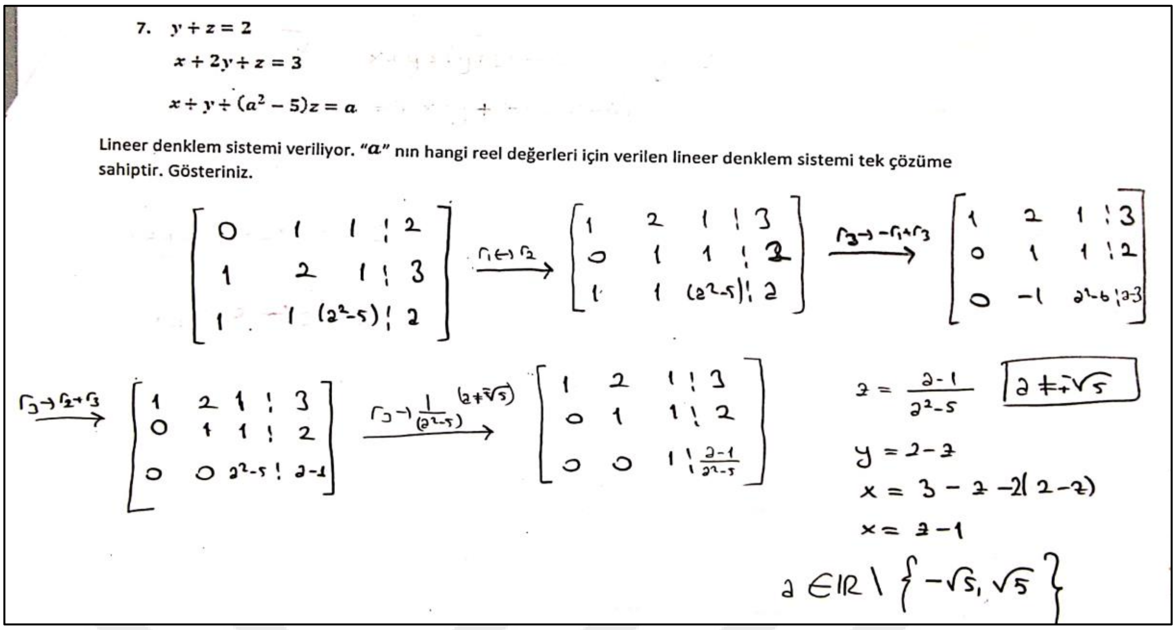



Şekil 46. Ö3 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevaplar

Şekil 46 bakıldığında Ö3 kodlu öğrenci BT1 de A matrisinin tersini bir formül aracığıyla hesaplayarak elde ettiği sonucu B matrisiyle karşılaştırdığı görülmektedir. Buna karşın Ö3 kodlu öğrenci BT2 de altıncı soruya cevap verirken ters matrisin tanımından yararlanarak matrislerin birbirinin tersi olup olmadığına karar vermiştir. Ö3 kodlu öğrenci BT1 de altıncı soruya verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2 de verdiği cevap analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. MTK kodundan MY koduna geçiş yapan diğer öğrenciler de altınca soruya her iki testte benzer şekilde cevaplar vermiştir.

BT1 altıncı soruya verdikleri cevaplar MY koduyla ilişkilendirilen dört öğrencinin (Ö2, Ö4, Ö5, Ö8) BT2'de de verdikleri cevaplar MY koduyla ilişkilendirilmiştir. Bu öğrenciler her iki testte de altıncı soruya cevap verirken tıpkı Ö3 kodlu öğrencinin altıncı soruya Şekil 20 de BT2 de verdiği gibi cevap vermiştir. Böylece öğrencilerin verdikleri cevaplara hem BT1 hem de BT2 de MY kodu atanmıştır.

Yedinci soruya BT1 ve BT2 de öğrencilerin verdikleri cevapların tümü analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar MK, MD ve MÇ olarak atanmıştır. 7 öğrenciye MK, 2 öğrenciye MD ve 2 öğrenciye MÇ kodu atanmıştır. Ayrıca BT1 ve BT2 testlerinde kodlar arasında bir geçiş olmamıştır. Aşağıdaki Şekil 47'de yedinci soruya verdiği cevap MK olarak atanan Ö2 kodlu öğrenciye ait cevaba yer verilmiştir.



7. $y + z = 2$

$x + 2y + z = 3$

$x + y + (a^2 - 5)z = a$

Lineer denklem sistemi veriliyor. "$a$" nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (a^2-5) & a \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & (a^2-5) & a \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to -r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a^2-6 & a-3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-5 & a-1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{(a^2-5)} \ (a \mp \sqrt{5})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a^2-5} \end{array}\right]$$

$z = \frac{a-1}{a^2-5}$ $\boxed{a \neq \mp\sqrt{5}}$

$y = 2 - z$

$x = 3 - z - 2(2 - z)$

$x = z - 1$

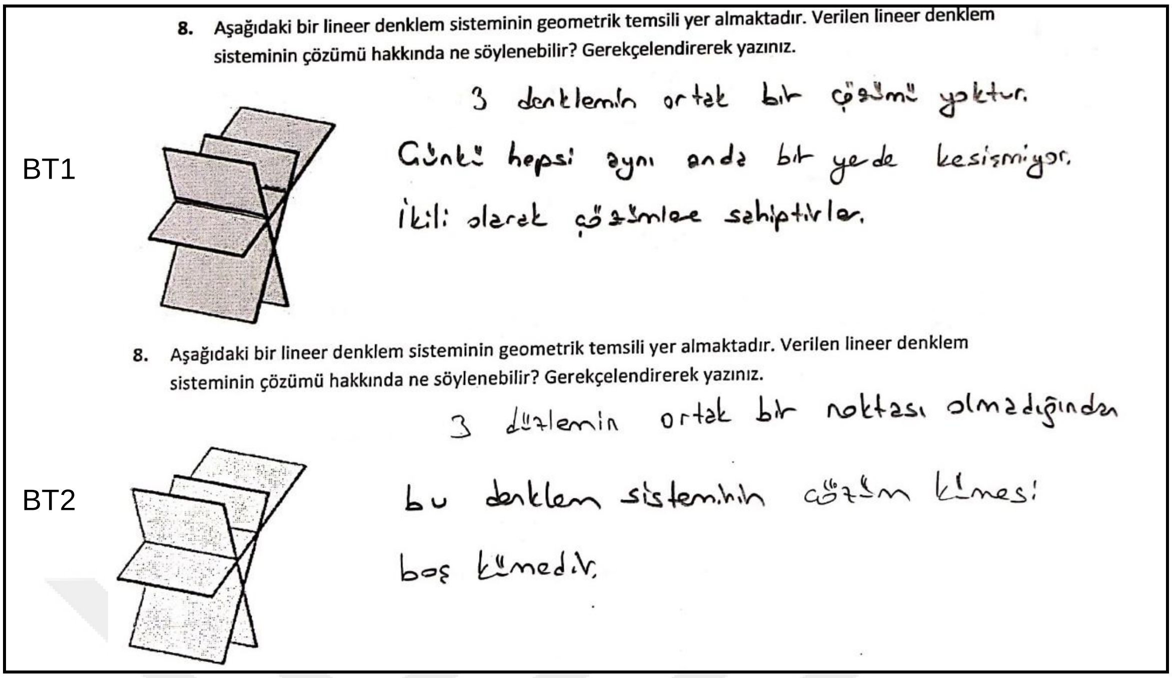
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

Şekil 47. Ö2 kodlu öğrencinin yedinci soruya verdiği cevap

Şekil 47'ye bakıldığında Ö2 kodlu öğrencinin cevabına bakıldığında verilen denklem sistemine ait katsayılar matrisini yazdığı görülmektedir. Ö2 kodlu öğrenci yazdığı katsayılar matrisi üzerine satır işlemleri uygulayarak verilen denklem sisteminin çözüm kümesini hesaplamaya çalışmıştır. Cevabına MK kodu atanan diğer öğrenciler de katsayılar matrisini kullanarak benzer bir şekilde yedinci soruya cevap vermiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili MD kodu atanan cevaplarda öğrenciler denklem sistemini çözerken a reel sayısına değer vererek çözüm kümesini belirlemeye çalışmıştır. MÇ kodu atanan cevaplarda öğrenciler ise denklem çözme tekniklerini kullanarak verilen denklem sisteminin çözüm kümesini hesaplamaya çalışmıştır. Yedinci soruya verilen bütün cevap türlerinde hesaplama tekniklerinin baskın olduğu görülmüş ve öğrencilerin cevapları analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir.

Sekizinci soruya her iki testte verilen cevaplara bakıldığında BT1 ve BT2 de verilen bütün cevap türleri sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. BT1 ve BT2 de Dİ, DY ve DB olmak üzere sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili üç kod yer almaktadır. BT1 de Dİ kodu atanan 6 öğrenci, DB kodu atanan 2 öğrenci ve DY kodu atanan 3 öğrenci, BT2 de Dİ kodu atanan 4 öğrenci, DB kodu atanan 2 öğrenci ve DY kodu atanan 5 öğrenci bulunmaktadır. Sekizinci soruda 2 öğrenci (Ö1, Ö2) Dİ kodundan DY koduna geçiş yapmıştır. Aşağıdaki Şekil 48'de BT1'de Dİ BT2'de DY olarak kod atanan Ö2 kodlu öğrenciye ait cevaplara yer verilmiştir.




Şekil 48. Ö2 kodlu öğrencinin sekizinci soruya verdiği cevaplar

Şekil 48'de Ö2 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 testlerinde sekizinci soruya verdiği cevaplar alt alta verilmiştir. Ö2 kodlu öğrenci BT1 ve BT2 testlerinde sekizinci soruya cevap verirken verilen denklem sisteminin geometrik temsilinden hareketle açıklamasını yaparak denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olduğunu ifade etmiştir Ö2 kodlu öğrenci BT1 testinde ek olarak denklem sisteminin ikili çözümlere de sahip olduğunu belirtmiştir. Ö2 kodlu öğrencinin her iki testte de verdiği cevap sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir.

BT1 ve BT2'de, Dİ kodu atanan 4 öğrenci (Ö3, Ö4, Ö7, Ö11), DY kodu atanan 3 öğrenci (Ö5, Ö8, Ö9) ve DB kodu atanan 2 öğrenci (Ö6, Ö10) bulunmaktadır. Dİ ve DY kodu atanan öğrenciler Şekil 21 de Ö2 kodlu öğrencininkine benzer çözümler yaparak sekizinci soruya cevap vermiştir. Her iki testte de DB kodu atanan iki öğrenci çözümlerinde verilen denklem sistemleriyle ilgili betimlemelerin olduğu açıklamalara yer vermiştir.

Bulguların bu bölümünde öğrencilerin düşünme biçimlerini daha iyi bir şekilde resmedebilmek için her bir öğrencinin BT1 ve BT2 testlerindeki sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar ayrı ayrı incelenmiş ve sunulmuştur.

Ö1 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Ö1 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VYD | MTK | MTK | MK | MK | Dİ | DU |

Tablo 8 incelendiğinde Ö1 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1., 5., ve 8. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. Bunların içinde 8. soruda aynı düşünme biçiminin farklı kodu, 1. ve 5. sorularda ise farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö1 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile iken BT2'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Son olarak Ö1 kodlu öğrenci sekizinci soruya verdiği cevap türünü değiştirmiş olmasına rağmen her iki cevap türü de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö1 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine BT2' de ise bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verse de genel olarak sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu söylenebilir.

Ö2 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 9'de verilmiştir.

Tablo 9. Ö2 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VVU | MY | MY | MK | MK | Dİ | DY |

Tablo 9 incelendiğinde Ö2 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1., 5., ve 8. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. Bunların içinde 8. Soruda aynı düşünme biçiminin farklı kodu, 1 ve 5. sorularda is farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö2 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Son olarak Ö2 kodlu öğrenci sekizinci soruya verdiği cevap türünü değiştirmiş olmasına rağmen her iki cevap türü de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö2 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir ve Ö2 kodlu öğrenci yalnızca bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. BT2'de ise Ö2 kodlu öğrenci farklı düşünme biçimleri sergilemekle birlikte 3 soruda analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar vermiştir.

Ö3 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 10'da verilmiştir.

Tablo 10. Ö3 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MTK | MY | MD | MD | Dİ | Dİ |

Tablo 10 incelendiğinde Ö3 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1 ve 6. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1 ve 6. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö3 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Altıncı soruya verilen cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Son olarak Ö3 kodlu öğrenci sekizinci soruya verdiği cevap türünü değiştirmiş olmasına rağmen her iki cevap türü de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö3 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir. Ö3 kodlu öğrenci BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 2 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö4 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 11'da verilmiştir.

Tablo 11. Ö4 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VV | MY | MY | MÇ | MÇ | Dİ | Dİ |

Tablo 11 incelendiğinde Ö4 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. ve 5. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1 ve 5. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö4 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile iken BT2'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö4 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir ve Ö4 kodlu öğrenci yalnızca bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö4 kodlu öğrenci BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 2 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö5 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 12'de verilmiştir.

Tablo 12. Ö5 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MY | MY | MÇ | MÇ | DY | DY |

Tablo 12 incelendiğinde Ö5 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. soruda farklı kodlar atandığı görülmektedir. Birinci soruda atanan bu kodlar farklı düşünme biçimlerine ait kodlardır. Ö5 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö5 kodlu öğrencinin hem BT1 hem de BT2 de birinci sorunun yer alan diğer bütün cevaplarına aynı kod atanmıştır. Ö5 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir ve Ö5 koldu öğrenci yalnızca bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö5 kodlu öğrenci BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 2 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö6 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 13'de verilmiştir.

Tablo 13. Ö6 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VAT<br>VAS | VUE | VK | VU | VK<br>VÇ | VÇ | VA | VA | VSD | VVU | MT<br>K | MY | MD | MD | DB | DB |

Tablo 13 incelendiğinde Ö6 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1., 5., ve 6. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1., 5. ve 6. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö6 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Son olarak Ö6 kodlu öğrenci altıncı soruya verdiği cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö6 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir. Ö6 Kodlu öğrenci BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 3 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö7 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 14'de verilmiştir.

Tablo 14. Ö7 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD | VYD | MTK | MY | MK | MK | Dİ | Dİ |

Tablo 14 incelendiğinde Ö7 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. ve 6. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1. ve 6. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö7 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Altıncı soruya verilen cevap BT1'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö7 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu görülmüştür. Ö7 kodlu öğrencinin BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 2 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö8 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri aşağıdaki Tablo 15'de verilmiştir.

Tablo 15. Ö8 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VB | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD | VYD | MY | MY | MK | MK | DY | DY |

Tablo 15 incelendiğinde Ö8 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. soruda farklı kodlar atandığı görülmektedir. Birinci soruda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö8 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö8 kodlu öğrencinin hem BT1 hem de BT2 de birinci sorunun yer alan diğer bütün cevaplarına aynı kod atanmıştır. Ö8 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu görülmüştür. Ö8 kodlu öğrencinin BT2'de farklı düşünme biçimleri sergilemiş ve 2 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

Ö9 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 16'de verilmiştir.

Tablo 16. Ö9 Kodlu Öğrencinin BT'ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VB VÇ | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VYD VÇ | VV | MT K | MT K | MK | MK | DY | DY |

Tablo 16 incelendiğinde Ö9 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. ve 5. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1 ve 5. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö9 koldu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2'de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile iken BT2'de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö9 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine BT2' de ise bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verse de genel olarak sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu söylenebilir.

Ö10 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 17’de verilmiştir.

Tablo 17. Ö10 Kodlu Öğrencinin BT’ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VV | VV | MTK | MTK | MK | MK | DB | DB |

Tablo 17 incelendiğinde Ö10 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1. soruda farklı kodlar atandığı görülmektedir. Ö10 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevaba farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö10 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1’de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2’de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö10 kodlu öğrencinin hem BT1 hem de BT2 de birinci sorunun dışında yer alan diğer bütün cevaplarına aynı kod atanmıştır. Ö10 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1’de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu görülmüştür. Ö10 kodlu öğrencinin BT2’de ise bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle vermiş olmasına rağmen genel olarak g sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduğu söylenebilir.

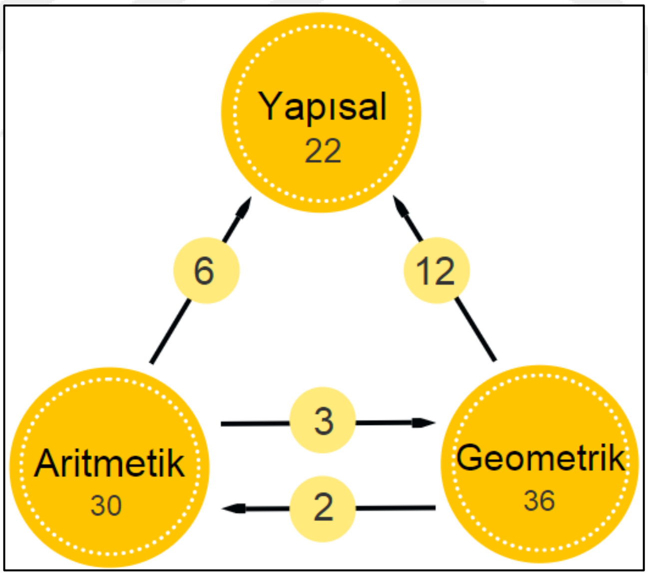
Ö11 kodlu öğrencinin uygulama öncesi ve sonrasında başlangıç testlerine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 18’de verilmiştir.

Tablo 18. Ö11 Kodlu Öğrencinin BT’ye Verdiği Cevaplara Atanan Kodlar

| Soru 1 | | Soru 2 | | Soru 3 | | Soru 4 | | Soru 5 | | Soru 6 | | Soru 7 | | Soru 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 | BT1 | BT2 |
| VT | VUE | VU | VU | VÇ | VÇ | VA | VA | VÇ | VVU | MTK | MY | MK | MK | Dİ | Dİ |

Tablo 18 incelendiğinde Ö11 kodlu öğrencinin BT1 ve BT2 olarak uygulanan başlangıç testindeki sorulara verdiği cevapların analizinden 1., 5., ve 6. sorularda farklı kodlar atandığı görülmektedir. 1, 5 ve 6. sorularda farklı düşünme biçimlerinin kodlarının atandığı dikkati çekmektedir. Ö11 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap BT1’de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile ilişkili iken BT2’de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Beşinci soruya verilen cevap BT1’de sentetik-geometrik düşünme biçimi ile iken BT2’de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Son olarak Ö11 kodlu öğrenci altıncı soruya verdiği cevap BT1’de analitik-aritmetik düşünme biçimi ile iken BT2’de analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilidir. Ö11 kodlu öğrencinin her iki uygulamada sorulara verdikleri cevaplara atanan kodlar göz önünde bulundurulduğunda genel olarak BT1'de sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptir ve Ö11 kodlu öğrenci yalnızca bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. BT2'de ise Ö11 kodlu öğrenci farklı düşünme biçimleri sergilemekle birlikte 3 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar vermiştir.

Öğrencilerin BT1 ve BT2 testlerine verdikleri cevaplar karşılaştırıldığında bazı sorularda düşünme biçimlerinde ve doğal olarak kodlarda bazı sorularda ise aynı düşünme biçimindeki kodlarda değişikliklerin olduğu görülmüştür. Öğrencilerin cevaplarına BT1'de toplamda 90 ve BT2'de toplamda 88 adet kod atanmıştır. BT1 ve BT2'deki kodlar arasında farklı düşünme biçimlerine geçişlerin olduğu kod sayısı 23'tür. Öğrencilerin her iki testteki 2, 3, 4 ve 8. sorulara verdikleri cevaplar arasında çok az farklılaşma olmuştur. Her ne kadar bu sorular farklı düşünme biçimleriyle yanıtlanacak olsa da öğrenciler her iki uygulamada da uygun düşünme biçimlerini sergileyerek cevap vermişlerdir. Aşağıda Şekil 49'da farklı düşünme biçimlerine geçişlerin olduğu kodlarla ilgili bilgiler verilmiştir.




Şekil 49. Farklı düşünme biçimlerine geçişlerin olduğu kod sayıları

Şekil 49 incelendiğinde; sentetik-geometrik düşünme biçiminden analitik-yapısal düşünme biçimine geçişlerin olduğu kod sayısı 12, analitik-aritmetik düşüme biçiminden analitik-yapısal düşünme biçimine geçişlerin olduğu kod sayısı 6, analitik-aritmetik düşünme biçiminden sentetik-geometrik düşünme biçimine geçişlerin olduğu kod sayısı 3 ve sentetik-geometrik düşünme biçiminden analitik-aritmetik düşünme biçimine geçişlerin olduğu kod sayısı 2 olarak görülmektedir. Geçişlerin en çok gerçekleştiği düşünme biçimi toplam 18 kod ile analitik-yapısal düşünme biçimi olmuştur. Ayrıca sentetik-geometrik düşünme biçiminden 12 adet kodun analitik-yapısal düşünme biçimine geçmesi dikkat çekici bir durum olarak gözükmektedir. Bununla birlikte analitik-yapısal düşünme biçiminden sentetik-geometrik veya analitik-aritmetik düşünme biçimlerine geçişler olmamıştır.

### 4. 2. 2. Final Testinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin çalışma sonunda hangi düşünme biçimlerine sahip olduklarını belirlemek için vektör uzayı ile ilgili temel kavramlara yönelik sorulardan oluşan Final Testi uygulanmıştır. Final Testinde öğrencilerin cevaplarına atanan kodların düşünme biçimlerine göre dağılımının yüzde ve frekans tablosu Tablo 19'daki gibidir.

Tablo 19. FT'ye Atanan Kodların Düşünme Biçimlerine Göre Yüzde ve Frekansları

| | Düşünme Biçimleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sentetik-Geometrik | | Analitik-Aritmetik | | Analitik-Yapısal | | Toplam |
| | n | % | n | % | n | % | n |
| FT | 0 | 0 | 48 | 44,04 | 61 | 55,96 | 109 |

Tablo 19 incelendiğinde final testine verilen cevaplarda sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili hiçbir kodun yer almadığı görülmektedir. En fazla kod atanan düşünme biçimi 61 kodla (%55,45) analitik-yapısal düşünme biçimidir. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod sayısı 48 (%44,55)'dir. Final testinde hiçbir öğrencinin vermiş olduğu cevaba birden fazla kod atanmamıştır. Toplam cevap sayısı 110 olmasıyla birlikte Ö1 kodlu öğrenci altıncı soruyu boş bıraktığı için cevaplara atanan kod sayısı 109 olmuştur. Aşağıdaki Tablo 20'de her bir öğrencinin final testine verdikleri cevapların ilişkili oldukları düşünme biçimleri ve atanan kodlar verilmiştir.

Tablo 20. FT'ye Verilen Cevapların İlişkili Olduğu Düşünme Biçimleri ve Kodları

| | Final Testi Sorular | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Öğrenci | 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
| Ö1 | VG | AGY | AVU | GLB | LUS | LUS | TC | TC | TY | B |
| Ö2 | VG | AG | AVU | GGY | LB | LBR | TC | TB | TY | TLG |
| Ö3 | VG | AG | AVU | GG | LB | LDC | TLB | TB | TY | TLG |
| Ö4 | VGY | AG | AVU | GGY | LUS | LBR | TC | TC | TY | TCİ |
| Ö5 | VG | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |
| Ö6 | VSİ | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TUG | TÖ | TCİ |
| Ö7 | VSİ | AG | AVU | GGY | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |
| Ö8 | VSİ | AGY | AVU | GG | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

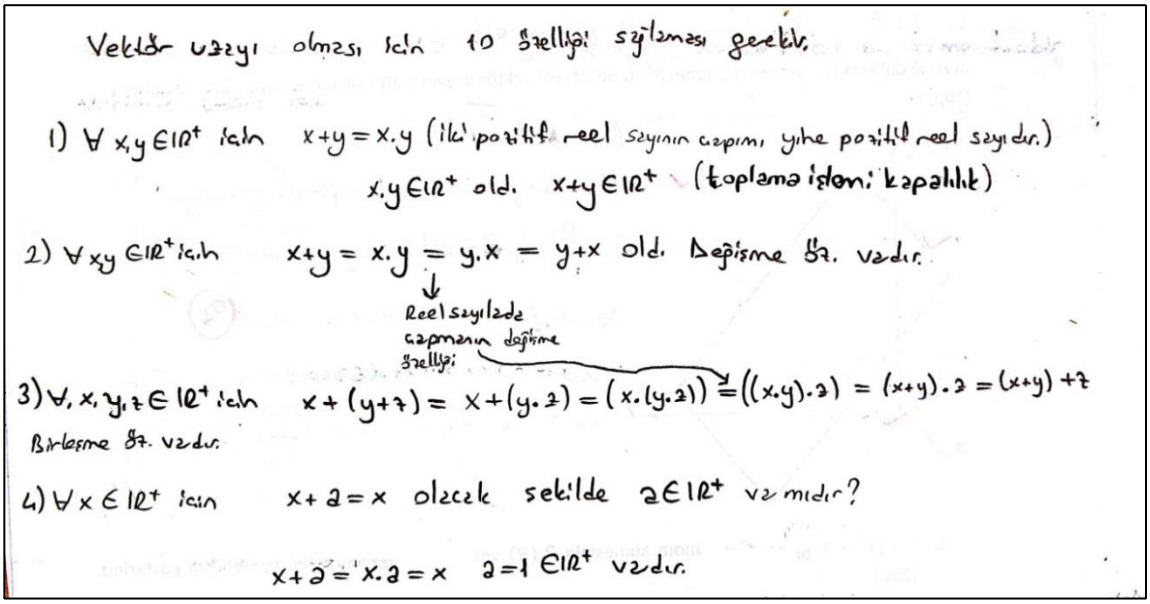
Tablo 20’nin devamı

| | Final Testi Sorular | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Öğrenci | 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
| Ö9 | VG | AG | ACD | GG | LUS | LUS | TC | TB | TY | TLG |
| Ö10 | VSİ | AGY | AC | GGY | LUS | LUS | TLB | TC | TY | Tİ |
| Ö11 | VG | AG | ACD | GLB | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

Geometrik Aritmetik Yapısal

Tablo 20’de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar sarı, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar yeşil ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kodlar mavi renkle ifade edilmiştir. Ayrıca boş bırakılan bir cevaba hiçbir renk atanmamıştır.

Final testinin birinci sorusuna, ikisi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili biri analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili olmak üzere üç adet kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar VGY ve VSİ, analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod ise VG’dir. VG kodunda 6 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö9, Ö11), VSİ kodunda 4 (Ö6, Ö7, Ö8, Ö10) ve VGY kodunda 1 (Ö4) cevap yer almaktadır. Aşağıda Şekil 50’de analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili VG kodu atanan Ö2 kodlu öğrencinin cevabını göstermektedir.


Vektör uzayı olması için 10 özelliği sağlanması gerekir.

1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x+y = x.y$ (iki pozitif reel sayının çarpımı yine pozitif reel sayıdır.)
$x,y \in \mathbb{R}^+$ old. $x+y \in \mathbb{R}^+$ (toplama işlemi kapalılık)

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x+y = x.y = y.x = y+x$ old. Değişme öz. vardır.
Reel sayılarda çarpmanın değişme özelliği

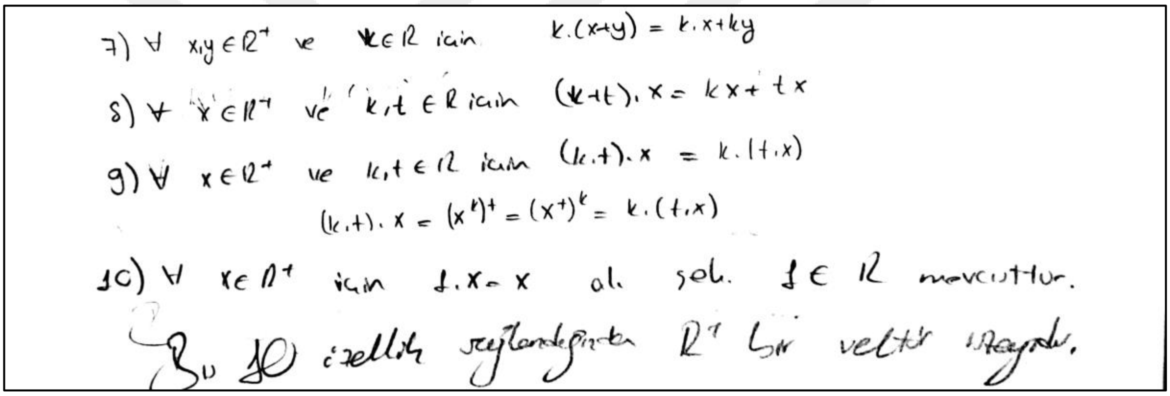
3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^+$ için $x+(y+z) = x+(y.z) = (x.(y.z)) = ((x.y).z) = (x+y).z = (x+y)+z$
Birleşme öz. vardır.

4) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $x+a = x$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}^+$ var mıdır?
$x+a = x.a = x$ $a=1 \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Şekil 50. Ö2 kodlu öğrencinin FT nin 1. sorusuna cevabı

Şekil 50’de yer alan Ö2 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde verilen kümenin vektör uzayı olma şartlarını bildiği ve bu şartların her birini uygun gerekçelendirmelerle açıklamaya çalıştığı görülmektedir. Verilen kümenin yapısına göre elemanlar seçilerek sonuçların yine bu kümenin elemanı olup olmadığına bakılmış ve her bir basamakta cebirsel işlemler açıklamalara yer verilerek desteklenmiştir. Bu yönüyle VG kodu atanan cevaplar analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevaplarına VG kodu atanan diğer öğrenciler de benzer çözümler yaparak final testinin birinci sorusuna cevap vermiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili VSİ kod bulunan dört öğrenci soruda tanımlanan işlemlerin yerine bilinen toplama ve çarpma işlemine göre işlemlerini tanımlayarak kümenin bir vektör uzayı olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Şekil 51’de VSİ kodu atanan Ö6 kodlu öğrenciye ait cevabı göstermektedir.



7) $\forall$ $x,y \in \mathbb{R}^+$ ve $k \in \mathbb{R}$ için $k.(x+y) = k.x+ky$

8) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ ve $k,t \in \mathbb{R}$ için $(k+t).x = kx+tx$

9) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ ve $k,t \in \mathbb{R}$ için $(k.t).x = k.(t.x)$

$(k.t).x = (x^k)^t = (x^t)^k = k.(t.x)$

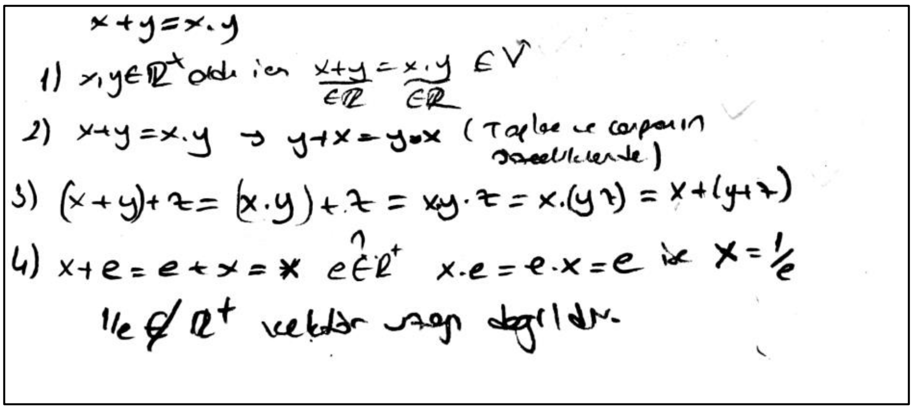
10) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ için $1.x = x$ ol. şek. $1 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.

Bu 10 özellik sağlandığından $\mathbb{R}^+$ bir vektör uzayıdır.

Şekil 51. Ö6 kodlu öğrencinin FT nin 1. sorusuna cevabı

Şekil 51’den de görüldüğü gibi Ö6 kodlu öğrenci çözümünde küme üzerinde tanımlanan işlemlerin özelliklerini göz ardı etmiştir. Ö6 kodlu öğrenci çözümünde bilinen toplama ve çarpma işleminin özelliklerini kullanarak analitik-yapısal nitelikten uzak daha mekanik bir süreç işlemiştir. Bu nedenle işlemsel becerilerin ön planda olduğu VSİ kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme yapısıyla ilişkilendirilmiştir. VSİ kodu atanan cevaplarda diğer üç öğrenci de benzer çözümler yaparak final testinin birinci sorusuna cevap vermiştir.

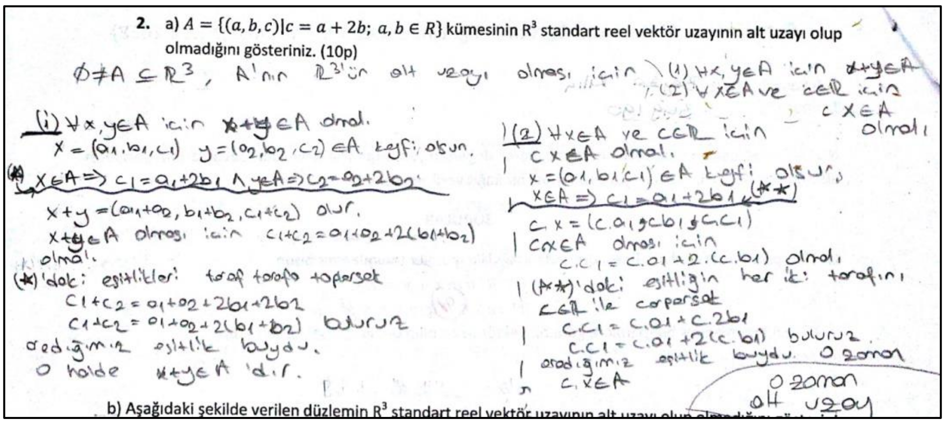
Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili VGY kodu atanan cevaplar öğrencilerin özelliklerin gösterilmesinde yeterli açıklamalara ve gerekçelendirmelere yer vermediklerini ortaya koymuştur. Aşağıda Şekil 52’de VGY kodu atanan Ö4 kodlu öğrenciye ait cevabı göstermektedir.




Şekil 52. Ö4 kodlu öğrencinin FT nin 1. sorusuna cevabı

Şekil 52’de yer alan Ö4 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde birinci özellik dışında çözümlerinde seçtiği elemanların hangi kümeye ait olduğunu belirtmemiş ve yeterli açıklamalara yer vermemiştir. Örneğin sadece ikinci özelliğin gösterilmesinde “Toplam ve çarpımın özelliklerinden” ifadesini kullanmış ancak toplam ve çarpımın hangi özelliğinden dolayı ikinci özelliğin sağlandığını ifade etmemiştir. Bu nedenle yapmış olduğu açıklamalar zayıf ve yetersiz kalmıştır. Ö4 kodlu öğrenci çözümünde toplama ve çarpma işleminin özelliklerini kullanarak ağırlıklı olarak cebirsel işlemlere yer verdiğini söylemek mümkündür. VGY kodu atanan cevaplar açıklamalarının zayıf kalması ve işlemsel ağırlıklı nedeniyle analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

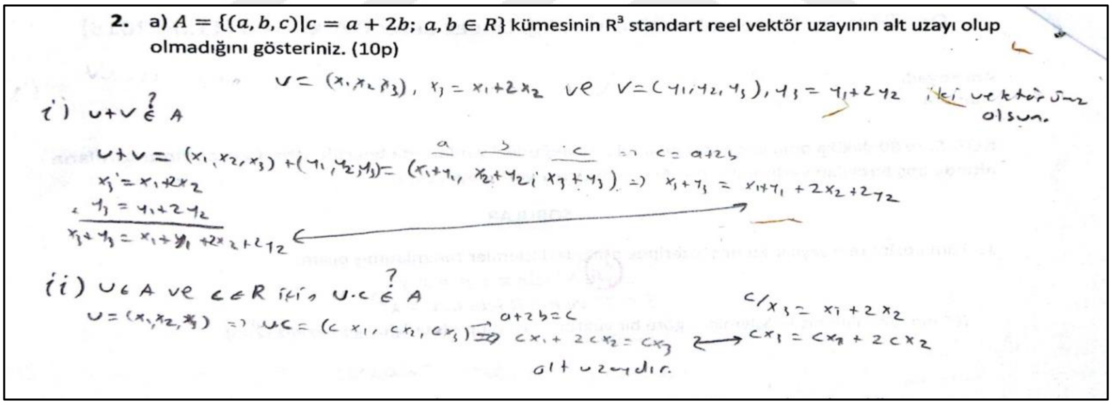
Final testinin ikinci sorusunun a şıkkında biri analitik-yapısal düşünme biçimiyle, diğeri analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili olmak üzere iki adet kod atanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili AG kodu 8 (Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö11), analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili AGY kodu 3 (Ö1, Ö8, Ö10) öğrencinin cevabına atanmıştır. Aşağıdaki Şekil 53’te analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili AG kodu atanan Ö5 kodlu öğrencinin cevabını göstermektedir.




Şekil 53. Ö5 kodlu öğrencinin FT nin 2. sorusun a şıkkına cevabı

Şekil 53’te cevabı yer alan Ö5 kodlu öğrenci çözümüne başlamadan önce verilen kümenin $R^3$ ün bir alt kümesi olduğuna dikkat çekmiş ve ardından alt uzay kavramının tanımına yer vermiştir. Bir sonraki basamakta ise Ö5 kodlu öğrenci alt uzay kavramının tanımında yer alan özellikleri çözümlerinde gerekçelendirmelere de yer vererek cevaplamıştır. Ö5 kodlu öğrenci cevabında alt uzay kavramına ilişkin tanımı ve tanımın özelliklerinin gösterilmesinde kullanılan destekleyici açıklamaların yer alması nedeniyle analitik-yapısal nitelikte bulunmuş olup analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına AG kodu atanan diğer öğrenciler de çözümlerinde alt uzay kavramının tanımına yer vermiş ve bu tanımın özelliklerinin gösteriminde yaptıkları cebirsel işlemleri açıklamaları ile desteklemişlerdir.

Cevaplarına AGY kodu atanan üç öğrenci final sınavının ikinci sorusuna cevap verirken alt uzay kavramına yönelik bir tanıma yer vermemiş ve yapmış oldukları işlemleri uygun bir şekilde gerekçelendirmemişlerdir. Aşağıdaki Şekil 54’te, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili AGY kodu atanan öğrencilerden Ö1 kodlu öğrenciye ait cevabı göstermektedir.


**2.** a) $A = \{(a,b,c) | c = a + 2b;\ a, b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)

$u = (x_1, x_2, x_3),\ x_3 = x_1 + 2x_2$ ve $v = (y_1, y_2, y_3),\ y_3 = y_1 + 2y_2$ iki vektörümüz olsun.

i) $u + v \overset{?}{\in} A$

$u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (\underbrace{x_1 + y_1}_{a}, \underbrace{x_2 + y_2}_{b}, \underbrace{x_3 + y_3}_{c}) \Rightarrow c = a + 2b$

$\Rightarrow x_3 + y_3 = x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2$

$x_3 = x_1 + 2x_2$

$+\ y_3 = y_1 + 2y_2$

$x_3 + y_3 = x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2$

ii) $u \in A$ ve $c \in R$ için $u \cdot c \overset{?}{\in} A$

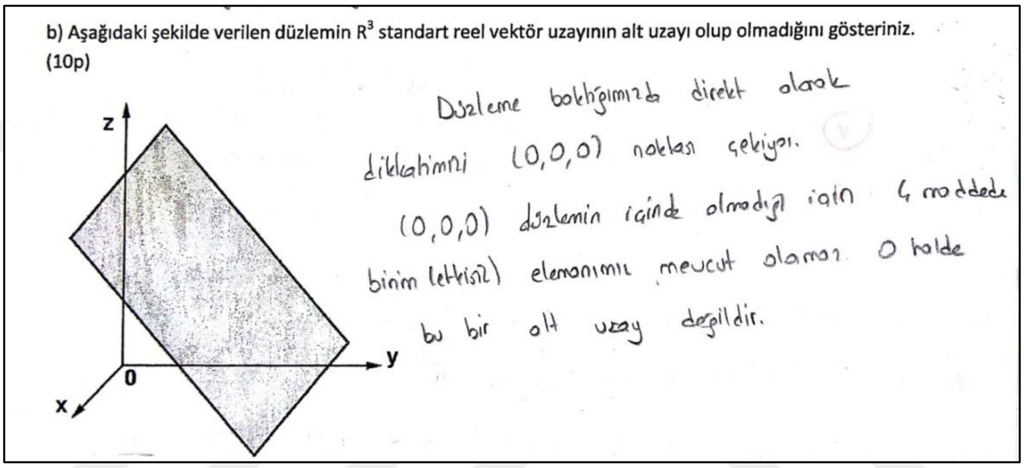
$u = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow uc = (cx_1, cx_2, cx_3) \xrightarrow{a+2b=c} cx_1 + 2cx_2 = cx_3 \longleftrightarrow$ $c / x_3 = x_1 + 2x_2$, $cx_3 = cx_1 + 2cx_2$

alt uzaydır.

Şekil 54. Ö1 kodlu öğrenci FT nin 2. sorusunun a şıkkına cevabı

Şekil 54’te görüldüğü gibi Ö1 kodlu öğrenci, verilen kümeden iki vektör belirleyerek bu vektörleri toplama ve skalerle çarpım işlemlerine sokmuştur. Bununla birlikte, işlemleriyle ilgili hiçbir gerekçelendirmeye veya destekleyici açıklamalara yer vermemiştir. Ayrıca Ö1 kodlu öğrencinin çözümünde alt uzay kavramına yönelik bir tanımda bulunmamaktadır. Birinci özellikte sadece vektör toplamının A kümesinin bir elemanı olup olmadığına dair matematiksel bir ifadeye yer vererek bu özelliğin nerden geldiğinin ve neyin kontrol edildiğinin bilgisini belirtmemiştir. Ö1 kodlu öğrenci cevabında daha çok otomatik olarak alt uzay olma kurallarını işlemsel olarak göstermeye odaklanmıştır. Tanıma, açıklamalara yer verilmemesi ve tamamıyla işlemsel bir sürecin işletilmesi nedeniyle AGY kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Final sınavının ikinci sorusunun b şıkkında biri analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili diğer ikisi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili üç adet kod atanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili AVU kod 8 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8) öğrencinin, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili ACD kodu 2 (Ö9, Ö11) ve AC kodu 1 (Ö10) öğrencinin cevabına atanmıştır. Aşağıda Şekil 55'te analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili AVU kodu atanan Ö7 kodlu öğrencinin cevabını göstermektedir.


**b) Aşağıdaki şekilde verilen düzlemin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)**

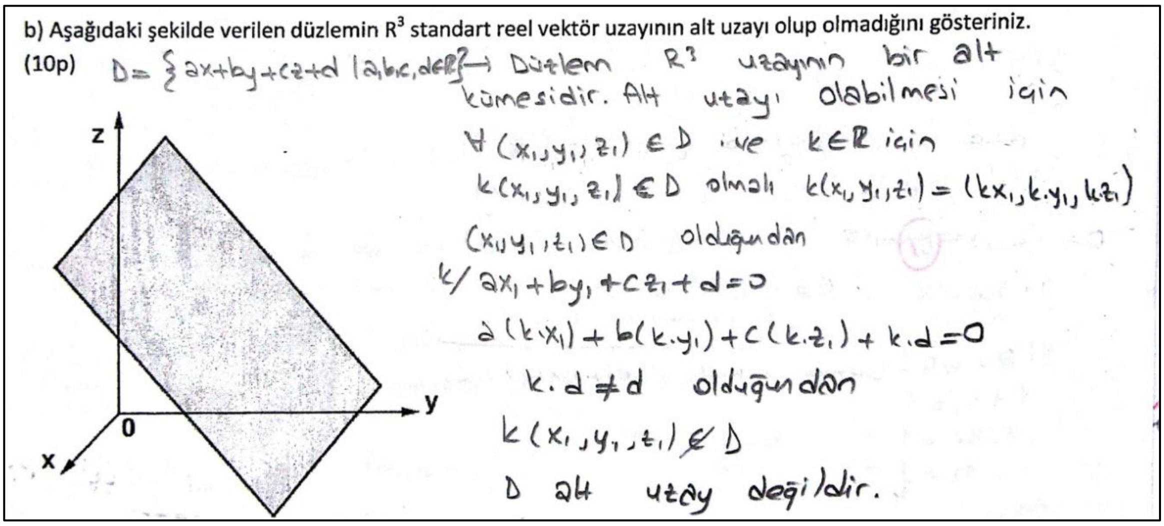
Düzleme baktığımızda direkt olarak dikkatimi (0,0,0) noktası çekiyor. (0,0,0) düzlemin içinde olmadığı için 4 maddede birim (etkisiz) elemanımız mevcut olamaz. O halde bu bir alt uzay değildir.



Şekil 55. Ö7 kodlu öğrencinin FT nin 2. sorusunun b şıkkına cevabı

Şekil 55'e bakıldığında Ö7 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde verilen düzlemin alt uzay olmamasına neden olarak düzlemin (0, 0, 0) noktasını içermemesini belirttiği görülmektedir ve yapmış olduğu bu açıklamayı da gerekçelendirmektedir. Öyle ki bu noktanın birim eleman olduğunu ve bu sebepten vektör uzayı olma şartlarından birini sağlamadığını belirtmiştir. Bu bakımdan Ö7 kodlu öğrenci cevabında verilen düzlemin geometrik temsili veya cebirsel gösterimden ziyade vektör uzayı tanımının özelliklerinden biri olan etkisiz elaman özelliğine odaklandığı görülmektedir. Ö7 kodlu öğrencinin cevabı vektör uzayının tanımından yararlanması nedeniyle analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevaplarına AVU kodu atanan diğer öğrencilerin de benzer bir şekilde cevap vererek soruyu cevapladıkları gözlenmiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili ACD kodu atanan cevaplar incelendiğinde öğrencilerin verilen düzlemin cebirsel gösteriminden hareketle soruya cevap vermeyi tercih ettikleri görülmüştür. Aşağıda Şekil 56'da analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili ACD kodu atanan cevaplardan Ö11 kodlu öğrenciye ait cevaba yer verilmiştir.

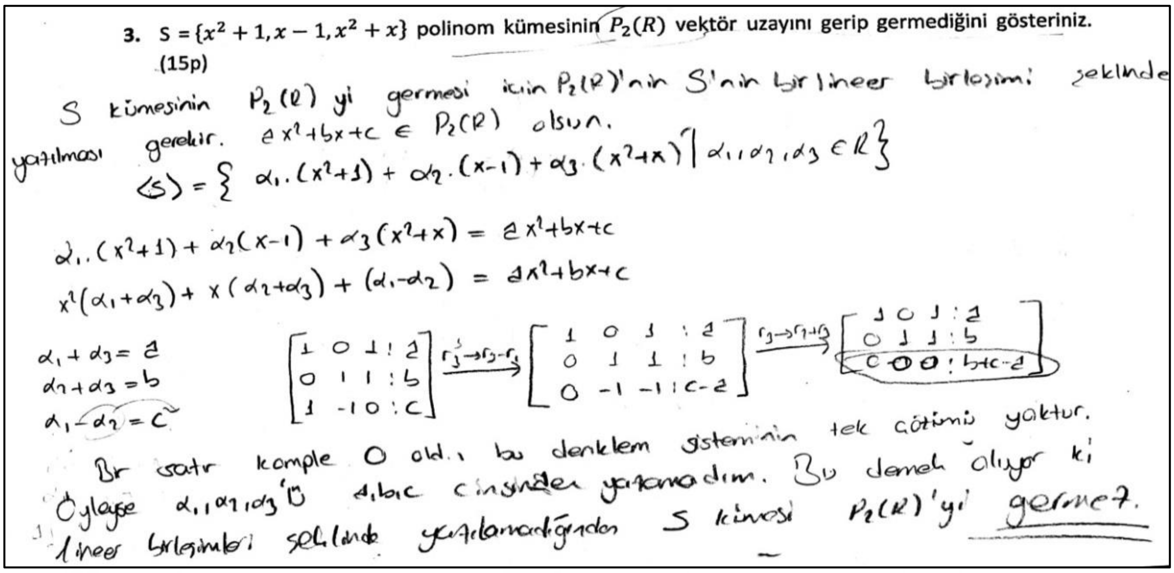



Şekil 56. Ö11 kodlu öğrencinin FT nin 2. sorusunun b şıkkına cevabı

Şekil 56'da Ö11 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde verilen düzlem için bir denklem yazdığı ve düzlem üzerinde aldığı bir vektör ile skaler çarpma işlemine göre kapalılık özelliğini incelediği görülmektedir. Ö11 kodlu öğrenci bu incelemeyi yaparken verilen düzlemin ve vektörün cebirsel gösteriminden yararlanmış ve bu gösterimler üzerinden işlemlerini uygulamıştır. Düzlemin cebirsel gösteriminin kullanılması ve işlemlerin ön planda olması bakımından ACD kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Ö9 kodlu öğrenci de benzer bir çözüm yaparak soruya cevap vermiştir.

AC kodu atanan Ö10 kodlu öğrenci cevabında verilen düzlem üzerinden birinci bileşeni sıfır olan iki tane vektör belirlediği ve bu vektörler üzerinden cebirsel işlemler yaparak toplama ve skalerle çarpma işlerine göre kapalılık özelliklerini incelemiştir. AC kodu atanan cevap türü ACD kodu atanan cevaplar gibi cebirsel ve aritmetik işlemlerin kullanılması nedeniyle analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Farklı olarak Ö10 kodlu öğrenci verilen düzlemle bu düzleme ait denklemi doğru bir şekilde ilişkilendirememiştir. Bu nedenle Ö10 kodlu öğrencinin cevabı farklı bir kod altında incelenmiştir.

Final sınavının üçüncü sorusunda öğrencilerin cevaplarına ikisi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle, biri analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili üç adet kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili GGY kodunda 4 (Ö2, Ö4, Ö7, Ö10) GLB kodunda 2 (Ö1, Ö11) ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili GG kodunda 5 (Ö3, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9) öğrencinin cevapları yer almaktadır. Aşağıda Şekil 57'de analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili GG kodu atanan Ö6 kodlu öğrencinin cevabını göstermektedir.



**3.** $S=\{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)

S kümesinin $P_2(R)$ yi germesi için $P_2(R)$'nin S'nin bir lineer birleşimi şeklinde yazılması gerekir. $ax^2+bx+c \in P_2(R)$ olsun.

$$\langle S\rangle = \{\alpha_1.(x^2+1)+\alpha_2.(x-1)+\alpha_3.(x^2+x) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$$

$$\alpha_1.(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^2+x) = ax^2+bx+c$$

$$x^2(\alpha_1+\alpha_3)+x(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_1-\alpha_2) = ax^2+bx+c$$

$$\alpha_1+\alpha_3=a \qquad \alpha_2+\alpha_3=b \qquad \alpha_1-\alpha_2=c$$

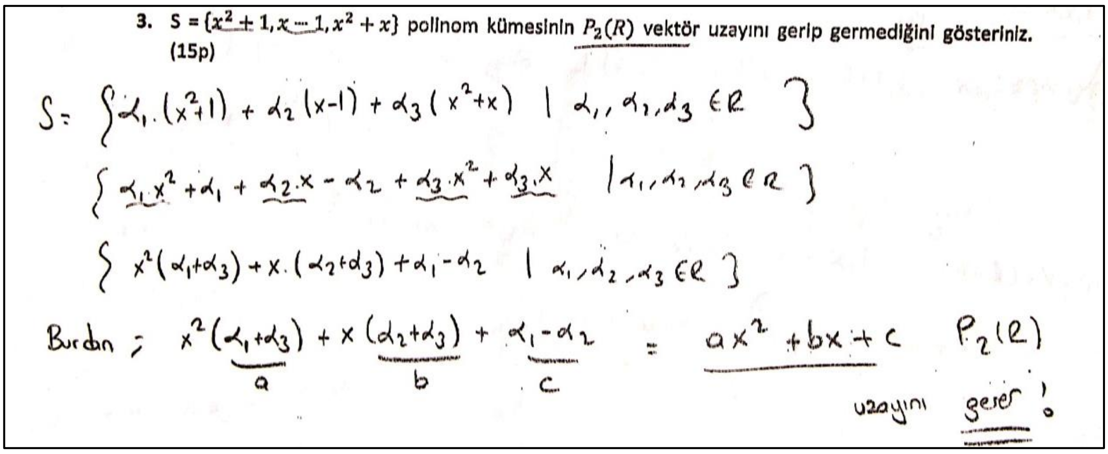
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to r_3-r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+c-a \end{array}\right]$$

Bir satır komple 0 old. bu denklem sisteminin tek çözümü yoktur.
Öyleyse $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$'ü a,b,c cinsinden yazamadım. Bu demek oluyor ki
lineer birleşimleri şeklinde yazılamadığından S kümesi $P_2(R)$'yi germez.

Şekil 57. Ö6 kodlu öğrencinin FT nin 3. sorusuna cevabı

Şekil 57'de yer alan çözümünde Ö6 kodlu öğrenci, cebirsel çözümlerine yer vermeden önce verilen kümenin gerdiği yeri lineer birleşimlerinin kümesi olarak tanımlamıştır. GG kodu atanan cevaplar germe kavramının tanımını ve lineer birleşim kavramı ile ilişkisine yönelik açıklamaları barındırdığı için analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına GG kodu atanan diğer öğrenciler de cevaplarında germe kavramının tanımına ve açıklamalara yer vermiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili GGY kodu atanan cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin germe kavramının tanımını veya lineer birleşim kavramı ile ilgili ilişkisini göz ardı ettiği ve direk olarak cebirsel çözüme odaklandıkları görülmektedir. Aşağıda Şekil 58'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili GGY kodu atanan Ö9 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.



**3.** $S=\{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)

$$S=\{\alpha_1.(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^2+x) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$$

$$\{\alpha_1.x^2+\alpha_1+\alpha_2.x-\alpha_2+\alpha_3.x^2+\alpha_3.x \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$$

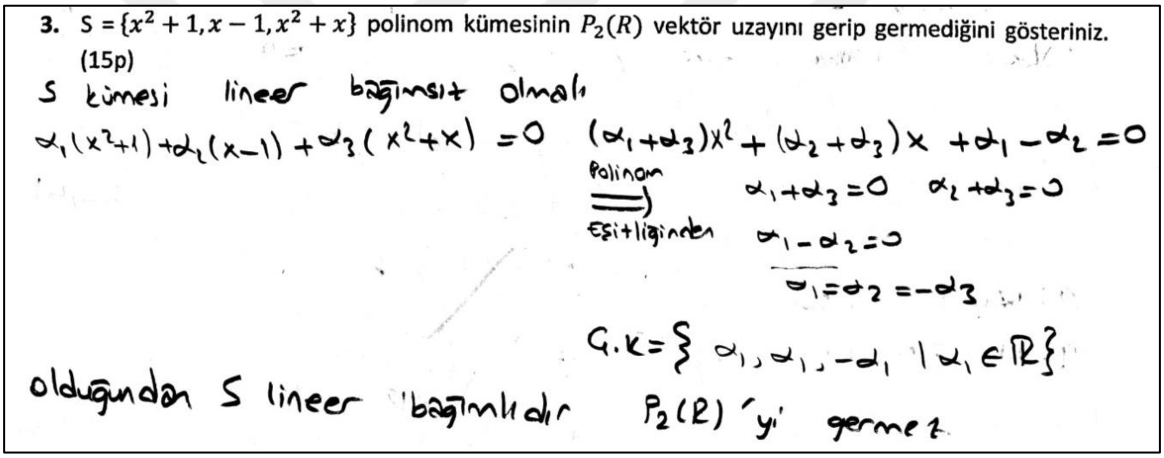
$$\{x^2(\alpha_1+\alpha_3)+x.(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_1-\alpha_2 \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$$

Burdan; $x^2\underbrace{(\alpha_1+\alpha_3)}_{a}+x\underbrace{(\alpha_2+\alpha_3)}_{b}+\underbrace{\alpha_1-\alpha_2}_{c} = ax^2+bx+c$ $P_2(R)$ uzayını gerer!

Şekil 58. Ö9 kodlu öğrencinin FT nin 3. sorusuna cevabı

Şekil 58'den görüldüğü gibi GG kodu atanan cevaplarda yer alan tanımlamalara ve açıklamalara yer verilmemiş daha mekanik bir süreç işletilmiştir. Başka bir deyişle germe kavramı hesaplama yapmaya imkân veren bir kural ile tanımlanmış ve bu yolla cevaba gidilmiştir. Hesaplamaların ve bununla bağlantılı olarak cebirsel işlemlerin ön planda olduğu GGY atanan bu cevaplar yapısı bakımından analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevaplarına GGY kodu atanan diğer öğrenciler de benzer cevaplar vermişlerdir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili GLB ile kodlanan cevaplar incelendiğinde germe kavramı ile ilişkisiz bir kavram olan lineer bağımsızlık kavramı arasında bir bağlantı kurulmuş ardından herhangi bir tanıma veya açıklamaya yer vermeksizin işlemlere yer verilmiştir. Aşağıda Şekil 59'da analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili GLB kodu atanan Ö11 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.



**3.** $S = \{x^2 + 1, x - 1, x^2 + x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)

S kümesi lineer bağımsız olmalı

$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^2+x)=0$   $(\alpha_1+\alpha_3)x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_1-\alpha_2=0$

$\xrightarrow[\text{Eşitliğinden}]{\text{Polinom}}$ $\alpha_1+\alpha_3=0$   $\alpha_2+\alpha_3=0$

$\alpha_1-\alpha_2=0$

$\alpha_1=\alpha_2=-\alpha_3$

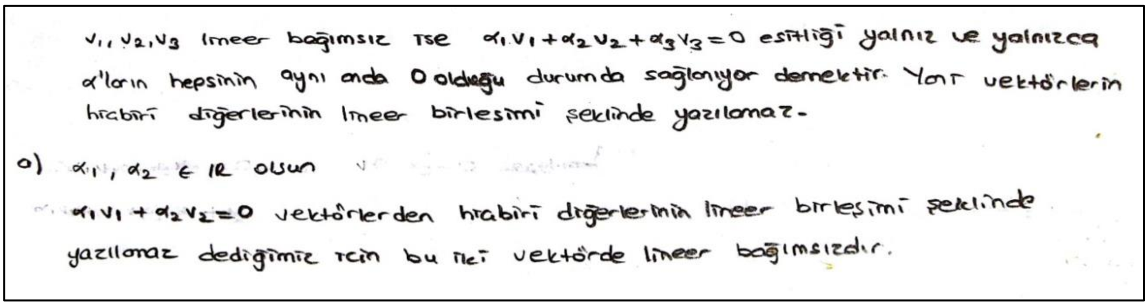
$Ç.K=\{\alpha_1,\alpha_1,-\alpha_1 \mid \alpha_1\in\mathbb{R}\}$

olduğundan S lineer bağımlıdır $P_2(R)$'yi germez.

Şekil 59. Ö11 kodlu öğrenci FT nin 3. sorusuna cevabı

Şekil 59'da yer alan Ö11 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde "S kümesi lineer bağımsız olmalı" ifadesi hiçbir açıklama ile gerekçelendirilmemiş ve böylelikle germe kavramı ile lineer bağımsızlık kavramı arasında bir ilişki kurulmamıştır. Bu bakımdan daha çok ezbere ve yanlış bir yaklaşım yapılmış olduğu ve bu yaklaşıma uygun olarak hesaplama işlemlerinin yürütüldüğü görülmektedir. Zaten yanlış bir kavram ile germe kavramını ilişkilendirmek bu ilişkiyi gerekçelendirmeyi imkânsız kılmıştır ve cebirsel işlemlere odaklanarak çözüm yapılmıştır. Bu bakımdan GLB kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına GLB kodu atanan Ö1 kodlu öğrenci de benzer bir çözüm yaparak üçüncü soruya cevap vermiştir.

Final testinin lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili dördüncü sorusunun a şıkkına verilen cevaplara biri analitik-aritmetik düşünme biçimiyle diğeri analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili olmak üzere iki adet kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LUS koduna 6 (Ö1, Ö4, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11), analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LB koduna ise 5 (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7) öğrencinin cevapları atanmıştır. Aşağıda Şekil 60'da analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LB kodu atanan Ö3 kodlu öğrencinin cevabını göstermektedir.


$v_1, v_2, v_3$ lineer bağımsız ise $\alpha_1.v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0$ eşitliği yalnız ve yalnızca $\alpha$'ların hepsinin aynı anda 0 olduğu durumda sağlanıyor demektir. Yani vektörlerin hiçbiri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamaz.

a) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2=0$ vektörlerden hiçbiri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamaz dediğimiz için bu iki vektörde lineer bağımsızdır.

Şekil 60. Ö3 kodlu öğrencinin FT nin 4. sorusunun a şıkkına cevabı

Şekil 60'da Ö3 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde verilen kümede yer alan vektörleri soyut bir nesne olarak aldığı görülmektedir. Ö3 kodlu öğrenci verilen $\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olması için gereken durumu vermenin yanı sıra lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkiden hareketle $\{v_1, v_2\}$ kümesinin neden lineer bağımsız olduğunu açıklamıştır. Cevaplarına LB kodu atanan diğer öğrenciler de cevaplarında cebirsel işlemler yapmak yerine kavramlar arasındaki ilişkiyi kullanarak verilen vektör kümesiyle ilgili çıkarımlarda bulunmuştur. Analitik-aritmetik işlemelerin yerini lineer bağımsızlığın tanımına ve lineer birleşim kavramı ile ilişkisine bırakması bakımından ötürü LG kodu atanan cevaplar analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LUS kodu atanan cevaplarda öğrenciler cevaplarında ilk olarak lineer bağımsızlığın "$a_1.v_1+a_2.v_2+a_3.v_3=0$, $a_1=a_2=a_3=0$." sembolik tanımına yer vermiştir. Bu cevap denklem ve eşitlikler dışında bir tanım içermemektedir. LUS kodu atanan cevaplar bu sembolik tanımdan yararlanarak $\{v_1, v_2\}$ kümesinin lineer bağımsızlığına ilişkin skalerle ilgili öğrencilerin çözümlerini içermektedir. Aşağıda Şekil 61'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LUS kodu atanan Ö1 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ ve lineer bağımsız ise

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 'dır.

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ için

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ lineer bağımsızdır

Şekil 61. Ö1 kodlu öğrencinin FT nin 4. sorusunun a şıkkına cevabı

Şekil 61'de yer alan Ö1 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde lineer bağımsızlığın kavramıyla ilgili sembolik bir tanıma yer verdiği görülmektedir. Ö1 kodlu öğrenci cevabında herhangi bir hesaplama tekniğine yer vermemiştir. Fakat çözümde skalerlerin aldığı değere odaklanılmıştır (yanlış bir şekilde). Ö1 kodlu öğrenci farklı vektör denklemlerinde skalerler için aynı reel değerlerini kullanmıştır. Skalerlerin uygun olmayan bir şekilde soru içerisinde kullanılması söz konusudur. Vektörlerin numerik değerleriyle yapılan işlemler göz önünde bulundurulduğunda LUS kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına LUS kodu atanan diğer öğrenciler de benzer bir şekilde soruya cevap vermiştir.

Final testinin dördüncü sorusunun b şıkkına verilen cevaplara ikisi analitik-aritmetik ikisi analitik-yapısal olmak üzere toplam dört adet kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LUS kodu 3 (Ö1, Ö9, Ö10), LDC kodu 3 (Ö3, Ö8, Ö11) öğrencinin cevaplarına atanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LB 3 (Ö5, Ö6, Ö7), LBR 2 (Ö2, Ö4) öğrencinin cevaplarına atanmıştır. Aşağıda Şekil 62'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LDC kodu atanan Ö3 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.

b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ olsun

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$

$$\frac{\alpha_4 v_4}{\alpha_4} = -\frac{\alpha_1 v_1}{\alpha_4} - \frac{\alpha_2 v_2}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3 v_3}{\alpha_4}$$

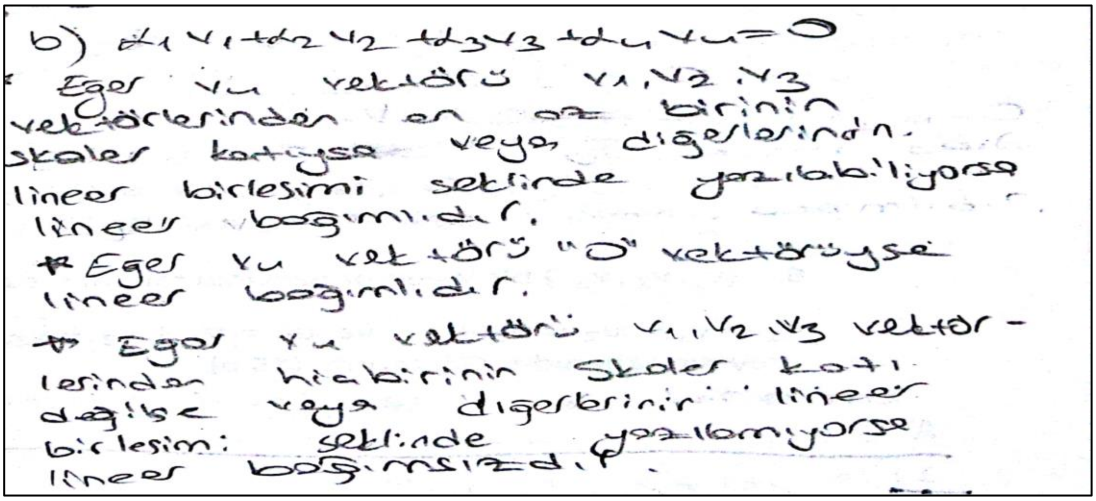
$v_4 = \underbrace{\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right)}_{x} v_1 + \underbrace{\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right)}_{y} v_2 + \underbrace{\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)}_{z} v_3$ olacak şekilde $x, y, z \in \mathbb{R}$ mevcutsa küme lineer bağımlıdır.

Şekil 62. Ö3 kodlu öğrencinin FT nin 4. sorusunun b şıkkına cevabı

Şekil 62'de yer alan cevabında Ö3 kodlu öğrenci, lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkiden çok lineer bağımsızlığın tanımından hareketle yazdığı vektör denklemine odaklanmıştır. Yani öğrenciler küme içindeki bir vektörün diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazılıp yazılmadığını cebirsel olarak göstermeyi amaçlamış ve skalerlerin durumuna göre cevap vermeye çalışmışlardır. Lineer bağımsızlık tanımının yalnızca bir denklem veya bir hesaplama aracı olarak görülmesi göz önüne alındığında LDC kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. LDC kodu atanan cevaplarda diğer öğrenciler de soruya benzer şekilde cevap vermişlerdir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili LUS kodu atanan cevaplarda öğrenciler $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesinin lineer bağımlılık/bağımsızlığını $\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olmasıyla ilişkilendirerek cevap veremeye çalışmıştır. LUS kodu atanan cevaplar incelendiğinde tıpkı dördüncü sorunun a şıkkında olduğu gibi skalerlerin kullanımında hata yapılmış ve uygun olmayan bir şekilde skalerler kullanılmıştır. Yani farklı vektör denklemlerinde skalerler için aynı reel değerlerini kullanmıştır. LUS kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir.

Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LB kodu atanan cevaplarda öğrencilerin lineer birleşim ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkiyi kullanarak soruya cevap verdikleri gözlenmiştir. Aşağıda Şekil 63'te analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LB kodu atanan Ö5 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.

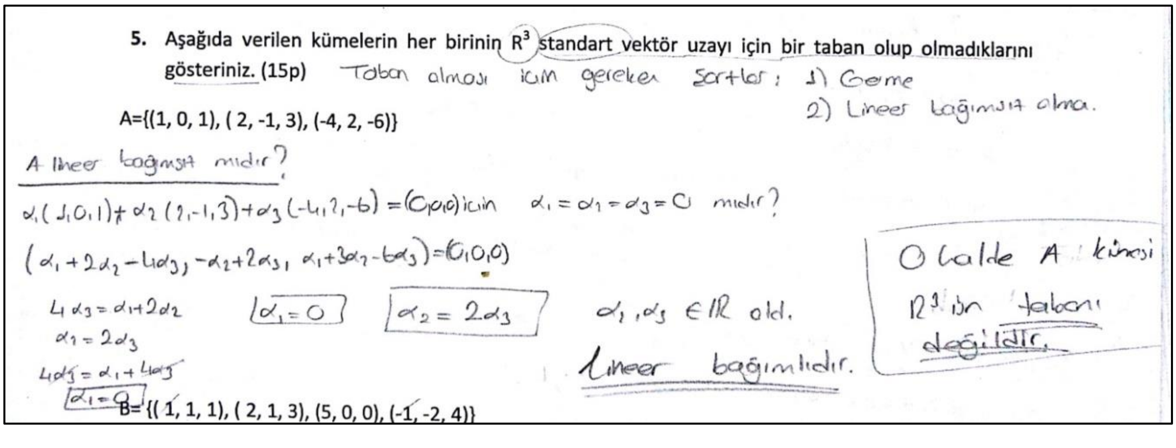

b) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$
* Eger $v_4$ vektörü $v_1, v_2, v_3$ vektörlerinden en az birinin skaler katıysa veya digerlerinin lineer birlesimi seklinde yazılabiliyorsa lineer bagımlıdır.
* Eger $v_4$ vektörü "0" vektörüyse lineer bagımlıdır.
* Eger $v_4$ vektörü $v_1, v_2, v_3$ vektörlerinden hiçbirinin skaler katı degilse veya digerlerinin lineer birlesimi seklinde yazılamıyorsa lineer bagımsızdır.

Şekil 63. Ö5 kodlu öğrencinin FT nin 4. sorusunun b şıkkına cevabı

Şekil 63'te yer alan cevabında Ö5 kodlu öğrenci, vektörleri genel forma ele almış ve olası bütün durumları değerlendirerek soruya cevap vermiştir. Ö5 kodlu öğrenci çözümünü gerekçelendirirken lineer bağımlılık/bağımsız kavramı ile lineer birleşim kavramı arasındaki ilişkiyi kullanmıştır. Ayrıca $v_4$ vektörünün sıfır vektörü olması durumunu da özel bir durum olarak cevabına eklemiştir. Cevabı LB olarak kodlana diğer üç öğrenci de soruya benzer bir şekilde cevap vermiştir. Ancak sadece Ö2 kodlu öğrenci Ö5 kodlu öğrenci gibi vektörünün sıfır vektörü olduğu durumu da değinmiştir. Ö4, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin $v_4$'ün sıfır vektörü olması durumuna değinmemiş olması cevapları için bir eksiklik değildir çünkü $v_4$'ün diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazılması bu durumu kapsamaktadır. Cevaplar incelendiğinde lineer bağımsızlık ile lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkinin uygun bir şekilde açıklanması bakımından LB kodu atanan cevaplar analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili LBR kodu atanan öğrencilerin cevapları da tıpkı LB de olduğu gibi kavramlar arasındaki ilişkilere değinilmiştir. LB kodundan farklı olarak ise LBR kodu atanan cevaplarda öğrenciler cevaplarında $R^3$ ile ilişkili açıklamalara yer vermiştir. Bu nedenle LBR kodu atanan cevaplar LB kodu atanan cevaplarla aynı nedenlerle analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir.

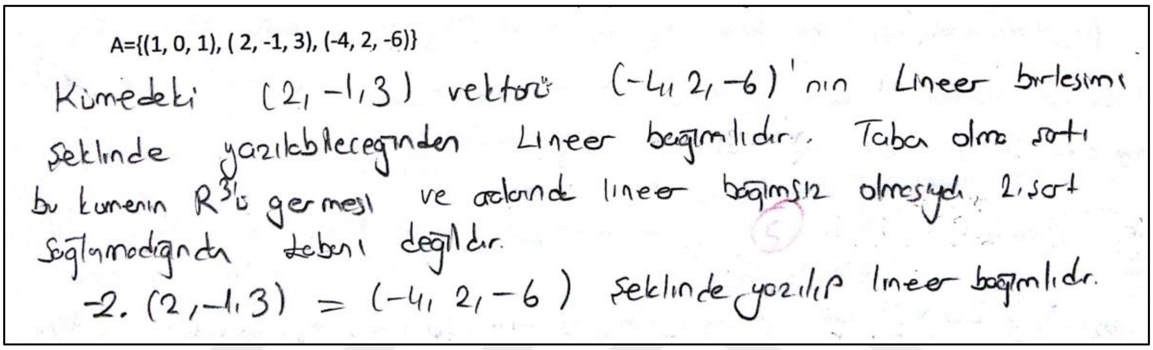
Final testinin taban kavramıyla ilgili beşinci sorusunun a şıkkına verilen cevaplara biri analitik-aritmetik, diğeri analitik-yapısal olmak üzere iki ayrı kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod TC, analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod TLB olarak atanmıştır. Cevaplarına TC kodu atanan 7 (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9) öğrenci TLB kodu atanan 4 (Ö3, Ö8, Ö10, Ö11) öğrenci bulunmaktadır. Aşağıda Şekil 64'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TC kodu atanan Ö6 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.




Şekil 64. Ö6 kodlu öğrencinin FT nin 5. sorusunun a şıkkına cevabı

Şekil 64'de Ö6 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramının tanımından hareketle elde edilen denklemde skalerler için bir çözüm kümesinin hesaplandığı görülmektedir. Tamamıyla hesaplama işlemlerinin baskın olduğu bir çözüm süreci yürütülerek A kümesinin bir taban olmadığına karar verilmiştir. Sorunun çözümünün cebirsel işlemler kullanılarak yapılmasından dolayı TC kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına TC kodu atanan diğer öğrenciler de soruya benzer bir şekilde cevap vermiştir. Sadece Ö9 kodlu öğrenci benzer cebirsel işlemlerle verilen kümenin $R^3$ ü germediğini göstererek soruya cevap vermiştir.

Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TLB kodu atanan cevaplarda yer alan öğrenciler verilen kümenin taban olmadığını göstermek için lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkiyi kullanmışlardır. Aşağıda Şekil 65'te analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TLB kodu atanan Ö8 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.


A={(1, 0, 1), ( 2, -1, 3), (-4, 2, -6)}

Kümedeki $(2, -1, 3)$ vektörü $(-4, 2, -6)$'nın Lineer birlesimi seklinde yazılabileceğinden Lineer bağımlıdır. Taban olma şartı bu kümenin $R^3$'ü germesi ve aslında lineer bağımsız olmasıydı, 2. şart sağlamadığından tabanı değildir.

$-2.(2,-1,3) = (-4, 2, -6)$ seklinde yazılıp lineer bağımlıdır.

Şekil 65. Ö8 kodlu öğrenci FT nin 5. sorusunun a şıkkına cevabı

Şekil 65'te Ö8 kodlu öğrencinin çözümü incelendiğinde, herhangi bir cebirsel çözüm yapmadığı ve kümede yer alan vektörlerin birbirlerinin lineer birleşimi olarak yazıldığına odaklanarak cevap verdiği görülmektedir. Lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkiden yararlanılmıştır. Hesaplama tekniklerinin baskınlığının yitirildiği ve kavramlar arasındaki ilişkilerin göz önüne bulundurulduğu çözümler analitik-yapısal nitelikte çözümlerdir. Bu nedenle öğrencinin vermiş olduğu cevap türü analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevaplarına TLB kodu atanan diğer öğrenciler de soruya benzer bir yaklaşımda bulunmuşlardır.

Beşinci sorusunun b şıkkına verilen cevaplara ikisi analitik-aritmetik biri de analitik-analitik-yapısal olmak üzere üç ayrı kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodlar TC ve TUG, analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod TB olarak atanmıştır. Cevaplarına TC kodu atanan 5 (Ö1, Ö4, Ö5, Ö7, Ö10) öğrenci TUG kodu atanan 1 (Ö4) öğrenci ve TB kodu atanan 5 (Ö2, Ö3, Ö8, Ö9, Ö11) öğrenci bulunmaktadır. Aşağıda Şekil 66'da analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TB kodu atanan Ö3 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.

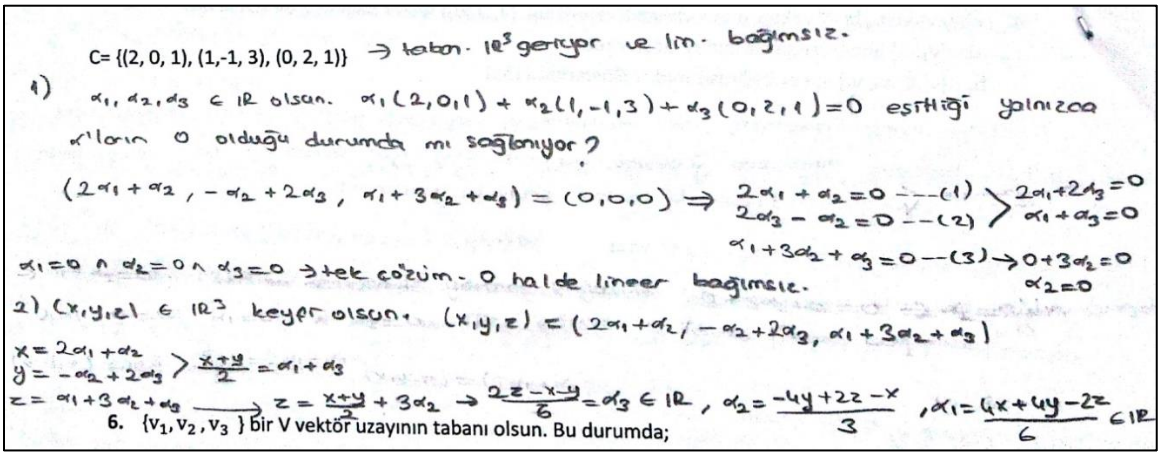
B= {( 1, 1, 1), ( 2, 1, 3), (5, 0, 0), (-1, -2, 4)} → $\mathbb{R}^3$'te 3'ten fazla vektör lineer bağımsız olamaz. Yani vektörlerden en az biri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Bu yüzden B taban değildir.

Şekil 66. Ö3 kodlu öğrencinin FT nin 5. sorusunun b şıkkına cevabı

Şekil 66’da Ö3 kodlu öğrencinin çözümü incelendiğinde herhangi bir cebirsel çözüm yapmadığı ve kümedeki eleman sayısı ile vektör uzayının boyutu arasındaki bir özelliğe odaklanarak cevap verdiği görülmektedir. Ö3 kodlu öğrenci bu özelliği gerekçelendirirken lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkiyi kullanmıştır. Hesaplama tekniklerinin baskınlığının yitirildiği ve kavramlar arasındaki ilişkilerin göz önüne bulundurulduğu çözümler analitik-yapısal nitelikte çözümlerdir. Bu nedenle Ö3 kodlu öğrencinin vermiş olduğu cevap türü analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına TB kodu atanan diğer dört öğrenci de soruya benzer bir yaklaşımda bulunarak cevap vermiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TC kodu atanan cevaplar incelendiğinde, tıpkı beşinci sorunun a şıkkında olduğu gibi çözümler gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler çözümlerinde lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramının tanımından hareketle elde edilen denklemde skalerler için bir çözüm kümesi aranmıştır. Hesaplama işlemlerinin baskın olduğu bir çözüm süreci yürütülerek B kümesinin bir taban olmadığına karar verilmiştir. Sorunun çözümünün cebirsel işlemler kullanılarak yapılmasından dolayı TC kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına TC kodu atanan diğer öğrenciler de benzer bir şekilde soruya cevap vermiştir.

Beşinci sorunun c şıkkına öğrencilerin verdiği cevaplara biri analitik-yapısal biri analitik-aritmetik olmak üzere toplam iki adet kod atanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TY kodu atanan öğrenci sayısı 10 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11) öğrenci, analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkili TÖ kodu atanan 1 (Ö6) öğrenci bulunmaktadır. Aşağıda Şekil 67’de analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TY kodu atanan Ö8 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.



C= {(2, 0, 1), (1,-1, 3), (0, 2, 1)} → taban. $IR^3$ geriyor ve lin. bağımsız.

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in IR$ olsun. $\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(1,-1,3) + \alpha_3(0,2,1) = 0$ eşitliği yalnızca $\alpha$'ların 0 olduğu durumda mı sağlanıyor?

$(2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow$ $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ---(1), $2\alpha_3 - \alpha_2 = 0$ ---(2) > $2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$

$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ ---(3) → $0 + 3\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$

$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_3 = 0$ → tek çözüm. O halde lineer bağımsız.

2) $(x,y,z) \in IR^3$ keyfi olsun. $(x,y,z) = (2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)$

$x = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $y = -\alpha_2 + 2\alpha_3$ > $\frac{x+y}{2} = \alpha_1 + \alpha_3$

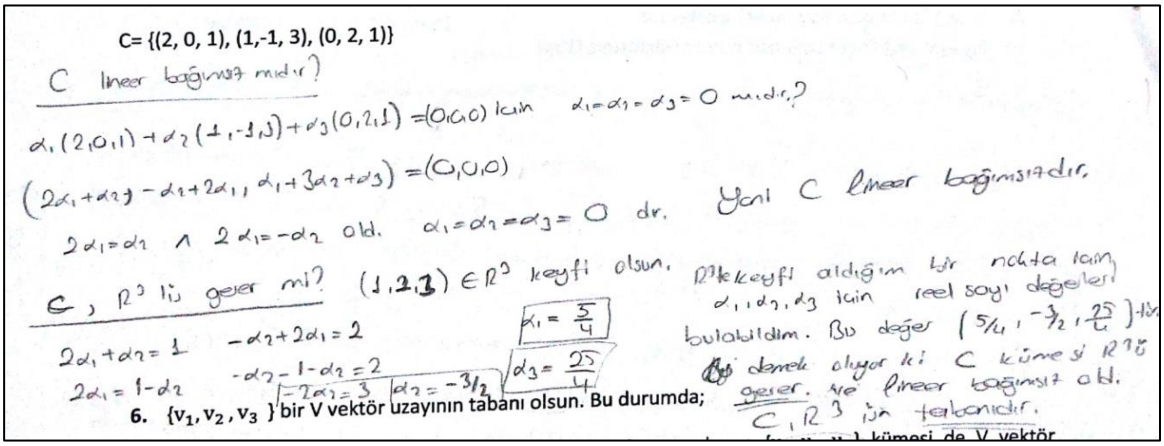
$z = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ → $z = \frac{x+y}{2} + 3\alpha_2$ → $\frac{2z-x-y}{6} = \alpha_3 \in IR$, $\alpha_2 = \frac{-4y+2z-x}{3}$, $\alpha_1 = \frac{4x+4y-2z}{6} \in IR$

6. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bir V vektör uzayının tabanı olsun. Bu durumda;

Şekil 67. Ö3 kodlu öğrencinin FT nin 5. sorusunun c şıkkına cevabı

Şekil 67'de yer alan cevabında Ö3 kodlu öğrenci, taban kavramının tanımında yer alan özellikleri çözümünde gerekçelendirmelere yer vererek cevaplamıştır. Cevabına TY kodu atanan diğer öğrenciler de çözümlerinde taban kavramının şartlarına yer vermiş ve bu özelliklerinin gösteriminde yaptıkları cebirsel işlemleri açıklamaları ile desteklemişlerdir. Öğrencilerin cevapları taban kavramına ilişkin tanımı ve tanımın özelliklerinin gösterilmesinde kullanılan destekleyici açıklamaların yer alması nedeniyle analitik-yapısal nitelikte bulunmuş olup analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevaplarına TY kodu atanan diğer öğrenciler de soruya benzer bir şekilde cevaplar vermiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TÖ kodu atanan cevapta Ö6 kodlu öğrenci verilen kümenin $R^3$ gerdiğini gösterirken $R^3$ ten özel bir vektör seçmiştir. Aşağıda Şekil 68'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TÖ kodu atanan Ö6 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.



C= {(2, 0, 1), (1,-1, 3), (0, 2, 1)}

C lineer bağımsız mıdır?

$\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(1,-1,3) + \alpha_3(0,2,1) = (0,0,0)$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ mıdır?

$(2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + 2\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$

$2\alpha_1 = \alpha_2 \wedge 2\alpha_1 = -\alpha_2$ old. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dr. Yani C lineer bağımsızdır.

C, $R^3$ lü gerer mi? $(1,2,3) \in R^3$ keyfi olsun.

$2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $-\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2$

$2\alpha_1 = 1 - \alpha_2$, $-\alpha_2 - 1 - \alpha_2 = 2$, $-2\alpha_2 = 3$, $\alpha_2 = -3/2$, $\alpha_1 = \frac{5}{4}$, $\alpha_3 = \frac{25}{4}$

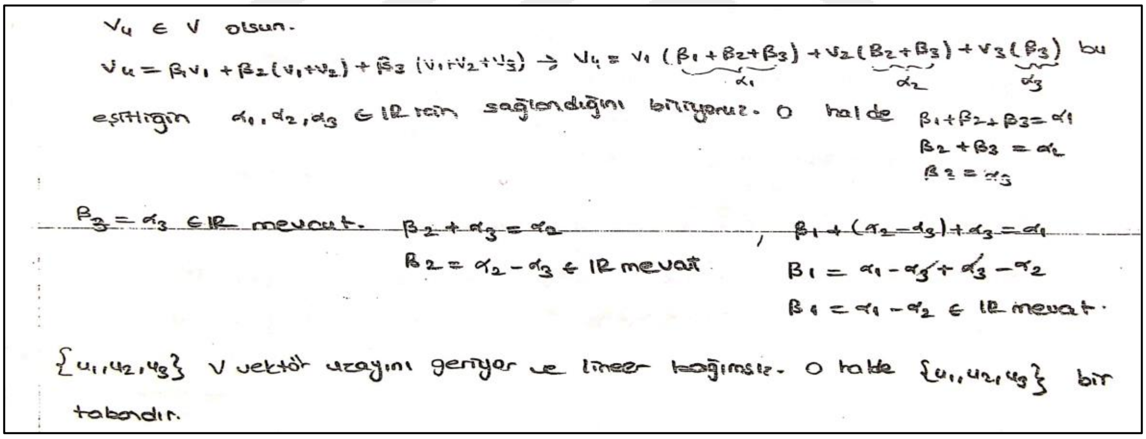
$R^3$ te keyfi aldığım bir nokta için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ için reel sayı değerleri bulabildim. Bu değer $(5/4, -3/2, 25/4)$ tür. Örnek oluyor ki C kümesi $R^3$ ü gerer. Ve lineer bağımsız old. C, $R^3$ ün tabanıdır.

6. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bir V vektör uzayının tabanı olsun. Bu durumda;

Şekil 68. Ö6 kodlu öğrencinin FT nin 5. sorusunun c şıkkına cevabı

Şekil 68'de Ö6 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde verilen kümenin lineer bağımsız olduğunu gösterdiği görülmektedir. Ancak Ö6 kodlu öğrenci verilen kümenin $R^3$'ü gerdiğini göstermeye çalışırken özel bir vektör belirleyerek germeyi göstermeye çalışmıştır. Ö6 kodlu öğrenci böyle bir çözüm yaparak genellemekten çok özel bir örnek üzerinden hesaplamaya yönelik bir süreç yürütmüştür. Özel bir durum üzerinden ilişkili kavram ile ilgili gösterimlerde bulunmak analitik-aritmetik düşünme biçiminin göstergelerindendir. Bu nedenle TÖ kodu atanan cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Final testinin taban kavramıyla ilişkili altıncı sorusuna verilen cevaplara ikisi analitik- analitik-aritmetik düşünme biçimiyle biri analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili olmak üzere üç adet kod atanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TCİ kodu 4 (Ö4, Ö5, Ö6, Ö7), Tİ kodu 1 (Ö10) ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TLG kodu 5 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö8, Ö9, Ö11) öğrencinin cevabına kod olarak atanmıştır. Ayrıca Ö1 kodlu öğrenci altıncı soruyu boş bırakmıştır. Aşağıda Şekil 69'da analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili TLG kodu atanan Ö3 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.


$v_4 \in V$ olsun.

$v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3) \rightarrow v_4 = v_1(\underbrace{\beta_1+\beta_2+\beta_3}_{\alpha_1}) + v_2(\underbrace{\beta_2+\beta_3}_{\alpha_2}) + v_3(\underbrace{\beta_3}_{\alpha_3})$ bu eşitliğin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ için sağlandığını biliyoruz. O halde

$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\alpha_1$

$\beta_2+\beta_3=\alpha_2$

$\beta_3=\alpha_3$

$\beta_3=\alpha_3 \in \mathbb{R}$ mevcut. $\beta_2+\alpha_3=\alpha_2$

$\beta_2=\alpha_2-\alpha_3 \in \mathbb{R}$ mevcut.

$\beta_1+(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_3=\alpha_1$

$\beta_1=\alpha_1-\cancel{\alpha_3}+\cancel{\alpha_3}-\alpha_2$

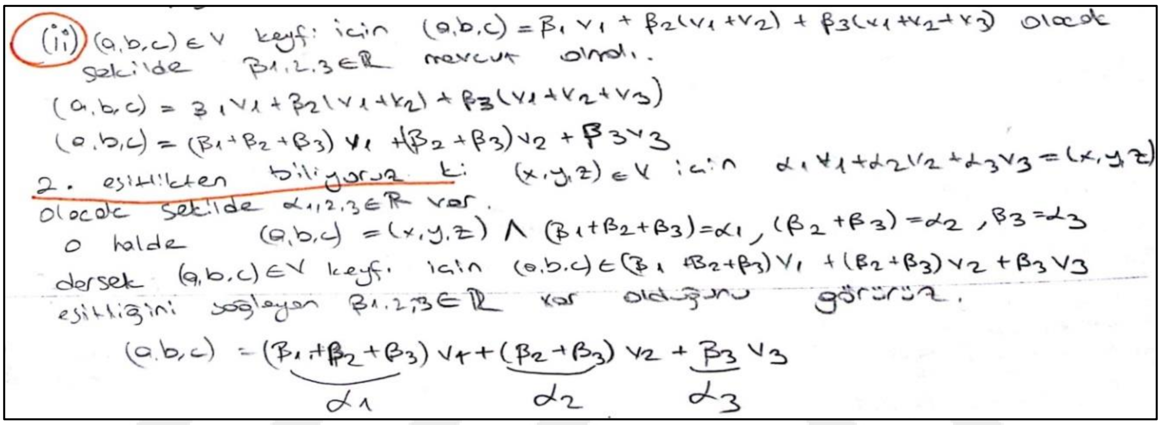
$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \in \mathbb{R}$ mevcut.

$\{u_1,u_2,u_3\}$ V vektör uzayını geriyor ve lineer bağımsız. O halde $\{u_1,u_2,u_3\}$ bir tabandır.

Şekil 69. Ö3 kodlu öğrencinin FT nin 6. sorusuna cevabı

Şekil 69'da Ö3 öğrencinin cevabı incelendiğinde taban şartlarına açıklamalı bir şekilde yer verdiği görülmektedir. Cevapta yer verilen vektörler soyut bir obje olarak tanımlanarak işlemlerin bir parçası olmuştur. Ö3 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık kavramının tanımından yazdığı vektör denkleminin çözümünde yapmış olduğu cebirsel işlemleri neye göre ve neden yaptığını açıklayarak ifade etmiştir. Ö3 kodlu öğrenci sorunun devamında germe kavramının gösteriminde de benzer bir çözüme devam etmiştir. Verilen vektör uzayından genel bir vektör seçmiş ve açıklayıcı bir şekilde işlemlerini yapmıştır. Taban kavramına ilişkin tanımın ve bu tanımda yer alan kavramların gösterilmesinde yapılan gerekçelendirmeler ile soruda yer verilen vektörlerin soyut bir obje olarak değerlendirilmesi göz önüne alındığında TLG kodu atanan cevaplar analitik-yapısal düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Cevabına TLG kodu atanan diğer öğrencilerin de soruya benzer cevaplar verdikleri gözlenmiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TCİ kodu atanan cevaplar incelendiğinde bu kodun atandığı cevapların TLG kodu atanan cevaplarla benzerlik gösterdikleri fark edilmiştir. Sadece cevabına TCİ kodu atanan öğrencinin sorunun germe kavramı ile ilişkili kısmında (a, b, c) şeklinde genel sıralı üçlü kullanarak cevap verdikleri görülmüştür. Aşağıda Şekil 70'te analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili TCİ kodu atanan Ö5 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.


(ii) $(a,b,c) \in V$ keyfi için $(a,b,c) = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3)$ olacak şekilde $\beta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ mevcut olmalı.

$(a,b,c) = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3)$

$(a,b,c) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3) v_1 + (\beta_2+\beta_3) v_2 + \beta_3 v_3$

2. eşitlikten biliyoruz ki $(x,y,z) \in V$ için $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (x,y,z)$ olacak şekilde $\alpha_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ var.

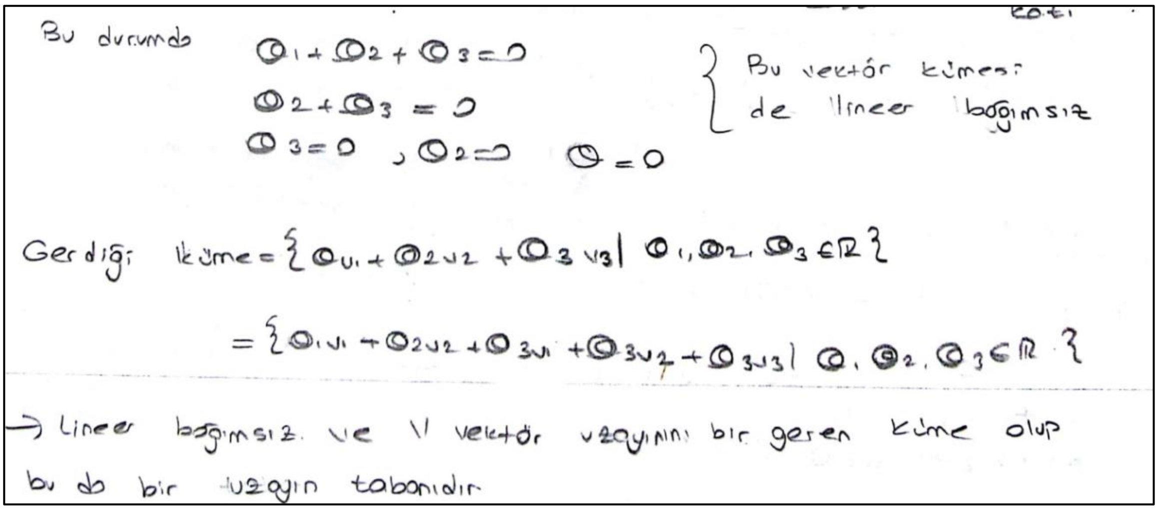
O halde $(a,b,c) = (x,y,z) \wedge (\beta_1+\beta_2+\beta_3) = \alpha_1$, $(\beta_2+\beta_3) = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$ dersek $(a,b,c) \in V$ keyfi için $(a,b,c) \in (\beta_1+\beta_2+\beta_3) v_1 + (\beta_2+\beta_3) v_2 + \beta_3 v_3$ eşitliğini sağlayan $\beta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ var olduğunu görürüz.

$(a,b,c) = \underbrace{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_1} v_1 + \underbrace{(\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_2} v_2 + \underbrace{\beta_3}_{\alpha_3} v_3$

Şekil 70. Ö5 kodlu öğrencinin FT nin 6. sorusuna cevabı

Şekil 70'te yer alan cevabında Ö5 kodlu öğrenci sorunun başlangıç ve lineer bağımsızlık kavramı ile ilişkili kısmında TLG kodu atanan cevaplara benzer çözümler yapmıştır. Ancak sorunun germe kavramı ile ilgili olduğu kısımda verilen vektör uzayından bir vektör belirlenirken $R^3$ ten genel sıralı üçlü seçilmiştir. Yani V vektör uzayı $R^3$ gibi düşünülerek hareket edilmiştir. Yazılan vektör denkleminin üç vektörden oluşması ve bileşenleri karşılıklı olarak birbiri ile eşitleme düşüncesi vektör uzayının $R^3$ olarak düşünülmesinde etkili olmuş olabilir. Sonuç olarak Ö5 öğrenci genel bir çözüm yapmaktan çok özel bir durum üzerinden cebirsel işlemler yaparak verilen kümenin V vektör uzayını gerdiğini göstermiştir. Bu nedenle öğrencinin vermiş olduğu cevap analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili Tİ kodunda bir (Ö10) öğrenci bulunmaktadır. Ö10 kodlu öğrencinin cevabına bakıldığında özellikle sorunun germe kavramı ile ilgili kısmında eksiklerin yer aldığı ve genel olarak cebirsel işlemlerin yer aldığı bir çözüm yaptığı görülmektedir. Aşağıda Şekil 71'de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili Tİ kodu atanan Ö10 kodlu öğrencinin cevabı gösterilmiştir.




Şekil 71. Ö10 kodlu öğrencinin FT nin 6. sorusuna cevabı

Şekil 71'de Ö10 kodlu öğrencinin cevabı incelendiğinde, sorunun genelinde yapmış olduğu çözümlerle ilgili gerekçelendirmeler yapmadığı görülmektedir. Sorunun germe kavramı ile ilişkili kısmından verilen kümenin gerdiği yer gösterilmeye çalışılmıştır. Kümenin gösterimindeki eksikliklerle beraber yazılan kümenin V vektör uzayını gerdiği açıkça gösterilmemiştir. Gerek lineer bağımsızlık gerekse germe kavramı ile ilgili verilen cevaplar cebirsel işlemleri kapsayacak şekilde olup gerekli açıklamalara yer verilmemiştir. Bu bakımdan ele alındığında Ö10 kodlu öğrenciye ait cevap analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir.

Bu bölümde öğrencilerin her birinin FT testinin tamamında hangi düşünme biçimlerini sergiledikleri, öğretim sürecinde sorularla ilgili konularda verilen ödevler üzerine yapılan klinik mülakatlarla birlikte değerlendirilmiştir. Böylece öğrencilerin düşünme biçimlerini daha doğru bir şekilde belirlemek amaçlanmıştır.

Ö1 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 21'de sunulmuştur.

Tablo 21. Ö1 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AGY | AVU | GLB | LUS | LUS | TC | TC | TY | B |

Tablo 21 incelendiğinde, Ö1 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 3 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 6 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Altıncı soru Ö1 kodlu öğrenci tarafından boş bırakılmıştır.

Final testine verdiği cevaplar Ö1 kodlu öğrencinin analitik-aritmetik düşünme biçiminin baskın olduğunu göstermektedir.

Ö1 kodlu öğrencinin alt uzay kavramına yönelik ikinci sorunun a şıkkına verdiği cevapta alt uzayla kavramıyla ilgili gerekçelendirmelere yer vermediğinden cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö1 kodlu öğrenci ile alt uzay kavramıyla ilgili yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Nedir alt uzay açıklar mısın?

Ö1 : Alt uzay bir vektör uzayının alt kümesi olacak ve aynı zamanda da toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olması lazım

A : Neden sadece iki özellik?

Ö1 : Çünkü zaten diğerlerini kapsıyordu. Derste de göstermiştik toplama işlemine göre kapalıysa toplamayla ilgili diğer özellikleri de otomatik olarak sağlıyor.

Ö1 kodlu öğrencinin mülakat kaydına bakıldığında alt uzay olma aksiyomlarını bildiği görülmektedir. Ö1 kodlu öğrenci toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin yanı sıra alt küme ilişkisinden de bahsetmiştir. Ö1 kodlu öğrenci aynı zamanda neden yalnızca bu aksiyomlara bakılması gerektiğini mülakat kaydında açıklamıştır. Buradan hareketle her ne kadar Ö1 kodlu öğrenci ikinci soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiş olsa da alt uzay kavramıyla ilgili düşüncelerinin analitik-yapısal düzeyde olduğunu söylemek mümkündür.

Ö1 kodlu öğrencinin sırasıyla germe, lineer bağımsızlık ve taban kavramlarıyla ilişkili final testinin üç, dört ve beşinci sorularına verdiği cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimi ile ilişkilendirilmiştir. Bu kavramlarla ilgili Ö1 kodlu öğrencinin mülakatları incelendiğinde farklı bir düşünme yapısıyla cevaplar vermediği gözlenmiştir. Ö1 kodlu öğrenci final testinin altıncı sorusunu boş bıraktığı için değerlendirmeye alınmamıştır.

Ö2 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testindeki sorulara vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 22'de sunulmuştur.

Tablo 22. Ö2 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AG | AVU | GGY | LB | LBR | TC | TB | TY | TLG |

Tablo 22 incelendiğinde, Ö2 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 8 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 2 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö2 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-yapısal düşünme biçimini baskın olduğunu söylemek mümkündür.

Ö2 kodlu öğrencinin germe kavramına yönelik üçüncü soruya verdiği cevapta hesaplama tekniklerinin baskın olduğu görülmüş ve bu soruya verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö2 kodlu öğrenci ile germe kavramına yönelik yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Kendi cümlelerinle germe kavramını açıklar mısın?

Ö2 : Bir vektör uzayındaki elemanların bunların skaler katının toplamı o vektörlerin gerdiği kümedir.

A : Bu bahsettiğin skaler katlarının toplamı nedir?

Ö2 : Lineer birleşimi

A : Peki tek bir lineer birleşimden mi oluşuyor?

Ö2 : Hayır lineer birleşimlerinin kümesi

A : Peki yedinci soruyu açıklar mısın?

Ö2 : g(x) ve h(x)'lerden oluşan kümeye B kümesi dedim. Gerdikleri kümeyi bulmak için α ve θ değerleri ile çarptım g ve h fonksiyonunu. Eğer f(x) fonksiyonu B'nin elemanı ise o zaman α ve θ değerlerini bulmam gerekirdi ama bulamadım.

A : Bunun anlamı nedir?

Ö2 : f fonksiyonu g ve h fonksiyonlarının gerdiği kümenin elemanı değildir?

A : Başka bir ifadeyle ne derdin?

Ö2 : f fonksiyonu diğerlerinin lineer birleşimleri şeklinde yazılamaz

Ö2 kodlu öğrenci ile yapılan klinik mülakatta hem lineer birleşim ile germe kavramı arasındaki ilişkiyi açıklamış hem de germe kavramıyla ilgili ödevdeki soruya uygun gerekçelendirmeler yapmıştır. Bu bağlamda, final testinde germe sorusuna analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren Ö2 kodlu öğrencinin mülakatından germe kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu sonucu çıkmıştır.

Ö2 kodlu öğrenci taban kavramına yönelik beşinci sorunun b ve c şıklarına analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö2 kodlu öğrenci ile taban kavramına yönelik yapılan mülakatta da analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür.

Ö3 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 23'de verilmiştir.

Tablo 23. Ö3 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AG | AVU | GG | LB | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

Tablo 23 incelendiğinde, Ö3 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 9 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 1 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö3 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden öğrencide analitik-yapısal düşünme biçimini baskın olduğunu söylemek mümkündür.

Ö3 kodlu öğrencinin yalnızca lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili sorunun b şıkkına verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö3 kodlu öğrenciyle lineer bağımsızlık kavramına yönelik yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Peki alfaların en az birinin sıfırdan farklı olması ne anlama geliyor?

Ö3 : Yani birbirlerinin lineer birleşimleri şeklinde yazılabiliyorlar anlamına geliyor

A : Peki hepsi aynı anda sıfırsa ve bu tek çözümse bu ne anlama geliyor?

Ö3 : Hiçbiri diğerlerinin lineer birleşimleri olarak yazılamaz

A : Peki bir vektör kümesine bakarak lineer bağımsızlığını anlamanın farklı bir yolu var mıdır?

Ö3 : Her kümede anlayamaya bilirim ama biri katıysa o zaman lineer bağımlı olduğunu anlayabilirim. Mesela bu kümede 3x-1 var, eğer 6x-2 veya 9x-3 olsaydı bağımlı olurdu.

Ö3 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili klinik mülakat kaydı incelendiğinde lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkinin farkında olduğu görülmektedir. Final sorusunun dördüncü sorusunun b şıkkında kavramlar arasındaki bu ilişkiden yararlanmamış ve cebirsel işlemler yaparak lineer bağımsızlığı incelemeye çalışmıştır. Ancak mülakat kaydından Ö3 kodlu öğrencinin lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu ortaya çıkmıştır.

Ö4 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 24'te verilmiştir.

Tablo 24. Ö4 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VGY | AG | AVU | GGY | LUS | LBR | TC | TC | TY | TCİ |

Tablo 24 incelendiğinde Ö4 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 4 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 6 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö4 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-aritmetik düşünme biçiminin ağırlıklı olduğunu söylemek mümkündür.

Ö4 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili final testinin birinci sorusuna verdiği cevap gerekçelendirmelerin olmaması nedeniyle analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö4 kodlu öğrenci ile vektör uzayı kavramına yönelik yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Vektör uzayı için neler söyledin?

Ö4 : Toplama ve skalerle çarpma özelliklerini sağlayan kümeye denir.

A : Nedir o özellikler?

Ö4 : 10 tane, a+b elemanı mıdır? Değişme özelliği, birim eleman, ters eleman, soldan dağılma, 1.u u ya eşit olacak şekilde 1 in eleman olması vs..

A : Peki genel olarak hangi özelliklere baktığımızı düşündün mü?

Ö4 : Kapalılık özelliği

A : Neye göre kapalılık?

Ö4 : Toplama ve çarpmaya göre kapalılık. Skalerle çarpmaya göre.

A : Üçüncü soruda elemanlarını nasıl seçtin?

Ö4 : Üç tane matris seçtim. Ve matrislerdeki toplama işlemine göre toplamının yine aynı kümede olduğunu gördüm. Değişme özelliğini de aynı şekilde yaptım.

A : Ters elemanı nasıl buldun?

Ö4 : Ters elemanı da yukarıda zaten birim elemanı tanımlamıştık. Kendisiyle tersinin toplamının birim eleman olması gerekiyordu. Sonra işlemleri yaptığımda matrisimin eksilisi çıktı. O zaman –a –b –c –d

Ö4 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde vektör uzayı olma aksiyomlarını ve bu aksiyomlarla hangi özelliklerin kontrol edildiğinin farkında olduğu görülmektedir. Ayrıca Ö4 kodlu öğrenci ödevlerde kendisine yöneltilen sorularda kavramın doğasına uygun şekilde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini gerçekleştirip uygun gerekçelendirmeler yapmıştır. Bu bağlamda, Ö4 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ö4 kodlu öğrenci germe ve lineer bağımsızlık kavramlarıyla ilgili üçüncü ve dördüncü sorunun a şıkkında analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö4 kodlu öğrenciyle yapılan mülakatta bu kavramlarla ilgili analitik-aritmetik düşünme seviyesinde olduğu görülmüştür. Ö4 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık ve lineer birleşim kavramları arasındaki ilişkinin farkında olmasına rağmen lineer bağımsızlık ödevinde yer alan dördüncü soruda özel değerler kullanarak soruya cevap vermiştir. Bu durum Ö4 kodlu öğrencinin final testinin dördüncü sorusuna verdiği cevaba yansımış, a şıkkında analitik-aritmetik b şıkkında ise analitik-yapısal düşünme biçimi ile sorulara cevap vermiştir. Ö4 kodlu öğrenci ile taban kavramıyla ilgili yapılan mülakatta kavramın tanımını bildiği ancak sorulara verdiği cevaplarda analitik-aritmetik düşünme biçiminde kaldığı ortaya çıkmıştır.

Ö5 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 25'te verilmiştir.

Tablo 25. Ö5 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |

Tablo 25 incelendiğinde, Ö5 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 7 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 3 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö5 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-yapısal düşünme biçiminin baskın olduğunu söylemek mümkündür.

Ö5 kodlu öğrenci taban kavramına yönelik olarak sorulan 5 ve 6. sorularda beşinci sorunun c şıkkına analitik-yapısal düşünme biçimiyle geriye kalan sorulara ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö5 kodlu öğrenci beş ve altıncı sorulara verdiği cevaplar taban kavramının tanımını bildiği göstermektedir. Ancak Ö5 kodlu öğrencinin sorulara verdiği cevaplarda taban kavramının lineer bağımsızlık ve germe kavramlarıyla olan ilişkisi hakkında ne düzeyde bilgi sahibi olduğunu belirleyebilmek için mülakat kayıtlarına bakılmıştır. Aşağıda Ö5 kodlu öğrenci ile taban kavramına yönelik yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Nedir taban açıklar mısın?
Ö5 : Taban bir uzayı geren en az sayıda vektörden oluşan kümedir
A : Nelere baktın bunu kontrol etmek için?
Ö5 : Lineer bağımsızlık olması ve germesi gerekiyor.
A : Neden lineer bağımsız olması gerektiğini düşündün mü?
Ö5 : En az sayıda olması gerekiyor mesela R2'yi 3 vektörde gerebilir ama iki vektörde gerebilir

Ö5 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde taban olacak bir kümenin özelliklerini ve neden lineer bağımsız olması gerektiğini bildiği görülmektedir. Bununla birlikte mülakatın ilerleyen kısımlarında Ö5 kodlu öğrencinin lineer bağımsızlık lineer birleşim ilişkisine yer vermiştir. Aşağıda Ö5 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : R2 için (1, 2) vektörünü içeren bir taban oluştururken neyi göz önünde bulundurdun?

Ö5 : (3, 4) vektörünü seçtim lineer bağımsız olacak şekilde

A : Neden (3, 4) vektörü? Gelişi güzel mi?

Ö5 : Gelişi güzelde seçip bakabilirdim. Ama (1, 2) vektörünün katı olmayacak şekilde seçtim.

Ö5 kodlu öğrenci her ne kadar final testinin beşinci sorusuna analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap verse de mülakat kayıtlarından lineer birleşim, boyut ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkinin farkında olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, Ö5 kodlu öğrencinin taban kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ö6 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 26'da verilmiştir.

Tablo 26. Ö6 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VSİ | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TUG | TÖ | TCİ |

Tablo 26 incelendiğinde Ö6 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 5 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 5 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö6 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden baskın bir düşünme biçimine olmadığını söylemek mümkündür.

Ö6 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili final testinin birinci sorusuna verdiği cevap standart işlemlere göre vektör uzayı aksiyomlarını kontrol etmesi nedeniyle analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö6 kodlu öğrenci ile vektör uzayı kavramına yönelik yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Vektör uzayı için neler söyledin?

Ö6 : Vektör uzayı da skalerle çarpma ve toplama işlemlerinin tanımlı olduğu kümeye vektör uzayı denir. 10 tane özelliği vardır.

A : O özellikler nelerdir?

Ö6 : u+v elemanı olacak o kümenin, değişme özelliği olacak, birleşme vardı, skalerle çarpma, birim eleman, ters eleman, 1.u = 1 olacak şekilde 1 elemanı olacaktı.

A : Peki genel olarak neye baktığını düşündün mü?

Ö6 : Kapalılık özelliği oluyor, toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalılık

Ö6 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde final sınavının birinci sorusunda kapalılık özelliklerini belirtmemesine rağmen vektör uzayı kavramının yapısına hâkim olduğu görülmektedir. Bununla birlikte mülakatın ilerleyen kısımlarında Ö6 kodlu öğrenci ödev sorularıyla ilgili uygun çıkarımlar yapmıştır. Aşağıda Ö6 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : İkinci soruyu açıklar mısın nasıl seçtin elemanlarını?

Ö6 : Üç tane eleman aldım. u, v, w ve R2 nasıl iki bileşenden oluşuyorsa burada da u'yu u1 den un e olacak şekilde belirledim. Sonra bütün özellikleri gösterdim ve hepsini sağladım

A : Peki birim elemanı nasıl buldun?

Ö6 : n tane sıfırdan oluşan bir sıralı nli. Dedim ki bu u ile e nin toplamı u olacaksa ben e (0,0…0) olsun dedim sonra denedim ve olduğunu gördüm. Dedim ki e o zaman Rn nin bir elemanıdır.

A : Üçüncü sorudaki küme bir vektör uzayı mıdır? Nasıl seçtin elemanlarını?

Ö6 : Bu sefer A matrisini aldım elemanları a1 a2 a3 a4 olacak şekilde B ve C matrislerini de aynı şekilde belirledim. Sonra matrislerde toplama işlemi yaparak özellikleri göstermeye başladım.

Ayrıca Ö6 kodlu öğrenci ödevde yer alan iki ve üçüncü sorularda verilen kümelerin yapısına uygun şekilde vektörler seçerek kapalılık özelliklerini göstermeye çalışmıştır. Ö6 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat kaydından vektör uzayı kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu ortaya çıkmıştır.

Ö6 kodlu öğrenci final testinin taban kavramıyla ilgili beşinci ve altıncı sorularına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle sorulara cevap vermiştir. Ö6 kodlu öğrenci ile taban kavramıyla ilgili yapılan mülakatta öğrencinin taban olması için gereken şartları bildiği görülmüştür. Ancak taban ve ilişkili kavramlar arasındaki ilişkiyi net olarak ortaya koyamamış ve bazı soruların çözümde özel değerler kullanmıştır. Bu nedenle Ö6 kodlu öğrencinin taban kavramıyla ilgili analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ö7 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 27'de verilmiştir.

Tablo 27. Ö7 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VSİ | AG | AVU | GGY | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |

Tablo 27 incelendiğinde, Ö7 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 5 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 5 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö7 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden baskın bir düşünme biçimine sahip olmadığını söylemek mümkündür.

Ö7 kodlu öğrencinin final testinin birinci sorusuna verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö7 kodlu öğrenci ile yapılan mülakatta öğrenci vektör uzayı olma aksiyomlarını ve bu aksiyomlarla incelenen kapalılık özelliklerinin neler olduğunu belirterek kavramın yapısı hakkında uygun açıklamalara yer vermiştir. Ö7 kodlu öğrenci Ö6 kodlu öğrencinin açıklamalarına benzer açıklamalara yer vererek ve soruların çözümünde verilen kümelerin yapısına uygun vektörler seçerek cevaplarını gerekçelendirmiştir. Bu nedenle Ö7 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür.

Ö7 kodlu öğrencinin final testinin germe kavramıyla ilgili üçüncü sorusuna verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö7 kodlu öğrenci ile germe kavramıyla yönelik ödevler üzerinden yapılan mülakatlarda öğrencinin germe kavramıyla ilgili anlamalarının işlemsel olduğu ortaya çıkmıştır. Böylelikle Ö7 kodlu öğrencinin hem final testine verdiği cevaptan hem de kendisiyle yapılan mülakatlardan germe kavramıyla ilgili analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür.

Ö7 kodlu öğrenci taban kavramına yönelik olarak sorulan beşinci ve altıncı sorularda beşinci sorunun c şıkkına analitik-yapısal düşünme biçimiyle geriye kalan sorulara ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö7 öğrenci taban kavramıyla ilgili yapılan mülakatta kavramın tanımına uygun bir şekilde yer vermiştir. Beşinci sorunun a ve b şıklarında analitik-aritmetik işlemlere yer veren Ö7 kodlu öğrenci mülakatta taban ile lineer birleşim ve boyut kavramları arasındaki ilişkilere değinmiştir. Aşağıda Ö7 kodlu öğrenci taban kavramına yönelik mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : R2 için (1, 2) vektörünü içeren bir taban bulabildin mi açıklar mısın?

Ö7 : (1, 2) zaten var ben taban olabilmesi için (3, -2) olsun diye düşündüm.

A : Neden (3, -2)?

Ö7 : Çünkü (x, 2x) formatında olmasını istemedim skaler katı olmasın diye düşündüm

Ö7 kodlu öğrencinin cevabına bakıldığında gelişigüzel bir vektör seçmektense (1,2) vektörünün skaler katı olmayan bir vektör seçmeyi tercih ettiği görülmektedir. Bu durum öğrencinin lineer bağımsızlık ile lineer birleşim arasındaki ilişkiyi bildiğini göstermektedir. Bununla birlikte Ö7 kodlu öğrenci $R^2$ de üç ve $R^3$ de dört vektörün düzlem ve uzayı gerebileceğini ancak lineer bağımsız olamayacağını belirterek taban boyut ilişkisine değinmiştir. Ö7 kodlu öğrenci her ne kadar beşinci sorunun a ve b şıklarına analitik-aritmetik işlemler yaparak cevap verse de kavramlar arasındaki ilişkinin farkındadır. Bu nedenle Ö7 kodlu öğrencinin taban kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür.

Ö8 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 28'de verilmiştir.

Tablo 28. Ö8 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VSİ | AGY | AVU | GG | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

Tablo 28 incelendiğinde Ö8 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 6 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 4 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö8 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-yapısal düşünme biçiminin ağırlıklı olduğunu söylemek mümkündür.

Ö8 kodlu öğrencinin final testinin birinci sorusuna cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö8 kodlu öğrenci ile vektör uzayı kavramı üzerine yapılan mülakatta öğrenci kavramla ilgili doğru tanımlamalar yapmıştır. Ancak ödevde yer alan üçüncü sorunun çözümünde final testindekine benzer çözümler yapmış ve uygun gerekçelendirmeler yapamamıştır. Ö8 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olduğunu söylemek mümkündür.

Final testinin ikinci sorusunun a şıkkında gerekçelendirme yapmadan işlemsel bir çözüm yapması nedeniyle Ö8 kodlu öğrencinin cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö8 kodlu öğrencinin alt uzay kavramına yönelik mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : Alt uzay nedir açıklar mısın?

Ö8 : Vektör uzayının bir sürü zaten alt kümesi olmuş oluyor örneğin R3 ün alt kümelerinden vektör uzayı olma şartını sağlayan 10 tane özelliği sağlayanların oluşturduğu kümeye alt uzay denir.

A : Alt kümesi olması gerekiyor mu?

Ö8 : Evet. Öncelikle alt küme olacak sonra bakıyoruz.

A : 10 özelliğin hepsine bakıyor muyuz?

Ö8 : Yok iki tanesine bakıyoruz dedik.

A : Neden o iki tanesine bakıyoruz? Neydi onlar?

Ö8 : Toplamaya göre kapalılık ve skaler çarpmaya göre kapalılık. Birinci özellik toplamaya göre kapalılık olduğu için ikinci özellik toplamaya göre birleşme, değişme özelliği bunları zaten sağlamış oluyor. Ardından skalerle çarpmaya göre yine çarpmanın toplama işlemine göre dağılma özelliklerinden çarpmayı sağladığı için diğerlerini de sağlamış oluyor. O yüzden iki özelliğe bakıyoruz.

Ö8 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde hem vektör uzayı - alt uzay hem de alt uzay - alt küme ilişkilerinin ortaya konduğu görülmektedir. Ö8 kodlu öğrenci bir kümenin alt uzay olması için neden sadece toplama ve skalerle çarpmaya göre kapalılık özelliklerini kontrol edildiğini açıklamıştır. Final testinin ikinci sorusunun a şıkkında gerekçelendirmelere yer vermeyen Ö8 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat öğrencinin alt uzay kavramına yönelik analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğunu ortaya koymuştur.

Ö8 kodlu öğrencinin final testinin lineer bağımsızlıkla ilgili dördüncü sorusuna verdiği cevapta analitik-aritmetik ve cebirsel işlemler yapmış bu nedenle cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö8 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili yapılan mülakatta final testindeki çözümüne paralel açıklamalar yapmış lineer birleşim lineer bağımsızlık ilişkisini açıklayamamıştır. Ö8 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık kavramına yönelik analitik-aritmetik bir düşünme biçimi sergilemiştir.

Ö9 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 29'da verilmiştir.

Tablo 29. Ö9 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AG | ACD | GG | LUS | LUS | TC | TB | TY | TLG |

Tablo 29 incelendiğinde Ö9 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 6 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 4 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö9 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-yapısal düşünme biçiminin ağırlıklı olduğunu söylemek mümkündür.

Ö9 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili final testinin ikinci sorusunun b şıkkına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö9 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili yapılan mülakatta final testinde verdiği cevaba benzer cevaplar vererek açıklamalar yapmış ve analitik-aritmetik düşünme biçimi sergilemiştir.

Final testinin lineer bağımsızlıkla ilgili dördüncü sorusuna Ö9 kodlu öğrencinin verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö9 kodlu öğrenci lineer bağımsızlığın formal tanımı üzerinden aritmetik işlemler yapmıştır. Ö9 kodlu öğrenci ile lineer bağımsızlık kavramıyla yapılan mülakatta lineer bağımsızlığın formal tanımı vermiş ancak lineer birleşim lineer bağımsızlık ilişkisini açıklayamamıştır. Ayrıca Ö9 kodlu öğrenci lineer bağımlılık ilgili soruları formal tanım üzerinden çözmeye çalıştığı görülmüştür.

Ö9 kodlu öğrenci final testinin taban kavramıyla ilişkili beşinci sorunun a şıkkına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ancak Ö9 kodlu öğrenci taban kavramına yönelik ödev üzerinden yapılan mülakatta benzer bir durumda farklı açıklamalara yer vermiştir. Aşağıda Ö9 kodlu öğrencinin taban kavramına yönelik mülakat kaydına yer verilmiştir.

A : R2 için (1, 2) vektörünü içeren bir tabanı nasıl buldun açıklar mısın?
Ö9 : Yani iki vektör olması gerekiyordu çünkü germesi için.
A : Nasıl bir vektör seçtin?
Ö9 : (3, 4) vektörünü seçtim
A : Neden bu vektör? Rastgele mi seçtin?
Ö9 : (1, 2) vektörünün skaler katı olmamasına dikkat ettim
A : Neden peki
Ö9 : Skaler katı değilse lineer bağımsız oluyor çünkü iki vektör ve R2

Ö9 kodlu öğrenci her ne kadar final testinin beşinci sorusunun a şıkkına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap verse de mülakat kayıtları incelendiğinde lineer birleşim, boyut ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkinin farkında olduğu ve bu nedenle Ö9 kodlu öğrencinin taban kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ö10 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 30'da verilmiştir.

Tablo 30. Ö10 Kodlu Öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VSİ | AGY | AC | GGY | LUS | LUS | TLB | TC | TY | Tİ |

Tablo 30 incelendiğinde Ö10 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 2 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 8 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö10 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-aritmetik düşünme biçiminin baskın olduğunu söylemek mümkündür.

Ö10 kodlu öğrencinin final testinin birinci sorusuna verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö10 kodlu öğrenci ile yapılan mülakatta öğrenci vektör uzayı olma aksiyomlarını ve bu aksiyomlarla incelenen kapalılık özelliklerinin neler olduğunu belirterek kavramın yapısı hakkında uygun açıklamalara yer vermiştir. Ö10 kodlu öğrenci Ö6 kodlu öğrencinin açıklamalarına benzer açıklamalara yer vererek ve soruların çözümünde verilen kümelerin yapısına uygun vektörler seçerek cevaplarını gerekçelendirmiştir. Bu nedenle Ö10 kodlu öğrencinin vektör uzayı kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür.

Ö10 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili final testinin ikinci sorusuna analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö10 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili yapılan mülakatta final testinde verdiği cevaba benzer cevaplar vererek açıklamalar yapmıştır. Ö10 kodlu öğrenci alt uzay kavramının yapısını net olarak ortaya koyamamış ve analitik-aritmetik düşünme biçimi sergilemiştir.

Ö10 kodlu öğrencinin final testinin germe kavramıyla ilgili üçüncü sorusuna verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö10 öğrencinin ile germe kavramıyla yönelik ödevler üzerinden yapılan mülakatlarda öğrencinin germe kavramıyla ilgili anlamalarının işlemsel olduğu ortaya çıkmıştır. Ö10 kodlu öğrenci kendisine germe kavramı ve lineer birleşim kavramları arasındaki bağlantıya yönelik olarak verilen sorulara net açıklamalar yapamamıştır. Ö10 kodlu öğrenci ile yapılan mülakattan germe kavramıyla ilgili analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olduğu ortaya koyulmuştur.

Ö10 kodlu öğrencinin final testinin lineer bağımsızlıkla ilgili dördüncü sorusuna verdiği cevap analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö10 kodlu öğrenci ile lineer bağımsızlık kavramıyla yapılan mülakatta lineer bağımsızlığın formal tanımı vermiştir. Ancak lineer birleşim lineer bağımsızlık ilişkisini açıklayamadığı gözlenmiştir. Bununla birlikte Ö10 kodlu öğrenci lineer bağımlılık ilgili soruları formal tanım üzerinden çözmeye çalıştığı görülmüştür. Ö10 kodlu öğrenci ile lineer bağımsızlık kavramı üzerine yapılan mülakat öğrencinin kavramla ilgili analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olduğunu ortaya koymuştur.

Ö10 kodlu öğrencinin final testinin taban kavramıyla ilgili beşinci sorusunun b şıkkı ve altıncı sorulara verdiği cevaplar analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö10 kodlu öğrenci beşinci sorunun a ve c şıklarına analitik-yapısal nitelikte cevap vermiş olmasına rağmen taban boyut arasındaki ilişkiyle ilgili soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö10 kodlu öğrenciyle taban kavramı üzerine yapılan mülakatta kavramın yapısını bildiği ancak boyut ile ilişkilendiremediği gözlenmiştir.

Ö11 kodlu öğrencinin uygulama sonrasında final testine vermiş olduğu cevaplara ilişkin kodlar ve düşünme biçimleri Tablo 31'de verilmiştir.

Tablo 31. Ö11 Kodlu öğrencinin FT'ye Verdiği Cevaplara Ait Kodlar

| 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VG | AG | ACD | GLB | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

Tablo 31 incelendiğinde Ö11 kodlu öğrencinin final testinde yer alan sorulara verdiği cevaplardan 6 tanesi analitik-yapısal düşünme biçimiyle 4 tanesi ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö11 kodlu öğrencinin final testine verdiği cevapların analizinden analitik-yapısal düşünme biçiminin ağırlıklı olduğunu söylemek mümkündür.

Ö11 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili final testinin ikinci sorusunun b şıkkına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Ö11 kodlu öğrenci alt uzay kavramıyla ilgili yapılan mülakatta final testinde verdiği cevaba benzer cevaplar vererek açıklamalar yapmış ve analitik-aritmetik düşünme biçimi sergilemiştir.

Ö11 kodlu öğrenci germe kavramıyla ilgili final testinin üçüncü sorusunu lineer bağımsızlık kavramıyla ilişkilendirmeye çalışarak analitik-aritmetik düşünme biçimiyle soruya cevap vermiştir. Ancak Ö11 koldu öğrenci germe kavramı ile ilgili ödev üzerinden yapılan mülakatta farklı açıklamalar yapmıştır. Aşağıda Ö11 kodlu öğrencinin germe kavramına yönelik mülakat kaydına yer verilmiştir.

*A* : Germe kavramını açıklar mısın?

Ö11 : Burada yine vektörler var. Biz yine skalerler seçiyoruz. O skalerle çarpıp topluyoruz ve bir küme oluşturuyoruz. Oluşturduğumuz bu kümede o vektörler bu kümeyi gerer diyoruz. Yani oluştururken kullandığımız vektörler o kümeyi gerer diyoruz.

A : Burada küme nelerden oluşuyor?

Ö11 : Lineer birleşimlerin kümesi

A : Örnek verebilir misin?

Ö11 : Mesela belli bir doğrultusu olan bir vektörü skalerle çarptığım zaman o doğrultu boyunca bir doğru elde ediyoruz. O zaman o vektör o doğruyu gerer derim.

A : Altıncı sorudaki çözümünü açıklar mısın?

Ö11 : Öncelikle bir A kümesi tanımladım. Verilen vektörleri a ve b reel sayılarıyla çarparak tüm lineer birleşimlerinin kümesini yazdım. Daha sonra a ve b dağıtarak düzenledim.

A : Bu bulmuş olduğun küme nedir?

Ö11 : Verilen vektörlerin gerdiği yer. Daha sonra (3, -1, 11) elemanının bu kümenin elemanı olup olmadığını kontrol ettim.

Ö11 kodlu öğrenci mülakat kaydı incelendiğinde germe kavramın aslında lineer birleşim kavramı ile ilişkili olduğunu bildiği görülmektedir. Ayrıca Ö11 kodlu öğrenci ödevde germe kavramıyla ilgili sorularda uygun gösterimler ve gerekçelendirmeler yaparak soruya cevap vermiştir. Ö11 kodlu öğrencinin germe kavramına yönelik analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğunu ortaya koymuştur.

Ö11 kodlu öğrencinin final testinin lineer bağımsızlıkla ilgili dördüncü sorusuna verdiği cevapta analitik-aritmetik ve cebirsel işlemler yapmıştır. Bu nedenle öğrencinin cevabı analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ö11 kodlu öğrenci lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili yapılan mülakatta her ne kadar lineer birleşim lineer bağımsızlık ilişkisinin farkındaysa da kavramlar arsındaki ilişkiyi net bir şekilde ortaya koyamamıştır. Ö11 kodlu öğrenci daha çok lineer bağımsızlığın formal tanımından yararlanarak cebirsel yorumlarda bulunmuş bu nedenle lineer bağımsızlık kavramına yönelik analitik-aritmetik bir düşünme biçimi sergilemiştir.

Öğrenciler ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda bazı sorularda öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimine sahip oldukları belirlenmiştir. Klinik mülakatlar yardımıyla elde edilen veriler ışında öğrencilerin FT'ye vermiş oldukları cevaplara ilişkin bulgularda değişikliğe gidilmiştir. Çünkü, klinik mülakatlar yardımıyla öğrencilerin kavramlara ilişkin düşüncelerini ve anlamlarını daha detaylı bir şekilde ortaya koymak mümkün olmuştur. Aşağıda Tablo 32'de FT'nin klinik mülakatlarla birlikte analizinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 32. FT'ye Verilen Cevaplara İlişkin Düşünme Biçimleri ve Kodlar

| | Final Testi Sorular | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Öğrenci | 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
| Ö1 | VG | AGY | AVU | GLB | LUS | LUS | TC | TC | TY | - |
| Ö2 | VG | AG | AVU | GGY | LB | LBR | TC | TB | TY | TLG |
| Ö3 | VG | AG | AVU | GG | LB | LDC | TLB | TB | TY | TLG |
| Ö4 | VGY | AG | AVU | GGY | LUS | LBR | TC | TC | TY | TCİ |
| Ö5 | VG | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |
| Ö6 | VSİ | AG | AVU | GG | LB | LB | TC | TUG | TÖ | TCİ |
| Ö7 | VSİ | AG | AVU | GGY | LB | LB | TC | TC | TY | TCİ |

Tablo 32'nin devamı

| | Final Testi Sorular | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Öğrenci | 1 | 2a | 2b | 3 | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 6 |
| Ö8 | VSİ | AGY | AVU | GG | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |
| Ö9 | VG | AG | ACD | GG | LUS | LUS | TC | TB | TY | TLG |
| Ö10 | VSİ | AGY | AC | GGY | LUS | LUS | TLB | TC | TY | Tİ |
| Ö11 | VG | AG | ACD | GLB | LUS | LDC | TLB | TB | TY | TLG |

Geometrik Aritmetik Yapısal

Tablo 32 incelendiğine analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod sayısında artış gerçekleştiği gözlenmiştir. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod sayısı 74 (%67,88) iken analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod sayısı 35 (%32,12)'tir. 8 (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11) öğrencinin FT'ye verdikleri cevapta analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların çoğunlukta olduğu görülmektedir. Ö4 kodlu öğrencinin verdiği cevaplarda analitik-yapısal ve analitik-aritmetik düşünme biçimleri sayısı aynı iken Ö1 ve Ö10 kodlu öğrencilerin cevaplarında analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar çoğunluktadır.

Öğrencilerin bireysel olarak performanslarına bakıldığında uygulama sonrasında yapılan BT2 ve FT testlerinde analitik-yapısal düşünme biçimiyle verilen cevapların sayısında artış olduğu gözlenmiştir. Aşağıda Tablo 33'te öğrencilerin her bir testte hangi düşünme biçiminden kaç adet cevap verdiğine yönelik sayısal bilgiler sunulmuştur.

Tablo 33. Öğrencilerin Tüm Testlere Verdikleri Cevaplarının İlişkili Olduğu Düşünme Biçimi Sayısı

| | BT1 | | | BT2 | | | FT | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ö1 | 4 | 4 | 0 | 4 | 3 | 1 | 0 | 5 | 4 |
| Ö2 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 | 9 |
| Ö3 | 4 | 4 | 0 | 3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 10 |
| Ö4 | 5 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 0 | 5 | 5 |
| Ö5 | 4 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 | 8 |
| Ö6 | 2 | 7 | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 4 | 6 |
| Ö7 | 5 | 3 | 0 | 4 | 2 | 2 | 0 | 2 | 8 |
| Ö8 | 5 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 0 | 3 | 7 |
| Ö9 | 5 | 3 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 3 | 7 |
| Ö10 | 4 | 4 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 7 | 3 |
| Ö11 | 5 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 3 | 7 |

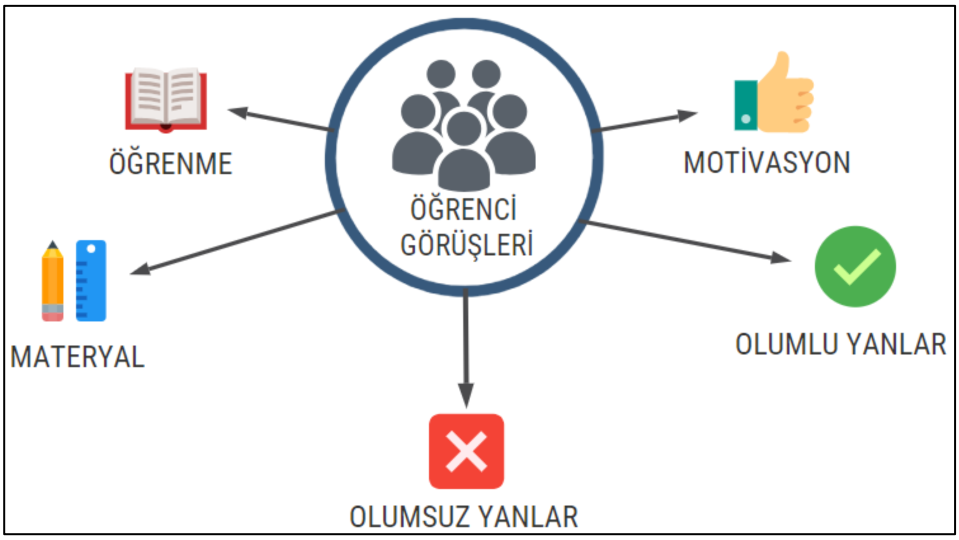
Tablo 33 incelendiğinde daha öncede ifade edildiği gibi öğrenciler uygulama öncesinde çoğunlukla sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahiptirler. Öğrencilerin analitik-yapısal düşünme sergileme performanslarının final testinde BT2 ile paralel olarak artış gösterdiğini söylemek mümkündür. BT2'de üç soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap veren öğrenci sayısı 3 (Ö2, Ö6, Ö11), iki soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap veren öğrenci sayısı ise 5 (Ö3, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8)'tir. Ö1, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler BT2'de bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Öğrencilerin çoğunluğu (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11) FT'de ağırlıklı olarak analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemiştir. Özellikle Ö3 kodlu öğrenci bütün sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Bununla birlikte BT1'de baskın olarak analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip olan Ö6 kodlu öğrencinin BT2 ve FT testlerindeki performanslarına bakıldığında analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişki cevapların sayısındaki artış dikkat çekmektedir. Ö4 kodlu öğrencinin analitik-yapısal ve analitik-aritmetik düşünme biçimiyle verdiği cevapların sayısı eşittir. Yalnızca Ö1 ve Ö10 kodlu öğrencilerin cevaplarında analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar çoğunluktadır. Ö1 ve Ö10 kodlu öğrenciler BT2'de de yalnızca bir soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir.

## 4. 3. Vektör Uzaylarının Öğretimi İçin Tasarlanan Öğrenme Ortamına İlişkin Ders Öğretmeninin ve Öğrencilerin Görüşlerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde araştırmanın ikinci problemi doğrultusunda öğrenciler ve ders öğretmeni ile yürütülen mülakatlardan elde edilen verilerin analizinden ortaya çıkan bulgular sergilenmiştir. Elde edilen bulguların ışığı altında lineer cebir öğretimi için tasarlanan zenginleştirilmiş öğrenme ortamına yönelik öğrenciler ve ders öğretmenin görüşleri ortaya konmaya çalışılmıştır.

### 4. 3. 1. Tasarlanan Öğrenme Ortamına Yönelik Öğrencilerin Görüşleriyle İlgili Bulgular

Vektör uzayı ile ilgili temel kavramların öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamına ilişkin öğrencilerin görüşlerini belirlemek için araştırma grubundaki her öğrenciyle yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Mülakatlardan elde edilen verilerin analizinde birtakım kodlar oluşturulmuş ve bu kodların aynı çerçevede olanları bir araya getirilerek belirli temalar ortaya çıkartılmıştır. Öğrencilerin tasarlanan öğrenme ortamına yönelik görüşlerinden elde edilen temalar Şekil 72'de gösterilmektedir.




Şekil 72. Öğrencilerin öğrenme ortamı hakkındaki görüşlerine yönelik temalar

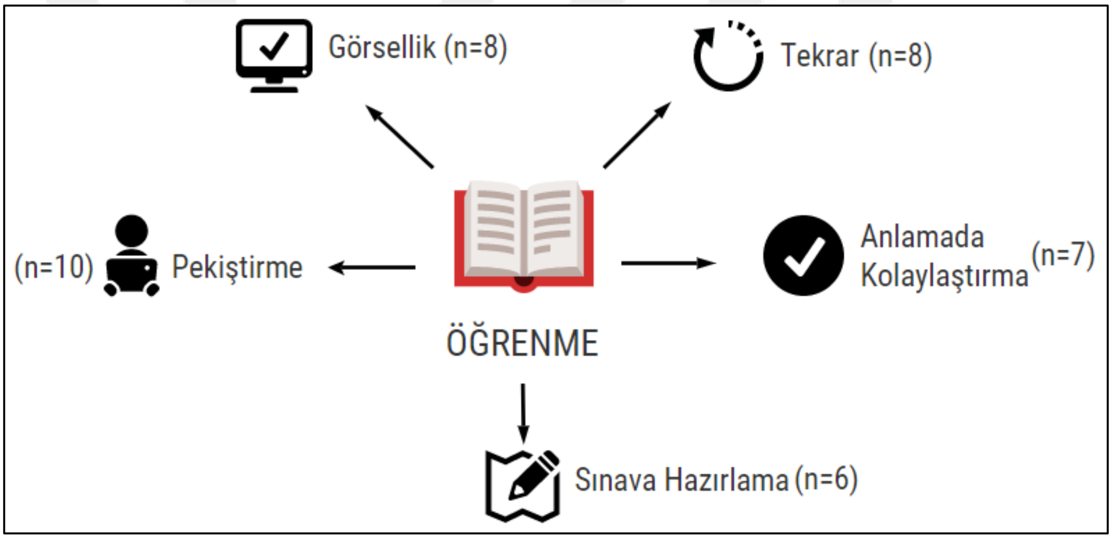
Öğrencilerin öğrenme ortamına ilişkin görüşleri Şekil 72'den de görüldüğü üzere "Öğrenme", "Materyal", "Motivasyon, "Olumlu Yanlar" ve "Olumsuz Yanlar" temalarında şekillenmiştir. Bu temalarla ilişkili olarak 24 adet kod elde edilmiştir. Tablo 34'de öğrencilerin öğrenme ortamına yönelik görüşlerinden elde edilen tema ve kodlara ait yüzde ve frekans dağılımı sunulmuştur.

Tablo 34. Öğrencilerin Görüşlerinden Elde Edilen Temalar ve Kodlar

| | | Öğrenciler | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temalar | Kodlar | Ö1 | Ö2 | Ö3 | Ö4 | Ö5 | Ö6 | Ö7 | Ö8 | Ö9 | Ö10 | Ö11 | f | % |
| Öğrenme | Görsellik | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | 8 | 73 |
| | Pekiştirme | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 10 | 91 |
| | Anlamada K. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ | | ✓ | 7 | 64 |
| | Tekrar | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | 8 | 73 |
| | Sınava H. | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | ✓ | ✓ | 6 | 55 |
| Materyal | Keşfetmeye Y. | | ✓ | | | ✓ | | | | | | | 2 | 18 |
| | Pratik | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 11 | 100 |
| | Kolaydan Zora | ✓ | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | 5 | 45 |
| | Dersle Uyumlu | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | ✓ | 6 | 55 |
| | Zaman K. | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | | 4 | 36 |
| | Dikkat Çekme | | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | | | 5 | 45 |
| | Somutlaştırma | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 6 | 55 |
| Motivasyon | Derse Bağlılık | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | 2 | 18 |
| | Aktif Olma | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 11 | 100 |
| | Herkese Eşit | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | 2 | 18 |
| | Çalışmaya Z. | | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | | | 4 | 36 |
| Olumlu Y. | Somutlaştırma | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 6 | 55 |
| | Zamanın Ç. | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | | | 3 | 27 |
| | Eğlenceli | ✓ | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | | | | 4 | 36 |
| | Sorumluluk A. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | | | 5 | 45 |
| | Muhakeme | | ✓ | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | 6 | 55 |
| | Özgüven | ✓ | | | ✓ | | | | | | | | 2 | 18 |
| | Aktif Olma | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 11 | 100 |
| | Düzenli Ç. | | ✓ | ✓ | | | | | | ✓ | ✓ | | 4 | 36 |
| Olumsuz Y. | Basit S. | | | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 3 | 27 |
| | Yorulma | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | 2 | 18 |

Öğrencilerin görüşleri doğrultusunda hazırlanan Tablo 34 incelendiğinde "Somutlaştırma" kodunun hem "Olumlu Yanlar" hem de "Materyal" temasında, "Aktif Olma" kodunun da hem "Olumlu Yanlar" hem de "Motivasyon" temasında birlikte yer aldığı görülmektedir. Bununla birlikte "Olumlu Yanlar" ve "Motivasyon" temalarında yer alan "Aktif Olma" kodu (%100) ile "Materyal" temasında yer alan "Pratik" kodu (%100) ve "Öğrenme" temasında yer alan "Pekiştirme" kodu (%91) tüm kodlar arasında en büyük yüzdeye sahip kodlar olarak dikkat çekmektedir. Takip eden bölümlerde her bir temaya yönelik elde edilen kodlar ve her bir koda ilişkin öğrenci görüşlerinden örnek alıntılar yer almaktadır.

Öğrencilerle yapılan mülakatların analizinden elde edilen "Öğrenme" teması ile ilişkili kodlar Şekil 73'te sunulmuştur.




Şekil 73. Öğrenme temasına ilişkin kodlar

Şekil 73'te öğrenme teması ile ilişkili kodlar incelendiğinde en yüksek yüzdeye sahip kodun %91 ile "Pekiştirme" olduğu ve bu kodu %73 lük oranlarla "Görsellik" ve "Tekrar" kodlarının takip ettiği görülmektedir. Bu kodların ardından sırasıyla %64 ile "Anlamada Kolaylaştırma", %55 ile "Sınava Hazırlama" kodları gelmektedir.

Öğrencilerin hepsi öğrenme ortamının bir parçası olan ödevlerle ilgili olumlu görüş bildirerek ödevlerin öğrendikleri konuları pekiştirmelerinde yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir. Aşağıda "Pekiştirme" koduna ilişkin Ö7 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : İşlenen dersler sonrasında verilen ödevlerin (görevlerin) öğrenmeniz üzerinde nasıl etkisi olduğunu düşünüyorsunuz?

Ö7 : Her hafta oldu bizim ödevlerimiz bazen yine ödev off unuttum gibi ama bu çok güzeldi. Mesela kavrama açısından çok güzel oldu ve onu sınav haftasında anladık.

A : Katkısı oldu mu, ek külfet doğurdu mu sizin için?

Ö7 : Ek bir külfet doğurmadı. Siz konu başlıklarını yazarken biz burada bu ödevi yapmıştık germede şunları yapmıştık diye kafamızda çok oturmuş bunu kendi aramızda da konuşuyorduk.

A : Konuyu öğrenmenizde etkili olduğunu düşünüyor musunuz?

Ö7 : Ödev üniversitede her derste olmuyor veya bu tek ama pekiştirmemize yardımcı oldu anlamamızı sağladı. Bir de birbirimize de soruyorduk birebirimizle olan etkileşimi de artırdı o da iyi oldu.

Ö7 kodlu öğrencinin ifadelerinden verilen ödevlerin pekiştirmenin yanında öğrencilerin kendi aralarındaki etkileşimlerini de artırdığı anlaşılmaktadır. Ö6 kodlu öğrenci de benzer bir açıklama yaparak ödevlerin arkadaşlarıyla aralarında etkileşim artmasına yardımcı olduğunu ifade etmiştir.

"Görsellik" kodu atanan öğrencilerin bir kısmı (Ö2, Ö4, Ö5) bilgisayar destekli öğrenmeyi tercih nedenlerinden biri olarak bu kodu kullanırken bir kısmı da (Ö1, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9) Geogebra yazılımından bahsederken bu kodu kullanmıştır. Aşağıda ilk olarak Ö4 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Bilgisayar destekli öğrenme ortamı ile normal sınıf ortamını karşılaştıracak olsaydın tercihin ne olurdu?

Ö4 : Bilgisayar destekliyi tercih ederdim.

A : Tercih nedenlerin nelerdir?

Ö4 : Çünkü hem derse dikkati daha uzun sürede tutmada hem de sonuçta görüyoruz bilgisayarda ne yaptığımızı ve ne yapacağımızı daha etkili oluyor.

A : Başka nedenlerin var mı?

Ö4 : Ayrıca daha öğrenci merkezli olduğunu düşünüyorum. Biz daha aktifiz bilgisayar desteklide.

Ö4 kodlu öğrenci görselliğin etkili bir yöntem olduğuna dikkat çekerek bunun aynı zamanda kendisi için bir tercih nedeni olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Ö4 kodlu öğrenci mülakatı incelendiğinde bilgisayar destekli öğretimin öğrencileri aktif kıldığı sonucuna varılabilir. Ö4 kodlu öğrenciden farklı olarak Ö5 kodlu öğrenci görselliğin kendilerine sağladığı avantajlardan bahsetmiştir. Aşağıda Ö5 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ders sırasında yazılımı kullanmada karşılaştığınız problemler oldu mu?

Ö5 : Hayır hatırlamıyorum genel olarak bir problem yaşamadım

A : Genel olarak dersler sırasında GeoGebra'yı kullanmanın sağladığı artılar ve eksiler nelerdir?

Ö5 : Dikkatinizi daha çok derse topladı zaman açısından hem dersin işlenişi hem de bu bahsettiğimiz şablonlar zaman kazandırdı bize çok fazla görsellik sunduğu bize somutlaştırılır için daha kolay öğrendik öğrenemediniz bir durum olduğunda tekrar baktık. Bu yönleriyle ben çok güzel buldum

A : Olumsuz bir yanı bar mıydı?

Ö7 : Bunun dışında olumsuz bir tarafını görmedim

Ö5 kodlu öğrenciye ait görüşe bakıldığında kullandıkları yazılımın görsellik dışında zaman kazandırma ve somutlaştırma gibi özellikleriyle de öğrenmelerine katkı sağladığı ifade edilmiştir. Ö9 kodlu öğrenci ise yazılımın kendilerine sağlamış olduğu artıyı diğer sınıftaki arkadaşlarıyla kendilerini karşılaştırarak ifade etmiştir. Aşağıda Ö9 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Yazılımın olumlu ve olumsuz yanlarından bahseder misin?

Ö9 : "Görerek bazı şeyleri daha rahat yapabilmemizi sağladı. Olumsuz bir yan yok bence. Ders işlenişi farklı oldu bizim için bu zamana kadar böyle işlememiştik. Hani diğer sınıflarla karşılaştırdığımda da bizim için kolay olan soruları çoğu kişiler yapamıyordu. Ondan dolayı baya rahat oldu. Onlar bana getirip soruyorlardı biz daha rahat yapabiliyorduk. "

"Tekrar" kodu atanan öğrencilerden Ö5 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ödevlerin öğrenmeniz üzerinde nasıl etkisi olduğunu düşünüyorsun?

Ö5 : Ödevleri yapmak zorunda olduğumuz için bu mutlaka hafta içerisinde dersi tekrar etmemiz anlamına geliyordu. Bu da mesela diğer derslerle kıyaslarsak onlar da böyle bir şey yok bu derste var.

A : Konuyu öğrenmenizde etkili olduğunu düşünüyor musun?

Ö5 : Bu da daha çok öğrenmemizi sağlıyor mutlaka tekrar ediyorsun pekiştirme ve pratik yapma şansımız oldu çözdüğümüz sorularla bu örneklerle.

Ö5 kodlu öğrenci öğrenme ortamının bir parçası olan ödevlerin, dersin tekrar edilmesinin yanı sıra ödevleri yapabilmek için dersi tekrar etmenin onlar için bir zorunluluk olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin hepsi ödevlerle ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir.

Bununla birlikte öğrenciler öğrenme ortamının özellikle de derslerde kullandıkları yazılımın anlamalarına yardımcı olduğunu “Anlamada Kolaylaştırma” kodunu ifade ederek ortaya koymuşlardır. Aşağıda Ö3 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Yazılımının kullanılmasının etkili olduğunu düşünüyor musun, örnek verebilir misin?

Ö3 : Öğrenmede etkili oldu, mesela gerdiği yeri görme konusunda tüm R2’yi gerdiğini Geogebra’dan görmek çok daha iyi oluyor, nokta taraması yapması gibi özellikler faydalı oldu.

A : Nasıl bir etkiydi açıklar mısın?

Ö3 : Anlamamı da kolaylaştırdığını söyleyebilirim. Görsel olarak görünce hayal etmesi düşünmesi daha kolay oluyor. Sonrasında kendimiz yapınca daha iyi anlıyorum.

Tıpkı Ö3 kodlu öğrencinin de görüşünde belirttiği gibi öğrenciler özellikle yazılımın görselleştirme yanına vurgu yaparak konu ile ilgili anlamalarını kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Bir diğer kod olan “Sınava Hazırlık” kodu öğrencilerin özellikle ders içinde kullanılan etkinlikler ve ödevler hakkındaki görüşlerinden elde edilmiştir. Aşağıda Ö2 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ödevlerin öğrenmen üzerinde nasıl bir etkisi oldu?

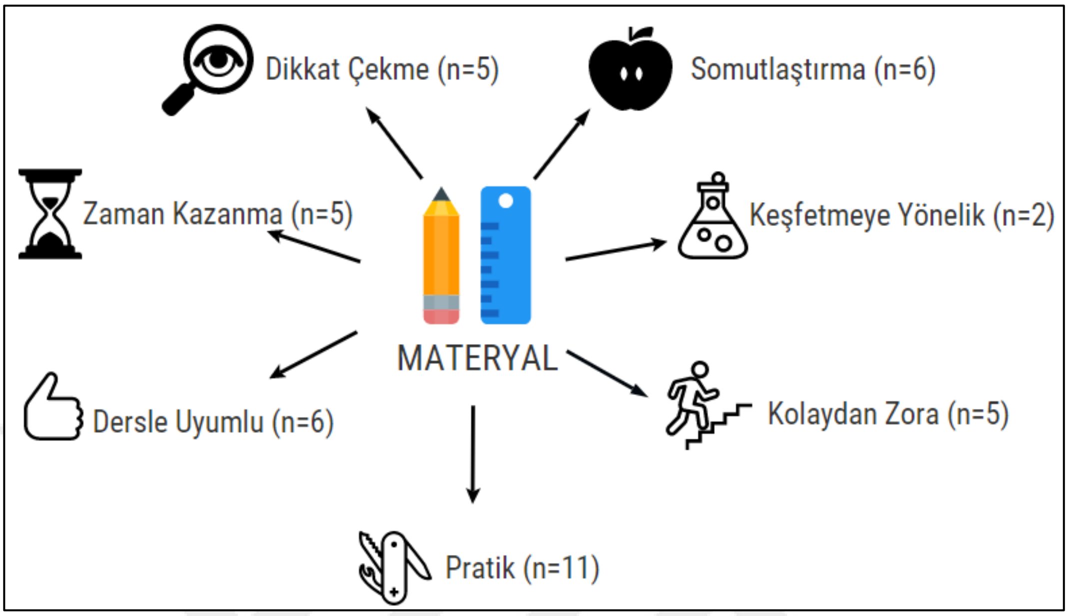
Ö2 : …Siz ödev vermezseniz kimsenin gidip günü gününe çalışacağını düşünmüyorum ben zaten, ödevler bana planlı çalışma ve o haftayı tekrar etme fırsatı verdi.

A : Konuyu öğrenmenizde etkili olduğunu düşünüyor musun?

Ö2 : Mesela ben vize haftasında çok çalışmadım 1 hafta ile çalışmam yetti. Yani bir nevi sınava hazırladı bizi

Ö2 koldu öğrencinin görüşleri incelendiğinde verilen ödevlere çalışıyor olmanın aynı zamanda kendilerini sınava hazırladığını belirtmiştir. Ödevlerin öğrenciler tarafından pekiştirici ve dersi tekrar niteliğinde olduğu daha önceki kodlardan hareketle düşünüldüğünde sınava hazırlığın bu durumun doğal bir sonucu olduğu sonucuna varılabilir. Bu durumdan farklı olarak iki öğrenci Ö9 ve Ö11 sırasıyla ödevlerin sınav öncesi kendilerini rahatlattığını ve sınav stresini aldığını belirtmişlerdir.

Öğrencilerin görüşleri incelendiğinde öğrenme ortamının parçaları olan etkinlikler, GeoGebra şablonları ve ödevleri niteleyici olan kodları “Materyal” teması altında toplanmıştır. Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen “Materyal” teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki Şekil 74’te verilmiştir.




Şekil 74. Materyal temasına ilişkin kodlar

Şekil 74’te görüldüğü gibi materyal temasında en yüksek yüzdeye sahip olan kodlar %100 ile “Pratik”, %55 ile “Somutlaştırma” ve “Dersle Uyumlu” kodlarıdır. Materyal temasında dikkat çeken diğer kodlar ise %45’lik oranlarıyla ile “Dikkat Çekme”, “Kolaydan Zora”, ve “Zaman Kazanma” kodlarıdır. Öğrencilerin ifade ettiği kodları %18 oranı ile “Keşfetmeye Yönelik” kodu takip etmektedir.

Materyal temasında yer alan kodlardan en dikkat çekici olanı en yüksek yüzdeye sahip olması ile “Pratik” kodudur. Öğrenciler GeoGebra şablonlarını ve etkinlikleri oldukça kullanışlı veya pratik olduğunu belirtmiş ve bu yöndeki görüşler “Pratik” koduyla ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö5 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Geogebra şablonların tasarımı hakkında ne düşünüyorsun? Dikkat çekici miydi mesela?

Ö5 : Evet dikkat çekici miydi tam olarak bilmiyorum ama biz kolayca bulalım başka bir şeyler yapmayalım diye orada çok kullanışlı bir şekilde hazırlandığını düşünüyorum

A : Başka ne gibi yanlarından bahsedebilirsin?

Ö5 : Genel olarak tasarımları beğendim zaman açısından ve pratik olması açısından oldukça güzeldi çünkü biz onları bulamazdık mesela orada olsaydık bu daha çok vaktimizi alırdı.

Bütün öğrenciler GeoGebra şablonlarını pratik bulduğunu ifade etmiş ve Ö5 kodlu öğrenciye benzer görüş bildirmişlerdir. Bununla birlikte 6 öğrenci de (Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö9, Ö10) etkinlikleri kullanışlı bulduğu yönünde görüş bildirmiştir.

Geogebra şablonları öğrenme ortamının ödevlerle birlikte öğrencilerin tamamı tarafından olumlu görüş bildirilen parçasıdır. Öğrencilerin çoğu şablonların somutlaştırma yönüne değinmişlerdir. Öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine "Somutlaştırma" kodu atanmıştır. Aşağıda Ö10 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

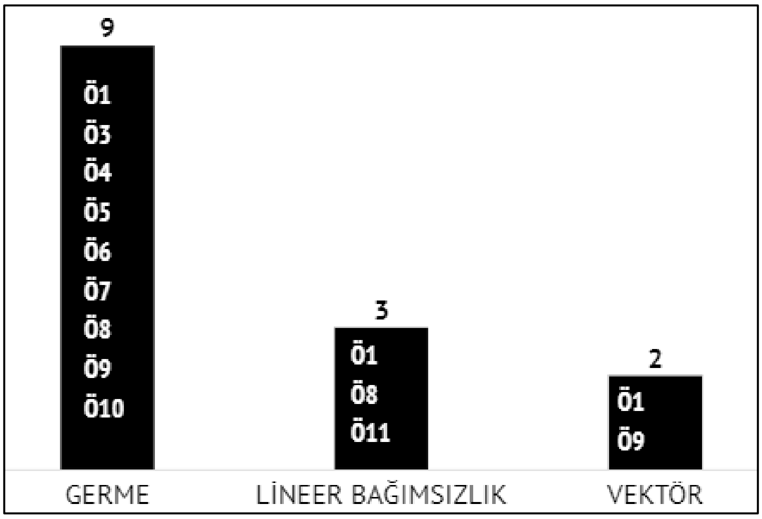
A : Ders sırasında yazılımı kullanmada karşılaştığınız problemler oldu mu?

Ö10 : Açıkçası yaşamadım. İlk kısımlarda öğrenirken sıkıntı çekmişimdir.

A : Peki, GeoGebra'yı kullanmanın sağladığı artılar ve eksiler nelerdir?

Ö10 : Genel olarak somutlaştırma bakımın yararlıydı Geogebra. Açıkçası bir görsel üzerinden görmek öğrenmem açısından iyi bir şey.

Öğrenciler bir taraftan GeoGebra yazılımının somutlaştırma kısmına vurgu yaparken diğer taraftan somutlaştırma ile ilgili örnek vermeleri istendiğinde en çok germe kavramı ile ilgili uygulanan etkinliklerden örnekler vermişlerdir. Aşağıdaki şekilde öğrencilerin örnek vermiş oldukları kavramlarla ilgili istatistiki bilgilere yer verilmiştir.




Şekil 75. Öğrencilerin etkinliklerden verdikleri örnekler

Şekil 75'te görüldüğü gibi verilen örnek sayısı germe kavramıyla ilgili 9, lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili 3, vektör kavramı ile ilgili 2 adettir. Öğrencilerin vermiş oldukları örneklere bakarak vektör uzayları kavramlarından hangisinin daha kalıcı bir şekilde ele alındığını veya hangi kavramların öğretiminde en çok yazılım kullanımına ihtiyaç olduğunu söylemek mümkün olabilir.

Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen ve en yüksek yüzdeye sahip olan kodlar “Dersle uyumlu” ve “Kolay Zora” kodlarıdır. Öğrenciler etkinliklerin, ödevlerin, GeoGebra şablonlarının birbiri ve ders içeriğiyle uyumlu olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda Ö10 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ödevlerde yer alan soruların niteliği hakkında ne düşüyorsunuz?

Ö10 : Dersle uyumlu sorulardı bir de kolay zora doğru gittikleri dikkatimi çekti.

A : Kolaydan zora kısmını açar mısın?

Ö10 : İlk başta başlarken tanımlar falan derken en sonunda kademe kademe zorlaşıyordu. Zorluk bakımından da çok fazla bir zorluğu yoktu zaten kolaydan zora doğru gidiyordu.

A : Nasıl sorulardı peki?

Ö10 : Düşündürücü sorulardı. Özellikle son iki soru hep düşündürücüydü benim için.

Ö10 kodlu öğrencinin görüşüne bakıldığında etkinlik ve ödevlerde yer alan soruların hem dersle uyumlu olduğuna hem de kolaydan zora doğru sıralandığına dikkat çekmiştir. Görüşler öğrencilerin geometrik soruları kolay ve soyut formdaki soruları ise zor veya düşündürücü bulduklarını ortaya koymaktadır. Ayrıca iki öğrenci etkinliklerin kendilerini keşfetmeye ittiğini belirtmiş ve öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine “Keşfetmeye Yönelik” kodu atanmıştır. Aşağıda Ö2 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Çalışma yapraklarıyla dersin işlenmesi öğrenmenizi nasıl etkiledi?

Ö2 : Mesela Eğer çalışma yaprağı olmasaydı Hoca oradaki soruları tahtaya yazacaktı ve bu zaman kaybı olacaktır Ayrıca elimizin altında olmasın daha pratik olmasına neden oldu.

A : Pratikliğin dışında başka söyleyebileceğin şeyler var mı?

Ö2 : Mesela tahtada ki soruyu direkt deftere yazıp oradan çözüm yapmaktansa görüyoruz çalışma yaprağında direk orada fikirlerimizi yazabiliyoruz.

A : Çalışma yapraklarının niteliği hakkında ne düşünüyorsun?

Ö2 : Çalışma yaprakları temel'den başlamış daha sonra derste üstüne bir şeyler kata kata olacak şekilde keşfetmeye ve düşünmeye yöneltti.

Ö2 kodlu öğrencinin görüşleri incelendiğinde çalışma yapraklarının keşfetmeye ve düşündürmeye yöneltmesinin yanında pratik oluşu ve zaman kazandırıcı yönlerine de değinmiştir. Öğrencilerin görüşlerinden çalışma yapraklarının tasarımının kullanışlı ve derste zamanın tasarruflu kullanımında etkili olduğunu söylemek mümkündür. Öğrencilerin görüşleri analiz edildiğinde öğrenme ortamını, etkinlikleri ve GeoGebra şablonlarının dikkat çekici yönüne değinmişlerdir. Öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine "Dikkat Çekme" kodu atanmıştır. Aşağıda Ö7 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Çalışma yapraklarıyla dersin işlenmesi öğrenmenizi nasıl etkiledi?

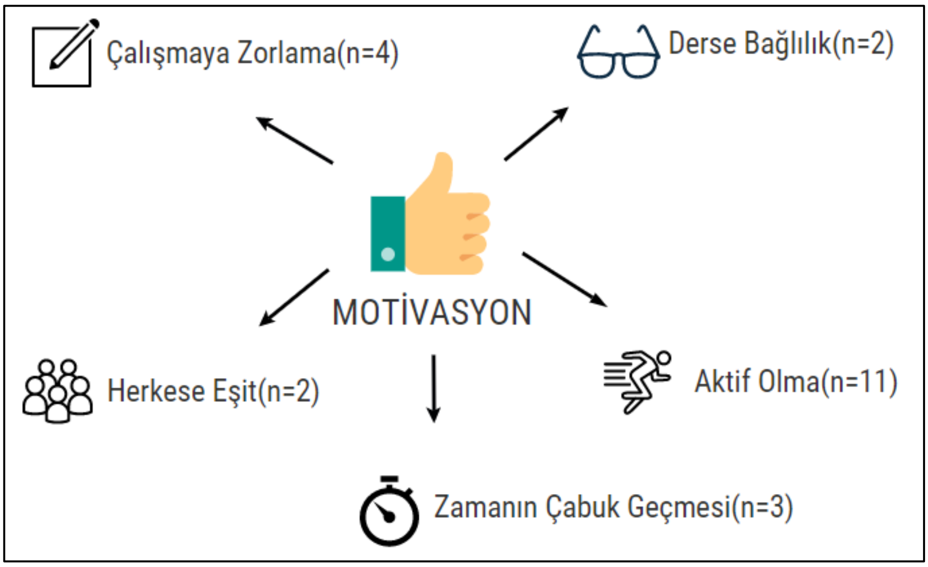
Ö7 : Genel olarak şöyle aşağıda (laboratuvar) biz grup çalışması yaparak etkinlikler önümüzde olunca kavrama açısından bizim için çok iyi oldu.

A : Başka neler söyleyebilirsin?

Ö7 : Arkadaşlarla da şunu fark ettik tek bir dersi yukarıda (sınıf ortamı) işleyince çok sıkılıyoruz ve bir yerden sonra dikkat dağınıklığı oluyor. Ama aşağıdayken (laboratuvar) dikkat dağınıklığı olmuyor çünkü bir etkinliğe bakıyoruz bir bilgisayara bakıyoruz bazen hocamız tahtada örnek çözüyor ve üç şey birden olunca çok fazla dikkat dağılmıyor.

Ö7 kodlu öğrenci genel olarak öğrenme ortamının dikkatlerini çektiğini belirtmiştir. Buradan hareketle öğrenme ortamının birçok yönüyle öğrencileri derse bağlayıcı bir unsur olduğunu söylemek mümkündür. Bununla birlikte bazı öğrenciler de öğrenme ortamında özellikle GeoGebra şablonlarının ve çalışma yapraklarının derste kendilerine zaman kazandırdığını belirtmiş ve öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine "Zaman Kazanma" kodu atanmıştır. Daha önce Ö5 ve Ö2 kodlu öğrencilerin sırasıyla GeoGebra şablonları ve çalışma yapraklarının farklı yönleriyle ilgili sunulan mülakat kayıtlarında etkinliklerin dersin daha kısa sürede işlenişine katkı sağladığı yönündeki görüşleri verilmiştir. Öğrenme ortamını bir bütün olarak düşündüğümüzde laboratuvar derslerinin kavramların öğretiminde zaman yönünden avantajlar sağladığını söylemek mümkündür.

Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen bir diğer tema olan "Motivasyon" temasına ait kodlar aşağıdaki şekilde sunulmuştur.




Şekil 76. Motivasyon temasına ilişkin kodlar

Şekil 76'ya bakıldığında motivasyon temasındaki en dikkat çekici durumun öğrencilerin tümünün ifade ettiği ve %100 oranı ile "Aktif Olma" kodu olduğu görülmektedir. Bu kodu %36 ile "Çalışmaya Zorlama" %27 ile "Zamanın Çabuk Geçmesi" ve %18'lik yüzdelerle "Herkese Eşit" ve "Derse Bağlılık" kodları takip etmektedir.

Öğrenciler görüşlerinde öğrenme ortamının kendilerini sürekli olarak aktif tuttuğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine "Aktif Olma" kodu atanmıştır. Aşağıda Ö3 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Çalışma yapraklarıyla dersin işlenmesi öğrenmenizi nasıl etkiledi? Varsa olumlu ve olumsuz yönlerini açıklar mısınız?

Ö3 : Genel olarak olumlu çünkü öğrenciyi daha aktif kılıyor. Yani sadece sıramızda oturup ders dinlesek bu kadar iyi anlayamazdık veya sınav zamanı bize daha çok yük düşerdi çalışmak için o açıdan iyi oldu.

A : Olumsuz bir yanı var mıydı?

Olumsuz bir yönü yok dediğim gibi ben laboratuvarda çalışmayı pek fazla sevmiyorum beni daha çok yoruyor ama onun dışında olumluydu.

A : Peki bilgisayar destekli seni derste aktif kıldı mı?

Ö3 : Evet kıldı. Bir taraftan Geogebra ile ilgilenmek bir taraftan etkinlikleri tamamlamak ve dersi takip etmek durumu aktif kıldı.

Ö3 kodlu öğrenci de olduğu bütün öğrenciler gerek etkinliklerin gerek Geogebra şablonlarının gerekse ders öğretmenin kendilerini hep bir uğraş içerisinde tuttuğunu ve öğrenme ortamının kendilerini aktif kıldığını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte öğrenciler öğrenme ortamının özellikle ödevler ve etkinliklerin kendilerini çalışmaya ittiğini ifade etmişlerdir. Aşağıda “Çalışmaya Zorlama” koduna ilişkin Ö4 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Derslerin laboratuvarda işlenmesi hakkında ne düşünüyorsunuz?

Ö4 : Sınıf ortamında saklanma şansımız var biraz ama laboratuvarda öyle bir şey yok zaten 15 kişi ikişerli oturuyoruz sürekli göz teması hocayla kaçamıyorsun dersten.

A : Laboratuvar derslerinin sizi çalışmaya ittiğini mi söylüyorsun?

Ö4 : Evet. Çünkü mesela bazen GeoGebra şablonlarından kaçmaya çalıştığımız oluyordu, ama hep iki kişinin yapması gereken şeyler oluyordu hani birisi bilgisayardan biri yazarak. Bir şekilde derste olduk yani ilgi orada kaldı.

Ö4 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde öğrenme ortamının ve uygulamaların grup şeklinde yapılıyor olmasının kendilerini çalışmaya iten unsurlar olduğu sonucuna varılabilir. Bazı öğrenciler ise bu durumu öğrenme ortamının kendilerini derse daha uzun süre bağladığını belirtmiştir. Bu görüşler “Derse Bağlılık” kodu ile ifade edilmiştir. Aşağıda Ö1 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Laboratuvarda işlenen dersler, derse katılımınızı nasıl etkiledi?

Ö1 : Bence laboratuvarda işlemek daha güzeldi. Sınıfta sıkıcı oluyor insanın katılası da gelmiyor. İnsanın uykusu geliyor. Özellikle de ders süresi uzun ise bir yerden sonra kopuyor insan

A : Peki ya laboratuvarda?

Ö1 : laboratuvarda o yok, l laboratuvarda daha aktif oluyor insan daha eğlenceli oluyor. Bu derse katılımı etkiliyor uyumak var uyumamak var.

Ö1 kodlu öğrencinin görüşüne ek olarak derslerin büyük bir bölümü laboratuvarda gerçekleştirilmiştir. Öğrencinin laboratuvar işlenen derslerle ilgili olumlu görüş bildirerek laboratuvarda normal sınıf ortamına göre daha aktif olduklarını, derse daha uzun süre bağlı kalabildiklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca bazı öğrenciler de laboratuvar derslerinde zamanın daha çabuk geçtiğini yönünde görüş bildirmiş ve bu yöndeki görüşlere “Zamanın Çabuk Geçmesi” kodu atanmıştır. Ö8 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Derslerin laboratuvarda işlenmesi hakkında ne düşünüyorsun?

Ö8 : Sınıfta sadece yazıyordum GeoGebra kesinlikle aktif katılımını sağlıyor bir kere soru sormayı da sağlıyor görsel düşünmeyi de sağlıyor

A : Sınıf ortamında soru soramıyor muydun?

Ö8 : Evet yazıyordum öyle çok soru sorma fırsatım olmadı yani ama ortağım beni aktif olmak zorunda bıraktı

A : Başka neler söyleyebilirsin?

Ö8 : Hatta oradaki zaman sınıfta geçmezdi Ayrıca ben aktif katılmayı seven bir insan da değilim buna rağmen aktifliği sağladığımı düşünüyorum ve zamanında çabuk geçtiğini düşünüyorum hiç sıkılmadım olumsuz etkilediğini söyleyemem

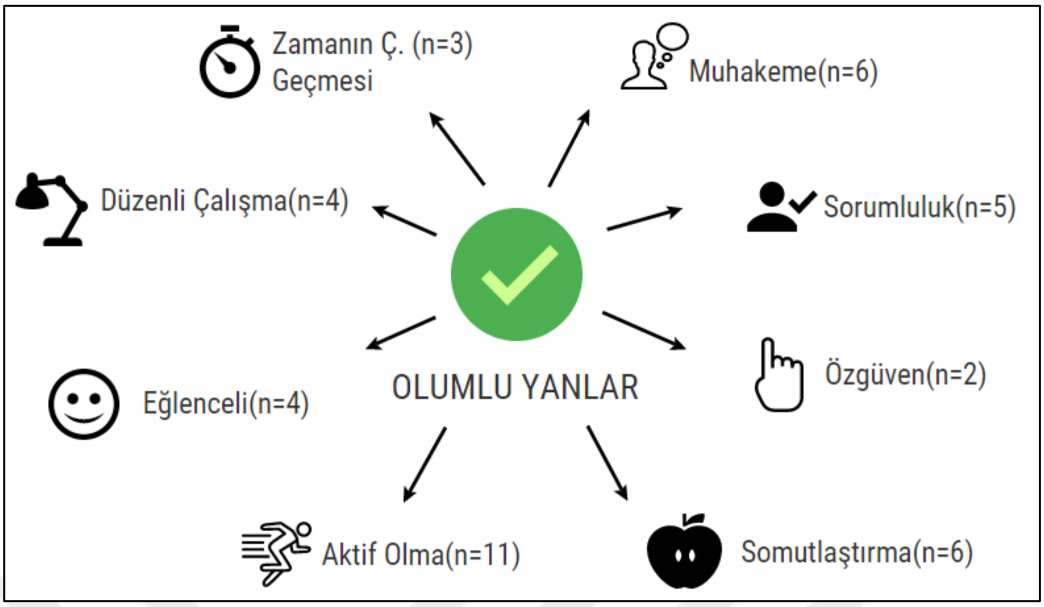
Ö8 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde öğrenme ortamının kendisini motive ettiğini söylemek mümkündür. Bununla birlikte öğrenciler zamanın çabuk geçmesini kendileri için olumlu bir durum olarak ifade etmişlerdir. Motivasyon teması ile ilişki en son ve ilgi çekici kodlardan biri “Herkese Eşit” kodudur. Ö7 ve Ö9 kodlu öğrenciler ders öğretmeninin herkese aynı mesafeyle yaklaştığını ve herkese söz hakkı vermeye dikkat ettiğini bildirmişlerdir. Aşağıda Ö7 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Laboratuvarda işlenen dersler, derse katılımını nasıl etkiledi?

Ö7 : Laboratuvarda etkinlikleri cevaplarken hep grup grup söz hakkı verildi hiçbir grubu es geçmeden dersi yaptık o yüzden katılım normal sınıfa göre daha fazla oldu.

Ö7 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde herkese söz hakkı veriliyor olması durumunun derse katılımın daha fazla olmasına neden olduğu söylemek mümkündür. Ayrıca Ö9 kodlu öğrenci ders öğretmenin sürekli sınıfta dolaşarak herkese eşit muamelede bulunduğunu belirtmiştir. Öğrenciler görüşleri doğrultusunda amacı öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisini belirlemenin olduğu bu çalışmada demokratik bir sınıf ortamının öğrencilerin düşüncelerini açıkça ifade etmelerinde ve ne düşündüklerini ortaya koymak bağlamında araştırmanın amacına hizmet ettiğini düşünülebilir.

Öğrencilerin görüşleri doğrultusunda öğrenme ortamı veya öğrenme ortamının temel bileşenleri ile ilgili olumlu düşünceleri “Olumlu Yanlar” teması ile altında toplanmıştır. Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen “Olumlu Yanları” teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 77. Olumlu yanlar temasına ilişkin kodlar

Şekil 77'ye bakıldığında Olumlu Yanlar teması ile ilgili bazı kodların diğer temalarla ortak olduğu görülmektedir. "Somutlaştırma" kodu Materyal, "Aktif Olma" ve "Zamanın Çabuk Geçmesi" kodları ise Ortam Teması ile ortak kodlardır. Bu kodlarla ilişkili görüşlere ortak temalarda yer verilmiştir. Bunların dışında %55 yüzdeyle "Muhakeme", %45 yüzdeyle "Sorumluluk", %36'lık yüzdelerle "Düzenli Çalışma" ve "Eğlenceli" ve son olarak %18 yüzdeyle "Özgüven" kodları yer almaktadır.

Öğrenciler uygulamaların grup çalışmaları şeklinde yürütülmesini kendi aralarında tartışıp muhakeme yapmalarına neden olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu görüşleri "Muhakeme" kodu olarak ifade edilmiştir. Aşağıda Ö9 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : İşlenen derslerinin grup çalışması şeklinde yapılması hakkında ne düşünüyorsun?

Ö9 : Eğer ikiden fazla kişi olsaydık bu sefer fazla iyi anlayamayabilirdik. Etkileşim azalırdı iki kişi yapardı bir kişi kenarda kalırdı.

A : Peki iki kişi olunca?

Ö9 : Ama kişi olunca sadece ikimizi tartışabiliyorduk ne olacağını ne olmayacağını, o şekilde bilgi alışverişi yapmamız kolaylaştı. O bakımdan iyi olduğunu düşünüyorum grup çalışması sayesinde.

A : Peki ya tek olsaydınız?

Ö9 : Tek olsaydık ekstra bir fikir çıkmayınca bize verileni olduğu gibi kabul ederdik.

Ö9 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde laboratuvar derslerini grup çalışması şeklinde yürütülüyor olmasının kendilerine muhakeme yapma fırsatı verdiğini söylemek mümkündür. Ayrıca Ö9 öğrencinin görüşlerinde grup çalışmalarının iki kişilik gruplar şeklinde yapılması gerektiği görüşü dikkat çekmiş, bir ve üç kişilik grupların dezavantajından bahsetmiştir. Ö9 kodlu öğrencinin görüşünden farklı olarak Ö11 ve Ö4 kodlu öğrenciler grup çalışması yapıyor olmalarının bir diğer avantajını ders öğretmeninden önce danışacakları birinin olması olarak belirtmişlerdir. Aşağıda Ö11 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Grup çalışmasının varsa olumlu yanları nelerdir?

Ö11 : Grup çalışması öğrenmemize yardımcı oldu. Bir olumlu yanı daha var aslında mesela bir şey anlamadığımda direk hocadan önce danışabileceğim biri var o güzel oldu

Ö11 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde aslında iki kişilik grupların birbirleriyle fikir alışverişi yapılması bakımından avantajlı olduğu sonucuna varılabilir. Bununla birlikte öğrenciler grup çalışması yapıyor olmalarının sorumluluk bilinçlerini artırdığını belirtmiş ve öğrencilerin bu yöndeki görüşleri “Sorumluluk” kodu ile ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö2 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Grup çalışması sizi nasıl etkiledi?

Ö2 : Mesela ben bir şey düşünüyorum grup arkadaşım başka bir şey düşünüyor biz ikisini harmanlayarak sonuca daha kısa sürede ulaşabiliyoruz

A : Görev paylaşımı mı yapıyorsunuz?

Ö2 : Arkadaşınla çok fazla fikir alışverişi yapıyorsun konuyu anlamakta sen ona anlatıyorsun o sana anlatıyor. Görev paylaşımı yaptık bu da öğrenme konusunda sorumluluklarımızı artırdı

Ö2 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde grup çalışmalarının öğrencilere görev paylaşımı konusunda sorumluluklar getirdiğini söylemek mümkündür. Ayrıca grup çalışmasına ek olarak laboratuvar ortamında derslerin yürütülmesine öğrenciler olumlu görüş bildirmiş ve laboratuvardaki derslerde sıkılmadıklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin dersleri ve grup çalışmalarını eğlenceli bulduklarını ifade etmiş ve bu yöndeki görüşleri de “Eğlenceli” koduyla ilişkilendirilmiştir. Aşağıda Ö9 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Laboratuvarda işlenen dersler, derse katılımınızı nasıl etkiledi?

Ö9 : Genel olarak dersler tahtada işlenseydi arkadaki kişiler biraz kopuk olacaktı öyle bir sorun olabilirdi.

A : Peki laboratuvarda?

Ö9 : Biz etkinlikleri yaparken siz arada dolaştığınız için o bakımdan iyi oldu. Sınıf ortamına göre daha iyiydi daha eğlenceliydi.

A : Neden?

Ö9 : Çünkü yanımızdaki kişi ile ders esnasında konuşabiliyoruz en azından dersle de alakalı da olsa bu şekilde sadece susup dinlemiyoruz dersi bizde bir şeyler yapıyoruz.

Ö9 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde laboratuvar ortamında derslerin eğlenceli olmasının arkasında grup çalışması ve aktif olarak derse katılımlarının olduğu görülmektedir. Öğrencilerin olumlu görüş bildirdikleri bir diğer konu da düzenli olarak verilen ödevlerin kendilerini düzenli ders çalışmaya itiyor olmasıdır. Öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine “Düzenli Çalışma” kodu atanmıştır. Ö3 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ödevlerin varsa olumlu yanlarından bahseder misin?

Ö3 : “…Olumlu yönleri ödev vermezseniz kimsenin gidip günü gününe çalışacağını düşünmüyorum ben zaten, ödevler bana planlı çalışma ve o haftayı tekrar etme fırsatı verdi.

Düzenli ve planlı çalışıyor olmak öğrenciler tarafından olumlu bir davranış olarak görülmüş ve ayrıca ödevler konuların tekrar edilip pekiştirilmesine yardımcı olmuştur. Bütün bunlara ek olarak öğrenciler öğrenme ortamının kendilerine özgüven verdiklerini ve derse katılmaya teşvik ettiğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin ifade ettikleri “Özgüven” koduna ilişkin aşağıda Ö1 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Derslerin grup çalışması şeklinde yapılması hakkında ne düşünüyorsun?

Ö1 : Canımın sıkılmasını da engelledi bazen arasında muhabbet ediyorsun

A : Ders açısından peki?

Ö1 : Derse katılacakken normalde bir kişi özgüvenini sağlayamaz hala öyle insanlar var ama arkadaşın olduğu zaman bir kişi daha seninle aynı ortak fikirde olduğu zaman fikrini söylemek kolaydır insanlar için. O yönden derse katılım daha kolaylaşmıştır.

Ö1 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde grup çalışması aynı zamanda ders sürecinde öğrencilerin can sıkıntısı yaşamasının da önüne geçmektedir. Ö1 kodlu öğrencinin bu görüşleri daha önce mülakat kayıtlarındaki görüşlere paralel olarak grup çalışmasının dersleri eğlenceli kıldığı fikrini desteklemektedir. Ayrıca Ö1 kodlu öğrencinin mülakattan kaydından ders içerisinde grup arkadaşının varlığının öğrencinin özgüvenini artırıcı bir unsur oluşturduğunu söylemek mümkündür.

Olumlu Yanlar teması altındaki kodlara bakıldığında Zamanın çabuk geçmesi, aktif olma ve somutlaştırma kodlarının diğer temalarla ortak kodlar oldukları görülmektedir. Öğrencilerin bu kodlar altındaki görüşlerinin birbirine paraleldir. Yalnızca somutlaştırma ile Ö5 kodlu öğrencinin görüşü bir yönüyle diğer görüşlerden farklılaşmaktadır. Aşağıda Ö5 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Derslerin bu şekilde işlenmesi hakkında ne düşünüyorsun?

Ö5 : Her konu için matematiğin her dalı için değil ama böyle görsel ve somutlaştırmamız gereken kavramlar için çok yararlı ama her ders için olmayabilir

A : Kendinize daha fazla güvendiğinizi söyleyebilir misiniz?

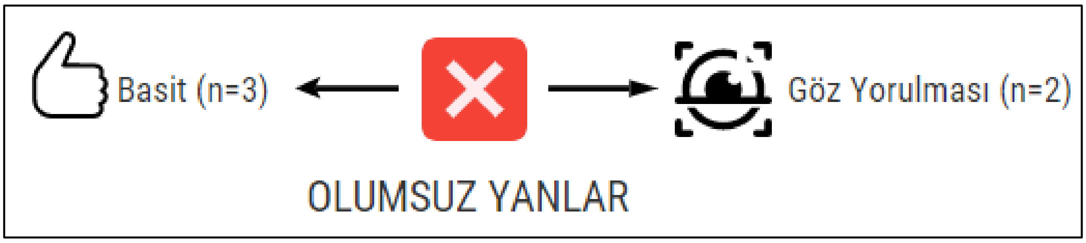
Ö5 : Herkes içinde böyle olduğunu düşünüyorum ve ben böyle bir öğrenmeden sonra kendime daha çok güvendiğimi söyleyebilirim

A : Neden?

Ö5 : Çünkü direk olarak görme fırsatımız oldu her kavramla ilgili o kavramların 2 ve 3 boyuttaki hallerini. Bunları bu şekilde hayal etmemiz mümkün değildi

Ö5 kodlu öğrencinin mülakat kaydı incelendiğinde somutlaştırmanın öğrencinin öğrendikleri konusunda güveninin arttırdığını söylemek mümkündür. Bunda kavramların 2 ve 3 boyuttaki somut modellerini görebiliyor olmanın etkili olduğu Ö5 kodlu öğrenci tarafından ifade edilmiştir. Buradan hareketle yazılımın öğrencilerin sezgisel anlamalarına yardımcı olduğunu ve geliştirdiğini söylemek mümkündür.

Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen “Olumsuz Yanlar” teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 78. Olumsuz yanlar temasına ilişkin kodlar

Şekil 78'de görüldüğü gibi "Olumsuz Yanlar" temasına ilişkin olarak iki adet kod elde edilmiştir. Bu kodlar %27 yüzde ile "Basit" ve %18 yüzde ile "Göz Yorulması" kodlarıdır.

Bazı öğrenciler etkinliklerde genellikle ilk kısımda yer alan soruların kendileri için oldukça basit olduklarını belirtmişler ve öğrencilerin bu yöndeki görüşlerine "Basit" kodu atanmıştır. Aşağıda Ö2 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Genel olarak derslerin işlenişi konusuna varsa olumsuz yanlardan bahseder misin?

Ö2 : Bence bazı sorular çok temel herkesin bildiği şeylerdi onlarla ilgili sorular çözüp uğraştık ya orası biraz yavaşlattı bence. İlk sorular bazen basitti.

A : Nasıl olabilirdi?

Ö2 : Sorulara daha zordan başlasaydı veya herkesin bildiği sorularla ilgili bilgi verilseydi daha iyi olurdu bence ama çok büyük bir problem değildi benim için.

Ö2 kodlu öğrenci vektörel işlemleri içeren ilk soruların basit ve gereksiz olduğunu ifade etmiştir. Ö2 kodlu öğrencinin görüşünden bu durumun kendisi için çok büyük bir olumsuzluk olmadığı anlaşılmaktadır. Diğer öğrenciler de benzer ifadelerde bulunmuşturlar. Bu duruma ek olarak iki öğrenci bilgisayara çok baktıkları durumda kendileri için yorucu olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda Ö11 kodlu öğrenci ile yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Yazılımdan kaynaklanan bir olumsuzluk var mıydı?

Ö11 : Olumsuzu çok uzun süre olunca yorucu oluyor. Ama programdan dolayı değil bilgisayardan dolayı.

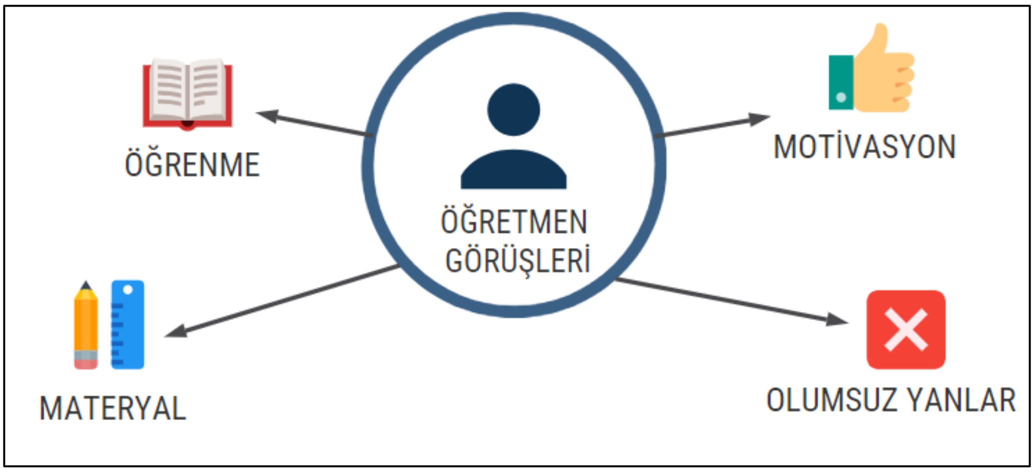
A : Kullanmayla ilgili bir sorun oldu mu? Teknik bir problem veya başka türlü?

Ö11 : yok o tarz bir olumsuzluk yaşamadım. İlk zamanlar biraz farklı geliyor ama zamanla alışıyorsun zaten şablonlar son derece kullanışlıydı.

Benzer şekilde Ö1 kodlu öğrenci da projektöre veya bilgisayara çok baktığı durumlarda gözlerinin rahatsız olduğunu belirtmiştir. Bunun dışında öğrenciler öğrenme ortamının herhangi bir parçası ile ilgili olumsuz görüş bildirmemiştir.

### 4. 3. 2. Tasarlanan Öğrenme Ortamına Yönelik Ders Öğretmeninin Görüşleriyle İlgili Bulgular

Ders öğretmeni ile yapılan görüşmeler incelenerek kodlar elde edilmiş ardından bu kodlar belirli temalar altında toplanmıştır. Ders öğretmeninin tasarlanan öğrenme ortamına yönelik görüşlerinden elde edilen temalar Şekil 79'da gösterilmektedir.




Şekil 79. Öğretmen görüşlerine ait temalar

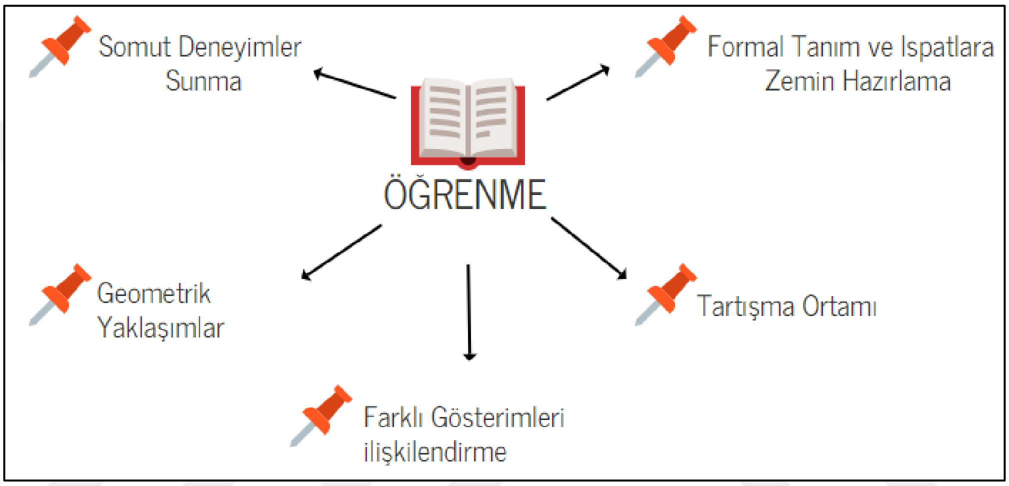
Şekil 79'da ders öğretmeninin öğrenme ortamına ilişkin görüşleri incelendiğinde "Öğrenme", "Materyal", "Motivasyon" ve "Öneriler" olmak üzere 4 adet tema elde edildiği görülmektedir. Bu temalarla ilişkili olarak 18 adet kod elde edilmiştir. Aşağıda Tablo 35'te ders öğretmeninin öğrenme ortamına yönelik görüşlerinin neler olduğuna dair bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 35. Ders Öğretmeninin Görüşlerinden Elde Edilen Temalar Kodlar

| Temalar | Kodlar |
|---|---|
| Öğrenme | Somut Deneyimler Sunma |
| | Geometrik Yaklaşımlar |
| | Formal Tanım ve İspatlara Zemin Hazırlama |
| | Farklı Gösterimleri ilişkilendirme |
| | Tartışma Ortamı |
| Materyal | İlgi Çekici |
| | Kullanışlı |
| | Etkili |
| | Anlaşılır |
| | İşlevsel |
| | Sistematik |
| Motivasyon | Monotonluktan Kurtarma |
| | Derse Katılım Sağlama |
| | Aktif Olma |
| | Motive Etme |
| | Çekici |
| | Sorumluluk |
| Olumsuz Yanlar | Revize |
| | Sıkılma |

Tablo 35'te Ders öğretmeninin görüşlerinde elde edilen temalara bakıldığında "Öğrenme" temasında 5, "Materyal" ve "Motivasyon" temasında 6, "Olumsuz Yanlar" teması altında ise 2 koda yer verildiği görülmektedir. Bundan sonraki bölümde her bir temaya yönelik elde edilen kodlar incelenmiş ve her bir koda ilişkin ders öğretmeninin görüşlerinden bir veya ikişer örnek alıntıya yer verilmiştir.

Ders öğretmeninin görüşlerinden elde edilen "Öğrenme" teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 80. Öğrenme temasına ilişkin kodlar

Şekil 80'de görüldüğü gibi öğrenme teması altında somut deneyimler sunma, formal tanım ve ispatlara zemin hazırlama, geometrik yaklaşımlar, tartışma ortamı, farklı gösterimleri ilişkilendirme olmak üzere beş adet kod yer almaktadır. Her bir kodu örneklendirmek adına ders öğretmenin görüşleri ayrı ayrı sunulacaktır. Ders öğretmenin yazılımın öğrencilere yaşattığı somut deneyimlerin onların anlamalarına nasıl katkı sağladığına dair yürütülen mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Konunun öğretiminde yazılımı kullanışlı buluyor musunuz?

Ö : Yazılım kavramlara ilişkin öğrencilere somut deneyim yaşatma, kavramla ilgili temel sezgisel anlamalarının oluşmasında çok faydalı oldu.

A : Neden peki?

Ö : Hem görsellik hem dinamiklik hem de (bunlarla da ilişkili olarak) birden çok durumu ele alıp inceleme fırsatı vermesi açısından faydalı ve kullanışlı olmuştur.

Ders öğretmeni yazılımın kavramla ilgili sezgisel anlamaların oluşmasında faydalı olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte ders öğretmeni yazılımın somut deneyimler sunmasının yanı sıra çalışma yapraklarıyla birlikte farklı gösterimleri bir arada içerdiğini ve kendilerine normal sınıf ortamına oranla daha fazla zaman kazandırdığını ifade etmiştir. Aşağıda ders öğretmeninin bu yöndeki mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Geogebra yazılımının kullanılmasının ne derecede etkili olduğunu düşünüyorsunuz?

Ö : Yazılım daha öncede belirttiğim gibi kavramlara ilişkin somut deneyimler sunma, farklı gösterimleri bir arada içerme açısından işimi oldukça kolaylaştırdı.

A : Örnek verebilir misiniz?

Ö : Mesela alt uzay kavramına ilişkin etkinlikte (ÇY5) her bir durum için kümeler hem sözel hem geometrik hem de cebirsel olarak ifade edilmişti. Genel çözüm sunmadan önce öğrencilerden bu kümelerin vektör uzayı olma özellikleri sağlayıp sağlamadığını Geogebra yardımı ile irdelendi.

A : Yazılımı kullanmak işiniz kolaylaştırdı mı? Neden?

Ö : Somut deneyimleri normal bir sınıf ortamına kıyasla daha kısa zamanda ele alma fırsatı bulduk. Normal şartlarda çok zaman alacak bu uygulama çok daha kısa zamanda tamamlandı. 20-25dk bu uygulama için yeterli oldu. Bu etkinliğin en güzel yanı vektör uzayı olma şartlarını somut örnekler üzerinde tek tek irdelemiş olmalarıdır.

Ders Öğretmenin görüşleri incelendiğinde etkinliklerin süre ve öğrenme konusunda avantaj sağladığını söylemek mümkündür. Bununla birlikte ders öğretmeni bu mülakat kaydında da somut örnekleri nasıl kullandıklarını belirterek yazılımın öğrencilere sunduğu somut deneyimlere bir kez daha değinmiştir. Ayrıca ders öğretmeni geometrik yaklaşımların daha önceki derslerinden farklı olarak sistemli ve dinamik bir şekilde kullanıyor olmasına değinmiştir. Ders öğretmenin geometrik yaklaşımlarla ilgili mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız ne gibi farklılıklardan bahsedebilirsiniz?

Ö : İki ortam birçok açıdan birbirinden farklı. Normalde bazı durumlarda mesela lineer bağımlılık/bağımsızlık öğrencilerin anlamalarına yardımcı olsun diye geometrik yaklaşımlardan derslerimde yararlanıyordum. Ancak sistemli bir şekilde değil.

A : Burada nasıl ele aldınız?

Ö : Burada GeoGebra'yı kullanarak ele aldığımız her kavram için dinamik bir şekilde geometrik yaklaşımlar kullandık.

A : Bahsettiğiniz sistem nasıl işledi tam olarak?

Ö : Çalıştığımız geometrik durumları cebirsel olarak da açıkladık. En son aşamada en soyut hali ile ele almaya çalıştık. Şunu gördüm. Özelliklerle ilerleyen aşamalarda tanımlar, teoremler ve ispatları öğrencileri için çok daha anlaşılır olmaya başladı.

Ders öğretmeni geometrik yaklaşımlara yer verilmesinin yanı sıra kavramların farklı gösterimlerine de yer verilmesinden bahsetmiştir. Ders öğretmenin görüşlerinden bu durumun öğrenciler için tanım, teorem ve ispatları daha anlaşılır hale getirdiği anlaşılmaktadır. Ders öğretmeninin görüşleri GeoGebra şablonlarının ve çalışma yapraklarının hazırlanmasında temel alınan zamanı etkin kullanmak, çok sayıda örnek durumu incelemek, geometrik temsillere yer vermek gibi ilkelerin karşılandığını söylemek mümkündür. Bununla birlikte ders öğretmeni işlenişin öğrencileri taşıdığı noktayı örnekler vererek açıklamıştır. Ders öğretmeninin formal tanım ve ispatlarla ilgili mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Bilgisayar destekli öğrenme ortamı derste ki pozisyonunuzu nasıl değiştirdi?

Ö : Ön hazırlık ve çeşitli düzenlemeler açısından daha yorucu gibi görünse de aslında derslerin işlenişi çok kolaylaştırdı.

A : Bilgisayar destekli öğrenme normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız?

Ö : Şöyle ki bir takip edilen işlenişle öğrenciler formal tanım ve ispatlara hazır hale geldiler. Aynı durum üzerinden önceden yaşadıkları somut deneyimleri formal temsilleri ile eşleştiriyor ve çok daha rahat anlayıp takip edebiliyordu. Dolayısıyla ispat süreci de onlar için anlamlıydı.

A : Bu etkiyi nasıl gözlemlediniz?

Ö : İlerleyen derslerde bu etkiyi çok daha fazla görebildim. Öğrencilere daha çok fikir beyan ediyor, önceki bilgilerini çok rahat çağırabiliyorlardı.

Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde takip edilen işlenişin formal tanımların ve ispatların anlaşılmasına zemin hazırladığını söylemek mümkündür. Ayrıca ders öğretmeni öğrencilerin öğrenmeleri üzerindeki etkisini ilerleyen haftalarda kendisinin gözlemlediğini ifade ederek açıklamasını güçlendirmiştir. Bununla birlikte ders öğretmenin görüşlerinden hareketle ders öncesi hazırlıklar açısından öğretmenin sorumluluklarının artabileceğini söylemek mümkündür. Ancak bu sorumluluklar yerine getirildiğinde ders işlenişi daha kolay bir hal alabilecektir.

Ders öğretmeni öğrencilere verilen ödevlerin sınıf içerisinde tartışıldığından bahsederek bu durumun etkisinden bahsetmiştir. Ders öğretmenin mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

A : Ödevlerin öğrencilerin konuyla ilgili öğrenmeleri üzerine nasıl etki ettiğini düşünüyorsunuz?

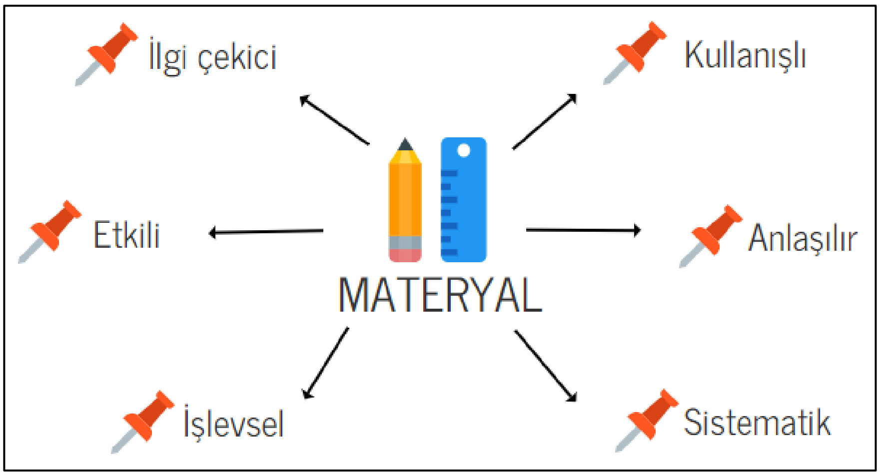
Ö : Bazı dersleri genel olarak bir giriş yaptıktan sonra bir önceki ders verilen ödevler ve çözümleri hakkında konuşma ile başlatılıyorduk. Bu süreçte tüm öğrenciler ilgili bir şekilde çözümler hakkında tartışmaya katılıyordu.

A : Nasıl bir tartışmaydı bu?

Ö : Bu tartışmalar sırasında öğrenciler birbirilerinin açıklamalarının yeterli olup olmadığı hakkında da yorum yapıyordu? Örneğin bir öğrencinin belli bir soru için R2 veya R3 de çözüm yapsak olmaz mı şeklindeki sorusuna, genel düşünülmesi ve cevap verilmesi şeklinde sınıftan diğer bir iki öğrenciden yanıt geldi. Hatta burada R2, R3 ve Rn arasındaki ilişkiye dair öğrencilerin sahip olduğu yanlış anlamlandırma ortaya çıktı. Bu bana bu konu hakkında konuşma fırsatı verdi.

Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde ödevler üzerinden yapılan değerlendirmelerle ilgili sınıfta bir tartışma ortamının ders öğretmeni tarafından oluşturulduğu anlaşılmaktadır. Bu tartışmaların hem öğrencilerin düşünme biçimleri ilgili fikirler verip hem de ders öğretmeninin yanlış anlamaları ortaya çıkarıp düzeltmesine imkân verdiğini söylemek mümkündür.

Ders öğretmeninin görüşlerinden elde edilen “Materyal” teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 81. Materyal temasına ilişkin kodlar

Şekil 81'de görüldüğü gibi ders öğretmenin öğrenme ortamında yer alan materyallerle ilgili özellikleri ifade ettiği görüşler "Materyal" teması altından toplanmıştır. Materyal teması ile ilişkili kodlar yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi ilgi çekici, kullanışlı, etkili, anlaşılır ve sistematik olarak ifade edilmiştir. Aşağıda ilk olarak ilgi çekici koduna ilişkin ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Öğrencilerin tercihi ne yöndeydi derslerin işlenişi konusunda?

Ö : Bazı dersler -çoğunlukla- bilgisayar laboratuvarında çalıştık bazı dersler normal sınıf ortamında. Laboratuvar dersleri öğrenciler için daha çekici olduğunu söyleyebilir.

A : Nedenini açıklar mısınız?

Ö : Çünkü daha rahattılar birçok açıdan. Arkadaşları ile birlikte çalışıyorlardı, bilgisayar ortamında çalışıyorlardı, somut deneyimler yaşadıkları için yaptıkları anlamlı geliyordu.

A : Başka neler söyleyebilirsiniz?

Ö : Mesela, geçen dönem bu dersi yürüttüğüm esnada derse gelip hiçbir şeyle ilgilenmeyen iki-üç öğrencim vardı. Bu dönem boyunca hem derslere çok daha düzenli devam ettiler hem de uygulamalara aktif katılım gösterdiler. Çaba sarf ettiler. Dersler onlar için genelde ilgi çekici oldu.

Ders öğretmeni başlangıçta çalışma yapraklarından bahsederek derslerin genel olarak öğrenciler için ilgi çekici olduğunu ifade etmiştir. Ders öğretmeni, öğrencilerin geçen senede derslerine girdiğinden öğrencilerini iyi tanıdığını ve bu dönemle karşılaştırdığında daha aktif olduklarını yönünde görüş bildirmiştir. Bu durumun gerçekleşmesinde derslerde kullanılan materyallerin ilgili çekici olmasının da etkisi olduğunu söylemek mümkündür. Bunun yanında çalışma yaprakları ders öğretmeni tarafından genel olarak anlaşılır bulunmuştur. Aşağıda anlaşılır koduna ilişkin ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Çalışma yapraklarının tasarımı ve niteliği hakkında neler düşünüyorsunuz?

Ö : Çalışma yaprakları genel olarak anlaşılırdı ve çalışma yaprağındaki amaca derslerde ulaşıldı.

A : Sonrasında dersler nasıl geçiyordu?

Ö : Çalışma yapraklarının devamında da ders verimli ve güzel geçiyordu. Öğrenciler için ele aldığımız konular açık ve anlaşılır olunca derse daha fazla katılım gösteriyorlardı.

Ders öğretmeninin görüşüne bakıldığında çalışma yapraklarının açık ve anlaşılır olması öğrencilerin derse daha fazla katılmasına bir etken olarak ortaya çıkmıştır. Çalışma yapraklarının yanında GeoGebra şablonları da ders öğretmeni tarafından kullanışlı bulunmuştur. Aşağıda kullanışlı koduna ilişkin ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Kavramların öğretimi için hazırlanan Geogebra şablonlarının tasarımı ve kullanımı hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö : Daha önce de belirttiğim gibi yazılımı kullanma ile çok sınırlı bilgiye sahip olsanız da bu şablonlar yardımıyla işinizi yapabiliyordunuz. Üstelik dikkat dağıtıcı diğer menü ve özellikleri ekranda gizleyebiliyorsunuz. Bu ise öğrencilerin doğrudan önlerindeki işe kanalize olmalarına destek oluyor. Burada ben ilk giriş dersindeki (R2 ve R3 de vektörler) şablonun kullanışlılık açısından daha iyi hazırlanabileceğini düşünüyorum.

Ders öğretmeninin daha önce öğrenme teması altında GeoGebra şablonlarını görsellik, dinamiklik ve bunlarla ilişkili durumların incelenmesi açısından kullanışlı bulmuştur. Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde şablonların kullanım açısından da kolaylık sağladığı ve kolayca onlarını yönlendirdiğini anlaşılmaktadır. Ayrıca ders öğretmeninin daha önce öğrenme teması altında şablonların kendilerine zaman kazandırdığını belirtmişti. Bu durumun da şablonların kullanışlı olmalarından kaynaklandığını söylemek mümkündür.

Ders öğretmeninin görüşlerine bakıldığına birçok kez çalışma yapraklarının belli bir yapıya sahip olduğunu belirttiği görülmektedir. Daha önce öğrenme temasında geometrik yaklaşımlar kodunda GeoGebra şablonlarında bu yapıyı kavramların geometrik, cebirsel ve soyut hallerinin ele alınması olarak ifade eden ders öğretmeni benzer bir görüşü de çalışma yaprakları için yapmıştır. Aşağıda sistematik koduyla ilişki olarak ders öğretmenin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Çalışma yaprakları ve şablonlar ile ilgili genel olarak düşünceleriniz nelerdir?

Ö : Tüm çalışma yapraklarında belli bir sistematik vardı aslında. Geogebra ile birlikte geometri uygulamaları ile başlayan, geometrik yaklaşımlarla ulaşılan çıkarımları cebirsel yaklaşımlarla destekleyen ve en sonunda en genel formda çalışılan durumu anlamlaştırmaya çalışan.

A : Bu durum öğrencilerin öğrenmelerini nasıl etkiledi sizce?

Ö : Öğrenciler için somut durumlar üzerinde aynı kavramlar ile çalışılmış olması genel teorinin kapsamının öğrencilerin anlamasını oldukça kolaylaştırıyordu.

Aslında önce genel teoriyi verip sonrasında örnekler üzerinde açık hale getirme çabamızın tersi ve bence çok daha işlevsel olanı oldu.

Ders öğretmeninin görüşünden tıpkı Geogebra şablonlarında olduğu gibi çalışma yaprakları da somutta soyuta bir sistematiğe sahip olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte ders hocası önce genel teorinin verilip sonrasında örnekler üzerinden yapılan bir işleyişe ters olarak kavramların sırasıyla geometrik, cebirsel ve soyut hallerine yer verilmesini daha işlevsel bulduğunu ifade etmiştir.

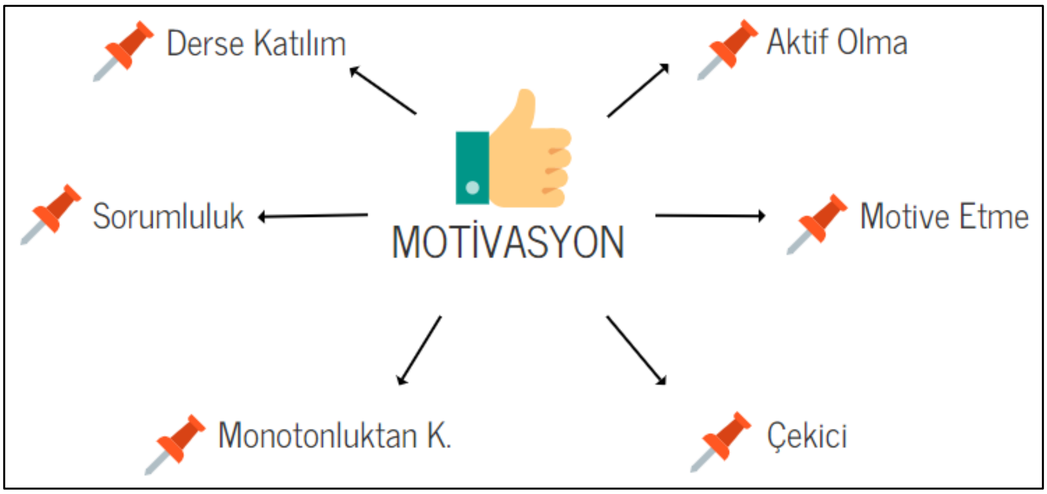
Ders öğretmenin öğrenme ortamıyla ilgili görüşleri kullanılan materyallerin ne derece etkili olduklarını ortaya koymuştur. Ders öğretmeni bu etkiyi ifade ederken zaman zaman kavramlarla ilgili örneklere başvurmuştur. Ders öğretmeninin bu yöndeki görüşleri etkili koduyla ifade edilmiştir. Aşağıda bu kodla ilişkili olarak ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Bilgisayar destekli bir öğrenme ortamı ile vektör uzayları derslerini yürüttünüz. Normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız ne gibi farklılıklardan bahsedebilirsiniz?

Ö : Lineer cebir öğrenciler için birçok yeni kavram ve tanımını içerir. Bu kavramlar bunların diğer kavramlarla ilişkisini öğrencilere doğru ve uygun bir şekilde anlatmak beni gerçekten de zorluyordu. Mesela taban kavramı, bu kavramın lineer bağımsızlık ve germe ile ilişkisini gerçek anlamda görmek birçok öğrenci için çok zor oluyor. Önceki yıllardaki deneyimlerden hareketle bunu kolayca söyleyebilirim. Ancak burada taban kavramı için hazırlanan etkinlikler öğrenciler için taban fikrinin informal ve formal anlamda anlaşılabilir olmasına çok katkı sağladığını düşünüyorum

Ders öğretmenin mülakat kaydı incelendiğinde öğrenme ortamının öğretmenlerin dersin anlatılması konusuna yardımcı olduğunu ve bir bütün olarak düşünüldüğünde etkinliklerin öğrencilerin öğrenmesine olumlu yönde etkisi olduğunu söylemek mümkündür. Ders öğretmeni devamında çalışma yaprakları ve Geogebra şablonlarını kastederek etkinliğin taban kavramının informal tanımını öğrencilerin anlaması açısından etkili olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte ders öğretmeni ödevlerin gerek tartışma ortamı oluşturması gerekse öğrencilerin öğrenmeleri açısından etkili olduğunu ifade etmiştir.

Ders öğretmeninin görüşlerinden elde edilen "Motivasyon" teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 82. Motivasyon temasına ilişkin kodlar

Şekil 82'de görüldüğü gibi öğrenme ortamının ders öğretmeni ve öğrencileri motive ettiği durumlar "Motivasyon" teması altından toplanmıştır. Motivasyon teması ile ilişkili kodlar yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi derse katılım, aktif olma, sorumluluk, motive etme, monotonluktan kurtarma ve çekici olarak ifade edilmiştir. Aşağıda ilk olarak derse katılım koduna ilişkin ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Laboratuvarda işlenen derslerin yürütülme şeklinin öğrencilerinizin öğrenmeleri konusundaki motivasyonunda bir değişiklik oluşturup oluşturmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?

Ö : Dersler genel anlamda yoğun, aynı zamanda verimli geçti diye düşünüyorum. Daha öncede belirttim bir iki yerde, derslere hiç katılmayan öğrenciler (3 öğrenci Mehmet, irfan ve ümran) derse katılım gösterdi. Etkinlikleri tamamlamak için çaba sarf etti. Bu oldukça olumlu bir gelişme diye düşünüyorum.

A : Genel katılım nasıldı peki?

Ö : Genel anlamda öğrencilerin derse katılımı ilgisi iyiydi. İlk başta hem laboratuvar ortamında hem çalışma yaprakları ile birlikte çalışmak öğrencileri zorladı. Ancak kısa zamanda acemiliklerini üzerinden attılar ve uygulamaları benimsediler. Derste önceki konulardan bilgilere ihtiyaç olduğunda zorlanmadan çağırabildiklerini fark ettim.

Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde öğrencilerin başlangıçta zorlamalarına rağmen süreç içerisinde derse katımlarının artığı görülmektedir. Bununla birlikte ders öğretmeni ders içerisinde öğrencilerle yaşadığı bir diyaloğu aktararak öğrencilerin laboratuvar ortamında çalışma isteklerini gerekçesiyle ifade etmiştir. Aşağıda ders öğretmeninin bu yöndeki görüşüne yer verilmiştir.

Ö : "Dersleri lab. ve derslikte dönüşümlü yapıyorduk. Derslikte yürüttüğümüz bir dersin sonunda -ki ders bence son derece verimli bir dersti- öğrenciler laboratuvarda çalışma isteklerini söylediler. Bu derste çok yorulduklarını ifade ettiler. Laboratuvar yaptığımız geçen ders çok daha az yorulduklarını ifade etmişlerdi. Hatta bu yüzden dersi 15 dk. önce bitirdik. Aslında laboratuvarda yaptığımız o ders çok yoğun bir dersti. Bana kalırsa bu ders daha az yoğun bir içeriğe sahip ve daha rahattı. Aslında bu durum formalizmin onları ne kadar sıktığı ve yorduğunun bir göstergesiydi bence."

Ders öğretmenin görüşüne bakıldığında öğrencilerin laboratuvar ortamını tercih etmelerinin nedenini formalizm olarak gördüğü anlaşılmaktadır. Bununla birlikte ders öğretmeni, öğrencilerin öğrenme ortamı içerisinde aktif kaldıklarını ifade etmiştir. Ders öğretmeninin bu yöndeki görüşlerine aktif olma kodu atanmıştır. Aşağıda aktif olma kodu ile ilişkili olarak ders öğretmenin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Dersin bu şekilde yürütülmesi hakkında ne düşünüyorsunuz?

Ö : Bu sınıfla ben birinci dönemde ders yaptım. Genel tavırları hakkında fikir sahibiyim. Ancak bu dönem uygulama boyunca genelde yaptıkları gibi sessiz kalmak yerine sürekli bir şeyler sordular veya bir şeylere cevap verdiklerini gözlemledim

A : Uygulamanın kaynaklandığını söyleyebilir misiniz?

Ö : Evet. Aslında bu genel sessiz tavırları bu sınıfta dersi yürüten diğer birçok hocanın da ortak kanısı idi. Ancak uygulamada durum değişti.

Ders öğretmenin mülakat kaydı incelendiğinde öğrencilerin öğrenme ortamı içerisinde sürekli bir uğraş içerisinde olarak süreç içerisinde aktif bir rol aldıklarını söylemek mümkündür. Ders öğretmeni daha önceki görüşlerinden de öğrenme ortamının ilgi çekici, çalışma yapraklarının anlaşılır ve şablonların kullanışlı olmasının öğrencilerin derse katılımında etkisi olduğunu belirtmiştir.

Ders öğretmeni laboratuvar derslerinin öğrenciler için tercih edilme nedenlerinden birini de öğrenme ortamının sınıf ortamının yapısından farklı olmasına bağlamış ve laboratuvar ortamının derslerini monotonluktan kurtardığı ifade etmiştir. Aşağıda monotonluktan kurtarma kodlu ile ilişkili ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız ne gibi farklılıklardan bahsedebilirsiniz?

Ö : Öğrenciler, laboratuvardaki deneyimlerinden çok fazla zorlanmadan örnekler sunabildiler. O dersler için yapılan çözüm ve tartışmaların öğrenciler için anlamlı olduğunu düşünmüştüm ve hala öyle düşünüyorum.

A : Öğrencilerin öğrenmesini nasıl etkiledi bu durum?

Ö : Durum böyle olunca öğrenciler derslerde kendilerini hem daha iyi hissetiler hem de daha çok fikir ileri sürmeye başladılar. Diğer taraftan bu uygulama derslerimizi monotonluktan da kurtardı bir anlamda.

Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde derslerin bilgisayar destekli olarak yapılıyor olması laboratuvar derslerini normal derslerin monotonluğundan ayırdığı görülmektedir. Ders öğretmeni mülakat kaydının devamında grup çalışmasının da dersleri sahip olduğu rutinden kurtarmada etkili olduğunu belirtmiştir. Ayrıca ders öğretmeni düzenli olarak verilen ödevlere dönütler verilmesinin öğrenme ortamının öğrencileri ödevlerini yapma konusunda motive ettiğini ifade etmiştir. Aşağıda motive etme kodu ile ilişkili ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Ödevler öğrenciler için ek bir külfet oldu mu?

Ö : Her ders sonunda öğrenciler o hafta ki içerik ve önceki haftalarla ilişkili problemler bıraktık. Bu problemlerin sayısı çok değildi. O yüzden öğrenciler için külfet oluşturduğunu düşünmüyorum.

A : Ödevlere dönütler verilmesi hakkında ne düşünüyorsunuz?

Ö : Ayrıca ödevlerine düzenli olarak dönütlerde verildi. Bu da çok önemli. Yoğunluğa bağlı birçok gerekçeden ötürü ihmal edilen bir durum. Bu uygulama biçimi öğrencileri ödev yapma konusunda onları oldukça motive etti. Çoğu düzenli bir şekilde ödevlerini getiriyordu.

Ders öğretmeninin mülakat kaydı incelendiğinde ödevlere verilen dönütlerin önemli olduğu ve öğrencileri ödevlerini yapma konusunda motive eden bir durum olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca ders öğretmenin mülakat kaydından ödevlerin ihmal edilen bir durum olduğu anlaşılmaktadır. Buradan hareketle ödevlerin öğretmen tarafından ihmal edilmesinin etkililiğini azaltacağını söylemek mümkündür.

Motivasyon temasında belirtilen son kod olan sorumluluk kodunda ise ders öğretmeni öğrenme ortamının sorumluluğunu artırdığını ifade etmiştir. Aşağıda bu kodla ilişkili olarak ders öğretmeninin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Genel olarak derslerin GeoGebra kullanmayı gerektiren çalışma yapraklarıyla ve grup çalışması şeklinde yürütülmesi hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö : Öğreticiye içeriğin sunumunda senkronizasyon açısından daha fazla sorumluluk verdiği de bir gerçek.

Öğrenme ortamının temel bileşenleri olan çalışma yaprakları ve Geogebra şablonları birbiri ile uyumlu bir şekilde hazırlanmıştır. Ders öğretmeninin görüşünden bu uyumun sağlanmasının kendisine ek sorumluluk getirdiğini söylemek mümkündür. Ders öğretmeniyle yapılan ve daha önce bölümlerde öğrenme teması altında verilen mülakat kaydında ders öğretmeni ders öncesinde bazı hazırlıkların yapılması konusunda sorumluluklarını ifade etmiştir. Buradan hareketle ders öğretmenin öğrenme ortamıyla ilgili sorumluluklarını ders öncesi gerekli hazırlıkların yapılması ve içeriğin senkronizasyonu olarak ifade etmek mümkündür.

Ders öğretmeninin görüşlerinden elde edilen “Olumsuz Yanlar” teması ile ilişkili kodlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.


Şekil 83. Olumsuz yanlara temasına ilişkin kodlar

Şekil 83’te görüldüğü gibi ders öğretmenin süreç içerisinde karşılaştığı olumsuzluklar “Olumsuz Yanlar” teması altında toplanmıştır. Olumsuz yanlar teması ile ilişkili kodlar yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi revizyon ve sıkılma olarak ifade edilmiştir. Aşağıda ilk olarak revizyon kodu ile ilişkili ders öğretmenin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Çalışma yapraklarındaki etkinlikleri tamamlarken öğrencilerinizin yaşadığı problemler nelerdir?

Ö : Taban kavramına ilişkin çalışma yaprağında yaşamıştım. Burada Etkinlik 2 aslında mantık olarak iyi ancak 2. ve 3. Sorular bazı öğrenciler için çok açık değildi. Sınıf içinde dolaşırken bu öğrencilere ek açıklamalar yapmak gerekti. Bu yüzden çalışma yaprağında bu etkinliğe revize gerekebilir.

Ders öğretmeni taban kavramına yönelik etkinlikte yer alan bazı soruların yeterince anlaşılır olmamasından dolayı düzenlenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bununla birlikte $R^2$ ve $R^3$ te vektörlerle ilgili etkinlikte kullanılan Geogebra şablonuyla ilgili bir öneride bulunarak komut penceresinden kaynaklanan bir yazım hatasının yanlış anlaşılmaya sebep vermemesi açısından düzenlenmesini önermiştir. Bu ve benzeri öneriler süreç boyunca ders öğretmeni ve araştırmacı tarafından rapor edilerek tasarımın geliştirilmesine yönelik düzenlemeler yapılmıştır.

Ders öğretmeni tarafından ifade edilen bir diğer olumsuz durum ise etkinliği erken bitiren öğrencilerin diğer öğrencileri beklerken sıkıldıkları yönündedir. Aşağıda sıkılma kodu ile ilişkili ders öğretmenin mülakat verileri sunulmuştur.

A : Öğrenme ortamının varsa eksik yanlarından bahseder misiniz?

Ö : Ancak bir uygulamada birden fazla etkinlikten oluşan uzun bir çalışma yaprağında (yanlış hatırlamıyorsam lineer birleşim ile ilgili olan) ben birlikte ilerleyelim diye bütün sınıf bitirdikten sonra bir diğer etkinliğe geçme şeklinde uygulama yaptım. Bu arada bir etkinliği erken bitirenler diğerlerini beklerken sıkıldı. Aslında burada olduğu gibi çok kalabalık olmayan sınıflarda her bir grubu iyi takip edip dönütler verilebilir ve herkes kendi hızında ilerleyebilir.

## 5. TARTIŞMA

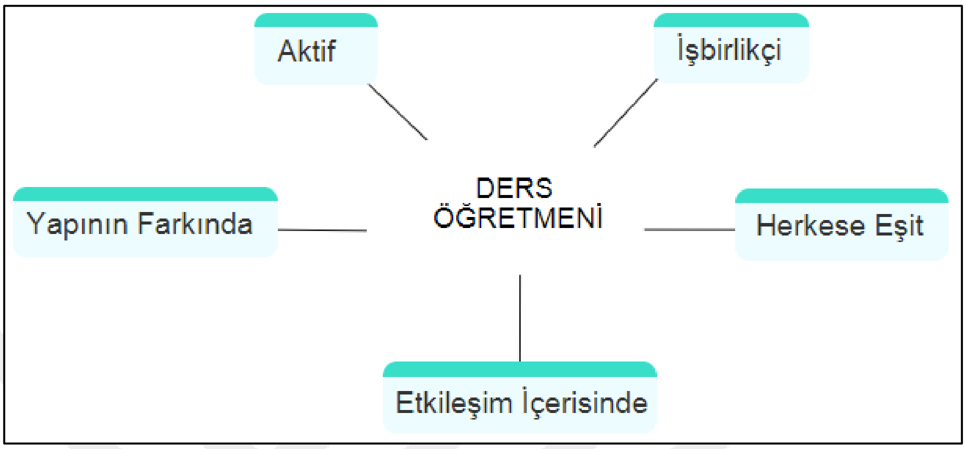
Bu araştırmada vektör uzaylarının öğretimine yönelik olarak bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerini nasıl etkilediği sorusuna cevap aranmıştır. İki döngülük bir süreç boyunca yapılan düzenlemelerle geliştirilen öğrenme ortamı araştırmanın üçüncü ve son döngüsüne hazır hale getirilerek 11 öğrenci ile uygulanmıştır. Araştırmanın bu bölümünde öğrenciler ile yapılan çalışma sonucunda elde edilen bulgular çalışmanın amaçlarına bağlı olarak tartışılacaktır.

Öğrencilerin uygulama öncesi ve sonrasında düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla sırasıyla başlangıç ve final testleri uygulanmış olup uygulama sürecinde her hafta düzenli olarak verilen ödevler üzerinden klinik mülakatlar yapılmıştır. Ayrıca başlangıç testi uygulama sonrasında bir kez daha uygulanarak iki testten elde edilen sonuçların karşılaştırılması ve öğrencilerin düşünme biçimindeki değişikliklerin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde ilk olarak tasarım ilkelerine yönelik bulgular tartışılmıştır. Ardından sırasıyla BT ve FT testlerinden elde edilen bulgulara yönelik tartışma yer verilmiştir. Çalışmanın öncesinde uygulanan başlangıç testi BT1 ve sonrasında uygulanan başlangıç testi BT2 olarak ifade edilecektir. Son olarak, öğrenciler ve ders öğretmeninin görüşlerinden elde edilen bulgular tartışılmıştır.

### 5. 1. Tasarım İlkelerine Yönelik Tartışma

Lineer cebir öğretimine yönelik olarak literatürdeki zorluklar ve öneriler belirlenerek bir kuramsal çerçeve oluşturulmuş ve bu çerçeve doğrultusunda bazı prensipler belirlenerek bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Tasarlanan öğrenme ortamı tasarım tabanlı araştırma kapsamında üç döngülük bir uygulama tasarım ve değerlendirme sürecine tabi tutulmuştur. Araştırmanın üçüncü ve son döngü öncesinde alan notları ve video kayıtları kullanılarak tasarlanan öğrenme ortamıyla ilgili ilk iki döngü boyunca düzenlemeler ve değişiklikler yapılmıştır. İlk iki döngü sonrasında yapılan revizyonlar sonucunda üçüncü döngü öncesinde tasarım ilkeleri belirlenerek tasarım son döngü öncesinde uygulamaya hazır hale getirilmiştir. Bu bölümde üçüncü döngü sonucunda elde edilen bulgular ışığında tasarım ilkeleri üzerinde tartışılacaktır.

Tasarlanan öğrenme ortamı ile ilgili ilkeler üçüncü döngü öncesinde Teknoloji Kullanımı, Temsil Dilleri, Ödevler, Çalışma Yaprakları ve Grup Çalışması olmak üzere beş ana başlık altında toplanmıştır. Araştırmanın üçüncü döngüsünde elde edilen bulgular sonucunda özellikle öğrencilerin görüşlerinin analizi doğrultusunda Ders Öğretmenin Rolü altıncı bir başlık olarak tasarım ilkelerine eklenmiştir. Böylece tasarlanan öğrenme ortamı ile ilgili ilkeler altı başlık altında toplanmıştır. Aşağıda Şekil 84'te ders öğretmeninin rolüne yönelik ilkeler gösterilmiştir.

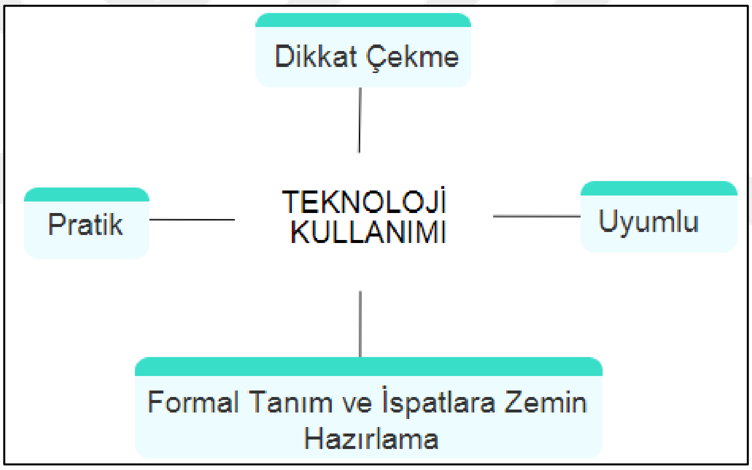



Şekil 84. Ders öğretmenin rolüne yönelik ilkeler

Şekil 84'e bakıldığında ders öğretmeninin rolüne yönelik ilkeler aktif, işbirlikçi, yapının farkında, herkese eşit ve etkileşim içerisinde olarak belirlenmiştir. Aslında araştırmacının süreç içerisinde aktif rol alması ve öğrencilerle iş birlik içerisinde olması tasarım tabanlı bir araştırmanın özelliklerinden biri olarak öğrenme ortamının görünmeyen bir ilkesi olduğunu söylemek mümkündür. Ancak ders öğretmeninin rolünün her zaman bunlarla sınırlı olmadığı öğrencilerin görüşleri sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu nedenle gerek tasarım tabanlı araştırma bünyesinde araştırmacının rolü gerekse öğrencilerin görüşleri doğrultusunda bazı ilkeler belirlenmiştir. Ayrıca her zaman araştırmacı tasarlanan öğrenme ortamında dersi yürütücü görevini üstlenmemektedir. Nitekim bu araştırmada da ilk iki döngü araştırmacı tarafından üçüncü döngü ise alanında uzman bir matematikçi tarafından yürütülmüştür. Bu nedenle ders öğretmenin süreçten ve tasarım ilkelerinden haberi olması ve bu ilkeler bilincinde dersi yürütmesi önemlidir. Çünkü etkinliklerin tamamında öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimi için farklı dil ve gösterimlere belli bir sistematikle yer verilmiştir. Ders öğretmeninin bu sistematiğin farkında olarak gerek süreç içerisinde öğrencilerle etkileşiminde gerekse ders içi sunumlarında olsun dillerin kullanımına ve diller arası geçişlere özen göstermesi gerekmektedir. Aksi takdirde literatürde de ifade edildiği gibi diller arası geçişlerin anlaşılmamasından kaynaklanan zorluklar (Hillel,2000) ile karşılaşılacaktır. Bununla birlikte öğrencilerle yapılan mülakatlarda ders öğretmenin herkese eşit davranmasını ve herkese söz hakkı vermesini kendilerini motive eden bir durum olduğunu ifade etmiştir.

Öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisini araştıran bu araştırmada düşüncelerini açıkça ifade edebilmeleri bakımından ders öğretmeninin bu tutumu ve öğrencilerle olan etkileşiminin (Pecuch-Herrero, 2000) son derece önemli ve başarıyı artıran bir etken olduğunu söylemek mümkündür.

Teknoloji kullanımı ile ilgili belirlenen ilkeler daha çok GeoGebra yazılımının öğrenme ortamındaki rolünü belirlemeye yönelik ilkelerdir. Öğrenme ortamında teknoloji kullanımıyla yalnızca literatürdeki önerileri karşılamak değil aynı zamanda Harel'in (2000) prensiplerini uygulamak ve Dorier'in (1995) bahsettiği formalizm zorluğundan kaçınmak da amaçlanmıştır. Öğrenciler ve ders öğretmeniyle yapılan görüşmeler sonucunda bu temel amaçların dışında yazılım kullanılarak hazırlanan şablonların sahip olması gereken bazı özellikler belirlenmiştir. Belirlenen bu özellikler şablonların dikkat çekici, pratik, içerikle uyumlu ve öğrencileri formal tanım ve ispatlara hazırlayacak şekilde olmasıdır. Aşağıda Şekil 85'te teknoloji kullanımına yönelik ilkelere yapılan eklemelere yer verilmiştir.

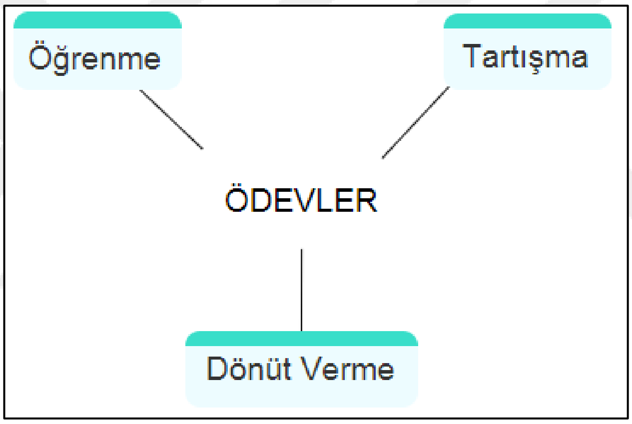



Şekil 85. Teknoloji kullanımına eklenen ilkeler

Şekil 85'te yer alan özeliklerin teknoloji kullanımı ile ilgili diğer ilkelere eklenmesine karar verilmiştir. Dikkat çekici ve pratik kullanım her ne kadar GeoGebra şablonlarını hazırlarken dikkat edilen unsurlar olmasına rağmen teknoloji kullanımıyla ilgili ilkeler arasında yer almamıştır. Özellikle pratiklik bütün öğrencilerin ve ders öğretmeninin görüş birliğine vardığı bir özelliktir ve zamanın etkin olarak kullanılmasında önemli bir rol oynamıştır. Bununla birlikte her ne kadar yazılımla ilgili uygulama öncesinde öğrencilere ders verilmiş olsa da bazı etkinlikler (alt uzay, germe) yazılımı kullanmaktan kaynaklanan ve sürenin uzamasına neden olan zorlukların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu yüzden öğrencilere pratik kullanım sağlayacak bir şablonun hazırlanması zamanı etkin kullanmak ve fazla sayıda örnek durumu ele almak ilkelerinin de karşılanmasına katkıda sağlayacaktır. Bununla birlikte hazırlanan GeoGebra şablonlarının içerik ile özellikler çalışma yapraklarıyla uyumlu oluşu öğrencilerin ve ders öğretmenin görüşlerinde ifade ettikleri bir durumdur. Basit düzeyde BCS ve DGY kullanımının (Donevska-Todorova, 2018) lineer cebir öğretimini kolay bir hale getirmediği ve öğretim stratejileriyle birlikte yapıldığında teknolojinin öğrencilerin başarısını artırdığını (Donevska-Todorova, 2018; Pecuch-Herrero, 2000) göz önünde bulundurursak hazırlanacak şablonların derslerde kullanılan diğer etkinliklerle uyumlu ve belli bir yapıya sahip olması gerektiğini söyleyebiliriz. Teknolojinin lineer cebir dersine entegrasyonunu yalnızca kavramlarla ilgili görsel temsillere yer vermek veya yalnızca içeriği desteklemek olarak düşünmemek gerekir. Hazırlanan çalışma yapraklarının ve ödevlerin de GeoGebra şablonları göz önünde bulundurularak tasarlanması ve etkinliklerin birbirini desteklemesi gerekmektedir. Ayrıca ders öğretmeni yazılımın sunduğu somut deneyimlerin öğrencileri formal tanımları ve ispatları anlamalarını yardımcı olduğunu ifade etmiştir. Aslında ders öğretmeninin bu görüşü Harel'in (2000) somutluk ve genellenebilirlik prensipleriyle bağdaşmakta olup bu nedenle teknoloji kullanımıyla ilgili ilkelerin bir parçası olmasına karar verilmiştir.

Çalışma yapraklarının GeoGebra şablonlarıyla birlikte uygulandığı göz önüne bulundurulduğunda yazılımla ilgili pratik kullanım da çalışma yapraklarının bir özelliği olarak öğrencilerin görüşlerinde öne çıkmaktadır. Çalışma yaprakları ilk döngüden itibaren gerek içerik olarak gerekse biçimsel olarak birçok düzenlemenin olduğu etkinliklerdir. Çalışma yaprakları tasarlanırken öğrencilerin çözümlerini rahatça yapabilmeleri, çözümleri üzerinden çıkarımlar yapabilmeleri ve ilişkileri görebilmeleri için birçok biçimsel düzenlemelere gidilmiştir. Çünkü ilk iki döngüden elde edilen sonuçlar öğrencilerin çözümlerinin dağınık olduğu ve öğrencilerin zaman zaman elde ettikleri sonuçları toparlamakta zorlandıklarını ortaya koymuştur. Her ne kadar bu durum tasarım ilkeleri ortaya koyulurken bir ilke olarak gösterilmiş olmamasına rağmen çalışma yaprakları tasarlanırken pratik olmasına dikkat edilmiştir. Sonuç olarak ilk iki döngü sonrasında çalışma yaprakları için ilkeler merak etme, açık ve anlaşılır, genelleme yapma, farklı dillere yer verme, yazılımla uyumlu ve keşfetme olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin görüşleri doğrultusunda pratik kullanımın da çalışma yapraklarının hazırlanmasından takip edilecek ilkelerden biri olmasına karar verilmiştir. Ders öğretmeni ve öğrencilerin görüşleri belirlenen ilkelerin çalışma yapraklarında başarılı bir şekilde karşılandığı yönündedir. Görüşler ayrıca çalışma yaprakları ve ödevlerin öğrencilerin öğrenme ortamının amacını fark ettiklerini ve benimsediklerini ortaya koymuştur. Bu durum Harel'in gereklilik prensibinin karşılanmasına katkı sağladığı düşünülmektedir.

İlk iki döngü sonrası ödevler başlığı altında ilkeler problem çözme, genelleme yapma, farklı dil ve gösterimlere yer verme ve klinik mülakatlar olarak sunulmuştur. Ders öğretmenin, öğrencilerin görüşleri ve araştırmadan elde edilen bulgular sonucunda ödevlerin öğrencilerin öğrenmelerine ve sahip oldukları düşünme biçimlerinin ortaya çıkmasından etkisi olduğu düşünülmüştür. Öğrencilerle yapılan mülakatlarda ödevlerle ilgili görüşlerin pekiştirici, dersi tekrar, sınava hazırlık, sınav stresini alma ve düzenli çalışma olduğu görülmüştür. Öğrencilerin görüşlerinden ödevlerin öğrenmelerine olumlu bir yönde katkı sunduğu söylemek pek tabi mümkündür. Bununla birlikte öğrencilerin görüşlerinde dikkate çeken bir durum ise ödevlerin bir zorunluluk olarak görülmesidir. Bunda ödevlere dönütlerin verilmesinde ve öğrencilerin kendilerini ders karşı sorumlu hissetmelerinin rolünün olduğu düşünülmektedir. Ayrıca ders öğretmenin görüşlerinden ödevlerin sınıf içerisinde bir tartışma ortamı oluşmasında etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Aşağıda Şekil 86'da ödevlere yönelik yönelik ilkelere yapılan eklemelere yer verilmiştir.




Şekil 86. Ödevlere eklenen ilkeler

Şekil 86'da görüldüğü gibi ödevler başlığı altına öğrenme, tartışma ve dönüt verme ilkelerinin de eklenmesine karar verilmiştir. Öğrencilerin görüşleri doğrultusunda ödevlerin pekiştirici, dersi tekrar, sınava hazırlama, düzenli çalışma ve sınav stresini alma yönündeki görüşleri öğrenme ilkesinde toplanmıştır. Öğrencilerin bu görüşleri sonucunda ödevleri hazırlarken daha önce belirlenen ilkelerin dışında kavramların öğretiminde pekiştirici bir rol oynayacak şekilde soruların seçilmesi ve kapsamının ona göre belirlenmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Ancak burada dikkat edilecek bir diğer husus ödevlerin öğrencilerin sınav öncesinde kendilerini hazır hissetmelerine katkı sağlayarak puan kaygısından kurtarmasıdır. Bu durumda araştırmada ortaya konulduğu üzere öğrencilerin sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermelerine katkı sağlamaktadır. Ödevler aynı zamanda sınıfta bir tartışma ortamının sağlanmasında önemli bir pay sahibidir. Ders öğretmenin de rehberliğinde ödev soruları üzerinden öğrenciler düşüncelerini birbirleriyle paylaşarak açıklamalarının yeterli olup olmadığı konusunda tartışıyordu. Bu durum hem öğrencilerin fikirlerini açıkça ifade etmelerini hem de ders öğretmeninin yanlış anlamaları belirleyerek bu yanlışlıkların düzeltilmesine olanak sağlamıştır. Dolayısıyla öğrencilerin fikirlerini ortaya koyması ve düşünme biçimlerinin gelişimi açısından ödevlerin sınıf içerisinde bir tartışılması ve üzerinde düşünülmüş sorulardan oluşmasının gerekliği olduğu düşünülmüştür. Tabi ki burada ders öğretmenin rolü de tartışma ortamının oluşmasında etkilidir. Öğrencilerin ödevleri yapmanın kendileri için bir sorumluluk ve zorunluluk olarak hissetmelerinde ödevlere verilen dönütlerinde etkisi olduğu düşünülmektedir. Ders öğretmeni ödevlere dönütler verilmesini öğrencileri motive edici bir durum olarak değerlendirmiştir. Bu bakımdan ele alındığında ödevlerin Harel'in (2000) gereklilik ve genellenebilirlik prensiplerini karşılamada önemli bir yerinin olduğu düşünülmektedir. Çünkü ödevler bir problem çözme aktivitesidir ve amacı diğer etkinliklerde olduğu gibi farklı dil ve gösterimlere yer vererek öğrencilerin en genel formda öğrenmelerini sağlamaktır. Bu bakımdan böyle bir aktivitenin öğrenciler tarafından bir zorunluluk olarak görülmesinin sağlanabilmesi için dönüt verme ödevler için bir ilke olarak belirlenmiştir.

Laboratuvar ortamında işlenen dersler grup çalışması şekliden yürütülmüştür. Grup çalışmasına yönelik olarak ilkeler belirlenirken öğretimin öğrenci merkezli, öğrencilerin birbirleriyle tartışmasına olanak kılan ve motivasyonlarını artıran şekilde belirlenmiştir. Öğretmen adalarının görüşleri grup çalışmalarının etkinliklerdeki rolleri bakımından sorumluluklarını ve özgüvenlerini artırdığı yönündedir. Ayrıca öğrenciler ders öğretmeninden önce danışabilecekleri ve fikir alışverişi yapabilecekleri birinin olmasını grup çalışmasının bir avantajı olarak değerlendirmiştir. Bu yönüyle grup çalışmalarında belirlenen tartışma ve motivasyon ilkelerinin karşılandığını söylemek mümkündür. Ayrıca öğrenciler grup çalışması şeklinde derslerin işlenişi eğlenceli bulmuş ve öğrenciler laboratuvar derslerini sınıf derslerine tercih etmişlerdir. Bu durum ders öğretmeni tarafından formalizm öğrencileri ne derece yorduğunun bir göstergesi olarak yorumlanmıştır. Bu bakımdan ele alındığında grup çalışmalarının formalizm zorluğuna karşı öğrencileri motive ettiğini söylemek mümkündür.

### 5. 2. Öğrencilerin Düşünme Biçimlerine Yönelik Tartışma

Öğrencilerin başlangıç testlerine verdikleri cevaplar daha önceden hazırlanmış bir rubrik aracığıyla analiz edilerek sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimlerine göre kodlar atanmıştır. Buna göre BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %54,44, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %41,11 ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %4,44 olarak belirlenmiştir. BT2'de ise sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %40,90, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %34,09 ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kod yüzdesi %25 olarak belirlenmiştir. Ortaya çıkan sonuçlara göre BT2'de BT1'e oranla sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimleriyle ilişkili cevap sayılarında azalma, analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevap sayılarında ise artma gerçekleşmiştir. Detaylı olarak incelendiğinde BT1 ve BT2 arasında toplam 25 cevapta kod değişikliğine gidilmiş bu değişikliklerin 23'ünde kodlarla birlikte düşünme biçimleri de değişmiştir. Düşünme biçimlerinde değişikliklerin olduğu kodlara bakıldığında 12'si sentetik-geometrik düşünme biçiminden 6'sı analitik-aritmetik düşünme biçiminden olmak üzere toplam 18 kodda analitik-yapısal düşünme biçimine geçiş olmuştur. 5 kodda sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimleri arasında geçişler olmuştur. Dikkat edilmesi gereken durumlardan biri kodlardaki değişikliklerin büyük çoğunluğunun analitik-yapısal düşünme biçimi lehine gerçekleşmiş olmasıdır. Bir diğeri ise analitik-yapısal düşünme biçimine geçişlerin en fazla olduğu düşünme biçiminin sentetik-geometrik düşünme biçimi olmasıdır. BT1 ve BT2 testleri arasında oluşan bu durumu yorumlamadan önce ilk olarak düşünme biçimlerinde geçişlerin olduğu sorularda ne tür değişiklikler olduğuna bakmak faydalı olacaktır.

Vektör kavramının tanımıyla ilgili başlangıç testinin birinci sorusuna BT1'de 11 öğrenciden 10 tanesi sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap verirken bir öğrenci de analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. BT2'de öğrencilerin 1. soruya verdikleri cevapların tümü değişikliğe uğrayarak analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkilendirilmiştir. Ayrıca birinci soru bütün cevap türlerinin değiştiği ve analitik-yapısal olduğu tek sorudur. Başlangıç testinin vektörlerde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle ilgili 5. sorusunda 6 cevapta düşünme biçimleri arasında geçişler olmuştur. BT1'de sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap verilen dört soruya BT2'de üçü analitik-yapısal biri analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili olacak şekilde cevap verilmiştir. Uygulama öncesinde vektör kavramıyla ilgili öğrencilerin anlamaları ağırlıklı olarak geometrik şekil ve betimlemelerle sınırlı iken uygulama sonrasında bu durum değişmiştir. Öğrenciler BT2'de vektörleri soyut matematiksel bir obje olarak değerlendirerek bir özellikler kümesinin elemanları olarak tanımlamıştır. Ayrıca ortaya çıkan bu sonuca paralel olarak yapılan klinik mülakatlarda da öğrencilerin vektör kavramıyla ilgili anlamalarının gelişimi ortaya konulmuştur. Elbette uygulama öncesinde çoğunluğu sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap verilen bir soruya uygulama sonrasında tümüyle analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verilmesi oldukça dikkat çekici bir durumdur. Doğal olarak tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişimine yardımcı bir etken olduğunu söylemek mümkündür.

Literatürde lineer cebir derslerinde teknoloji kullanımının ve görselleştirmeye yer verilmesinin öğrencilerin kavramsal anlamlarının gelişimine katkı sağladığını ortaya koyan birçok çalışma yer almaktadır (Dikovic, 2007; Dorier, 2002; Harel 2000; Pecuch-Herrero, 2000; Wu, 2004). Konyalıoğlu (2003), lineer cebir kavramlarının öğretiminde görselleştirme tekniklerinden yararlanmıştır. Bunu yaparken kavramların görsel temsillerinin yer aldığı etkinlikler düzenlemiş ve uygulamıştır. Araştırmada bilgisayar cebir sistemi veya dinamik geometri yazılımlarına yer verilmemiştir. Konyalıoğlu'na (2003) göre görselleştirme yaklaşımları öğrencilerin kavramları anlamasını kolaylaştırmış ve matematiğe karşı tutumlarında olumlu yönde değişikliğe yol açmıştır. Soylu (2005), lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında geometri yardımıyla somutlaştırma yönteminin öğrencilerin geleneksel yöntemlere göre daha başarılı oldukları iddia etmiştir. Bu araştırma da her ne kadar öğrencilerin vektör uzayları kavramlarına yönelik başarılarına odaklanılmamış olsa da başarının düşünme biçimlerinin gelişimiyle doğru orantılı olduğunu söylemek mümkündür. Bu çalışmada da özellikle çalışma yaprakları ve ödevlerde her bir kavramın görsel temsillerine yer verilmiş farklı olarak derslerde GeoGebra şablonları kullanılarak kavramlarla ilişkili geometrik yapı dinamik olarak incelenmiştir. Bununla birlikte dersler belirlenen tasarım ilkeleri doğrultusunda belli bir sistematiğe uygun bir şekilde uygulanmıştır. Görselleştirme yaklaşımları soyut bir içeriğin anlaşılmasında öğrenciler için somut bir model olarak kullanılabilir. Ancak somut modelin yapısının tam olarak anlaşılmasına imkân vermeyebilir. Dinamik matematik yazılımları sahip oldukları araçlarla (sürgü, iz açma, canlandırma, girdi alanı) hem kavramların dinamik yapısının net bir şekilde ortaya konulmasında hem de kavramların grafiksel ve cebirsel gösterimleri arasındaki bağlantının kurulmasında yardımcı olur. Pecuch-Herrero'nun (2000) lineer cebir öğretimi için cebirsel ifadeleri geometrik ifadelere bağlayan, özellikle sayısal örnekler, geometrik yorum ve cebirsel yorumu birleştiren bir yaklaşımın anlama ve öğrenmeyi daha iyi ilerleteceğini öne sürmüştür. Soylu (2005) da benzer bir şekilde öğrencilerin başarılarının nedenlerini soyut kavramlarla bu kavramlara karşılık gelen geometrik modeller arasında bağ kurularak içeriğin sunulması ve bu kavramların cebirsel ve geometrik ilişkileri üzerinde durulması olarak belirtmiştir. Bu bakımdan ele alındığında GeoGebra şablonları ve çalışma yapraklarının farklı gösterimlerin ilişkilendirilmesinde ve soyut kavramların anlaşılması öncesinde sağlam sezgisel bir anlama oluşturulmasında etkili olduğunu söylemek mümkündür. Kavramların geometrik ve cebirsel gösterimleri arasındaki ilişkilinin kurulması önemlidir. Çünkü cebirsel işlemler hem analitik-aritmetik hem de analitik-yapısal düşünme biçimlerinin ortak özellikleridir (Sierpinska, 2000). Bu nedenle somuttan soyuta doğru bir öğretim ilkesi benimsenen bir modelde dinamik matematik yazılımlarının rolü oldukça önemlidir.

Ancak gerek araştırma kapsamında ilk iki döngüden elde edilen bulgular gerekse literatürde yer alan bazı çalışmalar (Donevska-Todorova, 2018; Pecuch-Herrero, 2000) öğretim stratejileriyle birlikte yapıldığında teknolojinin öğrencilerin başarılarını artırdığını ortaya koymuştur. Öğrencilerin gelişiminde süreç içerisinde yapılan düzenlemelerin etkisinin olduğu görülmüştür. İlk iki döngüden elde edilen bulgular analiz edildiğinde birçok öğrencinin vektör kavramıyla ilgili hala geometrik betimlemelerden veya çizimlerden yararlandıkları, vektör kavramıyla ilgili yapısal nitelikte düşünmeye sahip olmadıkları ortaya çıkmıştır. Alan notları ve video kayıtları analiz edilerek vektör ve vektör uzayı kavramlarına yönelik çalışma yapraklarında düzenlemelere gidilmiş, $R^{2}$'nin vektör uzay olduğuna yönelik bir etkinlik ve GeoGebra şablonu hazırlanmıştır. Bununla birlikte üçüncü döngüde her bir kavramda olduğu gibi vektör ve vektör uzayı kavramlarına yönelik olarak öğrencilere ödevler verilmiştir. Çalışma yaprakları, etkinlik ve ödevlerde tasarım ilkelerine uygun olarak düzenlemeler ve eklemeler yapılmıştır. Yapılan bu düzenlemelerle birlikte teknoloji destekli zenginleştirilmiş öğrenme ortamı uygulanmış ve öğrencilerin anlamalarındaki gelişim net bir şekilde ortaya çıkmıştır. Pecuch-Herrero (2000) eleştirel düşünmeyi destekleyen ve öğrenciler ile öğretmenler arasındaki iletişimi artıran öğretim stratejileriyle birlikte yapıldığında teknolojiyi öğretime dâhil etmenin öğrencilerin başarılarını artırdığını belirtmiştir. Pecuch-Herrero (2000) öğrenme ortamının bütünlüğünün yanında öğrenci ve öğretmelerin de süreç içerisindeki etkileşimlerine dikkat çekmiştir. Ders öğretmeni ve öğrencilerin öğrenme ortamına yönelik görüşlerinde Pecuch-Herrero'nun (2000) elde ettiği sonucu destekleyici açıklamalar ortaya çıkmıştır. Bu durum ileride görüşler kısmında daha ayrıntılı bir şekilde tartışılacaktır. Donevska-Todorova (2018) kuramsal çerçevesi Hillel'in temsil dilleri ve Sierpinska'nın düşünme biçimlerinden oluşan çalışmasında lineer cebirin aksiyom, teorem, tanım ve yapılardan oluşan soyut doğasının öğrenilmesi ve anlaşılmasının basit bir BCS veya DGY kullanımıyla kolay bir hale gelmediğini ifade etmiştir. Donevska-Todorova (2018) özellikle, özel olarak tasarlanmış teknolojik temelli ortamların, diller ve düşünme biçimleri arasında daha kolay ve daha etkili geçişlere olanak sağlayabileceği ve lineer cebirdeki kavramların anlaşılması, temsil edilmesi ve tanımlanması için öğrenci yeterliliklerinin gelişimini kolaylaştırabileceği sonucuna varmıştır. Donevska-Todorova (2018) BCS ve DGY'nin gelişimine katkı sağladığını yeterlilikleri argümanlar ve ispatlar ileriye sürmek, matematiksel kavramların sunumu, matematiksel iletişim kurma ve matematiğin sembolleri, formal ve teknik elemanları ile etkileşim içinde olma olarak belirtmiştir. Pecuch-Herrero (2000) ve Donevska-Todorova'nın (2000) ortaya koyduğu sonuçlara paralel olarak bu çalışmada da öğretim stratejileriyle kullanıldığında teknolojinin öğrencilerin kavramsal anlamalarını geliştirdiğini söylemek mümkündür. Aslında bu noktada teknolojinin lineer cebir derslerindeki (ya da diğer dersler içinde söylenebilir) yeriyle ilgili bakış açımızda bazı değişiklikler yapmamız gerekebilir. Madem ki teknoloji lineer cebir dersleri için önemli bir unsur olarak görülüyor öyleyse teknolojiyi içeriği desteklemek için değil de içeriği uygun stratejilerle birlikte teknolojiyi desteklemek için geliştirebiliriz.

Başlangıç testinin ters matris kavramıyla ilgili altıncı sorusuna BT1'de 11 öğrenciden 7 tanesi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap verirken 4 öğrenci de analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. BT2'de ise 3 öğrenci a analitik-aritmetik düşünme biçimiyle 8 öğrenci de analitik-yapısal düşünme biçimiyle soruya cevap vermiştir. Ö3, Ö6, Ö7 ve Ö11 koldu öğrencileri altıncı soruda analitik-aritmetik düşünme biçiminden analitik-yapısal düşünme biçimine geçiş yapan öğrencilerdir. Ayrıca BT1'de altıncı soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap veren Ö2, Ö4, Ö5 ve Ö8 kodlu öğrenciler BT2'de de yine aynı düşünme biçimini sergilemiştir. Düşünme biçimleri arasındaki geçişlerin en çok gerçekleştiği ikinci durum analitik-aritmetik düşünme biçiminden analitik-yapısal düşünme biçimine geçişlerin olduğu durumdur. Literatürde öğrencilerin anlamlarının işlemsel olduğuna dair çalışmalar vardır ve bu durum final testinden elde edilen bulgularla birlikte tartışılacaktır. Ancak altıncı soruda dikkat çeken farklı bir durum söz konusudur. Uygulama öncesinde öğrencilerin düşünme biçimlerini belirleyebilmek için hazırlanan başlangıç testi soruları lineer cebirin ilk dönem konularından oluşmaktadır. Yukarıda da belirtildiği üzere başlangıç testinin altıncı sorusu ters matris kavramıyla ilgili bir sorudur. Araştırmada vektör uzayları ile ilgili temel kavramların (alt uzay, lineer birleşim, lineer bağımsızlık, germe, baz) öğretimine odaklanılmış olmasına rağmen uygulama sonrasından BT2'nin ters matris kavramıyla ilgili sorusuna dört öğrenci analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Başka bir deyişle matris kavramıyla ilgili bir soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren öğrenciler farklı kavramlara odaklanılan bir öğrenme ortamına maruz kaldıktan sonra aynı soruya bu sefer analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Çok açıktır ki altıncı soruya bu şekilde cevap veren öğrenciler ters matris kavramıyla hem analitik-aritmetik hem de analitik-yapısal düşünme biçimlerini sergileyecek anlamalara sahiptirler. Bunun nedeni literatürde de ortaya konulduğu üzere öğrencilerin uygulama öncesinde işlemsel (Stewart ve Thomas, 2010) anlamaya güvenmeye daha eğimli olduklarından kaynaklanmış olabilir. Bunu eğilim nedeni ise birkaç farklı şekilde açıklanabilir öyle ki; i) öğrencilerin de hesaplama teknikleri daha baskındır, ii) düşünme alışkanlıklarından kaynaklanan bir durumdur, iii) sınav stresi veya not kaygısından kaynaklanan bir durumdur. Öğrencilerle yapılan görüşmeler, alan notları, başlangıç ve final testlerinden edilen bulgular ışığında bu durumu açıklamak mümkün olacaktır. Öğrencilerle yapılan görüşmeler özellikle ödevlerin sınav stresini alarak analitik-yapısal düşünmenin sergilenmesine yardımcı olduğuna dair bazı bulgular sunmuştur. Bununla birlikte teknoloji destekli zenginleştirilmiş öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme alışkanlıklarını değiştirmesi ve analitik-yapısal düşünme biçiminin baskın düşünme biçimini olmasına destek olması göz ardı edilemeyecek durumlardır. Çünkü öğrenme ortamında kavramların farklı temsillerine yer verilen, öğrencileri farklı dilleri öğrenmeye ve kullanmaya teşvik eden, öğrencilerin farklı düşünme biçimlerini sergileyebilecekleri eğitimsel aktivitelere yer verilmiş ve teknolojiyle birlikte uygulanmıştır. Sonuç olarak ortaya çıkan bu durum BT1, BT2, FT ile öğretmen ve ders öğretmeniyle yapılan görüşmelerden elde edilen bulgularla birlikte ayrıntı bir şekilde tartışılacaktır.

BT1 testinden elde edilen bulgular öğrencilerin anlamalarının genellikle geometrik ve analitik-aritmetik düzeyde olduğunu göstermiştir. Literatürde öğrencilerin çoğunlukla işlemsel bilgilerini geliştirdiklerini (Hillel ve Sierpinska, 1994; Alves Dias ve Artigue, 1995; Dorier vd., 2000; Sierpinska, 2000; Hillel, 2000; Harel, 2000; Stewart ve Thomas, 2008) veya sezgisel anlamalarına güvenmeyi tercih ettiklerini (Medina, 2000; Tabaghi ve Sinclair 2013) ortaya koyan çalışmalar vardır. Yedi öğrenci BT1'de yer alan sorulardan hiçbirine analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermemiştir. Her ne kadar bu yedi öğrenci cevaplarında hem sentetik-geometrik hem de analitik-aritmetik düşünme biçimlerini sergilemiş olsalar da özellikle Ö1, Ö3, Ö6 ve Ö10 kodlu öğrencilerin de analitik-aritmetik düşünme biçiminin daha ağırlıklı olduğunu söylemek mümkündür. Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler BT1'de hem sentetik-geometrik hem de analitik-aritmetik düşünme biçimleriyle sorulara cevap verirken diğer öğrencilerden farklı olarak Ö2, Ö4, Ö5 ve Ö8 kodlu öğrenciler altıncı soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. BT1 testinden elde edilen bulguların analizinden literatürdeki sonuçlara benzer bir durumun söz konusunu olduğu görülmektedir. Başlangıç testinde yer alan her sorunun analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili bir cevabı yoktur. Örneğin testin ikinci, üçüncü, dördüncü ve sekizinci sorularına verilen cevaplar üçüncü soruda analitik-aritmetik diğer sorularda ise çoğunlukla sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Öğrenciler başlangıç testinde yer alan bu sorulara her iki testte de uygun düşünme biçimleriyle cevap vermiştir. BT2'den elde edilen bulgulara bakıldığında ilk olarak göze çarpan durum öğrencilerin en az bir kere analitik-yapısal bir cevap vermiş olmalarıdır. Ö2, Ö6 ve Ö11 kodlu öğrenciler 3 soruya, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7 ve Ö8 kodlu öğrenciler 2 soruya, Ö1, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler 1 soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevap vermiştir. Öğrencilerin BT1 ve BT2 verdikleri cevaplar arasında düşünme biçimleri bağlamında belirgin farklılıklar oluşmuştur. Özellikle Ö6 kodlu öğrenci BT1 de soruların tamamına yakınına analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermişken BT2'de hem uygun düşünme biçimlerini hem de analitik-yapısal düşünme biçimini kullanarak sorulara cevap vermiştir.

Öğrencilerin final testlerine verdikleri cevaplar daha önceden hazırlanmış bir rubrik aracığıyla analiz edilerek sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimlerine göre kodlar atanmıştır. Öğrencilerin FT'ye verdikleri cevaplara toplam 109 adet kod atanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kodların oranı %55,45, analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodların oranı %44,55 olarak belirlenmiştir. Atanan kodlarla ilgili en dikkat çekici durum öğrencilerin cevaplarına atanan kodlardan hiçbiri sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili değildir. Ayrıca öğrenciler ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda öğrencilerin analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap verdikleri bazı sorularla ilgili analitik-yapısal düzeyde anlamalara sahip oldukları tespit edilmiş ve kodlarda değişikliğe gidilmiştir. Buna göre klinik mülakatlar sonucunda analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili kodların oranı %67,88 ve analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili kodların oranı %32,12 olarak düzenlenmiştir. Elde edilen bu genel tablo öğrencilerin çoğunlukla analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Ancak bu durum vektör uzayları kavramlarının hepsi için aynı oranda bir başarı olduğu anlamına gelmemektedir. Örneğin vektör uzayı ve alt uzay kavramları öğrencilerin en yüksek oranda analitik-yapısal nitelikte cevap verdiği kavramlar iken lineer bağımsızlık kavramında bu oran biraz daha düşüktür. Bununla birlikte genel tablo bize öğrencilerin sentetik-geometrik düşünme biçimiyle sorulara cevap vermediklerini göstermektedir. Final testinde yer alan çoğu soruda geometrik nesneleri ve betimlemeleri kullanarak sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap vermek mümkündür. Bu durum daha önceki döngülerde bazı öğrencilerin alt uzay, lineer bağımsızlık ve taban kavramlarıyla ilişkili sorularda geometrik çizimlere yer vermesiyle ortaya çıkmıştır. Ancak araştırmanın üçüncü ve son döngüsünde her ne kadar sentetik-geometrik çizimlere ve betimlemelere yer verilmemiş olmamasına rağmen öğrencilerin sezgisel anlamalara sahip olduğu ve bu anlamalar üzerinden analitik-yapısal nitelikte cevaplar verdikleri klinik mülakatlar üzerinden gösterilmiştir. Bu bölümde final testinden elde edilen bulgular kavram odaklı olarak tartışılacaktır.

Final testinin vektör uzay kavramına yönelik ilk sorusuna verilen cevapların 6 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö9, Ö11) tanesi analitik-yapısal 5 (Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö10) tanesi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili bulunmuştur. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren Ö4 kodlu öğrenci cevabında yeterli gerekçelendirmelere yer vermemiş diğer öğrenciler ise bazı aksiyomların gösteriminde tanımlı işlemlerin yerine standart işlemlere göre çözümler yapmıştırlar. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar sonucunda soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren öğrencilerden dördünün (Ö4, Ö6, Ö7, Ö10) vektör uzayı kavramının yapısını bildikleri ve ödevlerde yer alan sorularda en genel formda düşünerek verilen kümelere uygun vektörlerin seçildiği ve bu vektörler üzerinden gerekçelendirerek işlemlerin yapıldığı ortaya çıkmıştır. Anlaşılacağı üzere öğrenciler vektör uzayı kavramıyla ilgili kavramsal düzeyde anlamalara sahip olmasına rağmen bazı vektör uzayı aksiyomlarının gösterimde tanımlanan işlemlere göre çözüm yapamamış veya yapmakta zorlanmış bunun yerine bilinen standart toplam ve skalerle çarpma işlemlerine göre çözüm sunmuşlardır. Örnek verilecek olursa toplama ve skalerle çarpma işlemi verilen soruda sırasıyla “$\boldsymbol{x+y=x.y}$”, “$\boldsymbol{k.x=x^k}$” olarak tanımlanmış fakat $\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ özelliği gösterilirken tanımlanan işlemler ya kısmen kullanılmış ya da standart işlemlere göre yapılmıştır. Bu durum öğrencilerin cebirsel işlemleri yürütmekte zorlandıkları anlamına gelebilir. Literatürde yer alan bazı çalışmalar (Hillel, 2000; Britton ve Henderson, 2009; Dorier, 2000) öğrencilerin daha önceden ispat, mantık ve küme teorileri ile ilgili deneyimsizliklerinin lineer cebir öğretiminde zorluk teşkil ettiğini ortaya koymuştur. Burada literatürden farklı olarak öğrencilerin cebirsel işlemlerdeki eksikliklerinin bir zorluk olarak ortaya çıktığını söylemek mümkündür. Öğrencilerle yapılan mülakatlarda ve BT ve FT testlerinden elde edilen bulgular öğrencilerin denklem sistemlerinin çözümü ve yorumlanmasına ilişkin zorluklara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Ancak öğrencilerin vektör uzayı ödevinde yer alan fonksiyonlardan oluşan bir kümeye yönelik verdiği cevaplar literatür ile paralellik göstermektedir. Britton ve Henderson (2009) vektör uzayının elemanı olarak fonksiyonlarla ilgili öğrencilerin zorluklara sahip olduklarını belirtmiştir. Yapılan çalışmada öğrenciler toplama ve skalerle çarpma ile ilgili olarak sorularda verilen kümelerin kapalılığını göstermekle ilgili zorluklar yaşadıkları ve bu aksiyomları genel vektörler yerine belli vektörler seçerek göstermeye çalıştıkları ortaya konulmuştur. Bu çalışma kapsamında vektör uzayı konusuna yönelik ödevde öğrencilere elemanları fonksiyon olan bir küme verilmiştir. Öğrenciler elemanları fonksiyon olan kümeden f(x) ve g(x) fonksiyonları gibi elemanlar seçmesi gerekirken f(x) ve f(y) şeklinde elemanlar belirleyerek çözüm yapmışlardır. Ancak öğrenciler mülakatlarda bu durumun farkına varmış ve uygun vektörler üzerinden aksiyomları tekrar göstermiştir. Her ne kadar Britton ve Henderson’un (2009) ortaya koyduğu zorlukların tamamıyla karşılaşılmasa da öğrenciler fonksiyonlardan oluşan bir kümeden vektörler belirlerken zorluk yaşamışlardır. Sonuç olarak Ö8 koldu öğrencinin dışında bütün öğrencilerin vektör uzay kavramına yönelik analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Vektör uzayı kavramı öğrencilerin en büyük oranda analitik-yapısal düşünme biçimini sergiledikleri kavramdır.

Alt uzay kavramına yönelik final testinde öğrencilere biri cebirsel diğeri geometrik dilde olmak üzere iki adet soru yöneltilmiştir. Final testi ve klinik mülakatların analizinden elde edilen sonuçlar göre cebirsel dille yöneltilen soruya verilen cevapların 10 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11) tanesi analitik-yapısal, 1 (Ö10) tanesi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili, geometrik dille yöneltilen soruya verilen cevapların 8 (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8) tane analitik-yapısal 3 (Ö9, Ö10, Ö11) tanesi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Ö1 ve Ö8 kodlu öğrenciler final testinde cebirsel modda alt uzayı sorusuna cevap verirken çözümleriyle ilgili gerekçelendirmelere yer vermemiştir. Her iki öğrenci de kendileriyle yapılan klinik mülakatlarda alt uzay alt küme, toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalılık özelliklerini ve bu özelliklerin vektör uzayı aksiyomlarıyla olan ilişkisini ortaya koymuştur. İki öğrencinin de derste uygulanan alt uzay etkinliğini hatırlatarak açıklamalarını yapmış olması dikkat çekici bir durumdur. Öğrenciler zaman zaman klinik mülakatlarda derslere atıfta bulunarak uygulanan etkinlikler üzerinden açıklamalarını desteklemeye çalışmıştır. Bu durum öğrenme ortamının öğrenciler üzerindeki etkisini ortaya koymaktadır. Bununla birlikte geometrik dille $R^3$'te orijinden geçmeyen bir düzlemin alt uzay olma durumunun incelendiği soruda hiçbir öğrenci vektörel çizimler yapmamış bunun yerine düzlemin geometrik konumundan hareketle birim elemanın durumuna bakmıştır. Öğrenciler vektör uzayının tanımından yararlanarak analitik-yapısal düşünme biçimiyle soruya cevap vermiştir. Yalnızca üç öğrenci düzlemin cebirsel denklemini yazarak analitik-aritmetik düşünme biçimiyle soruya cevap vermiştir. Bunun dışında Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler alt uzay kavramının ilk sorusuna analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermelerine karşın ikinci soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Bu durumdan hareketle aynı kavramın farklı formlardaki durumları için öğrencilerin farklı düşünme biçimleri sergileyebilecekleri sonucuna varılabilir.

Wawro, Sweeney ve Rabin (2011) öğrencilerin alt uzay kavramına yönelik sahip oldukları kavram imajlarına odaklandıkları çalışmalarında öğrencilerin bir alt uzayın ne olduğunu açıklamak için sık sık geometrik kavramları kullandıklarını ifade etmişlerdir. Wawro ve diğerlerine (2011) göre öğrenciler üç boyuttan daha büyük boyutlarda çalıştıklarında bu geometrik kavramların kullanımı problemli bir hal almaktadır. Çünkü öğrenciler yüksek boyutlu uzayların, $R^6$ gibi, bir alt uzayını ifade ederken doğru, düzlem, küp ve küre gibi geometrik kavramları kullanmışlardır. Bu çalışmada öğrencilerin final testinde ve ödevlerinde alt uzay kavramına yönelik sorulara verdikleri cevaplarda alt uzayı tanımlarken geometri kavramlarını kullandığına dair bir bulguya rastlanmamıştır. Ancak daha önceki döngülerde $R^3$'ün bir kümesinin alt uzay olma durumu orijinden geçen bir doğru ile ilişkilendirilmiş veya orjinden geçmeyen bir düzlemin alt uzay olup olmadığının incelendiği durumlarda ise vektörel çizimlerden yararlanılmıştır. Tabii ki tasarım araştırması şeklinde yürütülen bu çalışmada problem oluşturacak şekilde geometrik kavramların alt uzay kavramıyla ilişkilendirilmesinin ortadan kaldırılması için bazı düzenlemeler yapılmıştır. Aslında düzenlemeler sadece alt uzay kavramına yönelik değil bütün etkinlikler için geçerli bir durumdur ancak alt uzay kavramına yönelik etkinliklerde daha geniş çapta değişikliklere gidilmiştir. Öncelikle $R^{2}$'de dört farklı problem durumunun her biri için bir GeoGebra şablonu oluşturulmuş ve bu problemler üzerinden vektör uzay olma şartları kontrol edilerek alt uzay olma aksiyomlarının öğrenciler tarafından keşfedilmesine olanak sağlanmıştır. Bununla birlikte ödevlerde alt uzay kavramının geometrik, cebirsel ve soyut olmak üzere farklı gösterimlerine yer verilmiştir. Böylelikle $R^2$ ve $R^3$'teki özelliklerin $R^n$'ye genişletebilmesi ve daha sonra matris ve fonksiyonlardan oluşan kümelere genellemesi amaçlanmıştır. Elde edilen bulgular öğrencilerin alt uzay kavramına yönelik formal tanımı özümsediklerini ve doğru sezgisel anlamalara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Sonuç olarak alt uzay kavramının düzlemde, uzayda, $R^{n}$'de ve matris ve fonksiyonlardan oluşan soyut vektör uzaylarında ayrı ayrı incelenmesiyle Wawro ve diğerlerinin (2011) bahsettiği durumun gerçekleşmesinin engellendiğini söylemek mümkündür.

Final testinin germe kavramına yönelik üçüncü sorusuna verilen cevapların 5 (Ö3, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9) tanesi analitik-yapısal düşünme biçimi 6 (Ö1, Ö2, Ö4, Ö7, Ö10, Ö11) tanesi analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Germe kavramına yönelik soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren öğrencilerden Ö2, Ö4, Ö7 ve Ö10 kodlu öğrenciler cevaplarında yeterli düzeyde gerekçelendirmelere veya açıklamalara yer vermemiştir. Direk olarak $P_2(R)$ kümesinden $ax^2+bx+c$ şeklinde genel bir vektör alarak verilen kümenin bir lineer birleşimi olup olmadığına bakmışlardır. Öğrencilerin cevapları lineer birleşim germe kavramları arasındaki ilişkiyi ortaya koyan açıklama ve gösterimleri içermemektedir. Ö1 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise verilen kümenin lineer bağımsızlığını incelemeye çalışmıştır. Germe kavramına yönelik soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren öğrencilerle yapılan klinik mülakatlarda Ö2 ve Ö11 kodlu öğrenciler lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki ilişkiyi ortaya koyarak germeyi bir vektör kümesinin tüm lineer birleşimlerinin kümesi olarak tanımlamıştır. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar sonucunda 7 (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9, Ö11) öğrencinin germe kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip oldukları sonucuna varılmıştır. Soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren diğer öğrencilerle yapılan mülakatlarda germe kavramının lineer birleşim kavramıyla ilişkisini net bir şekilde ortaya koyamamış ve anlamalarının daha çok işlemsel olduğu ortaya çıkmıştır.

Literatürde germe kavramıyla ilgili öğrencilerin zorluklara sahip olduklarını ortaya koyan çalışmalar vardır (Carlson, 1993; Nardi, 1997; Medina, 2000; Birinci, 2015). Carlson (1993), alt vektör uzayları, germe ve lineer bağımsızlık konularına geldiklerinde öğrencilerinin zihinlerinin karıştığını ifade etmiştir. Nardi (1997), öğrencilerin ağırlıklı olarak $R^2$ den görsel imgelere güvendiklerini ifade etmiş ve sınırlı görselleştirmenin anlamayı engellediği varsayımında bulunmuştur. Medina (2000), öğrenciler için lineer bağımsızlık kavramını anlamanın germe kavramını anlamaktan daha kolay olduğu ortaya koymuş ve buna gerekçe olarak lineer bağımsızlık kavramının $R^2$ de geometrik bir modele sahipken germe kavramının böyle bir modele sahip olmamasını göstermiştir. Medina (2000)'ya göre öğrencilerin lineer birleşim konusundaki zayıf anlamaları geren kümelerle ilgili zayıf kavram imajlarının oluşmasına bir neden olmuştur. Nardi (1997) ve Medina'nın (2000) çalışmaları aslında germe kavramıyla ilgili öğrencilerin sezgisel anlamlarını güçlendirecek ve daha geniş kapsamlı olacak şekilde $R^2$ ve $R^3$ te görselleştirme yaklaşımlarının kullanıldığı derslere ihtiyaç olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki yakın ilişkide göz önüne alındığında lineer birleşim kavramıyla ilgili güçlü anlamalara sahip olmak öğrencilerin germe kavramını anlamada daha başarılı olmalarına yardımcı olacaktır. Nitekim Stewart ve Thomas (2010) deney ve kontrol gruplu çalışmasında çalışmalarında geometri, somutlaştırma ve kavramlarla ilişkili öğrenmeye odaklandığı deney grubundaki öğrencilerin bir vektör kümesinin olası bütün lineer birleşimleri ile germeyi ilişkilendirmede geleneksel sınıfa göre daha başarılı oldukları ortaya koymuştur. Medina'nın (2000) bulgularına paralel olarak Stewart ve Thomas (2010) lineer birleşim kavramının germe ve taban kavramlarıyla olan yakın ilişkisinden dolayı lineer cebir derslerinde lineer birleşim kavramına daha fazla zaman ayrılmasını gerektiğini ifade etmiştir. Elbette literatürde yer alan çalışmalardan ortaya çıkan sonuçlar ve öneriler göz dikkate alınarak diğer kavramlarda olduğu gibi germe kavramına yönelik etkinlikler hazırlanmış ve uygulanmıştır. Özellikle lineer birleşimin kavramının önemi açısından etkinliklerde düzlem ve uzayda vektörlerin birçok farklı durumu üzerinde lineer birleşimleri üzerinde durulmuş ve bu durumların hepsi somut olarak GeoGebra şablonlarında çalışılmıştır. Klinik mülakatlardan elde edilen veriler öğrencilerin yalnızca görsel imgelere güvenmediklerini germe kavramıyla ilgili öğrencilerin hem sezgisel hem de kavramsal anlamalara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Örneğin klinik mülakatlarda bütün öğrencilerin $R^3$ te birbirinin katı olmayan iki doğrunun bir düzlemi gerdiği, birbirinin katı olarak yazılamayan iki doğrunun ise $R^3$ te bir doğruyu gerdiği fikrine sahip olduğu, lineer birleşim ve germe ilişkisini sezgisel olarak anladıkları sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte öğrenciler ödevlerde yer alan sorularda sıralı n'liler, matrisler ve fonksiyonlardan oluşan kümelerin gerdikleri alt uzayları belirlemede başarılı olmuştur. Nitekim final sorusunun germe kavramıyla ilgili üçüncü sorusunda polinomlardan oluşan bir kümenin gerdiği yerle ilgili cebirsel formda bir soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin germe kavramına yönelik soruya verdikleri cevapların analizinden yüksek bir başarı oranına sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bu sonuç Stewart ve Thomas'ın (2010) araştırmalarında ortaya çıkan sonuca paralel bir sonuç olsa da bu araştırmada öğrencilerin başarılarından ziyade düşünme biçimlerine odaklanılmıştır. Bu bakımdan ele alındığında 7 öğrencinin germe kavramıyla ilgili analitik-yapısal, 4 öğrencinin ise analitik-aritmetik düşünme biçimine sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemiş olmalarında uygulanan yöntemin etkili olduğu düşünülmektedir. Öğrenme ortamında özellikle öğrencilerin öğrenmelerini kısıtlanmasına neden olacak belli somut modeller üzerinde çalışılmamış $R^2$ ve $R^3$ teki birçok durum belirli bir sistematik takip edilerek incelenmiştir. Gerek yurt içi gerekse yurt dışında lineer cebir öğretiminde yapılan çalışmalar bir taraftan somutlaştırmanın etkisini ortaya koyarken diğer taraftan bu konuda bazı uyarılar yapmıştır. Soylu'ya (2005) göre geometri yardımıyla somutlaştırma yapılırken uygun bir plan doğrultusunda geometrik sunum yapılmalıdır. Benzer şekilde Harel (1999) geometri kullanımını dikkatli ve zamansız olmaması gerektiğine değinmiştir. Aksi takdirde öğrencilerin öğrenmelerinin geometrik bilgileriyle sınırlı kalması ve düşünme biçimlerinin gelişiminin bu durumdan olumsuz etkileneceğini söylemek mümkündür.

Germe kavramıyla ilgili ortaya çıkan bir diğer sonuç ise öğrencilerle öğrenme ortamı üzerine yapılan görüşmelerde ortaya çıkmıştır. Öğrenciler etkinliklerden bahsederken en çok germe kavramına atıfta bulunmuşlardır. Özellikle öğrenciler $R^3$'te vektör kümelerinin doğru, düzlem ve uzayı gerdiği GeoGebra şablonları üzerinden örnekler vererek kavramla ilgili anlamaları hakkında görüşler bildirmiştir. Örneğin Ö9 kodlu öğrenci sürgü ve iz aç komutlarını kullanmanın vektörlerin gerdikleri yerlerin geometrik olarak görmeyi son derece kolaylaştırdığını ve anlaşılır hale getirdiğini belirtmiştir. Özellikle sürgü, girdi alanı ve iz aç komutları bütün kavramlara yönelik olarak hazırlanan GeoGebra şablonlarında kullanılmıştır. Ancak germe kavramına yönelik hazırlanan şablonlarda sürgü ve iz aç komutlarına kavramında doğası gereği daha sık yer verilmiştir. Dolayısıyla lineer birleşim ve germe kavramlarına yönelik etkinlik yazılımının dinamik yapısının en çok hissedildiği etkinliklerden biri olmuştur. Bu nedenle özellikle GeoGebra yazılımının sürgü, girdi alanı, canlandırma ve iz aç komutlarının kavramlarının somutlaştırılmasında etkili birer araç olduğunu söylemek mümkündür.

Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına yönelik final testinin dördüncü sorusunda öğrencilere soyut dilde olmak üzere birbiriyle bağlantılı iki adet soru yöneltilmiştir. Final testinde soruya verilen cevaplar ve klinik mülakatların analizinden elde edilen sonuçlar göre birinci soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap veren 5 öğrenci (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7) diğer soruya da analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Yalnızca ilk soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren Ö4 kodlu öğrenci ikinci soruda analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Sonuç olarak her lineer bağımlılık/bağımsızlık sorusuna verilen cevapların %50 sini analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili, diğer %50'si ise analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar oluşturmuştur. Analitik-yapısal düşünme biçimiyle verilen cevaplarda kavramlar arasındaki ilişkiye odaklanılmış ve analitik-aritmetik ve cebirsel işlemlere yer verilmemiştir. Öğrencilerin verilen kümenin lineer bağımsızlığını araştırırken lineer birleşim kavramıyla lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı arasındaki ilişkiden yararlanmıştır. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle verilen cevaplar lineer bağımlılık ve lineer birleşim kavramlarının formal tanımları kullanılarak vektör kümesinin lineer bağımsızlığını hesaplamaya odaklı işlemleri içermektedir. Ancak öğrencilerin cebirsel işlemleri yaparken kullandıkları harf sembollerini uygun olmayan bir şekilde kullanmış ve yorumlamıştır. Harf sembollerinin uygun olmayan bir şekilde yorumlanması hem Türkiye'de yapılan hem de uluslararası çalışmalarda ortaya çıkan bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır. Britton ve Henderson (2009), alt uzay kavramıyla ilgili öğrenci zorluklarını inceledikleri araştırmalarında öğrencilerin, ispat ve mantık ile ilgili harf sembollerinin kullanımını yorumlarken ve anlarken zorluklarla karşılaştıklarını gözlemlemiştir. Çelik (2015), lineer bağımlı/bağımsız vektörlerle ilgili problemleri çözerken lisans öğrencilerinin düşünme biçimlerini araştırmış ve benzer bulgulara ulaşmıştır. Çelik (2015) bu durumun lokal bir zorluk olmadığını ve öğrencilerin başarılarını olumsuz yönde etkileyen bir durum olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca önceki çalışmalardan elde edilen bulgular (Küchemann 1998; Sfard ve Linchevski 1994; Stacey ve MacGregor 2000), farklı seviyelerdeki öğrencilerin harf sembolleri kullanma ve yorumlamada büyük zorluklar yaşadıklarını ve bu zorlukların cebirsel ifadeyi, işlemleri ve problem çözme süreçlerini yorumlamada hatalara neden olduğunu göstermiştir.

Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına yönelik elde edilen bulgular daha önceki çalışmalarla karşılaştırıldığında öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verdiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca daha önceki döngülerde sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili cevaplarla karşılaşılmış olsa da üçüncü döngüde öğrenciler lineer bağımlılık/bağımsızlık sorusuna sentetik-geometrik düşünme biçimiyle cevap vermemiştir. Çelik (2015) çalışmasında öğrencilerin lineer bağımlı/bağımsız vektörlerle ilgili soruya çoğunlukla analitik-aritmetik düşünme biçimiyle verdiklerini, sentetik-geometrik düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranını %10 ve analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranını %5 olarak belirlemiştir. Çelik (2015) bu durumun matematiksel genelleme ile ilgili zorlukların göstergesi olarak ortaya çıktığını belirterek öğrencilerin soyutlama süreçlerinin gelişimine yardımcı olması için uygun öğrenme ortamlarının tasarlanmasını ve bu ortamların öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme biçimlerine etkisinin araştırılmasın önermiştir. Bogomonly (2006) çoğu öğrencinin lineer bağımsızlık kavramını özümsemeden ziyade bir süreç olarak anladıklarını bulmuş ve öğrencilerin lineer bağımsızlığı vektörler arasındaki bir ilişkiden ziyade eşelon forma dönüştürme olarak düşünme eğilimi gösterdiklerini ifade etmiştir. Literatürde yer alan çalışmalar ağırlıklı olarak öğrencilerin analitik-aritmetik ve sentetik-geometrik düşünme biçimlerine sahip olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada literatürden farklı olarak öğrencilerin daha yüksek bir oranla analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemeleri ve geometrik çizimlerden kaçınmalarında tasarlanan öğrenme ortamının etkili olduğu düşünülmektedir. Özellikle üçüncü döngü öncesinde çalışma yaprakları ve GeoGebra şablonlarında yapılan revizyonların ve kavram odaklı ödevlerin öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişiminde etkili olduğu düşünülmektedir. Farklı gösterimlere ve dillere yer verilen ve öğrencilerin keşfederek soyutlama yapmasına imkân veren bir anlayışla hazırlanan etkinlikler yapılan revizyonlarla daha anlaşılır ve verimli hale getirilmiştir. Ayrıca ödevlerde lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına yönelik öğrencilerin genelleme yapmalarına olanak sağlayacak şekilde geometrik, cebirsel ve soyut sorulardan oluşmuştur. Hristovitch (2001) lineer cebir dersindeki kavramlarla ilgili öğrencileri işlemsel anlamaya yönlendirecek şekilde yapılan tanımların ve ağırlıklı olarak hesaplamaya yapmayı gerektiren ödevlerin yapısal anlamaya geçişte öğrenci zorluklarına neden olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla çalışma yaprakları ve ödevleri hazırlarken takip edilen prensipler öğrencilerin kavramsal anlamalarında etkili olmuştur. Böylelikle araştırma kapsamında benimsenen tasarım ilkelerinin karşılandığı ve literatürde yer alan önerilerin de dikkate alınarak hazırlanan öğrenme ortamının öğrencilerin yapısal anlamaya geçişte katkı sağladığını söylemek mümkündür. Sonuç olarak tasarlanan öğrenme ortamı öğrencilerin lineer bağımsızlık kavramıyla ilgili analitik-yapısal düşüme biçimi sergilemesine yardımcı olmuş ancak bazı öğrencilerde literatürde daha önce ortaya konulan zorlukların devam ettiği görülmüştür.

Taban kavramına yönelik olarak final testinde öğrencilere iki adet soru yöneltilmiştir. Final testinin beşinci sorusunda $R^3$ te cebirsel olarak verilen üç farklı vektör kümesinin taban olma durumları incelenirken altıncı soruda öğrencilere taban kavramıyla ilgili soyut modda bir soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin taban kavramına verdikleri cevaplar analitik-analitik-yapısal ve analitik-aritmetik düşünme biçimleriyle ilişkilendirilmiştir. Taban kavramına yönelik beş ve altıncı sorulara verilen cevapların %64'ü analitik-yapısal düşünme biçimiyle %34'ü analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkilidir. Soru soru bakıldığında ise cebirsel formda sunulan beşinci soruda analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili verilen cevapların oranı yüzdece %70, soyut formda sunulan altıncı soruda analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı %45 olarak belirlenmiştir. Ortaya çıkan bu sonucu cebirsel formda verilen sorularda öğrencilerin analitik-yapısal nitelikte cevap vermekte daha başarılıdırlar.  Başka bir ifadeyle soyut formda verilen vektör uzayı kavramlarına yönelik sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle verilen cevapların yüzdesi cebirsel forma verilen sorulara oranla biraz daha düşüktür. Ortaya çıkan bu durum Dorier vd'nin (2000) formalizm zorluğunun bir göstergesi olarak düşünülebilir.

Öğrencilerin hem beşinci hem de altıncı sorulara verdikleri cevaplara bakıldığında hangi formda olursa olsun bir kümenin taban olma şartlarının ya da taban kavramının tanımının bilindiği anlaşılmaktadır. Çünkü öğrenciler her iki düşünme biçiminde de taban kavramının yapısını, germe ve lineer bağımsızlık kavramları ile ilişkini ortaya koymuştur. Beşinci soruya analitik-yapısal düşünme biçimi ile cevap veren öğrenciler tanım ve kavramlar arasındaki ilişkiye odaklanmıştır. Öğrenciler lineer bağımsızlık-lineer birleşim, verilen vektör uzayının boyutu ve kümenin eleman sayısı arasındaki ilişkilere odaklanarak işlem yapma ihtiyacı hissetmeden açıklamalara yer vererek beşinci soruya cevap vermişlerdir. Analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap veren öğrenciler çözümlerinde verilen kümenin gerek lineer bağımsızlığı gerekse germesi aritmetik işlemler kullanılarak hesaplamıştır. Altıncı soruda ise analitik-yapısal düşünme biçimi ile analitik-aritmetik düşünme biçimiyle verilen cevaplar arasındaki en belirgin fark analitik-aritmetik düşünme biçimiyle ilişkili cevaplarda öğrenciler germeyi genel sıralı üçlüler kullanmasıyla ortaya çıkmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimindeki cevaplarda V vektör uzayından genel bir vektör seçilerek germe en genel formda gösterilmiştir. Öğrencilerin taban kavramıyla ilgili anlamalarının daha çok analitik-yapısal düzeyde olduğunu söylemek mümkündür.

Taban kavramının germe ve lineer bağımsızlık kavramlarıyla ilişkisi ve daha önce öğrenme ortamının bu kavramların anlaşılmasındaki etkisi düşünüldüğünde taban kavramı içinde benzer bir etkiden bahsetmek mümkündür. Steward ve Thomas (2010) Tall'ın üç dünya ve APOS teorilerini kullanarak geliştirilen kavramsal çerçeve doğrultusunda kavramlar arasındaki ilişkilere, geometrik temsillere ve somutlaştırmaya odaklandıkları bir öğretim gerçekleştirmiş ve öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle taban, germe ve lineer bağımsızlık kavramlarının tanımlarıyla ilgili mantıksal çıkarımlarda bulunduklarını ortaya koymuştur. Benzer uygulamaları bünyesinde bulunduran öğrenme ortamının uygulandığı bu çalışmada da öğrenciler daha yüksek bir yüzdeyle taban kavramına yönelik analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemişlerdir. Görsel yaklaşımların öğrencilerin anlamalarını zenginleştirdiğine yönelik literatürde çalışmalar yer almaktadır. Stewart ve Thomas'a (2007) göre formal dünyadaki düşünme biçimine varmadan önce sembolik dünyada çalışmak öğrencilerin bu dünyalar arasında güvenle hareket etmelerini ve onlara olan aşinalığını artırmak öğrencilerin ileri matematik seviyeye ulaşmalarına yardım edecektir. Stewart ve Thomas'ın (2007) bahsettiği sembolik ve formal dünyaları sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimleriyle ilişkilendirmek mümkündür. Bu çalışmada da vektörlerin bir kümesi olarak taban kavramının kavramsallaştırılması için geometrik olarak temellendirilmesi ve öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimine taşıyacak sağlam sezgisel anlamların oluşturulmasına yönelik adımlar atılmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar formalizm zorluluğuyla karşılaşılsa da öğrencilerin daha yüksek oranla yapısal anlamalar geliştirdiklerini ortaya koymuştur.

Final testi vektör uzayının temel kavramları olan vektör uzay, alt uzay, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban kavramlarına yönelik olarak sorular içermektedir. Yukarıda öğrencilerin her bir kavrama yönelik sorulara verdikleri cevaplar ayrı ayrı tartışılmıştır. Öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine olan etkisini ortaya koymaya çalışan bu çalışmada ortaya çıkan sonuçlar öğrencilerin vektör uzaylarının temel kavramlarına ilişkin çoğunlukla analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduklarını ortaya koymuştur. Vektör uzayı ve alt uzay kavramları öğrencilerin en büyük yüzdeyle analitik-aypısal düşünme biçimi sergiledikleri sorulardır. Bu kavramları germe ve taban kavramları takip etmektedir. Bu oran lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramında biraz daha düşüktür. Öğrencilerin bireysel performanslarına da bakıldığında sekiz öğrencinin (Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11) ağırlıklı olarak analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu belirlenmiştir. Daha öncede belirtildiği gibi öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemiş olmalarında uygulanan yöntemin etkili olduğu düşünülmektedir.

Konyalıoğlu vd. (2011), üçe eşit ve küçük boyutlarda geometrik temsillerin, üçten büyük boyutlarda cebirsel temsillerin ve bütün boyutlarda soyut temsillerin yer aldığı bir öğrenme yaklaşımının lineer cebir öğretimi için uygun bir yaklaşım olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte Konyalıoğlu vd. lineer cebir kavramlarını ilk olarak cebirsel, daha sonra geometrik ve ancak bundan sonra soyut içerikle tanıtıldığı bir sıralamayla sunmuştur. Donevska-Todorova (2018), Konyalıoğlu vd.'nin (2011) çalışmalarına atıfta bulunarak üçten küçük veya eşit boyutlu uzaylarda cebirsel olarak çalışmakta bir sakınca olmadığını ifade etmiştir. Donevska-Todorova ayrıca Konyalıoğlu vd. (2011) tarafından sunulan sıralamaya ihtiyaç olmadığını belirtmiştir. Donevska-Todorova'ya (2018) göre üniversite seviyesinde lineer cebir öğretimi matematiğin bir bilim olarak doğası ile uyumludur ve bu yüzden kavramların soyut tanımlarıyla sunulması gerekmektedir. Donevska-Todorova, Konyalıoğlu vd. aksine, geometrik içerikle başlamanın öğrencileri daha derin sezgisel düşünmeye teşvik edebileceğini, öğrencileri keşfetme konusunda motive edebileceğini öne sürmüştür.

Bu araştırmada da genel olarak kavramların geometrik temsillerden yararlanılarak sezgisel anlamaların oluşması, ardından cebirsel temsillere yer verilmesi ve son olarak en genel formda kavramlarının anlaşılması hedeflenmiştir. Böylece somuttan soyuta bir öğretim modeli takip edilmiştir. Örneğin germe kavramında geometrik temsillerden yararlanarak bir vektör kümesinin olası bütün lineer birleşimlerinin kümesi fikri verilmeye çalışılmıştır. Alt uzayda da benzer bir yaklaşım takip edilmiştir. Sonuç olarak geometrik ve cebirsel temsillerden hareketle kavramlara yönelik soyut anlamaların oluşturulması süreci işletilmiştir. Diğer taraftan zaman zaman kavramların geometrik temsillerinden önce soyut tanımlarıyla başlangıç yapıldığı durumlarda olmuştur. Örneğin vektör uzay kavramının ilk olarak tanımı yapılmış daha sonra $R^2$ ve $R^3$'te öğrencilerin sezgisel olarak anlamalarına yönelik etkinlikler yapılmış ardından $R^n$ ve soyut vektör uzaylarına genişletilmiştir. Bu süreçte geometrik ve cebirsel temsiller iç içe verilmiştir. Öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimleri bakımından performanslarının yüksek olması takip edilen işleyişin uygun olduğunun bir göstergesi olarak değerlendirilebilir.

Öğrencilerin vektör uzaylarının temel kavramlarında düşünme biçimleri açısından sergiledikleri performanslar kavram bazında farklılıklar göstermektedir. Örneğin vektör uzay veya germe kavramına yönelik sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap veren bir öğrenci taban kavramına yönelik soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir veya tersi durumlar söz konusudur. Benzer bir durum aynı kavramın farklı formlardaki soruları içinde söz konusu olmuştur.  Alt uzay kavramına yönelik cebirsel formda verilen soruya Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler yapısal düşünme biçimiyle cevap verirken geometrik formda verilen soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Buna benzer örnekler diğer kavramlar içinde mevcuttur ve ağırlıklı olarak analitik-yapısal düşünme biçimine sahip öğrencilerde de görülmüştür. Ancak bu durum öğrencilerin o kavramla ilgili analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olmadıkları anlamına gelmemelidir. Analitik-yapısal düşünme biçimi en kapsayıcı düşünme biçimidir ve bu düzeydeki bir öğrenciden diğer düşünme biçimlerini de yeri geldiğinde etkili bir şekilde kullanması beklenir. Çünkü bazı sorular tek bir düşünme biçimiyle ilişkili cevaplara sahip olabilir ya da soruda kullanılan dile paralel düşünme biçimiyle öğrencilerin soruya cevap vermeleri mümkündür. Buradan hareketle öğrencilerin kavramsal anlamaya sahip olmaları sorulara verdikleri cevaplarda sürekli olarak analitik-yapısal düşünme biçimi sergileyecekleri anlamına gelmediğini söylemek mümkündür. Literatürde analitik-yapısal düşünme biçimini diğer düşünme biçimlerini kapsayan bir küme gibi gören çalışmalar vardır (Donevska-Todorova, 2018). Bu nedenle ağırlıklı olarak analitik-yapısal düşünme biçimine sahip öğrenciler uygun düşünme biçimlerini kullanarak sorulara cevap verebilmektedir. Bununla birlikte FT'nin analizinden elde edilen bulgular soyut formda sorulan sorulara öğrencilerin daha düşük yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar verdiklerini ortaya koymuştur. Soyut formda sorulan lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban kavramlarına verilen analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı sırasıyla %50 ve %45, cebirsel formda sorulan germe ve taban kavramlarına verilen analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı sırasıyla %64 ve %70 tir.

### 5. 3. Öğrencilerin ve Ders Öğretmeninin Öğrenme Ortamına İlişkin Görüşlerine Yönelik Tartışma

Araştırmanın ikinci problemi kapsamında ortaöğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören öğrencilerin ve ders öğretmeninin lineer cebir öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamına ilişkin görüşleri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu kapsamda tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılarak uygulanan araştırmanın üçüncü ve son döngüsünün ardından gerçekleştirilen mülakatlardan elde edilen veriler analiz edilmiş ve elde edilen bulgular literatür ışığında tartışılmıştır.

Gerçekleştirilen mülakatlarda öğrencilere ve ders öğretmenine tasarlanan öğrenme ortamı ve öğrenme ortamının temel bileşenleri olan Geogebra şablonları, ödevler, etkinlikler ve grup çalışması başlıkları altında sorular yöneltilmiştir. Ders öğretmeninin görüşleri incelendiğinde öğrencilerin görüşlerinden elde edilen temalara benzer temalar elde edilmiştir. Bu temalar Öğrenme, Materyal, Motivasyon ve Olumsuz Yanlar temalarıdır. Öğrenme temasıyla ilişkili 5, Materyal temasıyla ilişkili 7, Motivasyon temasıyla ilişkili 6 ve Olumsuz Yanlar temasıyla ilişkili 2 adet olmak üzere toplamda 20 adet kod elde edilmiştir. Materyal teması altında ders öğretmeninin öğrenme ortamında kullanılan eğitimsel araçlarla ilgili görüşlerine yer verilirken Motivasyon temasında öğrenme ortamının öğrencileri motive edici yönlerine dair görüşlere yer verilmiştir. Öğrenme temasında ise öğrenme ortamının öğrencilerin öğrenmelerine etkisine yönelik ders öğretmeninin görüşlerine yer verilirken olumsuz yanlar teması altında öğrenme ortamında karşılaşılan sorunlarla ilgili görüşlerine yer verilmiştir.

Öğrencilerin görüşleri incelendiğinde Öğrenme, Materyal, Motivasyon, Olumlu Yanlar ve Olumsuz Yanlar olmak üzere beş adet tema ve bu temalarla ilişkili 25 adet kod elde edilmiştir. Materyal ve Olumlu Yanlar temaları 8'er kodla en fazla koda sahip temalardır. Başka bir deyişle bu iki tema öğrencilerin en çok odaklandıkları temalardır. Materyal teması altında öğrencilerin öğrenme ortamında kullanılan eğitimsel araçlarla ilgili görüşlerine yer verilirken Olumlu Yanlar temasında öğrencilerin öğrenme ortamının olumlu yönleriyle ilgili görüşlerine yer verilmiştir. Bu bulgular öğrencilerin çoğunlukla öğrenme ortamında yer verilen eğitimsel araçlara değindiklerini ve öğrenme ortamı hakkında genel olarak olumlu görüşlere sahip olduklarını ortaya koymaktadır.

Öğrencilerin öğrenme teması altında ifade ettiği kodların Geogebra yazılımı ve ödevler ile ilişkili olduğu göz önüne alındığında öğrenme ortamının bu iki parçasının öğrencilerin öğrenmelerinde daha etkili olduğunu söylemek mümkündür. Öğrencilerin tamamı Geogebra şablonları ve ödevler hakkında olumlu görüş bildirmişlerdir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu ödevlerin öğrenmelerinde pekiştirici bir rolü olduğunu belirterek aynı zamanda ödevler sayesinde derste işlenen konularla ilgili bolca tekrar yaptıklarını ifade etmişlerdir. Öğrenciler bu durumun sonucu olarak ödevlerin bir nevi kendilerini sınava hazırladıklarını, sınavlar için yoğun bir çalışma temposuna girmediklerini açıklamıştır. Ders öğretmeni ödevlerin rolünden bahsederken sınıfta oluşan tartışma ortamından bahsetmiştir. Bir önceki ders verilen ödevler ve çözümleri üzerinden konuşma başlattığını belirten ders öğretmeni, öğrencilerin bu konuşmaya katılarak birbirlerinin çözümlerinin yeterli olup olmadığı konusunda tartışma başlattıklarını ifade etmiştir. Ortaya çıkan tartışma durumu aynı zamanda ders öğretmeni ve öğrenciler arasındaki etkileşimi artıran ve eleştirel düşünmeyi destekleyen bir durum olarak düşünülebilir. Tartışmanın daha önceki bölümlerinde Pecuch-Herrero'nun (2000) eleştirel düşünmeyi destekleyen ve öğrenciler ile öğretmenler arasındaki iletişimi artıran öğretim stratejileriyle birlikte yapıldığında teknolojiyi öğretime dâhil etmenin öğrencilerin başarılarını artırdığını yönündeki bulgularından bahsetmiştik. Bu bakımdan ele alındığında kavram odaklı olarak her hafta düzenli olarak verilen ödevlerin teknoloji destekli öğrenme ortamındaki destekleyici rolünü görmek mümkündür. Ders öğretmeninin de görüşlerinden ödevlerin yalnızca öğrenciler için bir pekiştirme aracı olmadığını aynı zamanda sınıf ortamında bir tartışma ve muhakeme süreci olduğunu söylemek mümkündür.

Öğrencilerin verilen ödevlerle ilgili görüşleri sadece ödevlerin tekrar ve pekiştirici rolüyle ilgili değildir. Bazı öğrenciler ödevlerin sınav stresini azalttığını ifade etmişlerdir. Ödevlerin öğrencileri sınav hazırlayarak sınav stresini azaltması durumunun onların sınav sorularına verdikleri cevaplarda analitik-yapısal düşünme biçimini tercih etmelerinde önemli bir etken olduğu düşünülmektedir. Çünkü gerek süreç içerisinde yapılan klinik mülakatlarda gerekse yapılan gözlemlerde öğrenciler sınavlarda daha çok işlem yapmanın kendilerine daha çok puan getireceği düşüncesiyle sorulara aritmetik cevaplar verdiklerini ifade etmişlerdir. Ödevler hem ders notuna katkısı hem de sınava hazırlama ve sınav stresini alma yönleriyle öğrencilerin puan kaygısı en aza indirmiş ve böylelikle sorulara verilen analitik-yapısal cevapların sayısında artış gözlenmiştir. Tabi ki bu duruma ödevlerle ilgili sınıf içerisinde yapılan tartışma ortamıyla oluşan muhakeme sürecinin de öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkısı olduğu eklenebilir. Bununla birlikte ödevlerin sahip olduğu yapının ve amacının da öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkısı olduğu söylenebilir. Literatürde öğrencilerin kavramsal anlamadan ziyade işlemsel anlamaya güvenmeye daha eğimli olduklarına ya da işlemsel bilginin gelişimine yol açacak şekilde öğrencilerin çoğunlukla analitik-aritmetik düşünme biçimini geliştirdiklerine yönelik çalışmalar vardır (Hillel ve Sierpinska 1994; Alves Dias and Artigue

1995; Medina, 2000; Stewart 2008; Stewart ve Thomas 2010). Bu bağlamda sınav kaygısı öğrencilerin işlemsel anlamaya güvenmeye daha eğimli olmalarının nedenlerinden biri olarak düşünülmektedir. Bu nedenle öğrenme ortamında yer alan görevlerin öğrencilerin sınav kaygısını ortadan kaldırdığını, eleştirel düşünmelerini desteklediğini ve bunlarla ilişkili olarak sorulara analitik-yapısal biçimde cevaplar verilmesine yardımcı olduğunu söylemek mümkündür. Şüphesiz öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimi tercih etmelerinin yanında düşünme biçimlerinin gelişimi açısından ödevlerde yer alan soruların niteliği de önemlidir. Ödevler son döngü öncesinde bazı düzenlemelerin yapıldığı ve belli bir yapı benimsenerek hazırlanmıştır. Bu yapıya göre ödevlerde yer alan sorularda lineer cebirin geometrik, cebirsel ve soyut dillerine yer verilmiş farklı düşünme biçimlerinin sergilenmesi ve öğrencileri bir üst düşünme biçimine taşıması hedeflenmiştir. Öğrencilerle yapılan mülakatlardan elde edilen bulguların analizinden ödevlerde yer alan sorular öğrenciler tarafından içerikle uyumlu, kolaydan zora, nitelikli ve düşündürücü olarak değerlendirilmiştir. Ders öğretmeni ödevlerde üzerinde düşünülmüş sorulardan oluştuğunu ve farklı gösterimleri bir arada barındırması bakımından faydalı olduğunu ifade etmiştir. Hristovitch (2001) ağırlıklı olarak hesaplamaya yapmayı gerektiren ödevlerin analitik-yapısal anlamaya geçişte öğrenci zorluklarına neden olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla öğrenciler ve ders öğretmenin görüşlerinden ödevlerin sahip olduğu yapının öğrencilerin anlamalarının gelişimi açısından önemini ortaya koymaktadır. Ayrıca sınav kaygısından kaynaklanan ve öğrencilerin analitik-aritmetik işlemler yapmasına neden olan bu durum düşünme biçimlerinin hiyerarşik olmadığını ve literatürde belirtildiği üzere bir arada bulunduğunu göstermektedir. Çünkü ortaya çıkan bu durum aslında öğrencilerin her iki düşünme biçimine sahip olduklarını ancak sınav kaygısının onları analitik-aritmetik düşünmeye ittiği şeklinde yorumlanabilir.

Öğrencilerin ifade etmiş oldukları kodların en fazla Geogebra yazılımıyla ilişkili olduğu görülmüştür. Öğrenciler görüşlerinde Geogebra şablonlarının görsellik, somutlaştırma ve anlamada kolaylaştırıcı yönlerine değinerek yazılımın kendilerine zaman kazandırdığını ve yazılımı kullanışlı bulduklarını ifade etmişlerdir. Ders öğretmenin yazılımla ilgili görüşleri öğrencilerin görüşlerine paraleldir. Ancak ders öğretmeni doğal olarak daha akademik bir bakış açısıyla yaklaşarak yazılımın kavramların öğretiminde öğrencilerin öğrenmelerine etkisini değinmiştir. Ders öğretmeni yazılımın kavramlara ilişkin somut deneyimler yaşattığını ve öğrencilerin kavramla ilgili temel sezgisel anlamalarının oluşmasına yardımcı olduğu yönünde görüş bildirmiştir. Bununla birlikte ders öğretmeni geometrik yaklaşımların sistemli bir şekilde ve her kavram için dinamik bir şekilde yapıldığını ifade etmiştir. Literatürde lineer cebir öğretiminde görselleştirme tekniklerinin veya teknolojinin kullanımının öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişimine katkı sağladığına dair araştırmalar vardır (Konyalıoğlu, 2003; Stewart ve Thomas 2010). Bununla birlikte Harel (2000) somutluk prensibinde soyut lineer cebir kavramlarının somutlaştırılmasının öğrencilerin kavramlarla ilgili sağlam anlamalar oluşturmasına katkı sağlayacağını belirtmiştir. Öğrencilerin görüşleri doğrultusunda tasarlanan öğrenme ortamında kullanılan Geogebra şablonlarının Harel'in lineer cebir öğretimine yönelik pedagojik prensiplerinden Somutluk prensibi karşıladığını ve öğrencilere pratik bir kullanım sunduğunu söylemek mümkündür. Ders öğretmeni de görsellik, dinamiklik ve bunlarla ilişkili olarak birden çok durumu inceleme fırsatı vermesi açısından GeoGebra şablonlarını faydalı ve kullanışlı bulduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin neredeyse tamamı ve ders öğretmeni GeoGebra şablonlarının tasarımı ve kullanımı konusunda olumlu görüş bildirerek yazılımın kendilerine kavramların öğretiminde zaman yönünden kazanç belirttiğini ifade etmiştir. Ders öğretmeni uygulamaların çok daha kısa sürede tamamlanmasına ek olarak birden fazla durumun ele alındığını belirtmiştir. Öğrenciler ve ders öğretmenin görüşlerinden öğrenme ortamının zamanı etkin kullanmak ve fazla sayıda örnek durumu incelemek ilkelerinin karşılandığı açık bir şekilde ortaya konulmuştur. Ayrıca öğrencilerin büyük çoğunluğu Geogebra şablonlarını kullanarak görerek öğrenmenin anlamalarını kolaylaştırdığını ve her bir kavramın öğretimi için özel olarak hazırlanan çalışma yapraklarıyla uyumlu olduklarını belirtmişlerdir. Literatüre bakıldığında görselleştirme yaklaşımlarının ve teknolojinin öğrencilerin öğrenmelerini kolaylaştırdığı yönünde bulgular mevcuttur. Klasa (2009) çalışmasında hem dinamik geometri yazılımı Cabri hem de bilgisayar cebiri sistemi Maple tarafından desteklenen lineer cebir dersinde bazı pedagojik matematiksel tasarımları ele almıştır. Klasa'ya (2009) göre bilgisayar cebir sistemi Maple ve geometrik yazılımların özellikle cabri'nin kinestatik öğrenme yaklaşımı sayesinde zor matematik kavramlarının öğrenilmesini daha kolaylaştırmıştır. Benzer bir şekilde Türkiye'de yapılan bir çalışmada Konyalıoğlu (2003), görselleştirme yaklaşımlarının öğrencilerin kavramları anlamasını kolaylaştırdığını öne sürmüştür. Bu araştırmada görselleştirme yaklaşımlarına çalışma yaprakları, ödevlerde yer verilmiştir. Bununla birlikte kavramların dinamik yapılarının anlaşılması ve görsel ve grafiksel gösterimlere yer verilmesi bakımından Klasa'dan (2009) farklı olarak tek bir yazılıma yer verilmiştir. GeoGebra yazılımının hem BCS hem de DGY'lerin özellikleri barındıran bir dinamik matematik programı olması bakımından kavramlarını öğretiminde öğrencilere kolaylık sağladığı görülmüştür. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer hususta gelişen teknoloji sayesinde geçmişte farklı programların üstlendiği görevleri günümüzde daha pratik ve işlevsel bir seviyede tek bir programla yapmak mümkündür.

Geogebra şablonlarının tasarımı, kullanışlılığı ve içerik ile uyumluluğu konuların öğretiminde akışkanlığı sağlayarak öğrencilerin derse aktif katılım sağlamalarında önemli bir rol oynamıştır. Ayrıca Geogebra yazılımının lineer cebir öğretiminde nasıl bir farklılık oluşturduğu bir öğrenci tarafından şu şekilde ifade edilmiştir.

> Ö9 : *"Görerek bazı şeyleri daha rahat yapabilmemizi sağladı. Olumsuz bir yan yok bence. Ders işlenişi farklı oldu bizim için bu zamana kadar öyle işlememiştik. Hani diğer sınıflarla karşılaştırdığımda da bizim için kolay olan soruları çoğu kişiler yapamıyordu. Ondan dolayı baya rahat oldu. Onlar bana getirip soruyorlardı biz daha rahat yapabiliyorduk."*

Ö9 koldu öğrencinin görüşünden yazılımın sağladığı görselliğin öğrencilerin öğrenmelerine olan katkısını diğer sınıflarla kendilerini karşılaştırdıklarında açık bir şekilde ortaya koymuştur.

Öğrencilerin ve ders öğretmeninin öğrenme ortamının temel parçaları olan çalışma yaprakları, GeoGebra şablonları ve ödevleri niteleyici olan görüşleri kodlanarak "Materyal" teması altında toplanmıştır. Lineer cebir öğretimi ile ilgili tasarlanan zenginleştirilmiş öğrenme ortamında yer alan eğitimsel araçların değerlendirilmesinde öğrencilerin ve ders öğretmeninin görüşleri önemli bir yer almaktadır. Öğrenme ortamı tasarlanırken literatürde yer alan öneriler göz önünde tutularak öğrenme ortamına ilişkin ilkeler belirlenmiş ve bu doğrultuda çalışma yaprakları, GeoGebra şablonları ve ödevler hazırlanmış ve geliştirilmiştir. Literatürde yer alan öneriler öğrenci merkezli, teknoloji destekli, geometrik yaklaşımlara yer verilmesi, uygulanabilirliği-problem çözme ve öğrencilere soyutlama yapma imkânı sunmak olarak sıralanabilir. Bu öneriler doğrultusunda tasarlanan öğrenme ortamında çalışma yaprakları, GeoGebra şablonları, ödevler hazırlanmış ve grup çalışması şeklinde ders öğretmeninin rehberliğinde öğrenci merkezli bir öğretim benimsenerek laboratuvar ortamında uygulanmıştır. Öğrencilerin hazırlanan bu eğitimsel araçlar hakkında ifade ettiği görüşler analiz edildiğinde kodlar pratik, öğretici, dikkat çekme, somutlaştırma, zaman kazanma, dikkat çekme, dersle uyumlu, kolaydan zora ve keşfetmeye yönelik olarak elde edilmiştir. Ders öğretmeninin görüşünden elde edilen kodlar öğrencilerden elde edilen kodlara benzerlik göstermektedir. Bu kodlar ilgi çekici, kullanışlı, etkili, anlaşılır, işlevsel ve sistematik yapıdır. Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen kodlar arasında en yüksek yüzdeyle (%100) pratik kodu dikkat çekmektedir. Bütün öğrenciler uygulanan çalışma yaprakları ve GeoGebra şablonlarını kullanışlı bulduklarını belirtmiştir. Ayrıca öğrenciler çalışma yaprakları ve şablonlar arasındaki uyuma dikkat çekerek bu konuda olumsuz bir görüş bildirmemişlerdir. Ders öğretmeni de Geogebra kullanılarak çalışma yapraklarının her birine uygun bir tür öğrenme nesneleri hazırlanmış olmasını teknik bir problem yaşamamasına bir gerekçe olarak göstermiştir. Çalışma yaprakları ve şablonlar arasındaki uyum ve pratik kullanım öğrencilerin zaman kazanmasına ve doğal olarak etkinliklerin belirlenen sürede ya da daha kısa sürede uygulanmasına neden olmuştur. Ayrıca dersi uygulayan öğretmeninde teknik bir problem yaşamaması etkinliklerin akıcı bir şekilde uygulanmasından önemli bir rol oynamıştır. Buradan hareketle uygulamaların gerçekleştirilmesinde zaman konusunda yaşanılan kazanımlar laboratuvar ortamında uygulanan bu tarzda bir öğrenme ortamının normal sınıf ortamına tercih edilmesinde önemli bir etken olarak karşımıza çıkmaktadır.

Literatürdeki teknoloji kullanımına ve geometrik yaklaşımlara yer verilmesi önerileri dikkate alarak tasarlanan GeoGebra şablonları öğrenciler tarafından kavramların somutlaştırılmasına yardımcı ve dikkat çekici olarak ifade edilmiştir. Çalışmaya yaprakları ve ödevler daha öncede belirtildiği gibi belli bir yapıya sahip olacak şekilde farklı dillerin kullanıldığı ve farklı düşünme biçimlerini harekete geçirecek şekilde düzenlenmiştir. Çalışma yaprakları kavramların birbirleriyle ve geometrik temsilleriyle arasındaki ilişkilerin keşfedilmesine yönelik olarak hazırlanırken ödevler öğrencilerin soyutlama yapmasına imkân tanıyacak şekilde düzenlenmiştir. Çalışma yaprakları ve ödevler öğrenciler tarafından kolaydan zora, öğretici ve keşfetmeye yönelik olarak değerlendirilmiştir. Kolaydan zora doğru ifadesini biraz daha açacak olursak ödevlerde yer alan sorular geometrik, cebirsel ve soyut formda sorulardan oluşmaktadır. Görüşler öğrencilerin geometrik soruları kolay ve soyut formdaki soruları ise zor veya düşündürücü bulduklarını ortaya koymaktadır. Bunun dışında yukarıda verilen niteliklerin dışında öğrenciler soruların niteliklerinden bahsederken öğretici, pekiştirici, kaliteli, nitelikli gibi ifadeleri de kullanmışlardır. Ders öğretmeninin görüşlerine bakıldığında öğrencilerin görüşlerini desteklediği görülmektedir. Örneğin ders öğretmeni öğrenme ortamının öğrenciler üzerindeki etkisinde bahsederken daha önceki dönemden bir karşılaştırmaya yer vermiştir. Aşağıda ders öğretmeninin görüşüne yer verilmiştir.

> …Geçen dönem bu dersi yürüttüğüm esnada derse gelip hiçbir şeyle ilgilenmeyen iki-üç öğrencim vardı. Bu dönem boyunca hem derslere çok daha düzenli devam ettiler hem de uygulamalara aktif katılım gösterdiler. Çaba sarf ettiler. Dersler onlar için genelde ilgi çekici oldu.

Ders öğretmeni öğrenme ortamının öğretmen üzerindeki etkisini daha önceki dönemlerde karşılaştırdığında fark etmiştir. Bu farkın oluşmasında öğrenme ortamında yer alan eğitimsel aktivitelerin rolüne ders öğretmeni tarafından değinilmiştir. Ders öğretmenine göre çalışma yaprakları açık ve anlaşılır olmasının öğrencilerin ders fazla katılım göstermelerinde etkili olmuştur. Ayrıca ders öğretmeni de çalışma yaprakları ve yazılımın sahip olduğu sistematik yapıyla birlikte geometrik yaklaşımlarla ulaşılan çıkarımları cebirsel yaklaşımlarla destekleyen ve en sonunda en genel formda çalışılan durumu anlamlaştırmaya çalışan bir öğretimin gerçekleştirildiğini ifade etmiştir. Görüldüğü gibi öğrenciler ve ders öğretmenin görüşleri gerek kullanılan materyallerin özellikleri gerekse sahip oldukları yapı bakımından birbirini tamamlayıcı niteliktedir. Ancak ders öğretmenin görüşleri tasarlanan öğrenme ortamının ilkelerinin karşılanıp karşılanmadığı konusunda daha net fikirler ortaya koymuştur. Ders öğretmeni hem yazılımı hem de genel olarak öğrenme ortamını işaret ederek takip edilen işlenişin öğrencileri formal tanım ve ispatlara hazır hale getirdiğini ifade etmiştir. Ders öğretmeni öğrencilerin somut deneyimlerin formal temsilleriyle eşleştirerek çok daha rahat anladıklarını, ispat sürecinin daha anlamlı hale geldiğini ve ilerleyen haftalarda bu etkiyi gözlemlediğini belirtmiştir. Donevska-Todorova'nın (2018) çalışmasında ders öğretmenin bu yöndeki görüşlerini destekleyici bulgular yer almaktadır. Donevska-Todorova (2018) çalışmasında BCS ve DGY'nin öğrencilerin ispatlar ileriye sürmek, matematiğin sembolleri, formal ve teknik elemanları ile etkileşim içinde olmak yeterliliklerinin gelişimlerine katkı sağladığını ifade etmiştir. Bilgisayar cebir sistemleri ve dinamik geometri yazılımlarının tüm özelliklerini bulunduran ve dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımı kullanılarak hazırlanan şablonlar öğrencilerin formal tanımları ve ispat süreçlerini daha iyi anlamasında katkı sunmuştur.

Ders öğretmeninin ve öğrencilerin görüşleri doğrultusunda literatürde yer alan bazı önerilerin karşılandığı ve bazı zorlukların aşılmasında öğrenme ortamının katkısı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İspat ve ispatla ilgili süreçlerde öğrencilerin deneyimsizliklerinden kaynaklanan zorluklar (Hillel, 2000) ve lineer cebir dersinin soyut ve formal yapısından kaynaklanan zorluklar (Dorier, 1995, Dorier, 2000) lineer cebir öğretiminde karşılaşılan en temel zorluklardandır. Öğrencilerin görüşlerinden etkinliklerin yapısından ve amacından haberdar oldukları anlaşılmaktadır. Öğrenciler etkinliklerin sahip olduğu özellikler göz önünde bulundurulduğunda sürecin aktif olarak bir parçası olmuştur. Bundan sonraki kısımda ders öğretmenin görüşleri bize öğrencilerin formal tanım ve ispatların anlaşılmasında daha başarılı olduklarını göstermektedir. Bir bakıma laboratuvar ortamında uygulanan öğrenme ortamının öğrencilerin formalizm zorluğundan kurtulmalarına yardımcı olduğunu söylemek mümkündür. Bununla birlikte öğrenciler ve ders öğretmenin görüşleri geometrik temsillere yer verilmesi, somutlaştırma, farklı dillerin kullanımı gibi önerilerin ve öğrenme ortamının sahip olduğu bazı ilkelerin (etkinliklerin açık ve anlaşılır olması, uyumlu olması, farklı dil ve gösterimlere yer verme, keşfetme, somutlaştırma, ilgi çekme) karşılandığını ortaya koymuştur.

Öğrencilerin görüşlerine bakıldığında Olumlu Yanlar teması Materyal teması ile en çok kodun bulunduğu temalardan biridir. Öğrencilerin görüşlerinde ifade etmiş oldukları olumlu yanlar aktif olma, zamanın çabuk geçmesi, somutlaştırma, eğlenceli, düzenli çalışma, sorumluluk alma, muhakeme yapma ve özgüven verme olarak sıralanmaktadır. Öğrencilerin tamamı uygulama süreci boyunca aktif olmalarını öğrenme ortamının olumlu yanlarından biri olarak ifade etmişlerdir. Ders öğretmeni de öğrencilerinin geçmiş dönemdeki derslerden farklı olarak sessiz kalmak yerine sürekli sorular sorarak ve cevaplar vererek süreç içerisinde aktif olduklarını ifade etmiştir. Tıpkı aktif olma kodunda olduğu gibi öğrencilerin tamamı ve ders öğretmeni Materyal temasında çalışma yapraklarının ve GeoGebra şablonlarının pratik olma yönüne değinmişlerdir. Öğrenciler süreç boyunca aktif olmalarını eğitimsel araçların pratikliğine, birbiriyle ve içerikle uygunluğuna bağlamıştır. Bundan dolayıdır ki öğrencilerin dersler işlenirken zamanın çabuk geçmesini öğrenme ortamının olumlu yanlarından biri olarak göstermesi sürpriz bir sonuç değildir. Bu bağlamda bir öğrenme ortamının öğrencileri aktif kılmasında o ortamda bulunan eğitimsel araçların kullanılabilirliği ve birbiri ile uyumu önemli özellikler olarak ortaya çıkmaktadır. Bu özellikler aynı zamanda dersin akıcılığını da artırarak ders süresinin öğrenciler tarafından çabukça geçecek şekilde hissedilmesine neden olmuştur.

Olumlu yanlar temasının dikkat çeken bir tarafı da öğrencilerin öğrenme ortamının olumlu yanlarıyla ilgili ifade ettikleri görüşlerin genellikle grup çalışmasıyla ilişkili olmasıdır. Öğrenciler laboratuvar derslerinin grup çalışması şeklinde gerçekleştirilmesini eğlenceli bulduklarını belirtmişlerdir. Bu konuyla ilgili ders öğretmenin normal sınıf ortamında öğrencilerle yaşadığı bir durum son derece ilgi çekicidir. Aşağıda ders öğretmeninin görüşüne yer verilmiştir.

> Dersleri lab. ve derslikte dönüşümlü yapıyorduk. Derslikte yürüttüğümüz bir dersin sonunda -ki ders bence son derece verimli bir dersti- öğrenciler lab. da çalışma isteklerini söylediler. Bu derste çok yorulduklarını ifade ettiler. Lab. yaptığımız geçen ders çok daha az yorulduklarını ifade etmişlerdi. Hatta bu yüzden dersi 15 dk. önce bitirdik. Aslında lab. da yaptığımız o ders çok yoğun bir dersti. Bana kalırsa bu ders daha az yoğun bir içeriğe sahip ve daha rahattı. Aslında bu durum formalizmin onları ne kadar sıktığı ve yorduğunun bir göstergesiydi bence laboratuvardaki çalışmalarımız her ne kadar yoğun ve yorucu görünse de onlar için baş etmesi daha kolay bir mücadele içermekteydi öğrenme açısından...

Ders öğretmeninin görüşleri aslında öğrencilerin laboratuvar derslerini neden daha eğlenceli bulduklarını açıklayıcı niteliktedir. Daha az yoğun bir içeriğe sahip olmasına rağmen öğrenciler sınıf derslerine laboratuvar derslerini tercih etmiştir. Öğrencilerin bir nevi formalizmden kaçtığını ve grup çalışması şeklinde laboratuvar derslerinin uygulanmasını eğlenceli bulduklarını söylemek mümkündür. Ancak burada laboratuvar derslerinin daha doğrusu öğrenme ortamının daha önce de bahsedildiği gibi ilgi çekici ve öğrencileri derse bağlayıcı yönünü de göz önünde bulundurmak gerekir. Ders öğretmeninin de görüşleri doğrultusunda öğrencilerin dersi benimsedikleri, daha önce derslere katılmayan öğrencilerin de derse katılım sağladıkları ve öğrenme ortamının dersleri monotonluktan kurtardığı ortaya konulmuştur. Dolayısıyla daha yoğun bir içeriğe sahip olmasına rağmen öğrencilerin öğrenme ortamını tercih etmelerinin tek nedeni formalizm değildir. Genel olarak öğrenme ortamı ilkelerinin doğru bir şekilde öğrenme ortamına yansıtıldığını ve özellikle grup çalışmasına yönelik prensiplerin öğrencileri etkinlikleri uygulamada başarıya ulaştırdığını söylemek mümkündür.

Öğrenciler çalışma yapraklarının GeoGebra şablonları eşliğinde yürütülmesinde grup arkadaşlarıyla görev paylaşımı yaptıklarını ve bu paylaşımın kendilerine sorumluluk verdiğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen bir diğer olumlu yan ise grup çalışmaları üyeler arasında konuyla ilgili tartışma ve fikir alışverişinde bulunarak muhakeme etme fırsatı sunmuştur. Grup çalışmalarının öğrencilere sorumluluk verme ve muhakeme yapma fırsatı sunuyor olması üstelik öğrencilerin grup çalışmasını eğlenceli buluyor olması elbette önemli bir durumdur. Ancak bunun dışında öğrencilerin kavramlara ilişkin sonuçları keşfetmesine ve genelleme yapmasına yönelik etkinliklerin bulunduğu bir öğrenme ortamında sorumluluk bilinciyle karşılıklı muhakeme ederek bir sonuca varma isteklerinin düşünme biçimlerinin en üst düzeye çıkmasında önemli bir yere sahip olduğu güçlü bir şekilde düşünülmektedir. Ayrıca öğrenciler grup arkadaşlarının yanında yer almasının ve ders öğretmeninden önce danışacak birinin olmasının kendilerine özgüven verdiğini ifade etmiştir. Bu yönüyle de düşünüldüğünde grup çalışmalarının öğrencilerin derse katılmaları konusunda onlara özgüven aşılayarak itici bir güç olduğu ortaya çıkmıştır. Açıktır ki muhakeme edilen ve derse katılımın olduğu bir öğrenme ortamında öğrencilerin ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini, sahip oldukları düşünme biçimlerini belirlemek ve geliştirilmesine yardımcı olmak araştırmanın amacına ulaşmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Genel olarak öğrenme ortamının öğrencileri motive ettiği yönünde belirtilen görüşler Motivasyon teması altında kodlanarak analiz edilmiştir. Elde edilen kodlar derse bağlılık, aktif olma, herkese eşit, çalışmaya iten ve zamanın çabuk geçmesi olarak sıralanmaktadır. Aktif olma ve zamanın çabuk geçmesi aynı zamanda öğrenciler tarafından öğrenme ortamının olumlu yanları olarak ifade edilmiştir. Çünkü öğrenciler süreç boyunca aktif bir şekilde derse katılmalarını yalnızca çalışma yaprakları, şablonlar veya görevlere bağlamamış öğrenme ortamının kendilerini aktif kıldığını belirtmişlerdir. Bununla birlikte öğrenciler derse daha uzun süre bağlı kaldıklarını ve öğrenme ortamının kendilerini çalışmaya zorladığını ifade etmişlerdir. Ortamın öğrencileri çalışmaya itmesindeki temel sebep gerek çalışma yaprakları ve GeoGebra şablonlarında gerekse ödevlerle ilgili sorumlulukları olarak gösterilmiştir. Öğrenciler görüşlerinde kendilerini etkinliklerin uygulanmasında sorumlu hissettiklerini ve ödevleri kendileri için bir zorunluluk olarak gördüklerini ifade etmişlerdir. Bu durumu ders öğretmeninin öğrencilerin dersi benimsedikleri ve öğrenme ortamının öğrencileri derse katılım konusunda motive ettiği yönündeki görüşleri desteklemektedir. Buradan hareketle öğrenme ortamının bütün bileşenleri ve ders öğretmeniyle birlikte öğrencilere sorumluluk ve zorunluluk hissi vererek motive ettiğini söylemek mümkündür. Öğrencilerin öğrenme ortamında ve kendilerine verilen görevlerde aldıkları sorumluluk ve ödevleri bir zorunluluk olarak görmeleri Harel'in (2000) gereklilik prensibiyle örtüşmektedir. Gereklilik prensibi kısaca öğrencilerin dersi, ders içerisindeki aktiviteleri benimsemesini entelektüel bir ihtiyaç olarak görmektedir. Öğrencilerin yukarıda bahsettiğimiz ve öğrenme ortamında yer alan uygulamaları kendileri için bir zorunluluk ve sorumluluk olarak hissetmesi bu entelektüel ihtiyacın karşılanması olarak yorumlanabilir. Ayrıca öğrenciler derslerin herkese eşit mesafede ve her gruba söz hakkı verilerek işlendiği yönünde görüş bildirmişlerdir. Hatta bununla birlikte ders öğretmenin süreç içerisindeki tutumu öğrenciler tarafından takdir edilmiştir. Bilindiği üzere tasarım araştırması, araştırmacıların süreç boyunca aktif oldukları, araştırmacı ve katılımcıların iş birliği içinde oldukları çalışmalardır (Wang ve Hannafin, 2005). Bununla birlikte öğrenme ortamının bütünlüğünün yanında öğrenci ve öğretmelerin de süreç içerisindeki etkileşimleri de öğrencilerin başarısına katkı sağlamaktadır (Pecuch-Herrero, 2000). Bu bağlamda ders öğretmenin süreç içerisindeki rolünün araştırma yönteminin gereksinimlerini karşılayacak ve öğrencilerin başarısına katkı sağlayacak bir düzeyde olduğunu söylemek mümkündür. Sonuç olarak motivasyonun olduğu ve her bir bireye söz hakkı verilen bir öğrenme ortamında öğrencilerin özgürce düşüncelerini ifade etmeleri ve derse katılmaları araştırmanın amacına ulaşmasında önemli bir rol oynadığı düşünülmektedir.

Öğrencilerin ve ders öğretmeninin öğrenme ortamı ile ilgili olumsuz görüş bildirdiği durumlar Olumsuz Yanlar teması altında analiz edilmiştir. Öğrenciler özellikle ilk haftalarda çalışma yapraklarında vektör kavramlarıyla ilgili olarak sorulan bazı soruları basit bulduklarını ifade etmişlerdir. Bunun dışında iki öğrenci projektör veya bilgisayara çok fazla baktıklarında gözlerinin yorulduğunu ancak bu sorunun programdan değil bilgisayardan kaynaklandığını ifade etmişlerdir. Ders öğretmeni ise bazı durumlarda öğrencilerin etkinlikleri erken bitirdikten sonraki süreçte sıkıldıklarını gözlemlediğini ifade etmiştir. Ayrıca ders öğretmeni biri çalışma yaprağı diğeri de GeoGebra şablonunda olmak üzere etkinliklerde yer alan bazı olumsuzluklara değinmiş ve önerilerde bulunmuştur. Öğrenciler ve ders öğretmeni genel olarak öğrenme ortamı veya onun bileşenleri hakkında çok fazla olumsuz bir durum bildirmemişlerdir. Aksine çalışma yaprakları, grup çalışması, ödevler, GeoGebra şablonları hakkında öğrenciler ve ders öğretmeni çoğunlukla olumlu görüş bildirmişlerdir. Bu durumun temel nedeni araştırmanın bir tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılarak yürütülmesi gösterilebilir. Tasarlanan öğrenme ortamı son halini almadan önce iki döngü ve hatta döngülerden önce konu bazlı bazı çalışmalar yapılmıştır. Her bir döngü sonrasında alan notları ve video kayıtları kullanılarak sorun görülen yerlerde düzenlemeler ve değişiklikler gerçekleştirilmiştir. Böylelikle üçüncü döngü için tasarlanan öğrenme ortamı en hazır halini almıştır. Bu nedenle öğrenme ortamına ilişkin öğrenciler ve ders öğretmeninin görüşlerinde çok fazla olumsuz tarafa rastlanmamıştır.

# 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 6. 1. Sonuçlar

Bu çalışmada vektör uzaylarının temel kavramlarının öğretimine yönelik bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Üç döngüden oluşan çalışmanın ilk iki döngüsünden elde edilen bulgular ve kuramsal çatı doğrultusunda ortaya çıkan tasarım ilkelerini temele alarak geliştirilen öğrenme ortamı üçüncü döngüde uygulanmış, uygulama sürecinde alan notları ve video kayıtları tutulmuş, öğrenciler ile ödevler üzerinden klinik mülakatlar yapılmıştır. Öğrencilerin düşünme biçimlerini ortaya koyabilmek için uygulamanın başında ve sonunda sırasıyla başlangıç ve final testleri uygulanmıştır. Ayrıca başlangıç testi uygulama sonrasında bir kez daha uygulanmıştır. Uygulama sonunda ders öğretmeni ve öğrencilerin öğrenme ortamına ilişkin görüşlerini belirleyebilmek amacıyla mülakatlar yapılmıştır. Çalışmanın amacına yönelik olarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

### 6. 1. 1. Tasarlanan Öğrenme Ortamı Öğrencilere Birtakım Fırsatlar Sunmuştur

Süreç içerisinde gerek alan notları ve video kayıtlarından gerekse öğrenciler ve ders öğretmeni ile yapılan görüşlerden elde edilen veriler ile öğrencilerin normal sınıf derslerindense laboratuvar ortamında ders işlemeyi tercih ettiklerini ortaya koymuştur. Lineer cebir öğretimi için tasarlanan zenginleştirilmiş öğrenme ortamı laboratuvar ortamında uygulanmıştır. Laboratuvar ortamında gerçekleştirilen dersler daha yoğun bir içeriğe sahip olmasına rağmen öğrenciler normal sınıf derslerinde daha çok sıkılmış ve laboratuvar derslerini tercih etmiştir. Hatta bazı öğrenciler daha eğlenceli bulduklarını ifade etmiştir. Bu durum formalizm öğrencileri nasıl yorduğunun bir göstergesidir. Öğrencilerin birçoğu laboratuvar ortamında derslerin işlenmesini tercih etmiş ve buna gerekçe olarak benimsenen öğretim şeklini göstermiştir. Öğrenme ortamının öğrencilere öğrenme açısından sunduğu fırsatlar

1. Görsellik
2. Aktif olma
3. Düzenli çalışma
4. Sınava hazırlanma
5. Motivasyon
6. Daha kolay öğrenme

7. Öğrenmenin daha zevkli bir hal alması

olarak belirlenmiştir. Laboratuvar derslerinin grup çalışması şeklinde gerçekleştirilmesi öğrencileri motive edici bir durum olarak ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin birbiriyle fikir alışverişinde bulunmasında, birbirine özgüven aşılamasında, düşüncelerini rahatça ifade edebilmelerinde, sorumluluklarının artmasında ve dersin eğlenceli bir hal almasında grup çalışmasının etkisi olmuştur.

### 6. 1. 2. Vektör Uzaylarının Öğretimine Yönelik Tasarlanan Öğrenme Ortamına İlişkin Bazı Tasarım ilkeleri Belirlenmiştir

Aşağıdaki şekilde araştırmanın üçüncü döngüsü sonunda elde edilen bulgular sonucunda tasarım ilkelerine yer verilmiştir.


Şekil 87. Öğrenme ortamı tasarım ilkeleri

İlk iki döngü sonrasında beş başlık altında toplanan tasarım ilkeleri üçüncü döngü sonrasında elde edilen bulguların analizi sonucunda öğretmenin rolü başlığının eklenmesiyle altı başlık altında toplanmış ayrıca bazı başlıklara eklemeler yapılarak ilklere son hali verilmiştir. Teknoloji kullanımına dikkat çekme, uyumlu, pratik ve formal tanım ve ispatlara zemin hazırlama; ödevlere öğrenme, tartışma ve dönüt verme; grup çalışmasına formalizm zorluğundan kaçınmak ilkeleri eklenmiştir. Tasarım ilkeleri belirlenirken ilk olarak araştırmanın kuramsal çerçevesi doğrultusunda ilkeler belirlenmiş ardından literatürde lineer cebir öğretimine yönelik öğrenci zorlukları ve öneriler dikkate alınarak bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Öğrenme ortamının bileşenleri olan GeoGebra şablonları, çalışma yaprakları ve ödevler hazırlanırken kavramların geometrik, cebirsel ve soyut dilde gösterimlerine yer verilmiş bununla birlikte her bileşende somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik prensiplerinin karşılanmasına yönelik olarak etkinlikler hazırlanmıştır. Böylece tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisinin değerlendirilmesi hedeflenmiştir.

### 6. 1. 3. Tasarlanan Öğrenme Ortamı Öğrencilerin Vektör Uzaylarının Temel Kavramları Üzerinde Düşünme Biçimlerinin Gelişimine Katkı Sağlamıştır

BT2 ve FT testlerinden elde edilen sonuçlar öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimini kullanarak verilen cevaplardaki artışı ortaya koymuştur. BT1 testi ile karşılaştırıldığında öğrenciler BT2 testinde daha fazla analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemiştir. FT testinde ise öğrencilerin %73'ü cevaplarında çoğunlukla analitik-yapısal düşünme biçimini kullanmıştır. Analitik-yapısal düşünme biçimi kavramlara ilişkin tanımlar ve özellikleri kullanmayı gerektirdiğinden lineer cebir öğretimi için tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişiminde etkili olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Teknoloji kullanımı öğrenme ortamının temel bileşenlerinden biridir. Ancak tasarlanan öğrenme ortamında yalnızca GeoGebra yazılımına yer vermek teknoloji kullanımı olarak algılanmamalıdır. Geogebra şablonlarında kavramların geometrik temsillerine ve onların dinamik yapısına yer vermekle birlikte, kavramların ilişkili olduğu ve genellemeye imkân veren somut modeller üzerinde de çalışılmıştır. Ayrıca şablonlar çalışma yaprakları ve ödevler ile ilişkili ve birbirini destekleyecek şekilde geliştirilmiştir. Bir bütün olarak düşünüldüğünde GeoGebra şablonları, çalışma yaprakları ve ödevler;

1. Görselleştirme tekniklerinin kullanıldığı (dinamik ve geometrik olarak)
2. Birbiriyle etkileşimli
3. Kavramlara ilişkin farklı gösterimleri barındıran
4. Farklı dilleri bir arada bulunduran ve kullanılmasına teşvik eden
5. Harel'in somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik prensiplerini karşılamaya yönelik
6. Farklı düşünme biçimlerinin sergilenmesine ve geçişlerin yapılmasına uygun olacak şekilde hazırlanmış ve uygulanmıştır. Bununla birlikte öğrenme ortamının temel bileşenleri arasından senkronizasyonun sağlanması açısından ders öğretmeninin rolü de öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişiminde etkili olmuştur. Bulgulardan elde edilen sonuçlar;

1. Geometrik çizimlerin kullanımı azalmıştır
2. Belli örnekler üzerinden sorulara cevap verilmemiştir
3. DMY öğrencilerin anlamalarını kolaylaştırmıştır
4. Ödevler ve grup çalışması, öğrencilerin öğrenmelerine ve sınıfta tartışma ortamının oluşmasına katkı sağlamıştır
5. GeoGebra yazılımı öğrencilerin formal tanımları ve ispat süreçlerini daha iyi anlamasında etkili olmuştur
6. Geogebra şablonları fazla sayıda örnek durumun incelenmesine olanak sağlamıştır
7. Öğrencilerin derse aktif katılım sergilemesinde etkinliklerin (GeoGebra şablonları ve çalışma yaprakları) kullanılabilirliği ve birbiri ile uyumu etkili olmuştur.

olarak sıralanmaktadır.

Geometrik çizimlerin kullanımının azalmasıyla ilgili dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır. Geometrik çizimlerin azalması sentetik-geometrik düşünme biçiminin gelişmediği şeklinde algılanmamalıdır. Öğrenciler cebirsel ve soyut dille sorulan sorularda sorunun yapısına göre vektörler seçmiş ve bütün soru türlerinde geometrik çizimlere gitmemiştir. Benzer bir durum özel sayısal değerler vererek yalnızca belli örnekler üzerinden sorulara cevap verme durumu içinde geçerlidir. Sırasıyla sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimleriyle ilişkili bu durumların bütün soru türlerinde uygulanmasının azalması öğrencilerin en kapsamlı düşünme biçimi olan analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduklarının bir göstergesidir. Sonuç olarak teknoloji öğrenme ortamına entegre edilirken belli bir yapı benimsenerek tasarım ilkeleri doğrultusunda GeoGebra şablonları hazırlanmış ve bu şablonlar çalışma yaprakları ve ödevlerle desteklenmiştir. Süreç boyunca öğrenme ortamında genel olarak her bir kavram için dinamik bir şekilde geometrik yaklaşımlar kullanılmış, kullanılan bu geometrik yaklaşımlar cebirsel olarak açıklanmış ve son olarak kavramlar en soyut haliyle ele alınmıştır. Bu bağlamda ele alındığında öğrenme ortamı vektör uzaylarının öğretiminde öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlamaktadır.

### 6. 1. 4. Öğrencilerin Kullandıkları Düşünme Biçimleri Durumdan Duruma Değişiklik Göstermektedir

Final testinde yer alan kavramlardan alt uzay kavramından 2 adet, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramından 2 adet ve taban kavramından 4 adet soru öğrencilere yöneltilmiştir.

Alt uzay kavramında yönelik olarak hazırlanan sorulardan ilki cebirsel dille diğer ise geometrik dille olmak üzere iki soru öğrencilere yöneltilmiştir. Aynı öğrenci cebirsel dille yöneltilen soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verirken geometrik dille yöneltilen soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Örneğin, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler cebirsel dille yöneltilen soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verirken geometrik dille yöneltilen soruya analitik-aritmetik düşünme biçimiyle cevap vermiştir. Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına yönelik olarak soyut dilde iki adet ve taban kavramına yönelik olarak hazırlanan final testinin beşinci ve altıncı sorularında sırasıyla cebirsel ve soyut dilde sorulara yer verilmiştir. Benzer durum lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban kavramlarında da ortaya çıkmıştır.

Bu araştırmada tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Her ne kadar bir kavramın farklı dildeki sorularına öğrencilerin sergiledikleri düşünme biçimlerine odaklanılmamış olsa da araştırmanın bulgularından ortaya çıkan sonuçlar, bir kavramın farklı veya aynı dildeki sorularına karşı öğrenciler farklı düşünme biçimleriyle cevap verebilmektedir.

### 6. 1. 5. Vektör Uzayı ve Alt Uzay Analitik-Yapısal Düşünme Biçimini Sergilemede Öğrencilerin En Çok Başarılı Oldukları Kavramlardır

Öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimini sergileme konusundaki performansları vektör uzayları sorusunda %91, alt uzay kavramında %82, germe kavramında %64, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramında %50 ve taban kavramında %64 olarak ortaya çıkmıştır. Elde edilen bu sonuçlara göre öğrenciler vektör uzayları ve alt uzay kavramlarında analitik-yapısal düşünme biçimini sergileme bakımından daha başarılıdır. Ayrıca ortaya çıkan bu duruma göre öğrencilerin düşünme biçimlerini sergileme performansı kavrama göre değişmektedir.

Araştırmanın ilk iki döngüsünden elde edilen bulgular vektör, vektör uzayı ve alt uzay kavramlarının anlaşılmasında ve aralarındaki ile ilişkisinin kurulmasında öğrencilerin tam olarak başarılı olmadığını ortaya koymuştur. Vektörler bir kısım öğrenciler tarafından vektör uzayının bir elemanı olarak görülmemiş ve geometrik betimlemelerle ifade edilmiştir. Bu nedenle araştırmanın üçüncü döngüsünde etkinliklerde yapılan düzenlemelerle ve diğer döngülerden farklı olarak kavram odaklı verilen ödevlerle birlikte $R^2$ nin vektör uzayı olmasına yönelik olarak ayrı bir etkinlik hazırlanmış ve uygulanmıştır. Ardından öğrencilere $R^3$ ve $R^n$ nin vektör uzayı olmasına yönelik olarak da bir ev ödevi verilmiştir. Kavram odaklı ödevlerle de matris ve polinomlardan oluşan vektör uzaylarının öğrenciler tarafından incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin FT'de, ödevlerde ve kendileriyle yapılan klinik mülakatlardaki performansları vektör, vektör uzayı, alt uzay kavramlarının ve birbirleriyle arasındaki ilişkilerin anlaşıldığını ortaya koymuştur. Dolayısıyla yapılan düzenlemelerle birlikte uygulanan etkinliklerin vektör uzayı ve alt uzay kavramlarında analitik-yapısal düşünme biçimi bakımından başarılı olmalarında etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

### 6. 1. 6. Kullanılan Dil Öğrencilerin Düşünme Biçimleri Üzerinde Etkilidir

Araştırmadan edilen bulgular soyut formda sorulan sorulara öğrencilerin daha düşük yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar verdiklerini ortaya koymuştur. Taban kavramına yönelik olarak hazırlanan sorulardan biri cebirsel dilde diğeri soyut dilde öğrencilere yöneltilmiştir. Soyut formda sorulan lineer bağımlılık/bağımsızlık ve taban kavramlarına verilen analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı sırasıyla %50 ve %45, cebirsel formda sorulan germe ve taban kavramlarına verilen analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı sırasıyla %64 ve %70 tir.

Taban kavramına yönelik olarak sorulan sorulara bakıldığında kavramlar arasında olduğu gibi aynı kavramın farklı dildeki sorularında da benzer bir durum söz konusudur. Görüldüğü gibi taban kavramıyla ilgili cebirsel dilde yöneltilen soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı %70 ve soyut dilde yöneltilen soruya analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevapların oranı %45 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla ortaya çıkan durum kavramın doğasıyla ilgili bir durum değildir. Sonuç olarak öğrenciler cebirsel dilde yöneltilen sorulara soyut dilde yöneltilen sorulardan daha yüksek bir yüzdeyle analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevaplar vermiştir.

Sonuç olarak öğrencilerin soyut dille verilen sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle cevap verme oranı cebirsel dille verilen sorulara oranla daha düşüktür.

### 6. 1. 7. Öğrenciler Vektör Uzayları Konusunda Bazı Zorluklara Sahiptir

Araştırmadan elde edilen veriler öğrencilerin bazı zorluklara sahip olduklarını ortaya koymaktadır. Bu zorluklar

1. Harf sembollerinin kullanımı
2. Fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayından vektör belirleme
3. Formalizm zorluğu
4. Denklem sistemlerinin çözümü ve yorumlanması

olarak belirlenmiştir. Harf sembollerinin kullanımı ve yorumlanması, formalizm, fonksiyon kavramına yönelik zorluklar lineer cebire özgü zorluklar değildirler. Denklem çözme her ne kadar daha önceki dönemlerde de işlenen bir konu olsa da lineer denklem sistemlerinin

Lineer Cebirin birinci dönem konusu olması nedeniyle ortaya çıkan bu zorluk Lineer Cebir ile ilişkilendirilebilir.

Öğrenciler lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramının formal tanımını kullanarak elde ettikleri skalerleri farklı bir vektör kümesinin lineer bağımsızlığını gösterirken uygun olmayan bir şekilde kullanmıştır. Öğrenciler harf sembollerinin kullanımını yorumlarken zorluk yaşamışlardır. Daha önceki çalışmalarda harf kullanımı ve anlamada yaşanan zorluklar bu araştırmada ortaya çıkmıştır. Öğrenciler elemanları fonksiyon olan bir vektör uzayından vektörler belirlerken literatürden farklı olarak birtakım zorluklar ortaya koymuştur. Literatürde genel vektörler yerine belli vektörler seçerek işlemler yürütülmüştür. Bu araştırmada ise fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayından elemanlar seçilirken f(x) ve g(x) gibi birbirinden farklı fonksiyonlar yerine aynı f(x) ve f(y) gibi elemanlar vektör olarak seçilerek işlemler yürütülmüştür. Araştırmanın daha önceki sonuçlarında da ortaya konulduğu üzere öğrencilerin soyut dildeki sorulara analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili cevap verme yüzdesi daha düşüktür. Bu durum formalizm zorluğunun devam ettiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca öğrencilerin testlerde ve ödevlerde zaman zaman cebirsel işlemler yaparken zorlandıkları ve ile hataları yaptıkları belirlenmiştir. Bu durum öğrenciler tarafından da ifade edilmiştir. Her ne kadar bu araştırmada öğrencilerin doğru ve yanlış çözümlerine odaklanılmamış olsa da düşünme biçimlerinin yansıtılmasında cebirsel işlemlerde gerçekleştirilen işlem hataları birer zorluk olarak ortaya çıkmaktadır.

### 6. 1. 8. Duyuşsal Faktörler Öğrencilerin Düşünme Biçimleri Üzerinde Etkili Olabilmektedir

Öğrenciler ve ders öğretmeniyle yapılan görüşler sonucunda elde edilen bulgular ödevlerin sahip oldukları nitelikler ve öğrencilerin düşünme biçimcilerine etkisi hakkında bazı sonuçlar ortaya koymuştur. Görüşler sonucunda ödevlerin tekrar niteliğinde, pekiştirici, düzenli çalışmaya iten, düşündürücü sorulardan oluşan, sınava hazırlayan ve sınav stresini azaltan yönleri ön plana çıkmıştır. İlk bakışta ödevlerin öğrencilerin düzenli çalışarak lineer cebir kavramlarının öğretiminde pekiştirici bir rolü olduğu sonucuna varmak mümkündür. Ancak görüşlerden elde edilen bulgular doğrultusunda sınav kaygısının öğrencilerin hangi düşünme biçimini sergilemesinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Bu nedenle ödevler öğrencilerin kavramlara yönelik öğrenmeleri ve düşünme biçimlerine etkisi bakımından iki boyutta ele alınmıştır.

Ödevlerde tıpkı öğrenme ortamının diğer bileşenleri gibi belli bir yapıya sahip olarak hazırlanmıştır. Kavramların farklı gösterimlerinin yer aldığı sorular somuttan soyuta doğru bir yapıyla sunulmuş ve öğrencilerin en genel formda çıkarımlarda bulunmaları hedeflenmiştir. Sahip olmuş olduğu bu yapıyla birlikte ödevler öğrencileri üzerinde düşünmeye sevk eden sorulardan oluşmuştur. Ödevler bu yönüyle sınıf ortamında ders öğretmeninin rehberliğinde tartışılmış ve öğrenciler düşüncelerini paylaşmıştır. Tartışma ortamı öğrencilerin yanlışlarının ortaya çıkması ve ders öğretmenin bu yanlışları düzeltme fırsatı sunmanın yanı sıra akıl yürütme ve çıkarımda bulunma süreçlerini de içermektedir. Bu bakımdan tartışma ortamı öğrencilerin doğru öğrenmelerine ve düşünme biçimlerinin gelişimine katkıda bulunmuştur.

Ödevler genelleme yapmaya götüren yapısıyla öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimine ulaşmalarına ve sorulara bu şekilde cevap verme alışkanlığı kazandırdığını söyleyebiliriz. Buna gerekçe olarak ilk döngülerden elde edilen gözlemler ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular gösterilebilir. Final testlerinde analitik-yapısal düşünme biçimiyle ilişkili daha kısa cevaplara sahip sorular olmasına rağmen öğrenciler aritmetik ve cebirsel işlemleri içeren daha uzun cevapları daha fazla not kaygısı güderek tercih etmişlerdir. Bu durum literatürde öğrencilerin işlemsel anlamalara güvenmeye eğilimli olmak sonucunun nedenlerinden biri olarak bu araştırmada ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak ödevler öğrencilere sınav öncesi yaşattığı tecrübeler ve genelleme götüren yapısıyla öğrencilerin not kaygısından kaynaklanan sınav streslerini azaltmış ve analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemelerinde etkili olmuştur.

Ayrıca ödevler sahip oldukları yapının yanı sıra öğrencilere düzenli olarak dönütlerin verilmesiyle klasik ödevlerden farklılaşmaktadır. Bu durum öğrencilerin ödevlere karşı sorumluluk bilinci geliştirmelerinde etkili olmuştur. Böylece ödevler öğrenciler tarafından içselleştirilmiştir. Ödevler kavramların geometrik, cebirsel ve soyut formda gösterimlerini içeren birçok farklı problem türünü barındıran, öğrenciler tarafından bir zorunluluk olarak görülen ve onlara genelleme yapma fırsatı sunmasıyla somutluk, gereklilik ve genellenebilirlik ilkelerini tek başına karşılayan bir eğitsel aktivite olarak karşımıza çıkmaktadır.

Sonuç olarak ödevlerin öğretmen öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlayan özellikleri;

1. Kavram Öğretimi (Gelişim)
2. Sınav Kaygısını Azaltma (Ortaya Çıkma)
3. Tartışma Ortamı Oluşturma (Gelişim ve Ortaya Çıkma)

olarak sıralayabiliriz. Bu özellikleriyle ödevler düşünme biçimlerinin sergilenmesinde ve gelişmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

### 6. 1. 9. Yazılımın Sahip Olduğu Bazı Komutlar Öğrenme Açısından Avantajlar Sunmuştur

Geogebra yazılımının sahip olduğu sürgü, girdi alanı, iz açma ve canlandırma komutlarına hemen hemen her bir kavrama yönelik olarak hazırlanan GeoGebra şablonlarında yer verilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular ve araştırmacının üç döngü sonunda edindiği tecrübeler sonucunda kullanılan komutların şablonların daha pratik kullanımına olanak sağladığı, cebirsel ve grafiksel gösterimler arasında köprü kurduğu ve kavramlarla ilişkili somut modellerin görselleştirilmesinde etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Buna göre, girdi alanı komutu cebirsel ve grafiksel gösterimler arasında köprü kurma, iz açma ve canlandırma komutları geometrik temsillerinin görselleştirilmesi, sürgü komutu ise her iki özelliği sağlama bakımından etkili bulunmuştur. Özellikle germe kavramının öğretiminde hazırlanacak bir dinamik matematik yazılımı uygulamasının bu komutları içermesinin uygulamanın etkililiğini artıracağı sonucuna varılmıştır.

## 6. 2. Öneriler

Bu bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar ışığında önerilerde bulunulmuştur.

### 6. 2. 1. Araştırma Sonuçların Dayalı Öneriler

Bu çalışmada lineer cebir öğretimine yönelik olarak tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisi incelenmiştir. Yapılan araştırmanın sonuçlarında da görüldüğü gibi uygulama öncesinde öğrencilerin genellikle sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimine uygulama sonrasında ise daha çok analitik-yapısal düşünme biçimine sahip olduğu görülmüştür. Tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine etkisini birkaç boyutta incelemek mümkündür. Teknoloji kullanımı, hazırlanan etkinlikler ve ders sonrası verilen ödevler her ne kadar öğrenme ortamının farklı bileşenleri olarak görülse de hepsi belli bir yapıda sahip olacak şekilde sistematik olarak uygulanmıştır. Teknoloji kullanımı sadece yazılım kullanarak kavramların dinamik ve geometrik temsillerine yer vermek olarak düşünülmemiştir. Yazılım kullanılarak tasarım ilkeleri doğrultusunda oluşturulan şablonlar çalışma yaprakları ve ödevlerle senkronize bir şekilde uygulanarak teknolojinin öğretim stratejileri ve farklı eğitimsel aktivitelerle desteklenmesi amaçlanmıştır. Öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerin etkisi göz önünde bulundurulduğunda temsil dilleri ve düşünme biçimlerinin iç içe olduğu teknoloji destekli bir öğrenme ortamı vektör uzayları kavramlarının öğretimi için önerilmektedir. Özellikle üç döngü sonunda tasarlanan öğrenme ortamının öğretmenlere vektör uzayları öğretiminde zaman konusunda da avantaj sağladığı görülmüştür.

Dolayısıyla vektör uzaylarının temel kavramlarına odaklı öğrenme ortamı bir bütün olarak uygulanacağı gibi kavram odaklı bir şekilde de uygulanabilir. Örneğin literatürdeki önerileri dikkat alarak daha fazla somutlaştırma ihtiyacı hissedilen kavramlardan biri olan germe kavramına yönelik tasarlanan etkinlikler ayrıca öğretmenler tarafından kullanılabilir. Ayrıca dikkat edilecek noktalardan bir diğeri ise lineer cebir derslerinde teknolojinin içeriğe uygun bir şekilde düzenlenerek tasarımın bir parçası olması gerektiğidir. Çünkü literatürde de yer aldığı gibi basit düzeyde BCS ve DGY kullanımının öğrencilerin anlamalarını kolaylaştırmayacaktır.

Teknolojinin günümüz eğitim dünyasında sınıflardaki yeri yadsınamaz bir boyuttadır. Sadece lineer cebir derslerinden değil ilköğretimden üniversiteye birçok farklı branşta teknolojik materyaller sınıflardaki yerlerini almaktadır. Bununla birlikte geçmişten günümüze ödevlerin kavramların öğretiminde önemli bir yeri olduğunu da unutmamak gerekir. Nitekim bu çalışmada da öğrencilere her hafta düzenli olarak ödevler verilmiştir. Araştırmanın sonuçları ödevlerin yalnızca öğrencilerin öğrenmelerini pekiştirmediğini aynı zamanda sınav stresinden kaynaklanan puan kaygısını azaltarak öğrencilerin analitik-yapısal düşünme biçimi sergilemelerinde etkili olduğunu ortaya koymuştur. Ancak tıpkı teknoloji kullanımında olduğu gibi basit düzeyde, belli bir stratejiyle desteklenmemiş ve dönüt verilmeyen ödevler öğrencilerin anlamalarına katkı sağlaması zor bir ihtimal olarak düşünülmektedir. Temsil dillerinin ders içi etkinliklerde ve ders kitaplarından özensizce kullanımın öğrenciler için bir zorluk olduğu göz önünde bulundurulursa ödevlerinde öğrencilerin ayırımını yapabilecekleri şekilde farklı temsil dillerini içerek şekilde hazırlanması gerekmektedir. Buradan hareketle kavramların geometrik, cebirsel ve soyut temsillerinin yer aldığı, ders öğretmeni tarafından düzenli olarak dönüt verilen ve kavram odaklı ödevlerin vektör uzayları kavramlarının öğretiminde kullanılması önerilmektedir.

Araştırma sonucunda öğrencilerin harf sembollerini kullanma ve yorumlama, denklem çözme ve fonksiyon kavramıyla ilgili zorluklara sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan bu zorluklar direk olarak lineer cebirin kendisiyle ilgili zorluklar değildirler. Matematik birikimli bir ders olduğu için daha önceki dönemlerde temel kavramlarla ilgili var olan eksiklikler yeni kavramların öğrenilmesini güçleştirmektedir. Araştırmanın üniversite ikinci sınıf öğrencileriyle yapılıyor olması gösteriyor ki bu zorluklar her seviyede karşımıza çıkabilmektedir. Bu sebeple fonksiyon kavramı, harf sembolleri kullanma ve yorumlamayla ilgili çalışmalara alt sınıf seviyelerinden itibaren özel olarak önem verilmesi gerekmektedir. Bununla birlikte öğrenciler denklem sistemlerinde ki bilinmeyen ve denklem sayısı arttıkça sistemleri çözme ve elde ettikleri çözümleri nasıl yorumlayacakları konusunda sorun yaşamaktadırlar. Lineer denklem sistemleri ve çözüm kümeleri lineer cebir birinci dönem konuları arasında yer almaktadır. Bu nedenle Lineer Cebir I’de dahil olmak üzere denklem sistemleri ve çözüm kümeleri konusuna dikkat edilmesi gerekmektedir.

Araştırmanın tasarım ilkeleri ortaya konulurken öğrenme ortamında ders öğretmeninin rolünün önemine dikkat çekilmiştir. Ders öğretmeninin öğrenme ortamındaki performansı öğrencilerin da dikkatini çekmiş ve onları motive etmiştir. Burada lineer cebir ders öğretmenleri için dikkat edilecek hususlardan biri tasarlanan öğrenme ortamı ders öğretmeninin sorumluluklarını artırmaktadır. Elbette normal sınıf ortamında da öğretmenlerin sorumlulukları vardır ancak birçok farklı öneri ve tasarım ilkeleri doğrultusunda hazırlanan bir öğrenme ortamı benimsenen öğrenme stratejileriyle birlikte farklı bakış açısına ve ek sorumluluklara ihtiyaç duymaktadır. Bu bakımdan benzer bir öğrenme ortamında yer alacak bir araştırmacıya veya bu tarz bir yaklaşımı benimseyen bir öğretmenin aşağıdaki noktalara dikkat etmesi gerekmektedir:

1. Etkinlikler arasındaki senkronizasyondan sorumlu olmak
2. Tartışma ortamı oluşturmak
3. Öğrencilerle etkileşim içerisinde olmak ve herkese söz hakkı vermek
4. Diller arasındaki geçişlere dikkat etmek

Öğrenme ortamında yer alan etkinlikler birebiriyle uyumlu ve belli bir işleyiş mekanizmasına sahip olduğu için ders öğretmeninin bu işleyişi iyi bir şekilde sürdürmesi etkinliklerin başarılı olmasına önemli bir katkı sağlayacaktır. Bununla birlikte tartışma ortamı oluşturmak öğrencilerin düşüncelerini ifade etmesi ve ders öğretmeninin öğrencilerin hatalarını görmesi bakımından önemlidir. Tasarlanan öğrenme ortamında ödevler ve grup çalışmaları aracığıyla tartışma ortamının sağlanması amaçlanmıştır. Ancak bu araştırma kapsamında da önerilen ödevlerin öğrencileri tartışmaya itecek nitelikte sorulardan oluşması gerekmektedir. Bu süreçte ders öğretmeni bütün öğrencilere söz hakkı vererek hem öğrencilerin motivasyonunu artıracak hem de öğrencilerin dillerin kullanımı ve düşünme biçimlerinin gelişimi hakkında fikir sahibi olacaktır. Tabi ki bu noktada ders öğretmenin de dillerin kullanımına öğrenciler için zorluk teşkil etmeyecek şekilde özen göstermesi ve öğrencileri de bu dilleri kullanmaya teşvik etmesi gerekmektedir.

### 6. 2. 2. İlerde Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Araştırma kapsamında tasarlanan öğrenme ortamında teknolojiyle ilgili gereksinimlerin karşılanabilmesi için GeoGebra yazılımı kullanılmıştır. Geçmişte yapılan çalışmalarla karşılaştırıldığında özellikle 2000’li yıllar ve öncesindeki araştırmalar da araştırmacılar o dönemin teknolojisiyle çalışmalarında bilgisayar cebir sistemi ve dinamik geometri programlarından yararlanmıştır. Ancak gelişen teknolojiyle birlikte yazılımların erişim, pratiklik, birçok özelliği bir arada bulundurma, görsellik ve kavramların dinamik yapısıyla ilgili sağladığı avantajlar geçmişte gerçekleştirmesi zor veya kısıtlı olan durumların günümüzde daha rahat ve anlaşılır bir şekilde uygulanmasına yardımcı olmuştur. Eğitimsel yazılımların gelişimleri takip edildiğinde ilerleyen zamanlarda programların sunduğu avantajların artacağı ve belki de çok farklı bir boyutta derslerde teknoloji kullanımına yer verileceği ön görülmektedir. Özellikle günümüzde sanal gerçeklik ve 3 boyutlu hologram teknolojilerinde yaşanılan gelişmeler eğitim boyutunda ele alınmaya başlanmıştır. Bu bakımdan lineer cebir öğretimi için tasarlanan benzer bir öğrenme ortamında ileride yapılacak çalışmalarda bu tip teknolojilere yer verilmesi önerilmektedir. Bu tip teknolojiler derse olan ilginin artması yanında kavramların görsel temsillerinin sunumu konusunda da ciddi katkılar sunacaktır.

Bu araştırmada tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin düşünme biçimlerine etkisinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu süreçte öğrencilerin düşünme alışkanlıklarına, tutumlarına ve inançlarına odaklanılmamıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin düşünme biçimleri açısından sergiledikleri performans kavrama ve sorunun yapısına göre zaman zaman değişiklikler göstermektedir. Bu bakımdan öğrencilerin düşünme biçimlerini sergilemede sahip oldukları düşünme alışkanlıklarının, tutumlarının veya inançlarının etkisi olup olmadığını veya ne düzeyde olduğunu belirlemek amacıyla detaylı araştırmalar yapılabilir.

Vektör Uzaylarının temel kavramları olan vektör uzay, alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, taban ve boyut araştırmanın odak kavramlarıdır. Lineer dönüşümler, özdeğerler ve özvektörler kavramları bu araştırmanın dışında tutulmuştur. Bu nedenle ileride yürütülecek bir çalışma da tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin bu kavramlar üzerinde düşünme biçimlerinin etkisine bakılabilir.

## 7. KAYNAKLAR


Alves Dias, M. and Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra. *In The Proceedings of PME19, 3*(2), 34-41.

Aydın, S. (2007). Bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir öğrenimine etkisi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 6,* 214-223.

Aydın, S. (2009a). Lineer cebir eğitimi üzerine. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10,* 93-105.

Aydın, S. (2009b). The factors effecting linear algebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*, 1549–1553.

Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi*. Milli Eğitim Dergisi, 149*, 26-31.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik*. İstanbul: Ceren Yayın Dağıtım.

Baki, A., Güven, B. ve Karataş, İ., (2002, Eylül). *Dinamik geometri yazılımı cabri ile keşfederek öğrenme.* V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, ODTÜ, Ankara.

Barab, S. A. and Squire, K. D. (2004). Design-based research: Putting our stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Birinci, D. K. (2016). *Matematik öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını anlayışlarının düşünme yapıları ve uzamsal yetenekleri bağlamında incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Bogomolny, M. (2006). *The role of example-generation tasks in students' understanding of linear algebra* (Unpublished doctoral dissertation). Simon Fraser University, Canada.

Britton, S. and Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(7),* 963–974.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Australia: Kluwer Academic Publisher.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? *The College Mathematics Journal, 24*(1), 29–40.

Çekmez, E. (2013). *Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D. (2015). Investigating students' modes of thinking in linear algebra: The case of linear independence. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 16*(1). Retrieved January 20, 2015 from http://www.cimt.org.uk/journal/index.htm.

Çepni, S. (2007). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (3. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Collins, A. (1992). Towards a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15–22). Berlin: Springer.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. and Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: 25 years of progress* (pp. 455-478). Cambridge, MA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Design-Based Research Collective (2003). Design based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8.

Dikovic, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by webtechnologies: Some examples*. The Teaching of Mathematics, 10,* 109-116.

Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6,* 191–203.

Dogan, H. (2001). *A comparison study between a traditional and experimental first-year linear algebra program* (Unpublished doctoral dissertation). University of Oklahoma, USA

Doğan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations*. Linear Algebra and Its Applications, 432,* 2141–2159.

Doğan, H. (2018). Mental schemes of: Linear algebra visual constructs. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Ed.) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 219-239). Hamburg: Springer International Publishing.

Donevska-Todorova, A. (2018). Fostering students' competencies in linear algebra with digital resources. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Ed.) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 261-276). Hamburg: Springer International Publishing.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 29,* 175–197.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory, *Historia Mathematica, 22*(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications (275), 14,* 141–160.

Dorier, J. L. (2000). *On the teaching of linear algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. and Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85–124). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J. L. and Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics of university level* (pp. 255–273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university. *Proceedings of ICM, 3*, 875-884.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (pp. 85-105). Washington: Mathematical Association of America.

Dreyfus, T. and Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 93-112.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105-121.

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş: Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Glesne, C. (2012). *Nitel araştırmaya giriş* (A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu, Çev.). Ankara: Anı Yayıncılık.

Goldenberg E. P. (1999). Principles, art, and craft in curriculum design: The case of connected geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4,* 191-224.

Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics mathematics education* (pp. 40-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and Its Applications, 379,* 491-501.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2003). Dinamik geometri yazılımı cabri ile geometri öğrenme: Öğrenci görüşleri. *Turkish Online Journal of Educational Technology, 2*(2), 10-18

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sınıf ortamı tasarımları. *İlköğretim Online, 3*(1), 25-34.

Hadded, M. (1999). *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra-a personal experience* (Unpublished master's thesis). Concordia University, Canada.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 29-32.

Harel, G. (1989a). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, *Focus on Learning Problems in Mathematics 11,* 139-148.

Harel, G. (1989b). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: Aspects of familiarity and mode of representation, *School Science and Mathematics, 89,* 49-57.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high school students basic notions in linear algebra, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 21,* 387-392.

Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching of linear algebra: Old and new observations. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hazzan, O. and Goldenberg E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1,* 63-291.

Herrington, J. A., McKenney, S., Reeves, T. C. and Oliver, R. (2007). Design-based research and doctoral students: Guidelines for preparing a dissertation proposal. In C. Montgomerie & J. Seale (Eds.), *Proceedings of EdMedia 2007: World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia & Telecommunications* (pp. 4089-4097). Chesapeake, VA: AACE.

Hillel, J. and Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. *The Proceedings PME 18, 2*, 65-72.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hohenwarter, M. and Jones, K. (2007). BSRLM geometry working group: Ways of linking geometry and algebra, the case of GeoGebra. *Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Hohenwarter, M. and Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications, 7,* Article ID: 1448

Hoyles, C. and Noss, R. (1994). Dynamic geometry environment: What's the point? *The Mathematics Teacher, 87*(9), 716-717.

Hristovitch, S.P. (2001). *Students' conception of introductory linear algebra notions: The role of metaphors, analogies and symbolization* (Unpublished doctoral dissertation). Purdie University, USA.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim-Online, 2*(2), 2-9.

Klasa, J. (2009). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple*. Linear Algebra and its Applications, 432,* 2100–2111.

Konyalıoğlu, A. C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları ile ilgili kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Konyalıoğlu, S., Konyalıoğlu, A. C., İpek, S. and Işık, A. (2005). The role of visualization approach on studentís conceptual learning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 7*(1), 59-67.

Konyalıoğlu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S. and Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15,* 4040–4044.

Kolman, B. and Hill, D.R. (2008). *Elementary linear algebra and its applications* (9th ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Kuzu, A., Çankaya, S. ve Mısırlı, A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 1*(1), 19-35.

Kutluca, T. ve Zengin, Y. (2011). Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 17,* 160-172.

Küchemann, D. E. (1998). Algebra. In K. Hart, M. L. Brown, D. M. Kerslake, D. E. Küchemann & G. Ruddock (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: Athenaeum Press.

Little, D. (2008). *American orientalism: The United States and the Middle East since 1945*. North Carolina: University of North Carolina Press.

Lu, A. Y. W. (2008). English and Taiwaneses upper secondary teachers' approaches to the use of GeoGebra. *Acta Scientiae, 10*(2), 38-55.

Medina, E. (2000). *Student understanding of span, linear independence, and basis in an elementary algebra class* (Unpublished doctoral dissertation). University of Northern Colorado, USA.

Muhundan, A. (2005). *Effects of using graphing calculators with a numerical approach on students' learning of limits and derivatives in an applied calculus course at a community college* (Unpublished doctoral dissertation). University of South Florida, USA.

National Council of Teachers of Mathematics [NTCM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: VA.

Nardi, E. (1997). The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: A concept image of spanning sets in vectorial analysis. *Educación Matemática, 91*(1), 47-60.

Parker, C. F. (2010). How intuition and language use relate to students' understanding of span and linear independence in an elementary lineer algebra class (Unpublished doctoral dissertation). University of Northern Colorado, USA.

Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31,* 181-186.

Pierce. R. and Stacey, K. (2002). Monitoring effective use of computer algebra systems. In B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuck & M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 575-582). Auckland: MERGA.

Reeves, T. C. (2000, April). *Enhancing the worth of instructional technology research through "design experiments" and other development research strategies.* Paper presented at the International Perspectives on Instructional Technology Research for the 21st Century, New Orleans, LA.

Richey, R. T. and Nelson, W. A. (1996). Developmental research. In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1213-1245). New York: Macmillan.

Robert, A. and Robinet, J. (1989). *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG*, Cahier de Didactique des Mathématiques nº53, IREM de Paris VII.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. and Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(1), 7-41.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. and Linchevski, L. (1994). The gain and the pitfalls of reification-the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Soylu, Y. (2005). *Lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramların öğretilmesinde geometri ile somutlaştırma yönteminin etkinliği* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Erzurum.

Stacey, K. and MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(2), 149-167.

Stewart, S. and Thomas, M. O. J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(7), 927–937.

Stewart, S. (2008). *Understanding linear algebra concepts through the embodied symbolic and formal worlds of mathematical thinking* (Unpublished doctoral dissertation). Auckland University, New Zelland

Stewart, S. and Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 173–188.

Stringer, E. (1999). *Action research: A hand book for practitioners* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tabaghi, S. G. (2012, February). *Dynamic geometric representation of eigenvectors*. Paper presented at the Research in Undergraduate Mathematics Education Conference, Portland, OR.

Tabaghi, S. G. and Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning, 18*(3), 149-164.

Tuluk, G. ve Kaçar, A. (2007). Bilgisayar cebiri sistemlerinin (BCS) fonksiyon kavramının öğretiminde etkisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 15*(2), 661-674.

Turğut, M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Turğut, M. (2018). How does a dynamic geometry system mediate students' reasoning on 3d linear transformations? In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Ed.) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 241-259). Hamburg: Springer International Publishing.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. Van den Akker, N. Nieveen, R. M. Branch, K. L. Gustafson & T. Plomp (Eds.), *Design methodology and developmental research in education and training* (pp. 1-14). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Walker, D. F. (1992). Methodological issues in curriculum research. In P. Jackson (Ed.), *Handbook of research on curriculum* (pp. 98-118). New York: Macmillan.

Wang, F. and Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5-23.

Wawro, M., Sweeney, G.F. and Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics, 78*(1), 1–19.

Williams, G. (2009). *Linear algebra with applications* (8th ed.). USA: Jones & Bartlett Learning, LLC, an Ascend Learning Company.

Wu, H. (2004). Computer aided teaching in linear algebra. The China Papers, July, 100-102.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayınları.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (5. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zamora, A. (2010). *Use of cognitive constructs in linear algebra* (Unpublished doctoral dissertation). University of Texas at El Paso, Department of Mathematical Science, USA.

Zaskis, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(4), 429-439.

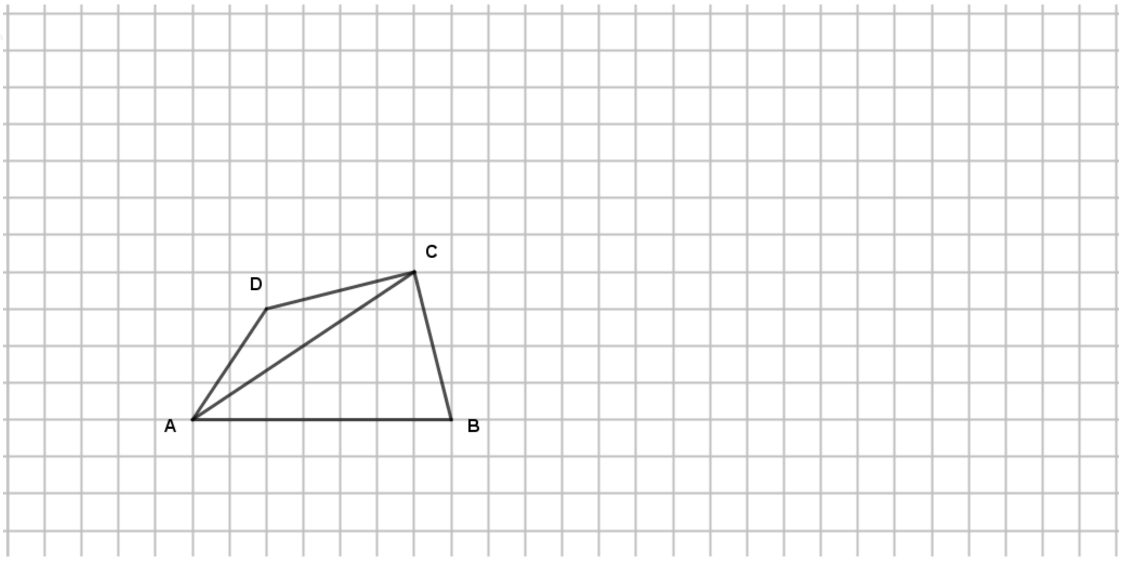
# 8. EKLER

## Ek 1. Başlangıç Testi

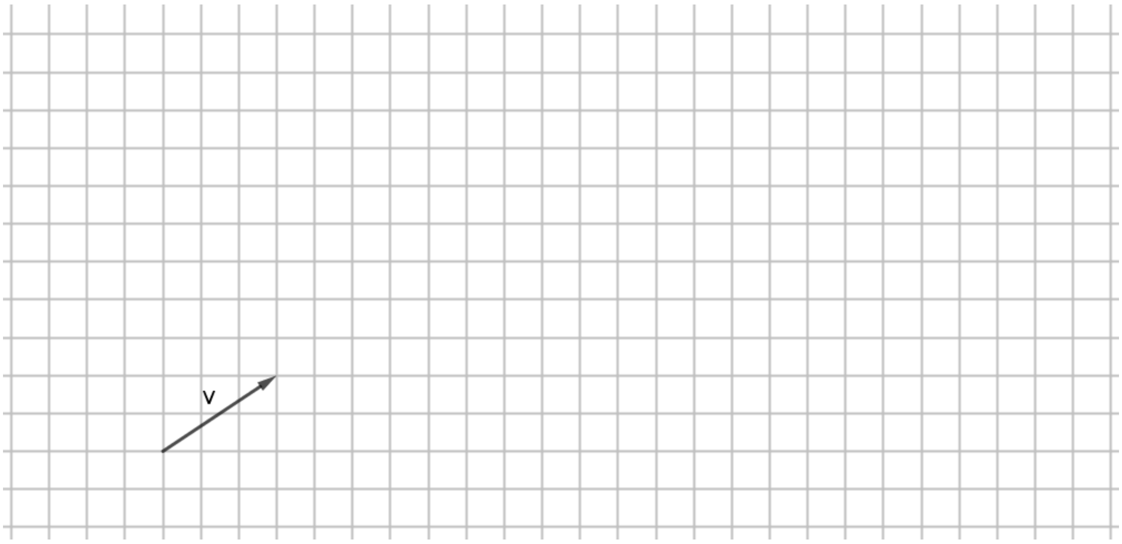
**1.** Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.

**2.** a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ vektör toplamını bulunuz

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ vektör toplamını bulunuz.




**3.** Aşağıdaki şekilde **v** vektörü verilmiştir. Buna göre (**a)** 2v, (**b)**-3v ve (**c) -** $\frac{1}{2}$v vektörlerini bulunuz.



Ek1'in Devamı

**4.** u = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ve v = $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektörleri veriliyor. Buna göre -3u + 4v vektörünü bulunuz.

**5.** **v** bir vektör **k,m** birer reel skaler olmak üzere **k.v + m.v** toplamı için ne söylenebilir?

**6.** A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ve B = $\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A^{-1}$ = B olup olmadığını gösteriniz.

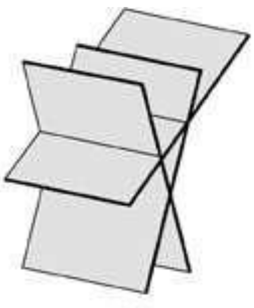
Ek1’in Devamı

**7.** $y + z = 2$
$x + 2y + z = 3$
$x + y + (a^2 - 5)z = a$

Lineer denklem sistemi veriliyor. “$a$” nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.



**8.** Aşağıdaki bir lineer denklem sisteminin geometrik temsili yer almaktadır. Verilen lineer denklem sisteminin çözümü hakkında ne söylenebilir? Gerekçelendirerek yazınız.



## Ek 2. Final Testi

**SORULAR**

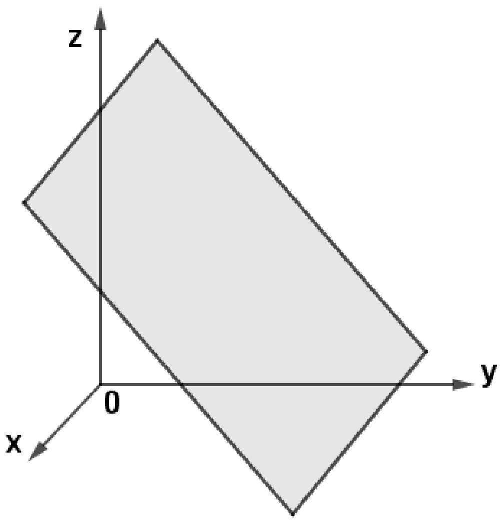
**1.** Tüm pozitif reel sayılar kümesi üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlanmış olsun;

$$x, y \in R^{+} için\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}$$
$$x \in R^{+}\ ve\ k \in R\ için\ \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$$

$R^{+}$ nın tanımlanmış bu işlemlere göre bir vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz (20p)

**2.** a) $A = \{(a, b, c) \mid c = a + 2b;\ a, b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)

b) Aşağıdaki şekilde verilen düzlemin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)



Ek 2’nin Devamı

**3.** S = $\{x^2 + 1, x - 1, x^2 + x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)

**4.** $v_1$,$v_2$,$v_3$ ve $v_4$ bir V vektör uzayında vektörler olsun. **{$v_1$,$v_2$,$v_3$} lineer bağımsız bir küme ise;**

a) {$v_1$,$v_2$} lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

b) {$v_1$,$v_2$,$v_3$, $v_4$} lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz. (15p)

**5.** Aşağıda verilen kümelerin her birinin $R^3$ standart vektör uzayı için bir taban olup olmadıklarını gösteriniz. (15p)

A = {(1, 0, 1), (2, -1, 3), (-4, 2, -6)}

B = {(1, 1, 1), (2, 1, 3), (5, 0, 0), (-1, -2, 4)}

C = {(2, 0, 1), (1,-1, 3), (0, 2, 1)}

**6.** $\{v_1, v_2, v_3\}$ bir V vektör uzayının tabanı olsun. Bu durumda;
$u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ ve $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ şeklinde tanımlanan $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi de V vektör uzayının tabanıdır. Gösteriniz. (15 p)

## Ek 3. Öğrenme Ortamına İlişkin Mülakat Öğrenci Soruları

**ÖĞRENME ORTAMI**

1) Bilgisayar destekli öğrenme ortamı ile normal sınıf ortamını karşılaştıracak olursanız hangisini tercih ederdiniz? Tercih nedenleriniz nelerdir?
2) Öğrenme ortamının varsa eksik yanlarından bahseder misiniz? (Teknik problem yaşanıp yaşanmadığı, dersler sırasında sıkılma yaşanıp yaşanmadığı, eğer yaşanmışsa sıkılmanın kaynağı, vs)
    - Varsa yaşadığınız problemlerde ders hocası ve araştırmacının katkısı sorunu çözmeniz yardımcı oldu mu?

**YAZILIM**

1) Konunun öğretiminde yazılımı kullanışlı buluyor musunuz?
2) Vektör uzayları ile ilgili temel kavramları öğrenmede Geogebra yazılımının kullanılmasının etkili olduğunu düşünüyor musunuz? Yazılımı kullanmak konuyu anlamanızı kolaylaştırdı mı? Örnekler vererek açıklayınız.
3) Zaman zaman derslerde Geogebra şablonları kullandık. Hazırlanan şablonların tasarımı hakkında ne düşünüyorsunuz?
4) Ders sırasında yazılımı kullanmada karşılaştığınız problemler oldu mu? Olduysa ne gibi problemler, açıklayınız.
    (Genel olarak dersler sırasında GeoGebra'yı kullanmanın sağladığı artılar ve eksiler nelerdir?)

**ÖDEVLER**

1) İşlenen dersler sonrasında verilen ödevlerin (görevlerin) öğrenmeniz üzerinde nasıl etkisi olduğunu düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
2) Ödevlerle ilgili dönüt almanızın konuyla ilgili öğrenmeleriniz üzerinde nasıl etkisi olduğunu düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
    Dönütler konuyu anlamanıza ne derece etkili oldu?
3) Ödevlerde yer alan soruların niteliği hakkında ne düşüyorsunuz?
4) Konunun öğretiminde düzenli olarak ders sonrası verilen ödevler (görevler) hakkındaki olumlu veya olumsuz düşünceleriniz nelerdir? (Konuyu öğrenmedeki artıları veya eksileri)

**GRUP ÇALIŞMASI VE ETKİNLİKLER**

1) Laboratuvarda işlenen derslerinin grup çalışması şeklinde yapılması hakkında ne düşünüyorsunuz?
    - Sizi nasıl etkilediğini açıklayınız.
    - Öğrenmenize olumlu veya olumsuz bir etkisi oldu mu? Açıklayınız.
2) Çalışma yapraklarıyla dersin işlenmesi öğrenmenizi nasıl etkiledi? Varsa olumlu ve olumsuz yönlerini açıklar mısınız?
    - Çalışma yapraklarının tasarımı ve niteliği hakkında ne düşüyorsunuz?

Ek 3'ün Devamı

- Çalışma yapraklarındaki etkinlikleri tamamlarken (varsa) yaşadığınız problemler nelerdir?

(Genel olarak derslerin GeoGebra kullanmayı gerektiren çalışma yapraklarıyla ve grup çalışması şeklinde yürütülmesi hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?)

**MOTİVASYON**

1) Derslerin laboratuvarda işlenmesi hakkında ne düşünüyorsunuz? Laboratuvarda işlenen dersler, derse katılımınızı nasıl etkiledi?
2) Bilgisayar destekli öğrenme ortamı sizi derste aktif kıldı mı?
3) Dersin bu şekilde işlenmesi matematik öğrenmeye karşı bakış açınızı değiştirdi mi? Açıklayabilir misiniz?
   - Kendinize daha fazla güvendiğinizi söyleyebilir misiniz?

## Ek 4. Öğrenme Ortamına İlişkin Mülakat Öğretmen Soruları

**ÖĞRENME ORTAMI**

1) Bilgisayar destekli bir öğrenme ortamı ile vektör uzayları derslerini yürüttünüz. Normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız ne gibi farklılıklardan bahsedebilirsiniz?
    - Hangisini tercih edersiniz. Tercih nedenleriniz nelerdir?

2) Öğrenme ortamının varsa eksik yanlarından bahseder misiniz?
    - Varsa yaşadığınız problemleri nasıl aştınız?

**YAZILIM**

3) Konunun öğretiminde yazılımı kullanışlı buluyor musunuz? Neden?

4) Vektör uzayları ile ilgili temel kavramları öğretmede Geogebra yazılımının kullanılmasının ne derecede etkili olduğunu düşünüyorsunuz?
    - Yazılımı kullanmak işiniz kolaylaştırdı mı? Neden?
    - Kavramların öğretiminde somutlaştırma sağladı mı?
    - Öğrencilerin anlamaları üzerinde nasıl bir etkisi olduğunu düşünüyorsunuz? Örnekler vererek açıklayabilir misiniz?

5) Kavramların öğretimi için hazırlanan Geogebra şablonlarının tasarımı ve kullanışlığı hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

6) Ders sırasında yazılımdan kaynaklanan problemler oldu mu? Olduysa ne gibi problemler, açıklayınız. (Problemlerin aşılmasında neler etkili oldu?)
    - Yazılımın potansiyeli ders için yeterli miydi? Uygun bir yazılım mı?
    - Genel olarak dersler sırasında GeoGebra'yı kullanmanın sağladığı artılar ve eksiler nelerdir? Açıklayınız.

**ÖDEVLER**

7) Daha önceki dönemlerde vektör uzayları konusunu anlatırken bu şekilde bir yapılandırılmış ödevlendirme yaptınız mı?

8) Daha önceki dönemlerle karşılaştırdığınızda ödevlerin öğrencilerin konuyla ilgili öğrenmeleri üzerine nasıl etki ettiğini düşünüyorsunuz?

9) Konunun öğretiminde düzenli olarak ders sonrası verilen ödevler (görevler) hakkındaki olumlu veya olumsuz düşünceleriniz nelerdir?

10) Ödevlerin öğrencilerin derse karşı tutumlarına olumsuz etkisi olduğunu düşünüyor musunuz? Bu şekilde bir görevlendirmeyi sonraki yıllarda tekrar yapar mısınız?

Ek 4’ün Devamı

**GRUP ÇALIŞMASI VE ETKİNLİKLER**

11) Laboratuvarda işlenen derslerinin grup çalışması şeklinde yapılması hakkında ne düşünüyorsunuz?
    - Öğrencilerinizi nasıl etkilediğini açıklayınız.
    - Öğrencilerin öğrenmelerine olumlu veya olumsuz nasıl bir etkisi olduğunu düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

12) Çalışma yapraklarıyla dersin yürütülmesi hakkında ne düşünüyorsunuz? Varsa olumlu ve olumsuz yönlerini açıklar mısınız?
    - Çalışma yapraklarının tasarımı ve niteliği hakkında ne düşüyorsunuz?
    - Çalışma yapraklarındaki etkinlikleri tamamlarken (varsa) öğrencilerinizin yaşadığı problemler nelerdir?

    (Genel olarak derslerin GeoGebra kullanmayı gerektiren çalışma yapraklarıyla ve grup çalışması şeklinde yürütülmesi hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?)

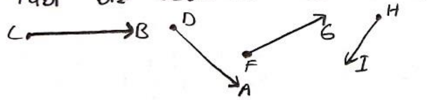
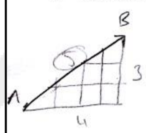
**MOTİVASYON**

13) Derslerin laboratuvarda işlenmesi hakkında ne düşünüyorsunuz?
    - Laboratuvarda işlenen dersler sizi nasıl etkiledi?
    - Laboratuvarda işlenen derslerin yürütülme şeklinin öğrencilerinizin öğrenmeleri konusundaki motivasyonunda bir değişiklik oluşturup oluşturmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?

14) Bilgisayar destekli öğrenme normal sınıf ortamı ile karşılaştıracak olursanız bir öğretmen olarak sizi derste ki pozisyonunuzu nasıl değiştirdi? Artı ve eksileri nelerdir?

15) Dersin bu şekilde işlenmesi matematik öğretmeye karşı bakış açınızı değiştirdi mi? Açıklayabilir misiniz?

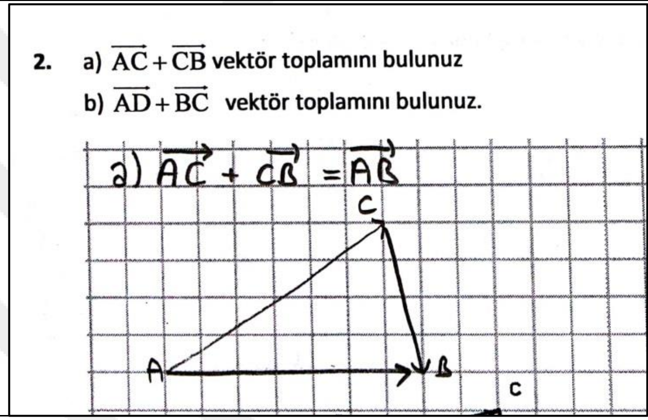
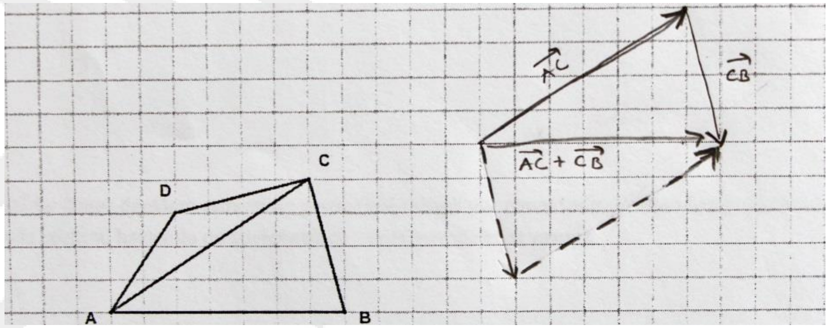
**Ek 5. Başlangıç Testi Değerlendirme Rubriği**

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Geometrik | VT | Vektörün tanımını yapma | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız. Belirli bir yönü, doğrultusu ve büyüklüğü olan doğru parçası. |
| | | VB | Vektörü geometrik elemanlarla (doğru, ışın şekil gibi) betimleme | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız. Uzayda yönü, doğrultusu ve büyüklüğü olan bir noktası bir kordinata sabitlenmiş diğer noktası sonsuza giden doğrudur. |
| | | VÇ | Vektörün geometrik temsilinin çizimini yapma | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız. Bir başlangıç noktası olan ve sonsuza uzanan ısındır bence. Tabi biz vektörleri sınırlandırabiliriz de.   Bunların hepsi birer vektördür. |
| | Aritmetik | VAT | Vektörü analitik düzlemdeki temsiliyle gösterme | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız.   Koordinat sisteminde yada uzayda bir (x,y) veya (x,y,z) noktasından başlayıp başka bir noktada biten, yönü olan ve gerekirse pisagor yöntemiyle bulunan bir uzaklık birimidir. |

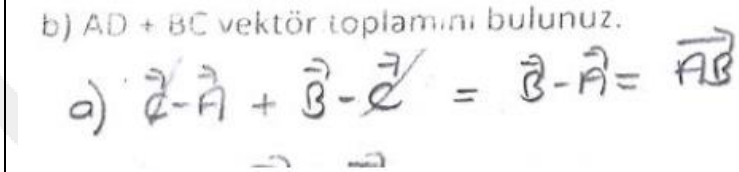
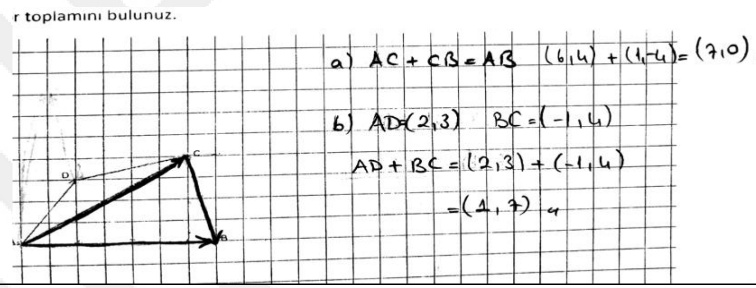
Ek 5'in devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | VAS | Vektörü sıralı ikili, sıralı üçlü veya sıralı n'li olarak yazma | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız. Başlangıç noktası koordinat düzleminde (x,y) şeklinde veya $R^3$ te (x,y,z) biçiminde olan belirli bir uzunluğa sahip ışınlara vektör denir. |
| | | VM | Vektörü sütün matrisi olarak yazma | $R^2$ de P(x,y) yönlü doğru parçası $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $R^3$ de P(x,y,z) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olarak gösterilir. |
| | Yapısal | VUE | Vektör uzayının bir elemanı olarak ifade etme | 1. Vektör kavramını kendi ifadelerinizi kullanarak açıklayınız. Vektör kavramı çok geniştir. Belli bir tanımla sınırlamak mümkin değildir. Vektör uzayında aldığımız herbir eleman vektördür. Matrisler, sıralı ikililer, denklemler hatta içinde bulunduğumuz oda bile... |
| | | VDS | Vektörü, bir denklik sınıfı olarak ifade etme | Yönlü doğru parçaları arasında paralellik bağıntısı denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı tüm yönlü doğru parçaları kümesini denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının her birine vektör denir. |

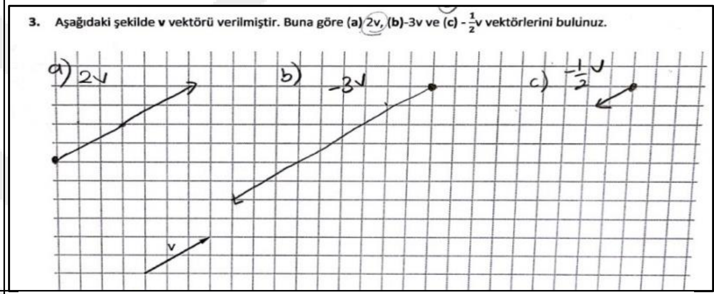
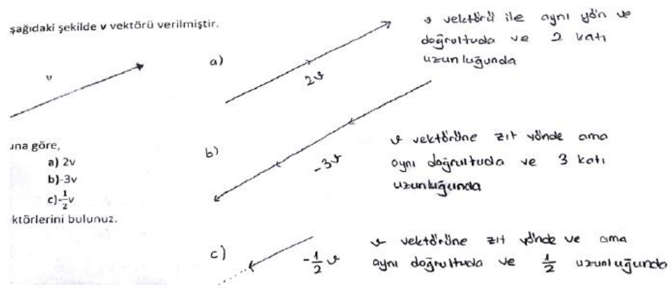
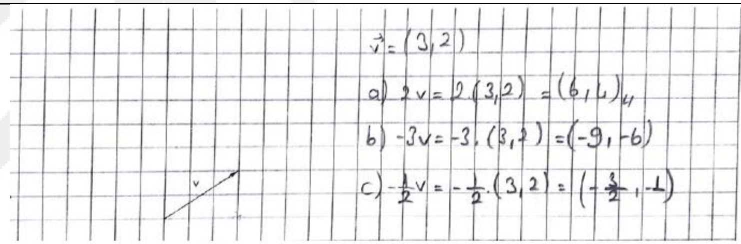
Ek 5'in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 2 | Geometrik | VU | Uç uca ekleme yöntemini kullanma |  |
| | | VP | Paralel kenar yöntemi |  |

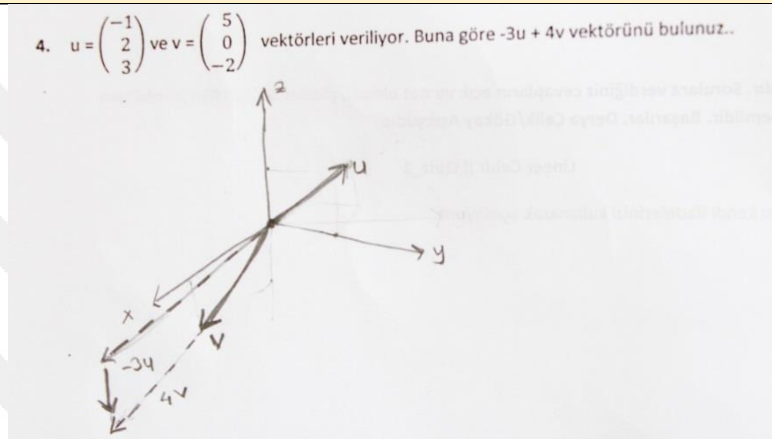
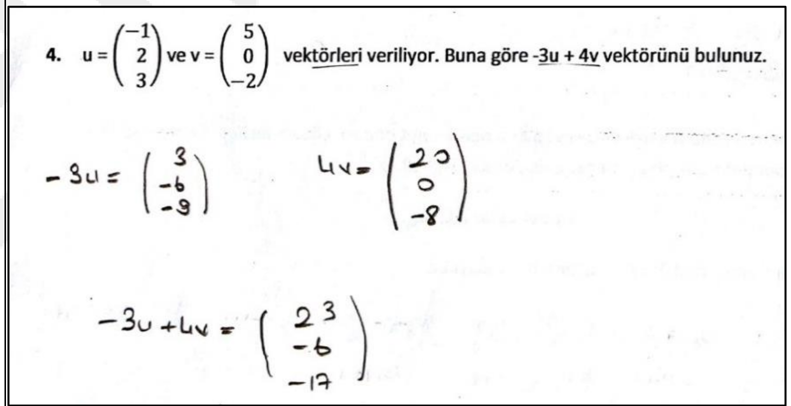
Ek 5’in devamı

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2">Aritmetik</td>
<td>VC</td>
<td>Vektörlerin cebirsel temsilleri ile işlem yapma</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>VK</td>
<td>Koordinat atayarak işlem yapma</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

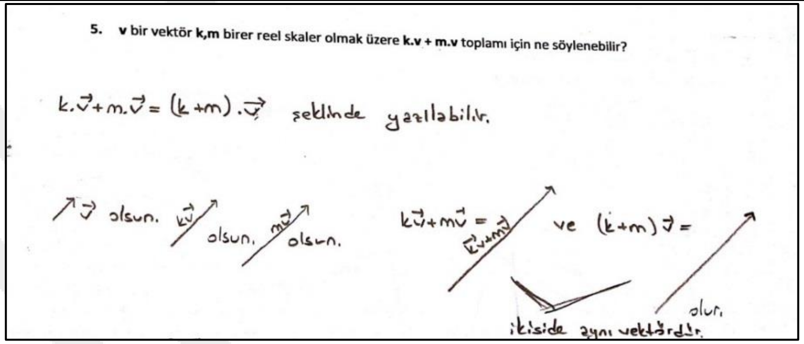
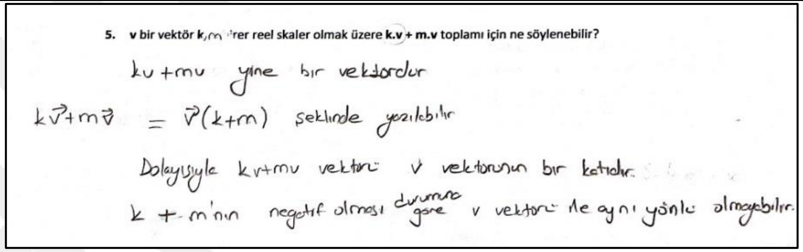
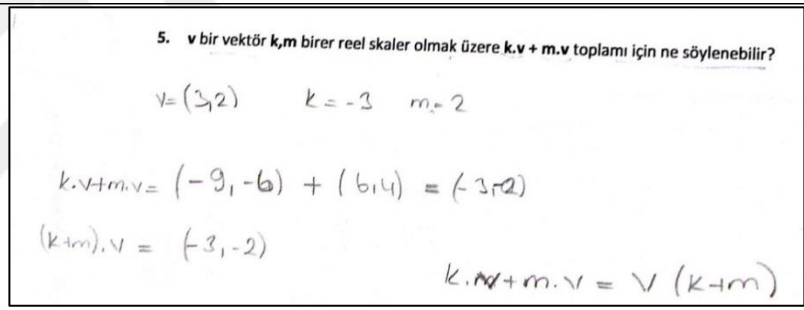
Ek5'in Devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Geometrik | VÇ | Vektörlerin skalerlerle çarpımının geometrik temsilinin çizimini yapma |  |
| | | VS | Vektörlerin skalerlerle çarpımının geometrik temsilinin sözel olarak açıklama |  |
| | Aritmetik | VK | Koordinat atayarak işlem yapma |  |

Ek 5'in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 4 | Geometrik | VÇ | Geometrik temsillerin çizimiyle işlem yapma |   |
| | Analitik | VA | Vektörle aritmetik işlem yapma |   |

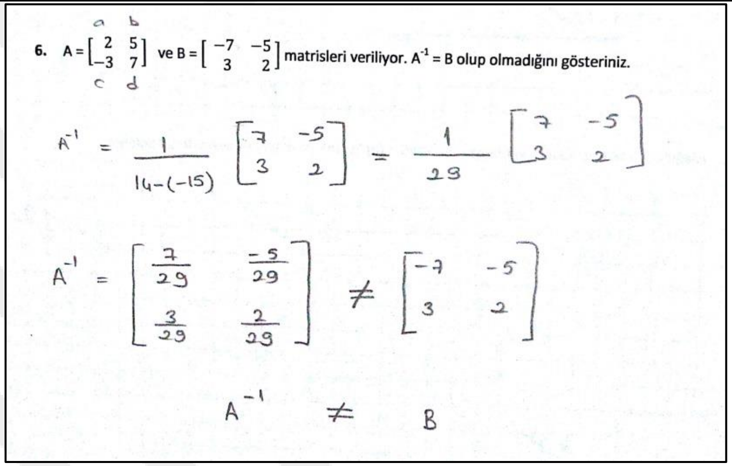
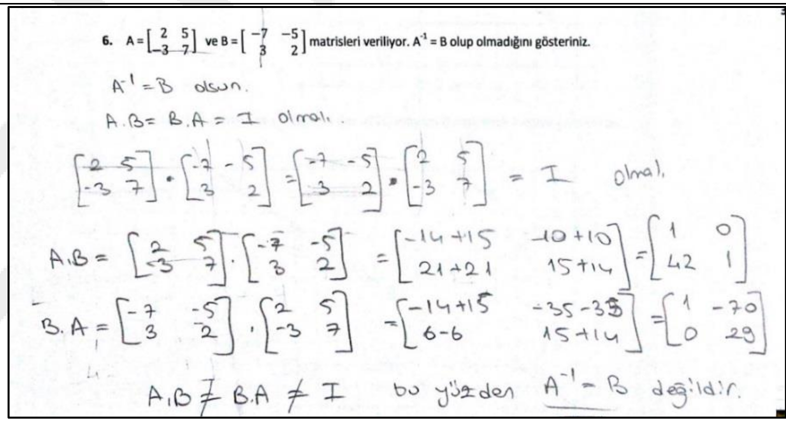
Ek 5'in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 5 | Geometrik | VÇ | Vektörün geometrik temsilinin çizimini yapma | <br>5. **v** bir vektör **k,m** birer reel skaler olmak üzere **k.v + m.v** toplamı için ne söylenebilir?<br>$k.\vec{v}+m.\vec{v}=(k+m).\vec{v}$ seklinde yazılabilir.<br>$\vec{v}$ olsun. $k\vec{v}$ olsun. $m\vec{v}$ olsun. $k\vec{v}+m\vec{v}=$ ve $(k+m)\vec{v}=$ olur.<br>ikiside aynı vektördür. |
| | | VYD | k+m'nin alacağı değerlere göre yönü ve doğrultusunu bildirme | <br>5. **v** bir vektör **k,m** birer reel skaler olmak üzere **k.v + m.v** toplamı için ne söylenebilir?<br>ku + mu yine bir vektördür<br>$k\vec{v}+m\vec{v}=\vec{v}(k+m)$ seklinde yazılabilir<br>Dolayısıyla k.v+mv vektörü v vektörünün bir katıdır.<br>k + m'nin negatif olması durumuna göre v vektörü ile aynı yönlü olmayabilir. |
| | Aritmetik | VSD | Sayısal değerler vererek aritmetik işlemler yapma | <br>5. **v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?**<br>v=(3,2) k=-3 m=2<br>k.v+m.v= (-9,-6) + (6,4) = (-3,-2)<br>(k+m).v = (-3,-2)<br>k.v+m.v = v (k+m) |

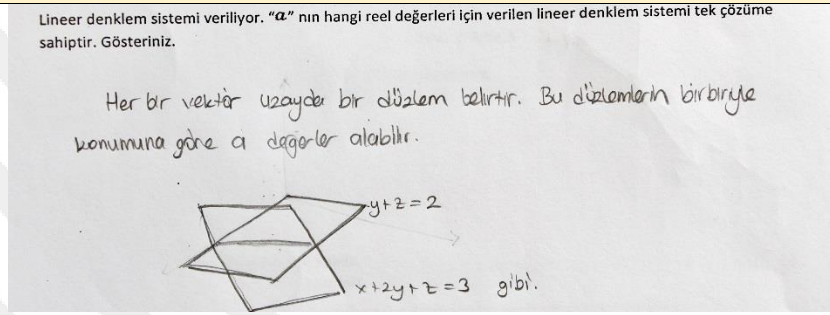
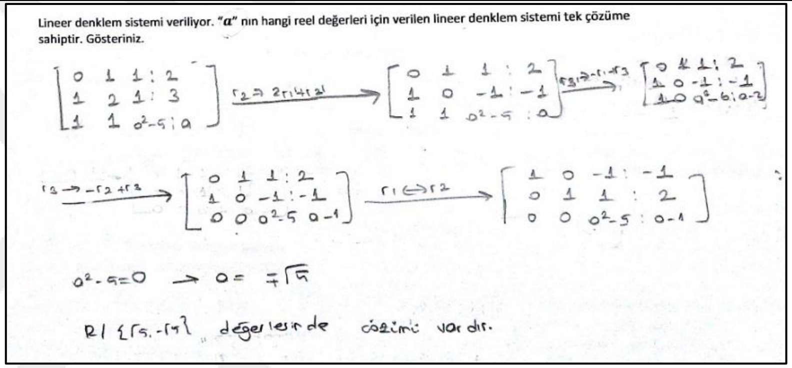
Ek 5'in devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | VCD | Vektörü sıralı ikili veya üçlü şeklinde alarak cebirsel işlemler yapma | 5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?<br>$v = (a,b)$ olsun<br>$k.v + m.v = k.(a,b) + m(a,b) = (a(k+m), b(k+m))$ olur. Yani reel skalerlerin toplamı kadar, vektörün katı alınmış olur. v vektörünün (k+m) ile çarpılması demek olur. |
| | | VV | kv+mv vektörünü, v vektörünün (k+m) katı olan bir vektör olarak ifade etme | 5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?<br>$k.v + mv = v(k+m)$ yani v vektörünün (k+m) katı olan vektördür. |
| | Yapısal | VVU | kv+mv vektörünü, vektör uzayı aksiyomlarıyla ilişkilendirerek açıklama | 5. v bir vektör k,m birer reel skaler olmak üzere k.v + m.v toplamı için ne söylenebilir?<br>v bir vektör ise bir vektör uzayının elemanıdır.<br>Vektör uzayının özelliklerinden; $(k+m)v = kv + mv$ söylenebilir. |

Ek 5'in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 6 | Aritmetik | MTK | A matrisinin tersini hesaplayarak B matrisiyle karşılaştırma | <br>6. $A=\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A^{-1}=B$ olup olmadığını gösteriniz.<br>$A^{-1}=\frac{1}{14-(-15)}\begin{bmatrix}7&-5\\3&2\end{bmatrix}=\frac{1}{29}\begin{bmatrix}7&-5\\3&2\end{bmatrix}$<br>$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{29}&\frac{-5}{29}\\\frac{3}{29}&\frac{2}{29}\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}$<br>$A^{-1}\neq B$ |
| | Yapısal | MY | Matrislerin çarpımını birim matrisle karşılaştırma | <br>6. $A=\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A^{-1}=B$ olup olmadığını gösteriniz.<br>$A^{-1}=B$ olsun.<br>$A.B=B.A=I$ olmalı.<br>$\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}=I$ olmalı.<br>$A.B=\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14+15&-10+10\\21+21&15+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\42&1\end{bmatrix}$<br>$B.A=\begin{bmatrix}-7&-5\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14+15&-35-35\\6-6&15+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-70\\0&29\end{bmatrix}$<br>$A.B\neq B.A\neq I$ bu yüzden $A^{-1}=B$ değildir. |

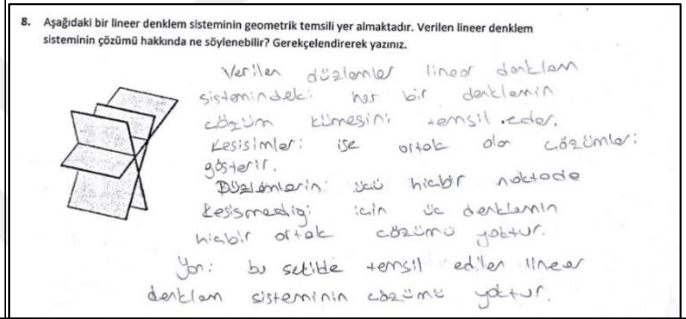
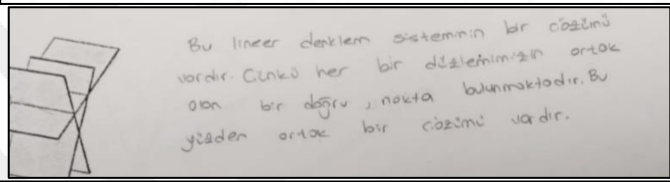
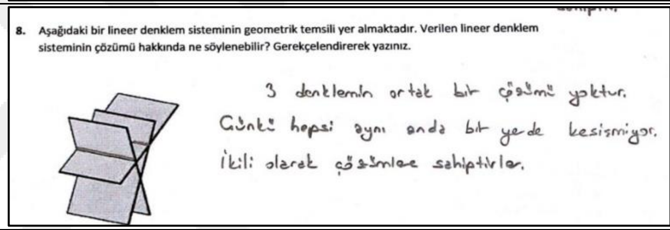
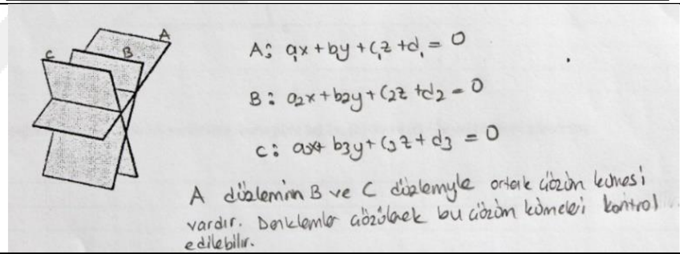
Ek 5’in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 7 | Geometrik | LDD | Lineer denklem sistemini düzlem denklemleriyle ilişkilendirerek açıklama yapma |  Lineer denklem sistemi veriliyor. "$a$" nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.<br>Her bir vektör uzayda bir düzlem belirtir. Bu düzlemlerin birbiriyle konumuna göre a değerler alabilir.<br> |
| | Aritmetik | MK | Katsayılar matrisi kullanılarak |  Lineer denklem sistemi veriliyor. "$a$" nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.<br>$\begin{bmatrix}0&1&1&:2\\1&2&1&:3\\1&1&a^2-5&:a\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \Rightarrow 2r_1(-1)+r_2} \begin{bmatrix}0&1&1&:2\\1&0&-1&:-1\\1&1&a^2-5&:a\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \Rightarrow -r_1+r_3} \begin{bmatrix}0&1&1&:2\\1&0&-1&:-1\\1&0&a^2-6&:a-2\end{bmatrix}$<br>$\xrightarrow{r_3 \to -r_2+r_3} \begin{bmatrix}0&1&1&:2\\1&0&-1&:-1\\0&0&a^2-5&a-1\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix}1&0&-1&:-1\\0&1&1&:2\\0&0&a^2-5&:a-1\end{bmatrix}$<br>$a^2-5=0 \rightarrow a=\mp\sqrt{5}$<br>$R/\{\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$ değerlerinde çözümü vardır. |

Ek 5'in devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | MÇ | Denklem çözme teknikleri kullanılarak | Lineer denklem sistemi veriliyor. "$a$" nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.<br>$\to y+z=2$<br>$z=2-y$<br>$\to x+2y+2-y=3$<br>$x+y=1$<br>$\to x+y+(a^2-5)z=a$<br>$1+(a^2-5)z=a$<br>$(a^2-5)z=a-1$<br>$z=\frac{a-1}{a^2-5}$<br>$y=2-z$<br>$x=2-1$<br>$z=\frac{a-1}{a^2-5}$<br>o halde a'nın her bir reel değeri için denklem sistemi tek çözüme sahiptir |
| | | MD | Denklemde yer alan bilinmeyenlere değer verme | 7. $y+z=2$<br>$x+2y+z=3$<br>$x+y+(a^2-5)z=a$ → a'nın 2 ve −2 değerleri için tek çözüme sahip.<br>Lineer denklem sistemi veriliyor. "$a$" nın hangi reel değerleri için verilen lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Gösteriniz.<br>$a^2-5=1$ olsun<br>$a^2=4$ , $a=\mp 2$'dir.<br>$a=2$ olsun.<br>$y+z=2$<br>$x+2y+z=3$<br>$x+y+z=2$<br>ise $x=0$'dır.<br>2. denklemde $x=0$'ı yerine yazarsak $2y+z=3$ ve $y+z=2$ olduğundan $y=1$'dir. Yine $y+z=2$ old. $z=1$ Ç.K $=\{(0,1,1)\}$ |
| | Yapısal | MR | Regüler matrisin tersini kullanma | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-5 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalı $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-5 \end{vmatrix} \neq 0$<br>$(2+a^2-5)-2\neq 0,\ a^2-5\neq 0 \Rightarrow a\neq \mp\sqrt{5}$ |

Ek 5'in devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 8 | Geometrik | DY | Düzlemlerin ortak kesişim değerlerine sahip olmadıklarını belirterek çözüm kümesini boş küme olarak ifade etme |  |
| | | DB | Düzlemlerin geometrik temsilleriyle ilgili betimleme yapma |  |
| | | Dİ | Düzlemlerin ikişerli çözümleri olduğu ancak üçünün çözüm kümesinin boş küme olduğunu ifade etme |  |
| | Aritmetik | DC | Düzlemlerin geometrik temsillerine karşılık gelebilecek lineer denklem sistemlerinin cebirsel temsillerini yazarak açıklama yapma |  |

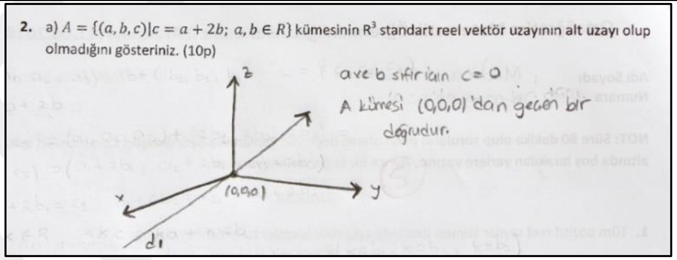
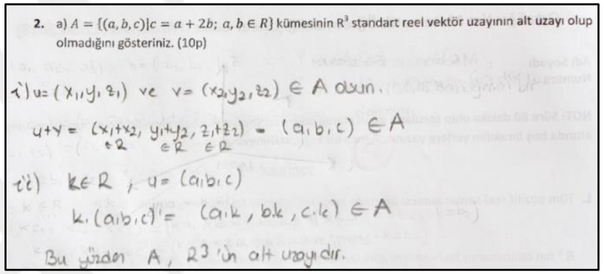
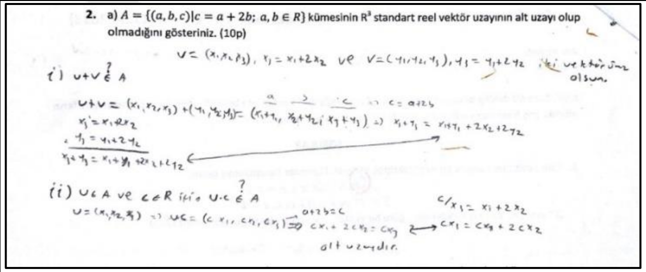
**Ek 6. Final Testi Değerlendirme Rubriği**

<table>
<tr><th>Soru</th><th>Düşünme Biçimi</th><th>Kod</th><th>Gösterge</th><th>Örnek Cevap</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Aritmetik</td><td>VSİ</td><td>Verilen kümedeki tanımlanan işlemleri dikkate almadan vektör uzayı aksiyomlarını inceleme</td><td>7) $\forall$ $x,y \in \mathbb{R}^+$ ve $k \in \mathbb{R}$ için $k.(x+y) = k.x+k.y$<br>8) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ ve $k,t \in \mathbb{R}$ için $(k+t).x = k.x+t.x$<br>9) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ ve $k,t \in \mathbb{R}$ için $(k.t).x = k.(t.x)$<br>$(k.t).x = (x^t)^k = (x^t)^k = k.(t.x)$<br>10) $\forall$ $x \in \mathbb{R}^+$ için $1.x = x$ ol. şek. $1 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.<br>Bu 10 özellik sağlandığından $\mathbb{R}^+$ bir vektör uzayıdır.</td></tr>
<tr><td>VGY</td><td>Verilen kümedeki tanımlanan işlemlerle vektör uzayı aksiyomlarını uygun bir gerekçelendirme yapmadan inceleme</td><td>$x+y=x.y$<br>1) $x,y \in \mathbb{R}^+$ olduğu için $\underbrace{x+y}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{x.y}_{\in\mathbb{R}} \in V$<br>2) $x+y = x.y \rightarrow y+x = y.x$ (Toplama ve çarpımın özelliklerinde)<br>3) $(x+y)+z = (x.y)+z = xy.z = x.(yz) = x+(y+z)$<br>4) $x+e = e+x = x$ $e \in \mathbb{R}^+$ $x.e = e.x = e$ ise $x = 1/e$<br>$1/e \notin \mathbb{R}^+$ vektör uzayı değildir.</td></tr>
<tr><td>VÖ</td><td>Verilen özel örneklerle vektör uzayı aksiyomlarını inceleme</td><td>$x,y \in \mathbb{R}^+$ ise $x=2$ ve $y=3$ olsun.<br>1) $x+y = 2+3 = 2.3 = 6 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ kapalı<br>2) $2+3 = 2.3 = 3.2 = 2+3 \Rightarrow 2+3 = 3+2$<br>3) $(2+3)+4 = 2.3+4 = 6+4 = 6.4 = 2.3.4 = 2+(3+4)$<br>4) $e+2 = 2+e = 2 \Rightarrow e+2 = 2$<br>$e = 0 \notin \mathbb{R}^+$ ise vektör uzayı değil.</td></tr>
</table>

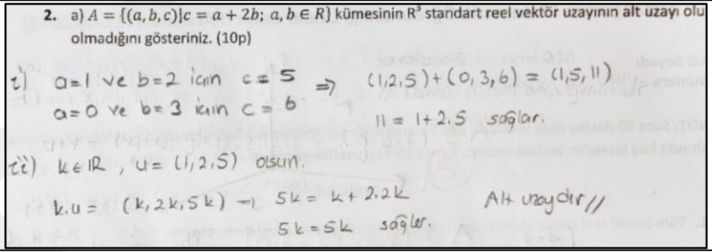
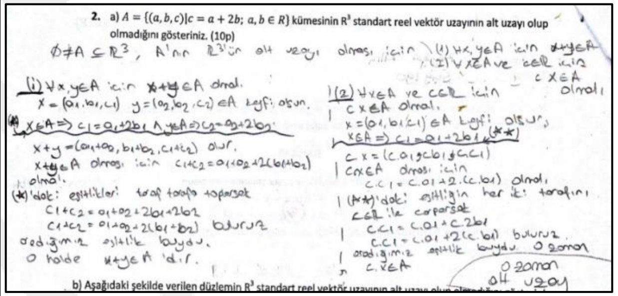
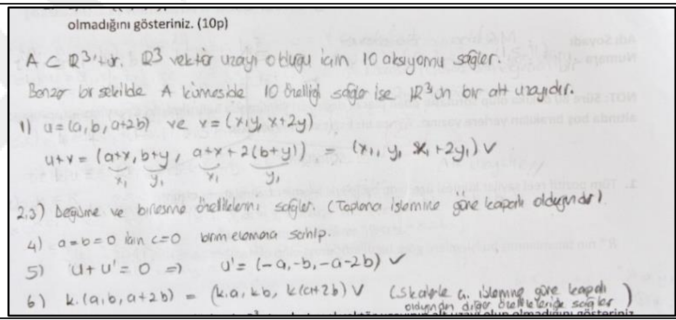
Ek 6'nin devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Yapısal | VG | Verilen kümedeki tanımlanan işlemlerle vektör uzayı aksiyomlarını gerekçelendirerek inceleme | Vektör uzayı olması için 10 özelliği sağlaması gerekir.<br>1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x+y=x.y$ (iki pozitif reel sayının çarpımı yine pozitif reel sayıdır.)<br>$x.y \in \mathbb{R}^+$ old. $x+y \in \mathbb{R}^+$ (toplama işlemi kapalılık)<br>2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x+y = x.y = y.x = y+x$ old. Değişme öz. vardır.<br>Reel sayılarda çarpmanın değişme özelliği<br>3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^+$ için $x+(y+z) = x+(y.z) = (x.(y.z)) = ((x.y).z) = (x+y).z = (x+y)+z$<br>Birleşme öz. vardır.<br>4) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $x+a=x$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}^+$ var mıdır?<br>$x+a = x.a = x$ $a=1 \in \mathbb{R}^+$ vardır. |

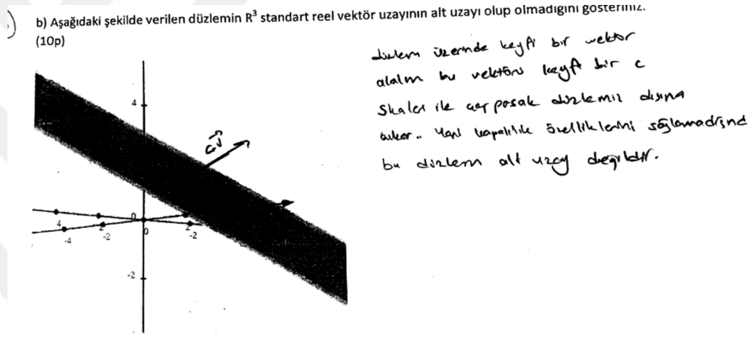
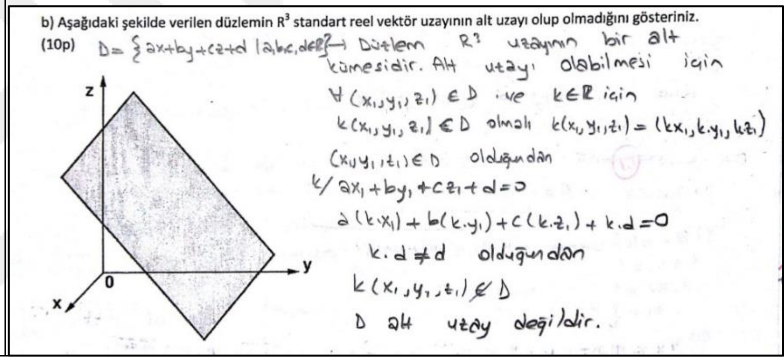
Ek 6'nın Devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 2a | Geometrik | AGT | Verilen kümenin orijinden geçen geometrik bir yapıyı temsil ettiğini örneklendirerek açıklama yapma |  2. a) $A = \{(a,b,c) \mid c = a + 2b;\ a,b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p) <br> a ve b sıfır için c = 0 <br> A kümesi (0,0,0)'dan geçen bir doğrudur. <br>  |
| | Aritmetik | ASİ | Verilen kümedeki tanımlanan işlemleri dikkate almadan alt uzay aksiyomlarını inceleme |  2. a) $A = \{(a,b,c) \mid c = a + 2b;\ a,b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p) <br> i) $u = (x_1, y_1, z_1)$ ve $v = (x_2, y_2, z_2) \in A$ olsun. <br> $u + v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (a, b, c) \in A$ <br> ii) $k \in R$, $u = (a, b, c)$ <br> $k.(a,b,c) = (a.k, b.k, c.k) \in A$ <br> Bu yüzden A, $R^3$'ün alt uzayıdır. |
| | | AGY | Verilen kümedeki tanımlanan işlemlerle alt uzay aksiyomlarını uygun bir gerekçelendirme yapmadan inceleme |  2. a) $A = \{(a,b,c) \mid c = a + 2b;\ a,b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p) <br> $u = (x_1, x_2, x_3)$, $x_3 = x_1 + 2x_2$ ve $v = (y_1, y_2, y_3)$, $y_3 = y_1 + 2y_2$ iki vektörümüz olsun. <br> i) $u + v \overset{?}{\in} A$ <br> ii) $u \in A$ ve $c \in R$ için $u.c \overset{?}{\in} A$ <br> alt uzaydır. |

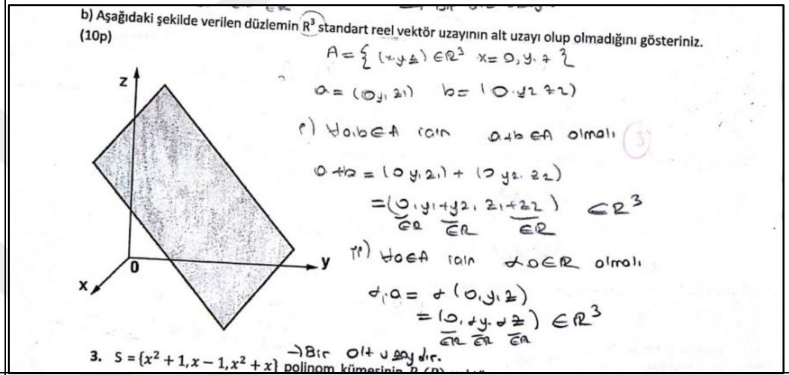
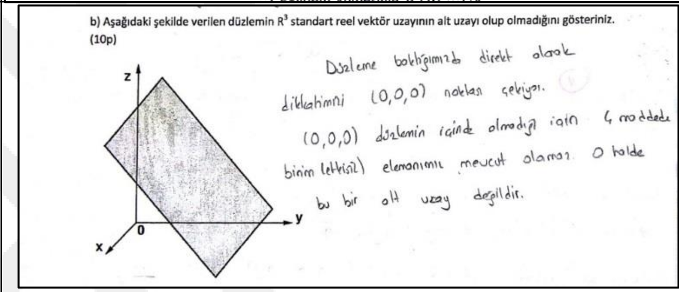
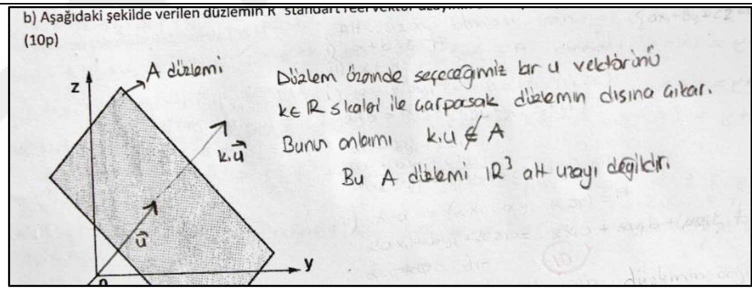
Ek 6'nin devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | AÖ | Verilen kümenin elemanları için sayısal değerler atayarak alt uzay aksiyomlarını inceleme | <br>2. a) $A = \{(a,b,c) \mid c = a + 2b;\ a,b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olu… olmadığını gösteriniz. (10p)<br>i) a=1 ve b=2 için c=5 ⇒ (1,2,5)+(0,3,6) = (1,5,11)<br>a=0 ve b=3 için c=6 11 = 1+2.5 sağlar.<br>ii) k∈ℝ, u=(1,2,5) olsun.<br>k.u = (k,2k,5k) → 5k = k+2.2k Alt uzaydır//<br>5k=5k sağlar. |
| | Yapısal | AG | Verilen kümedeki tanımlanan işlemlerle alt uzay aksiyomlarını gerekçelendirerek inceleme | <br>2. a) $A = \{(a,b,c) \mid c = a + 2b;\ a,b \in R\}$ kümesinin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)<br>∅≠A⊆ℝ³, A'nın ℝ³'ün alt uzayı olması için (1) ∀x,y∈A için x+y∈A (2) ∀x∈A ve c∈ℝ için cx∈A olmalı<br>(i) ∀x,y∈A için x+y∈A olmalı. x=(a₁,b₁,c₁) y=(a₂,b₂,c₂)∈A keyfi olsun.<br>(*) x∈A ⇒ c₁=a₁+2b₁ ∧ y∈A ⇒ c₂=a₂+2b₂<br>x+y=(a₁+a₂, b₁+b₂, c₁+c₂) olur. x+y∈A olması için c₁+c₂=a₁+a₂+2(b₁+b₂) olmalı.<br>(*)'daki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak c₁+c₂=a₁+a₂+2b₁+2b₂, c₁+c₂=a₁+a₂+2(b₁+b₂) buluruz. Aradığımız eşitlik buydu. O halde x+y∈A'dır.<br>(2) ∀x∈A ve c∈ℝ için cx∈A olmalı. x=(a₁,b₁,c₁)∈A keyfi olsun, x∈A ⇒ c₁=a₁+2b₁ (**)<br>cx=(c.a₁, c.b₁, c.c₁) cx∈A olması için c.c₁=c.a₁+2.(c.b₁) olmalı.<br>(**)'daki eşitliğin her iki tarafını c∈ℝ ile çarparsak c.c₁=c.a₁+c.2b₁, c.c₁=c.a₁+2(c.b₁) buluruz. Aradığımız eşitlik buydu. O zaman c.x∈A<br>O zaman alt uzay<br>b) Aşağıdaki şekilde verilen düzlemin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup… |
| | | AY | Alt uzay olma için gerek ve yeter şartları gerekçeleriyle ifade etme | <br>olmadığını gösteriniz. (10p)<br>A ⊂ ℝ³'dür. ℝ³ vektör uzayı olduğu için 10 aksiyomu sağlar.<br>Benzer bir şekilde A kümesinde 10 özelliği sağlarsa ise ℝ³'ün bir alt uzayıdır.<br>1) u=(a,b,a+2b) ve v=(x,y,x+2y)<br>u+v = (a+x, b+y, a+x+2(b+y)) = (x₁, y₁, x₁+2y₁) ✓<br>2,3) Değişme ve birleşme özelliklerini sağlar. (Toplama işlemine göre kapalı olduğundan)<br>4) a=b=0 için c=0 birim elemana sahip.<br>5) u+u'=0 ⇒ u'=(−a,−b,−a−2b) ✓<br>6) k.(a,b,a+2b) = (k.a, k.b, k(a+2b)) ✓ (Skalerle ç. işlemine göre kapalı olduğundan diğer özellikleri de sağlar) |

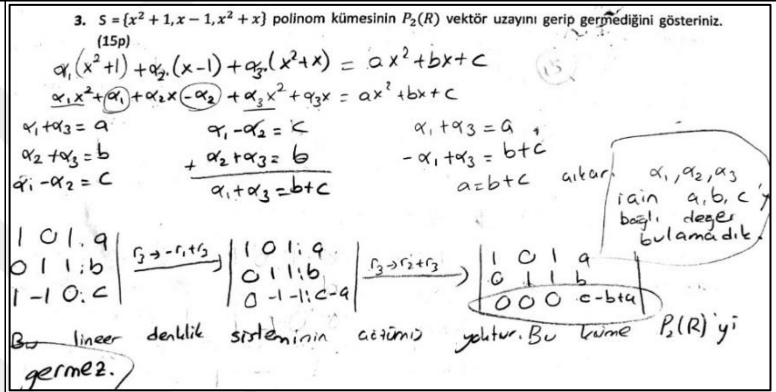
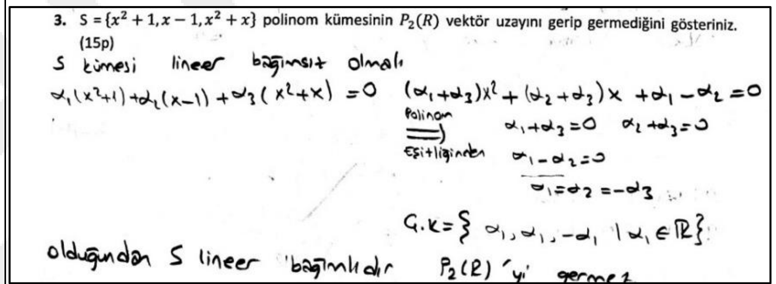
Ek 6'nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 2b | Geometrik | AGÇ | Verilen örnek durumu geometrik temsiller kullanarak inceleme | <br>b) Aşağıdaki şekilde verilen düzlemin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)<br>düzlem üzerinde keyfi bir vektör alalım bu vektörü keyfi bir c skaler ile çarparsak düzlemin dışına çıkar. Yani kapalılık özelliklerini sağlamadığında bu düzlem alt uzay değildir. |
| | Aritmetik | ACD | Verilen kümeye uygun cebirsel bir denklem yazarak alt uzay olma aksiyomlarını inceleme | <br>b) Aşağıdaki şekilde verilen düzlemin $R^3$ standart reel vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. (10p)<br>$D=\{ax+by+cz+d \mid a,b,c,d\in R\}$ → Düzlem $R^3$ uzayının bir alt kümesidir. Alt uzayı olabilmesi için<br>$\forall (x_1,y_1,z_1)\in D$ ve $k\in R$ için<br>$k(x_1,y_1,z_1)\in D$ olmalı $k(x_1,y_1,z_1)=(kx_1,k.y_1,kz_1)$<br>$(x_1,y_1,z_1)\in D$ olduğundan<br>$\Rightarrow ax_1+by_1+cz_1+d=0$<br>$a(k.x_1)+b(k.y_1)+c(k.z_1)+k.d=0$<br>$k.d\neq d$ olduğundan<br>$k(x_1,y_1,z_1)\notin D$<br>D alt uzay değildir. |

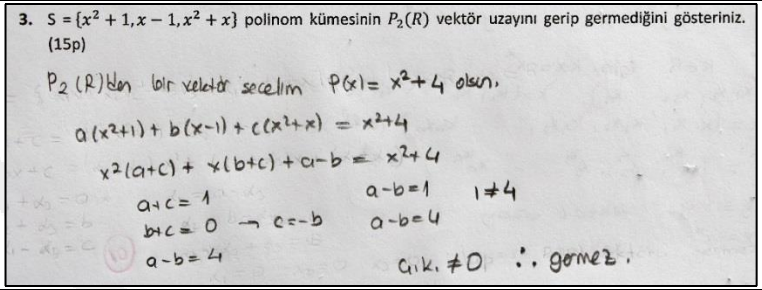
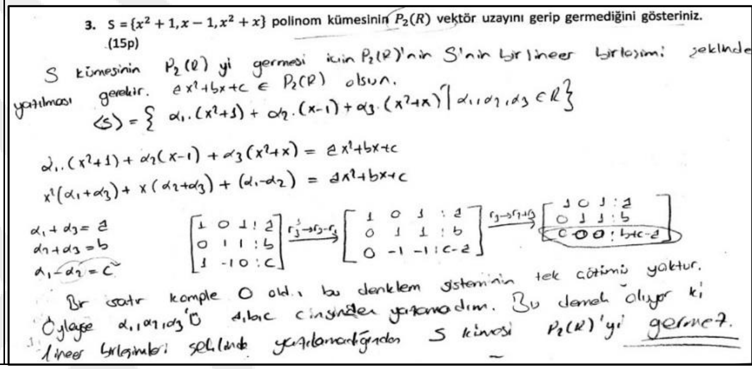
Ek 6'nin devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | AC | Alt uzay olma aksiyomlarını verilen kümeyle ilişkilendirmeden ifade etme |   |
| | Yapısal | AVU | Verilen kümenin vektör uzayı olma şartlarını inceleme |   |
| | | AAÖ | Verilen kümenin $R^3$ ün alt uzayı olmadığını aksine bir örnek göstererek açıklama |   |

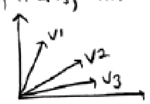
Ek 6’nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Aritmetik | GGY | Verilen kümeye yönelik işlemleri uygun bir gerekçelendirme yapmadan gösterme | <br>3. $S=\{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)<br>$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^2+x) = ax^2+bx+c$<br>$\alpha_1x^2+\alpha_1+\alpha_2x-\alpha_2+\alpha_3x^2+\alpha_3x = ax^2+bx+c$<br>$\alpha_1+\alpha_3=a$<br>$\alpha_2+\alpha_3=b$<br>$\alpha_1-\alpha_2=c$<br>$\alpha_1-\alpha_2=c$<br>$+\ \alpha_2+\alpha_3=b$<br>$\alpha_1+\alpha_3=b+c$<br>$\alpha_1+\alpha_3=a$<br>$-\alpha_1+\alpha_3=b+c$<br>$a=b+c$ çıkar<br>$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ için a, b, c'ye bağlı değer bulamadık.<br>$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to -r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b+a \end{array}\right]$<br>Bu lineer denklik sisteminin çözümü yoktur. Bu küme $P_2(R)$'yi germez. |
| | | GLB | Germe kavramını lineer bağımsızlıkla ilişkilendirerek cebirsel inceleme yapma | <br>3. $S=\{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)<br>S kümesi lineer bağımsız olmalı<br>$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^2+x)=0$<br>$(\alpha_1+\alpha_3)x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_1-\alpha_2=0$<br>Polinom eşitliğinden $\Longrightarrow$ $\alpha_1+\alpha_3=0$ $\alpha_2+\alpha_3=0$<br>$\alpha_1-\alpha_2=0$<br>$\alpha_1=\alpha_2=-\alpha_3$<br>Ç.K $=\{\alpha_1,\alpha_1,-\alpha_1 \mid \alpha_1\in\mathbb{R}\}$<br>olduğundan S lineer bağımlıdır $P_2(R)$'yi germez |

Ek 6'nin devamı

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>GÖ</td><td>Özel bir vektör seçerek verilen kümenin $P_2$(R)'yi gerip germediğini inceleme</td><td><br>3. $S = \{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)<br>$P_2(R)$'den bir vektör seçelim $P(x) = x^2+4$ olsun.<br>$a(x^2+1) + b(x-1) + c(x^2+x) = x^2+4$<br>$x^2(a+c) + x(b+c) + a-b = x^2+4$<br>$a+c=1$   $a-b=1$   $1 \neq 4$<br>$b+c=0 \rightarrow c=-b$   $a-b=4$<br>$a-b=4$   $G_{i}k_{i} \neq 0$ ∴ germez.</td></tr>
<tr><td>Yapısal</td><td>GG</td><td>Verilen kümenin belirtilen vektör uzayını gerip germediğini gerekçelendirerek inceleme</td><td><br>3. $S = \{x^2+1, x-1, x^2+x\}$ polinom kümesinin $P_2(R)$ vektör uzayını gerip germediğini gösteriniz. (15p)<br>S kümesinin $P_2(R)$ yi germesi için $P_2(R)$'nin S'nin bir lineer birleşimi şeklinde yazılması gerekir. $ax^2+bx+c \in P_2(R)$ olsun.<br>$\langle S\rangle = \{\alpha_1.(x^2+1) + \alpha_2.(x-1) + \alpha_3.(x^2+x) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$<br>$\alpha_1.(x^2+1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2+x) = ax^2+bx+c$<br>$x^2(\alpha_1+\alpha_3) + x(\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2) = ax^2+bx+c$<br>$\alpha_1+\alpha_3 = a$<br>$\alpha_2+\alpha_3 = b$<br>$\alpha_1-\alpha_2 = c$<br>$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+c-a \end{array}\right]$<br>Bir satır komple 0 old. bu denklem sisteminin tek çözümü yoktur. O yüzden $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$'ü a,b,c cinsinden yazamadım. Bu demek oluyor ki lineer birleşimi şeklinde yazılamadığından S kümesi $P_2(R)$'yi germez.</td></tr>
</table>

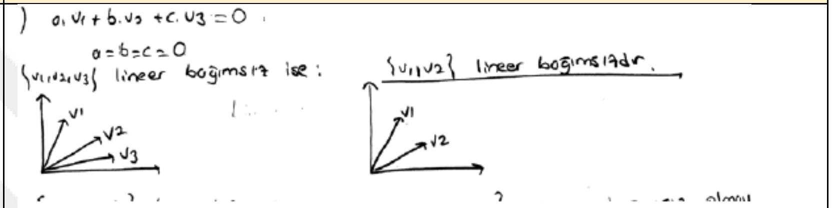
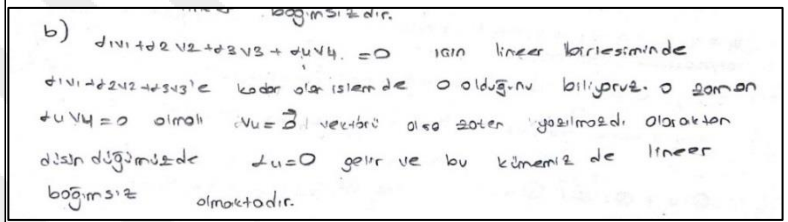
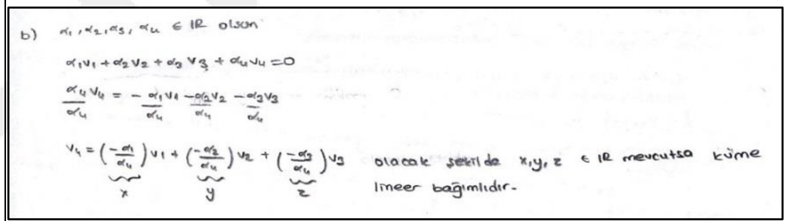
Ek 6'nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 4a | Geometrik | LGÇ | Verilen kümenin lineer bağımsız olup olmadığını geometrik çizimlerle inceleme | ) $a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 = 0$<br>$a = b = c = 0$<br>$\{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımsız ise :<br><br>$\{v_1, v_2\}$ lineer bağımsızdır.<br> |
| | Aritmetik | LUS | Verilen kümenin lineer bağımsızlığını skalerlerin uygun olmayan kullanımıyla gösterme | $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ ve lineer bağımsız ise<br>$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 'dır.<br>$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ için<br>$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ lineer bağımsızdır. |
| | | LDC | Verilen kümenin elemanları için Lineer bağımsızlığın formal tanımını kullanarak vektörlerden birini diğerleri cinsinden yazma | $v_1, v_2, v_3$, kümesi lineer bağımsız ise → $c_1.v_1 + c_2.v_2 + c_3.v_3 = 0$ denkleminde<br>$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olmalıdır.<br>a) $\{v_1, v_2\}$ lineer bağımsızlığını araştıralım. $c_1.v_1 + c_2.v_2 = -c_3.v_3$<br>$c_1.v_1 + c_2.v_2 = 0 \Rightarrow c_1.v_1 + c_2.v_2 = -c_3.v_3$<br>İkiden fazla vektör içeren kümelerde biri veya birkaçı diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa lineer bağımlıdır. Yukarıda $v_3$, $v_1$ ve $v_2$ için lineer birleşim şeklinde yazılmıştır.<br>Bu yüzden lineer bağımlıdır. |

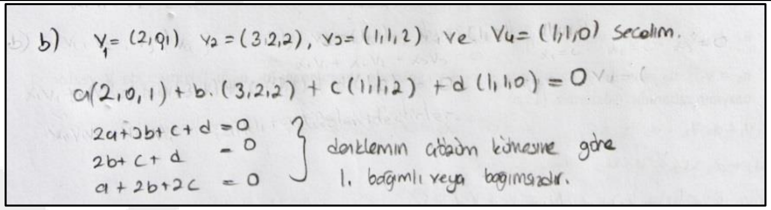
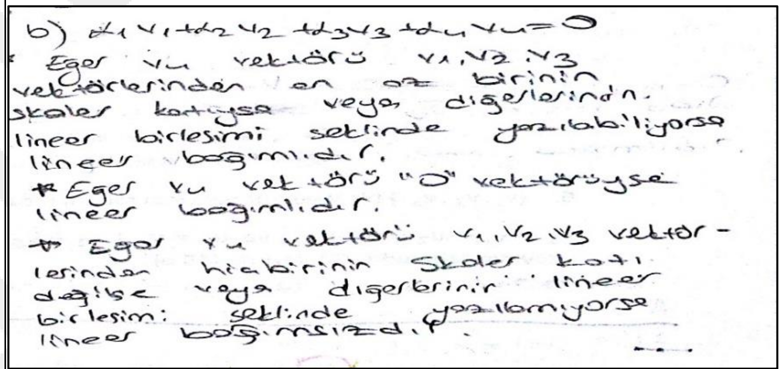
Ek 6'nın devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | LÖ | Verilen kümeden özel örneklerle lineer bağımsızlığı inceleme | a) $v_1 = (2,0)$ , $v_2 = (3,1)$ , $v_3 = (1,1)$ olsun. Üç vektör liner bağımsızdır. $(v_1, v_2) = ((2,0), (3,1))$ linar bağımsız mı? $a(2,0) + b(3,1) = 0 \Rightarrow (2a+3b, b) = 0$ $2a+3b = 0$ ve $b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ . Liner bağımsız. |
| | Yapısal | LLB | Verilen kümenin lineer bağımsız olup olmadığını lineer birleşim kavramıyla gerekçelendirerek açıklama | $v_1, v_2, v_3$ lineer bağımsız ise $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ eşitliği yalnız ve yalnızca $\alpha$'ların hepsinin aynı anda 0 olduğu durumda sağlanıyor demektir. Yani vektörlerin hiçbiri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamaz. a) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ vektörlerden hiçbiri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamaz dediğimiz için bu iki vektörde lineer bağımsızdır. |

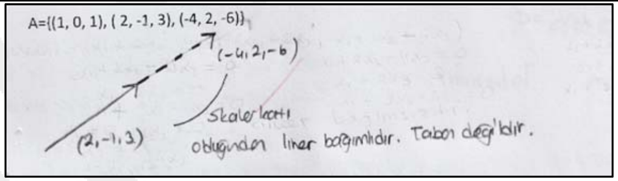
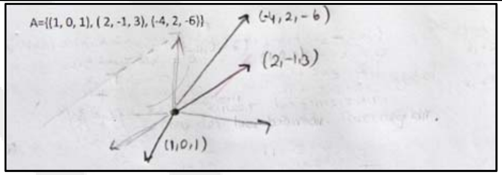
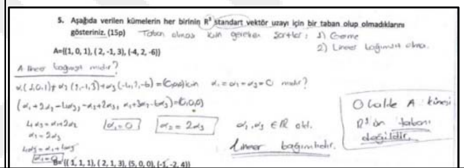
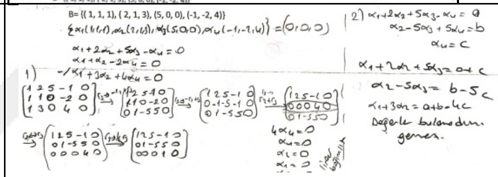
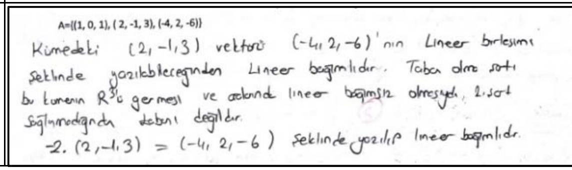
Ek 6'nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 4b | Geometrik | LGÇ | Verilen kümenin lineer bağımsız olup olmadığını geometrik çizimlerle inceleme |  |
| | Aritmetik | LUS | Verilen kümenin lineer bağımsızlığını skalerlerin uygun olmayan kullanımıyla gösterme |  |
| | | LDC | Verilen kümenin elemanları için Lineer bağımsızlığın formal tanımını kullanarak vektörlerden birini diğerleri cinsinden yazma |  |

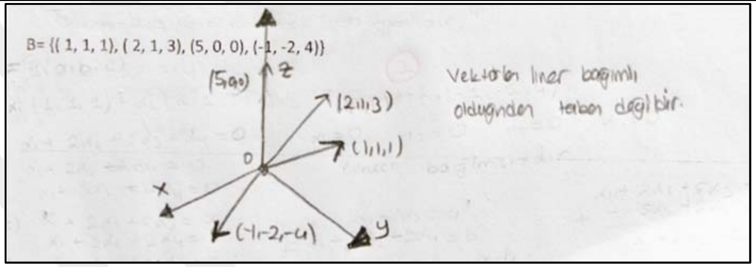
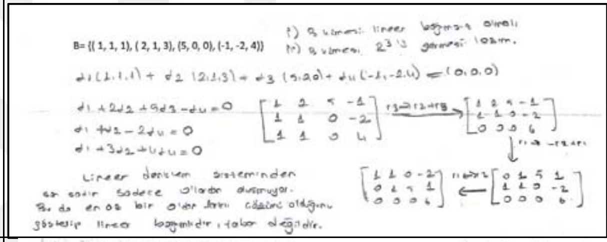
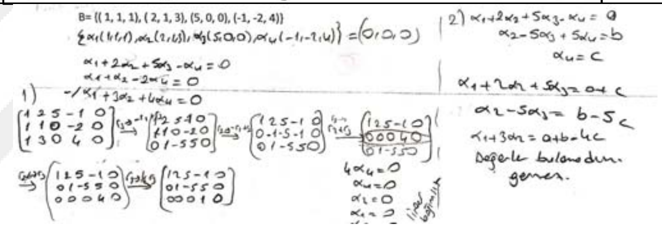
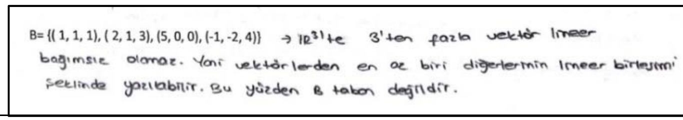
Ek 6'nın devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | LÖ | Verilen kümeden özel örneklerle lineer bağımsızlığı inceleme |  b) $v_1=(2,0,1)$ $v_2=(3,2,2)$, $v_3=(1,1,2)$ ve $v_4=(1,1,0)$ seçelim. $a(2,0,1)+b\cdot(3,2,2)+c(1,1,2)+d(1,1,0)=0$ $\left.\begin{array}{l} 2a+3b+c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \\ a+2b+2c=0 \end{array}\right\}$ denklemin çözüm kümesine göre l. bağımlı veya bağımsızdır. |
| | Yapısal | LB | Verilen kümenin lineer bağımsız olup olmadığını lineer birleşim kavramıyla gerekçelendirerek açıklama |  b) $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4=0$ * Eğer $v_4$ vektörü $v_1, v_2, v_3$ vektörlerinden en az birinin skaler katıysa veya diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa lineer bağımlıdır. * Eğer $v_4$ vektörü "0" vektörüyse lineer bağımlıdır. * Eğer $v_4$ vektörü $v_1, v_2, v_3$ vektörlerinden hiçbirinin skaler katı değilse veya diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamıyorsa lineer bağımsızdır. |

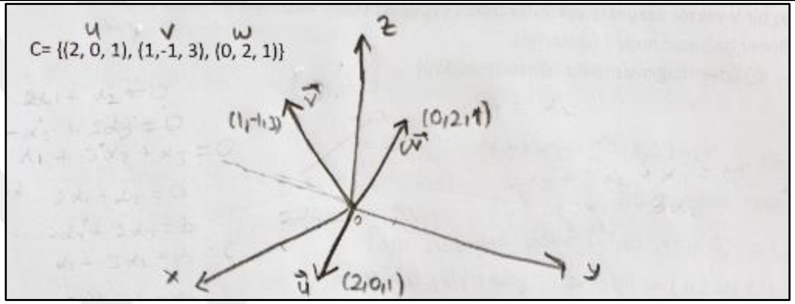
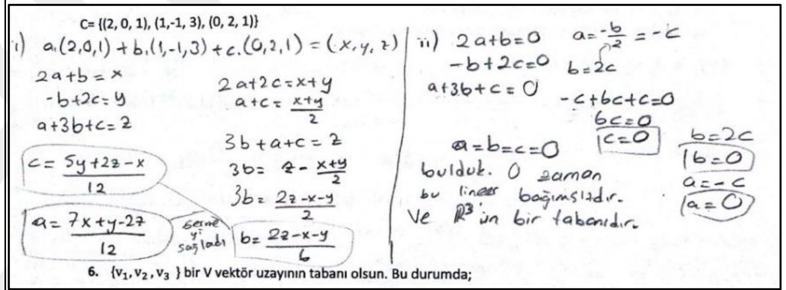
Ek 6’nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 5a | Geometrik | TGT | Verilen kümedeki vektörlerden birini diğerinin skaler bir katı olduğunu çizerek gösterme |   |
| | | TGÇ | Verilen kümedeki vektörleri uygun açıklamalar yapmadan geometrik temsillerle çizme |   |
| | Aritmetik | TC | Vektör kümesinin taban olma şartlarını cebirsel olarak kontrol etme |  |
| | | TUG | Verilen kümenin taban olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını uygun olmayan gerekçelendirmelerle açıklama |  |
| | Yapısal | TLB | Verilen kümenin taban olmadığını kümedeki vektörlerden birinin bir diğerinin skaler katı olduğunu ifade ederek açıklama |   |

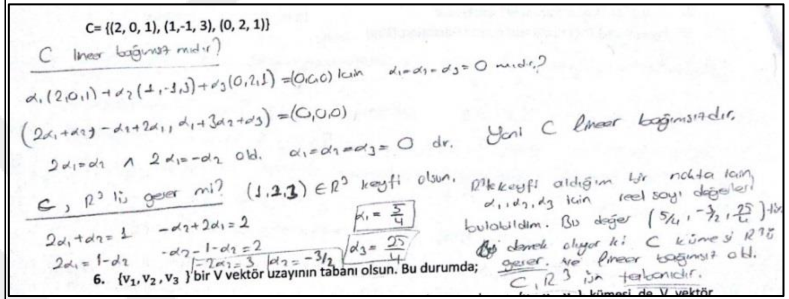
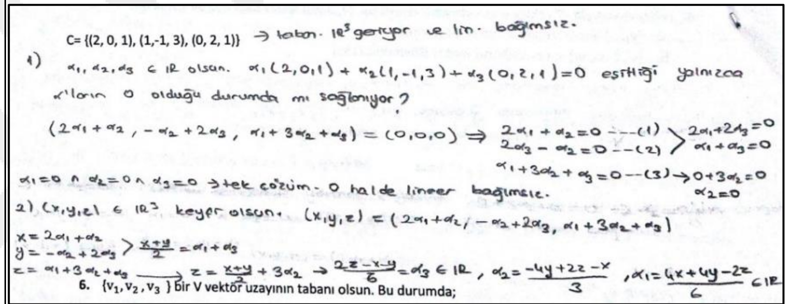
Ek 6’nın devamı

<table>
<tr><th>Soru</th><th>Düşünme Biçimi</th><th>Kod</th><th>Gösterge</th><th>Örnek Cevap</th></tr>
<tr><td rowspan="4">5b</td><td>Geometrik</td><td>TGÇ</td><td>Verilen kümedeki vektörleri uygun açıklamalar yapmadan geometrik temsillerle çizme</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aritmetik</td><td>TC</td><td>Vektör kümesinin taban olma şartlarını cebirsel olarak kontrol etme</td><td>
B= {( 1, 1, 1), ( 2, 1, 3), (5, 0, 0), (-1, -2, 4)}
Lineer denklem sisteminden ... Bu da en az bir 0'dan farklı çözüm olduğunu gösterip lineer bağımlıdır, taban değildir.</td></tr>
<tr><td>TUG</td><td>Verilen kümenin taban olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını uygun olmayan gerekçelendirmelerle açıklama</td><td>
B= {( 1, 1, 1), ( 2, 1, 3), (5, 0, 0), (-1, -2, 4)}
Değerle bulamadım.</td></tr>
<tr><td>Yapısal</td><td>TB</td><td>Verilen kümenin taban olmadığını kümedeki vektör sayısı ile $R^3$ ün boyutunu ilişkilendirerek açıklama</td><td>
B= {( 1, 1, 1), ( 2, 1, 3), (5, 0, 0), (-1, -2, 4)} → $\mathbb{R}^3$'te 3'ten fazla vektör lineer bağımsız olamaz. Yani vektörlerden en az biri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Bu yüzden B taban değildir.</td></tr>
</table>

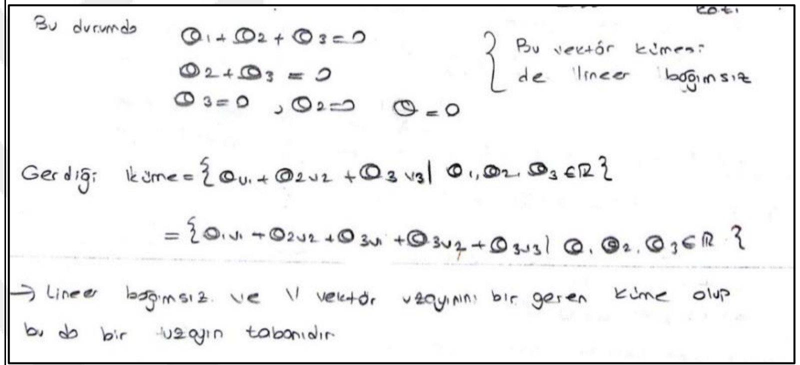
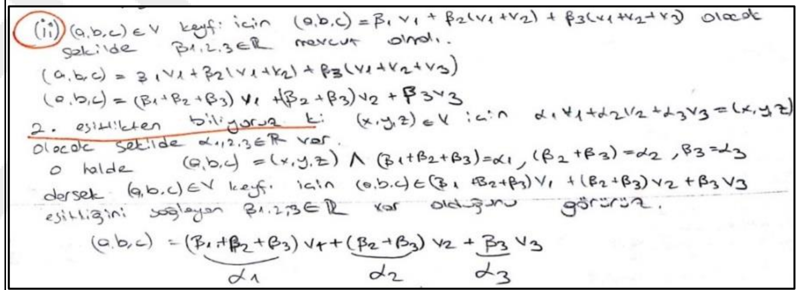
Ek 6'nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 5c | Geometrik | TGÇ | Verilen kümedeki vektörleri uygun açıklamalar yapmadan geometrik temsillerle çizme |  |
| | Aritmetik | TGY | Verilen kümenin taban olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını uygun bir gerekçelendirme yapmadan inceleme |  |

Ek 6'nın devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | TÖ | Verilen kümenin taban olup olmadığını özel örneklerle inceleme | <br>C= {(2, 0, 1), (1,-1, 3), (0, 2, 1)}<br>C lineer bağımsız mıdır?<br>$\alpha_1(2,0,1)+\alpha_2(1,-1,3)+\alpha_3(0,2,1)=(0,0,0)$ için $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ mıdır?<br>$(2\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$<br>$2\alpha_1=\alpha_2 \wedge 2\alpha_1=-\alpha_2$ old. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ dr. Yani C lineer bağımsızdır.<br>C, $R^3$'ü gerer mi? $(1,2,3)\in R^3$ keyfi olsun.<br>$2\alpha_1+\alpha_2=1$ $\quad -\alpha_2+2\alpha_1=2$ $\quad \boxed{\alpha_1=\frac{5}{4}}$<br>$2\alpha_1=1-\alpha_2$ $\quad -\alpha_2-1-\alpha_2=2$ $\quad \boxed{-2\alpha_2=3}$ $\quad \boxed{\alpha_2=-3/2}$ $\quad \boxed{\alpha_3=\frac{25}{4}}$<br>$R^3$'te keyfi aldığım bir nokta için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ için reel sayı değerleri bulabildim. Bu değer $(5/4, -3/2, \frac{25}{4})$'tür. Bu demek oluyor ki C kümesi $R^3$'ü gerer. ve lineer bağımsız old. C, $R^3$ için tabanıdır.<br>6. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bir V vektör uzayının tabanı olsun. Bu durumda;<br>… kümesi de V vektör |
| | Yapısal | TY | Bir kümenin taban olma özelliklerini gerekçelendirerek açıklama | <br>C= {(2, 0, 1), (1,-1, 3), (0, 2, 1)} → taban. $IR^3$ geriyor ve lin. bağımsız.<br>1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in IR$ olsun. $\alpha_1(2,0,1)+\alpha_2(1,-1,3)+\alpha_3(0,2,1)=0$ eşitliği yalnızca $\alpha$'ların 0 olduğu durumda mı sağlanıyor?<br>$(2\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0) \Rightarrow$ $2\alpha_1+\alpha_2=0$ ---(1), $2\alpha_3-\alpha_2=0$ ---(2) > $2\alpha_1+2\alpha_3=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$<br>$\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0$ ---(3) → $0+3\alpha_2=0$, $\alpha_2=0$<br>$\alpha_1=0 \wedge \alpha_2=0 \wedge \alpha_3=0$ → tek çözüm. O halde lineer bağımsız.<br>2) $(x,y,z)\in IR^3$ keyfi olsun. $(x,y,z)=(2\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)$<br>$x=2\alpha_1+\alpha_2$, $y=-\alpha_2+2\alpha_3$ > $\frac{x+y}{2}=\alpha_1+\alpha_3$<br>$z=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 \longrightarrow z=\frac{x+y}{2}+3\alpha_2 \rightarrow \frac{2z-x-y}{6}=\alpha_3\in IR$, $\alpha_2=\frac{-4y+2z-x}{3}$, $\alpha_1=\frac{4x+4y-2z}{6}\in IR$<br>6. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bir V vektör uzayının tabanı olsun. Bu durumda; |

Ek 6'nın devamı

| Soru | Düşünme Biçimi | Kod | Gösterge | Örnek Cevap |
|---|---|---|---|---|
| 6 | Aritmetik | Tİ | $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi için taban olma şartlarını sadece ifade etme | <br>Bu durumda $\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$<br>$\theta_2+\theta_3=0$<br>$\theta_3=0$, $\theta_2=0$, $\theta=0$ } Bu vektör kümesi de lineer bağımsız<br>Gerdiği küme $=\{\theta_1 u_1+\theta_2 u_2+\theta_3 v_3 \mid \theta_1,\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}\}$<br>$=\{\theta_1 v_1+\theta_2 v_2+\theta_3 v_1+\theta_3 v_2+\theta_3 v_3 \mid \theta_1,\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}\}$<br>$\rightarrow$ Lineer bağımsız ve V vektör uzayını bir geren küme olup bu da bir uzayın tabanıdır. |
| | | TCİ | $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi için taban olup olmadığını $R^3$ den cebirsel olarak inceleme | <br>(ii) $(a,b,c)\in V$ keyfi için $(a,b,c)=\beta_1 v_1+\beta_2(v_1+v_2)+\beta_3(v_1+v_2+v_3)$ olacak şekilde $\beta_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ mevcut olmalı.<br>$(a,b,c)=\beta_1 v_1+\beta_2(v_1+v_2)+\beta_3(v_1+v_2+v_3)$<br>$(a,b,c)=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)v_1+(\beta_2+\beta_3)v_2+\beta_3 v_3$<br>2. eşitlikten biliyoruz ki: $(x,y,z)\in V$ için $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=(x,y,z)$ olacak şekilde $\alpha_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ var.<br>O halde $(a,b,c)=(x,y,z) \wedge (\beta_1+\beta_2+\beta_3)=\alpha_1$, $(\beta_2+\beta_3)=\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_3$ dersek $(a,b,c)\in V$ keyfi için $(a,b,c)\in(\beta_1+\beta_2+\beta_3)v_1+(\beta_2+\beta_3)v_2+\beta_3 v_3$ eşitliğini sağlayan $\beta_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ var olduğunu görürüz.<br>$(a,b,c)=\underbrace{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_1}v_1+\underbrace{(\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_2}v_2+\underbrace{\beta_3}_{\alpha_3}v_3$ |

Ek 6'nın devamı

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | TÖ | $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi için taban olup olmadığını $R^3$ te özel örneklerle inceleme | (ii) $(a,b,c) \in V$ keyfi için $(a,b,c) = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3)$ olacak şekilde $\beta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ mevcut olmalı.<br>$(a,b,c) = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3)$<br>$(a,b,c) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3) v_1 + (\beta_2+\beta_3) v_2 + \beta_3 v_3$<br>2. eşitlikten biliyoruz ki: $(x,y,z) \in V$ için $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (x,y,z)$ olacak şekilde $\alpha_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ var.<br>O halde $(a,b,c) = (x,y,z) \wedge (\beta_1+\beta_2+\beta_3) = \alpha_1, (\beta_2+\beta_3) = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3$ dersek $(a,b,c) \in V$ keyfi için $(a,b,c) \in (\beta_1+\beta_2+\beta_3) v_1 + (\beta_2+\beta_3) v_2 + \beta_3 v_3$ eşitliğini sağlayan $\beta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ var olduğunu görürüz.<br>$(a,b,c) = \underbrace{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_1} v_1 + \underbrace{(\beta_2+\beta_3)}_{\alpha_2} v_2 + \underbrace{\beta_3}_{\alpha_3} v_3$ |
| | Yapısal | TLG | $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesinin taban olma şartlarını soyut forma gerekçelendirerek açıklama | $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ ve $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ şeklinde tanımlanan $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi de V vektör uzayının tabanıdır. Gösteriniz. (15 p)<br>$\{v_1, v_2, v_3\}$ bir tabansa<br>$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ eşitliği yalnız ve yalnızca $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ olduğu durumda sağlanır.<br>Ayrıca $v_4 \in V$ olmak üzere; $v_4 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.<br>$\rightarrow \{u_1, u_2, u_3\} = \{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ tabansa lineer bağımsız olmalıdır.<br>$\beta_1(v_1) + \beta_2(v_1+v_2) + \beta_3(v_1+v_2+v_3) = 0$<br>$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_1 + \beta_3 v_2 + \beta_3 v_3 = 0$<br>$v_1 \underbrace{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}_{0} + v_2 \underbrace{(\beta_2+\beta_3)}_{0} + v_3 \underbrace{(\beta_3)}_{0} = 0$ olmalı. Çünkü $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımsız.<br>$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 0 \rightarrow \beta_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$<br>$\beta_2+\beta_3 = 0 \rightarrow \beta_2 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 0$<br>$\beta_3 = 0$<br>$\beta_1 = 0 \wedge \beta_2 = 0 \wedge \beta_3 = 0$ tek çözümdür.<br>Yani $\{u_1, u_2, u_3\}$ lineer bağımsız. |

## Ek 7. Ödevler

**VEKTÖR UZAYI ÖDEV**

1) Aşağıda verilen kavramları kendi cümleleriniz ile açıklayınız.
- Vektör
- Vektör uzayı

2) $R^n$ kümesinin sıralı n'lilerde bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

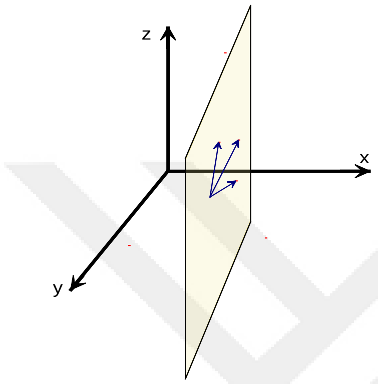
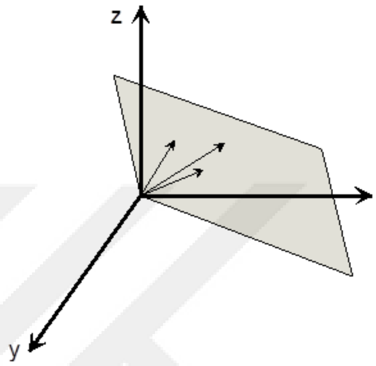
3) A={$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ I a, b, c, d ϵ R} şeklinde tanımlanan 2x2 tipindeki tüm matrislerin oluşturduğu kümenin matrislerde bilinen toplama ve skaler çarpma işlemine göre bir reel vektör uzayı mıdır? Gösteriniz.

4) $P_2(R) = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ şeklinde derecesi en fazla 2 olan tüm polinom fonksiyonların kümesi olsun. Polinomlarda bilinen toplama ve skaler çarpma işlemlerine göre $P_2(R)$ bir reel vektör uzayı mıdır? Gösteriniz.

Ek 7’nin Devamı

**ALT UZAY ÖDEV**

1. Aşağıda verilen kavramları kendi cümleleriniz ile açıklayınız.
- Vektör
- Vektör uzayı
- Alt uzay
2. Aşağıdaki şekillerde verilen kümelerden hangisi/hangileri $R^3$ ün bir alt uzayıdır. **Gösteriniz.**

| | |
|---|---|
|   |   |
| **Şekil 1.** x eksenine dik bir düzlem | **Şekil 2.** Orijinden geçen bir düzlem |

3. A = {(a, b, c) a ϵ R\| b= a + c} yani b=a + c şartını sağlayan (a, b, c) şeklindeki tüm noktaların oluşturduğu kümenin $R^3$ ün alt uzayı olup olmadığını **gösteriniz.**

4. Reel değerli reel değişkenli (f:R→ R şeklinde tanımlı fonksiyonlar) tüm fonksiyonların kümesi A olsun. Aşağıda verilen kümelerin A’nın alt uzayı olup olmadığını **gösteriniz.**
   **a.** Tanım kümesindeki her x reel sayısı için $f(x) \leq 0$
   **b.** Tanım kümesindeki her x reel sayısı için $f(x) = 2$

5. $A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$ V vektör uzayının iki alt uzayıdır. $A \cap B$ kümesinin de V vektör uzayının bir alt uzayı olup olmadığını **gösteriniz.**

Ek 7’nin Devamı

## LİNEER BİRLEŞİM-GERME ÖDEV

1. Aşağıda verilen kavramları kendi cümleleriniz ile açıklayınız.
   - Lineer birleşim
   - Germe

2. (1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 7, 2), (4, 3, -2) vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilen 2 vektör örneklendiriniz.

3. $M_{2x2}$ vektör uzayında $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını belirleyiniz.

4. $R^3$ de hangi şartlar altında iki vektör bir düzlemi gerer? Açıklayınız.
5. $R^3$ de hangi şartlar altında iki vektör bir doğruyu gerer? Açıklayınız.
6. (3,-1,11) vektörünün {(-1, 5, 3),(2, -3, 4)} vektörlerinin gerdiği alt uzayın elemanı olup olmadığını belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonucu geometrik olarak yorumlayınız.
7. $f(x)=3x^2+5x+1$, $g(x)=2x^2+3$, $h(x)=x^2+3x-1$ olarak verilsin. f fonksiyonu g ve h’ın gerdiği alt uzayın bir elemanı mıdır? Cevabınızı açıklayınız.
8. $P_2(R)$ yi geren vektörler bulunuz.

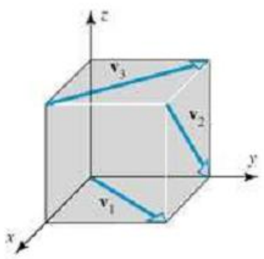
Ek 7'nin Devamı

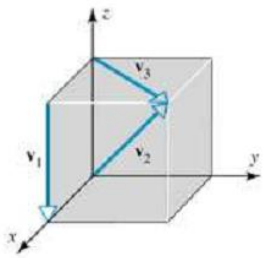
## LİNEER BAĞIMLILIK/BAĞIMSIZLIK

**1. Aşağıda verilen kavramları kendi cümleleriniz ile açıklayınız.**

- Lineer Bağımlılık
- Lineer Bağımsızlık

**2. Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımsız olup olmadığını gerekçelendirerek açıklayınız.**




**3.** $P_2(R)$ vektör uzayında $\{x^2 + 1, 3x - 1, -4x + 1\}$kümesinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz.

**4.** $v_1$ ve $v_2$ bir V vektör uzayında vektörler olsun. $\{v_1, v_2\}$ kümesi lineer bağımsız ise $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ kümesinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Ek 7'nin Devamı

# Taban-Boyut Ödev

## Taban-Boyut

**1)** Aşağıda verilen kavramları kendi cümleleriniz ile açıklayınız.

- Taban
- Boyut

**2)** {( 1, 3, -1), (2, 1, 0), ( 4, 2, 1)} kümesinin $R^3$ için bir taban olup olmadığını belirleyiniz.

**3)** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a)** $R^2$ için (1, 2) vektörünü içeren bir taban bulunuz.
**b)** $R^3$ için (-1, 0, 2) ve (0, 1, 1) vektörlerini içeren bir taban bulunuz.

**4)** $\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \}$ kümesinin $M_{2x2}$'nin bir tabanı olup olmadığını gösteriniz.

**5)** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a)** S = $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ kümesinin $P_2(R)$ için bir taban olduğunu gösteriniz.
**b)** P = $2 - x + x^2$ vektörünün S = $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

## Ek 8. Çalışma Yaprakları

### ÇALIŞMA YAPRAĞI 1

**1** Geogebra programını kullanarak başlangıç noktası A ve bitiş noktası B olan bir yönlü doğru parçası oluşturunuz.

**2** Geogebra programında  komutunu kullanarak AB ile eş en az 5 tane yönlü doğru parçası oluşturunuz.

**a)** Oluşturduğunuz yönlü doğru parçaları ile AB arasında nasıl bir ilişki vardır?

**b)** A ve B noktalarını sürükleyerek hareket ettiriniz. Bu esnada diğer yönlü doğru parçalarında nasıl bir değişim olduğunu açıklayınız.

**c)** Ekrandaki yönlü doğru parçası ailesini tek bir nokta ile eşleştirmek mümkün müdür? Mümkünse bu nokta nasıl ifade edilir?

**3** Başlangıç noktası N(-3,2) olan ve ekrandaki yönlü doğru parçaları ile aynı doğrultu, yön ve büyüklükte olan bir vektör belirlenebilir mi? Mümkünse belirleyiniz.

**4** Başlangıç noktası $A(x_1,y_1)$ ve bitiş noktası $B(x_2,y_2)$ olan AB yönlü doğru parçasının nokta olarak karşılığı nedir?

Ek 8'in Devamı

**ÇALIŞMA YAPRAĞI 2**

**1** Bilgisayarınızdan Etkinlik 2 dosyasını açarak $\vec{u}$ = (2,3) ve $\vec{v}$ = (3,-4) vektörlerini ardından yazılımın özelliklerini kullanarak $\vec{u} + \vec{v}$ vektörünü oluşturunuz.

**2** Toplam vektörü düzlemde hangi noktaya karşılık gelmektedir? Cevabı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

**3** Bilgisayarınızdan Etkinlik 3 dosyasını açınız. Giriş ekranını kullanarak A(2,-1,3) ve B(3, 1, 2) noktalarını oluşturunuz.

**4** Başlangıç noktaları orijin olan $\vec{u}$ = (2, -1, 3) ve $\vec{v}$ = (3, 1, 2) vektörleri oluşturunuz.

**5** Toplam vektörü uzayda hangi noktaya karşılık gelmektedir. Cevabı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

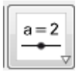
**6** Etkinlik 2 ve Etkinlik 3 te yaptıklarınızdan hareketle **$\vec{u} = (x_1, x_2, ......, x_n)$ ve $\vec{v} = (y_1, y_2, ......., y_n)$** vektörlerinin toplamı olan $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$ vektörü için ne söylersiniz?

**7** $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$ vektörünün $R^n$ de hangi noktaya karşılık geldiğini belirtiniz.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 3

**1** GeoGebra'nın 2 boyutlu grafik ekranında $\vec{u}$ = (2, 3) vektörünü oluşturunuz.

Yazılımın  komutunu kullanarak $\vec{u}$ vektörü için bir sürgü oluşturunuz. Sürgüyü hareket ettirdiğinizde u vektöründe nasıl bir değişiklik olmaktadır? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

**2** Sürgünün 2 ve – 3 değerleri için oluşan vektörleri cebirsel olarak hesaplayınız. Oluşan vektörleri nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

**3** $\vec{u}$ = (x, y), $R^2$ de bir vektör ve c ϵ R olmak üzere c. $\vec{u}$ vektörü için ne söyleyebilirsiniz?

**4** GeoGebra'nın 3 boyutlu grafik ekranında $\vec{u}$ = (3, 1, 2) vektörünü oluşturunuz.

Yazılımın sürgü komutunu kullanarak $\vec{u}$ vektörü için bir sürgü oluşturunuz. Sürgüyü hareket ettirdiğinizde u vektöründe nasıl bir değişiklik olmaktadır? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

**5** Sürgünün 2 ve – 3 değerleri için oluşan vektörleri cebirsel olarak hesaplayınız. Oluşan vektörleri nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

**6** $\vec{u}$ = (x, y, z), $R^3$ de bir vektör ve c ϵ R olmak üzere c. $\vec{u}$ vektörü için ne söyleyebilirsiniz?

**7** Yukarıda yaptıklarınızdan hareketle $\vec{u}$ **= ($x_1$, $x_2$, ......, $x_n$)** $R^n$ de bir vektör ve c ϵ R olmak üzere c. $\vec{u}$ vektörü için ne söyleyebilirsiniz?

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 4

Bilgisayarınızdan Etkinlik 1 dosyasını açınız. a ve b skalerleri ile $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerini gizle/göster butonu yardımıyla ekranda görüntülenmesini sağlayınız.

**1** Vektörler üzerine işlemler **u + v** yazarak toplam vektörü bulunuz. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin $R^2$ de farklı değerleri için toplam vektörün tanımlı olup olmadığını ve $R^2$ nin elemanı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**2** Vektörler üzerine işlemler **u + v** ve v **+ u** toplam vektörlerini ayrı ayrı bulunuz. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin $R^2$ de farklı değerleri için toplam vektörlerinin her zaman aynı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**3** Vektörler üzerine işlemler **(u + v) + w** ve **u + (v + w)** toplam vektörlerini ayrı ayrı bulunuz. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin $R^2$ de farklı değerleri için toplam vektörlerinin her zaman aynı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**4** Vektörler üzerine işlemler **u+0** yazarak toplam vektörünü bulunuz. Elde ettiğiniz sonuç $\vec{u}$ vektörünün $R^2$ de farklı değerleri için de aynı sonucu verip vermediğini inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**5** Vektörler üzerine işlemler **-u** girerek $-\vec{u}$ vektörünü bulunuz. **u** vektörünün $R^2$ de farklı değerleri için **(**$\overrightarrow{-u}$**)** vektörünü her zaman elde etmek mümkün müdür? Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

**6** Vektörler Üzerine İşlemler bölümüne u+(-u) yazarak toplam vektörünü bulunuz. $R^2$ de $\vec{u}$ vektörünün farklı değerleri için $\vec{u}+(\overrightarrow{-u})$ toplam vektörünün aynı sonucu verip vermediğini inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**7** Vektörler üzerine işlemler **a u** yazınız. a sürgüsünü hareket ettirerek **a.** $\vec{u}$ vektörün $R^2$ nin bir elemanı olup olmadığını inceleyiniz. a değerinin $(-\infty,\infty)$ aralığında aldığı tüm değerler için **a.** $\vec{u}$ vektörün $R^2$ nin elemanın olur mu? Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**8** Vektörler üzerine işlemler sırasıyla **a (u + v)** ve **a.u + a.v** vektörlerini ayrı ayrı yazınız. a'nın $(-\infty,\infty)$ aralığında aldığı tüm değerler ve $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ vektörlerinin $R^2$ de farklı değerleri için **a.(** $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$ **)** ve **a.** $\vec{u}$ **+ a.** $\vec{v}$ vektörlerinin her zaman aynı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**9** Vektörler üzerine işlemler sırasıyla **(a + b).u** ve **a.u + b.u** vektörlerini ayrı ayrı yazınız. a ve b sürgülerini hareket ettirerek u vektörünün $R^2$ de farklı değerleri için **(a + b).** $\vec{u}$ ve **a.** $\vec{u}$ **+ b.** $\vec{u}$ vektörlerinin her zaman aynı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

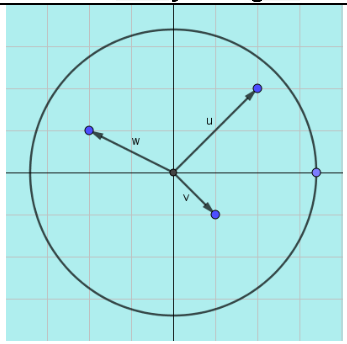
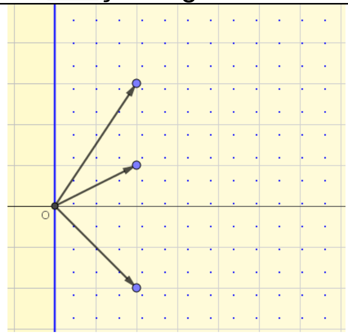
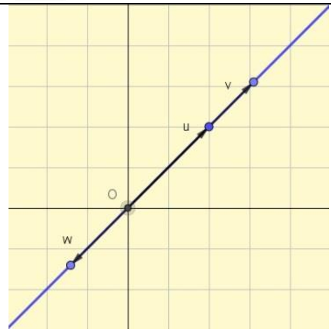
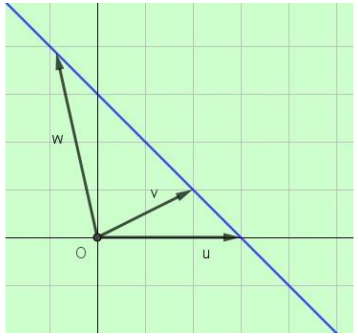
**10** Vektörler üzerine işlemler sırasıyla **a (bu)** ve **(ab) u** vektörlerini ayrı ayrı yazınız. a ve b sürgülerini hareket ettirerek ve u vektörünün $R^2$ de farklı değerleri için **a.(b**$\vec{u}$**)** ve **(ab).** $\vec{u}$ vektörlerinin her zaman aynı olup olmadığını inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**11** Vektörler üzerine işlemler **1 u** yazınız. Elde ettiğiniz sonuç $\vec{u}$ vektörünün $R^2$ de farklı değerleri için de aynı sonucu verip vermediğini inceleyiniz. Gözlemleriniz sonucunda ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 5

Bilgisayarınızdan Problem 1, Problem 2, Problem 3 ve Problem 4 isimli GeoGebra dosyalarını ayrı ayrı açarak her bir kümenin **$R^2$'de tanımlanan standart işlemlere** göre vektör uzayı olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını araştırınız. Yaptığınız incelemeler sonunda grup arkadaşınızla aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

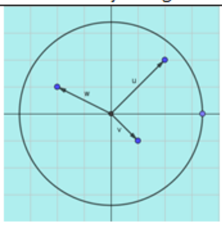
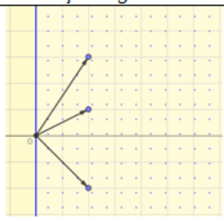
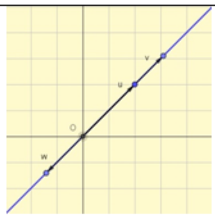
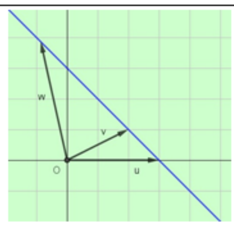
| **Problem 1** | **Problem 2** | **Problem 3** | **Problem 4** |
|---|---|---|---|
| Merkezi orijin, yarıçapı r olan bir çemberin iç bölgesindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | Düzlemde $x \ge 0$ bölgesi üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | y = mx doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | y = mx + n doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme |
|   |   |   |   |
| $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ | $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x \ge 0\}$ | $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx\}$ | $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx + n, n \ne 0\}$ |

| **Vektör uzayı olma şartları** | **Problem 1** | **Problem 2** | **Problem 3** | **Problem 4** |
|---|---|---|---|---|
| **u + v ϵ V** | | | | |
| **u + v = v + u** | | | | |
| **(u + v) + w = u + (v + w)** | | | | |
| **u + 0 = u** | | | | |
| **u + (-u) = 0** | | | | |
| **cu ϵ V** | | | | |
| **c(u + v) = cu + cv** | | | | |
| **(c + d)v = cv + dv** | | | | |
| **c(dv) = (cd)v** | | | | |
| **1u = u** | | | | |

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 6

Önceki çalışma yaprağında tamamladığınız 4 problem durumu için vektör uzayı olma şartları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| Problem 1 | Problem 2 | Problem 3 | Problem 4 |
|---|---|---|---|
| Merkezi orijin, yarıçapı r olan bir çemberin iç bölgesindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | Düzlemde $x \geq 0$ bölgesi üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | $y = mx$ doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme | $y = mx + n$ doğrusu üzerindeki tüm vektörlerin oluşturduğu küme |
|  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx\}$ |  $V = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx + n, n \neq 0\}$ |

| Vektör uzayı olma şartları | Problem 1 | Problem 2 | Problem 3 | Problem 4 |
|---|---|---|---|---|
| **u + v ϵ V** | - | + | + | - |
| **u + v = v + u** | + | + | + | + |
| **(u + v) + w = u + (v + w)** | + | + | + | + |
| **u + 0 = u** | + | + | + | - |
| **u + (-u) = 0** | + | - | + | - |
| **cu ϵ V** | - | - | + | - |
| **c(u + v) = cu + cv** | + | + | + | + |
| **(c + d)v = cv + dv** | + | + | + | + |
| **c(dv) = (cd)v** | + | + | + | + |
| **1u = u** | + | + | + | + |

**1** Tabloyu incelediğinizde (*$R^2$ reel vektör uzayı olması ve incelenen kümelerin $R^2$ alt kümesi olduğu gerçeği dikkate alındığında*) her durumda kesinlikle sağlanan şartlar var mıdır? Varsa hangileridir? Hangi gerekçe/gerekçelerle bu özellikler daima sağlanır? Açıklayınız.

**2** Tabloyu incelendiğinizde hangi özelliklerin kesinlikle kontrol edilmesi gerekir? Neden? Açıklayınız.

**3** Yapmış olduğunuz incelemelerden hareketle $R^2$nin verilen herhangi bir alt kümesinin $R^2$ deki işlemlere göre vektör uzayı olup olmadığını belirlemeye ilişkin bir yöntem önerebilir misiniz?

**4** Bir önceki maddede önerdiğiniz yöntem herhangi bir V vektör uzayı ve alt kümeleri için de daima geçerli olur mu? Grup arkadaşınızla tartışarak karar veriniz.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 7

**1** Bilgisayarınızdan LB1 isimli GeoGebra dosyasını açınız. Geometri pencerenizde $\vec{u}$ vektörünü gizle/göster seçeneğini aktif ettiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıdaki ifadeleri bulunuz.

**a)** $3.\vec{u} = (.... , ....)$

**b)** $(-\frac{1}{2}).\ \vec{u} = (.... , ....)$

**c)** $\pi.\ \vec{u} = (.... , ....)$

**2** $\vec{u}$ vektörünün tüm skaler katlarını göz önünde bulundurduğunuzda oluşan vektörlerin ortak özelliği hakkında ne söylersiniz? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu yazınız.

**3** İşlem pencerenize c$\vec{u}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz. Sürgüde c skalerinin farklı değerleri için c$\vec{u}$ vektörlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

**4** Şimdi $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerini aktif hala getiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıda verilen lineer birleşimleri hesaplayınız.

**a)** $\vec{u} + \vec{v} = (.... , ....)$

**b)** $3\vec{u} + 2\vec{v} = (.... , ....)$

**c)** $\vec{u} - 3\vec{v} = (.... , ....)$

**5** Yukarıda elde etmiş olduğunuz her bir lineer birleşimin ortak bir özelliği var mıdır? Açıklayınız.

**6** İşlem pencerenize c$\vec{u}$ + d$\vec{v}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz. Sürgüde c ve d skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz c$\vec{u}$ + d$\vec{v}$ vektörlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

**7** $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayan vektörler var mıdır? Grup arkadaşınızla hangi vektörlerin $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayacağını tartışarak ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

**8** Şimdi $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ vektörlerini aktif hale getiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıda verilen lineer birleşimleri hesaplayınız.

**a)** $\vec{u} + 2\vec{w} = (.... , ....)$

**b)** $3\vec{u} + \vec{w} = (.... , ....)$

**c)** $2\vec{u} - 5\vec{w} = (.... , ....)$

**9** c ve d sürgülerini canlandırınız. $c\vec{u} + d\vec{w}$ vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

**10** $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayan vektörler var mıdır? Nedenini açıklayınız.

**11** (5,0) vektörünü $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazınız.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 8

1. Bilgisayarınızdan LB2 isimli GeoGebra dosyasını açınız. Geometri pencerenizde $\vec{u}$ = (1,0,1) vektörünü gizle/göster seçeneğini aktif ettiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıdaki ifadeleri bulunuz.

**d)** $2.\ \vec{u} = (.... ,\ ....)$

**e)** $(-\frac{3}{2}).\vec{u} = (.... ,\ ....)$

**f)** $\pi.\vec{u} = (.... ,\ ....)$

2 $\vec{u}$ vektörünün tüm skaler katlarını göz önünde bulundurduğunuzda oluşan vektörlerin ortak özelliği hakkında ne söylersiniz? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu yazınız.

3 İşlem pencerenize c$\vec{u}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz. Sürgüde c skalerinin farklı değerleri için c$\vec{u}$ vektörlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

4 Şimdi $\vec{u}$ = (1, 0, 1) ve $\vec{v}$ = (-2,0,-2) vektörlerini aktif hala getiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıda verilen lineer birleşimleri hesaplayınız.

**a)** $\vec{u}\ +\ \vec{v}\ = (.... ,\ ....)$

**b)** $2.\vec{u}\ + 3\vec{v}\ = (.... ,\ ....)$

**c)** $\vec{u}\ -\ \vec{v}\ = (.... ,\ ....)$

5 Yukarıda elde etmiş olduğunuz her bir lineer birleşimin ortak bir özelliği var mıdır? Açıklayınız.

6 İşlem pencerenize c$\vec{u}$ + d$\vec{v}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz. Sürgüde c ve d skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz c$\vec{u}$ + d$\vec{v}$ vektörlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

7 $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayan vektörler var mıdır? Grup arkadaşınızla hangi vektörlerin $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayacağını tartışarak ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

8 Şimdi $\vec{u}$ = (1, 0, 1) ve $\vec{w}$ = (0, 1, 1) vektörlerini aktif hale getiriniz. İşlem penceresini kullanarak aşağıda verilen lineer birleşimleri hesaplayınız.

**d)** $\vec{u}$ + 3. $\vec{w} = (.... , ....)$

**e)** 2. $\vec{u}$ + $\vec{w} = (.... , ....)$

**f)** $\frac{1}{2}.\vec{u} - 5.\vec{w} = (.... , ....)$

9 İşlem pencerenize c$\vec{u}$ + d$\vec{w}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz ve sürgülerinizi canlandırınız. Sürgüde c ve d skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz c$\vec{u}$ + d$\vec{w}$ vektörlerinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

Ek 8'in Devamı

10 $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayan vektörler var mıdır? Örnek veriniz ve nedenini açıklayınız.

11 (3, 1, 6) vektörü bu kümenin bir elemanı mıdır? Neden?

12 Şimdi $\vec{u}$ , $\vec{w}$, $\vec{z}$ vektörleriyle c, d, e skalerlerini aktif hale getiriniz. İşlem pencerenize c$\vec{u}$ + d$\vec{w}$ + e$\vec{z}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz ve sürgülerinizi canlandırınız. Sürgüde c, d ve e skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz c$\vec{u}$ + d$\vec{v}$ + e$\vec{z}$ lineer birleşimin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışarak belirlemeye çalışınız.

13 $\vec{u}$ = (1, 0, 1) , $\vec{w}$ = (0, 1, 1) ve $\vec{z}$ = (2, 1,3) vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin kümesini göz önüne aldığınızda bu vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılamayan vektörler var mıdır? Örnek veriniz ve nedenini açıklayınız.

Ek 8'in Devamı

14 Şimdi $\vec{u}$ , $\vec{w}$ , $\vec{k}$ vektörleriyle c, d, e skalerlerini aktif hale getiriniz İşlem pencerenize c $\vec{u}$ + d$\vec{w}$ + e$\vec{k}$ yazarak elde ettiğiniz vektör için "iz" komutunu aktif hale getiriniz ve sürgülerinizi canlandırınız. Sürgüde c, d ve e skalerlerinin farklı değerleri için elde ettiğiniz c$\vec{u}$ + d$\vec{w}$ + e$\vec{k}$ lineer birleşimin geometrik olarak neyi temsil ettiğini grup arkadaşlarınızla tartışınız. Ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

15 (3, 1, 6) vektörü $\vec{u}$ , $\vec{w}$ ve $\vec{k}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir mi? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

16 $a, b, c \in R$ olmak üzere herhangi bir (a, b, c) $\in R^3$ vektörü $\vec{u}$ , $\vec{w}$ ve $\vec{k}$ vektörünün lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonuçları aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 9

Önceki çalışmalarınızda tek bir vektörün, üzerinde taşıyıcısı olduğu doğrudaki tüm vektörleri, biri diğerinin bir lineer birleşimi olarak yazılamayan iki vektörün bu vektörlerin belirlediği düzlemdeki tüm vektörleri ve herhangi biri diğer ikisinin bir lineer birleşimi olarak yazılamayan üç vektörün uzaydaki tüm vektörleri üreteceğini öğrenmiştiniz.

Bilgisayarınızdan GE isimli GeoGebra dosyasını açınız. Geometri pencerenizde $\vec{u}$ = (1, -2, 1), $\vec{v}$ = (-3, 2, -1) ve $\vec{w}$ = (2, 0, 0) vektörlerini aktif hale getiriniz.

**1** $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektörlerinin gerdiği küme ile $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği kümeyi GE dosyası üzerinde gösteriniz. Bulduğunuz sonuç hakkında ne söyleyebilirsiniz? Bu vektörlerin gerdikleri kümeleri karşılaştırdığınızda ortaya çıkan sonucun neden kaynaklandığını grup arkadaşınızla tartışınız. Ulaştığınız sonucu cebirsel olarak açıklayınız.

**2** Benzer şekilde $\vec{u}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği kümeyi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği küme ile karşılaştırdığınızda ortaya çıkan sonucun neden kaynaklandığını grup arkadaşınızla tartışınız. Ulaştığınız sonucu cebirsel olarak açıklayınız.

**3** Son olarak $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği kümeyi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği küme ile karşılaştırdığınızda ortaya çıkan sonucun neden kaynaklandığını grup arkadaşınızla tartışınız. Ulaştığınız sonucu cebirsel olarak açıklayınız.

**4** $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörlerinin gerdiği kümeyi geren daha az elemanlı bir alt küme bulmak mümkün müdür?

Ek 8'in Devamı

**5** En az sayıda vektörden oluşan küme tek türlü olarak belirlenebilir mi? Cevabınızı açıklayınız.

**6** Aynı kümeyi geren en az sayıdaki vektörü bulmaya yardım edecek bir cebirsel çözüm geliştirilebilir mi? Araştırınız.

Ek 8'in Devamı

## ÇALIŞMA YAPRAĞI 10

**1** Yukarıdaki açıklamaya göre aşağıda verilen vektör kümelerinin lineer bağımlılık/bağımsızlık durumu hakkında ne söyleyebilirsiniz? Grup arkadaşınızla tartışınız.

**a.** K={(1, 2, 0) , (0, 1, 0)}

**b.** L={(1, 2, 0) , (0, 1, 0), (0, 0, 0)}

**c.** M={(3,-1, 0, 3), (2, 1, 0, 2), (1, 0, 0, 1)}

**2** $R^3$ de tek bir vektörden oluşan kümelerin lineer bağımlılık/bağımsızlık durumu hakkında ne söyleyebilirsiniz? Grup arkadaşınızla tek bir vektörden oluşan farklı kümeler belirleyerek bu kümelerin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olma durumlarını irdeleyiniz. Ulaştığınız sonuçları aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

**3** Geogebra programınızda LB dosyasını açınız. Geometri pencerenizde yer alan u = (1,-3,2), v = (-3, 3, 1), w = (2,-6, 4), k = (-1,-3,5) vektörlerini aşağıdaki sorulara uygun olacak şekilde aktif hale getirerek vektör kümelerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz.

| **Vektör Kümesi** | **LB** | **LBS** | **Çözüm** | **Vektörlerin Birbirine Göre Konumu** |
|---|---|---|---|---|
| {u, v} | | | | |
| {u, w} | | | | |
| {u, k} | | | | |
| {v, w} | | | | |
| {v, k} | | | | |
| {w, k} | | | | |

**4** Yukarıda yaptığınız çalışmalardan $R^3$'de iki vektörün lineer bağımsız olmasına yönelik bir **gerek ve yeter şart** belirlenebilir mi? Grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonucu aşağıya yazınız.

Ek 8'in Devamı

**5** Şimdi alan u = (1,-3,2), v = (-3,3,1), w = (2,-6, 4), k = (-1,-3,5), t = (3,4,2) vektörlerini aşağıdaki sorulara uygun olacak şekilde aktif hale getiriniz ve programı kullanarak sırasıyla aşağıda verilen vektör kümelerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. Elde ettiğiniz deneyim ve gözlemlerinize bağlı olarak$R^3$'de **üç vektörün** lineer bağımsız olması için **gerekli ve yeterli şartlara** ilişkin bir varsayım üretip üretemeyeceğinizi araştırınız. Ulaştığınız sonuçları gerekçelendirerek açıklayınız.

| **Vektör Kümesi** | **LB** | **LBS** | **Çözüm** | **Vektörlerin Birbirine Göre Konumu** |
|---|---|---|---|---|
| {u, v, w} | | | | |
| {u, v, k} | | | | |
| {v, w, t} | | | | |
| {w, k, t} | | | | |

**6** $R^3$ de lineer bağımsız ve bağımlı üç vektörün birbirine göre durumlarını geometrik olarak açıklayınız.

Ek 8'in Devamı

**Etkinlik 2**

**1** Vektörler ve lineer bağımsızlığına ilişkin yaptığınız inceleme ve araştırmalara dayalı olarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

**a.** ”$R^2$ de lineer bağımsız üç vektör bulmak mümkündür” (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

**b.** “$R^3$ de üç vektörden oluşan her küme lineer bağımsızdır” (…) Doğru(…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

**c.** “$R^3$ de iki vektörden oluşan her küme lineer bağımsızdır” (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

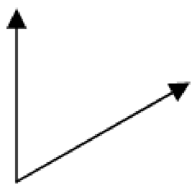
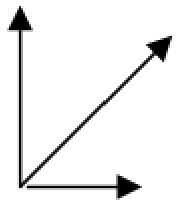
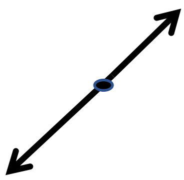
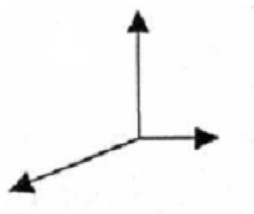
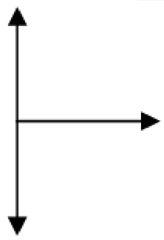
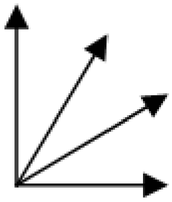
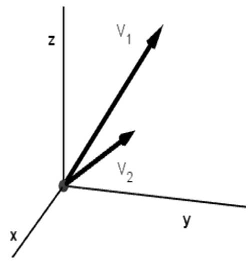
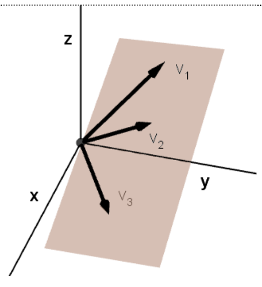
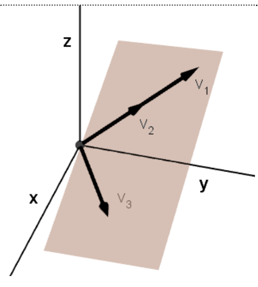
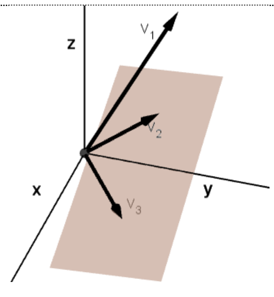
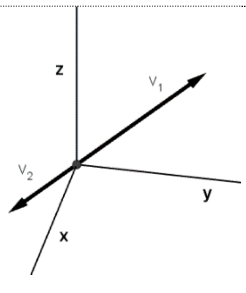
**d.** “$R^3$ de lineer bağımsız dört vektör bulmak mümkündür” (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

**e.** “$R^3$ de tek vektörden oluşan her küme lineer bağımlıdır” (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

**f.** “Sıfır vektörünün olduğu her küme lineer bağımlıdır” (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

Ek 8'in Devamı

**2** Aşağıdaki her bir seçenekte $R^2$ ve $R^3$ de (R3 deki çizimlerde x, y, z eksenleri gösterilmiştir) verilmiş vektör kümeleri yer almaktadır. Lineer bağımsız vektör kümelerini gösteren seçenekleri daire içine alınız. Seçiminize uygun açıklama cümleleri yazınız.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>I</th><th>J</th><th>K</th><th>L</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

**3** Etkinlik 1 ve Etkinlik 2 sonucunda lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılığa ilişkin neler öğrendiğinizi yazınız.

Ek 8'in Devamı

## Çalışma Yaprağı 11

### Etkinlik 1

**1** Bilgisayarınızdan TBN1 isimli dosyayı açınız. Aşağıda verilen vektör kümelerini programda işaretleyerek ayrı ayrı gösteriniz. Vektör kümelerinin $R^2$ vektör uzayının birer tabanı olup olmadığını aşağıdaki tabloyu doldurarak inceleyiniz.

**A** = {(1, 2)} **B** = {(1, 2), (2, 4)} **C** = {(1, 1), (-2,3)} **D** = {(1,0 ), (0,1)}
**E** = {(5, 0), (2,1)}

**F** = {(2, 5), (0, 0)} **G** = {(1, 2), (-2, 3), (2,1)} **H** = {(3, 2), (-1,3), (2, -2), (-3, 0)}

| Vektör kümesi | Lineer Bağımlı | Lineer Bağımsız | Gerdiği yer | Açıklama |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| B | | | | |
| C | | | | |
| D | | | | |
| E | | | | |
| F | | | | |
| G | | | | |
| H | | | | |

Ek 8'in Devamı

**2** Yukarıda yapmış olduğunuz çalışmalardan hareketle aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

**a)** Yukarıdaki vektör kümelerinden hangileri $R^2$ yi gerer?

**b)** $R^2$ yi geren en az sayıda vektör içeren küme hangisi veya hangileridir?

**c)** Bu kümelerdeki vektörlerin lineer bağımsızlığı hakkında ne söylenebilir?

**3** Şimdi Geogebra programında TBN2 isimli dosyayı açınız.

$\vec{u}$ = (2, 1, 3), $\vec{v}$ = (-1, -2, 4), $\vec{w}$ = (-2, 3, 1), $\vec{z}$ = (-3, -3, 1) vektörlerini aşağıdaki sorulara uygun olacak şekilde aktif hale getiriniz ve programı kullanarak sırasıyla aşağıda verilen vektör kümelerinin $R^3$ vektör uzayı için taban olup olamayacağını inceleyiniz.

| **Vektör kümesi** | **Lineer bağımlı** | **Lineer bağımsız** | **Gerdiği yer** | **Açıklama** |
|---|---|---|---|---|
| {u, v} | | | | |
| {u, v, w} | | | | |
| {u, v, z} | | | | |
| {u, w, z} | | | | |
| {u, v, w, z } | | | | |

**4** Yukarıdaki vektör kümelerinden hangileri $R^3$ yi gerer?

**5** $R^2$ geren en az sayıda vektör içeren küme hangisi veya hangileridir?

**6** Bu kümelerdeki vektörlerin lineer bağımsızlığı hakkında ne söylenebilir?

**7** Bir arkadaşınızın "$R^n$ te n veya daha fazla elemanlı her hangi bir vektör kümesi $R^n$ vektör uzayının bir tabanıdır. " şeklindeki çıkarımının doğru olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Gerekçelendirerek açıklayınız.

**Etkinlik 2**

**1** (2, -6, 10) vektörünün sırasıyla {u, v, w} ve {u, v, w, z } kümelerinin bir lineer birleşimi olarak tek türlü olarak yazılıp yazılamayacağını bulunuz.

**2** İki küme ile ilgili bulmuş olduğunuz sonuçları karşılaştırarak bu durumu gerekçelendirerek açıklayınız.

Ek 8'in Devamı

**Etkinlik 3.**

**3** Bir vektör uzayının taban ve boyutuna ilişkin yaptığınız inceleme ve araştırmalara dayalı olarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) " $S = \{v_1, v_2, \ldots.., v_r\}$ ve $T = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n\}$ bir V vektör uzayının bazları ise, bu halde r=n dir."
(…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

b) "Bir V vektör uzayının yalnızca bir tabanı vardır." (…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

c) " V, n boyutlu bir vektör uzayı ise, bu halde m>n olmak üzere, V'nin m vektör bulunduran herhangi bir altkümesi lineer bağımlıdır."
(…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

d) " V, n boyutlu bir vektör uzayı ise, bu halde m<n olmak üzere, V'nin m vektör bulunduran herhangi bir altkümesi V'yi gerebilir."
(…) Doğru (…) Yanlış
Cevabınızı gerekçelendiriniz.

**Ek 9. Yansıma Raporları Ders Öğretmeni**

**2. hafta vektör uzayı (öğretmen bakışı ile yansımalar)**

Ders genel anlamda yoğun, aynı zamanda verimli geçti diye düşünüyorum. Daha önceki derslere hiç katılmayan iki erkek öğrenci derse katılım gösterdi. Etkinlikleri tamamlamak için çaba sarf etti. Bu oldukça olumlu bir gelişme diye düşünüyorum. Ders daha sıralı bir şekilde betimlenecek olursa;

İlk başta geçen haftanın genel bir özeti yapıldı. Tekbir yönlü doğru parçası olarak vektör kavramından aynı doğrultu, yön ve büyüklüğe sahip yönlü doğru parçalar kümesi olarak vektör kavramı söylemi tekrarlandı. Vektör kavramı ile ilgili mevcut anlamalarımızın bu haliyle de yeterli olmadığı vurgusu yapılıp, bu ders sonunda bu anlamalarının genişletileceği ifade edildi.

Bu dersle ilgili ön bilgi anlamında Rn, R3, R2 ve R kümeleri tanımlandı ve Rn in cebirsel özellikleri ortaya kondu ve vektör uzayı kavramı verildi.

İlk örnek hem küme hem de işlemlerin geometrik olarak betimlendiği, çözümünde geometrik olarak sunulduğu düzlemdeki tüm yönlü doğru parçalarının kümesi ile ilgili problem oldu. Problem yazıldıktan sonra öğrencilere Çalışma yaprağı 4 verildi. Uygulama neticesinde bu çalışma yaprağına en az 20 dk zaman ayrılması gerektiğini düşünüyorum. Bu çalışma yaprağındaki üçüncü soruda Furkan ve Ezgi yazılıma a+(b+c) veya (a+b)+c yazdıklarında ekranda a+b+c belirdiğini, bu yüzden "bu durumda inceleme yapmamıza gerek yok" dedi. Çünkü ikisi de a+b+c verdiğinden sonuçlar eşit çıkacaktır. Bu duruma bir çözüm getirebilir mi bilmiyorum. Ayrıca bir eşitliğin gösterilmesi gereken durumlarda, farklı veri girişleri olsa ve vektörler farklı renkte çizilebilir mi? Belki düşünülebilir.

Bu problemden sonra cebirsel olarak R2 nin vektör uzayı olduğunun gösterilmesi istendi. Bu esnada grupların cevapları incelendi. Eksikliklerine dönüt verildi. R2 nin elemanlarını tanımlama ve işlemleri uygun bir şekilde yürütmede bazı problemlere rastlanıldı. Çözüm tamamlandı ve ara verildi.

Aradan sonra R2 nin vektör uzayı olduğunun gösterilmesine ilişkin ispat yapıldı. R3 ve Rn ninde standart işlemlere göre reel vektör uzayı olduğu örnek olarak ifade edildi (ispata girilmedi. Zaten verilen ödevde Rn nin vektör uzayı olduğunun gösterilmesi var). Burada Rn vektör uzayının elemanı olan sıralı n'lilerin vektör olduğu ama yönlü doğru parçaları ile temsil edilemediği vurgusu yapıldı. Aslında burada Rn de vektörlerin kullanım alanları örneklendirilecekti ama zaman kaygısı ile geçildi. Belki ilerleyen derslerde yer verilebilir. Daha sonra çalışma yaprağı 5 verildi. Bu oldukça verimli bir etkinlikti. Her bir problemde kümeler hem sözel, hem geometrik hem de cebirsel olarak ifade edilmişti. Genel çözüm sunmadan önce her bir özelliğin sağlanıp sağlanmadığını geocebra yardımı ile irdelendi. Normal şartlarda çok zaman alacak bu uygulama çok daha kısa zamanda tamamlandı. 20-25dk bu uygulama için yeterli. Bu etkinliğin en güzel yanı vektör uzayı olma şartlarını somut örnekler üzerinde tek tek irdelemiş olmalarıdır. Önceki deneyimlerimden benzer problemlerde cebirsel çözümde –aslında basit görünen-birçok nokta birçok öğrenci tarafından anlaşılmıyordu. Burada sınıftaki en zayıf öğrenciler (ümran ve diğer ik erkek öğrenci) bile niye ilgili şartın sağlandığı veya sağlanmadığını anladı. Ayrıca hangi şartlarda aslında ne sorgulandığı öğrenciler tarafından daha anlaşılır oldu. Mesela 1., 4., 5. Ve 6. şartlarda u+v, 0, –u ve a.u nun V kümesinin elemanı olup olmaması durumu varken, diğer durumlarda verilen işlemlerin sonuçlarının eşit olup olmadığı sorgulanıyordu. Bu durum şartları daha çok özümsemelerine yardımcı oldu diye düşünüyorum. Yalnız burada tabloda 4. Ve 5. Özelliklere ilişkin kısaltma hatalı (örn. u+0=u

Ek 9'un Devamı

verilmiş sadece. Oysa u+0=u için 0elemanıdır V olmalı. Bu iki madde ÇY de düzeltilmeli). Bunu öğrencilere dönüt verirken düzelttim. Bazı gruplar bu yüzden hatalı çıkarımlar yapmıştı. Açıklama yapınca düzelttiler. Burada daha çok 4. Problemde vektörleri yorumlamada hata yaptılar. Çizimle ortaya çıkan belli vektörlerin y=mx+n doğrusu üzerinde olup olmadığı durumu. Burada doğru üzerindeki (x,y,z) sıralı üçlüsünün bir nokta gösterdiği gibi başlangıç noktası orjin bitiş noktası bu nokta olan vektöre karşılık geldiği açıklaması yapıldı. Bu birçoğu için anlaşılır oldu.

Son aşamada ÇY5 in eki üzerinde öğrenciler çalıştı. Burada az önce geometrik çözüm sundukları durumlara formal çözüm sunmaları isteniyordu. Bazı gruplar tabloya referans vererek "şu şu özellikler sağlanmadığından vektör uzayı değildir". Şeklinde cevap yazmıştı. Bunun üzerinde konuştuk. Bunun formal çözüm olamayacağı, eğer özellik sağlanmıyorsa aksine örnek vererek veya cebirsel olarak çözüm sunmaları gerektiği vurgusu yapıldı. Bu kısım yaklaşık yarım saat sürdü. Daha önce geometrik çözüm sunduklarından çözüme başlamaları kolay oldu. ancak nasıl formal olarak ilgili özelliği gösterecekleri konusunda sıkıntı yaşıyorlardı. Ders öğrencilerin çözümlerine referans verilerek tahtada sunulan çözümlerle bitirildi. 3 problemdeki küme vektör uzayıydı. Öğrenciler yetiştiremeyince bu sorunun çözümü ödev olarak bırakıldı.

Bu ders aralarında öğrencilerin bir önceki haftadan ödevlerine dönüt verildi.

13.03.2017 uygulamada 3. Haftaya ilişkin rapor….

İlk olarak geçen hafta ne işlendiğine dair bir hatırlatma yapıldı. Bu sırada vektör kavramının zihnimizde geçirdiği evrimsel süreç vurgulandı. Daha sonra bir önceki ders verilen ödevler ve çözümleri hakkında konuşuldu. Bu süreç yaklaşık yarım saat kadar sürdü. Tüm öğrenciler ilgili bir şekilde çözümler hakkında tartışmaya katıldı. Burada soru ve sorunun gerektirdiği düşünme biçimine ilişkin öğrenciler arasında diyaloglar gerçekleşti. Örneğin bir öğrencinin belli bir soru için R2 veya R3 de çözüm yapsak olmaz mı şeklindeki sorusuna, genel düşünülmesi ve cevap verilmesi şeklinde sınıftan diğer bir iki öğrenciden yanıt geldi. Hatta burada R2, R3 ve Rn arasındaki ilişkiye dair öğrencilerin sahip olduğu yanlış anlamlandırma ortaya çıktı. Bu bana bu konu hakkında konuşma fırsatı verdi. Bu süreç kayıt altına alındığından burada geçen diyaloglar dikkatli bir şekilde analiz edilebilir. Ödevlerle ilgili bu hareketli tartışma ortamı spesifik ödev verme ve takibinin ne kadar etkili olduğunu bir kez daha göstermiş oldu.

Ödevler hakkında tartışıldıktan sonra sırasıyla iki temel problem ele alındı. Bir vektör uzayında her elemanın birden fazla tersi olabilir mi ve bir vektör uzayı birden fazla sıfır vektörüne sahip olabilir mi? Sınıftan çözümler alındı. Çok zorlanmadılar. Ancak bu süreçte geçen sınıf içi diyaloglar öğrencilerin düşünme biçimine ilişkin kanıtlar sunabilir. Mesela bir kız öğrenci tahtaya kalktı (özgeydi sanırım). İki tane etkisiz elemen olsun e1 ve e2 diye. U+e1=u ve u+e2=u dedi. Sonra her ikiside sıfır vektörü olacağından birbire eşittir" gibi bir açıklama yaptı. Bu aslında yapısal bir düşünceye ile bakış açısına sahip olmadıının kanıtıydı bence.

Vektör uzayları ile ilgili son olarak "vektörlerin özelliklerine" ilişkin bir teorem verildi ve 1. Ve 3. Maddeleri ispat için öğrencilerden girişimde bulunmaları istendi.

Ek 9'un Devamı

**THEOREM 5.1.1**

*Let V be a vector space, **u** a vector in V, and k a scalar; then:*

(a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(d) *If* $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *then* $k = 0$ *or* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

We shall prove parts (*a*) and (*c*) and leave proofs of the remaining parts as exercises.

Teorem çok temel özellikleri içeriyordu. 1ve 3 ü sınıfta yapacaktık. 2 ve 4 ödev verildi. Furkan 4. 1 ve 2 den yapılabilir dedi hemen. İspata geçmeden önce vektör ve skaler sıfırları ayırabilmek için vektörlerin üzerine vektör işareti koyacağımı söyledim ve sınıfla birlikte vektörleri ve skalerleri belirledik. Daha sonra ispata döndük. Öğrenciler ispata nereden nasıl başlayacakları konusunda çok fazla bir şey söyleyemediler önce. Başlangıcı her iki durumda da ben yaptım. İki İkinci durumdaki ilişkiyi göstermek için u+(-1).u=0 olduğunu gösterirsek iddiayı göstermiş oluruz açıklaması başta çok anlaşılmadı. Birkaç defa farklı şekillerde açıklamaya çalıştım. Umarım anlaşılır olmuştur.

Tahtaya bir vektör uzayının her alt kümesi de vektör uzayıdır şeklinde bir iddianın doğru olup olmadığına ilişkin problem yazıldı ve Çalışma yaprağı 6 2 kişiik gruplar halinde çalışacakları şekilde dağıtıldı. 15 dakika verildi. Gruplar arasında dolaşıldı. Bu süreçte grupların çalışma yaprağındaki yönergelerle ilgili tespit edilen soru ya da sorunlar ışığında bu çalışma yaprağında bazı düzeltmeler yapıldı ders sonunda. Genel olarak anlaşılırdı ve çalışma yaprağındaki amaca ulaşıldı.

Çalışma yaprağının devamında da ders verimli ve güzel geçti. Öğrenciler için anlaşılır oldu. Genelde yaptıkları gibi sessiz kalmak yerine sürekli bir şeyler sordular veya bir şeylere cevap verdiler. Öğrenciler ders sonunda lab. Da çalışma isteklerni ortaya koydular. Bu derste çok yorulduklarını ifade ettiler. Geçen ders çok daha az yorulduklarını ifade etmişlerdi. O yüzden dersi 15 dk. önce bitirdik. Benim açımdan ise geçen ders çok yoğun ve yorucu idi. Bu ders daha rahattı. Bu aslında formalizmin onları ne kadar sıktığı ve yorduğunun bir göstergesiydi bence.

Tüm ders sürecindeki diyaloglar öğrencilerin düşünme biçimlerine katkı açısından dikkatli bir şekilde incelenmeli. Hem ders içinde hem de haftalar boyunca gelişimin örneklerini destekleyecek kanıt diyaloglar belirlenmeli. Daha sonra bulgularda kullanılmak üzere…

Ek 9’un Devamı

**4. hafta lineer birleşim ve germe (20.03.2018)**

Dersi lab. Da yürüttük. Dersin ilk 45 dk.lık kısmında alt uzay kavramına ilişkin bir önceki ders yapılanlar üzerinde konuşuldu ve alt uzay olma ile ilişkili iki soyut nitelikte probleme yer verildi. Öğrenciler geçen derse ilişkin sorularıma cevap verebildiler. Simetrik matrislerin kümesi kare matrisler kümesinin alt uzayı mıdır şeklindeki soruya çoğu çözüm üretebildi. Bu soruyu çözmelerini isterken ben simetrik matrisler kümesini M={[aij]Iaij=aji} ve M={AnxnI $A^t$=A} şeklinde iki şekilde temsil ettim. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu ilk gösterimi bir öğrenci 2. Gösterimi kullanarak çözüm yaptı. İkinci problemde m<n için Pm(R) kümesinin Pn(R) kümesinin alt uzayı olup olmadığı irdelendi. Burada p polinomu m. dereceden ve q polinomu m. dereceden alarak alt uzay olduğunu gösterebiliriz dedi birkaç öğrenci. Burada toplam ve skaler çarpımda polinomların derecelerinin nasıl değiştiği fikrinden hareketle bir çözüm sundum tahtada. Sunduğum çözüm onların önerdiğine göre biraz daha soyut olduğundan bunu kullanmayı düşündüm. Öğrenciler için anlaşılır oldu.

Bu ders ele alacağımız yeni konu hakkında öğrencilere bilgi verdikten sonra; lineer birleşim tanımını verdim. Ardından R3 de biri diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılan ve yazılamayan üç örneğe yer verdim. ÇY8 öğrencilere dağıttık. Şimdi verilen vektörlerin olası tüm lineer birleşimlerini düşüneceğimizi ve bu şekilde bu vektörlerin lineer birleşimi şeklinde ifade edilen veya edilemeyen vektörleri karakterize etmeye çalışacağımız söyleyerek etkinliklere başladık.

Çalışma yaprağında belli bir sistematikte yer almış 5 etkinlik vardı. Ben etkinlikleri parça parça gidip aralarda toparlayarak ilerlememizin daha uygun olacağını düşündüm ve işleyişi bu şekilde yaptım. Burada erken bitiren bazı öğrenciler diğerlerini beklerken sıkıldı ya da dağıldı (cep tlf vs ile ilgilendi). Aslında burada eksik veya hatalı çıkarım yapanlar varsa onların 1. Etkinlikte kendi çözümlerini gözden geçirmelerini ve diğerlerinde de benzer şekilde devam etmelerini sağlamayı amaçladım. Etkinlik bitince de bütün olarak karşılaştırmalı şekilde üzerinden geçmeyi bir toparlama yapmayı planladım. Bu şekilde uygulama yapılabilir. Ancak bizim çalışma grubumuzdaki gibi az sayıda öğrenci grubunda öğretmen öğrencilerin çalışmalarını iyi takip yaparak ÇY8 bütün olarak da ele alınabilir.

Bu etkinliğin genel anlamda herhangi bir vektörün diğer vektörlerin lineer birleşimi şeklinde daima yazılamayacağını, yazılabilenlerin söz konusu vektörlerle olan ilişkisini hem cebirsel hem de geometrik (somut) olarak görmelerinin yerinde olduğunu düşünüyorum. Çünkü tek başına cebirsel gösterim öğretmen olarak bizim istediğimiz türden ilişkileri görmeleri için her zaman yeterli değil. Tecrübem bana bunu söylüyor. Mesela etkinlik 1 de verilen vektörün tüm lineer birleşimleri bir doğru üzerindeydi. Dolayısıyla bu doğru üzerinde olmayan noktalar bu vektörün lineer birleşimi değildi. Bu fikir veya lineer birleşimin tanımından hareketle bazı öğrenci grupları doğru üzerindeki noktaları (x,0,x) şeklinde formüle ederek bazı öğrenci grupları da c.(1,0,1)=(c,0,c) şeklinde (1,0,1) vektörünün lineer birleşimi şeklinde yazılabilen vektörleri formüle etti. Etkinliğin amacı da bu olmalı.

Burada 2. Etkinlik bana biraz –en azından uygulama sürecinde- gereksiz geldi. Normalde etkinlik 3 ve etkinlik 4 de etkinlik 1 ve etkinlik 2 arasında görmelerini istediğimiz türden bir ilişki var. O yüzden çıkarılmalı diye düşünüyorum.

Birkaç öğrenci ilk etkinlikte “kümeyi cebirsel olarak ifade etmenin” ne anlama geldiği konusunda sorular sormuştu. Diğer etkinliklerde bu türden sorular gelmedi artık.

Etkinlik 5 ile ilgili olarak; öğrencilerin birçoğu çalışma yaprağında verilen üç vektörün tüm lineer birleşimlerinin geometrik yerini kare prizma, dikdörtgenler prizması şeklinde tanımlamıştı.

Ek 9’un Devamı

Başlangıç sınavı da dahil olmak üzere sorulara daha yapısal nitelikte cevap veren Beyza da bu türden bir cevap vermişti. Bu durum beniz biraz şaşırttı. Skalerlerin seçimine bağlı böyle bir durum ortaya çıkıyordu aslında. Etkinlik 3 ve 4 de de aslında kare veya dikdörtgen olarak tanımlayabilecekleri yapılar vardı. Oysa rahatlıkla düzlem cevabını vermişlerdi. Ben bunun daha önce bu şekilde somut olarak r3 ü veren bir durumu yorumlamadıklarını düşünüyorum. R3 ü gerçek anlamda uzayda noktalar kümesi olarak gördüler. Yine 5. Etkinlikte “$a, b, c \in \mathrm{R}$ olmak üzere herhangi bir (a, b, c) $\in \mathrm{R}^3$ vektörü u, w ve k vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını grup arkadaşınızla tartışarak ulaştığınız sonuçları aşağıya yazınız.” Şeklinde bir soru yöneltmiştik öğrencilere. Bir kısmı geometrik kanıtlar sunmuştu. ÇY8 örnekleri vardır (silmedilerse). Bir kısmı genel çözümü üretmişti. Beni en çok şaşırtan durumlardan biri normalde derslere çok katılmayan iki erkek öğrencinin etkinliğin başından sonuna aktif bir şekilde katılım göstermeleri ve bu soruya doğru bir cevap üretmiş olmalarıydı.

Etkinlikleri tamamlamak düşündüğümden fazla vakit aldı. Aslında bu ders etkinliklere ilişkin bir toparlama yapıp germe tanımını verdikten sonra ilgili bir teorem ve artan soyutluk düzeyinde bazı uygulamalara yer verecektim. Ancak sadece etkinliğin bitiminde germe tanımını verip, çalışılan örnekler üzerinden geren vektörler ve gerilen kümeler örneklendirildi. Bu ders ödev soruları vermedim. Bir sonraki derse bıraktım.

Aslında bu etkinliklere geçen hafta çalıştığımdan diğer sınıflarımda lineer birleşim germe ilişkisini etkinliğe benzer bir yapıda vermeye çalıştım. Çünkü geçiş birçok öğrenci için anlaşılır olmuyordu. Orada tabi ki geocebra vs. kullanamadım. Şöyle bir sıralama takip ettim:

Lineer birleşim tanımı ver. Biri lineer birleşimi şeklinde yazılan diğeri yazılamayan iki örnek çöz. Sonra;

i. (1,0,1)
ii. (1,0,1) , (0,1,1)
iii. (1,0,1),(0,1,1) ve (1,0,0)
iv. (1,0,1), (0,1,1) ve (1,2,3) örnek durumlarını tek tek ele aldım.

Her birinde öğrencilerden bu vektörlerin tüm lineer birleşimlerini kümelerini düşünmelerini (cebirsel olarak), bu kümenin elemanı olan ve olmayan birkaç durumu örneklendirmelerini, son olarak elde edilen kümeşerin R3 e eşit olup olmadığını belirlemelerini istedim. 3. Ve 4. Sorularda elde edilen kümelerin r3 e eşit olup olmadığını belirlemeye ilişkin yaklaşımlar örneklendirildi. Daha sonra germe tanımı verilip, (1,0) ve (1,1) vektörlerinin R2 yi gerip germediğini sordum. Ödev olarak da matris ve polinomlardan verdim. Bu şekilde yürüttüğüm ders beni oldukça tatmin etti. Öğrenciler için de anlaşılır olduğunu düşünüyorum.

Ek 9'un Devamı

**5. hafta-5. Hafta ek (27.03.2018 ve 29.03.2018)**

**5. hafta (27.03.2018)**

Derse girişte geçen hafta ele alınan lineer birleşim ve germe kavramları ve bunlar arasındaki ilişki ele alınarak başlandı. Bu süreçte geçen hafta yapılanların bir özeti sunuldu. Bu haftaki dersin 2 saatlik kısmı lineer birleşim ve germe kavramlarına ayrıldı. Geçen ders etkinlik yapılmış öğrenciler bu kavramlarla ilgili r2 ve r3 de çeşitli deneyimler yaşamıştı. Bu hafta bu iki saatlik ilk kısımda geçen hafta yapılanların farklı vektör kümelerinde ele alınması ve sonrasında ilgili teoremlerin ispatı şeklinde plandı.

Ders planında yer verilen aşağıdaki üç problem sırasıyla ele alındı.

**Problem:** (1,0) ve (1,1) vektörlerinin gerdiği kümeyi bulunuz. Bu vektörler $R^2$ yi gerer mi? Gösteriniz.

Öğrenciler bu iki vektörün gerdiği kümeyi cebirsel olarak ifade etmede zorlanmadılar. Bu kümenin R2 ye eşit olup olmamasına dönük, daha çok sezgisel cevaplar üreterek eşittir şeklinde açıklama yaptılar. Benim daha geçerli bir kanıt istemem üzerine bir öğrenci (Özge) alfa2 için keyfi bir değer verildiğinde alfa1 in daima bulunabileceğini bu yüzden bu kümenin r2 deki vektörleri örteceği açıklamasını yaptı. Açıklamasını destek için bir örnek sundu. Bu örnekten hareketle genel doğrulama yapıldı. Özge açıklamasını yaparken öğrenciler ne demek istediğini anlamış göründüler. Çünkü çözümden önce (x,y) sıralı ikilisi için alfaların nasıl seçilmesi gerektiğine ilişkin sözel açıklamalar yaptılar.

**Problem** : $S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ kümesinin gerdiği kümeyi bulunuz. Bu vektörler $R_{2x2}$ kümesini gerer mi? Gösteriniz. $R_{2x2}$ kümesini geren vektörler bulabilir misiniz?

Bu kümeyi bulmada ve bunun R2x2 eşit olmadığına geçerli kanıt sunmada zorlanmadılar. Bunun üzerine bu kümede nasıl bir değişiklik yapsak elimizdeki vektörler R2x2 gere şeklimdeki soruma da zorlanmadan cevap verdiler.

**Problem:** P2(R) de $v1 = 2x^2 + x + 2, v2 = x^2 - 2x, v3 = 5x^2 - 5x + 2, v4 = -x^2 - 3x - 2$ vektörleri verilsin. $u = x^2 + x + 2$ vektörünün v1, v2, v3 ve v4 vektörlerinin gerdiği kümenin elemanı olup olmadığını gösteriniz.

Bu soru için öğrencilerin bir kısmı bu vektörlerin gerdiği kümeyi bulup elde ettikleri vektörü u vektörüne eşitleyerek alfaları bulmaya çalıştı. Bir kısmı ise doğrudan u vektörününün diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını kontrol için uygun eşitliği yazdı. Burada iki öğrencinin (ezgi, irfan) polinomlar yerine sıralı üçlüler kullandığını fark ettim. Örn. v1 yerine (2,1,2) yazmıştı. Aslında cebirsel olarak aynı sonucu veriyor ama bunu kısaltma amaçlı kullandıklarını düşünmüyorum. Daha aşina oldukları sıralı üçlüleri farkında olmadan çağırıyorlar. Polinomlarla bu bağlamda (vektör uzayları) işlem yaparken zorlanıyorlar. Burada öğrenciler yazdıkları eşitliklerden elde ettikleri denklem sistemini çözmede zorlandı. Birçoğu zaten hatalı sonuçlar buldu. Tahtada matrisleri kullanarak sistemi birlikte çözdük. Çözüm yapıldıktan sonra lineer birleşim ve geren kümenin elemanı olma arasındaki vurgu yapılarak sonuç cümlesi yazıldı.

Bu problemler çözüldükte sonra "V bir reel vektör uzayı ve S={v1,v2,..vn}<V olsun. <S> kümesi Vnin bir alt uzayıdır" şeklinde ifade edilen teorem yazıldı ve ispatı öğrencilerinden istendi. <S> kümesi tahtaya yazıldı. Alt uzay ile ilgili bilgileri iyiydi ve bu ispatı zorlanmadan yaptılar. Sadece birkaç öğrenci <S> kümesinin elemanlarının yapısını tanımlamada –tahtada olmasına rağmen- zorlandı. Teorem ispatlandıktan sonra bu teoremin bize aynı zamanda bir vektör uzayı için alt uzay bulma yöntemi sunduğu ifade edildi. Bu bağlamda r2 için alt uzay üretmeleri istendi öğrencilerden. Yapılan çözüm ve tartışmaların öğrenciler için anlamlı olduğunu düşündüm.

Ek 9'un Devamı

Dersin ikinci 2 saatlik kısmına lineer bağımlık ve bağımsızlık kavramlarının tanımını vererek başladım. Bu tanımları öğrencilerin zorluklarını dikkate alarak revize edip onlara sundum. Öğrencilerden bir kısmı bu tanımı daha önce işlediğimizi hatırladıklarını söyledi. Belki başka bir derste ele almışşınızdır dedim. Bu ders için olduğunu söylediler. Eğer gerçekten de bu şekilde düşünüyorlarsa lineer bağımsızlık tanımının lineer birleşim kavramına çağrışim yaptığını düşünüyorum. Zaten önceki yıllardaki deneyimlerimden karıştırıldığını biliyorum. Çalışma yaprağı 10 öğrencilere dağıtıldı. Öğrenciler dersin sonuna kadar bu çy de etkinlik1 i tamamladılar. Toparlama kısmı Perşembe günü yapacağımız ek derse kaldı.

ÇY 10 da 1. Soruda öğrencilere üç küme verilmiş ve lineer bağımlı olup olmadıkları soruluyordu. Öğrenciler çözüm yaparken çözümlerini inceledim ve uygun olmayanlara ilişkin dönütler verdim. Mesela birkaç öğrenci soruda verilen vektörlerin lineer birleşimini almış, bunun sıfır vektörüne eşit olup olmadığına bakıyordu. Diğer birkaç öğrenci zaten her zaman geçerli sıfır çözümünü referans alarak vektörlerin lineer bağımsız olduğunu vurguluyordu.

Sıfır vektörünü içeren b. şıkkında öğrencilerin ilk verdiği cevap söz konusu vektör kümesinin lineer bağımsız olduğuydu. Bu soruda a. sıkkında lineer bağımsız olarak buldukları iki vektörden oluşan kümeye sıfır vektörü eklenmişti. Sıfır vektörünün bir etkisi olmadığını ifade ederek hızlıca lineer bağımsız küme cevabını verdiler. Cevap irdelenince ve ince noktayı kaçırdıklarını söylediler.

Sınıftan cevap hakkı verilen üç öğrenci çözümü tahtada yaptı. Öğrencilerin yukarıda belirtilen yanlışları çözüm üzerinde vurgulandı.

Bundan sonraki kısımda öğrenciler çalışma yaprağının r3 de tek vektör, iki vektör ve üç vektörün lineer bağımsızlığına ilişkin incelemeler içeren kısımlarına odaklandılar. Bu kısım öğrenciler için genelde zevkli geçti. Sıkılmadılar.

**(5. Hafta ek 29.03.2018 2 ders saati)**

Bu derse geçen ders yapılan etkinlik 1 in hatırlatılması ile başlandı. …………

Sıfır vektörünü içeren her küme lineer bağımlıdır.

1. Bir vektör uzayında tek vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bu vektörün sıfır vektörü olmasıdır.
2. Bir vektör uzayında iki vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerden birinin diğerinin skaler katı olarak yazılmasıdır.
3. Bir vektör uzayında üç veya daha fazla vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerden en az birinin diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılmasıdır.

Açıklamaları yazıldı. 2, 3 ve 4. Teoremlerin lineer bağımsızlık için eşdeğerleri de yazıldı. 1. Ve öğrencilerin isteği üzerine 4. Teoremler sınıfta ispat edildi. Diğer ikisi ispatlanması için öğrencilere bırakıldı. Geçen dersteki uygulama ve bu dersin başında yapılan tartışma sonucunda öğrencilerin bu ispatları takip etme ve anlamada çok zorlanmadığını düşünüyorum. Çözüme ilişkin önerileri birçok duruda kendileri verdi.

Ek 9'un Devamı

**Taban Kavramına yönelik yürütülen 4 ders saatine ilişkin yansıtıcı rapor:**

Ayrıntılara geçmeden önce derle ilgili genel değerlendirmem olumlu yöndedir. Öğrenciler için taban fikrinin informal ve formal anlamda anlaşılabilir olduğunu düşünüyorum. Ayrıca bu der içinde taban için hazırlanan çalışma yaprağı 11 de öğrencilere bazı kümeler verilmiş bu kümelerin lineer bağımsızlığı ve gerdiği küme hakkında kararlarını belirtmeleri istenmişti. Öğrenciler kümlerin lineer bağımsızlığı ve gerdikleri kümeleri birçok durumda kolaylıkla belirlediler. Bir kısmı bunu geometrik yaklaşımlarla bir kısmı ise cebirsel yaklaşımlarla yaptı. Geometrik çözüm sunanlar vektörlerin konumlarından hareketle lineer bağımsızlığı hakkında kolaylıkla karara vardılar. Ayrıca yine vektörlere bakarak nereyi gereceğine ilişkin doğru açıklamalar yaptılar. Örn. Furkan'ın yaptığı çözümü irdelerken R2 de aynı doğrultuda olmayan iki vektör için r2 gereceği açıklamasını yapmıştı. Bunun nedeni olarak r2 de alınan başka bir vektör, bu vektörler kullanılarak elde edilebilecekti. Daha açık olmasını isteyince, belli bir vektörü referans aldığımızda mevcut vektörlerin uygun skalerle çarpılıp toplanması durumunda bu vektörü verebileceği açıklamasını yapmıştı. Diğer tüm durumlar için gediği kümeye ilişkin benzer açıklamalar ile doğru sonuçlar üretti. Cevaplar her ne kadar sezgisel olsa da (ancak r2 de belli vektörler üzerinden soruların sorulmuş olduğunu da unutmamak lazım) aslında birçok öğrenci için çok zor anlaşılan (önceki yıllardaki deneyimlerinden biliyorum) germe fikrini anladığını görüyorum. Benzer cevaplar üreten başka gruplarda oldu. Bazı öğrenciler cebirsel yollar kullanmayı tercih etti. Ve verilen vektörler ışığında gerilen kümeleri cebirsel olarak yazdı. Bu kümelerin hangisinin r2 karşılık geldiği sorusu bazı durumlarda çok açık iken bazı durumlarda karar vermek (cebirsel olarak inşa edilen kümeye bakarak) zor oldu. Örn. G ve H maddelerinde elde ettikleri küme. Gruplar arasında dolaşırken bu türden zorluk yaşayan öğrencilerle mevcut kümenin r2 eşit olup olmadığı hk. Cebirsel yaklaşımlarla nasıl karar verebileceğimiz hk. konuşuldu. Etkinlik 1 tamamlandıktan sonra burada yer alan tüm durumlar için tahtada lineer bağımsızlık ve germe ile ilgili cevaplar öğrencilerle birlikte toparlandı. Bu hafta için özellikle germe fikrini inceleme sürecinde öğrenciler elde ettikleri lineer denklem sistemine çözüm bulmada bazı durumlarda ise elde ettikleri çözümün problem açısından ne anlama geldiğini ortaya koymada zorluk yaşıyordu (genellikle parametreye bağlı sonsuz çözümlerde). Aslında bu herhangi bir şekilde lineer denklem sistemleri ile karşı karşıya kaldıklarında yaşadıkları genel bir sorun gibiydi. Diğer derslerde de yaşanmıştı.

Etkinlik 1 taban kavramının informal tanımını öğrencilerin anlaması için etkili bir uygulama oldu. Ders verdiğim diğer sınıflarda öğrenciler genellikle germe fikrini üreten/temel vektörlerin bulunması açısından baz kavramı ile ilişkilendirebiliyor fakat en az sayıda vektör sağlaması açısından lineer bağımsızlık fikrini taban kavramı ile ilişkilendirmede zorlanıyordu. Etkinlik 1 bu açıdan işe yarar bir uygulama oldu diye düşünüyorum. Bu arada taban kavramının formal ve informal tanımı da öğrencilere yazdırılmış oldu.

Sonrasında etkinlik 1 de elde edilen R2 farklı bazları tahtaya yazıldı. Bu kümeler arasında D kümesinin doğal baz olduğu vurgulandı. Öğrencilerden r3, R4 ve son olarak Rn için doğal standart bazlar önermeleri istendiğinde zorluk çekmeden önerebildiler. Benzer şekilde P1(R), P2(R) ve Pn(R) için doğl bazlar bulundu (Burada öğrenci cevaplarını hatırlamıyorum. Kendileri mi önerdi yoksa ben mi sundum? Videoya bakılabilir)

Öğrencilere R2 örneği üzerinden bir vektör uzayının farklı bazları olabileceği söylendi. Germe ve lin. Bağımsızlık dışında bu bazların ortak özelliklerinin ne olduğu sorusu yöneltildi. Sınıftan eleman sayısı cevabı geldi birkaç öğrenciden. Bu durumun gerçekten değişmez bir özellik olduğu vurgulanarak boyut tanımı verildi. Tahtadaki bazlardan hareketle ilgili vektör uzaylarının boyutları belirlendi ve sembolik olarak temsil edildi. Sonrasında etkinlik 2 ye geçildi.

Ek 9'un Devamı

Etkinlik 2 aslında mantık olarak iyi ancak 2. Ve 3. Sorular bazı öğrenciler için çok açık değildi. Sınıf içinde dolaşırken bu öğrencilere ek açıklamalar yapmak gerekti. Revize gerekebilir. Bu etkinlik üzerine toparlama yapılırken verilen vektörlerin (4,-1) farklı taban vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazıldığında skalerlerin belli bir taban için tek türlü belirlendiği ve farklı tabanlar için farklı skalerlerin elde edildiği vurgusu ön plana çıkarıldı. Toparlama kısmı bu skalerlerin ilgili vektörün o tabandaki koordinatları olduğu bilgisi verildi. Bazı öğrencilerin yüzünde yeni bir durumun farkına varmış olmanın şakınlığı vardı. Çünkü şimdiye kadar vektörün bileşenleri ve koordinatlarını aynı olarak düşünüyorlardı. Bu etkinlik bir vektörün bileşenleri ve koordinatları arasındaki ayırımın yapılması, standart tabanlar söz konusu olduğunda vektör ve koordinatların örtüşebileceği (tabi bu da Rn için geçerli. bir polinom vektör ile standart tabana göre koordinatları yapı olarak farklı) fikirlerinin anlaşılması açısından açık olmayan bazı yönergelere rağmen etkili oldu. Ancak mutlaka etkinliğin toparlanma kısmında bu fikirlere vurgu yapılması gerekiyor.

Etkinlik 2 sonunda bir vektörün taban vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde tek türlü yazılabileceğine ilişkin teorem yazıldı. İspat için öğrenciler uygun öneriler getirebildi (burayı da çok ayrıntılı hatırlamıyorum. Ayrıntılandırmak için gerekirse videolara bakılabilir). Teorem ispatından sonra koordinat kavramının tanımı ve temsili verildi. Bundan sonraki 2x2 tipindeki matrisler kümesi için yapılan uygulama bir vektörün bir vektör ve koordinatları arasında ilişki/farkın çok daha net görülmesi için iyi bir seçim oldu bence.

Genel anlamda öğrencilerin derse katılımı ilgisi iyi. İlk başta ÇY ile dersi işleme komsundaki acemiliklerini artık iyice atmışlardı. Derste önceki konulardan bilgilere ihtiyaç olduğunda zorlanmadan çağırabildiklerini fark ettim. Hatta sınıf içi tartışmalarda ya da sınıfa dönük sorularıma cevap verirken ya da verdikleri yanlış cevabı değiştirirken sanki sınıf içinde yaşadıkları deneyimleri gözlerinin önüne getirmeye çalışıyorlar hissi veriyorlardı zaman zaman. Bu uygulamaların genel anlamda verimli geçtiğini düşünüyorum sonrasında yazdığımızı teoremlerin yapısını ve ispatını anlama süreçlerini kolaylaştırıyordu. Ayrıca derse karşı çok ilgisiz görünen öğrenciler (3 öğrenci Mehmet, irfan ve ümran) bile ders içi yürütülen uygulamalara dahil oldular. Kendilerini diğer derslerde olduğu gibi dışarda bırakmadılar.

**Ek10. Yansıma Raporları Araştırmacı**

**İkinci Hafta**

Dersin başlangıcında geçen hafta anlatılan konularla ilgili genel bir özet yapıldı. Vektör tanımı ile öğrenci bilgilerinin başlangıçta nasıl olduğu ve ders sonrasında nasıl olduğu hakkında bahsedildi. R2 ve R3 te birer yönlü doğru parçası olarak tanımlanan vektörler daha sonra paralellik şartlarını sağlayan denklik sınıfının bir elemanı olarak tanımlanmıştı. Daha sonra vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile ilgili toparlamalar yapılarak derse devam edildi.

Derste ilk olarak R, R2, R3 ve Rn kümeleri tanımlandı ve Rn nin cebirsel yapısı tahtada teorik olarak anlatıldı. Bu bilgilerin ardından vektör uzay kavramı verildi ve ardından düzlemdeki tüm yönlü doğru parçalarının oluşturduğu kümenin vektör uzayı şartlarını sağlayıp sağlamadığını belirlemeye yönelik olarak çalışma yaprağı 4'e geçildi. Çalışma yaprağı 4 vektör uzayı olma şartlarının tümünü kapsayan bir etkinlikten oluşmaktaydı. Öğrenciler çalışma yaprağı ile ilişkili hazırlanan Geogebra uygulamasıyla vektör uzayı olma şartlarının geometrik olarak belirlemeye çalışıyorlardı. Etkinliğe başlamadan önce öğrencilere arayüz hakkında kısa bir bilgi verildi ve programın nasıl kullanmaları gerektiğinden bahsedildi. Uygulama süresince genel olarak her hangi bir problemle karşılaşılmadı. sadece iki öğrenci girdi alanına (a+b)+c ve a+(b+c) yazıp enter'a bastıklarında her defasında alanda a+b+c çıktığını ve istenilen ifadeleri elde edemediklerini ifade ettiler. Ancak önemli olanın enter'a basmadan önce girdi alanına yazılan ifadenin olduğu ve her seferinde en son olarak a+b+c nin alanda gözükeceği öğrencilere belirtildi. Bu durumu her ne kadar öğrencilere izah etmek kolay olsa da uygulamada iki farklı girdi alanı ve bu alanlarla ilişkili farklı renklerde vektörler atanarak sonuçların karşılaştırılması sağlanabilir. Etkinlikten hemen sonra R2 nin vektör uzayı olduğunun cebirsel olarak gösterilmesi istendi. Öğrencilerin zorlandıkları veya problem yaşadıkları yerlerde ders hocası yardımcı olarak çözümün yapılmasını sağladı. R2 nin vektör uzayı olması ile ilgili olarak öğrencilerin cevapları üzerinden açıklamalar yaparak detaylı olarak sorunun üzerinde duruldu. Benzer şekilde R3 ve Rn ninde vektör uzayı olduğundan bahsedildi ancak çözüm yapılmadı. Rn nin vektör uzayı olduğunun gösterilmesi ödev olarak verildi. Ayrıca Rn de vektörlerin sıralı n liler olduğu ve bu vektörlerin yönlü doğru parçaları olarak yazılamayacakları ders hocası tarafından belirtildi. Bu kısımdan sonra ise diğer etkinliğe geçildi ve öğrencilere çalışma yaprağı 5 dağıtıldı. Öğrenciler artık arayüzü tanıdıkları için programı kullanmak onlar için bir sorun teşkil etmedi. Çalışma yaprağı 5 dört problem durumunu içeren ve her bir problemde verilen kümelerin vektör uzayı olup olmadıklarını üzerine yapılan bir etkinlikte. Öğrenciler programı kullanılarak verilen kümelerin alt uzay olma şartlarını geometrik olarak belirlemeye çalıştılar. Etkinlik için öğrencilere 20-25 dakika süre verildi. Ders hocası ile birlikte sıraların arasında dolaşarak öğrencilere takıldıkları kısımlarda yardımcı olmaya çalıştık.

Ek 10'nun Devamı

Bazı öğrenciler vektör uzayı olma şartlarını sadece Geogebra uygulamasında verilen vektörler üzerinden yapmaları gerektiğini düşündüler. Bu öğrencilere kümedeki bütün vektörler için şartların kontrol edilmesi gerektiği ve verilen vektörlerin rahatlıkla değiştirilebileceği gösterildi. Dersin yoğun ancak verili geçtiğini söyleyebilirim. Öğrenciler program sayesinde çok rahatlıkla vektör uzay olma şartlarını kontrol ediyor ve bunların üzerinden çıkarımlarda bulunuyordu. Çalışma yaprağı 5 in son sorusunda ise bazı öğrencilerin y=mx+n doğrusu üzerinde ki vektörleri alırken problem yaşadıkları gözlendi. Doğru üzerindeki vektörlerin başlangıç noktasının orijin bitiş noktasının ise doğru üzerinde bir nokta olacağı öğrencilere belirtilerek bu problem aşılmış oldu. Öğrencilerin Geogebra uygulaması sayesinde verilen kümelerin vektör uzayı olup olmadığını somut bir şekilde inceleyerek kolayca sonuca gittikleri gözlendi. Çalışma yaprağı 5 ve Geogebra uygulamasının anlaşılması ve kullanılmasında herhangi bir sorun ile karşılaşılmadı. Sadece çalışma yaprağında etkisiz eleman ile ilgili küçük bir yazım hatası fark edildi ve düzeltildi.

Geometrik olarak yapılan işlemlerden sonra öğrencilerden çalışma yaprağı 5 e ek olarak verilen kâğıtlara formal çözümler yapmaları istendi. Bu kısımda öğrencilerin geometrik çözümlerine oranla zorlandıkları gözlemlendi. Ders hocası ve ben öğrencilere bu konuda rehberlik ederek yardımcı olmaya çalıştık. Ders hocası çözümleri tahtada sunarak dersi bitirdi. Etkinlikte yer alan 3. problem (etkinlikte vektör uzayı olan tek örnek) yetişmediğinden öğrencilere ödev olarak verildi.

Ek 10'nun Devamı

**Üçüncü Hafta**

Bir önceki derste işlenen vektör uzayı ile ilgili olarak hatırlatmalar yapılarak derse başlandı. Vektörün tanımına tekrar değinilerek başlangıç itibaren bu tanımın nasıl bir değişim geçirdiğine vurgu yapıldı. Bu kısımdan sonra ödev sorularına geçilerek derse devam edildi. Öğrencilerin ödev sorularına yönelik olarak derse katılım gösterdikleri ve ders hocasıyla soruları tartışarak çözümler hakkında görüş bildirdikleri gözlendi. Sırasıyla $R^n$ nin, 2x2 tipindeki matrislerin oluşturduğu kümenin ve $P_2(R)$ nin vektör uzayı olup olmadığı hakkında bilgiler verilerek derse devam edildi. Sıfır vektörü her bir soruda irdelendi. Furkan ve Ezgi matris sorusunun 10. özelliğini incelerken 1 skaleri yerine birim matrisi aldıklarının ve bunun aynı şey olup olmadığını sordular. Ders hocası gerekli açıklamaları yaparak öğrencilere anlaşılır bir cevap verdi. Burada, ödev verilmesinin ve takibinin yapılmasının öğrencilerin dersin bir parçası olmalarında veya derse aktif katılım sağlamalarında önemli bir etken olduğu net bir şekilde ortaya çıkmıştır. Öğrencilerden biri bir önceki dersteki etkinlikte yer alan Problem 3 ün çözümünün nasıl yapılacağını sordu. Sorunun çözümü etkinlikte geometrik olarak çözülmüş ancak cebirsel çözüm her öğrenci tarafından yapılamamıştı. Ders hocası problem 3 ün çözümünü öğrencilerin nelere dikkat ederek çözüm yapmalarını açıklayarak cebirsel olarak çözdü. Sınıftaki öğrenciler için oldukça anlaşılır bir çözüm olduğu gözlendi. Bu hatırlatmalar ve toparlamalardan sonra iki soru ile derse devam edildi. Bu sorular "Bir vektör uzayında iki farklı sıfır vektörü tanımlamak mümkün müdür?" ve "Bir V vektör uzayında bir elemanın iki farklı tersinin olması mümkün müdür?". İki sorunun çözümü de öğrenciler tarafından hocalarının da yardımıyla tahtada yapıldı ve anlaşılır oldu. Ders verilen bir teorem ile devam etti.

V bir vektör uzayı olsun. u, V'de bir vektör ve c bir skaler olmak üzere;

1. $0v = 0$
2. $c0 = 0$
3. $(-1)v = -v$
4. $cv = 0$, ise ya $c = 0$ veya $v = 0$

Teorem vektörlerin özeliklerine ilişkin 4 maddeden oluşuyordu. Ders hocası başlangıçta skaler olan sıfır ile vektör olan sıfır arasındaki ayırımı öğrencilerle birlikte yaparak ispatlara geçti. 1. ve 3. madde sınıfta yapılıp 2. ve 4. maddelerin öğrencilere ödev verilmesine karar verildi. 1. ve 3. maddelerin ispatları sınıf ile etkileşim halinde gerçekleştirildi. İlk olarak bazı öğrenciler verilen maddelerin çok aşikâr olduğunu ve nasıl ispatlamaya başlamaları gerektiğini bilmediklerini dile getirdi. Daha sonra ders hocasının da yönlendirmeleri ile ispatlar adım adım yapılmaya başlandı. İspatın her adımda kullanılan özellikler belirtildi ve bu kısımda öğrencilerin ders hocasına eşlik ederek hangi özelliklerin kullanıldığını belirtmeye başladılar. Böylelikle

Ek 10'nun Devamı

öğrenciler çözüme ders hocasına eşlik ederek çözümün bir parçası oldular ve kendi fikirlerini de belirterek çözüme katkı sağlamaya çalıştılar. İspat sonrasında öğrenciler bu tip ispatları nasıl yapmaları gerektiği konusunda fikir edinmiş oldukları gözlendi.

Ders tahtaya "Bir vektör uzayının her alt kümesi de vektör uzayıdır." probleminin yazılmasıyla devam etti. Bir öğrenci örnek verirken R2, Rn nin alt kümesi olduğunu iddia ederek örnek vermek istedi. Bunun üzerine tartışarak böyle olup olmadığı soruldu. Bazı öğrenciler bunun uygun olmadığını belirttiler. Ders öğretmeni uygun örnekler vererek bu kısmın anlaşılmasını sağladı. Bundan sonra bir öğrenci vektörlerin toplamının her zaman alt kümede olmayacağını buradan da hareketle her zaman alt uzayı olamayacağını belirtti. Bu problemin ardından Çalışma Yaprağı 6 ile derse devam edildi. Öğrenciler her zaman olduğu gibi iki kişilik gruplar halinde etkinliği gerçekleştirmeye başladılar. Öğrencilere 15 dakika zaman verildi ve etkinlik boyunca ders hocası öğrencilere arasında dolaşarak öğrencilere rehberlik etmeye çalıştı. Öğrenciler etkinliği tamamladıktan sonra ders hocası ile etkinliğin değerlendirilmesi kısmına geçildi. Etkinlik oldukça verimli ve anlaşılır oldu. Öğrenciler ders hocası ile birlikte bulundukları çıkarımların doğru olup olmadığını kontrol ederek bir sonuca varmaya çalıştılar ve bu esnasında sorular yönelterek aktif bir şekilde dersin bir parçası oldular. Ders hocası tarafından etkinliklerde verilen örneklerin dışında R2 nin başka alt uzayları nelerdir sorusu yöneltildi. Bir öğrenci her kümenin kendisinin alt kümesi olduğunu ve bu yüzden R2 nin kendisinin bir alt uzayı olduğunu söyledi. Öğrenciler bu kısımda güzel örnekler verdiler. Dersin devamında etkinlikte yer alan ilk iki problemin alt uzay olmadığı cebirsel olarak tahtada çözüldü ve bu çözümler öğrenciler tarafından anlaşıldı. Yapılan bu çözümler ve etkinlikten elde edilen çıkarım sonucunda dört özelliğin sağlanması durumunda diğer özelliklere bakmanın gerek kalmayacağına sonucuna varıldı. Daha sonra ise bu dört özelliğe bakmadan bütün özelliklerin sağlandığını garantileyen özelliklerin olup olmadığı öğrencilere yöneltildi. Ancak öğrenciler buradan tam bir sonuca varamadılar. Ardından bir teorem ile alt uzay olma şartlarına yer verilerek ispatları yapıldı.

Ders ve etkinlik oldukça verimli ve anlaşılır geçtiği gözlendi. Özellikle öğrencilerin ders içerisinde kendi fikirlerini ortaya koymaları, sorular sormaları ve etkinlikten hareketle çıkarımlarda bulunarak çözüm arayışında olmaları onları dersin aktif bir parçası haline getirdi. Ders bütünüyle sınıfta işlendiği için sadece ders sonuna doğru öğrencilerin yoruldukları gözlendi. Bazı öğrenciler bu derste çok yorulduklarını lab derslerinin daha keyifli ve az yorduğunu ifade ettiler. Bu durumda formalismin öğrencileri zorladığını bir kez daha ortaya koymuştur.

Ek 10’nun Devamı

**Dördüncü Hafta**

Dersin tamamı laboratuvarda gerçekleştirildi. Ders bir önceki ders ile ilgili hatırlatmalarla başladı. Alt uzay alt küme ilişkisine yönelik değerlendirmeler yapıldı. Alt uzay nedir sorusuna bir öğrenci iki özelliğe bakmanın yeterli olacağını belirterek bu durum ders hocasının da açıklamalarıyla desteklenerek anlaşılır bir hale getirildi. Derse iki problemle devam edildi. İlk problem; Rnxn reel vektör uzayını ele alalım, nxn tipindeki tüm simetrik matrislerin kümesi M olmak üzere A kümesi Rnxn vektör uzayının bir alt uzayı mıdır? Sorunun çözümüne ilk olarak bu M kümesi Rnxn nin bir alt kümesi midir sorusuyla başlandı ve öğrenciler öyle olduğunu belirttiler. Problemin çözümü için öğrencilere zaman verildi. Bazı öğrencilerin sorunun çözümü için 2x2 tipinde matrisler kullandıkları görüldü. Ders hocası öğrenciler arasında dolaştığında bu durumu fark ederek bu tip bir çözümün genel bir çözüm olmadığını bu yüzdende doğru bir yaklaşım olmadığını belirtti. Öğrenciler ders hocasının bu uyarısını anladıkları belirtiler. Genelde sorulara bu tarz cevaplar vermek öğrenciler açısında sıkça karşılaşılan bir durum. Ders hocasının bu vurgusunun ve sorulara yaklaşım tarzının işe yarayıp yaramadığının öğrencilerin bundan sonraki sorulara verecekleri cevaplara bakarak elde etmek mümkün olacaktır. Sorunun devamında M kümesi iki farklı şekilde temsil edilerek (M={[aij]Iaij=aji} ve M={AnxnI $A^t$=A}) çözüme devam edildi. İki öğrenci tahtaya gelerek farklı temsiller için sorunun çözümünü yaptı ve bu çözümlerin sınıf tarafından anlaşıldığı gözlemlendi. Derse ikinci problem ile devam edildi. İkinci problem; $P_n$(R) reel vektör uzayı olsun. m≤n olmak üzere Pm(R) kümesi, Pn(R) vektör uzayının bir alt uzayı olur mu? İlk olarak yine alt küme olma durumu irdelendi ve öğrenciler yine Pm(R) nin Pn(R) nin alt kümesi olduğunu belirtiler. Bu arada ders hocası R2, R3 ün alt kümesi midir sorusuna öğrenciler bu durumun uygun bir alt küme ilişkisi olmadığını belirterek artık alt küme olma durumunu anladıklarını ortaya koydular. Problemin çözümü için P(x) ve Q(x) iki polinom alınarak devam edildi. Ders hocası bunların nasıl bir polinom olduğunu sorduğunda öğrencilerden biri genel bir polinom örneği (**$P(x) = a_0 + a_1 .x + a_2 .x^2 + \dots + a_{n-1} .x^{n-1} + a_n .x^n$**) verdi. Burada dikkat edilmesi gereken öğrencilerin artık özel vektörler yerine genel vektörler seçerek çözüm yapmaya başlamış olmaları. Sorunun çözümü Ders hocası ile birlikte tahtada çözüldü. Ders hocası öğrencilerin önerdiği çözümün dışında daha soyut sayılabilecek bir yaklaşımla(derece kavramı kullanılarak)soruyu çözdü ve bu çözümün öğrenciler tarafından anlaşılır olduğu gözlemlendi.

Problemlerin çözümünden sonra Lineer Birleşim konusuna geçilerek derse devam edildi. İlk olarak lineer birleşimin tanımına yer verildi ardından ders hocası öğrencilere bu tanımdan ne anladıklarını sordu. Bir öğrenci vektörlerden birinin diğerleri cinsinden yazılabiliyor olması durumunun lineer birleşim olduğunu belirtti. Ardından cebirsel formda iki örneğe yer verildi. Son soruda birbirinin lineer birleşim olmayan vektörleri içeren bir kümeye

Ek 10'nun Devamı

yer verildi ve ardından çalışma yaprağı 8 in uygulamasına geçildi. Çalışma yaprağı 8 ilk dördü lineer birleşim sonuncusu germe kavramı ile ilişkili olmak üzere 5 etkinlikten oluşuyordu. Etkinliklerde sırasıyla R3 te bir vektör, biri diğerinin skaler katı iki vektör, iki farklı vektör, birbirinin lineer birleşimi üç vektör ve üç farklı vektöre(hiç biri diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayan) yer verildi. Uygulamanın hemen öncesinde öğrencilere kısa ve genel olarak Geogebra uygulamasından bahsedilerek iz açma konutunu nasıl kullanacakları hatırlatıldı. Uygulama bir bütün olarak değil parça parça yapıldı. Yani her bir etkinlik için öğrencilere süre verildi ve sonrasından bu kısım ile ilgili değerlendirmeler yapıldı. Ders hocası her bir etkinlik sonrası etkinliklerde öğrencilere verilen vektörlerin tüm lineer birleşimlerinin oluşturduğu kümeyi ve bu kümenin geometrik olarak neyi temsil ettiğini ayrı ayrı sordu. Her bir etkinlikte verilen vektörlerin tüm lineer birleşimlerinin oluşturduğu küme tahtaya yazıldı. Ders hocası tahtada öğrencilerin farklı cebirsel tanımlamalarına da yer vererek bunların sınıfla birlikte tartışılmasını sağladı. Böylelikle hem farklı cebirsel tanımlamaların mevcut olduğunu öğrencilerine göstermiş oldu. Etkinlilerin sonundaki değerlendirmelerde öğrencilerin vektörlerin tüm lineer birleşimlerinden oluşan kümeleri gerek cebirsel gerekse geometrik olarak doğru yorumladıkları gözlendi. Geogebra öğrencilere verilen vektörlerin lineer birleşimlerinin kümesinin geometrik olarak neyi temsil ettiğine dair somut durumlar sunuyordu. Bu sayede öğrencilerin kümelerin geometrik yerlerine dair yaklaşımları doğruydu. Örneğin etkinlik 3 te öğrencilere vektörlerin tüm lineer birleşimlerinin yeri sorulduğunda öğrenciler orjinden geçen bir düzlem olduğunu belirttiler. Bu kümeyi nasıl ifade ettiklerine dair soru sorulduğunda bir öğrenci {(c, d, c+d)|c, d ϵ R} olarak cevap verdi. Ders hocası {(x, y, z) ϵ R3|z=x+y }kümesinin de yazılıp yazılamayacağını sorarak alternatif bir gösterim yapmış oldu. Yalnızca 5. Etkinlikte öğrencilerin verilen vektörlerin lineer birleşimlerinin geometrik yerine ilişkin başlangıçta yanlış çıkarımları oldu. Öğrencilerin geometrik yeri bir kare prizma veya dikdörtgenler prizma olarak yorumladı. Bunun nedeni kullanılan sklalerlerin belirli bir aralıkta olmasıydı ve bu durum öğrencilere açıklanarak geometrik yerin $R^3$ olduğunun anlaşılması sağlandı. Buna iki durumun neden olduğunu düşünüyorum. İlki programda verilen skalerlerin belirli aralıkta olması nedeniyle oluşan geometrik nesne sınırlı bir bölge olarak öğrencilerin karşısına çıktı. Bu nedenle bu sorunu ortadan kaldırmak için verilen skalerlerin aralıklarının biraz daha genişletilmesi uygun olacaktır. Bunun dışında öğrencilerin geogebrada yapıyı oluşturduktan sonra ekranı fazlasıyla küçülttüklerini ve bu yapılara uzaktan bakma fırsatı yakaladıklarını gördüm. Bu bakış açısıyla noktalar küçülerek birbirine girmiş ve oluşan şekil bir kare veya dikdörtgenler prizmasını andırmıştı. Bu durumun gerçekleşmemesi için programın standart görümünde kullanılması faydalı olacaktır. Bununla ilgili öğrencilere programı standart görünümde kullanmaları önerisi yapılarak bu sorun ortadan kaldırılabilir. Ayrıca etkinlik 2 de yapılan uygulamaların etkinlik 1 in bir benzeri olması ve aynı durumun tekrar edilmesi gibi

Ek 10'nun Devamı

gerçekleşmesinden dolayı bu kısmın uygulamadan çıkartılması ve böylelikle zamandan tasarruf edilmesi düşünülmektedir.

Derste yürütülen uygulamanın oldukça verimli olduğunu ve öğrenciler açısından istenilen amaca ulaştığını söyleyebilirim. Etkinliklerde yer alan soruların sunuş şeklinde veya anlaşılmalarında her hangi bir sorunla karşılaşılmadı. Böylelikle uygulama benim, ders hocasının ve öğrencilerin aktif olduğu, öğrencilerin motivasyonunun düşmediği bir ders ortamında verimli bir şekilde gerçekleştirilmiş oldu. Hatta derse diğer arkadaşları kadar sık katılmayan iki erkek öğrenci de dersin başından sonuna kadar etkinliklerle ilgilenmiş, sorular sormuş ve çoğunlukla doğru çıkarımlarda bulunmuştur. Bu, tasarlanan ortamın öğrencilerin nasıl ilgisini çektiğini ve onları nasıl motive ettiğinin açık bir kanıtıydı bence.

Ek 10'nun Devamı

**Beşinci Hafta**

Derse bir önceki ders ile ilgili toparlamalar yapılarak başlandı. Ders hocası tahtaya lineer birleşiminin formal tanımını yazarak anlattı ve ardından lineer birleşimlerin kümesi benzer bir şekilde verildi.

$$“\{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nv_n \mid a_i \in R\}”$$

Daha sonra ise R3 te iki vektör üzerinden lineer birleşimlerinin kümesi yazıldı ve a(alfa)'lara değerler verilerek bu kümenin elemanları incelendi. Buradan devamla germenin ne olduğu sınıfa soruldu. Sınıftan sağlıklı bir yorum çıkmadı. Ders hocası lineer birleşimlerinin kümesinin gerdiği küme olduğunu belirterek üreten ve üretilen vektörlere örnekler verdi. Ardından problemlere geçildi. **Problem:** R2 de (1,0) ve (1,1) vektörlerinin gerdiği kümeyi bulunuz. Bu kümenin R2 ye eşit olup olmadığını bulunuz.

Bir öğrenci tahtaya kalkarak problemin çözümünü yaptı. Soru sınıf ile birlikte değerlendirilerek çözüldü ve çözümün öğrenciler tarafından oldukça anlaşılır olduğu gözlemlendi. Ardından bir problem daha yöneltildi. Bu problemde yer alan küme elemanları 2x2 tipinde olan 3 tane matristen oluşuyordu ve bu soruda da yukarıdaki probleme benzer bir şekilde bu vektörlerin gerdikleri küm isteniyordu. Sorunun çözümü için öğrencilere biraz zaman verildi. Bir öğrenci tahtaya gelerek çözümü yaptı ve çözüm sınıfla birlikte değerlendirildi. Verilen kümenin M2x2 yi germediğine karar verildi. Ders hocası nasıl bir değişiklik ile bu kümenin M2x2 yi germesini sağlarız sorusunu sınıfa yöneltti. Öğrencilerden biri $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vektörünü ekleyelim dedi ve bun göre ders hocası kümeyi yazarak sınıfla birlikte kümenin M2x2 yi germediğini gösterdi. Derse başka bir problemle devam edildi. P2(R) de dört vektör verilerek u = x2+x+2 vektörünün diğer dört vektörün gerdiği kümenin elemanı olup olmadığı soruldu. Ardından ders hocası soruyu daha formal bir şekilde tahtaya yazdı.

“ u ϵ  < {v1, v2, v3, v4} > mı? “

Ders hocasının kavramların farklı temsillerine derste sıkça yer verdiği ve soruları farklı formatlarda öğrencilere yönelterek onların farklı formlarda soruları anlamasını sağladığı gözlemlendi. Öğrenciler sorunun çözümü için ne yapmaları gerektiğini bildikleri halde sorunun çözümünde bazı sıkıntılar yaşadıkları gözlemlendi. Öğrencilerin ders hocası ile etkileşimlerinden verilen u vektörünün diğer vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını kontrol etmeleri gerektiğini bildikleri açıkça gözüküyordu. Ancak öğrencilerin problemin çözümünde elde ettikleri lineer denklem sisteminin çözümünde zorlandıkları gözlemlendi. Sonrasında ders hocası sınıfla birlikte sorunun çözümüne başladı. Çözüm

Ek 10’nun Devamı

esnasında ders hocası öğrencilerin zorlandığı yerlere vurgu yaparak çözümü bitirdi. Bu problemde öğrencilerin sorunun işlemsel kısmında zorlandıkları ve ders hocasının da desteğiyle sorunun çözümünü anlaşılır buldukları gözlemlendi.  Derse bir teoremle devam edildi.

**Teorem:** V bir reel vektör uzayı olsun.

S = {v1, v2, ………………, vn} ⊂ V olsun. < S >, V nin bir alt uzayıdır.

Teoremin ıspatı öğrencilere soruldu. Sorunun çözümü için bir öğrenci tahtaya kalktı ve ıspatı yaptı. Öğrencilerin çoğunun çözümü yaptıkları sadece birkaç öğrencinin uygun vektörleri seçmede zorlandıkları gözlemlendi. Bu ıspatın ardından öğrencilerden bu teoremi kullanarak R2 nin alt uzaylarını bulmaları istendi. Videoyu izleyerek bu kısımda öğrenci cevaplarını buraya yaz.

Ders hocası diğer kavramların öğretimine yönelik derslerde de olduğu gibi R2 ve R3 ten vektörlerin oluşturduğu kümeden başlayarak elemanları matris ve polinom olan vektör kümelerine yer vermiş ardından bir teoremin ıspatına veya soyut formada bir soruya yer vererek germe kavramını anlatmıştır. Artık derslerde öğrencilerin vektör kavramıyla sadece düzlemdeki veya uzaydaki vektörleri ilişkilendirmedikleri ve ders hocasının sorduğu sorularda genel formda düşünerek cevap verdikleri gözlenmiştir.

Germe kavramının ardından ikinci kısımda derse lineer bağımsızlık ile devam edildi. Ders hocası tahtaya formal tanımı yaptı ve ardından ekinliğe geçildi. Etkinliğin birinci sorusunda R3 ve R4 te verilen vektör kümelerinin lineer bağımsızlığı soruluyordu. Öğrenciler ilk olarak bu kümelerin lineer bağımlılık ve bağımsızlıklarını incelemeleri istendi. Öğrencilere birinci sorunun çözümü için vakit verildikten sonra çözümler yine öğrenciler tarafından sırasıyla tahtaya yapıldı. Bazı kısımlarda öğrencilerin takıldıkları noktalarda ders hocası uygun yönlendirmelerle öğrencilerin çözümleri yapmasına ve anlamasına yardımcı oldu. Etkinlikte yer alan birinci soruyla ilgili sadece sorunun soruluşunda bir değişikliğe gidilmesine karar verildi. Soruda yer alan “verilen vektör kümeleri” yerine “R3 ve R4 standart vektör uzaylarında verilen vektör kümeleri” ifadesine yer verilerek soru daha anlamlı bir hale getirildi. Ardından etkinlikteki diğer sorulara geçildi. Birinci sorudan hareketle öğrenciler artık bir vektör kümesinin lineer bağımsızlığını nasıl inceleyeceklerini biliyorlardı ve birinci sorunun da amacı buydu. Etkinlik sırasıyla R3 te tek vektör, iki vektör ve üç vektörün lineer bağımsızlıklarıyla ilgili soruları içeriyordu. İkinci soruda yer alan tek vektörle ilgili öğrencilerin sıfır vektörünün dışındaki vektörlerin lineer bağımsız olduğuna yönelik karar vermesi çok uzun sürmedi. Sıfır vektörüyle ilgili bir öğrencinin sorusu üzerinde tartışılarak öğrencinin durumu anlaması sağlandı. Üçüncü

Ek 10’nun Devamı

soruda öğrencilere R3 te 4 vektör verilmiş ve bu vektörlerden elde edilen ikili vektör kümelerinin lineer bağımsızlıklarını incelemeleri istenmiştir. Ardından öğrencilere R3 te iki vektörün lineer bağımsızlığına yönelik gerek ve yeter şartların neler olduğu sorusu yöneltilmiştir. Bir taraftan öğrencilerden Geogebra da hazırlanmış uygulamayı açarak vektör kümelerinin geometrik temsillerini görmeleri istenmiş bir taraftan da çalışma yaprağında verilen tabloyu doldurmaları istenmiştir. Dördüncü soruda ise üçüncüye benzer şekilde öğrencilerden verilen dört vektörden üçlü vektör kümelerinin lineer bağımsızlıklarını incelemeleri istenmiştir. Ardından öğrencilere R3 te üç vektörün lineer bağımsızlığına yönelik gerek ve yeter şartların neler olduğu sorusu yöneltilmiştir. Öğrenciler çalışma kâğıdında buldukları sonuçlarla geogebrada elde ettikleri sonuçları karşılaştırarak etkinliğe devam ettiler. Öğrenciler çalışma yaprağına cebirsel çözüm yaparak kümelerin lineer bağımlı veya bağımsız olduğunu bulmuş ardından geogebrada vektörlerin konumlarına bakarak vektörlerin lineer bağımlılık veya bağımsızlık durumunda konumlarına ilişkin tespitler yapmışlardır. Bazı öğrencilerin yanlış çözerek lineer bağımlı olduğunu buldukları bir kümenin geometrik temsiline baktıklarında lineer bağımsız olduğuna karar verip çözümlerini kontrol ettikleri ve sonradan doğru sonuca ulaştıkları gözlenmiştir. Uygulamanın bu kısmında üçüncü ve dördüncü sorudaki tablolarda yer alan LB(lineer bağımlı) ve LBS(lineer bağımsız) kısaltmalarının daha anlamlı olmaları açısından tabloların altına açıklamalarına yer verilmesine karar verilmiştir. Ayrıca üçüncü soruda yer alan vektör kümeleri arasında lineer bağımlılık durumunun sayısının artırılmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir. Bunun dışında tabloda yer alan Vektörlerin Birbiri ile Konumu kısmına öğrencilerde tam olarak ne istendiğine yönelik bir açıklama eklemenin daha uygun olacağı düşünülmüştür

**Ek 11. Kazanımlar**

VEKTÖR UZAYI ÜNİTESİNE İLİŞKİN KAZANIMLAR:

DÜZLEMDE VE UZAYDA VEKTÖRLER İLGİLİ KAZANIMLAR

1. **İki ve üç Boyutlu Uzayda Vektörleri Tanımlar.**
   - Düzlemde ve uzayda yönlü doğru parçası, vektör ve nokta arasındaki ilişkiler teknolojiden yararlanılarak gösterilir.
   - Düzlemde ve uzayda aynı yön, büyüklük ve doğrultuya sahip bir yönlü doğru parçası ailesini temsil eden bir konum vektörü olduğu gösterilir.
   - Düzlemde ve uzayda her bir vektöre karşılık gelen bir nokta olduğu gösterilir.
2. **Vektörler Üzerinde Vektörler Toplama ve Skalerle Çarpma İşlemlerini Yapar.**
   - R2 ve R3 de iki veya daha fazla vektörün toplamının büyüklüğünü teknolojiden yararlanarak geometrik olarak yorumlaması ve cebirsel olarak hesaplanması istenir.

- R2 ve R3 de bir vektörün bir skaler ile çarpımını teknolojiden yararlanarak geometrik olarak yorumlaması ve cebirsel olarak hesaplanması istenir.

**LİNEER BİRLEŞİM VE GERME KAVRAMLARI İLE İLGİLİ KAZANIMLAR**

1. **Lineer Birleşim Kavramını Tanımlar.**
   - R2 ve R3 de verilen vektörlerin lineer birleşimlerini hesaplar
   - R2 ve R3 de herhangi bir vektörün verilen vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını gösterir ve bunu geometrik olarak yorumlayabilir.
   - R2 ve R3 de verilen vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilen tüm vektörler için cebirsel bir tanımlama yapabilir ve bu vektörlerin tüm lineer birleşimlerinin kümesinin geometrik olarak neyi temsil ettiğini belirleyebilir. Rn de verilen n tane vektörün lineer birleşimini hesaplayabilir
   - Rn de verilen n tane vektörün lineer birleşimi olarak yazılabilen tüm vektörler için cebirsel bir tanımlama yapabilir
2. **Lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki ilişkileri fark eder**
   - Verilen n tane vektörün tüm lineer birleşimlerinden oluşan kümeyi, bu vektörlerin gerdiği küme olarak tanımlayabilir.
3. **Germe Kavramını Tanımlar.**
   - $\Re 2$ veya $\Re 3$ de verilen vektörlerin gerdiği kümeyi geometrik olarak tanımlayabilir.
   - $\Re 2$ veya $\Re 3$ de bir vektörün verilen vektörlerin gerdiği kümenin elamanı olup olmadığını geometrik ve cebirsel olarak açıklayabilir.
   - Rn de verilen n tane vektörün gerdiği kümeyi tanımlar

Ek 11’in Devamı

- Rn de bir vektörün verilen tane vektörün gerdiği kümenin elamanı olup olmadığını tanımlayabilir.
- Rn de verilen n tane vektörün gerdiği kümeyi geren en az sayıda vektörden oluşan alt vektör kümesini bulabilir.
- $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$ vektör denkleminin aslında bir lineer denklem sistemine eşdeğer olduğunu görebilir ve lineer birleşim ve germe ile ilgili problemlerin çözümünde lineer denklem sistemlerine ilişkin çözüm metotlarını kullanabilir.

**LİNEER BAĞIMLILIK/BAĞIMSIZLIK KAVRAMLARI İLE İLGİLİ KAZANIMLAR**

1. **Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarını açıklar ve ayırt eder.**

- Lineer bağımlı veya bağımsız vektörlerin düzlem veya uzaydaki görüntüsünü teknolojiden yararlanarak inceler, geometrik olarak yorumlayabilir ve cebirsel olarak gösterebilir.
- Rn de lineer bağımlı vektörlerin birbirlerinin lineer birleşimi olarak yazılabileceğini gösterebilir.
- Rn de lineer bağımsız vektörlerin birbirlerinin lineer birleşimi olarak yazılamayacağını gösterebilir.
- Rn de verilen herhangi bir vektör kümesinin lineer bağımlı/bağımsız olup olmadığını belirler.

**VEKTÖR UZAYI KAVRAMINA YÖNELİK KAZANIMLAR**

1. **Vektör uzayı kavramını tanımlar**
   - Vektör uzayı aksiyomlarını kullanarak verilen herhangi bir kümenin vektör uzayı olup olmadığını belirleyebilir
2. **Alt uzay kavramlarını tanımlar**
   - Alt uzay tanımını kullanarak bir vektör uzayının herhangi bir alt kümesinin bu vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını belirleyebilir.
   - Bir vektör uzayında bir S vektör kümesi verilsin, S'nin gerdiği kümenin bu vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu anlar.
   - Bir vektör uzayında bir S vektör kümesi verilsin. S'nin bu vektör uzayını gerip germediğini tanımlayabilir.

Ek 11'in Devamı

**TABAN VE BOYUT KAVRAMLARI İLE İLGİLİ KAZANIMLAR**

1. **Bir Vektör Uzayı İçin Taban Kavramını Tanımlar**

Bir vektör uzayı için verilen herhangi bir vektör kümesinin taban olup olmadığını belirleyebilir.

2. **Bir Vektör Uzayının Boyutu Kavramını Tanımlar**

Bir vektör uzayında boyuttan fazla sayıda vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlı olduğunu ispatlama

Bir tabana göre herhangi bir vektörün koordinatlarını belirleme

Vektör uzayında temel kavramlarla ilgili problemleri çözme

**Ek 12. Örnek Ders planı**

**Ders planı**

**Amaç: Alt uzay kavramlarını tanımlar**

**Kazanımlar:**

- Alt uzay tanımını kullanarak bir vektör uzayının herhangi bir alt kümesinin bu vektör uzayının alt uzayı olup olmadığını belirleyebilir.
- Bir vektör uzayında bir S vektör kümesi verilsin, S'nin gerdiği kümenin bu vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu anlar.

- Bir vektör uzayında bir S vektör kümesi verilsin. S'nin bu vektör uzayını gerip germediğini tanımlayabilir.

**Ders Süresi: 2 saat**

**Alt Vektör Uzayı**

"Şu ana kadar bir kümenin (V gibi), üzerinde tanımlanan iki işleme göre (ki bunları vektörel toplama ve skaler çarpım olarak adlandırdık) 10 şartı (ki bu şartlar işlem özellikleri ile ilgilidir) sağladığında vektör uzayı olarak adlandırıldığını gördük. Küme vektör uzayı olarak tanımlandığında artık onun elemanları (nasıl nesneler olursa olsun) **vektör** adını alacaktır. Vektörel toplama işlemine göre etkisiz eleman ise özel olarak **sıfır vektörü** olarak isimlendirilecektir." Şeklindeki girişten sonra aşağıdaki problem öğrencilere yöneltilir;

Problem: "Bir V vektör uzayının boş kümeden farklı her alt kümesi V de tanımlanan işlemlere göre daima bir vektör uzayıdır?" şeklindeki bir iddianın doğru olup olmadığı hakkında ne söylenebilir? Gerekçelendirerek açıklayınız.

Problemin çözümü hakkında birkaç öğrenciye söz hakkı verilir. Cevapları alınır. Herhangi bir dönüt vermeden alt uzay etkinliğine (Çalışma yaprağı 6) geçilir. Bu çalışma yaprağı için 15-20 dakika gruplara zaman verilir.

Gruplar çalışmalarını tamamladıktan sonra sınıfla birlikte "Bir V vektör uzayının her alt kümesi V de tanımlanan işlemlere göre daima bir vektör uzayı olmak zorunda olmadığı" kararına varılır. Gerekçe olarak problem 1., 2. ve 4. örnekleri gösterilebilir. Ardından bir V vektör uzayının herhangi bir alt kümesinin V deki işlemlere göre vektör uzayı olup olmadığını anlamak için vektör uzayına ilişkin tüm şartları sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeye gerek olmadığı, sadece 4 şartta (1., 4., 5 ve 6. Şartlar) bakmanın yeterli olduğu sonucuna varılır. Bu çıkarımdan sonra alt uzaya ilişkin formal tanım aşağıdaki gibi verilir.

Ek 12'nin Devamı

**Alt uzay:** Bir V vektör uzayının boş kümeden farklı bir A alt kümesi, <u>V deki işlemlere göre</u> (vektörel toplama ve skaler çarpım) vektör uzayı ise A'ya V vektör uzayının **alt uzayı** denir.

Bu tanımlamaya göre "**orijinden geçen bir doğru üzerindeki tüm noktaların oluşturduğu küme**" $R^2$ nin bir alt uzayıdır. Ancak;

- Merkezi orijin yarıçapı r olan bir çemberin üzerindeki ve içindeki tüm sıralı ikililerin oluşturduğu küme
- (x,y) ve $x \geq 0$ şeklindeki tüm sıralı ikililerin oluşturduğu küme

- Orijinden geçmeyen bir doğrunun üzerindeki noktalar kümesi **$R^2$ nin birer alt kümesidir fakat alt uzayı değildir**.

"**Siz $R^2$ için başka alt uzaylar belirleyebilir misiniz?**" şeklinde bir soru ile tartışma başlatılır. Bu tartışmada öğrencilerin verdikleri cevapların uygun olup olmadığı yine diğer öğrencilere de söz hakkı verilerek belirlenir. Bu tartışmada öğrenciler "**$R^2$ nin kendisinin de $R^2$ nin bir alt uzayı olduğu ve $R^2$ de sıfır vektöründen oluşan tek elemanlı sıfır uzayının da $R^2$ nin bir alt uzayı olduğu**" çıkarımı yapmaları konusunda yönlendirilir. Daha sonra öğrencilere yaptıkları bu son çıkarımı genelleyip genellemeyecekleri sorulur. Yani

(i) Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır.

(ii) { 0 } kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı da o vektör uzayının bir alt uzayıdır. (Burada "V bir vektör uzayı olsun. Yalnızca V deki sıfır vektöründen oluşan küme bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına sıfır vektör uzayı denir" şeklinde sıfır vektör uzayının tanımlaması yapılır.)

Öğrencilerden cevaplarını açıklamaları istenir. Sonrasında "Buna göre sıfır vektör uzayından farklı **her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır: Biri kendisi diğeri sıfır vektör uzayı** (**dikkat!!** İlgili vektör uzayındaki sıfır vektörünün oluşturduğu uzay)" şeklinde toparlama yapılır. Aşağıdaki teorem (Çalışma yaprağı 6'nın formalleştirilmesi olarak) öğrencilere verilir.

**Teorem**

V bir vektör uzayı ve A, V'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. A' nın V nin bir alt uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul

(i) a ve b, A kümesinde herhangi iki vektör iken a+b' de A'dadır. (A, toplama işlemine göre kapalı)

(ii) a, A kümesinde herhangi bir vektör ve c bir skaler iken c.a' da A'dadır. (A, skalerle çarpma işlemine göre kapalı) olmasıdır.

Ek 12'nin Devamı

**İspat:**

$\Rightarrow$ :A , V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını gösterelim.

| **Adım** | **Gerekçe** |
|---|---|
| A, V' nin bir alt uzayıdır. | Hipotez |
| Bu durumda A'nın kendisi de bir vektör uzayıdır. | Alt uzay tanımı |

| | |
|---|---|
| Bu nedenle diğer tüm koşullarla birlikte (i) ve (ii) koşulları da sağlanır. | Vektör uzayı olma şartlarından 1 ve 2. şart |

⇐ :A kümesi (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Bu durumda A'nın V'nin at uzayı olduğunu gösterelim.

| **Adım** | **Gerekçe** |
|---|---|
| A vektör uzayı olma şartlarında 1. ve 2. sağlar | Hipotez |
| A vektör uzayı olma şartlarından 3., 4., 7., 8., 9. ve 10. yu sağlar | A kümesi V' nin alt kümesi olduğu için bu özellikler otomatik sağlanır. |
| Geriye 5. ve 6. şartların sağlandığının gösterilmesi gerekmektedir. | |
| a∈A ve c herhangi bir skaler olmak üzere c.a ∈A dır. | Hipotez(ii) |
| c = 0 alınırsa 0.a=0 (vektör olan sıfır) olup 0 (sıfır vektörü)Anın elemanıdır. Dolayısıyla 5. Şart sağlanır. | V vektör uzayıdır ve V deki her vektör ve 0 skaleri için 0.a=0 dır. |
| c = -1 için -a ∈ A'dır. Dolayısıyla 6. Şart da sağlanır. | V vektör uzayıdır ve V deki her vektör ve -1 skaleri için -1.a=-a dır. |

Bu ispattan sonra aşağıdaki problemler öğrenciden çözmesi istenir. Öğrenciler herhangi bir çözüm yaklaşımına yönlendirilmez. Yukarıdaki teoremde şartları kullanarak hem geometrik hem de cebirsel çözüm öğrencilerle birlikte sunulur. Yukarıdaki teorem ışığında bir kümenin başka bir kümenin alt uzayı olduğunu göstermek için vektör uzayı olmaya ilişkin 10 şartın kullanılmasına gerek olmadığı, toplama ve skaler çarpmaya ilişkin şartları göstermenin yeterli olduğu vurgusu yapılır.

Ek 12'nin Devamı

**Problem 1.** $R^3$ de orijinden geçen bir düzlemin $R^3$ ün alt uzayı olup olmadığını gerekçelendirerek açıklayınız.

Let $V$ be any plane through the origin in $R^3$. We shall show that the points in $V$ form a vector space under the standard addition and scalar multiplication operations for vectors in $R^3$. From Example 1, we know that $R^3$ itself is a vector space under these operations. Thus Axioms 2, 3, 7, 8, 9, and 10 hold for all points in $R^3$ and consequently for all points in the plane $V$. We therefore need only show that Axioms 1, 4, 5, and 6 are satisfied.

Since the plane $V$ passes through the origin, it has an equation of the form

$$ax + by + cz = 0 \tag{1}$$

(Theorem 3.5.1). Thus, if $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ and $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ are points in $V$, then $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ and $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Additing these equations gives

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

This equality tells us that the coordinates of the point

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

satisfy 1; thus $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ lies in the plane $V$. This proves that Axiom 1 is satisfied. The verifications of Axioms 4 and 6 are left as exercises; however, we shall prove that Axiom 5 is satisfied. Multiplying $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ through by $-1$ gives

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

Thus $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ lies in $V$. This establishes Axiom 5.

◆

Daha sonra "**$R^2$, $R^3$ ün bir alt uzayı mıdır? Gerekçelendirerek açıklayınız**. "problemi etrafında bir tartışma ortamı oluşturulabilir.

**Problem 2.** nxn tipindeki tüm reel bileşenli matrisler kümesi (**$M_{nxn}$**) matrislerde bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. nxn tipindeki tüm simetrik matrisler kümesi, bu kümenin bir alt uzayı mıdır? Gösteriniz. (Soyut bir problem olarak bunu alalım)

**Çözüm:**

nxn tipindeki iki simetrik matrisler kümesi, **$M_{nxn}$** kümesinin bir alt kümesidir. Diğer taraftan iki simetrik matrisin toplamı ve bir skalerle çarpımı yine bir simetrik matris olduğundan (bunu geçen dönem matrisler ünitesinde ispat etmişlerdi) simetrik matrisler kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. Dolayısıyla bu küme, **$M_{nxn}$** kümesinin alt uzayıdır.

**Problem 3.** $P_m(R)$ derecesi m veya m den küçük bütün reel katsayılı polinomların kümesini göstersin. Bu küme polinomların toplamı ve bir skalerle polinomun çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. n ≤ m ise Pn (R) , Pm (R) nin bir alt uzayı mıdır? Gösteriniz.

Ek 12'nin Devamı

**Çözüm:**

$P_n(R) \subseteq P_m(R)$ ve $p(x)$ , $q(x) \in P_n(R)$ , $r \in R$ için

derece $(p(x) + q(x))$ = maksimum { derece $p(x)$ , derece $q(x)$ } $\leq n$

derece $(r \cdot p(x))$ = derece $(p(x)) \leq n$

olduğundan, $(p(x) + q(x)) \in P_n(R)$ ve $(r\, p(x)) \in P_n(R)$ dir. Yani $P_n(R)$ kümesi polinom toplamı ve skalerle polinomun çarpımına göre kapalıdır. O halde $P_n(R)$ kümesi $P_m(R)$ vektör uzayının bir alt uzayıdır.

## 9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

1982 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon'da sırasıyla Namık Kemal İlkokulu, Zehra Kitapçıoğlu Ortaokulu ve Affan Kitapçıoğlu Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Bölümü'nde tamamladı. Yüksek öğrenimini Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde tamamladı. 2008 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik (İngilizce) Bölümü'nden mezun oldu.

2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Anabilim dalı Matematik Eğitimi alanında yüksek lisans programını kazandı. 2013 yılında yüksek lisans programından mezun oldu ve aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Anabilim dalı Matematik Eğitimi alanında doktora programını kazandı. 2007 yılından itibaren Ankara ve Trabzon'da çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yapmaktadır. İngilizce bilmektedir.

**İLETİŞİM BİLGİLERİ**

**Adres** **:** Gökay AÇIKYILDIZ, Toklu Mahallesi Aksu Sokak No:19/4 TRABZON

**E-Posta** **:** gky162@gmail.com

**Tel** **:** 0505 779 00 44