TRABZON ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ANALOJİ DESTEKLİ DİYALOJİK YÖNTEM İLE LİMİT ÖĞRETİMİNDEN YANSIMALAR: BİR EYLEM ARAŞTIRMASI

DOKTORA TEZİ

Hasan GÜVELİ

TRABZON
Haziran, 2019

TRABZON ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ANALOJİ DESTEKLİ DİYALOJİK YÖNTEM İLE LİMİT ÖĞRETİMİNDEN YANSIMALAR: BİR EYLEM ARAŞTIRMASI

Hasan GÜVELİ

Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Adnan BAKİ

TRABZON
Haziran, 2019

Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 17 / 06 / 2019

Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Adnan BAKİ	....
Üye	: Prof. Dr. Bülent GÜVEN	....
Üye	: Prof. Dr. Selahattin ARSLAN	....
Üye	: Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU	....
Üye	: Doç. Dr. Yaşar AKKAN	....

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bülent GÜVEN

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Trabzon Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

Hasan GÜVELİ
17 / 06 / 2019

ÖN SÖZ

Eğitim fakültelerinin başlıca amacı topluma nitelikli öğretmenler kazandırmaktır. Bu amaçla hazırlanan öğretim programları etkili öğretme ve öğrenmeyi hedefler. Ancak bu öğretme-öğrenme sürecinde bazı konular anlaşılması zor olabilmekte ve yanılgılar ortaya çıkabilmektedir. Analiz dersinin temel konularından biri olan limit konusu birçok öğrencinin yanılgılara sahip olduğu zor konulardan biridir. Bu konuda nasıl daha iyi öğrenme-öğretme yapılabilir ve kavram yanılgıları giderilebilir konusu da matematik eğitimi araştırmacılarının araştırma konusudur. Bu çalışma diyalojik yöntemle anlatılan ve analojilerle desteklenen limit konusunda öğrenci başarısının nasıl değişeceği ve analoji kurma yeterlilikleri araştırılmıştır.

Bu araştırma sürecinde desteğini ve sabrını hiçbir zaman esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Adnan Baki'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda görüş, öneri ve yapıcı eleştirileri ile bana yol gösteren, teşvik eden, yardımını, desteğini ve sabrını esirgemeyen sevgili hayat arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Ebru GÜVELİ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yine bu süreçte bana destek olan biricik oğlum Ahmet GÜVELİ' ye teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2019

Hasan GÜVELİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Analoji Destekli Diyalojik Yöntem ile Limit Öğretiminden Yansımalar: Bir Eylem Araştırması

Bu çalışma, analoji destekli diyalojik yöntem ile üniversite düzeyindeki limit konusunun öğretilmesine yönelik yapılan bir çalışmadır. Bu araştırma nitel bir araştırma olup, eylem araştırması yöntemi ile yapılmıştır. Veriler gözlem, grup mülakatları, başarı testleri ve grup çalışması etkinliklerinden yararlanılarak toplanmıştır. Araştırma için, 2014-2015 güz döneminde yapılan pilot çalışma, 2016-2017 güz döneminde yapılan asıl çalışma Rize'deki bir üniversitenin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans programında yürütülmüştür. Araştırmacının diyalojik yöntemi ile sunduğu derslerde, limit konusunun öğretimine yönelik uygulamalar yapıldı. İlk olarak 61 öğrenciyle yapılan pilot çalışmanın ardından analiz-1 dersini alan 30 öğrenciye dersten önce limit konusuyla ilgili ön test yapıldı daha sonra diyalojik yöntem ile 4 hafta ders işlendi. Öğrenciler bu derslerden sonra grup çalışmasıyla limit konusunda analojiler hazırladılar ve sundular. Bu sunulardan sonra öğrencilerle grup mülakatları yapıldı. Son olarak limit konusuyla ilgili hazırlanan ve ön test olarak uygulanan başarı testi son test olarak tekrar öğrencilere uygulandı. Dört hafta boyunca analoji destekli diyalojik yöntemle anlatılan limit konusu ile ilgili gerçek sınıf ortamı gözlenerek derinlemesine alan notları oluşturuldu. Gözlemler, mülakatlar, başarı testleri ve grup etkinliklerinden elde edilen veriler literatür karşılaştırmasıyla analiz edilerek sonuçlar sunuldu. Başarı testi sonuçları Excel ve Spss programında analiz edildi. Sonuç olarak, akademik başarılarında da son test lehinde anlamlı fark ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğrenciler limit konusunda analojiler hazırlaması sürecinde limit kavramını daha derinlemesine inceleme fırsatını bulduklarını ifade etmişlerdir.

Anahtar Kelimeler: Analoji, Diyalojik Yöntem, Limit, Matematik, Öğretmen Adayları.

ABSTRACT

Teaching of Limit with Analogy Supported Dialogic Method: An Action Research

This study is aimed at teaching with analogy supported dialogic method the concept of limitation at university level. This research is a qualitative research and it was carried out by action research method. Data were collected through observation, group interviews, achievement tests and group work activities. The research was carried out in the undergraduate program of elementary mathematics teaching of a university in Rize in the 2014-2015 fall semester as pilot study and 2016-2017 fall semester as main study. In the courses offered by the researcher with analogy, applications were made to teach the limit subject. Firstly, following the pilot study with 61, 30 students were pre-tested about the issue of limit and then a 4week course. After these lessons, the students prepared and presented analogies about the limit with group work. After these presentations, group interviews were held with the students. Finally, the success test, which was prepared as a pre-test, was applied to the students again as a final test. Throughout these practices, students were observed in depth. The data obtained from observations, interviews, success tests and group activities were analyzed by literature comparison and the results were presented. Success test results were analyzed in Excel and SPSS program. As a result, a significant difference in academic achievement was found in favor of the last test. In addition, students had the opportunity to examine the limit concept in depth in the process of preparing analogies.

Keywords: Analogy, Dialogic Method, Limit, Mathematics, Teacher Candidates.

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No	Şekil Adı	Sayfa No

KISALTMALAR LİSTESİ

A	**:** Araştırmacı
bkz	**:** Bakınız
lim	**:** Limit
MEB	**:** Milli Eğitim Bakanlığı
Ö1	**:** Öğrenci 1

1. GİRİŞ

Matematik; aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adıdır. Sayılar, şekiller, kümeler, fonksiyonlar, uzaylar gibi soyut kavramlar ve bunların arasındaki ilişkiler matematiğin konusunu oluşturur. Matematik bir soyutlama bilimidir ve matematiksel kavramlar bu soyutlama sonucu elde edilir (Altun, 2008).

Matematik eğitimi, matematik kadar eskiye uzanan bir süreçtir. Bilindiği gibi; Nil nehrinin taşmasıyla, su altında kalan arazilerin yeniden ölçülmesi, kaybolan ya da zarara uğrayan arsanın ölçülmesi ihtiyacı bize ulaşan geometriye öncülük etmiştir. Eski Mısır'ın, Eski Yunan'ın, Babillerin ve Çinlilerin sayıları temsil etmek için farklı semboller kullandığını ve sayı sistemleri için farklı tabanlar kullandıklarını biliyoruz. Mısır, Yunanlılar, Çin ve Japonlar 10 tabanını kullanırken Babiller 60 tabanını, Mayalar ise 20 tabanını sayı sistemlerinde kullanmışlardır. Papirüs üzerine yazılmış ilk kitap Mısırlı Ahmes'e ait olup bu kitapta sözel problemlerin çözümü, kesirli ifadeler ve kesik piramit şeklinde olan depoların hacimlerini bulma yöntemleri yer almaktadır. Yunanlılar, Mısır ve Babil matematiğiyle yetinmeyip, Thales, Pythagoras ve Euclid gibi matematikçilerle matematiğe yeni bir kimlik kazandırdılar. Thales güneş tutulmasını ay takvimiyle tahmin edip, yeryüzünün su üzerinde yüzdüğü düşüncesiyle depremleri açıklamış ve geometri için mantıksal bir yapı geliştirerek ispat kavramını ortaya atmıştır. Öğrencisi olan Pythagoras'ın ise en büyük buluşu şüphesiz ki irrasyonel sayıların keşfidir. Daha sonraki yıllarda Archimedes pi sayısını kendi yöntemiyle ifade edip irrasyonel sayıları rasyonel sayılarla tahmin etmeye çalışmıştır. Ayrıca Archimedes'in çalışmaları arasında eğri ve yüzeylerin sınırladığı alan ve hacimlerle ilgili teoremlerin ispatları da yer almaktadır (Baki, 2018). Euclid ve Archimedes tarafından düzlem geometri bağlamında eğrisel kenarlara sahip şekillerle ilgili teoremlerde kullanılmış olan limit ve süreklilik kavramı, daha sonra günümüz analiz dalını temel alan Newton ve Leibniz'in çalışmalarında yer almıştır. Türev, integral, yaklaşıklık kuramı (approximation theory), Taylor serileri vb. konuların tanımları, ilk kez Cauchy tarafından ortaya konan ve ε-δ tanımı olarak da bilinen limit ve süreklilik kavramının formal tanımı üzerine inşa edilmiştir (Akbaş, 2016).

Limitin bu tarihsel gelişiminin ve öneminin artması neticesinde, limit kavramı liselerde ve üniversitelerde temel matematik, genel matematik ve analiz derslerinin temel konularından biri olmuştur. Limit kavramı analizin en temel kavramı olarak ilk olarak lise müfredatında karşımıza çıkar ve bu kavram diziler, seriler, süreklilik, türev, diferansiyel, integral gibi analiz derslerinin alt yapısını oluşturur. Üniversitelerde ise genel matematik, temel matematik ve analiz derslerinin temel konularından biri olarak yerini alır.

Bir kavramın öğrenilmesi öğrenenler için psikolojik, pedagojik ve epistemolojik sebeplerle yanılgıya her zaman açıktır. Matematikte de pek çok konuda kavram yanılgılarıyla karşılaşılmakta ve bu yanılgıları gidermek için çözüm yolları aranmaktadır. Matematik eğitimi alanında üzerinde en çok araştırmaların yapıldığı ve öğrencilerin anlamakta güçlük çektikleri konular arasında limit konusu bulunmaktadır (Akbaş, 2016; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Barbé, Bosch, Espinoza ve Gascón, 2005; Bezuidenhout, 2001; Biber, 2010; Bukova, 2006; Davis ve Vinner, 1986; Dönmez, 2009; Dubinsky vd., 1994; Hofe, 1998; Jordaan, 2005; Kabaca, 2006; Kabael, Barak ve Özdaş, 2015; Monaghan, 1991; Oktaviyanthi ve Dahlan, 2018; Przenioslo, 2004; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Todorov, 2001; Williams,1991; Winarso ve Toheri, 2017). Bu araştırmalar, öğrencilerin limit konusundaki kavramlarla ilgili çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını ve bu kavram yanılgılarını öğretim sonrasına bile taşıdıklarını ortaya koymaktadır. Limit konusuyla ilgili literatürde belirtilen yanılgılar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Limit tanımı ilgili yanılgılar: Limitin ε, δ tanımında geçen x_0 değişkeninin tam olarak hangi özelliği taşıdığı anlaşılmasında güçlük çekilen bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Yapılan bazı çalışmalar bu ε, δ yaklaşımını içeren formal tanımın üniversite yıllarında uzun çalışmalar sonrasında bile öğrencide zorluk oluşturduğunu ifade etmektedir. Limitin formal tanımında yaşanan kavram yanılgısının önemli nedenlerinden biri, öğrencilerin epsilon delta yaklaşımını içeren formal tanımı anlamakta zorluk çekmeleridir (Baki ve Çekmez, 2012; Bukova, 2006).

x_0'ın f fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olduğu ve Limitin ε, δ tanımının bu temel üzerine kurulduğu gözden kaçmaktadır (Özmantar, Bingölbali ve Akkoç, 2008). Nitekim yapılan bazı çalışmalarda yığılma noktası ile ilgili olarak da öğrencilerde yanılgılar olduğu tespit edilmiştir. Bir fonksiyonun limitine bakılabilmesi için limit bakılan noktanın fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerekir (Balcı,1997). Dolayısıyla yığılma noktası kavramı limit kavramının vazgeçilmez unsurudur. Buradan da açıkça görülmektedir ki limit kavramındaki sıkıntıları gidermenin yolu yığılma noktası kavramındaki sıkıntıları gidermekten geçer (Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012).

Öğrenciler bir kavramı anlamaya başlarken önce kendi günlük dillerindeki anlamlarla ilişki kurma eğilimindedirler. “Limit” kelimesi günlük kullanımda “kredi kartı limiti” hız limiti” gibi kullanımlara sahip olup, genellikle varılabilecek en büyük değer olarak algılanmakta ve geçilmemesi gereken bir sınır değerini taşımaktadır (Özmantar vd., 2008).

Bu şekildeki algılayışların matematiksel limit kavramının öğrenimi üzerine ne tür etkileri olduğu Jordan (2005) ve Willims (1991) tarafından yapılan çalışmalarda incelenmiştir. Jordan (2005) mühendislik fakültesine devam eden 42 öğrenciye "limit, fonksiyonun geçemeyeceği bir sayıdır" ifadesinin doğru olup olmadığını sormuş ve öğrencilerin 21 tanesi bu ifadenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Bu şekilde cevap veren öğrencilerle yapılan görüşmeler neticesinde öğrencilerin günlük yaşamda edindikleri limit anlamını fonksiyonlardaki limit konusuna bağdaştırma eğiliminde olduklarını göstermiştir (Özmantar vd., 2008).

2. $\frac{0}{0}, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$ gibi belirsizlik durumlarında ortaya çıkan yanılgılar; Öğrenciler fonksiyonun limit istenen noktada tanımsız olması halinde; belirsizliğin ortadan kaldırılması için cebirsel işlemlere başvurmaktadır. Çarpanlara ayırma ve sonrasında sadeleştirme işlemi yardımıyla belirsizlikten kurtulma yoluna gidilmektedir. Öte yandan fonksiyonun limit istenen noktada tanımsız olması halinde tanımsız olan noktaya büyükten ve küçükten yaklaşılarak limitler hesaplanmaktadır. Her iki durumda da öğrenciler aslında ne yaptıklarının farkında değildir.

Örnek:

$f: R - \{ 0 \} \to R - \{ 0 \}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ reel değerli fonksiyonu için kendisi ile görüşme yapılan çoğu matematik öğretmeni adayı f fonksiyonun tanım ve değer kümesinde neden 0'ın olamayacağının farkındadır. Ancak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0^+$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ gördüklerinde bunun manasını tam olarak ifade etmekte güçlük çekmektedirler (Özmantar vd., 2008).

Sonuç olarak; Sonsuzluk, sonsuz küçük ve sonsuz büyük gibi soyut kavramlarda, limit ile süreklilik öğrencilerin anlamakta güçlük çektikleri kavramlardır (Özmantar vd., 2008).

3. Fonksiyonun tanımlı olduğu noktada limitin olmayışı anlaşılmasında güçlük çekilen kavramlardandır. Bu konuyu biraz daha açarsak; öğrencideki yanılgı, limit istenen noktanın fonksiyonda tanımlı olması halinde limit için bir sorun kalmadığı yönündedir. Bu yüzden öğrenciler aşağıdaki gibi bir örnek ile karşılaştığında limit değeri hakkında karar vermekte güçlük çekmektedir.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad olmak\ \text{üzere};\ \lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

Öğrenciler bir noktada limitin var olması için o noktada fonksiyonun tanımlı olması gereğine dair yanlış kavram imajına sahip olabilmektedirler (Özmantar vd., 2008).

Yukarıdaki örnekte verilen fonksiyon $R \to R$ olup 0 da limitine bakılabilen bir örnektir. Öğrenciler fonksiyon 0 da tanımlı olduğunda limitin de 0 olduğunu söylemektedirler. Halbu ki 0'ın civarındaki değişkenlerde fonksiyonun davranışı 1 ve -1 olduğundan limit mevcut değildir. Öğrencilerin limit istenen noktada fonksiyon tanımlı ise limiti değerini yerine yazarak bulma yanılgısına düştükleri açıkça görülmektedir. Yani öğrenciler fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerektiğini düşünürken bir yandan da bir noktada tanımlı değilse o noktada limiti yoktur diye düşünebilmektedir. Bu durumun sonucu olarak öğrenciler parçalı fonksiyonların limitini alırken sadeleştirmede de hataya düşebilmektedirler.

Bu durum on beş yılı aşkın bir süreden beri verdiğim analiz derslerinde de sıklıkla gözlemlenmektedir. Bunu aşağıdaki gibi örnekleyebiliriz:

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}, & -2 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}, & 1 \le x < 5 \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(x)$ in -2 de ve 3 de sürekli olup olmadığını ve $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

Bu soruda öğrenciler fonksiyon parçalarını çarpanlarına ayırıp;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+3)}, & -2 \le x < 1 \\ \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)}, & 1 \le x < 5 \end{cases}$$

Sonrada sadeleştirme yaparak;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)}{(x+3)}, & -2 \le x < 1 \\ \dfrac{(x-1)}{(x+1)}, & 1 \le x < 5 \end{cases}$$

Fonksiyonunu elde edip $f(x)$ fonksiyonunun -2 de ve 3 de sürekli olduğunu söylemektedirler.

$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{(3-1)}{(3+1)} = \frac{1}{2}$ ve $\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{(-2-1)}{(-2+3)} = -3$ şeklinde olacağını süreklilik için ise

$f(-2) = -3$ ve $f(3) = \frac{1}{2}$ olduğundan sürekliliğin de sağlandığı sonucuna varmışlardır.

Hâlbuki $f(-2) = -3 \; ve \; f(3) = \frac{1}{2}$ değildir. Dolayısıyla sürekli değildir. Öğrencinin burada düştüğü yanılgı -2 de tanımlı olmayan fonksiyon için fonksiyonun -2'deki limitinin sonucunu fonksiyonun -2 de aldığı değer zannetmesidir. Yani bir noktada tanımlı olan fonksiyon için limitin fonksiyonun o noktada aldığı değer olduğunu zanneden öğrenci tanımlı olmayan noktada da limitin sonucunu fonksiyonun o noktadaki değer olduğunu zannetmektedir.

Bu durum, limit bulmanın fonksiyon için bir davranış hesabı olduğu sürekliliğin ise bir değer hesabı olduğu ayırımını yapamamaktan kaynaklanmaktadır. Limit hesaplanırken tanım kümesine bakılmaksızın sadeleştirme yapılabilmesi, buna rağmen süreklilik hesaplanırken tanım kümesinde bulunan çarpanın sadeleştirilememesi öğrencide kafa karışıklığı oluşturmaktadır. Öğrencilerin bu konuda yaşadıkları sıkıntının sebebi limit tanımıyla süreklilik tanımını karıştırmalarından kaynaklanmaktadır (Aydın ve Kutluca, 2010).

4. Öğretmenlerin bir fonksiyonun limitini (sağdan ve soldan) bulmayla ilgili hızlı işlem yapmalarını sağlama yönünde verdikleri ipuçları yanılgıya sebep olabilmektedir. Örneğin işaret fonksiyonunun limiti bulunurken öğrencilere genelde fonksiyonu 0'a eşit yapan değerlerde işaret fonksiyonunun limitinin olmadığı söylenmektedir.

Örnek: $f(x) = Sgn(x-3)^2$ fonksiyonunda $\lim_{x\to 3^-} Sgn(x-3)^2 = 1 \; ve \; \lim_{x\to 3^+} Sgn(x-3)^2 = 1$ olduğundan $\lim_{x\to 3} Sgn(x-3)^2 = 1$ dir. Burada x=3 verilen fonksiyonu 0'a eşit yapmasına karşın fonksiyonunun bu noktada limiti vardır (Özmantar vd., 2008).

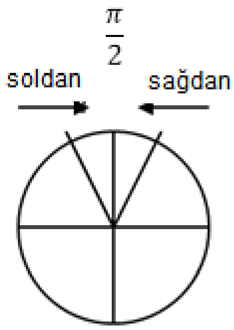
Limit konusuyla ilgili olarak ders kitaplarında sağdan ve soldan limit kavramı ile limit buldurulur. Ancak limit konusunun anlatımı sırasında yaygın olarak $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ifadesi için x, 1'e soldan yaklaşırken limit veya $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ifadesi için x, 1'e sağdan yaklaşırken limit ifadesinin kullanımı kavram yanılgısına neden olabilmektedir (Baki, 2006). Bu durum trigonometrik ifadeler için sağ ve sol yönlerin reel eksenin tersine sonuç vermesinden kaynaklanmaktadır (Baki, 2006).

Örnek:

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} [\![Cosx]\!]$ için öğrenci $\frac{\pi}{2}$' ye sağdan yaklaşırken farkında olmadan $\frac{\pi}{2}$'den küçük değerler alır. Böylece $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < Cosx < 1 \Rightarrow [\![Cosx]\!] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} [\![Cosx]\!] = 0$ sonucuna ulaşır ki bu sonuç yanlıştır.

Aynı şekilde; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} [\![Cosx]\!]$ için öğrenci $\frac{\pi}{2}$' ye soldan yaklaşırken farkında olmadan $\frac{\pi}{2}$'den büyük değerler alır. Böylece $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow -1 < Cosx < 0 \; [\![Cosx]\!] = -1 \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} [\![Cosx]\!] = -1$ sonucuna ulaşır ki bu sonuç da yanlıştır (Baki, 2006).

Bu durum aşağıdaki şekilde de görülmektedir.



$$0 < \mathrm{x} < \frac{\pi}{2} \ \text{ ve } 0 < \cos(\mathrm{x}) < 1 \ \text{ için } \ [\![Cosx]\!] = 0 \, ; \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} [\![Cosx]\!] = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \mathrm{x} < \pi \ \text{ ve } -1 < \mathrm{cox}(\mathrm{x}) < 0 \text{ için } [\![Cosx]\!] \ = 0 \, ; \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} [\![Cosx]\!] = -1$$

Sonuç olarak, öğrenciler reel sayı ekseninde sağ ve sol limitlerin trigonometride de aynı olduğunu düşünerek hataya düşmektedirler.

Limitle ilgili yanılgılardan bir diğeri de herhangi $f(x)$ fonksiyonunun $x \to x_0$ için limitinin $f(x_0)$ olduğudur. Polinom türü fonksiyonlar için geçerli olan bu limit bulma yöntemi öğrenciler tarafından bütün fonksiyonlarda kullanılmaktadır. Fonksiyon limit istenen noktada tanımlı ise limit bulmak için noktayı fonksiyonda yerine yazmak öğrencilerin çokça kullandıkları bir yoldur.

1. 1. Araştırmanın Problemi

Basit bir ihtiyaçtan doğan, sürekli gelişen, gelişmeye devam eden, tüm bilimlerin temelinde var olan matematik, günlük yaşamımızın da vazgeçilmez bir parçasıdır. Yaptığımız alışverişlerde, zaman dilimlerinde, olası ve muhtemel durumların tartışılmasında, istatistik sonuçlarıyla sorunlara çözüm arama girişiminde, veri toplamada, ölçmede, bağ, bahçe, tarlaların alan hesaplarında, haritalama, ölçeklendirme çalışmalarında matematiği kullanırız.

Yapılan araştırmalar, matematik derslerinde öğretmenlerin ilköğretim düzeyinden başlayarak gittikçe zorlaşan bilimsel bilgiye ağırlık verdiklerini ve matematik dersinin işlenişinde genel olarak düz anlatım, soru cevap ve problem çözme gibi yöntemlerini kullandıklarını belirtmiştir (Gömleksiz, 1997). Ancak günümüzde bu öğretim yöntemleri öğrencilerin öğrenmeye aktif olarak katılması ve öğrenmelerinin kalıcı olması için gerekli olsa da yeterli değildir.

Matematik programlarının başarılı olması, strateji, yöntem ve tekniklerin seçimine bağlı olmaktadır. Uygun strateji, yöntem ve teknik seçildiği takdirde, öğrencinin derse karşı ilgisi artar, etkili düşünme alışkanlığı kazanır, ders başarısı artar ve en önemlisi matematiğe karşı olumlu tutum geliştirir. Aksi takdirde sonuçların değişmesinin çok zor olacağı durumların yaşanması kaçınılmazdır.

Öğrencilerin yaşadıkları başarısızlık onların güven duygularının azalmasına sebep olmaktadır. Öğrencilerin başarısız olmalarına neden gösterdikleri bir konu, öğretmenlerin dersleri monoton işlemesidir (Zelyurt, 2010).

Öğretmenlerin matematiği iyi öğretememesi öğrencilerin matematikten uzaklaşmasına, korkmasına ve sevmemesine sebep olabilmektedir. Özsoy ve Yüksel'e (2007) göre; öğrencilerin korkularını yenmeleri için öncelikle matematiği sevmeleri gerekiyor. Öğrencinin matematiği sevmesi için de farklı yöntem ve tekniklere derslerde yer verilmesi gerekmektedir.

Derste hedefine ulaşmak isteyen bir öğretmen, matematik öğretimin amaçlarını, öğrencilerin nasıl öğrendiklerini ve öğrenilen konunun kalıcı olabilmesi için yapılacak etkinlikleri bilen bir öğretmendir. Derste kullanılan yöntemler, öğretmenin öğretme stili, kullanılan materyaller, matematiğin mümkün derecede somut hale getirilmesi ve öğrencinin zihninde tam olarak meydana gelmesi matematik öğretimini etkilemektedir. Bundan dolayı öğretmenin kullanılacağı yöntemler ve öğrencilerin yapacağı etkinlikler matematik öğretiminde önemlidir (Altınsoy, 2007).

Öğretmenin sahip olmadığı bilgi veya becerinin öğrenciye kazandırması beklenemez. Bu aşamada öğretmen yetiştiren eğitim kurumlarına önemli görevler düşmektedir. İyi bir matematik öğretmeninden; alanı ile ilgili gelişmeleri izleyen, bunların öğretim programlarına yansıtılması için gerekli önerilerde bulunan, matematiğe karşı ilgili ve bu alanda başarılı, düşüncelerini başkalarına açık bir biçimde aktarabilen, iyi bir öğrenme ortamı sağlayabilen özellikle soyut düşünme yeteneğini kazanmış olması beklenir. Bunun yanında öğretmenlerin beklenmeyen şekilde öğrencilerin anlamalarını zayıflatan ve önleyen ön kavramlara sahip olabildiklerini de vurgulamıştır. Öğretmenlerin öğretecekleri temel kavramlarla ilgili olarak yanılgılar taşımamaları öğrencileri için son derece önemlidir. Çünkü öğretmenin sahip olabileceği yanlış ya da eksik bir bilgi sınıf ortamında aynen öğrencilerine aktarılma olasılığı oldukça yüksektir (Demircioğlu, Özmen ve Ayas, 2001; Uyanık ve Serin, 2016). Bu durum öğretmen adaylarının üniversitede öğrenimleri sürecinde aşabilecekleri bir durumdur.

Schoon ve Boone (1998) bilimsel olarak daha fazla doğru kavramlara sahip sınıf öğretmenlerinin önemli oranda daha yüksek öz yeterlilik gösterdiklerini ortaya koymuşlardır. Bu sebeple öğretmenlerin, formal eğitim sürecinde yeterli düzeyde alan bilgisine sahip olmaları son derece önemli olduğu söylenebilir. Quiles-Pardo ve Solaz-Portoles'e (1995) göre, öğretmenlerin, öğrettikleri fen dersinin içeriğini tam anlamamaları ve bazı yanılgılara sahip olmaları, öğrencilerin sahip olduğu yanılgıların sebeplerinden biridir (Uyanık, 2015).

Bu nedenle öğretmen adaylarının matematik kavramları ile ilgili olarak sahip olabilecekleri yanlış ya da eksik anlamalarını düzeltme yollarını aramak, onları bu yanılgılardan haberdar edip bu yanılgıları giderici ve önleyici tedbirler alıp, yeni yöntemler sunmak, onları iyi bir matematik öğretmeni yapma yolunda atılmış bir adım olacaktır. Aynı zamanda matematiğe karşı tutumlarını olumlu yönde değiştirmelerine neden olacaktır.

Bazı öğrenciler matematiği yakın çevresiyle, somut örneklerle, günlük hayatla ilişkilendiremediği için ve işine yaramayacağını düşündükleri için matematikten soğuyabilmektedir. Halbuki doğada görülen pek çok olayın açıklanması matematikle mümkündür. Matematik günlük hayatla ilişkilendirilebilir. Analojiler de bu görevi üstlenebilir.

Matematik derslerinin yürütülmesinde temel kavramlar önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü kavramlar, yaşadığımız ortamın karışıklığını azaltarak, çevremizde ve hayattaki olayları anlamamıza, nesneleri tanımamıza yardımcı olur ve insanlar arasındaki iletişimi kolaylaştırır. Ayrıca, bilgilerin sistematik olarak gruplandırılmasını ve örgütlenmesini sağlar (Saka, Ayas ve Enginar, 2002).

Limit kavramının tarihine bakacak olursak, ilk kez 14. yüzyılda kullanıldığını görmekteyiz. Limit kelimesi Latin kökenli olup “sınır” ya da “sınırlılık” anlamına gelmektedir. Süreklilik, türev ve integral kavramlarının temelinde yer alan matematikteki ana kavramlardan biridir. Ayrıca fonksiyonların bir nokta civarındaki davranışlarını incelerken en kullanışlı metottur. 16. yüzyılda astronomideki gelişmelerle alan, hacim, eğrilerin uzunluğu gibi hesaplama gerektiren durumlarda metotlar bulmaya acil olarak ihtiyaç duyulmuştur. 17. yüzyılda yelpaze şeklindeki şekillerin alanlarını ve elma gibi katı cisimlerin hacimlerin bulmada Johannes Kepler (1571-1630) sonsuz küçük metotlar kullanmıştır. 18.yüzyıl boyunca sonsuz küçük metotlarla yapılan analizin sağlam kavramsal temellere oturmadığı dönemin matematikçi ve filozofları tarafından çok tartışılmıştır. Bu durum, 18.yüzyılın sonunda matematikçilerin sonsuz küçüklerle yapılan analizden vazgeçilmesi fikrini doğurmuştur. Analizi sağlam temellere oturtma arayışında Jean le Rond d’Alembert (1717-1783) limit kavramını ilk defa sonsuz küçüklerden bağımsız olarak matematiksel temellere dayandırmıştır. Ancak limit kavramının ilk sağlam tanımı Augustin Louis Cauchy (1789-1857) tarafından yapılmıştır:

“Bir değişken sabit bir değere peş peşe sonsuz hamle ile yetrince yaklaştığında (aralarındaki uzaklık istenildiği kadar küçük olduğunda) bu değere diğerlerinin limiti denir.” (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014).

Limit kavramı, günümüzdeki anlamına, büyük ölçüde, Karl Weirstrass’ın çalışmalarıyla ulaşmıştır. Weirstrass aynı dönemlerde, Bolzano, Abel ve Cauchy’nin başlattığı çalışmaları kurallara bağlama çabasıyla, bir sayı dizisinin limiti, sürekli değişken vb. kavramları aynı zamanda da limit kavramına ilişkin ε- δ gösterimini geliştirmiştir (Bukova, 2006). Neticede; diziler, seriler, diferansiyel, türev, integral gibi konular için ön şart konu olması ve limit konusunun anlaşılmadan geçilmesi sözü edilen bu diğer konuların öğrenilmesinde de sıkıntı oluşturacağı için bu konunun öğrenilmesi ayrı bir önem arz etmektedir.

Öğrencilerin limit istenen noktada fonksiyon tanımlı ise limiti değeri yerine yazarak bulma yanılgısının nedeni; lise müfredatında kullanılan polinom türü fonksiyonlar için limit uygulamalarında, limit istenen noktayı polinomda yerine yazarak limit bulma örnekleri ile ilgilidir. Aslında hiçbir limit uygulamasında "yerine yazarak limit bulma" mevzu bahis değildir. Doğru ifade ise; "yerine yazılıyormuş gibi davranıyor" olmalıdır. Fakat gerek lise öğretmenleri gerekse öğrencileri bu durumun farkında değildirler. Limit aslında fonksiyonun bir x_0 değişkeninin civarındaki değişkenlerde nasıl davrandığının incelenmesidir. Diğer bir ifadeyle x_0 civarındaki değişkenlerde fonksiyonun davranışının tespitidir. Dolayısıyla limit hesaplanırken fonksiyonun tam olarak x_0 da ne yaptığıyla kesinlikle ilgilenilmez. Fonksiyon x_0 da tanımlı ya da tanımsız olabilir. Bu durumun x_0 civarındaki davranışla hiçbir alakası yoktur. Öğrencilerin anlamakta güçlük çektiği en önemli nokta burasıdır. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ifadesi x_0 civarındaki değişkenlerde f fonksiyonunun değeri *l* nin civarındadır anlamına gelir. Aynı ifadeyi "lim" kelimesindeki sıkıntıları ortadan kaldırmak için $\mathrm{Civar}_{x \to x_0} f(x) = l$ analojisini kullanmanın daha anlamlı olacağını düşündük.

$\mathrm{Civar}_{x \to x_0} f(x) = l$: x_0 civarındaki değişkenlerde f fonksiyonun değeri *l* nin civarındadır.

Bu tanımı kullanırken x_0 civarındaki değişkenlerde fonksiyonun değerlerinin hesaplanabilir olması gerektiği öğrenciler tarafından tam olarak algılanamamaktadır. Yani civar hesaplanırken fonksiyonun tam olarak x_0 da aldığı (almadığı) değer ile ilgilenmediğimiz bunun yerine x_0 ın civarındaki değişkenlerde fonksiyonun değerlerinin incelendiği anlaşılmamaktadır. Bu önemli bir sorundur. Ayrıca "x_0 ın civarındaki" ifadesindeki civarın nasıl bir özellik gösterdiği nasıl bir civar olduğu konusu da öğrencilerin anlamadığı bir başka konudur. Bunların haricinde ve hepsinden daha önemli olmak üzere x_0 ın civarındaki değişkenlerde fonksiyonun tanımlı olması gerektiği yani x_0 ın f fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerektiği mevzusu öğrencilerin anlamakta güçlük çektikleri en önemli konudur. Bunu birçok defa derslerimde kullandığım ve neredeyse tüm sınavlarımda sorduğum aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek

$f: Z \to R, f(x) = x^2 + 1,\ olsun. Buna\ göre;$ a) $\text{Civar}_{x\to 2} f(x) = ?$

$b)\ \text{Civar}_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = ?$

Öğrenciler birçok kez birinci soruda x gördükleri yere 2 yazarak, 2.soruda ise ½ tamsayı olmadığından limit anlamsızdır cevabını vermişlerdir. Buradan öğrencilerin civarın ancak yığılma noktalarında bakılabileceğini ve tamsayıların yığılma noktasına sahip olmadığını bilmediklerini ve dolayısıyla civar hesaplama ile yığılma noktası arasındaki vazgeçilmez ilişkiyi kavrayamadıkları görülmüştür. Bu yüzden yığılma noktası kavramı ve civar hesaplama ile olan ilişkisi üzerinde çalışılması ve yanılgının giderilmesi gereken önemli konulardan biri olarak görülmüştür.

Literatür incelendiğinde öğretmenlerin öğretimde öğrencilerin ön kavramlarını dikkate almanın önemini kavramadıkları ve daha çok geleneksel öğretim yöntemlerini tercih ettikleri için kavramsal öğrenmeyi sağlayamadıkları belirtilmektedir (Widodo, Duit ve Müler, 2002). Bir başka deyişle öğrenme üzerine yapılan araştırmaların sonuçları ile öğretmenlerin derslerinde kullandıkları farklı yöntemler arasında köprü kurması büyük bir zorunluluktur. Bunun sağlanabilmesi, farklı öğrenme-öğretme modellerin öğretim ortamına entegrasyonu ile mümkün olacaktır. Bu bağlamda analojiler, öğrencinin ilgisini çekecek, dikkatini toplayacak ve motivasyonunu arttıracak şekilde düzenlenip derslerde kullanılabilir.

Aynı şekilde analojilerin, kavram öğretiminde tek başına yeterli olamayacağı veya istenmeyen öğrenmelere sebep olabileceğine dair görüşler de mevcuttur (Saygılı, 2008; Sevim, 2007; Toka ve Aşkar, 2002). Bu görüşlerden hareketle, analojilerin diyalojik yaklaşımla desteklenerek kavram öğretiminde kullanılmasının daha etkili olacağı düşünülmüştür. Literatürde bu konu ile ilgili henüz yapılmış bir çalışma yoktur ve işte bu çalışma literatürdeki bu boşluğu dolduracaktır.

Öğretmenler kendi deneyimlerine bağlı olarak etkili analojiler geliştirebilirler. Öğretmenler eğitimin en önemli parçası, yapı taşları ve büyük değerleridir. Sokrates de insanların kendilerini geliştirmesi ve eğitmesi hususunda kendini adamış bir öğretmendir. Sokrates geliştirdiği soru cevap (diyalog) yöntemi ile tarihte çığır açmıştır.

> Menon diyalogları ile erdemin öğretilebilir olup olmadığı sorusu kapsamında eğitim üzerine düşünmenin ilk temellerini atmıştır. … Sokrates çözülmesi zor bir geometri probleminin çözümünü eğitimi olmayan bir köleye diyalog yöntemiyle çözdürmeyi başarmıştır. Bu örnek ile Sokrates insanı iyiye ve faydalı olana iletecek olan bilgilerin insan ruhunda uyur halde olarak bulunduğunu ve soruşturmayla uyanır hale geleceğini göstermiştir. … İnsana aktif bir rol yükleyen Sokrates öğretenin bilgiyi aktardığı, öğrenin ise bilgiyi aldığı bir eğitim anlayışının karşısına sorgulamaya dayalı bir eğitim anlayışını getirmiştir. Sokrates cesaret üzerine yaptığı tartışmanın yanı sıra gençlere verilmesi gereken en iyi eğitimin ne olduğu üzerinde de durmuştur. Sokrates gençlerin iyi ya da kötü karaktere sahip olmasının aldıkları eğitime bağlı olduğunu

belirtmektedir. Bu yüzden gençlerin eğitiminde usta öğretmenlerin gerekliliğini dile getirmiştir. …. (Kantarcı, 2013, s. 79).

Öğretmenler, öğrencilere öğretim programındaki hedef davranışları kazandırmak üzere öğrencinin öğrenme durumu ve öğrenme ortamını dikkate alarak uygun yöntemleri seçmek, etkinlikler geliştirmek, geliştirdikleri etkinlikleri uygulamak ve kontrol etmekle görevlidirler (Akdeniz, Devecioğlu ve Ayvacı, 2004). Okul öncesinden lisans eğitimine kadar, eğitim-öğretim faaliyetlerinin etkin ve etkili bir şekilde yürütülebilmesinde en önemli görev öğretmenlere düşmektedir. Ne kadar iyi bir program hazırlansa da sonuç olarak bu programı uygulayacak olan öğretmenlerdir. 21. yüzyılın öğretmeninin nasıl olması gerektiğinin sorusunu araştıran ABD'deki Holmes grubu, öğrencilerin performanslarının artırılması için, kaliteli öğretmen yetiştirilmesi gerektiğini savunmuştur (Baki, 1996).

Ülkemizde pek çok branştaki ortaokul öğretmenleri (fen, matematik, Türkçe, sosyal) sınıflarında en çok düz anlatım yöntemi kullanmaktadır. Bunun sebebini de dersin hedefleri, öğrenci sayısı, öğrenci hazır bulunuşluğu, konunun özelliği ve ders süresidir (Akçay, Akçay ve Kurt, 2016).

Öğretmenler kalabalık sınıflarda soyut bir ders olan matematiği de bu sebeplerden dolayı düz anlatımla sunmayı tercih etmektedirler. Düz anlatım belli bir alanda uzmanların nasıl düşündüklerini, sorunlara nasıl yaklaştıklarını ve bir problemi nasıl çözmeye çalıştıklarını gösterebilir. Bir düz anlatımla dağınık ders materyalleri özetlenebilir ya da en son keşifler ve konular tarif edilebilir. Ancak, düz anlatımın bazı ciddi sınırlılıkları da bulunmaktadır. En önemli sınırlılığı kavrama, uygulama, sentez, değerlendirme ve yaratıcılık gibi üst düzey öğrenmeler için uygun olmayışıdır. Belki bu sınırlılığa eşdeğer olarak, geleneksel bir düz anlatımda, öğrenciler çoğunlukla pasiftir. Bu durum öğrencinin dikkatinin çabuk dağılmasına neden olur. Bir düz anlatımda sadece öğretim elemanı konuşuyorsa öğrenci için geri bildiriminin bulunmayışı büyük bir sorun oluşturabilir. Bir diğer sınırlılık da öğretim elemanı bazı önemli noktalarda (öğrenme hızı, bilişsel beceriler, konuyla ilgili arka plan bilgisi, konuya duyulan ilgi) öğrencilerinin az çok benzer özellikler taşıdığı varsayımına sahipken gerçekte anlama düzeyi bakımından öğrenciler büyük ölçüde farklılıklar gösterebilir (Cashin, 2010).

Düz anlatım, en eski öğretme yöntemidir ve hala dünyanın tüm üniversitelerinde en yaygın kullanılan yöntemdir (Cashin, 2010). Ancak 2005 yılından beri yapısalcı yaklaşımın etkili olduğu okul programlarının yeni öğretim yöntem ve tekniklerle dersleri zenginleştirme çabalarını üniversite derslerinden bağımsız düşünemeyiz. Kalabalık sınıfların ders süresinin ve farklı bireysel özelliklerin hakim olduğu üniversite sınıflarında en uygun yöntem ve teknikleri araştırmak ve kavram yanılgılarının üstesinden nasıl gelinebileceğini araştırmak temel sorunlardan biridir.

Bu sebeple öğrencilerde ve öğretmenlerde tespit edilen yanlış anlamaların sebepleri ve bu yanılgıların düzeltilmesine yönelik çalışmalar yapılması ve varılan sonuçların öğretmen eğitiminde dikkate alınması son derece önemlidir. Matematik öğrencileri matematik derslerinde hangi öğrenme süreçlerinden geçmişse öğretmen olduklarında da öğrencilerini aynı süreçlerden geçirmek isteyeceklerdir (Baki, 2002). Bu nedenle matematik öğretmeni adaylarının alışılagelmiş öğrenme stratejilerinden farklı olan her türlü yeniliğe ve değişikliğe karşı haberdar edilmeleri ve görüşlerinin alınması son derece önemlidir.

Onbeş yılı aşkın bir süredir öğretim görevlisi olarak lisans düzeyinde analiz derslerini anlatmaktayım. Bilinen yaklaşımlarla anlattığım derslerimde süreklilik, türev ve integral gibi kavramlara alt yapı oluşturmam beklenilen limit kavramının öğrenciler tarafından arzu edilen düzeyde öğrenilmediğini, kavram yanılgılarının oluştuğunu ve bu nedenle ilişkili kavramların öğrenilmesini de olumsuz yönde etkilediğini gözlemliyordum. Bu gözlemlerime bağlı olarak ilgili literatürü incelediğimde bu durumun yukarıda bahsi geçen ilgili literatürde de belirtildiği gibi önemli bir araştırma problemi olduğunu fark ettim. Bu temel kavramın öğrenilmesini kolaylaştıracak yöntem ve yaklaşımların ne olabileceği sorusunu kendime (bir araştırmacı öğretmen olarak) sorarak bu eylem araştırmasını tasarladım. Bir eylem araştırmasının aşamalarının sırayla tamamlanması amacıyla önce literatür taraması yapıldı. Arkasından kullanılacak öğretim yaklaşımına karar verildi. Analoji destekli diyalojik yöntemine dayalı olarak tasarlanan öğrenme-öğretme süreci araştırmacı öğretmen tarafından uygulanarak değerlendirildi. Bu çalışma genel olarak bu uygulamanın nicel ve nitel yansımalarını içermektedir.

Analoji destekli diyalojik yöntem ile limit konusunun öğretilmesi ne kadar etkilidir? sorusu bu çalışmanın problemini oluşturmaktadır.

Alt problemler:

1. Analoji destekli diyalojik yöntem ile öğretilen limit konusunun öğrenci başarılarına etkisi nedir?
2. Limit konusunda analoji hazırlamada üniversite öğrencilerinin yeterliliği nedir?
3. Öğrencilerinin limit konusunda analoji hazırlama ile ilgili görüşleri nelerdir?

1. 2. Araştırmanın Önemi

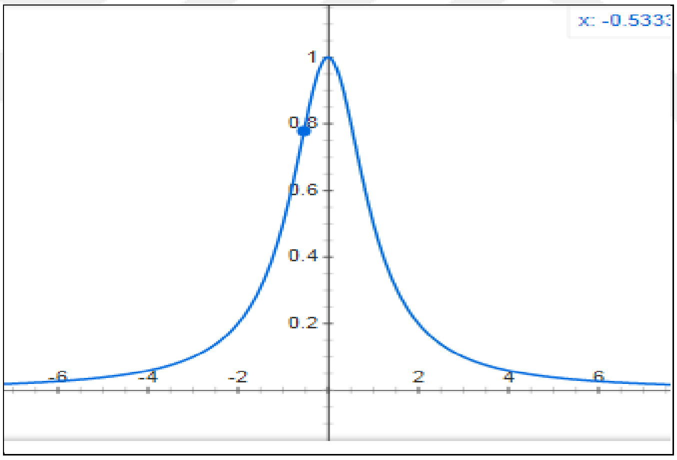
“Günümüzde matematik eğitimle ilgili yapılan çalışmaların en önemli amacı, öğrencilerin matematiği anlamlandırarak öğrenmelerine fırsat verecek bir sistemin geliştirilmesidir.” (Dursun ve Dede, 2004).

> Matematik ve matematiksel düşünme günlük hayatta büyük bir yer kaplamasına rağmen dünyanın her yerinde “zor” kabul edilir ve öğretiminde genellikle güçlük çekilir. Matematiğin zorluğu soyut yapısından kaynaklı olduğu kadar ona karşı geliştirilen ön yargı ve korkudan da kaynaklanmaktadır. …. (Umay, 1996, s. 146).

> İnsanoğlu tarih boyunca yaşadığı çevreyi tanımaya, doğa olaylarını anlamaya ve doğaya hükmetmeye çalışmaktadır. İnsanoğlunun bu çabada en önemli yardımcısı doğanın dili olan matematik olmuştur. … Doğaüstü görülen pek çok olayın da açıklanması matematiksel dille ifade edilebilmiştir. …. (Yenilmez ve Uysal, 2007, s. 89).

> Matematik dünyayı görmenin anlamanın bir yoludur. Matematik gerçek hayat problemlerine uygulanarak onları insanların kontrol altında tutmasını sağlar. Kısaca, matematik kendi içinde soyut; ancak somuta uygulanabilen evrensel bir dildir. …. (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003, s. 40).

Örneğin altın oran, fi ve pi sayısı belki de hayatla matematiği içinde barındıran ender sayılardan biridir. Aşağıdaki grafikte bir insanın hayatını gösterdiğini düşünürsek; doğuyor, büyüyor, yaşlanıyor ve ölüyoruz. İşte eğrinin altında kalan hayatımızın analojisi olan bu alan pi sayısını verir.



Şekil 1. $\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiği

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Matematik eğitimi, öğrenci için bilimsel düşünme becerisini geliştirmek ve bu becerileri gerçek hayatta uygulamaları bakımından önem kazanmaktadır (Yıldız ve Uyanık, 2004). Yeni yetişen kuşaklara matematiksel bakış, matematiksel düşünme ve matematiksel yorumlama yeteneği kazandırmak bir zorunluluktur. Matematiksel düşünme ve yorumlama yeteneği öğrencilerin muhakeme yapma, analitik düşünme, sentez yapma, soyutlama gibi süreçlere olanak sağlar (Arslan ve Yıldız, 2010). Öğrencilerin düzenli ve organize olmalarına yardım eder. Öğrencilere sabretmeyi sabırla çalışmayı ve mücadeleyi öğretir. Elde edilen bilgileri günlük yaşantılarına transfer etmelerini sağlar. Yorumlama güçlerini geliştirir. Yeni bilgilerin başka bilimsel alanlarda kullanılmasını sağlar. Ancak öğrenciler matematiği sadece geçilmesi gereken bir ders olarak algılamakta ve günlük hayatta matematiği ilişkilendirmekte güçlük çekmektedirler. Birçok insan için matematik, hayatı zehireden derslerden, içine korku salan sınavlardan ve okulu bitirir bitirmez kurtulacağı bir kâbustan ibarettir. Bu durumun nedeni; günlük hayatımıza etki eden matematik kavramlarının, günlük hayattan uzak örnekler ve ezber yöntemlerle öğretilmesidir.

2006 yılında Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulunca Kabul edilen yeni ilköğretim matematik programında da sadece kavramsal yaklaşım bir konunun öğretilmesinde tek başına etkili olamayacağı, soyut matematiksel kavramların öğrenilmesi için somut ve günlük yaşam örneklerinin kullanılması gerektiği öne sürülmüştür (Yenilmez ve Uysal, 2007). Teknoloji matematikte karşılaşılan zorlukları büyük ölçüde azaltmıştır. Teknoloji ile öğrencilerin üst seviyede bilişsel beceriler sergilediklerini, yeni grup çalışması stratejileri geliştirdiklerini, motive olduklarını, eğlendiklerini ve daha fazla öz-güven sahibi olduklarını ortaya çıkaran pek çok çalışma mevcuttur (Baki, 1996; Enderson, 1997; Hoyles, Noss ve Sutherland, 1991; Knezek, 2004; Mc Coy, 1996; Sutherland ve Balacheff, 1999). Ancak, okul imkanlarında teknolojinin etkin kullanımını için alt yapının uygun olmaması, okullarda sınıfların çoğunda internet bağlantısı için alt yapının yetersiz olması ve bilgisayarların yeterli donanımda olmaması, bilgisayarların etkin kullanımı konusunda öğretmenin ve yöneticilerin eğitimlerinin yetersiz olması, eğitim kurumlarında bilgisayar kullanımınına yönelik yeterince organize olunmaması gibi dezavantajlar da vardır (Turan, 2002).

Limit kavramının sahip olduğu özelliklerden dolayı öğrenci başarısını üst seviyelere çekemediği de bir gerçektir. Limit konusu ile ilgili kavram yanılgılarını tespit etmeye ve bu yanılgıları gidermeye yönelik literatürde bazı çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmaların çoğu yanılgıların tespiti üzerine yoğunlaşmaktadır. Limit konusunda karşılaşılan kavram yanılgılarını temel alarak, limitin günlük hayatla ilişkisini sağlayarak limit anlamını kolaylaştıracak analoji bulmak daha önce üzerinde çalışılmamış bir konudur. Üstelik limit kavramının etimolojisine bakacak olursak Fransızca "sınır" sözcüğünden alıntı olduğunu görmekteyiz. Limit konusundaki öğrenme zorlukları Fransızcadan evrilmiş olan “lim” ifadesinin anlaşılamamasından kaynaklanıyor olabilir. Bu çalışmada, limit konusunda sık karşılaşılan kavram yanılgılarını temel alarak analoji destekli dialojik yöntemle öğrencilerin daha kolay anlama ve yorumlamasına imkân sağlayacak “civar” ifadesiyle günlük hayatla ilişkili örnek ve olaylardan oluşan analojilerle limit konusunun öğretilmesini amaçlanmıştır.

Bu sayede öğrencilerin limit konusunu öğrenirken günlük hayatla ilişkisini kuracağına ve tespit edilen yanılgıların ortan kalkacağına inanılmaktadır.

Bu çalışma, limit kavramının öğreniminde hedeflenen başarılara ulaşmak için, öğrencinin limit yerine civar ifadesi kullanacağı ve konuyla ilgili kavramları kendisinin keşfedeceği ve yapılandıracağı bir öğrenme ortamı hazırlayacaktır. Bunun sonucunda öğrencilerimizde civar kavramıyla birlikte, matematiğin diğer konu alanlara karşı da daha olumlu bir tutum gelişeceği beklenmektedir.

Matematik öğretmenleri üniversitelerimizin eğitim fakülteleri tarafından yetiştirilmektedir. Matematik öğretmenliği bölümlerinin ders müfredatları ve içerikleri ülkemizdeki matematik öğretiminin temelini oluşturmaktadır. Bu nedenlerle, Matematik öğretmenliği bölümlerinin ders müfredatlarını ve içeriklerini geliştirmeye yönelik araştırmalar yapmak çok önemelidir. Bu doktora çalışmasının bu amaca katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Üniversitelerimizin Matematik öğretmeni yetiştiren programlarında Analiz dersleri temel derslerdir. Analiz dersinin merkezinde olan limit ve süreklilik kavramları, birçok araştırmacılar tarafından üzerinde çalışılması gereken konular olarak görülmektedir.

Limitle ilgili çalışmaların temelinde yer alan “iki sayının aynı sayıya eşit olmayacak kadar en fazla ne kadar birbirine yaklaşabilecekleri” ve “bir doğal sayının 0’a eşit olmadan ne kadar küçük olabileceği” gibi soruları, limit kavramının tarihsel gelişimine katkı sağlamıştır (Özmantar vd., 2008).

Modern anlamda kullanılan limitin epsilon- delta tanımı meşhur matematikçilerden Bolzano’ya kadar dayanmakta olup bu tekniğin sistematik olarak sunumu 19. yüzyılın ortalarında Weierstrass tarafından yapılmıştır. Günümüzde yaygın olarak kullanılan $\lim_{x \to x_0} f(x)$ şeklindeki notasyonun ilk kullanımına yine meşhur matematikçi olan Hardy’nin 1908 yılında yayımladığı “A Course of Pure Mathematics” adlı kitabında yer almaktadır. 20. yüzyılın başlarına kadar limit kavramının yapısal olarak kullanımı nadiren görülmekte olup bu kavram modern anlamda yaklaşık 150 yıllık bir maziye sahiptir.

Baki, (2006) limit kavramı için; limit hesaplamanın, fonksiyon davranışlarını incelemekten ibaret olduğunu belirtmiştir. Böylece soyut bir kavram olan limit çok daha somut bir hal almıştır. Buradan yola çıkarak fonksiyon, limit ve süreklilik kavramlarının öğretiminde soyut durumlardan kurtularak, daha somut ve günlük hayatla ilişkilendirilebilen yaklaşımlar kullanmak gerektiği sonucuna ulaşılabilir.

Bir kısım araştırmacılar, limit kavramının matematik diliyle yapılan tanımının soyut düşünmeyi, matematiksel ifadeleri anlamayı ve matematiksel ispat tekniklerini kullanmayı geliştirdiğini düşünmektedirler (Ervynck, 1981; Swinyard ve Lockwood, 2007’den akt., Baki ve Çekmez, 2012, s. 81). Limit kavramının matematiksel ifadesinin soyut düşünmeye geçişte başlangıç noktası olduğu göz önüne alındığında ve analiz dersi için türev integral gibi konuları için önemli olduğu düşünüldüğünde, bu tanımın öğrenciler tarafından nasıl en iyi kavranılacağının araştırılması gerekmektedir.

Öğrenmenin direkt olarak öğrenilen konulara karşı olan ilgiye ve öğrenirken zevk almaya bağlı olduğu düşünüldüğünde, Matematik öğrenmek için matematikten zevk almanın ne kadar önemli olduğu ortaya çıkar. Matematik öğrenirken bilgileri inşa etmek bir sanattır ve bundan zevk alabilenlerin matematikle bir problemi kalmaz (King, 2003).

Matematikten zevk alması gereken en önemli kesim, matematiği meslek haline getirmiş kesim olmalıdır. Matematik öğretmenleri bu kesimin en büyük bölümünü oluşturur (King, 2003). Matematik öğretmenleri mesleklerini ister bilerek ister şans eseri seçsinler, öğrencilerine faydalı olabilmeleri matematikten ne kadar zevk aldıklarına bağlıdır.

Bu amaca yönelik olarak, geleneksel kavram öğretimi yöntemlerinden uzaklaşılarak, analojiler kullanılarak matematik daha anlaşılır, daha zevkli ve eğlenceli hale getirilebilir. Öğrenciler bu kavramları günlük hayatla ilişkilendirerek somutlaştırabilir ve doğanın matematiksel dilini keşfetmeleri kolaylaşabilir. Analojilerle öğrencide var olan kavram yanılgıları giderilebilir ve yeni kavramlar daha kolay, daha rahat, yanılgıya yer vermeden öğretilebilir.

Matematik derslerinde analoji kullanımının önemli olduğu fark edilmiş olsa da ülkemizde bu konuda yapılan çalışmalar çok azdır. Öğretmenlere anlaşılması zor olan ve kavram yanılgısı yaşanılan limit konusunun “civar” analojisi kullanarak öğretiminin nasıl olduğunu göstermek ve bunun etkilerini açıkça belirtmek matematiğin daha da sevdirilmesi, anlaşılması açısından önemlidir.

Analojilerin hayal güçleri ile ilişkili olması ve birtakım senaryolarla öğrencilere sunulup onların görüşleri ile geliştirilebilir olması açısından yaratıcı düşünme ile ilişkili olabilir. Çağımızda düşünme yetilerini kazandırmak ve geliştirmek öne çıkan eğitim amaçlarındandır. Bu görüşlere göre araştırma sınırlılıklarına karşın orta öğretim matematik başarısına analojilerin önemini göstermek yönünden alana katkı yapabilir ve konu ile ilgili araştırma yapmak isteyenlere bir rehber olabilir. Bunun yanında orta öğretim matematik dersinin analoji yöntemi ile öğretimi yönünden öğretmenlere yardımcı olabilir. Ayrıca yaratıcı düşünmenin öğretimi açısından araştırmacılara ve öğretmenlere farklı bir fikir verebilir.

> Öğrencilerin limit konusunda yaşadıkları zorlukların türev integral gibi limitle ilgili diğer kavramlarda da zorluklar yaşamalarına yol açtığı gerçeği göz önüne alındığında limit kavramına ilişkin öğrenci zorluklarını bilme ve bunların üstesinden gelme yollarını araştırmak önem taşımaktadır. Limit konusu türev ve integral konusunu çalışmak için ön hazırlıktır (Baki, 2018, s. 270).

Limit yerine civar kelimesini kullanarak öğrencilerin anlayabileceği analojiler oluşturmak limit konusunun öğretilmesine yeni bir boyut kazandıracaktır. Evrensel limit ifadesinden uzaklaşmadan öğrencilerin yabancı olmadığı "civar" kavramıyla limit analojisi kurmak limit öğretilmesinde zorluğu azaltacağı düşünülmektedir. Örneğin öğrencilerin fonksiyonun bir noktadaki limitini bulmayı fonksiyonun o noktadaki görüntüsü bulma algısını değiştirecektir. Fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada sürekli olması gerektiği algısını değiştirecektir. Belirsizlik ve tanımsızlık durumları daha anlaşılır olacak sadece cebirsel ifadelerin limiti değil trigonometrik ifadelerin limiti de kolay anlaşılır olacaktır.

Literatürde limit konusunda karşılaşılan kavram yanılgılarına yer verilmiş ve çözüm önerileri sunulmuş olmasına karşın limit ifadesinin civar ifadesiyle yer değiştirerek sunulmasına ve analoji destekli diyalojik yaklaşımla öğretilmesine dair bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu anlamda çalışmanın bu boşluğu dolduracağına ve literatüre farklı bir bakış açısı sunacağına inanılmaktadır. Bu bağlamda çalışma, bu konuda araştırma yapan araştırmacılara yol gösterecek, limit konusunun öğretiminde çaresiz kalıp farklı yollar arayan öğretmenlere yardımcı olacak, limit konusunda öğrenme güçlüğü yaşayan ya da kavram yanılgılarına sahip olan öğrencilere ışık tutacaktır. Ayrıca öğrencilere bu güçlükle mücadele etme ve üstesinden gelme fırsatı verecektir.

1. 3. Araştırmanın Varsayımları

Bu çalışmada aşağıda yer alan varsayımlardan hareket edilmiştir:

1. Öğrenciler, görüşme ve sınav sorularını içten ve samimi bir şekilde yanıtlamışlardır.
2. Öğrenciler etkinliklere karşı aynı düzeyde güdülenmişlerdir.
3. Araştırmacının gözlemlerinin tarafsız ve samimi olduğu varsayılmıştır.
4. Bu çalışma için seçilen örneklemin evreni temsil ettiği varsayılmıştır.

1. 4. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Çalışma, 2016-2017 Eğitim Öğretim Yılı Güz Yarıyılında, Rize'de yer alan üniversitenin eğitim fakültesinin ilköğretim matematik bölümü 2.sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.
2. Çalışma; ilköğretim matematik programının 2. sınıf öğrencileri için analiz dersinde gördükleri limit konusu kazanımlarıyla sınırlıdır.

3. Çalışmanın bulguları; araştırmacı tarafından hazırlanan analoji destekli diyalojik yönteme dayalı limit dersleri, katılımcı gözlem notları, görüşme, öğrenci analojileri ve limit konusunda yapılan açık uçlu sınav ile sınırlıdır.
4. Çalışma, uygulama sürecinde sınıf ortamı ile sınırlıdır.

1. 5. Tanımlar

Bu kısımda limit, analoji, kavram yanılgısı ve diyalojik yöntem ile ilgili tanımlar verilecektir.

1. 5. 1. Limit Tanımı

İlk kez 14. Yüzyılda kullanılan limit latin kökenli olup “sınır veya sınırlılık” anlamına gelmektedir. Matematikte süreklilik, türev ve integral kavramlarının temelinde yer alan matematikteki ana kavramlardan biridir ve fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışını inceler (Argün vd., 2014). Limit kavramının ilk tanımı Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) tarafından aşağıdaki gibi yapılmıştır.

Bir değişken sabit bir değere peş peşe sonsuz hamle ile yeterince yaklaştığında (aralarındaki uzaklık istenildiği kadar küçük yapıldığında) bu değere diğerlerinin limiti denir. (Argün vd, 2014).

Aynı dönemlerde Weierstrass ε-δ ile tanımı aşağıdaki gibi yapmıştır.

$Tanım: I\ bir\ aralık\ I \subseteq X \subseteq R olmak$ üzere $f: X \to R\ bir\ fonksıyon\ olsun.$

$i)\ c \in I\ olmak$ üzere $eger\ her\ \varepsilon > 0\ reel\ sayısına\ karşılık\ 0 < |\ x - c\ |\ < \delta\ eşitsizliğini$ $sağlayan\ x\ reel\ sayıları\ için\ |\ f(x) - L\ | < \varepsilon\ olacak\ şekilde\ en\ az\ bir\ \delta > 0\ sayısı\ varsa$

o zaman L sayısına f fonksiyonunun c noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \to c} f(x) = L\ seklinde\ gösterilir.$$

$ii)\ her\ \varepsilon > 0\ için\ x \geq N\ şartını\ sağlayan\ x\ noktaları\ için\ |\ f(x) - l| < \varepsilon\ eşitsizliğini\ sağla$ $yacak\ şekilde\ bir\ N\ reel\ sayısı\ varsa\ f\ fonksiyonu\ \infty\ da\ l\ limitine\ sahiptir\ denir\ ve$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l\ ile\ gösterilir.$$

Limitin formal tanımında öne çıkan kavram komşuluk kavramıdır. Eğer f fonksiyonunun $x \to a$ için limiti L ise L’nin istenildiği kadar küçük seçilen bir komşuluğu (L-ε, L+ ε) için a’nın bir delik komşuluğu yani (a- δ, a+ δ) vardır ki bu delik komşuluğun f altındaki resmi L’nin seçilen komşuluğu içinde yer alır (Özmantar, Bingölbali ve Akkoç, 2015).

Baki (2018) limitin tanımını “fonksiyonun tanım kümesinden seçilen x elemanının yeterince a ya yaklaşmasıyla görüntü kümesinde f(x) L ye istenildiği kadar yaklaştırılabilir” olarak yapmıştır.

Özetle limitin tanımı; f fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası civarındaki değişkenlerde fonksiyonun değerinin incelenmesidir.

MEB (2018) yenilenen lise matematik kazanımlarında sayılar ve cebir öğrenme alanında limit ile ilgili kazanımlar şöyle verilmektedir:

1. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limit ve sağdan limit kavramlarını açıklar.
2. Limit ile ilgili özellikleri belirterek uygulamalar yapar.
3. Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğini açıklar.

Limit kısaca, “f fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası civarındaki değişkenlerde fonksiyonun değerinin incelenmesidir” şeklinde tanımlanmaktadır. Türkiye ve dünyada matematik programlarında öğrencilerden limitin tanımını yapmaları ve limit ile ilgili özellikleri kullanarak uygulamalar yapmaları beklenilmektedir.

Matematik eğitimi genellikle soyut kavramları içermekte ve öğrenciler bu kavramları öğrenirken zorlanmaktadırlar. Matematiğin soyut kavramlar içermesi ve öğrenenlerin günlük hayatla bu kavramların ilişkisini kuramaması bu zorluğu tetikleyen sebeplerden biri olarak düşünülmektedir. Diğer alanlarda olduğu gibi matematik öğretiminde de kavramların öğrenilmesinde veya kavram yanılgılarının giderilmesinde kullanılan önemli yöntemlerden biri de analoji kullanma yöntemidir.

1. 5. 2. Analoji (Benzetişim)

Bilim adamları analojiyi farklı şekillerde tanımlar. Poincare'ye göre analojiler duyu izlenimleri olan “ilkel analojiler”den, bir yapının ilişkilerini koruyan “matematiksel analojiler” e göre çeşitlilik gösterir. Onun için ilkel analojiler, genellikle hayal gücünden yararlanan kısa bir karşılaştırmadır. Bununla birlikte, matematiksel analojiler bir muhakeme biçimidir ve temsili düşünceyi içerirler (Cruz-Hastenreiter, 2015).

Analoji, bilimsel kavramların anlaşılmasını kolaylaştırmada yararlanılan dinamik bir olgudur. Analoji, gerek sonuçlar çıkarma gerekse de yeni kavramları öğrenme ve geliştirmede önemli bir rol oynayan, etkili bilişsel mekanizmalardan biri olmaktadır. Analojiler öğrenme ve öğretmede çok güçlü bir araçtır. Problem çözme, açıklama yapma ve tartışma gibi birçok farklı amaç için kullanılan etkili bir araçtır. Analojiler, öğrenmede sıklıkla tercih edilmektedir. Ancak, bu süreçte bazı tehlikeler de söz konusudur. Analojiler öğretmenler tarafından sistematik bir şekilde oluşturulmadığında öğrenme sürecine zarar verebilmektedir. Böyle bir durumda ise öğrencilerde kavram yanılgılarının gelişim kaçınılmaz olmaktadır (Şenpolat, 2005).

Analoji; Bilinen, benzer vakalarla bilinmeyen, yabancılaşmış bir durumun açıklaması olarak tanımlanmaktadır. Bilinen durum kaynaktır; bilinmeyen ise hedef. Bilinen kaynaklar hedefe ulaşmak için kullanılır. Bu anlamda, analojiyle yapılan anlamlı öğrenmede benzerliklerin nasıl ve ne amaçla yapıldığını göstermek çok önemlidir (Küçükturan, 2003)

Analojilerle Öğretim (TWA) modeli ilk kez 1989 yılında Glynn tarafından geliştirilmiş ve 1994 yılında yeniden tasarlanmıştır. Bu modelde, öğretmenlerin analojileri sistematik ve etkili bir şekilde kullanmalarına yardımcı olacak adımlar aşağıdaki gibi belirlenmiştir (Glynn vd., 1994'den akt., Cruz-Hastenreiter, 2015, s. 40).

1. Hedef kavramı tanıtın
2. Öğrencilere analog (kaynak) kavramı hakkında bildiklerini hatırlatın
3. İlgili aracın özelliklerini tanımlayın
4. Analog (kaynak) ve hedefin benzer özelliklerini bağlayın (eşleyin)
5. Analog(kaynak) ve hedef arasındaki ayrımın nerede olduğunu belirtin
6. Sonuçları çizin.

Öğretmenler derslerinde analoji kullanmadan önce bu adımlara dikkat etmeli, öğrencilerin bilişsel gelişimlerine uygun olan analojilerle ders işlemeli, hangi yaş grubuna, hangi analojilerin kullanılacağı önceden planlanmalıdır (Sağırlı, 2002).

> Glynn, Russell ve Noad'a göre analoji kullanmak, öğrencilerin zihinlerinde fen kavramlarına dair şekillerin ve modellerin oluşmasına yardımcı olacağını ve analoji kullanımı ile öğrencilerin, soyut olan fen kavramlarını, somut olan kavramlara benzeterek daha kolay anlayabileceklerini belirtmişlerdir. …. (Şenpolat, 2005, s. 57).

Bunun yanında öğrenciler analojideki hedef ve kaynak arasındaki ilişkiyi ve birbirinden ayrılan yönleri iyi anlayamazsa kavram yanılgısı gibi istenmeyen durumlar oluşabilir. Öğrenciler analoji ile öğretilmesi hedeflenen kavramların dışında sonuçlar çıkarır ve bu bilgilerini doğru kabul ederek diğer alanlara uygulayabilir. Dolayısıyla öğretimde kullanılan analojilerin kavram kargaşası yaratmamasına özen gösterilmelidir (Bilgin ve Geban, 2001).

Bunun için analoji kullanılırken şu durumlara dikkat edilmelidir:

1. Öğretmenler anlatacakları konuda ne tür bir analoji kullanacaklarını iyi tespit etmeli ve o doğrultuda bir plan yapmalı, öğrencilerin dikkatini analojiye çekebilmelidir,
2. Öğrencileri kendi analojilerini oluşturabilmelerinde öğretmenler destek olmalı ve öğrencilere fırsat vermeli ve gerekli görülmesi halinde analojiler görsel materyallerle de desteklenebilmelidir,
3. Analojilerin konu ve günlük yaşamla ilişkili olmasına, öğrencilerde kavram yanılgısına yol açmamasına dikkat edilmeli ve anolojilerde öğrencilerin önceki bilgileriyle bağlantı kurabilmelerine imkan da tanınmalıdır,

4. Kullanılan analojiler, öğrencilerin hazırbulunuşluklarına uygun ve anlayabilecekleri seviyede olmalıdır.

Yukarıda belirtilen hususlara dikkat edildiği takdirde analojiler, eğitim sürecinde çok olumlu gelişmelere neden olacaktır. Eğitimde kullanımına sıklıkla başvurulan analojilerin faydaları şöyle özetlenebilir (Efe, 2018; Kaptan ve Arslan 2002; Küçükturan, 2003; Şenpolat 2005).

1. Analojiler öğrencilerin eğitim ortamına aktif katılımını sağlar,
2. Analojilerle öğrencilerin problem çözme yetenekleri geliştirilebilir,
3. Analojiler öğrencilerin düşünme yeteneklerini ve yaratıcılıklarını geliştirir,
4. Kalıcı öğrenmeleri kolaylaştırır,
5. Anlaşılması zor olan soyut kavramların somut hale getirilmesini sağlar
6. Var olan kavram yanılgılarının ortaya çıkmasını kolaylaştırmaktadır.
7. Öğrenmeyi desteklemede ve yardımcı olabilir.
8. Öğretmenleri, öğrencilerin ön bilgilerini dikkate almaya zorlayabilir.
9. Öğrencilerin akranları ile etkileşim içinde bulunmasını sağlayarak düşünme sistemlerini görmelerini sağlayabilir.
10. Konuların özetlerini kolay ve anlaşılır bir biçimde ortaya çıkarmaktadır
11. Kavramlar, olaylar ve nesneler arasında mantıksal ilişkiler kurulmasını sağlamaktadır
12. Öğrencilerin kendi analojilerini oluşturmaları ile değişik alanlarda problem üretmesine yardımcı olabilir.

Analojiler basit analojiler, hikaye tarzında analojiler, resimli analojiler ve oyunlaştırılmış analojiler olmak üzere gruplara ayrılır.

1. Basit analojiler

Bir şeyin doğrudan bilinen başka bir şeye benzetilmesi olarak tanımlarlar. Örneğin kalbin pompaya, sinir sisteminin telefon kablolarına benzetilmesi basit analojilere örnek verilebilir (Duru, 2002).

2. Hikaye tarzında analojiler

Bir olayın başka bir olaya benzetilerek açıklanmasıdır. Öğretmen, öğreteceği konuyu öğrencilerin çok iyi bildiği bir hikâyeye dayandırarak benzetme yapar. Hikâyeyi iyi bilen öğrencilere bu durum cazip ve çekici geldiğinden dikkatleri toplar, öğrenmeyi kolaylaştırır. (Duru, 2002).

3. Resimli analojiler

Lawson (1993)'e göre resimli analojiler, şekiller, diyagramlar, fiziksel deneyler, öğrencilerin yer aldığı simülasyonlar veya bilgisayar destekli aktiviteler şeklinde de olabilir (Duru, 2002).

4. Oyunlaştırılmış analojiler

Bu analoji türünde olaylar oyunlaştırılır. Örneğin bitkilerin fotosentez olayı insanların yemek yapma olayına benzetilerek oyunlaştırılır (Şahin, 2000).

Analojiler matematik eğitiminde güçlü bir öğretim aracı olarak kabul edilmektedir. Analoji kullanarak, öğrenciler kavramlar arasında ilişkiler kurabilir ve ilişkiler arasında karşılaştırma yapabilir. Ayrıca kavramsal öğrenmeyi ve problem çözmeyi daha esnek bir şekilde öğrenebilirler. Matematik dersindeki çeşitli konular arasındaki ilişkiler analojiler yoluyla bulunabilir ve matematiğin sürekliliği sağlanabilir. Önemli bir öğrenme ve öğretme aracı olan analojiler, bilimsel fikir ve kavramların öğrenilmesinde ve geliştirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır (Ekici, Ekici ve Aydın, 2007). Bu doğrultuda, soyut ve net olmayan kavramları somut ve anlaşılır hale getirmek için analojiler kullanılabilir. Analojinin eğitimde kullanımı; hoşlanma, motivasyon, hafıza geliştirme ve problem çözme gibi beş önemli nedenden dolayı tavsiye edilmektedir (Bennett ve Clarke 2005'den akt., Efe, 2018, s. 25)

Matematiğin soyut biçimsel yapısı analojik çıkarımlarla oldukça ilişkilidir. Örneğin, öğrenciler başlangıçta sayıların toplanması ile değişkenlerin toplanması arasındaki benzerliğe dikkat etmeyebilirler. Çünkü değişkenlerin görünüşte farklı yapısı vardır. Fakat bu konuda fazla soru çözdüklerinde yani uzmanlaşmaya başladıklarında sayıların toplanması ile değişkenlerin toplanması arasında bir analoji kurarlar ve benzer yönlerini söylerler. Bu sayede de değişkenleri daha derinlemesine anlama olanağına erişirler. Analoji matematik eğitiminin güçlü bir öğretim aracıdır. Analojiler sayesinde matematikteki çeşitli konuların birbiri ile ilişkisi bulunabilir ve matematik öğrenme kalıcı hale getirebilir (Efe, 2018). Amerika Birleşik Devletleri'nde, öğretmenler öğrencilerin aktif bir şekilde muhakeme yapmasını teşvik edecek biçimde analojileri sıklıkla kullanırlar. Analojiler iyi bilinen kaynaklarla yeni öğrenilecek hedefler arasında karşılaştırmalar sunar. Eğitsel içerikler öğrencilere analojiler, ipuçları ve sorular olmadan verildiğinde öğrenciler bu içerikleri fark etmede başarısız olurlar (Richland, Zur ve Holyoak, 2007).

Matematiksel düşünmede özellikle sayılar konusunda analojik düşünme önemli bir rol oynar. Analojik düşünme bilinen şeyler ile yeni şeylerin anlaşılmasını gerektirir. Bu tür düşünme insan düşünmesinde önemli bir mekanizma oluşturur. Çocukların matematiksel öğrenmelerinin önceki ve yeni fikirler arasındaki benzerlikler ile oluştuğu genel olarak kabul gören bir görüştür (Duit, 1991).

Analojinin yararlı kullanımını tanımlarken araştırmacılar sık sık şu iki alandan bahseder: Bilimsel buluşlar ve matematik. Buna rağmen analojinin bilimde oynadığı rolü açıklayıcı pek çok çalışma yapılmışken matematikte analojinin kullanımının rolü ile ilgili çok az çalışma vardır (English, 1997). Özellikle yeni matematiksel bilgileri oluşturmada analojik düşünme çocuklar için ilk olarak anlaşılabilir eksiksiz bir taban oluşturmak ile başlar. Sonra çocukların yeni bilgilerini alıştıkları bilgilerle etkili bir şekilde kullanmaları sağlanır. Bu sırada çocukların ihtiyacı olursa yol gösterilir gereken deneyimleri edinmeleri sağlanır. Bu durum onların matematiği anlama ve uygulama yapabilmelerini geliştirir (English, 1997). Öğrencilerin matematiksel fikirlerinde oluşturduğu ve yorumladığı görsel analojilerin onların zihinlerinde bir model oluşturmak için uygun olduğu söylenebilir. Analojilerin anlamından sonuç çıkarma eğilimi ve isteği insan kavrayışının çoğu zaman rastlanan bir özelliğidir (Reeve ve Pattison, 1996).

Analoji ve metaforlar son yıllarda birçok araştırmaya konu olmuştur. Metafor terimi tüm karşılaştırmalara uygulanabilir gibi gözükür, iki nesne arasındaki bazı benzerliklerin tanımlanmasında ön plana çıkar. Her zaman böyle olmasada, benzerlikler genişletildiği zaman, analoji teriminin kullanılmasına bir eğilim oluşur. İki nesne arasındaki farklılıkların ve benzerliklerin altı çizilir (Aubusson, Harrison ve Ritchie, 2006). Metaforlar gizli analojilerdir. Her metafor bir analojidir ve analojiler açık/anlaşılır benzetimler yapar. Şu örnekle analoji ile metaforun benzerlik ve farklılığını görebiliriz: A, B gibidir dersek bu bir analoji olur. A, B dir dersek bu bir metafor olur. Bu sebepten matematikte kullanılan metaforlara da değinilebilir. İşlemleri ya da denklemleri öğretirken öğretmenin eşitliğin iki tarafı terazinin kefeleri gibidir sözü analoji; eşitlik bir dengedir sözü metafor örneğidir. Bir başka metafor örneğini de lise matematiğinden verebiliriz. Bir öğrenci 5, 8, 11,… dizisinin ilk 30 teriminin toplamını nasıl bulacağını araştırmaktadır. Sonucu bulduktan sonra öğrenci şu açıklamayı yapar: İlk önce bunun bir kubbe/gökkuşağı gibi devam ettiğini gördüm. Daha sonra bunların merkezdeki iki terimin toplamları ile birleştiğini fark ettim şöyle ki 1. ci ile 30. cuyu, 2. ci ile 29. cuyu topladığımda hep aynı sonuç oldu. Dizinin 30 terimi olduğuna göre bu toplamı 15 ile çarpmak dizinin ilk 30 teriminin toplamını bulmaya yetecekti. Böylece öğrenci gökkuşağı metaforu ile Gauss toplamını bulmuş oldu (English, 1997).

Trigonometriden bir örnek verecek olursak, öğrenci trigonometride 180 ve 360’dan açıların çıkarılmasında ismin değişmediğini anlamaya çalışırken şöyle bir metafor kullanır. Sin(180-q) =sin q ve Sin(360-q) =sin q. Birisi 2. birisi 4. bölgededir. 180 ve 360 dereceyi hatırlamak için bir geminin su üzerinde nasıl yüzeceğini düşünelim. Gemi ya yarısı ya da tamamı suyun altındayken yüzer. O halde sinüs de ya dairenin yarısında ya da tamamında isim değiştirmez (English, 1997).

English ve Halford (1995) Gentner’ in ölçütlerini matematik öğreniminde analoji kullanımına adapte etmeye çalışmışlardır. Onlar üç ilkeyi fen bilimlerindeki analoji ile öğrenime eşit derecede uygulanacak şekilde matematikteki analojilerle öğrenime adapte etmişlerdir. Bunlar:

1. Kaynak ilkesinin açıklığı; kaynak ya da bilinen bilginin okuyucular ya da öğrenciler tarafından gerçekten anlaşıldığını aslında anlaşılmaktan da öte olduğunu iddia eder. Bilinen bilginin yapısına açıklık getirmek özellikle öğretmenler ya da ders kitap yazarları için önemlidir. Çünkü bunların eksik ya da yanlış tanıtımları yeni bilgide yanlış anlamlara ya da eksik tanıtımlara yol açacaktır. Örneğin, göz-kamera analojisi kullanılırsa öğretmenin bu analojileri öğrencilere yeni bilgi için sembolün yaratılmasında yardımcı olmasına olanak sağlayacak yeterli bilgiye sahip olacak şekilde genişletip açıklaması gerekmektedir.

2. Eşleştirme ilkesinin açıklığı; kaynaktan hedefe eşleştirmede bir anlam kargaşası olmamalıdır. Başka bir deyişle okuyucular ve öğrencilerin kaynak ve hedefin hangi özelliklerinin eşleştirilebildiğini açıkça görmeleri gerekir. Bunu sınıfta başarmanın bir yolu analojilerin şematik temsilini yaratmak veya öğrencilere sınıfta ya da okuma parçasında karşılaşacakları analojilerle bağlantı kurmalarını sağlamaktır.

3. Kavramsal uyumluluk ilkesi; kaynaktan hedefe eşleştirmede kurulan bağlantılar uyumlu bir kavramsal yapı oluşturmalıdır yani “yüksek dereceli yapı”. English ve Halford (1995) ileri sürmüştür ki sadece bu bağlantıların “yüksek dereceli yapı” ya uyanları eşleştirilebilir. Göz-kamera analojisini örnek verecek olursak scleranın renkleri ve iris eşleştirilemez çünkü analojinin kavramsal yapısına uymaz.

Öğretmenler ve kitap yazarları sıklıkla analojileri kullanmaktadırlar. Örneğin öğrenci bir soru sorduğunda ya da bir konuyu anlamadığını belirttiğinde öğretmen “Bu … benzer”, “Bu …. ile aynıdır”, “Bu …dan farklı değildir”, “Bunu … gibi düşün” şeklinde açıklamalar yapmaya başlar. Gerçekte de bu açıklamalar bizi analojilere götürmektedir. Ancak maalesef hem kitap yazarları hem de öğretmenler analoji kullanımı konusunda az bilgi sahibi olduğundan kullandıkları analojiler faydalı olmayabilir. Bazen sistematik olarak kullanmazlar ve bu da karışıklığa ya da yanlış anlamalara yol açar. Bunu önlemenin bir yolu öğretmene bilmiyorsa analoji kullanımından vazgeçmesi önermektir. Ancak bu gerçekçi bir yaklaşım olmaz çünkü insanlar doğuştan itibaren analojik düşünmeye ve açıklamalarında bilinçli olarak ya da bilinçsizce analoji kullanmaya yatkındırlar. Bu sebepten en iyi çözüm öğretmenlere ve kitap yazarlarına analojileri sistematik bir biçimde planlı olarak ve öğrencinin anlamlı öğrenmesine yardım edecek şekilde nasıl kullanacaklarını öğretmek ve açıklamaktır (Glynn 1994’den akt., Saygılı, 2008, s. 11).

Analojilerin bilişsel ve duyuşsal öğrenmelerdeki faydaları matematik öğretiminde karşılaşılan sorunları gidermede de etkili olabilir mi? Bu sorunlar analojilerle giderilebilir mi? Analojilerle matematikte bazı konularda karşılaşılan zorluklar ve yanılgılar giderilebilir mi?

Hem öğretmen hem de öğrenci öğrenilecek yeni bilgi üzerinde analoji kullanmayı düşünebilir ancak analoji eğer konu anlaşılmışsa boş bir bilgi yığını haline gelebilir (Venville ve Treagust, 1996). Ya da bazen öğrenci anlamını ve ne ile ilişkili olduğunu düşünmeden analojiyi kullanabilir, mekanik olarak analoji kullanıldığında da bir etkisi-işlevi olmaz. Örneğin öğrenciye sınavda mitokondri nedir diye sorulduğunda öğrenci sınıftaki analojiyi mekanik olarak düşünmeden kullanıp cevaba mitokondri hücrenin güçlü bitkisidir yazmıştır (Treagust, Harrison ve Venville, 1996).

Öğrenciler analoji alanından hedef alana uygun olmayan bir uygulama yaptıklarında bu durum yanlış anlamalara sebep olabilir. Öğrenciler hedef alan hakkında yanlış anlamalar geliştirdiklerinde bunun değiştirilmesi oldukça zordur. Eğer öğrenciye özel bir konu hakkında iletilen bilgide yalnızca bir analoji kullanılırsa öğrenci bu konuda başka analoji kullanılamayacağını ya da uygun olan başka bir analoji olmadığını düşünebilir (Orgill ve Bodner, 2003). Bunun yanında Parida ve Goswami (2004)' nin çalışmasında analojilerin kullanışlılığından bahsedilmiştir ve öğrenme-öğretme sürecinde sınıfta analoji kullanımının kitaplardaki kullanımı kadar yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Goswami ve Parida' ya göre analojiler dikkatli kullanılmalıdır yoksa öğrenenler hatalı anlayabilir ve etkisiz bir öğretim olabilir (Yılmazoğlu, 2004).

Analojiler kavramsal öğrenmede değerli bir öğretim aracıdır. Gerçek dünyayla olan benzerlikler ile soyut kavramların anlaşılmasını ve görselleşmesini sağlarlar. Öğrencilerin ilgilerini ve dolayısıyla motivasyonlarını olumlu etkiler. Öğretmenleri öğrencilerin önceki bilgilerini düşünmek ve öğrencilerin önceki konulardaki kavramsal yanlış anlamaları hususunda düşünmeye iter (Boo ve Toh 1997'den akt., Fretzin, 2001 s. 3).

> Öğrencilerin eğitim ortamına aktif katılımını sağlar, bilimsel düşünme ve problem çözme yeteneklerini geliştirir. Öğrenenlerin düşünme yeteneklerini ve yaratıcılıklarını geliştirir. Bilimsel kavramların öğrenilmesini ve akılda uzun süre tutulmalarını kolaylaştırır. … Anlaşılması zor olan soyut kavramların somut hale getirilmesinde oldukça kullanışlıdır. Eğitimde analoji kullanmak, öğrenci merkezli, aktif öğretim ortamının oluşturulmasına katkıda bulunur. …. (Kaptan ve Arslan, 2002, s. 2).

Kısaca, analojiler bir durumun, bir olayın veya bir kavramın daha iyi anlaşılması için başka bilinen bir duruma bir olaya veya bir nesneye benzetilmesi için kullanılır. Ancak analoji kullanılırken dikkat edilmesi gereken hususlara uyulmadığı takdirde kavram yanılgılarına sebep olabilir.

1. 5. 3. Diyalojik Yöntem

Soru cevap, Türkçe kaynaklarda " isticvab metodu", "soru cevap metodu", "soru cevap yöntemi", "soru cevap tekniği", "soru cevap usûlü", "tekşifî usûl", "katehetik metot", "ilmihal usûlü", adlarıyla anılmaktadır (Aydın, 1998).

Aydın (1998), soru cevap tekniğinin, hristiyanlığın başlangıç dönemlerinde " katehetik metot " adıyla Hz. İsa'nın inanç ilkelerini öğretmede kiliselerde "katehet" adı verilen öğreticiler tarafından insanlara belli sorular sorarak ve bu soruların kısa ve net cevaplarını almak şeklinde kullanıldığını belirtmektedir. İslam dininde ise camilerde ve sübyan mekteplerinde kullanılan soru cevap tekniği, "ilmihal usûlü" adıyla kullanılmıştır. Bu süreçte soru cevap tekniğinde ezbere ve tekrara dayalı uygulamalar çok eleştiri almıştır. Nitekim, eğitimciler de "aktarım ve tekrar etme" yerine "yorumlama, tamamlama ve eleştirmeye" yönelten "düşündürücü soruların" sorulmasına daha çok önem verilmesi gerektiğine dikkat çekmiştir. Yaşadığımız yüzyılın ilk yarısında başlayan ve devam eden çalışmalar sonunda soru cevap tekniği, yetersiz olduğu ve sakıncalı noktaların önemli ölçüde törpülenmesiyle yeni bir yapı kazanmıştır. Bu teknik günümüzde, öğrencilerin öğrendikleri bilgileri tekrar etmesine yarayan bir araç olmaktan ziyade inceleme ve araştırmaya yönelten bir teknik haline gelmiştir. Bu anlamda günümüzde soru cevap, önceden hazırlanmış soruların öğrenciler tarafından cevaplaması, tartışılması ve açıklama, yorumlama ve genellemeler yapılmasına olanak veren bir teknik olarak kullanılmaktadır. Bu yeni soru cevap tekniği anlayışına göre, öğretim çalışmalarında sorulardan ziyade, öğrencilerin verdikleri cevaplar daha önemli olmaktadır. Sorulara, sadece öğrencilere düşünme ve düşündüklerini ifade etme ortamı sağlayan araçlar gözüyle bakılmalıdır.

Yeni soru-cevap tekniğinin amaç ve işlevleri şöyle sıralanabilir:

1. Yapıcı ve üretici düşünce için teşvik edici bir ortam oluşturmak
2. Öğrenme faaliyetlerine ilginin arttırılması
3. Bilgiyi akılda tutmak, analitik düşünmeyi teşvik etmek
4. Temel problem çözme kurallarını öğretmek
5. Tarafsız değerlendirme yeteneğinin geliştirilmesi
6. Öğrenciyi yeni çalışmalar konusunda yönlendirmek
7. Düşünceleri toparlayabilmek ve ifade edebilmek
8. Öğrencinin yararlı sosyal ilgi alanlarını ve alışkanlıklarını geliştirmek
9. Öğrencileri iş birliği içinde çalışmayı öğrenmeleri için teşvik etmek
10. Öğrencilere grup çalışması ile düşünme yeteneği kazandırmak
11. Yeni değer ve tutumlar oluşturmaya teşvik etmek
12. Kavramları kullanmaya teşvik etmek

13. Öğrencilerin öz değerlendirme yapmasını sağlamak

14. Öğrencilerin dikkatini çekmek

15. Düşünmek için bir yol sunmak.

Soru-cevap tekniği birçok kaynakta Sokrates'e dayandırılmakta, hatta Konfüçyüs'ün de bu tekniği kullandığı söylenmektedir (Aydın, 1998).

Sokrates; hayatını insanlığa adadı, hayatını insanlara doğru yolu göstermeye çalışarak geçirdi, kendine has tutumu ve hayatı ile son derece özgün bir insandı. Bir insan için önemli olanın kendini ve yaşamın amacını sorgulamak olduğuna inanan Sokrates, ancak sorgulayan bir yaşamın yaşanmaya değer olduğunu söylemiştir. Atina'da insanları bu konuda uyandırmayı da kendine görev bilmiştir (Kantarcı, 2013).

Socrates sağlam, güvenilir ve herkes için geçerli olan bir bilgiye ulaşmayı hedeflemiştir. Bu durum hemen öğrenilebilecek öğreterek hemen anlaşılabilecek bir durum değildi. Bu nedenle Socrates, kişiyi eğitim ile bilgilendirmenin aksine bilgiyi arama eğiliminde olmuştur. Sokrates için eğitim, sürekli gelişen ve gelişmek zorunda olan bir süreçtir ve kişi sonsuz öğrenme çabası içinde olmalıdır. Bu sebeple geleneğe ve otoriteye bağlı kalmayı karşısına alan Sokrates aklı kullanmayı ve sorgulama yapmayı seçerek, etrafındakilerle iş birliği içerisinde gerçeği araştırmaya devam etti (Kantarcı, 2013).

> Sokrates'in insan ilişkilerinde en çarpıcı yöntemi, diyalog veya diyalektik dediğimiz yöntemdir. Sokrates, doğru bilgi ile yanlış bilgi arasında bir ayrım yapar ve doğru bilgiyi *episteme*, yanlış bilgiyi de *doksa* olarak adlandırır. Sokrates, uygun bir yöntem izlendiğinde herkesin doğru bilgiye ulaşacağına inanır. Sokrates'e göre bu yöntem, diyalog (diyalektik) yöntemidir. "Platon'un Menon" adlı diyalogunda Sokrates, yazma ve okuması olmayan bir köleye sorular sorarak ona zor bir geometri problemini çözdürür. Bu yöntem, insanın aklını sorularla harekete geçirerek, onun ruhunda uyur halde bulunan doğruların, bilgilerin ortaya çıkmasını sağlamaktır. …. (Demirci, 2007, s. 106)

Sokrates'in diyalog yöntemi, teorik olarak birbirini tamamlayan iki teknikten oluşur. Alay (ironi) ve Doğurtma (mautike) (Demirci, 2007; Aydın, 1998)

1-İronie (alay) 2- *Maieutique (doğurtma).*

1. Alay (ironie) bölümü: Sokrates insanların hatalarını düzeltmek ve arkasından gerçeği göstermek istedi. Bu nedenle diyalog yolunu seçti. Görüşme sırasında karşısındakine "hiçbir şey bilmediğini" söylüyor ve karşısındakinin fikirlerini söylettiriyordu. Daha sonra bu fikirlerin hatalarını ortaya koyuyordu. Karşısındakinin hatalarını açıklayarak adeta onunla alay ediyordu. Bu nedenle, bu ünlü "alaycı" yönteminin olumsuz yıkıcı yönü kabul edildi.

2. Doğurtma; maieutique (Fransızca.), maieutic (İngilizce.), maieutik (Almanca), tevlid (Arapça), istiladiye (Osmanlıca.): Bu aşamada karşısındaki sağlam olduğunu düşündüğü bilgisinin salladığını gördüğünde, Socrates soru-cevap tekniği ile konuşmaya

devam ederek ona gerçeği bulduruyordu. Başka bir deyişle, konuştuğu kişinin, zihninde saklanan bilgiyi ortaya çıkarmaya çalışıyordu. Bu sanata annesinin ebeliğine benzeterek Maieutique (doğum, doğurtuculuk, doğurtma, ebe) adını vermişti.

Sokrates'in kullandığı bu yöntem bazı kaynaklarda soru-cevap yöntemine dayalı Sokrates tekniği olarak kullanılmaktadır (Demirci, 2007). Buradaki amaç, öğrencinin dikkatini bir noktaya çekmek, yaşantılarla yüz yüze getirmek, duygu ve düşüncelerini ifade etmelerine katkı sağlamaktır. Böylece öğretim sürecinde öğretmen, öğrencinin zihinsel işlevini harekete geçirmiş olur (Akbulut, 2004)

Bir buldurma yöntemi olarak da bilinen bu yöntem, öğretmenin ve öğrencinin iletişimine dayanan motive edici bir öğretim yoludur ve öğrencinin mevcut bilgisine dayanan soru-cevap tekniğini kullanarak yeni bilgilere ulaşmasını sağlar. Buldurma yönteminin uygulanmasında, anlatım vb. diğer yöntem ve tekniklerin aksine, dersin başında öğretmen öğrencilere kavram ve genellemelerin tanımını vermez. Öğrenci, öğretmen rehberliğinde yer alan kavram ve genellemelere ait sorulara, verilen cevaplar ve örnekler yardımıyla ulaşır. Böyle bir uygulamada hem öğrenciler hem de öğretmenler ortak çaba gösterir. Öğretmen öğrenciye mevcut bilgilerden yeni bilgilere ulaşması için uygun, mantıklı sorular sunar (Aydın, 1998).

> Sokratik yöntemde karşılıklı konuşmalar, dışlayıcı fikirler sunmak yerine, her iki tarafın ortak bir noktada buluştuğu fikirlere yönelen konuşmalarla sürdürülür. Sokrates'in öğretme yöntemi, bir çürütme, sorgulama, inceleme ve birlikte araştırma yöntemi olduğu için, kişileri geliştirme, değiştirme ve iyileştirme amacı taşıyan tüm bu girişimler, doğal olarak monolog şeklinde değil de diyalog şeklinde olur. Nerdeyse literatürdeki bütün Sokratik yöntemin diyaloga dayamasının nedeni de budur. …. (Versenyi, 2007'den akt., Demirci, 2007, s. 106).

Sokratik diyaloglar konuların reel doğasını, temelini ortaya koymayı amaçlayan bir soru yapısından hareket eder. Verilen cevaplar karşılığında her defasında yeni sorular ile, sorgulanmadan doğru olarak kabul edilmiş düşüncelerdeki çelişkilerin ve tutarsızlıkların ortaya çıkarılması amaçlanır. Sokrates'in ebelikle özdeşleştirdiği bu hakikati araştırma yönteminde, sorulara verilen cevaplardan çok soruların nasıl sorulduğu, nasıl bir yöntemle cevap arandığı, diyalog halindekilerin tutumları ve nasıl bir motivasyonla tartışmayı sürdürdükleri ön plandadır (Evrenosoğlu, 2012).

Diyalojik yöntemiyle öğretim; teorik düzeyde zengin bir öğretim yöntemidir. Fakat öğretmenler bu yöntemi pratikte zor bulmaktadır (Reznitskaya ve Gregory, 2013). Bu zorluk teorikle pratik arasındaki boşluktan kaynaklanmaktadır. Alexander (2008) kavram tanımlarında, konuşulan dilin merkezi bir rol oynadığını ifade eder. Soru cevap yönteminde sorular, öğrenci cevaplarını kışkırtacak şekilde yapılandırılarak başka sorulara yol açar. Bu durum sonuçta tutarlı bir çizgi oluşturmaya yol açar. Diyalojik ile öğretim yaklaşımı Öğrencilerin bilişsel süreçlerini aktif olarak kullanmak suretiyle öğretmen-öğrenci iletişimine dayanır. Yüksek düzeyde özerklik ve sınıf tartışmasının gelişimini belirli bir dereceye kadar etkileme gücüne sahiptir. Soru cevap ile öğretimi Vygotsky tarafından temsil edildiği gibi sosyo-kültürel temellere dayanır. Diyalojik yöntemi sınıfta, çeşitli konuşmacıların birbirlerine cevap verdiği, başkalarının fikirlerini destekledikleri, eleştirdikleri hatta bu fikirler üzerinden çatışmaya girdikleri bir ortamdır. Amaç, bilginin verilen gibi alınmamasına, yavaş yavaş etkileşime girerek inşa edilmesine olanak sağlamaktır (Sedova, 2017). Diyalojik yöntemde;

1. İletişim; tüm öğrenciler arasında olmalıdır
2. Paylaşım; öğretmen ve öğrenciler birbirini dinlemeli ve fikirlerini paylaşmalı
3. Destekleyici olmalı yani öğrenciler kendi fikirlerini yanlış veya saçma cevap verme korkusu olmadan özgürce ifade edebilmeli
4. Bilgiler bir sonraki adımla ilişkili birikimli olmalı 5) eğitim hedeflerini, amaç ve kazanımları içermelidir (Sedova, 2017).

Diyalojik öğretimdeki anahtar nokta, sınıf içi konuşmaların kümülatif bir nitelikte olması gerektiğidir. Yani, öğretmen ve öğrenciler fikir geliştirirler ve bu yolla ortaklaşa sınıf ortamında bilgiyi yapılandırırlar (Mortimer ve Scott, 2000'den akt., Uçak ve Bağ, 2018, s. 382).

Diyalojik öğretim, öğretmen tarafından sorulan özgün ve konuyla ilgili soruların artan kullanımı ile desteklenmektedir. Ancak burada asıl önemli olan ise, bu soruları çevreleyen iletişimin niteliğidir. Genel hatlarıyla, diyalojik öğretimdeki en kritik düşünce, sınıf konuşmasında kendi bilgi dağarcıklarını oluşturmada katılımcılar olarak öğrencilere ne derece aktif roller verildiği ile ilgilidir. Dolayısıyla da öğretmenlerin rolü; öğrencileri aktif olarak derse katılmaya teşvik etmek, fikir ve görüşleri uyandırmak ve mantık yürütmelerini destekleyerek, bu yolla anlamlandırma ile bilgi dağarcığı oluşturmalarına yardımcı olmaktır (Lehesvuori, 2013'den akt., Uçak ve Bağ, 2018, s. 382).

Sınıf yönetiminde yaşanan tartışma ve konuşma her zaman tartışılabilir sorun olmuştur. Eğitimci veya öğretmenin yaklaşımının derecesine göre bu yöntemin kullanımı kullananı ileriye götürür, öğrencilerin anlamaları öğretim, öğretmen ve okulun kendisi için tüm sorunları ortadan kaldırır. Bir gerçek vardır ki pek çok eğitimci kendine güvenli değildir, öğrencileriyle tartışmaya girmeleri diyolojik teknikten ortaya çıkan problemlerden sadece biridir. Bu yüzden denir ki; tartışma sadece öğrencilerin anlamalarını ve bilişsel düzeylerini değerlendirmeye değil, aynı zamanda sınıf ortamında ilişkiler arasında bağlantılar kurmaya ve bireysel gelişime izin vermelidir. Bakker, Smit and Wengerif'e (2005) göre eğitimin amacı sadece öğretmenlerin önceden bildikleri bilgileri öğrencilere öğretmesi demek değildir aynı zamanda öğrencilerin nasıl açık uçlu sorular sorulduğunu ve yeni şeyleri nasıl diyalojik yaklaşım ile kendilerine öğreteceklerini öğrenmeleridir. Bu diyalojik öğretimin en temel düşüncesidir (Bakker, Smit and Wengerif, 2005'den akt., Pryle, 2018, s. 1).

Diyalojik, tipik öğretme aktarım metodlarından farklıdır. Örneğin, öğrencilere özgürlük tanınan sınıf ortamında, öğrenciler tartışmalara katılır, fikirler açıklanır, karşılaştırılır, sınıflandırılır ve tartışılır. Mortimer ve Scott'ın (2003) sınıf söylemini tanımlamak için kullandığı çerçeve iki boyutun kombinasyonundan üretilen dört kategoriden oluşur: etkileşimli, etkileşimli olmayan, yetkili ve iletişimsel (Mortimer ve Scott, 2003'den akt., Uçak ve Bağ, 2018, s. 382).

Etkileşimli olmayan konuşma ders türündeyken, etkileşimli konuşma öğrencilerin katılması; diyalog yaklaşımı ise farklı fikirleri dikkate alırken, yetkili yaklaşım, belirli bir bakış açısına odaklanır, (genellikle öğretmen tarafından kontrol edilen bilimsel bakış açısına),

İnteraktif yetkili yaklaşım rutin soruya cevap yaklaşımıdır öğrencilerin yanıtlarını bilimsel bakış açısıyla sık sık değerlendirilir ve öğretmen farklı fikirleri ihmal eder.

1. interaktif diyalog yaklaşımı araştırır, öğrencilerin fikirlerini dikkate alır ve değerlendirici bir yönü yoktur.
2. İnteraktif olmayan yetkili yaklaşımda, öğretmen dersi bilimsel bakış açısıyla sunar. Fikirleri ve zıtlığı dikkate almaz.
3. İnteraktif olmayan diyalog yaklaşımında, öğretmen öğrencilerin görüşlerini ve zıt görüşleri alır, bilimsel görüşü sunmak üzere hareket eder.

Sorular genellikle kapalı veya açık olarak tanımlanır. En etkili olan tür diyalog etkileşiminin başlatılması ve belirtilmesi için açık bir sorunun sorulmasıdır. Kapalı sorular nadiren diyalog etkileşimine neden olur; önceden tanımlanmış cevaplar hedefler. Açık sorular ise, öğrenciden bir şeyler ortaya çıkarır, açıklamalar veya tahminler gibi. Açık uçlu sorgulama da öğretmen tarafından “real” (burada cevabın mutlaka bilinmesi) veya “otantik” (cevabın beklenmemesi) sorgulama ile yapılabilir. Açık sorular, sadece gerçekleri ezberlemenin ötesinde öğrencileri düşünmeye teşvik etmeyi, keşfetmeyi ve yönlendirmeyi amaçlamaktadır. Ayrıca, açık sorgulama daha iyi öğrenme çıktıları ve olumlu tutumlara sebep olmaktadır. Diyalog tartışmaları, öğrenci yorumlarıyla merak sorularıyla veya kapalı bir soruya yanlış cevap verildikten sonra başlatılabilir.

Diyalog yaklaşımı sorularından sonra belli bir bekleme süresinin kullanılması gerekmektedir. Öğrenciler düşünme ve muhakeme gerektiren sorularda, düşünmek verilen yanıtları formüle etmek için yeterli zamana ihtiyaç duyulması gerekir (Lehesvuori, 2013).

Ross (1996) Sokratik eğitimin yükselen bir değer olmasının üç sebebi olduğunu söyler:

1. Çocukların, bilgiyle doldurulması gereken sabit bir kapasiteyle doğduğuna dair eğitim inancı ortadan kalmaya başlamıştır. Entelektüel yetenek şimdi eğitim yoluyla geliştirilebilecek bir dizi beceri olarak görülmektedir. Bazı çocukların diğerlerinden daha kolay eğitilebileceği doğrudur, ancak eğitimin amacı her çocuğun potansiyelini en üst düzeye çıkarmaktır.
2. Toplum artık bir yanda sıradan insanların olduğu, diğer yanda ise uzmanlar ve otoritelerin olduğu kutuplaşmadan uzaklaşmıştır. Giderek artan bir şekilde, eğitimde, öğrencilere ne öğrendikleri hakkında daha fazla soru sorulur ve öğretmenlerden öğrencinin daha aktif ve eşit bir olduğu bir ortamda kolaylaştırıcı bir rol oynamaları istenir.
3. Eğitim kurumlarının üniversiteye gönderilen öğrenci veya mezunların sayısından ziyade, insanları hayata daha fazla hazırlaması gereken kurumlar olması beklenmektedir (Ross, 1996'den akt., Demirci, 2003, s. 123).

Kısaca diyalojik yöntem öğretmenin öğrencilerle karşılıklı iletişim içinde açık uçlu sorularla tartışma ortamı oluşturarak, öğrenciyi aktif hale getirmek suretiyle, konu veya kavramı öğretme yoludur. Bu öğretme ortamında öğretmenin otoriteden uzak olması öğrencinin aktif ve katılımcı olması beklenir.

1. 5. 4. Analoji Destekli Diyalojik Yöntem

Analojik düşünme yöntemi yapısalcı yaklaşımda önemli bir rol alır (English, 1997). Yapısalcı öğrenme teorisi bize öğrencilerin kendi sahip oldukları bilgileriyle ilgili konular hakkında daha fazla bilgi edindiğini söylemektedir. Gerçek öğrenme ve anlama, öğrencinin önceki deneyimlerden kalan bilgi-beceri ve duygularını yeni bilgiye yansıtarak zihninde bir yapı oluşturmasıyla gerçekleşir (Şengül ve Ekinözü, 2006). Yapısalcı öğretim sisteminin temelinde, öğrencilerin okulda öğrendikleri bilgileri günlük hayatla ilişkilendirip yaşantı haline getirmeleri gerekmektedir (Coşkun ve Çetin, 2007). Analojilerde yeni öğrenilen kavramlar, bilinen kavram veya terimler içine yerleştirilirse açıklayıcı bir görev üstlenir. Yaratıcı düşünmede ise var olan problemlere yeni çözüm önerileri ve yeni hipotezler geliştirmeye teşvik etmek gibi görevler üstlenir (Glynn, 1989). Yaratıcı problem çözme sürecinde analojiler hafızanın gerekli bilgiyi bulup getirmesi görevini üstlenir.

> Kavramlar bilgilerin yapı taşlarını, kavramlar arası ilişkilerde bilimsel bilgileri oluşturur. İnsanlar çocukluktan başlayarak düşüncenin birimleri olan kavramları ve onların adları olan sözcükleri öğrenirler; kavramları sınıflar, aralarındaki ilişkileri bulurlar ve böylece bilgilerine anlam kazandırır, yeniden düzenlerler, hatta yeni

> kavram ve yeni bilgiler oluştururlar. İnsan zihnindeki bu öğrenme ve yeniden yapılanma süreci her yaşta sürüp gider. …. (Dilber, 2006, s. 22).

> Kavram bilgisi sadece kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arsındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir. Tek bir kavram kendi başına bir anlam ifade etmez. Kavram kendisinin anlamını taşıdığı grupla ilişkilendirilirse söz konusu kavramla ilgili anlam ortaya çıkar. Kavramın taşıdığı anlam anlaşıldığı sürece kavram bilgisi gerçekleşir. İnsanlar yeni şeyler öğrenirken onları daha önceki bilgileri üzerine inşa ederler. Ne zaman yeni bilgi eski bilgiyle uygun bir şekilde ilişkilendirilebilir ve uzlaştırılabilir ise o zaman söz konusu kavramla ilgili anlama meydana gelir. Zihinde ilişkilendirme gerçekleştiği an söz konusu kavramla ilgili öğrenme de gerçekleşmiş olur. Kavram bilgisini bir zincir halkasına benzetirsek her bir halka bir bilgi içerir. Birbiriyle bağlantılı bilgi genişledikçe mensup olduğu zincir halkası genişleyecek dolayısıyla bağlı olduğu bilgi parçası daha güçlenecektir. ….(Baki, 2018, s. 155).

Her bir halka daha anlamlı olacağından zincirin temsil ettiği kavram anlamlılık kazanacaktır. Kavram bilgisinin genişlemesi bilgi parçaları arasındaki yapı bağlarının artmasıyla meydana gelir. Kavramlar soyutlaştıkça kavramlar arası ilişkileri birleştirme gücü de artmaktadır. (Baki, 2018).

> Kavramlar soyut düşünce birimleri olup, zihinde yapılandırılmaktadırlar. Kavramlar, bireyin zihninde sadece öğrenme ortamında öğretmenler tarafından sunulan bilgiler vasıtasıyla oluşturulmaz. Öğrencilerin öğrenme ortamına gelmeden çevrelerinde meydana gelen olayları yorumlamalarına ve çevrelerinde bulunan diğer bireylerle etkileşim içerisinde bulunmalarına bağlı olarak ta oluşturabilmektedirler. …. (Dilber, 2006, s. 22).

Öğrenci, çevresindeki kişilerle etkileşim içerisinde bulunmak suretiyle de kavramları yapılandırabilmektedir (Dilber, 2006).

Kavramlar geliştirilirken bazı zihinsel süreçlerden geçmektedir. Bunlar:

1. Genelleme süreci: gözlem ve deneyimlerden faydalanılarak genel bir kanıya varma süreci,
2. Ayrım süreci: Varlıkların ve olayların birbirilerine benzemeyen yönlerini görebilmemizi sağlayan süreç,
3. Tümevarım: Özelden genele gitme veya deneyimlerden genelleme yoluyla sonuç çıkarma süreci,
4. Tanımlama: Bilinmeyen bir kavramı bilinen diğer kavramlarla anlatmamıza yardımcı olan süreç,
5. Tümdengelim: Genel halleri inceleyerek özel hallere inmemizi sağlayan süreç olarak sıralanır.

Yukarıdaki ifadelere bakıldığında kavram geliştirmenin bir öğrenme süreci olduğu anlaşılır. Kavramlar öğreniliş yollarına göre üçe ayrılır. Bunlar;

> 1. Bazı kavramlar insanın dış dünyadan duyu organlarıyla aldığı izlenimler sonucunda oluşur. Bazı kavramlar ise, duyu organlarından gelen izlenimler yoluyla, insanın kendi içindeki uyarıcıları algılamasıyla öğrenilir. Bu tür kavramlara “algılanan kavramlar” denir.
> 2. Dış dünyadaki varlıklarla ve olaylarla doğrudan etkileşime giren insan; eşya ve olayların gözlenebilir niteliklerini özetlemeye, açıklamaya, onlara anlam vermeye çalışır. Bu yolla edinilen kavramlara “tanımlamalı kavramlar” denir.
> 3. Bazı kavramlar insanın dış dünya ile doğrudan doğruya etkileşimi ile değil de, zihinsel faaliyetlerle öğrenilir. Bu gibi kavramlar kuramsal bir tanımla açıklandıkları için bu kavramlara “kuramsal kavramlar” denir (Turgut, Baker, Cunnigham ve Piburn, 1997, s. 57).

Sayıların, sembollerin bunlar arasındaki ilişkilerin oluşturduğu matematik soyut bilimdir. Kavramlar soyut olduğu için, öğrenciler tarafından ancak somut deneyler veya materyaller kullanılmasıyla anlaşılabilmektedir. Matematikte kavramlar çok fazladır ve bu kavramlar birbiriyle sıkı bir ağ oluşturur. Bu yüzden matematiksel kavramlar ve bu kavramların öğrenilmesi matematik için çok önemlidir. Yapılan bazı araştırmalar kavram öğrenmenin önemini şöyle sıralar (Ayas ve Demirbaş, 1997):

1. Kalıcı öğrenme işlemsel değil, kavramsal öğrenmedir
2. Öğrenci bilgilerini yeni karşılaştığı durumlara uygulayabiliyorsa o konuyu öğrenmiş sayılır.
3. Öğrencilerin günlük yaşantılarından ve daha önceki deneyimlerinden kazandıkları bilgiler, daha sonra öğrenecekleri bilgiler için önemlidir. Özellikle, yanlış kavramlar varsa, bunların yeni bilgilerin öğrenilmesi üzerine olumsuz etkileri vardır.
4. Kavramsal öğrenmede temel bilgileri kazanmak önemlidir.
5. Öğrencilerin daha önceki yıllarda kazandıkları yanlış anlamalar düzeltilmeden bilimsel olarak kabul edilebilir bir düzeyde kavramsal öğrenme gerçekleşemez.
6. Sınıfta farklı düzeylerde öğrenciler bulunduğu için ve bütün öğrenciler aynı hızla öğrenemediği için öğretmen kavram öğretiminde her düzeye uygun bir öğretim planı yapmalıdır.
7. Kavram öğretiminde basitten karmaşığa doğru hiyerarşik bir sıralama vardır. Öğretmenlerin bu hiyerarşiye uyarak, kavramları belirlemesi daha etkili olur.

Kavramsal öğrenmeyi geliştirmek için pek çok araştırmacı, bilimsel kavramlarla ilgili olarak öğrencilerin hangi kavramlara sahip olduklarını ya da sahip oldukları bu kavramları ne şekilde anladıklarını ve anlam yüklediklerini, bu kavramların sınıftaki öğrenmeyi nasıl etkilediğini bulmaya çalışmışlardır (Weiss, 1994; Demircioğlu,Demircioğlu ve Ayas, 2004).

> Yapılan çok sayıdaki araştırma, öğrencilerin büyük çoğunluğunun temel kavramları, bilimsel anlamlarına uygun olarak anlamada zorlandıklarını, daha çok bu kavramları bilimsel anlamlarından farklı olarak yorumladıklarını ve her kavram için

> bilimsel anlamından farklı olan çeşitli alternatif kavramlar geliştirdiklerini ortaya çıkmıştır. …. (Dilber, 2006, s. 23).

Öğrencilerin matematik konularını öğrenmeleri, matematiksel kavramları inşa edilme yetenekleri ile örtüşmektedir. Matematik öğrenen öğrenciler ancak tam olarak kavrayabildikleri bilgiler üzerine yeni bilgileri inşa edebilirler. Bu süreçte karşılaşılan güçlükler, matematik öğretiminde karşımıza çıkan sorunların en temellerinden biridir. Matematiğin temel kavramlarında meydana gelen zorlanma ve yanlış algılamalar, kavramlar daha karmaşık bir hal aldığında öğrencilerde matematik konularına karşı bezginlik ve ilgisizlik gibi olumsuz duygu ve inanışların gelişmesine sebep olur (Yıldırım, 1993). Bunun ötesinde gelişen hoşnutsuzluk dikkatsizliğe, dikkatsizlik kısıtlı algılamalara ve sonucunda da kavram yanılgılarına sebebiyet verebilir.

Kavram yanılgısı literatürde “ön kavrayış”, “alternatif kavrayış”, “olgunlaşmamış kavrayış” gibi farklı şekillerde ifade edilmektedir. Bu ifadelere bakıldığında önemli iki nokta karşımıza çıkar. Bunların ilki kapalı da olsa, bilimsel olarak kabul edilen bilgiden uzak olan kavramaları ifade etmektedir. Bu anlamda kavram yanılgısı; bir konuda uzmanların üzerinde hemfikir oldukları görüşten uzak algı ya da kavrayış olarak kullanılmaktadır. İkincisi kavram yanılgısının anlaşılmasında önemli olan faktör “kavrayış” terimidir. Zembat’ın (2008) da belirttiği gibi kavram yanılgısı “basit hatadan çok sistemli bir şekilde insanı hataya teşvik eden algı biçimidir” (Bingölbali ve Özmantar, 2010).

> Kavram yanılgısı bir hata veya bilgi eksikliğinden dolayı yanlış verilen bir cevap değildir. Kavram yanılgısı zihinde bir kavramın yerine oturan fakat bilimsel olarak o kavramın tanımından farklı olan bilgi demektir. Öğrenciler, herhangi bir soruda yaptıkları hatanın doğru olduğunu sebepleri ile birlikte açıklıyorlarsa ve kendilerinden emin olduklarını söylüyorlarsa o zaman kavram yanılgıları var diyebiliriz. Yani bütün kavram yanılgıları birer hatadır ama bütün hatalar birer kavram yanılgısı değildir. …. (Eryılmaz ve Sürmeli 2002, s. 1).

Kişisel deneyimler sonucu oluşmuş bilimsel gerçeklere aykırı olan ve bilim tarafından gerçekliği kanıtlanmış kavramların öğretilmesini ve öğrenilmesini engelleyici bilgiler kavram yanılgısı olarak ifade edilmektedir. Kavram yanılgıları sistematik yanlışların bir ürünüdür. “Tüm açıları eşit olan çokgen düzgün çokgendir”. Ya da “Tüm kenarları eşit olan çokgen düzgün çokgendir” gibi aşırı genellemeler kavram yanılgılarına neden olabilir (Baki, 2018).

Brousseau (1976) ve Cornu (1991) öğrencilerin yaşadıkları matematiksel zorlukların ve kavram yanılgılarının üç ana sebepten kaynaklanabileceğini belirtmiştir (Brousseau, 1976 ve Cornu, 1991’den akt., Bingölbali ve Özmantar, 2010, s. 11). Bunlar:

Epistemolojik (Bilgibilimi) Nedenler: Bilginin doğasından yapısından kaynaklanan nedenlerdir. Bunlar kavramın tarihsel gelişimiyle ilgilidir. Bir kavramın tarihsel gelişimi sürecinde bilim insanlarının karşılaştığı güçlükler ve ayrı düştükleri noktalar kavram yanılgısının epistemolojik nedenleridir. Mesela; 17. Yüzyılda yelpaze şeklindeki geometrik şekillerin alanlarını ve elma gibi katı cisimlerin hacimlerini bulmada Johannes Kepler (1571-1630) “sonsuz küçük “ metodunu kullanmıştır. 18. Yüzyıl boyunca sonsuz küçük metotlarla yapılan analizin sağlam kavramsal temellere oturmadığı dönemin matematikçi ve filozofları tarafından çok tartışılmıştır. 18.yüzyılın sonlarına doğru sonsuz küçüklerle yapılan analizden vazgeçilmesi fikri bile doğmuştur. Analizin temelleri üzerindeki arayışlarda Jean le Rond Alembert (1717-17839) limit kavramına ilk defa sonsuz küçüklerden bağımsız olarak matematiksel temellere dayandırmıştır. Ancak limitin en sağlam tanımı Augustin Lous Cauchy (1789-1857) tarafından yapılmıştır (Argün vd., 2014).

Pedagojik (Çocuk Gelişimi) Nedenler: Öğretim modelleri, bu modellerin uygulanışı, öğretmenlerin kullandığı metafor ve analojiler, ders kitapları, konuların sıralanışı gibi nedenler kavram yanılgısının pedagojik nedenleridir. Örneğin öğretmenler tarafından polinom türü ifadelerin limitlerinde yerine yazarak hesaplanan çokça örnekler gören öğrenciler öğretmenlerin bu çözümlerini prototip olarak görüp her gördükleri limitte yerine yazarak limit hesaplama gibi bir kavram yanılgısına sahip olmaktadırlar.

Psikolojik (Ruhbilimi) Nedenler: Genel anlamda biyolojik, bilişsel ve duyuşsal boyutları içeren kişisel gelişimle alakalı nedenlerdir. Öğrencinin kavrama yeteneği, becerisi, bireyin gelişim aşaması, önceki bilgileri ve hazırbulunuşluk düzeyi kavram yanılgısının psikolojik nedenleridir. Örneğin limit kelimesinin kendinden kaynaklı önceki bilgilerine dayanan hız limiti, kredi kartı limiti şeklindeki algıları limit konusunda fonksiyonun da bir sınıra dayandığı şeklinde kavramla alakası olmayan bir kavram yanılgısı oluşmasına sebep olmaktadır.

Graeber ve Johnson (1991) yapmış oldukları çalışmalar sonucu kavram yanılgılarını dört kategoride ele almaktadır (Bingölbali ve Özmantar, 2010; Baki ve Güç, 2014). Bu kategoriler aşırı genelleme (overgeneralization), aşırı özelleme (overspecialization), yanlış tercüme (mistranslation) ve kısıtlı algılama (limited conception) dır:

Aşırı Genelleme: Belli durumlara uygulandığında doğru sonuç veren kural, prensip veya kavramın diğer durumlarda da işliyormuş gibi düşünülmesi ve bu durumlara yayılmasıdır. Örneğin polinom türü fonksiyonların limitlerinde yerine yazarak hesaplamalara dayanarak ve bunu genelleyerek her gördüğü limiti yerine yazarak bulmaya çalışmak.

Aşırı Özelleme: Aşırı genellemenin tersine bir durumdur. Belli durumlarda uygulanan bir kural ve prensibi bu durumun daha özel alt durumu için kısıtlamaktır. Mesela; devirli ondalık sayılarda yuvarlama yapılabilir ancak ondalık sayılar yuvarlanamaz düşüncesi aşırı özelleme türünden bir yanılgıdır. Başka bir örnek sürekli noktalardaki limit örneklerinde limitin değerini fonksiyonun orda aldığı değer olarak gören öğrenciler buradan fonksiyonunu tanımlı olduğu noktalarda bakılan limitler için limit değerini fonksiyonunun orda aldığı değer olarak özelleme yapmaktadırlar.

Yanlış Tercüme: İşlem, formül, sembol, tablo, grafik ve cümle gibi değişik formlar arası geçişlerde yapılan sistemli hatalar zinciridir. Bu tür kavram yanılgısına sahip öğrenci, yazılışı verilen bir sayıyı veya gösterimi doğru okuyamamakta veya benzer şekilde okunuşu verilen bir sayı veya gösterimin yazılışını doğru yazamamaktadır. Örneğin “limit” kelimesini ulaşılması gereken bir sınır olarak tercüme ederek fonksiyonun da bir sınıra ulaşılacağı yanılgısıdır.

Kısıtlı algılama: Bir kavramın kısıtlı algılandığı durumlarda ortaya çıkar. Örneğin devirli ondalık gösterime sahip sayıları sonlu olarak düşünen bir öğrenci, devreden kısmın sonsuza kadar gittiğini ihmal etmekte yani devirli sayıları kısıtlı olarak algılamaktadır. Başka bir örnek olarak limitin temel kavramı olan yığılma noktası kavramını göz ardı ederek yığılma noktası olmayan noktalarda limit alarak yanılgıya düşmesidir.

Kavramları öğrenmede etkili bir yol olarak kullanılan analojilerin kavram yanılgılarını gidermede de etkili olduğunu düşünmekteyiz. Nitekim yapılan bazı çalışmalarda bu düşüncemizi desteklemektedir (Duru, 2002; Gürdal, Şahin ve Çağlar, 2001). Ancak analojilerin bazı dezavantajları da vardır:

Analojiler dikkatli ve özenli kullanılmadığında öğrenme açısından dezavantajları ortaya çıkabilmektedir (Duit, 1991). Bu dezavantajlardan bazıları;

1. Bir analojide analog ile hedef kavram arasında tamamıyla uyum olmayıp, farklı özellikler olabilir. Bu özellikler öğrencileri yanıltabilir.
2. Öğrencilerde analog alanda kavram yanılgıları varsa, tasarlanan analojiler öğrenciler tarafından resmedilmez ve analojik muhakeme gerçekleşmez.
3. Öğrenciler hedef kavramayı daha önceden biliyorlarsa analojileri gereksiz bilgi olarak görebilir.
4. Öğrenciler analojinin kullanımında yatan anlamı düşünmeden analojiyi mekanik olarak kullanabilir. Her analoji sınırlıdır. Asla hedef içeriği tamamen tanımlayamazlar. Öğrenciler ise hedef içerik hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları için ya analojiyi gerçek bir bilgiymiş gibi düşünecek ya da çok farklı anlamlar yükleyebilir.
5. Öğretmenler tarafından yapılan analojiler öğrenciler için alışmadıkları veya anlayamadıkları durum haline gelebilir. Bu durum karışıklığa neden olup konunun yanlış anlaşılmasına yol açabilir (Efe, 2018).

Analojilerin bu sınırlılığı başka bir yöntemle desteklenmesi gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Sınıfta öğretmen analoji kullandığında öğrencide oluşan anlamaları ortaya çıkarmak, olası yanılgıları önlemek ve varsa kavram yanılgılarını gidermek için analojilerin diyalojik yöntem ile kullanılmasının uygun olacağını düşünmekteyiz.

İlk ve ortaokul yıllarında bilim öğrenmek için gerekli kavramsal gelişme ve ilerleme başlamıştır. Öğretmenler bu ilerlemeyi kolaylaştırmak için kavramları verirken, somut modeller ve analojiler kullanırlar. Kavramlar bilginin yapı taşları olduğuna göre, öğrencilerin bilgiyi yapılandırma sürecinde öncelikle kavramları sağlıklı bir biçimde kazanmaları gerekir. Bu durumu sağlayan ve kavram öğretiminde modern yöntemlerden biri olarak nitelenen yaklaşım “Soru cevap (Sokratic-diyalojik) yöntemi” dır (Canpolat ve Pınarbaşı, 2002).

Bu çalışmada analojilerle limit konusunu öğrenmede zengin bir öğrenme ortamı oluşturmayı, öğrencilerin diyalojik yöntemle limit konusunun öğreniminde sorgulayıcı, aktif katılımcı, düşüncelerini rahatlıkla ifade edebileceği varsa kavram yanılgılarını giderebileceği bir ortam oluşturmayı amaçladık. Bu ortamda, geliştirilen analojiler üzerinden sorgulayıcı sorular ve öğrencilerden gelen cevaplara yönelik tekrar sorular sorularak analoji ile kavram ilişkisi kontrol altında tutma sağlanmıştır. Böylece öğrenciler analoji destekli diyalojik yöntemle limit konusunu öğrenirken, öğrencilerdeki anlamalar ve kavram yanılgıları ortaya çıkacak, farklı bir bakış açısıyla limit konusunu öğrenecek ve kavram yanılgılarını gidermeleri için fırsat bulacaklardır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Bu kısımda limit, analoji ve diyalojik yöntem ile ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

2. 1. Limit ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Matematiğin soyut yapısı bazı kavramların anlaşılmasını ve zihinde şekillenmesini zorlaştırmaktadır. Limit kavramı bu kavramlardan biridir. Geçmişten günümüze kadar limit kavramı ile ilgili yapılan bazı çalışmalar şunlardır:

Tall ve Vinner, (1981) bir İngiliz üniversitesinde yapılan ankette öğrencilerin asagıdaki soruyu nasıl analiz ettiklerini araştırmışlar.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$$

limitini hesaplayınız, limitin bir tanımını veriniz.

0,999…. = 1 olup olmadığını, cevabınızın sebebini de vererek, söyleyiniz.

Bu soruda 36 öğrencinin sadece 14'ü (%39) dogru cevap olan 2 cevabını vermisler fakat bu ögrenciler yanlıs olarak 0,999…'un 1'den küçük olduğunu söylemislerdir. Bir sonraki testte, aynı öğrencilerden aralarında 0,333… ve 0,999… gibi sayılar da olan bazı ondalık sayıları kesir olarak yazmaları istenmistir. Daha önce 0,999…<1 diyen 14 öğrencinin 13'ü bu kez 0,999…=1 cevabını vermislerdir. Öğrencilerin cevaplarında sıklıkla bir bilissel çelişki içerisinde oldukları görülmüştür. Tall ve Vinner buna potansiyel bilissel çelişki adını vermistir. Çünkü bu 14 öğrenci ilk testte hatalı cevap vererek potansiyel bir bilissel çelişki isareti göstermisler, ancak ikinci testteki cevapları ile bunun gerçek bir bilissel çelişki olmadığını göstermişlerdir.

Gerçek bir bilissel çelişkiy sahip öğrenciler benzer örneklerde hatalı cevap verme eğilimlerini devam ettirmişlerdir. Örneğin bir dizinin hiçbir teriminin dizinin limitine eşit olamayacağını savunan dört öğrenci, 0, 1/4, 0, 1/8, 0, 1/12, . . . veya

$$S(n)=\begin{cases}0, & n\ tek\ ise\\ \frac{1}{n}, & n\ çift\ ise\end{cases}$$

gibi limiti ile bazı terimlerinin eşit oldugu örnekler ile karşılaştıklarında bu dizilerin reel dizi tanımına uymadığını savunmuşlardır. Hâlbuki bu diziler de formal dizi tanımına uygundur. Burada, öğrencilerin kavram imajları ile kavram tanımı arasında bir bilişsel çelişki içinde olduğu görülmektedir. Bu, üniversite öğrencilerinin birçoğunda görülen bir durumdu. Bu durum öğrencilerde kavram görüntüsünün kuvvetli ancak kavram tanımının zayıf olduğunu göstermektedir. Son olarak Tall ve Vinner, daha önce A-seviyesini geçmis ya da lisedeyken B-seviyesinde matematik dersi almıs, 70 üniversite 1. sınıf öğrencisine bir anket uygulamıştır. Öğrencilerden öncelikle

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$ =3

ifadesinin ne anlama geldiğini açıklamaları istenmiştir.

Sonra da $\lim_{x\to a} f(x) = c$ ifadesinin tanımını bildikleri gibi yazmaları istenmiştir. Dogru formal tanımı veren yalnızca 4 öğrencinin de 1'i örneğe dinamik yaklaşım ile cevap vermistir. Yanlıs formal tanım veren 14 öğrencinin de yalnızca 4'ü örnek için formal tanımlamalarını kullanırken, 10 tanesi dinamik yaklaşımla örneği cevaplandırmışlardır. Bu ögrenciler için, tanımın zihinlerinde farklı bir görünüm, kavramın ise daha farklı bir görünüm olusturdugunu anlayabiliriz. Öğrencilerin limit kavramının tanımının zihinlerinde oluşturduğu görüntü ile çatısma halinde olduğu bu çalışmada ortaya çıkmıştır.

Davis ve Vinner (1986) Urbana'daki bir lisede son sınıf öğrencileri ile limit ve süreklilik kavramları üzerine bir çalışma yapmışlardır. Davis ve Vinner bu çalışmaları ile öğretimdeki değişikliğin umdukları kadar başarıyı etkilemediğini tespit etmişlerdir. Davis ve Vinner, bekledikleri sonucu alamayınca, öğrencilerde limit ve süreklilik kavramlarının nasıl geliştiğine dair bir çalışma yürütmüşlerdir. Öğrenciler genel matematik dersinin ilk senesinde, teorem ispatlamada, tanımları ifade etmede, hatalı tanımlara yönelik örnekler üretmede önemli bir ilerleme kaydetmişlerdir. Daha sonraki okul yılının ilk gününde, 15 öğrenciye kendi sezgileri ile bir dizinin limitini tanımlamaları ve tam bir formal tanım vermelerini istemişlerdir. Öğrenci cevaplarının, bir yıl önce göstermiş oldukları anlayışları yansıtmadığını görmüşlerdir. Araştırmacılar, öğrencilerin yeni bir kavram öğrenmelerine rağmen, bu kavram ile ilgili eski zayıf bilgilerini kullanma eğilimi içinde olduklarını, limit ile ilgili soruları okulda öğrendiklerini kullanarak değil, eski zayıf bilgilerini kullanarak cevapladıklarını gözlemlemişlerdir. Davis ve Vinner (1986) öğrencilerin kavram yanılgılarını 9 kategoriye ayırmıştır:

1. Dizinin hiçbir zaman limit değerine ulaşmadığı,
2. Tam monoton bir dizi ise günlük hayattaki anlama sahip olan "limit değerine yaklaşma" ifadesine göre dizilerin hep monoton dizi olduğu,
3. Limiti sınırla karıştırma (her dizisi için limitin alt ya da üst sınır olması),
4. Dizinin her zaman "son" terime sahip olduğunu,
5. Verilen bir dizi için onlara "hemen hemen tüm terimlerinin limit değerine gittiğini" söylendiğini varsayma,
6. f(x_0) ile $\lim_{x\to x0} f(x)$ ifadelerini karıştırma,

7. Dizilerin açık ve uygun bir deseninin veya basit bir cebirsel formülünün olduğunu varsayma,
8. Geçici sıranın son derece önemli olan rolünü ihmal etme (İlk önce bir N değeri seçme ve n > N, L − ε ≤ an ≤ L + ε ∀ε > 0 için doğru olacağını bulma),
9. n'in sonsuza yaklaşmaması gerçeği ve dizisinin L sayısına yaklaşıp yaklaşamayacağı sorusunu karıştırmadır.

Sierpinska (1987) "Beşer Olarak Öğrenciler ve Limit ile İlgili Epistemolojik Engeller" adlı bir çalışma yapmış, bu çalışmasında seçtiği bir grup öğrencide, sonsuz kavramı ve fonksiyon kavramı ile ilgili bilgi eksiklikleri olduğunu ortaya çıkarmış ve limitle ilgili eksikliklerin bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ve reel sayı kavramından kaynaklı olduğunu vurgulamıştır.

Williams (1991), bir üniversitede genel matematik kursuna katılan 341 öğrenciyle kısa bir anket çalışması yaptı. Öğrencilerden, limite ilişkin 6 ifadenin doğru veya yanlış olduğunu ve hangi ifadenin limiti en iyi tanımladığını belirtmeleri istenmiştir. Ankete katılanlar arasından beş öğrenci, özellikle informal tanım yapanlardan seçildi ve her katılımcıyla 7 hafta boyunca 5 er görüşme yapıldı. Görüşmeler sırasında her birinin yarım saati vardı. Daha sonra mevcut kavramlarındaki zorluklara dikkat çeken limit problemleri üzerinde çalıştılar. Öğrencilerle yapılan son toplantıda, limit hakkındaki görüşlerini neden değiştirdiklerini veya neden değiştirmediklerini sordular. Williams'a göre öğrenciler basit ve pratik limit modellerini matematiksel tanımlardan daha önemli buluyorlardı. Çünkü öğrenciler için basit ve pratik limit modelleri sınavlarda başarılı olmak için yeterli sayılmaktadır. Öğrenciler işlemsel bilgilere (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırıma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L"Hopital kuralını uygulama gibi…) kavramsal bilgilerden daha fazla önem vermekteydi

Monaghan (1991) "Limit Kelimesinin Algılanmasıyla İlgili Problemler" adlı çalışmasında limit öğrenimi ve öğretimi sırasında kullanılan dilin etkisi üzerinde çalışmıştır. Çalışma sonucunda limit kelimesinin çoğunlukla öğrenciler tarafından bir "sınır" olarak düşünüldüğü görülmüştür. "Yaklaşma" kelimesinin, bir şeyin başka bir şeye doğru ulaşma ile hareket etmesi, "yakınsama" kelimesinin ise öğrenciler tarafından iki sürekli nesnenin birleşmesi olarak algılandığı görülmüştür.

Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) ikisi bir lisede ileri seviye genel matematik dersi alan, üçü de bir üniversitede ilk dönem genel matematik dersi görmekte olan 5 öğrenci ile görüşme tekniğini kullanarak bir çalışma yürütmüşlerdir. Lauten ve diğerleri (1994) çalışmalarında öğrencilerin, fonksiyon ve limit kavramlarını ve bu kavramların birbiriyle ilişkisini nasıl gördüklerini keşfetmeyi amaçlamışlardır. Çalışma sonucunda

Lauten vd., (1994) öğrencilerin limit hakkındaki kavram görünümünün formal tanımdan uzak, dinamik bir görünüm sergilediğini, rapor etmişlerdir.

Dubinsky ve diğerleri (1996) limit kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ile ilgili literatür çalışmalarının sentezini içeren bir çalışma yaptılar. Bu çalışmada limitin informal ve dinamik olarak algılanması üzerindeki görüşleri değerlendirmişler ve dinmik kavrayışın öğrenciler tarafından daha kolay algılandığına ve bu kavrayışın formal tanımı yapılandırma yönünde bir engel olarak görüldüğünü belirtmişlerdir. Dubinsky ve diğerleri (1996) limite dinamik yaklaşım APOS teorisindeki şema gibi algılanmalıdır. Onlara göre dinamik yaklaşım formal tanımı yapılandırma yönünde önemli bir basamaktır. Dubinsky ve diğerleri (1996) limit kavramını 6 basamakta aşağıdaki şekilde yapılandırmayı önermislerdir;

1. Bir $x=a$ değerine yakın, ardışık birkaç noktada fonksiyonun değerinin belirli bir değere her seferinde daha yakın olduğunu hesaplama,
2. Birinci basamakta uygulanan işlemi, x, a'ya yaklaşırken $f(x)$'in, L'ye yaklaşması seklinde tek bir işlem olarak içselleştirilmesi,
3. Bu aşamada limitin özellikleri, faaliyetlerin uygulanacağı bir nesne haline gelir.
4. İkinci basamağın aralık ve eşitsizlikler cinsinden yeniden yapılandırılması sürecidir.
5. Formal tanımdaki geçen her ε pozitif sayısı ve her δ pozitif sayısı kavramlarının daha önce yapılandırılan yaklaşım kavramı ile bağlantısının kurulup özümsenmesi ve ε- δ tanımının yapılandırılması.
6. Özel durumlar için ε- δ tanımının uygulanması.

Hofe (1998) öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları problemleri tespit etmeyi amaçlayan bir çalışma yapmıştır. Çalışmasının sonucunda ana problemin; matematiksel içeriğin grafik ve aritmetik temsilleri, işlem ve nesne, statik ve dinamik yorum ve sezgisel fikirler ile matematiksel özellik alanlarında yaşandığı sonucuna varmış ve normal bir genel matematik dersinde bu alanlara daha fazla önem verilmesi gerektiğini belirtmiştir.

Szydlik (2000) "Matematiksel İnançlar ve Bir Fonksiyonun Limitini Kavramsal Anlama" adlı çalışmasında öğrencilerin Analiz dersini hatırlanan ve uygulanan yöntemlerin bir koleksiyonu olarak gördüğünü ve bu yöntemlerin altında yatan teoriye değer vermediklerini ve bunları anlamaya çalışmadıklarını ortaya çıkarmıştır.

Bezuidenhout (2001) öğrencilerin kavram imajlarının karakteristiklerini ve doğasını araştırmak için üç aşamadan oluşan bir çalışma yapmıştır. Çalışmanın ilk aşamasında 107 üniversite birinci sınıf mühendislik öğrencisine ön testler yapmıştır. Testler 1994 yılının ikinci döneminin sonuna kadar tüm sınıfa uygulanmıştır. Ön testten elde edilen sonuçların analizine göre iki kısımdan oluşan bir diagnostik test hazırlanmıştır. Güney

Afrika'daki 3 üniversitenin mühendislik ve fizik bölümlerinden toplam 523 öğrenci 1995 yılının ikinci döneminde çalışmanın ikinci aşamasına katılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğrencilerden 15'i seçilerek görüşmeler yapılmıştır. Görüşme yöntemiyle öğrencilerin birçok kavram yanılgısı olduğu saptanmıştır. Çalışmanın sonunda öğrencilerin "limit", "süreklilik" ve "diferansiyellenebilme" kavramlarını anlamalarının ve kavramların bilgilerinin gerçeklerden uzak ve eksik yöntemlere dayandığı bu kavramlar arasındaki ilişkiyi tam kuramadıkları bulunmuştur.

Todorov (2001) "Klasiğe Dönüş: Sonsuz Küçüklerle Limit Öğretimi" adlı çalışmasında; limitin ε-δ ile verilen klasik tanımına alternatif olarak, tahmini bir limit değer gerekmeksizin L limitinin tek olarak belirlenebileceğini gösteren yeni bir limit tanımı vermiştir.

Przenioslo (2004) bir üniversitenin matematik bölümünde okuyan 2. sınıf öğrencilerinin limit kavram görüntüleri üzerine bir çalışma yürütmüştür. Çalışmada öğrencilere komşuluklar, yaklaşım, bir noktada tanımlı olma, fonksiyonun bir noktadaki limiti kavramları üzerine odaklanılmış açık uçlu soruların ağırlıkta olduğu bir sınav uygulanmıştır. Önemli sonuçlardan biri olarak, öğrencilerin bazı kavramları tanımlama ile ilgili soruları doğru cevaplandırdıkları, ancak bunları problem çözümlerinde uygulamaya aktarma konusunda sıkıntı yaşadıkları gözlenmiştir.

Barbé ve diğerleri (2005) tarafından yapılan bir araştırma sonucuna göre öğrencilerin, limit kavramını oluşturmada yaşadıkları sorunların,

1. Fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamada,
2. Fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olduğunu göstermede,
3. Limitin fonksiyonla ilişkisini kurmada ortaya çıktığını göstermektedir.

Jordaan (2005) ise, 47 mühendislik öğrencisiyle limitteki kavram yanılgılarıyla ilgili yaptığı çalışmada 5 açık uçlu ve doğru yanlış sorularından oluşan bir teşhis testi ile yarı yapılandırılmış 6 sorudan oluşan bir görüşme gerçekleştirmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin:

1. Limiti bir sınırlılık olarak gördüğü,
2. Limiti fonksiyonunun ulaşamadığı değer olarak algıladıkları,
3. Bir fonksiyonun limitinin kesinlikle bir nokta olacağını düşündükleri,
4. Fonksiyonun tanımlı olduğu noktada mutlaka limitinin olduğu,
5. Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa o noktada sürekli olduğu ve 0/0 belirsizliğini 0 buldukları,

şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Queseda ve diğerleri (2008) yaptıkları bir çalışmada kendi öğretim deneyimleri sonucunda öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları zorlukları şu şekilde belirtmektedirler;

1. Formal tanım içerisindeki sembollerin kullanımının ve bu sembollerin limitin varlığının ispatında nasıl kullanılacağının öğrenciler tarafından anlaşılamaması,
2. Öğrencilerin daha önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel gösterimleri arasındaki ilişkiyi anlamaya imkan sağlamaması. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması,
3. Öğrencilerin limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulma ve ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleyip eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması olarak belirlenmiştir.

Bukova (2006) 60 matematik öğretmen adayı ile limit konusunda yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile uyumlu öğrenme ortamını incelemek için bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada oluşturulan yapısalcı öğrenme ortamının limit konusunun öğrenilmesinde olumlu katkıları olduğu ortaya çıkmıştır. Bir sınır oluşturma kavramının olumlu bir hale getirdiği gösterilmiştir. Deney grubunun hayatı okulla ilişkilendirerek, öğrenmeyi öğrenme ve iletişim kurarak öğrenmenin kontrol grubundan daha olumlu olduğu ve iki grup arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğu tespit edilmiştir. Ancak, deneklerin matematiğe yönelik tutumları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Deneklerin limit kavramı ile günlük yaşam arasında bir ilişki kurabildiği, limit kavramını farklı yönleriyle tanımlayabildiği ve limit kavramının görsel yapıdaki anlamını tecrübe ettiği tespit edilmiştir. Ancak, delta-epsilon yaklaşımını kullanarak, fonksiyonun bir noktasında limitinin varlığını kanıtlamanın zor olduğu bulundu. Deney grubundaki deneklerin matematiksel düşünme gelişim düzeylerinin kontrol grubundaki deneklere göre daha yüksek olduğu belirlenmiştir.

Kabaca (2006) limit kavramının ögretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinden Maple programının kullanımının etkilerini inceleyen bir çalışma yapmıştır. 15 er kişilik 2 grup öğretmen adayıyla yaptığı çalışmasında Maple kullanan grubun diğer gruba göre daha yüksek bir kavramsal anlama düzeyine ulaştığı tespit edilmiştir. Maple desteğinin, matematiğe yönelik tutuma anlamlı düzeyde olumlu bir etkisinin olduğu belirlenmiştir. Yapılandırmacı öğretim prensipleri doğrultusunda kazandırılması hedeflenen ileri düzey matematiksel becerilerin öğretilmesi amacı ile tasarlanan öğretim ortamında Maple kullanımı öğrencilerin daha iyi motive olmasını sağladığını tespit etmiştir.

Barak, (2007) 106 öğretmen adayının limit konusundaki kavram yanılgıları tespit etmek amacıyla yapmış olduğu bir çalışmada hata ve kavram yanılgıları şu kategoriler altında toplanmıştır:

1. Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı ile ilgili kavram yanılgıları,
2. Limit kavramı tanımı ile ilgili kavram yanılgıları,

3. Fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı ile ilgili kavram yanılgıları,
4. Sağ ve sol limit kavramları ile ilgili kavram yanılgıları,
5. Limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki ile ilgili kavram yanılgıları,
6. Fonksiyonun bir noktada tanımlı olması ile ilgili kavram yanılgıları,
7. Fonksiyon grafiklerinin çizimi ve
8. ∞ kavramının anlaşılamaması ve işlemlerde kullanılamaması

Dönmez (2009) 4 öğretmen adayının mikro öğretimle belirlediği kavram yanılgılarını tespit etmiştir. Limiti günlük hayattan örneklerle açıklarken ulaşılmaya çalışılan ama hiçbir zaman ulaşılamayan nokta olarak açıklamışlar veya hız ve kredi kartı limitiyle özdeş tutmuşlardır. Matematikteki limit kavramını günlük hayattaki limit kavramı gibi algılamışlardır. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı limit kavramını yaklaşma kavramıyla ilişkilendirerek açıklamışlar ve kendilerinden bir çizim yaparak limiti anlatmaları istendiğinde genel olarak her noktada sürekli bir fonksiyon grafiğini çizmişler veya bir nokta seçip o noktaya sağdan ve soldan yaklaşmayı göstermişlerdir. Alan Bilgisi Anketi sonucunda öğretmen adaylarının limit alınan noktada ilgili fonksiyonun tanımlı ve sürekli olması gerektiği yönünde bir kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür. Benzer şekilde öğretmen adayları $x \to \infty$ için limitin 0'a eşit olması durumunda $f(\infty)=0$ yazılabileceğini belirtmişlerdir. Her ne kadar öğretmen adayları tek parçalı bir grafiğe sahip fonksiyon için sürekliliği incelerken sorun yaşamasalar da, parçalı fonksiyon olması durumunda hatalı sonuçlara ulaşmışlardır. Ayrıca, bazı öğretmen adayları, verilen fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesinde, verilen aralıkta fonksiyonun grafiğinin kağıt üzerinden kalem kaldırılmadan çizilebilmesini fonksiyonun sürekli olması için bir yöntem olarak görmektedir. Diğer yandan, sonsuz kavramını algılamakta öğretmen adaylarının zorlanmaları, tanımsız ve belirsiz kavramları arasındaki farkı ayırt edemedikleri görülmüştür. Bununla birlikte, öğretmen adayları bir fonksiyonun limitini, fonksiyonun olabildiğince yaklaştığı; ancak hiçbir zaman ulaşamadığı bir değer olarak görmektedirler. Bu kavram yanılgısına sahip olan öğretmen adaylarının ders anlatımlarında limiti açıklarken de bu yanlış ifadeler kullandıkları görülmüştür.

Biber, (2010) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlardaki sahip oldukları kavram bilgileri ile çok değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırmak amacıyla bir çalışma yapmış bu çalışma sonucunda, adayların çok değiğkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgilerini yapılandırırken, tek değiğkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgilerini matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde kullanırken sıkıntılar yaşadıklarını tespit etmiştir.

Baki ve Çekmez (2012) yaptıkları bir çalışmada geleneksel olarak yürütülen analiz dersleri sonucunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik geliştirdikleri anlamaları ortaya çıkarmayı amaçlanmışlardır. Bu amaçtan hareketle Analiz 1 dersini alan ve başarıyla tamamlayan 112 öğretmen adayına, alan uzmanlarının görüşleri alınarak ve literatürde yer alan araştırmalar incelenerek hazırlanmış açık uçlu ve çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir test uygulamışlardır. Araştırma sonucunda öğretmen adayların limit tanımının grafiksel gösteriminde, tanım içerisindeki değişken ve eşitsizliklerin anlaşılması ve yorumlanmasında sıkıntılar yaşadıklarını ortaya koymuşlardır.

Kabael ve diğerleri (2015) tarafından tek değişkenli fonksiyonlar için limit kavramıyla ilgili öğrencilerde bulunan kavram imajları, kavram tanımları ve öğrencilerin sahip oldukları bu kavram imajları ile limitin matematiksel olarak ifade edilen tanımını nasıl ilişkilendirdiklerini ortaya koymayı amaçlayan bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada; öğrencilerin limit kavramına yönelilk kavram imajlarında, kavramlara ilişkin tanımlarında, sağ ve sol limitlerin eşitliği teoremi ile limitin dinamik form baskın olmuştur. Öğrencilerin limitin matematiksel tanımını anlama ve uygulamada zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin soruları çözerken sahip oldukları kavram imajlarını kullandıkları görülmüştür. Bunun yanında öğrencilerin genel olarak kavram imajları ile limitin matematiksel tanımı arasındaki ilişkiyi doğru kuramadıkları belirtilmiştir.

Akbaş (2016) tarafından yapılan çalışmada MYO öğrencilerinin bir BCS yazılımının kullanıldığı ortamda limit-süreklilik konusunu nasıl öğrendiklerini anlamak amaçlanmıştır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen bu çalışmada MYO öğrencilerinin gözlenen öğrenme çıktıları değerlendirilirken ve yorumlanırken SOLO taksonomisi tercih edilmiştir. Çalışma meslek yüksekokulunda Bilgisayar Teknolojileri Programı'nda öğrenim gören 32 ön lisans öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırma süresince uygulanan çalışma yaprakları (bu çalışma yapraklarındaki öğrenci notları), öğrencilerin bilgisayar ekran çıktıları (Derive yazılımı üzerinde yaptıkları çalışmalar), gözlemler, gözlemler esnasında araştırmacı öğretmenin tuttuğu notlar ve öğrencilerle gerçekleştirdiği diyaloglar bu çalışmanın veri kaynaklarını oluşturmuştur. SOLO taksonomisinin kullanılmış olması nedeniyle belirlenen araştırma problemine cevap aranırken MYO öğrencilerinin her bir kazanıma ilişkin öğrenme çıktılarının SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiği hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Araştırmaya ait bulgular, SOLO taksonomisi ile değerlendirilen MYO öğrenci cevaplarının çoğunun limit-süreklilik konusuna ilişkin ilişkilendirilmiş yapı seviyesi altında yer aldığını göstermiştir. Bu durum sahip oldukları bilgi ve becerileri tutarlı bir yapı içinde bütünleştiremedikleri anlamına gelmektedir. Ancak BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamı MYO öğrenci cevaplarını hedeflenen öğrenme seviyesine ulaştırmamış olsa da cevapların genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelişim göstermesine katkı sağlamıştır. Bu sonuçlar ışığında MYO öğrencilerinin seviyesi dikkate alınarak matematiğin soyut kavramlarının öğretiminde BCS yazılımları gibi dinamik görsellerden, görsel öğeleri ve sözel iletişimi destekleyen etkinliklerden faydalanılması önerilmektedir.

Winarso ve Toheri (2017) tarafından, Endonezya'daki lise öğrencilerinin limit konusunda sahip oldukları kavram yanılgılarının ve eğilim düzeylerinin ne olduğunu tespit etmek için bir çalışma yapıldı. Nitel araştırma olan bu çalışmada 11.sınıftan 16 öğrenci çalışmaya katıldı. Kullanılan veri toplama teknikleri, yazılı sınav ve kavram yanılgısı olan öğrencilere mülakat yöntemidir. Test cevapları, öğrenci mülakatları ve literatür sonuçları üçgenleme tekniği ile analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre;

1. Öğrencilerin % 12,18'i kavram yanılgısına sahiptir. Öğrencilerin % 40,38 kavramı anlamamıştır. Kavramı anlayan öğrenciler ise % 47.44 dir.
2. Öğrencilerin % 20.51 fonksiyonun bir noktada aldığı değerin o fonksiyonun limiti olduğu yönünde eğilim gösterdiler. Bu öğrencilerle yapılan mülakat sonucunda limit değeri 0 ise bu fonksiyonun bir limitinin olmadığına karar verme şeklinde yanılgıya sahip oldukları görüldü.

Oktaviyanthi ve Dahlan (2018) bir fonksiyonun limitini değerlendirmek için bir çalışma sayfası nasıl geliştirilir sorusuyla yola çıkarak Limit konusunda “Cognitive Apprenticeship (Bilişsel çıraklık)” öğrenme yaklaşımına dayalı bir öğretim materyali geliştirmişlerdir. Artikülasyon, yansıma ve keşfetme etkinlikleri içeren bu çalışma sayfası tasarımı, öğrencilerin

1. Bir fonksiyonun limiti kavramınının resmi tanımı ve
2. ε-δ kullanarak bir fonksiyon limitini belirleme ve değerlendirmeyi içerir. Bu çalışma sayfasının hedefleri şunlardır:
   a) Bir fonksiyonun sınır tanımının biçimsel yapısını anlamada öğrencilerin, düşünce akışını yönlendirme adımları
   b) Öğrencinin yönlendirilmesi ve yanlış anlamalardan kaçınması için çalışma adımları
   c) Sınırın resmi bir tanımını kullanarak limiti değerlendirme.

Yapılan çalışmalar limitin formal tanımında öğrencilerin karşılarına çıkan sembollerin ve matematiksel ifadelerin anlaşılamamasından kaynaklı olduğunu göstermektedir. Analizin önemli konularından biri olan limit konusuyla ilgili çalışmalar devam etmektedir. Limit konusu türev ve integral konusunu çalışmak için ön hazırlıktır (Baki, 2018).

Son yıllarda müfredatta yapılan değişikliklerle düz anlatım veya soru-cevap yöntemlerini geride bırakacak pek çok yöntem ve teknik uygulanmaya başlanmıştır. Bu yöntem ve teknikler matematiği tek-düze, sıkıcı, anlaşılması zor halinden kurtarma çabalarıdır. Konuların açıkça öğrenilmesi, öğrencilerin cesaretlendirilmesi ve kendine özgü bilgilerin oluşması analojilerle sağlanabilir.

2. 2. Analojilerle Yapılan Çalışmalar

Analoji ile öğretim öğrencilerin performansını artırmak, konuların açıkça öğrenilebilmesi için öğrencileri cesaretlendirmek amaçlı kullanılır. Analoji kullanımının önemi yapılar arasındaki ilişkileri bize açıkça göstermesi ve kanıtlamasıdır. İlk önce çocuklar somut analojiler ile genelleştirilmiş bir özelliği ya da içeriği açıklama konusunda kendilerine güven kazanırlar. Sonra düşündükleri bu obje ile soyutlaştırmaya yelken açarak genel konuya hakim olurlar. En sonunda da sembolik sayıları kavramları kendi zihinsel modelleri haline getirirler (English, 1997).

Analojiler matematik öğretiminde çok fazla kullanılmasa da fen öğretiminde en çok başvurulan öğretme modelleri arasında olmaktadır (Sağırlı, 2002). Glynn ve diğerleri (1996), analojilerin nasıl kullanılacağına rehberlik etmesi için analoji ile öğretme modelini geliştirmişlerdir. Bu modelde kaynak kavramdaki özelliklerin, hedef kavrama transfer edilmesi amaçlanmıştır. Ancak kaynak ve hedef kavram arasında benzer özellikler paylaşılması duurmunda bu kavramlar arasında analoji kurulabileceğine dilkkat çekilmiştir (Şenpolat, 2005).

Glynn ve Takahashi (1998), "Analoji destekli bilimsel metinlerden öğrenme" adlı yapmış oldukları bir çalışmada analoji destekli bilimsel metinlerin ortaokul öğrencilerinin ana konuları öğrenmelerine yardımını değerlendirmeyi amaçlamışlardır. Araştırmanın örneklemini 8.sınıflardan 58 ve 6. sınıflardan 32 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada, fen bilgisi dersinde fabrika ile hayvan hücresi arasında analoji kullanılmış olup, uygulamanın sonucunda hem 6. sınıflarda hem de 8. sınıflarda ayrıntılı analojilerden fayda sağlandığı görülmüştür. Ancak 6.sınıflarda, 8. sınıflara oranla daha fazla fayda sağlandığı belirtilmektedir. Bu farkın 6. sınıf öğrencilerinin gelişimsel dönem farkından kaynaklanabileceği belirtilmiştir. Somuttan soyuta geçiş döneminde olan 6. Sınıf öğrencilerinin daha az tanıdık olan kavramların öğrenilmesinde analojinin soyut-somut kavramlar arasında köprü oluşturarak öğrenmelerine imkan sağladığı ve öğrencilerin sezgisel üretici (reflective) düşünme kabiliyetlerini geliştirdiği belirlenmiştir.

Analoji ile öğretim modelinin temeli altı işleme dayanır. Fotoğraf makinesi ve insan gözü arasında kurulan analoji ile bu altı işlem şu şekilde verilmektedir.

1. Hedef kavramın tanıtılması (insan gözü),
2. Analoji çıkarılması için ipuçları verilmesi (fotoğraf makinesi)
3. Analoji ve hedef durumun benzer özelliklerinin tanıtılması (retina ve film),
4. Benzerliklerin gösterilmesi,

Fotoğraf Makinesi İnsan Gözü

(Kaynak Kavram)	(Hedef Kavram)
Lens	Lens
Diyafram	İris
Film	Retina
Ters görüntü	Ters Görüntü

5. Analojilerin nerede geçersiz olduğunun gösterilmesi,
6. Sonuçların belirtilmesi (Duru 2002; Şenpolat 2005).

Eğitimciler analojilerin öğrenmeyi kolaylaştırdığı, anlamlı ve tam öğrenmeyi gerçekleştirdiği, yanlış öğrenmeyi düzeltmede etkili olduğu görüşünde birleşmektedirler (Duru, 2002).

Analojiler, aşina olunan bir durumla, aşina olunmayan bir durum arasındaki benzerlikleri vurgularken, kullanılan örnekler o kavramın özelliklerini gösterir (Treagust, Duit, Joslin ve Lindauer, 1992).

Gürdal ve diğerleri (2001) yapmış oldukları bir çalışmada, öğrencilerin kavram yanılgısına sahip oldukları konuları benzetmeler kullanarak yeniden anlatmışlar bu yolla öğrencilerin kavram yanılgılarını düzelttiklerini tespit etmişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin dağınık ön bilgilerini benzetmeler(analojiler) yoluyla düzelttiklerini görmüşlerdir.

> Ayrıca analoji kullanılması, konu hakkında yeni soruların ortaya çıkmasına ve daha önceki bilgilerin yetersiz olduğunu anlamalarına da fırsat vermektedir. Analojilerin etkin bir şekilde kullanılması, öğrencilerin kavram bilgisinin de artmasını sebep olmaktadır. Konuya açıklık getirmek isteyen öğrencilerin, benzetmeler kullanarak konu ile ilgili yeni problemler ortaya koymasına olanak sağlamaktadır. …. (Duru 2002, s. 26).

> Maxwell, Rutherford ve Einstein'in, öğretim aracı olarak analojileri kullanarak problemlerin daha iyi anlaşılmasını sağladıklarını belirtmişlerdir. Gabel ve Sherwood' un yapmış oldukları çalışmada; analojilerin mantıksal düşünme yeteneği az olan öğrencilerde daha etkili olduğu, öğrenciler kullanılan analoji ile öğretilmesi hedeflenen kavramlar arasında bağıntı kurabilirlerse bu tür analojilerin öğrencilerin kavram yanılgılarını azalttığını ve onların kavramları daha kolay öğrenmelerini sağladığını ortaya koymuştur. ….(Bilgin ve Geban 2001, s. 26).

Kaptan ve Arslan (2002), Sekizinci sınıflarda soru cevap tekniği ve analoji tekniğinden hangisinin daha başarılı olduğunu araştırmak için bir çalışma yaptılar. Yaptıkları deneysel araştırmada, deneysel ve kontrol grupları oluşturdular.

> Hemofili konusu kontrol grubuna soru cevap tekniği ile deney grubuna, analoji tekniği ile anlatıldı. Başlangıçta her iki gruba ön test olarak bir başarı testi uygulanmış ve uygulamalardan sonra aynı test son test olarak uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, öğrencilerin hem ön testte hem de son testte başarılarında anlamlı bir fark olmadığı, her iki grupta da başarı ortalamasının arttığı, ancak öğrencilerle yapılan görüşmelerde analojiyi kullanarak anlatılan dersleri daha çok sevdikleri ortaya çıkmıştır. …. (Kaptan ve Arslan 2002, s. 7).

Yani analojiler, sadece kavram öğrenmeyi kolaylaştırmakla kalmayıp, duyuşsal öğrenmeleri de olumlu yönde geliştirmektedir.

Turgut (2007) Ikögretim 7. sınıf matematik konularının öğretiminde soru-cevap metodu ile analoji metodunun öğrencilerin matematik başarılarına etkilerinin karşılaştırıldığı bir çalışma yapılmıştır.

> Ikögretim 7. sınıf Açılar ve Çokgenler ünitesinin konuları analoji grubunda analoji metodu ile soru-cevap grubunda ise soru-cevap metodu ile islenmistir. analoji ve soru-cevap gruplarının SBT ve MBT puan ortalamaları farkı sonuçlarına bakıldıgında iki grup arasında manidar bir fark oldugu görülmüstür. Ayrıca analoji tekniginin uygulandıgı analoji grubu ögrencilerinin matematik dersi ile ilgili görüslerinin daha olumlu oldugu gözlemlenmiştir. ….(Turgut, 2007, s. 65)

Saygılı (2008) 9. sınıf matematik derslerinde analoji destekli öğretimin öğrencinin matematik başarısı ve yaratıcı düşünme becerilerine etkisini ortaya koyan bir amacıyla bir araştırma yapmıştır. Bu amaç doğrultusunda kümeler konusu analoji destekli bir öğretimle işlenmiştir. Başarı ve yaratıcı düşünme becerisi açısından analoji destekli ve etkinlik temelli yöntemler arasındaki fark incelenmiştir. Araştırma sonucunda analoji destekli yöntemin yaratıcı düşünme üzerinde olumlu ve orta düzeyde bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca matematik başarısı üzerinde analoji destekli yöntemin etkinlik temelli yönteme göre daha fazla etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Kanalmaz (2010) 8. sınıf matematik dersinde geometrik cisimlerin yüzey alanları alt öğrenme alanında analoji yöntemine dayalı öğretim gerçekleştirerek bu öğretimin öğrencilerin akademik başarısına etkisini incelemiştir. Çalışma sonucunda, öğrencilerin akademik başarılarını artırmada analoji ve geleneksel öğretim yöntemi arasında anlamlı bir farklılık olmadığı sonucuna ulaşmıştır.

Duman ve Coşkuntuncel (2014) öğretmen adaylarının matematik öğretiminde analoji kullanımı hakkındaki görüşlerini belirlemek amacıyla yapmış oldukları bir çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü 4.sınıfta okuyan 30 gönüllü öğrenci ile yüz yüze görüşmeler yapmıştır. Görüşmede literatür çalışmaları ve uzman görüşleri dikkate alınarak geliştirilen yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizin, betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın bulgularına göre;

1. Ortaokul matematik öğretmen adayları matematik öğretiminde analoji yöntemi kullanılmasının olumlu bir katkısının olduğunu, matematiğe karşı oluşan önyargıyı değiştirmek, matematik dersini sevdirmek için analoji kullanmanın iyi bir teknik olduğunu düşünmektedirler.
2. Matematik dersinin soyut olan konularının sistemli ve önceden tasarlanmış analojilerin yardımıyla daha somut ve daha kolay bir şekilde anlatılabileceği vurgulanmaktadır.

3. Matematik öğretiminde mutlak değer, fonksiyon, Pisagor bağıntısı konularında analoji kullanımının gerekli olduğu konusunda hemfikir olmuşlardır.
4. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu drama yöntemi ile analojilerin birlikte sunulması gerektiği ve bunun öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarına daha olumlu katkı sağlayacağı görüşündedirler.
5. Okullardaki teknolojik imkanların artışının öğretmenlerin analoji hazırlamalarına ve hazırladıkları analojileri görsel teknoloji ile desteklemelerine yardımcı olacağı ve bundan dolayı hem analoji kullanımının artacağı hem de kullanılan analojilerin niteliğinin gelişeceğini belirtmişlerdir. Öğretmen adayları her kazanım için bir analoji hazırlamanın zorluğunu görmüşler ve bu yüzden konuların anlatılmasında başka tekniklerden de yararlanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Ayrıca sürekli olarak analoji kullanımının öğrenciler açısından sıkıcı olabileceğini düşünen öğretmen adayları sadece konu anlatımının başında analoji kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir.

Kula ve Bukova-Güzel (2015) matematik öğretmeni adaylarının derslerinde limit kavramıyla ilgili kullandıkları öğretim stratejilerini ortaya çıkarmak amacıyla bir çalışma yaptılar. Bu amaç doğrultusunda çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan özel durum çalışması deseninden yararlanılmıştır. Elde edilen veriler araştırmaya katılan öğretmen adaylarının, limit kavramına yönelik hazırladıkları ders planlarından, yarı yapılandırılmış görüşmelerin ses kayıtlarından ve derslerinin video kayıtlarından toplanmıştır. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının tercih ettikleri limit kavramıyla ilgili kullandıkları öğretim stratejileri, konuyla ilgili gösterimler ve etkinlikler şeklinde incelenmiştir. Limit kavramıyla ilgili kullanılan gösterimler; şekilsel, sayı doğrusu, tablo, grafiksel, cebirsel ve sözel gösterimler şeklindedir. Limit kavramıyla ilgili etkinlikler ise; oyun, günlük yaşam örneği, animasyon, görsellerle desteklenmiş senaryo, analoji, Escher'in resimleri, farklı bilim dalları, polinom türü fonksiyonlarda limit değerini tartışma ve limite ilişkin özelikleri pekiştirme olarak gruplandırılmıştır. Araştırmanın bulgularına göre, öğretmen adaylarının sözel ve cebirsel gösterimleri sıklıkla kullandığı görülmüştür. Limit kavramını genel olarak ilk derslerinde günlük yaşamla ilişkilendiren katılımcılar, kendileri ile yapılan görüşmelerde kullandıkları bu stratejiyi tercih etme nedenlerini, öğrencilerin limit kavramını daha iyi anlayabilmelerini sağlayabilmek olduğunu ifade etmişlerdir.

Dwirahayu, Mubasyiroh ve Mas'ud (2017) yüksekokul öğrencileriyle günlük yaşam analojileriyle türev konusunun öğretilmesinin başarılarına etkisini araştıran bir çalışma yapmışlardır. Kontrol grubu analoji olmadan türev konusunu işlerken deney grubu analoji temsilleriyle türev konusunu işlemişlerdir. Veriler matematiksel temsil testi kullanılarak toplanmış. Sonuç olarak, öğrencilerin analojilerle öğretilen matematiksel sunumlarının, analojiler olmadan öğretilen matematiksel sunumlardan daha başarılı olduğunu göstermiştir.

Efe (2018) ortaokul matematik öğretmenlerinin matematik derslerinde kullandıkları analojilerin incelenmesini temel alan bir çalışma yaptı. Araştırma Batı Karadeniz bölgesinde ortaokullarda görev yapan matematik öğretmenleri ile yürütülmüştür. Nitel bakış açısı çerçevesinde yürütülen bu çalışmada özel durum çalışmasından yararlanılmıştır. Bu çalışmada veriler iki farklı yolla toplanmıştır. Matematik öğretmenlerinin matematik öğretiminde kullandıkları analojilerin incelenmesine yönelik araştırmacı tarafından bir veri toplama aracı geliştirilmiş ve 41 katılımcıya uygulanmıştır. Veri toplama aracının geliştirilmesinde ilgili literatür ve uzman görüşleri dikkate alınmıştır. Daha derin verilere ulaşılabilmesi için de katılımcılardan 6 öğretmen ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Veri toplama aracından elde edilen veriler ile içerik analizi yapılmıştır. Mülakatlardan elde edilen veriler ile de betimsel analiz yapılmıştır. Katılımcıların kullandığı analojiler ve öne çıkan bazı görüşler frekans, çizelge ve doğrudan alıntılar yoluyla sunulmuştur. Elde edilen bulgulara göre ortaokul matematik öğretmenlerinin analoji terimine aşina olmadıkları, kısa bir açıklama yapıldıktan sonra ne denilmek istenildiğini anladıkları, öğretmenlerin analoji kullanımına yönelik olumlu görüş bildirdikleri, genel olarak kullanılan analojilerin uygun olduğu görülmüştür. 5. sınıflara oranla diğer sınıflarda daha sık kullanıldığı, kullanılan analojilerin türlerine göre bakıldığında daha çok basit analojilerin kullanıldığı, hikayeleştirilmiş ve resimli analojilerin ise eşit ve ikinci sırada yer aldığı görülmüştür. Araştırmaya katılan öğretmenler kullandıkları analojilerin kaynağını sırasıyla kendileri, web siteleri ve meslektaşları şeklinde sıralamışlardır. Ders kitaplarını analojiler açısından yetersiz gördüklerini ifade etmişlerdir. Analoji kullanımının soyut kavramları somuta dönüştürdüğü, kalıcı öğrenme sağlayacağı, öğrencilerde matematiğe karşı olumlu tutum geliştirebileceği, derse ilgiyi arttıracağı, dikkat çekeceği, hayal gücünü geliştireceği, kavramsal öğrenmeyi gerçekleştireceği, anlatımı kolaylaştıracağı, basite indirgeyeceği gibi nedenlerle avantajlı olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Kazanıma uygun olmazsa, konudan uzaklaşırsa öğrencilerde kavram kargaşası yaratabileceği, sohbet ortamı yarattığı için özellikle kalabalık sınıflarda zaman kaybına neden olabileceği, uzun ve sık kullanımının sıkıcı olabileceği, dikkatin kazanımdan ziyade analojiye kayıp hedeften uzaklaşılabileceği, farklı algılamalara neden olabileceği dezavantajlar olarak belirtilmiştir.

Analojiler öğrencilerin önceki bilgilerinden yeni bilginin anlaşılmasını sağlayan düşünme yolunu etkiler (Harison ve Treagust, 1993). Ancak analojilerin bu avantajlarının yanında, bazı dezavantajları da vardır. Örneğin, analojiler hem öğrenci için hem de öğretmenler için yeni bilgilerin öğrenilmesinde yararlı bir öğretim aracı olsa da, eğer öğrenciler hedef kavramı daha önceden biliyorlarsa analojiler gereksiz bilgi gibi gözükebilir (Venville ve Treagust, 1996). Öğrenciler analojinin kullanımında taşıdığı anlamı düşünmeden analojiyi mekanik olarak kullanabilirler (Venville ve Treagust, 1996). Bunun sebebi öğrencilerin bu kavram için aşina bir analoji hatırlamış olmaları ya da bir kavramı öğrenmek için zaman ayırmaya istekli olmayışları olabilir. Çünkü aşina analojiler anlaşılmamış olsalar bile öğrencilere sınav soruları için doğru cevapları sağlarlar (Treagust, Harrison ve Venville, 1996).

Analojilerin mekanik olarak kullanımlarının sebebi belki de öğrencilerin gerçek ile analoji arasındaki farkı anlama yönünden yetersiz olmaları olabilir. Analojiler asla hedef içeriği tamamen tanımlamazlar. Her analoji sınırlıdır. Maalesef, öğrenciler genellikle hedef içeriğin sınırlılıkları hakkında yeterli bilgiye sahip değildir. Bu sebepten, ya hedef ile ilgili durumu, analojiyi gerçek bir bilgiymiş gibi kabul edecek ya da analojileri yanlış kullanacak ve çok uzak bir anlama götürecektir. Ancak analojilerin amaçlarından biri öğrencilerin geçmiş bilgilerinden yola çıkarak içeriği anlamlı bir şekilde anlamalarına yardımcı olmaktır, öğrencilerin konu ile ilgili algılamalarını derinleştirmektir. Bu durumda da amaca ulaşılmış sayılmayacaktır (Orgill ve Bodner, 2003). Bunun yanında özel bir konu hakkında analojiler bilgi taşıdığında, öğrenciler öğretmenlerin analoji hakkındaki açıklamalarını tereddütsüz kabul edebilirler. Bunlara göre analojilerin hepsini iyi analoji olarak niteleyemeyiz bazıları kullanışlıdır bazıları ise değildir diyebiliriz. Harrison ve Coll’a (2008) göre analojiler öğrenciler için, eğer öğretmenler tarafından yapılmışsa alışmadıkları ya da anlamadıkları bir durum haline gelebilir. Böyle bir durumda kullanılırsa bu büyük bir karışıklığa sebep olur, konunun yanlış anlaşılmasına yol açar. Öğretmenler buna engel olmak için öğrencilerin analojileri açıklamasına, onun hakkında konuşmasına yardım etmeli ya da anlaşılabilecek analojiler kullanmalıdırlar. Bunun yanında eğer öğrencilerin görsel hayal gücü, analojik çıkarım gücü ya da karşılaştırarak muhakeme gücü düşük ise analojilerin kullanımı doğru olmayacaktır. Ayrıca öğrenciler analojilerin verdiği bilginin de saçma ya da gereksiz olduğunu düşünürlerse yine yanlış anlamalar meydana gelebilir (Kanlamaz, 2010) Analojinin birçok yararı olmasına rağmen onu kullanmak oldukça zordur. Anlamlı öğrenmenin temelinde kavram öğreniminin önemli olduğu düşünüldüğünde analojiler daha dikkatli seçilmeli kavram öğrenimi gerçekleştirmeye çalışılırken kavram yanılgısına düşürmemelidir.

Bu düşünceden hareketle diyebiliriz ki literatürde bazı çalışmalar analojilerin öğretimde etkili olduğundan bahsederken bazı çalışmalar analojiler tek başına kullanıldıklarında beklenilen faydayı sağlamayacağı yönündedir. Ancak başka etkinliklerle desteklenirse öğrenenler ve öğretenler açısından beklenenin ötesinde bir fayda sağlayabilirler. Sadece öğrenmede değil kavram yanılgısını gidermede de etkili olabilirler. Analojilerin başka bir yöntemle desteklenmesi ile limit konusunun öğretilmesi ve kavram yanılgılarının giderilmesinde etkili olabileceği görüşü bizi diyalojik yöntemle yapılan çalışmaları araştırmaya yöneltti.

2. 3. Diyalojik Yöntem ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Diyalojik Öğretim terimi genellikle, sınıf ile yapılan görülmemiş bir öğretimin temel ilkesidir ve bu öğretimde alışılmışın dışında kavramın anlamına bağlı kalarak ilerleme ve gelişimi destekleyip temel yaklaşımların yerini açık uçlu sorulara bıraktığı bir yöntemdir. Diyalojik öğretiminin desteklenmesinde önemli bir figür olan edebi ve politik yorumcu Robin Alexander'a göre, "diyalojik öğretim, öğrencilerin düşünmelerini teşvik etmek ve onların öğrenmelerini, anlamalarını genişletmek için konuşmanın gücünü kullanır." (Alexander, 2008). Birçok öğretmene göre konuşmanın amacı basitçe sorgulamaktır. Öğrencilerinin bir konuyla veya bir başkasıyla ilişkilendirmeler yapmasını sağlamaktır. Basitçe söylenmesi gerekirse, bir metni incelemek veya etkinlik kağıtlarını tamamlamak eskiden tercih edilirdi. Artık pek çok öğretmen öğrencilere konuşma ve dinleme olanakları sağlaması için teşvik edildi. Konuşma, yazma ve öğrencinin bilişsel gelişimi arasındaki önemli bir bağ vardır. Öğrencilerin tartışmalı bir sınıf ortamında metabilişsel olarak daha akıllı olmaları ve daha ileri düzeyde öğrenmeleri sağlanabilir. Kalabalık sınıflarda bireysel farklılıklar ve fırsat eşitliği dengesi dikkate alındığında öğrenenleri tümüyle öğrenmeye katma aktif hale getirme sınıf ortamında sağlanmalıdır. Öğretmenlerin, sınırlı bir zamanın en iyi şekilde nasıl kullanılacağının değerlendirilmesinde hem sıklığına hem de etkileşimlerinin oranına bakmaları gerekir (Pryle, 2018).

Turgut (2007) yapmış olduğu bir araştırmada;

> …İlköğretim 7. sınıf matematik konularının öğretiminde soru cevap metodu ile analoji metodunun öğrencilerin matematik başarılarına etkileri açısından karşılaştırılmıştır. Araştırma, 2005–2006 ögretim yılının 2. döneminde Afyon ili Sultandağı ilçesi 75.yıl İlköğretim Okulu ve İshaklı İlköğretim Okullarında öğrenim görmekte olan 60 öğrenciye uygulanmıştır. İlköğretim 7. sınıf Açılar ve Çokgenler ünitesinin konuları analoji grubunda analoji metodu ile soru-cevap grubunda ise soru-cevap metodu ile işlenmiştir. Konular islenmeden önce "Seviye Belirleme Testi"(SBT) ve islendikten sonra "Matematik Başarı Testi"(MBT) uygulanmıştır. Ayrıca konunun bitiminde her iki gruba da 5 sorudan olusan "Ögrenci Görüs Bildirme Formu"(ÖGBF) uygulanarak islenen derslerle ilgili görüşler alınmıştır. Sonuçlar "t-testi" ile analiz edilmiştir. İki grup arasında anlamlı bir fark elde edilememiştir. Ancak analoji ve soru-cevap gruplarının SBT ve MBT puan ortalamaları farkı sonuçlarına bakıldığında iki grup arasında manidar bir fark olduğu görülmüştür. Ayrıca analoji tekniğinin uygulandığı analoji grubu öğrencilerinin matematik dersi ile ilgili görüşlerinin daha olumlu olduğu gözlemlenmiştir. …. (Turgut, 2007, s. 97)

Hajhosseiny (2012) yaptğı çalışmasında, diyalog öğretim yöntemlerinin (grup tartışması ve Sokratik diyalog) üniversite öğrencilerinin eleştirel düşünme eğilimi ve sosyal etkileşimi üzerindeki etkilerini belirlemeye çalıştı. Çalışma, eylem araştırması metodolojisi kullanılarak nitel yaklaşıma dayandırıldı. Katılımcılar, amaçlı örnekleme ile seçilen eğitim alanında iki lisans öğrencisi grubundan oluşuyordu (N = 40). Veriler standartlaştırılmış açık uçlu görüşme kullanılarak toplandı. Görüşme üç ana tema halinde (eğitimin değerlendirilmesi, etkileşimlerin değerlendirilmesi ve genel değerlendirme) ve yedi sorudan oluşan sistematik bir dizide gerçekleştirildi. Uygulama modellerini tasarladıktan sonra (grup tartışması ve Sokratik diyalog), eğitim psikolojisinde ele alınan konulara dayanarak, her iki yöntem de bir yarıyılda kullanılmış, ardından yarıyıl sonunda araştırmacı tarafından yürütülen her iki grubun katılımcılarıyla yapılan görüşmeler izlenmiştir. Yapıları bulmak için, görüşmelerden toplanan veriler "yorumlama analizi" kullanılarak analiz edildi. Sonuçlar, diyalog öğretimi yöntemlerinin, eleştirel düşünme eğilimlerinin altı öğesinin (analitiklik, bilişsel olgunluk, CT özgüveninin, öz değerlendirmenin, açık görüşlülüğün, gerçeğin araştırılmasının) ve sosyal etkileşimin yedi unsurunun (arkadaşlık ve samimiyet, diyalog eğilimi, sorumluluk, sınıf dinamizmi, öğretmenle etkileşim, öğretim görevlisi ile samimiyet) geliştirilmesindeki etkinliğini göstermiştir.

Lehesvuori (2013) okulda sınıfta ve öğretmende diyalog öğretimini araştırmak amaçlı Jyväskylä Üniversitesi'ndeki öğretmen adaylarıyla ve Finlandiya ortaokullarındaki öğretmenlerle bir çalışma yaptı. Çalışma, diyalog öğretiminin fen bilgisi dersinde önceden müdahalesiz nasıl ortaya çıktığını değerlendirdi. Bu çalışmanın ana sonuçları, Her ne kadar aday öğretmenler yetkili öğretim biçimlerinin ötesine geçebilse de iletişimli öğretimin sürdürülebilirliğe giden yolda hala büyük zorlukların olduğunu ortaya çıkardı. En büyük zorluk, egemen (otoriter) okul kültürünün baskın olmasıydı. İletişimsel form modası geçmiş öğretme formlarının ötesine geçememiştir. Bunun sonucunda sınıfta gözlenen otoriterlik sorgulanmalı, çok yönlü iletişim becerilerine sahip öğretmenler hazırlanmalıdır.

Sedova (2017) yaptığı çalışmasında öğretmenlerin diyalog öğretiminin sadece kısmi veya yüzeysel özelliklerini benimsemiş ve anlamlı ve değerli sınıf diyaloğunu teşvik etmeyen ve koruyamayanlar olmuştur. Çalışma dinamik ve doğrusal olmayan bir süreç göstermiştir

Gürbüz ve Ağsu (2017) yapmış oldukları bir çalışmada amaçları, diyaloga dayalı öğretimin 9. sınıf öğrencilerinin eşitsizliklerin kavramsal öğretimini derinleştirmedeki hataları ve güçlükleri üstesinden gelme etkisinin araştırılmasıdır. Bu çalışma Bir eylem araştırması olarak tasarlandı. 7 açık uçlu soruya verilen cevaplar ve çözümler öğrencilerin kavram yanılgılarını saptar ve hatalar 0 ile 2 arasında puanlanır. Bu çalışmada öğrencilerin, tanımlanmış bir aralıktaki gerçek sayıları göz ardı ettikleri ve sadece tam sayılara odaklandıkları, tanımlanmış bir aralıktaki eşitsizliğin karesini bulduğunda sıfırı görmezden geldikleri ve eşitsizliğin negatif bir sayıyla çarpılması ve İki eşitsizliğin tek bir eşitsizlikte birleştirilmesi durumunda eşitsizliklerin çözümünde zorluk yaşadıkları tespit edildi. Araştırmanın sonuçlarına göre, diyalog öğretimi öğrencilerin kavramsal olarak eşitsizliklerin öğrenilmesi için destekleyici bir rol oynadı. Ayrıca lise öğrencilerinin kavramlarını yeniden yapılandırabildikleri görülmüştür.

Uçak ve Bağ (2018) öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları bir çalışmada öğretmen adaylarının kullandıkları iletişimsel yaklaşımları belirlemeye çalışmışlardır.

> …Bu amaçla, öğretmen adaylarına diyalojik öğretim ve iletişimsel yaklaşıma yönelik farkındalık oluşturmak için 2012-2013 akademik yılının ikinci yarısında öğretmenlik uygulaması dersinde 7 hafta süren bir eğitim programı geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının eğitimden önce sıklıkla otoriter yaklaşımları tercih ettikleri, eğitimden sonra ise otoriter yaklaşımların yanında diyalojik etkileşimli iletişimsel yaklaşımı da derslerinde kullanmaya başladıkları tespit edilmiş ve kullanmalarındaki gerekçeler ortaya çıkarılmıştır. …. (Uçak ve Bağ 2018, s. 77).

Nouri, Esmaeilli, Seifpour, Talkhabi ve Khorami (2018) diyalog öğrenmenin öğrencilerin dikkatine ve akademik başarısına etkisini araştıran bir çalışma yaptı. Bu çalışma, hem nicel hem de nitel yöntemleri kullanan karma bir yöntemdir. Veriler; dikkat ağı testi; akademik performans testleri ve yarı yapılandırılmış görüşmeler ile toplandı. Katılımcılar 12 yaş grubunda olan 24 erkek öğrenciydi. İran'da bir devlet ilköğretim okulunda erkek öğrenciler rastgele iki gruba ayrıldı (12 si deney grubunda 12 si kontrol grubunda). Yaş, cinsiyet, etnik kökene göre homojen olan bu gruplarda, akademik başarı kaynakları ve “Wechsler Çocuklar İçin Zeka Ölçeği” ile nörolojik veya bilişsel bozulma öyküsü olmayan gruplardı. 6.sınıf öğrencilerinden, deney grubundakiler sokratik diyalog öğretimi ile kontrol grubu diyalog dışı öğretim ile 4 ay boyunca ders işlediler. Kovaryans Analizi Sonuçları (ANCOVA) deney ve kontrol gruplarında istatistiksel anlamlı bir fark olduğunu göstermiştir. Bu çalışmanın sonucunda sokratik diyalog öğretimi, dikkatin ve akademik performansın bazı yönlerinde önemli ölçüde daha büyük ve daha olumlu değişikliklere sebep olmuştur.

Tüm çalışmalardan diyalojik yöntemin öğretmen öğrenci etkileşimi ve diyaloğu ile öğrencilerin bilgiye ulaşmasını sağlayan aktif katılımı esas alan bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz. Bazı çalışmalarda eğitim öğretim ortamında pozitif yansımalar ortaya çıktığı gibi bazı çalışmalarda öğretenin otoriter yaklaşımdan uzaklaşamadığı da görülmüştür.

2. 4. Literatür Taramasının Sonucu

Literatür incelendiğinde limit ile ilgili yapılan çalışmalarda daha çok limite yönelik öğrencilerin sahip olduğu alternatif kavramların tespitine yönelik çalışmalar olduğunu görmekteyiz. Farklı yaklaşım, yöntem ve tekniklerle limit konusunda sahip olunan kavram yanılgılarının giderilmesine yönelik çok fazla çalışma yoktur. Mevcut çalışmalarda limitin formal tanımının anlaşılamamasından kaynaklı yanılgılar olduğunu görmekteyiz. Bu tanımda delta, epsilon gibi sembolik ifadelerin olması, yığılma noktası, sağ ve sol limit kavramları, tanımsızlık, belirsizlik ve limitin terminolojisinin öğrenme güçlüklerine ve kavram yanılgılarına sebep olduğu ortaya çıkmaktadır.

Analojilerle ilgili yapılan çalışmaların sonucunda bazı analojilerin başarılı bazılarının başarısız olduğu ortaya çıkmıştır. Analojilerin başarısız olma sebeplerinden biri, öğrencilerin gerçek ile analoji arasındaki farkı anlama yönünden yetersiz olmaları olabilir. Ancak analojilerin amaçlarından biri öğrencilerin geçmiş bilgilerinden yola çıkarak içeriği anlamlı bir şekilde anlamalarına yardımcı olmaktır. Analojilerin başarılı yönleri dikkate alındığında başarısız yönlerini ortadan kaldırmada farklı bir yaklaşımda desteklenmesi görüşü ortaya çıkmaktadır.

Diyalojik yöntem ile yapılan çalışmalarda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının otoriter iletişim yönteminin etkisinden kurtulamadıkları ancak diyalojik öğretimi öğrencilerin kavramların öğrenilmesinde ve dikkat üzerinde destekleyici bir rol oynadığı ortaya çıkmıştır.

Literatürdeki tüm bu çalışmalardan hareketle çalışmamızda, analojilerin kavramsal öğrenmeyi sağlamadaki başarısı, kavramları günlük hayatla ilişkilendirmedeki çabası ve öğrencilerin ilgileriyle üstesinden kolaylıkla gelebilecekleri de göz önüne alınarak, diyalojik yöntemin, analojilerle desteklenmesi uygun görüldü. Literatürde analoji destekli diyalojik yaklaşımın limit konusunun öğretimindeki etkisini araştıran bir çalışmaya rastlanılmaması bizi bu çalışmaya teşvik etti. Otoriter yaklaşımdan mümkün olduğunca uzaklaşarak öğrencinin aktif olarak derse katılmasını sağlayıcı güdüleyici limit konusunda analojilerle ve bilgiyi ortaya çıkarmaya yönelik açık uçlu sorularla dersler hazırlandı. Lisans düzeyinde limit konusunda öğrenci başarılarındaki değişim, öğrenci görüşleri ve hazırladıkları analojiler değerlendirildi. Bundan sonraki bölümde bu çalışmanın yöntemi veri araçları ve verilerin analizi sunulacaktır.

3. YÖNTEM

3. 1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışma bir aksiyon çalışması (Eylem Araştırması) dır. Araştırmacı araştırma sürecinde öğretmenlik görevini sürdürmeye devam edeceğinden yöntem olarak araştırmacı öğretmen yöntemi uygun görülmüştür. Bu yöntem; eğitim-öğretim sürecinin özel bir durumunda ortaya çıkan bir problemi belirleyip o anda çözmek için geliştirilmiş yöntem olarak tanımlanır. Bu yöntem uygulama sürecinde problemleri tespit etmeyi ve bunların çözümüne planlı olarak yaklaşmayı önerir. Değişik zamanlarda ve değişik dokümanlarla bilgi toplanır. Bu iş araştırmanın sürekliliğini gerektirir. Elde edilen bulgular mevcut sistemi ayarlama yönlendirme ve gerekirse yeniden tanımlama ile etkili hale getirmek için kullanılır (Çepni, 2001).

Eylem araştırmaları teknik iş birliğine dayalı, karşılıklı katkı iş birliğine dayalı ve geliştirici olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Teknik iş birliğine dayalı eylem araştırmalarında; araştırmacı ve uygulayıcı arasında uygulama sürecine ilişkin yoğun bir iş birliği vardır. Burada amaç daha önceden belirlenmiş kuramsal bir çerçeve içinde bir uygulamayı test etmek ve değerlendirmektir. Karşılıklı katkı iş birliğine dayalı eylem araştırmalarında; araştırmacı ve uygulayıcı bir araya gelerek ortaya çıkan olası sorunları tespit edip bu sorunlara müdahele yollarını saptarlar. Geliştirici eylem araştırmalarında; uygulamacı aynı zamanda araştırmacıdır. Araştırmacı uygulamayı sürdürürken belirlediği sorunlara ilişkin farklı veri toplama yöntemleriyle veri toplar (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu çalışma bir geliştirici eylem araştırmasıdır.

Aksiyon (eylem) araştırması, iki nedenden dolayı öğretmen eğitiminde önemli görülmektedir:

1. Öğretmenin aktif bir rol alması ve bu amaçla araştırmada başrol alarak birinci elden veri elde etmesi,
2. Öğretmenlerin kendi eğitim uygulamaları ile genel eğitim teorileri arasında ve araştırma ile uygulama arasında bir köprü olması (Demetgül, 2018).

Çalışmamızda araştırmacı öğretmen, on beş yıllık kendi eğitim uygulamaları sonucunda sınıfındaki limit konusuyla ilgili sorunları tespit etmiştir. Bu sorunların giderilmesinde eylem araştırması metodunun yukarıda anlatılan açıklamalara dayanılarak uygun bir yöntem olduğuna karar vermiştir. Limit konusunda karşılaştığı sorunların literatürdeki limit konusunda tespit edilen sorunlarla benzer olduğunu fark etmiş ve bunları gidermek için zaman içinde geliştirdiği çözümleri analoji destekli diyalojik yöntem kullanarak bir eylem araştırması planlamıştır. Araştırmacı bu çalışmada araştırma yapacağı grubun öğretmeni olduğu ve araştırmalarını kendi sınıfında katılımcı gözlemci rolü üstlenerek yapabileceği için aksiyon araştırma deseni kullanmıştır.

3. 2. Evren ve Örneklem

Bu çalışma Rize Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2.sınıfta okuyan öğrencilerle yürütülmüştür çalışmanın amacına uygun olarak 61 öğrenciyle pilot çalışma 30 öğrenciyle asıl çalışma yapılmıştır. Asıl uygulamadaki öğrenciler 5 kişiden oluşan toplam 6 gruba ayrılmıştır. Grup içinde uyumu sağlamak amacıyla kendilerinin belirlemiş oldukları gruplarla çalışmaya katılan öğrenciler grup sunularını hazırlamışlar ve sunu sonunda görüşlerini belirtmişlerdir.

3. 3. İşlem

Çalışmanın başlangıcından bitimine kadar olan süreçte yapılanlar aşağıdaki tabloda verilmiş, yapılanlar ise tablonun devamında ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Tablo 1. Araştırmanın Süreci

Pilot uygulama	2014/2015 güz dönemi	1.-8. hafta	Literatür taraması
		8.-16. hafta	Başarı testi hazırlama
		16.hafta	Başarı testi uygulama
	Ara dönem	16.-24. hafta	Başarı testi analizi
	2014/2015 bahar dönemi	1.-16. hafta	Analojiler hazırlama
		16. hafta	Mülakat soruları hazırlama
	2015-2016 güz dönemi	1.-16. hafta	Analojileri düzenleme
	Ara dönem		
	2015-2016 bahar dönemi	1.-16. hafta	Analojiler ile ders planı hazırlama
Asıl uygulama	2016-2017 güz dönemi	1.hafta	Ön bilgi
		2.hafta	Başarı ön testi uygulama
		3.hafta	Başarı ön testi analizi
		4. hafta	ders1, ders2, ders3
		5.hafta	ders4, ders5, ders6
		6.hafta	Öğrenci sunuları
		7.hafta	Mülakatlar
		10.hafta	Başarı son testi uygulama
	2016-2017 bahar dönemi	1.-16. hafta	Öğrenci sunuları/mülakatlar/başarı son testi analizleri
	2017-2018 güz dönemi	1.-16. hafta	Rapor yazma

Pilot çalışma: Öncelikle konuların "Yüksek Öğretim Kurulu Başkanlığı Eğitim Fakültesi Öğretmen Yetiştirme Lisans Programları"nda nasıl yer aldığının belirlenmesi amacıyla *İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı* incelenmiştir. Konuların içeriğinin belirlenmesi için bu alanda yazılmış olan Genel Matematik, özel yayın evlerinin kitapları ile yabancı kitaplar incelenmiştir. Ayrıca konunun içeriğinin belirlenmesinde daha önce dersi yürüten öğretim üyesinin ders notları ve konu ile ilgili görüşleri de dikkate alınmıştır. Konuların içeriği ile ilgili incelemeler tamamlandıktan sonra, öğrencilerin limit konusundaki hangi kavramlarda kavram yanılgılarına sahip olduklarını tespit etmek için literatür araştırması yapılmıştır. Yapılan bu incelemeler sonucunda, birçok öğretmen adayında gözlenen limit konusunda ortak kavram yanılgıları 4 temel başlık altında ele alınmıştır. Bu yanılgılar;

1. Limitin tanımı ile ilgili yanılgılar: Örneğin tanımda yer alan $\varepsilon - \delta$ sembolleri anlaşılamamaktadır.
2. $\frac{0}{0}, \infty - \infty, ve \frac{\infty}{\infty}$ gibi belirsizlik durumlarında ortaya çıkan yanılgılar;
3. Limitin süreklilikle karıştırılması ile ilgili yanılgılar: Bir fonksiyonun bir noktada limitine bakarken o noktada tanımlı olup olmadığıyla ilgilenmektedir. Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerektiğini düşünmektedirler. Eğer bir noktada tanımlıysa limitinin o nokta olduğunu tanımlı değilse bir takım cebirsel işlemlerle (sadeleştirme gibi) o noktada tanımlıymış gibi limit bulmakta dolayısıyla da limiti olan her fonksiyonun sürekli olduğunu düşünmektedirler.
4. Öğretmenlerin bir fonksiyonun limitini (sağdan ve soldan) bulmayla ilgili hızlı işlem yapmalarını sağlama yönünde verdikleri ipuçları yanılgıya sebep olabilmektedir. Mesela; reel sayı ekseninde limit alırken sağdan ve soldan limit alınmasının trigonometrik fonksiyonlarda da aynı olduğunu düşünmektedirler.

Litratürde belirlenen bu yanılgılara yönelik aynı zamanda başarı testi olarak kullanılan limit yanılgı teşhis testi hazırlanmıştır. Matematik ve Türkçe dil uzmanlarıyla birlikte çalışılarak bu testin geçerlilik güvenilirlik çalışması için 2014-2015 güz döneminde 61 kişilik aynı üniversitenin başka sınıfındaki öğrencilere uygulanmıştır. Bu testin sonucunda öğrencilerin başarı düzeyleri ve görülen yaygın kavram yanılgıları belirlenmiştir. Tespit edilen yanılgılar incelenmiş, ders hazırlanırken nelere dikkat edileceği, nasıl düzenleneceği konusunda araştırmalar yapılmıştır. Bunun için, ilgili literatür ayrıntılı incelenmiş, daha önce bu alanda bizzat çalışmış araştırmacılarla irtibata geçilerek bilgi edinilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan analojiler araştırmacı tarafından hazırlanmış olup, uzman eğitimciler tarafından incelenmiş ve alınan dönütler doğrultusunda yeniden şekillendirilerek düzenlenmiştir.

Bu ders anlatımlarında kullanılan analojilere bir örnek olarak:

Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşması konusunu için kullanılan analojide kaynak; taramalı tünelleme mikroskobu (STM) ile kuantum seviyesinde mesafe alınması hedef ise günlük yaşamda 42 numaralı ayakkabı ile mesafe alınması ile oluşan yaklaşma durumunun incelenmesiydi.

Limitin formal tanımına geçmeden önce bilinmesi gereken yığılma noktası kavramı için kullanılan analojide kaynak; kuantum tanecikleri hedef ise; yığılma noktası idi. Yığılma noktası için kullanılan analoji destekli diyalojik hazırlanmış bir ders örneği aşağıdaki gibidir:

A : Sayı doğrusu üzerinde yaşayan kuantum tanecikleri olduğumuzu varsayalım. x_0 reel sayısına sadece tamsayıların üzerine basarak istediğimiz kadar yaklaşabilir miyiz? Burada kastımız x_0 ın keyfi epsilon delik civarına girebilir miyiz? Sorusudur.

Ö14 : tamsayılara basarak yürürsek bunu yapamayız.

A : reel sayılara basarak yürürsek?

Ö14 : reel sayılar üzerine basarak bunu yapabiliriz.

A : rasyonel sayılara basarak x_0 ın keyfi epsilon delik civarına girebilir miyiz?

Ö15 : evet x_0 ın keyfi epsilon delik civarına rasyonel sayılarla girebiliriz.

A : x_0 ın keyfi epsilon delik civarına kaçınız rasyonel veya reel sayılara basarak girebilir?

Ö14 : hepimiz

A : o zaman x_0 ın keyfi epsilon delik civarında kaç tane reel veya rasyonel sayı vardır?

Ö15 : sonsuz

A : x_0 ın keyfi epsilon delik civarına reel veya rasyonel sayılar yığılmış mıdır?

Ö14 : evet

A : işte bu x_0 a reel sayıların bir yığılma noktası denir. Aynı zamanda bu x_0 rasyonel sayıların da bir yığılma noktasıdır.

Başka bir analoji:

A : *arkadaşlar Ali dese ki "ben bir yığılma noktasıyım" o zaman Ali'ye sorarlar "sana hangi kümenin sonsuz elemanı yığılıyor? Senin keyfi delik epsilon komşuluğunda hangi kümenin sonsuz elemanı var? Eğer bu soruya olumlu cevap verirsen sen o kümenin bir yığılma noktası olursun. sen bir reel sayı olsaydın tamsayılar sana yığılamazdı ama rasyonel ve ya reel sayılar sana yığılabilirdi. Şimdi anladınız mı?*

Ö10 : *evet*

Ö13 : *evet hocam*

Bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limiti için kullanılan analojide kaynak; görücü usulü evlilik hedef: limit kavramı

A : *Görücü usulünü duymuşsunuzdur.*

Ö11 : *duyduk hocam tabii*

Gülüşmeler…

A : *Tanıdıklarınız tarafından evlenmek için birisi size tavsiye edilir. Bu kişiyi tanıyor veya tanımıyor olabilirsiniz.* (x_0 *f fonksiyonunun tanım kümesine aittir ya da değildir)*

Ö16 : *evet hocam*

A : *Bunun konuyla hiç alakası yoktur tanısanız da olur tanımasanız da(.* $Civar_{x \to x_0} f(x)$ *hesaplamanın bununla bir alakası yoktur.) Bir görüşme ayarlandı, oturdunuz bir yerde çay içiyorsunuz.*

Ö17 : *hocam sizde mi görücü usulü ile evlendiniz?*

A : *hayır konuyu dağıtmayın devam edelim.*

A : *Bu buluşmada elde edeceğiniz bilgilerin doğruluğu pek o kadar güvenilir olmayabilir çünkü kimse ayranım ekşidir demez. Hâlbuki siz onu tanımak, nasıl davranışlara sahip olduğunu öğrenmek istersiniz.*

A : *Kendisi ile ilgili söylediği şeyler, nasıl biri olduğu hakkında verdiği bilgiler aslında sizi pek tatmin etmez. Ne yapmalısınız? Onu birilerine sormalısınız, peki kime? Tabii ki onu çok yakından tanıyanlara sormalısınız. (*x_0 *ın keyfi epsilon delik civarındaki x değişkenlerinde f fonksiyonunun davranışını inceleriz). Onu yakın civarındaki insanlara sorduğunuzda yakın civarındaki insanlar nerdeyse aynı şeyleri söylüyorlarsa, siz artık bir fikir sahibi olabilirsiniz. Fikir sahibi olabilirseniz civarda davranışı tespit edebildiniz anlamına gelir. (*$Civar_{x \to x_0} f(x)$ *mevcut olması).*

A : *Eğer onun yakın civarından bilgi elde edemediniz ya da elde ettiğiniz bilgiler tamamen farklı ise o zaman bir fikir sahibi olamazsınız.* $(Civar_{x\to x_0^+} f(x) \neq Civar_{x\to x_0^-} f(x)\ yani\ \ Civar_{x\to x_0} f(x)\ mevcut\ değildir.)$

A : *Sonuç olarak, gördük ki* $Civar_{x\to x_0} f(x)$ *civarının incelenebilmesi için* x_0 *ın f fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerekmektedir ve bu mevzunun* x_0*'ın f fonksiyonunun tanım kümesine ait olup olmamasıyla uzaktan yakından alakası yoktur. Bundan sonraki derslerde tüm limit ifadesi için "civar" analojisi kullanılmıştır*

Asıl çalışma: Limit konusunda hazırlanan başarı testi 2016-2017 yılı güz döneminde Rize ilinde bir üniversitenin İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2.sınıfta öğrenim gören 30 öğrenciye uygulandı. Analoji destekli diyalojik yöntemiyle 4 hafta süren limit öğretimi sonunda öğrencilerden analojilerle limit konusundaki yanılgılara yönelik sunular hazırlanması istenmiştir.

Konuların anlatımı esnasında derse katılımı sağlamak amacıyla, öğrenciler mümkün olduğunca aktif kılınmaya çalışılmıştır. Bu amaçla konuların anlatımı sırasında sık-sık öğrencilere sorular sorularak konularla ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılması arzulanmış ve böylece bir tartışma ortamı oluşturulmuştur.

2016-2017 güz dönemi limit konusu İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2.sınıf 3.dönem (4 saat teorik 2 saat uygulama) Analiz-1 dersinde aşağıdaki kazanımları içermektedir.

(2018-2019 yeni İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans programında Analiz-1 dersi, 1.sınıf 1.dönem 2 teorik saat olarak yer almaktadır). Limit kazanımları:

1. Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasını örneklerle açıklar.
2. Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan limitini ve sağdan limitini örneklerle açıklayarak fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.
3. Limit ile ilgili özellikleri belirtir ve uygulamalar yapar.
4. Parçalı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonunun limitleri ile ilgili uygulamalar yapar.
5. Genişletilmiş gerçek sayılar kümesini belirtir, gerçek değişkenli ve gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit ve sonsuz limit kavramlarını grafik üzerinde açıklar.
6. Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özellikleri belirtir.
7. Belirsizlik durumlarını belirtir ve verilen noktalarda $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty$ belirsizlik halleri olan fonksiyonların limitini hesaplar.

Yukarıdaki kazanımlar göz önüne alınarak hazırlanan analoji destekli diyalojik yönteme dayalı dersler yürütüldü. 6 ders, her ders 2 saat olmak üzere 12 saat ders anlatımı yapıldı. Araştırmacı öğretmen dersleri, tablet üzerine taşıyıp projeksiyonla yansıtarak analoji destekli diyalojik yöntemle sınıf tartışması şeklinde yürüttü.

Derslerden sonra öğrenciler grup analojilerini hazırlayıp sundular. Öğrenciler ödevlerini sundukları sırada değerlendirme formları ve sınıf içi gözlemlerle izlendiler. Daha sonra öğrenci gruplarıyla odak grup görüşmeleri yapıldı.

3. 4. Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri ön-son başarı testi, odak grup görüşmeleri ve grup ödevleri olarak üç grup altında toplanmıştır. Ayrıca araştırmacı tarafından günlükler tutulmuş, gözlemler yapılmış, grup mülakatları yazılı ve sesli olarak kayıt altına alınmıştır.

3. 4. 1. Odak Grup Görüşmesi

Mülakat belirlenmiş bir amaç için insanlarla iletişime girerek, bireyin araştırılan konu hakkındaki duygu, düşünce ve inanışlarının neler olduğunu ortaya çıkarma işlemidir. Bunun yanı sıra mülakat, araştırma ile ilgili bilgi elde etmek amacıyla, araştırmacı ile öğrenci arasında yürütülen görüşme olarak da tanımlanmaktadır (Ayas, Karamustafaoğlu, Cerrah ve Karamustafaoğlu, 2001). Mülakatlar üç amaç için kullanılabilir. Birincisi, araştırmanın amacı için doğrudan bilgi toplama da temel olarak kullanılabilir. Bu durum da mülakat, insanın zihninde neler olduğuna dair erişim kolaylığı sağlayarak, bireyin konuyla ilgili düşüncelerini ortaya çıkarma olanağı sağlar. İkinci olarak, mülakat hipotezi test etmede ya da yeni bir hipotez önermede ya da değişkenleri ve ilişkileri tespit etmede yardımcı olan açıklayıcı bir araç olarak kullanılabilir. Üçüncü olarak ise, mülakat bir araştırma içerisindeki diğer metotlarla karşılaştırma yapmada ve diğer metotların güvenirliğini ölçmede kullanılabilir (Çepni, 2001). Kavram anlama seviyelerini ve yanılgılarını belirlemede, kavram haritaları, tahmin gözlem-açıklama, mülakat gibi birçok yöntem kullanılmaktadır (Ayas vd., 2001, Coştu, Karataş ve Ayas, 2002). Öğrencilerin fikirlerini ve görüşlerini ayrıntılı olarak tespit etmede kullanılan bu araştırma metotları içerisinde, mülakat metodu en etkili metot olup öğrencilerin anlamalarının değerlendirilmesinde doğrudan uygulanmaktadır. Ayrıca bu metotla öğrencinin belli durumlarla ilgili kavramı tanımlamasının yanında, öğrencinin bilgisinin boyutu, doğruluğu, bilgiler arasındaki bağlantıları, bilgilerin farklı tipleri ve verilen cevapların gerekçeleri derinlemesine araştırılır (Ayas vd., 2001).

Odak grup görüşmesi, küçük bir grupla lider arasında görüşme, tartışma ve derinlemesine bilgi toplama amacıyla yapılır. Odak grup görüşmeleri bir sorunun çözümüne yönelik katkılar getirmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu yüzden bu çalışmada öğretmen adaylarının dersle ilgili görüşlerini ortaya çıkarmaya yönelik odak grup görüşmeleri ile yapılmıştır. Sorular hazırlanırken; sohbet tarzına uygun, anlaşılır, akademik dilden arınmış, kolay anlaşılır, kısa, açık uçlu, öz ve tek hedefi olan, iyi düşünülmüş yönergeler içeren sorular olmasına dikkat edilmiştir. Gruplar arasında soru cevaplar kaydedilip mülakatlardan sonra tutulan notlar temize geçilmiştir. Aynı zamanda her gruba mülakat formu dağıtılarak öğrencilerden mülakat sorularına verdikleri cevapları yazmaları istenmiştir. Öğrencilerin kaydettikleri notlar ile araştırmacının kayıtları karşılaştırılarak verilerin analizi yapılmıştır.

Görüşme akışı içinde geçen genel sorular

1. Analoji destekli diyalojik yöntem ile limit konusunun öğretilmesi hakkında ne düşünüyorsunuz?
2. Sizin hazırladığınız analojiler limit konusunda kavram yanılgılarını giderebilir mi?, nasıl giderir?
3. Analojileri sınıfınızda uygulandığında yaşadığınız olumlu ve olumsuz durumlar neydi?
4. Analojilerle öğretimi öğretmen olduğunuzda kendi sınıfınızda uygulayabilir misiniz?

3. 4. 2. Gözlemler

Çepni (2002) mülakatın kişilerin ne düşündüğünü belirlemede ve niçin öyle düşündüklerini araştırma imkânı verdiğini belirtmektedir. Fakat mülakt ile olayların gerçekte nasıl meydana geldiği konusunda fazla bilgi elde edilememektedir. Araştırılan birey veya bireylerim konu hakkında sözlü olarak bilgi vermek istemiemeleri durumunda bilgi toplamak için gözlem elverişli bir metottur. Gözlemler, üçe ayrılmaktadır: Yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış gözlemler. Yapılandırılmamış gözlemlerde, gözlemci gözlemlerini yazmaktadır. Mesela, bir derste gerçekleşen bütün davranışlar ve gerçekleşme şekli gözlemci tarafından ayrıntılı olarak yazılmaya çalışılmaktadır. Bu yöntemin en zayıf yönü ise gözlemci yazarken bilgi atlayabilmektedir. Bu durumu önlemenin en iyi yollarından biri gözlemler esnasında teyp kullanmaktır (Çepni, 2002).

Yapılandırılmamış gözleme dayalı olan bu çalışmada, kullanılan yöntemin sınıf ortamını nasıl şekillendirdiği öğrenme öğretme sürecinde nelerin olup bittiğinin araştırmacı tarafından ayrıntılı olarak yazılabilmesi için her bir ders videoya kaydedildi. Araştırmacı öğretmen anlattığı dersin hemen arkasından sıcağı sıcağına videoyu seyrederek alanla ilgili, gözlemlerini yazmaya çalıştı.

3. 4. 3. Başarı Testi

Öğrencilerin limit konusu hakkında bilişsel düzeylerinin belirlenmesi amacıyla literatürde karşılaşılan kavram yanılgıları ve kavram yanılgıları teşhis testlerinden alınan sorulardan oluşan 21 soruluk açık uçlu yazılı sınav hazırlanmıştır. Türkçe dil uzmanına ve alanında uzman iki matematik öğretim elemanına sorular incelettirilmiş düzeltilecek kısımlar belirlenmiş ve sınav süresi ayarlanmıştır. Testin geçerlilik güvenilirlik çalışmasında doğacak sorunlar için ek sorular hazır hale getirilmiştir. Testin ön hazırlığı için pilot çalışma 2014-2015 güz döneminde matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinden 61 öğrenciye uygulanmıştır. Bu uygulama öncesinde cevap anahtarı oluşturulmuş, testin cevapları 1 “doğru” 0 “yanlış” cevap olarak kodlanmış ve madde analizi yapılmıştır. Sınav 61 öğrenciye uygulanmış ve madde analizi yapılarak geçerlilik ve güvenilirliği hesaplanmıştır.

Tablo 2. Başarı Testi Belirtke Tablosu

Limit ile ilgili kazanımlar	Sorular
Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasını örneklerle açıklar	S1*,S2*,S3*,S4*,S5,S6,S7, S8,S9,S10,S11
Bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limitini örneklerle açıklar	S12,S13,S14,S15
Limit ile ilgili özellikleri belirtir ve uygulamalar yapar	S19
Parçalı fonksiyonlar ve mutlak değer fonksiyonu ile ilgili uygulamalar yapar	S17,S20
Sonsuz için limit ve sonsuz limit kavramlarını grafikle açıklar	S16
Trigonometrik fonksiyonlarda limit ile ilgili özellikleri belirtir	S18
Belirsizlik durumlarında limiti inceler	S21

*Bu sorulardan S1,S2,S3,S4 limit tanımının temeli olan mutlak değerle ilgili ön bilgi içeren sorulardır.

3. 4. 4. Grup Ödevleri

Öğrencilere limit konusu anlatıldıktan sonra kendi analojilerini hazırlamaları istendi. Öğrenciler sınıf ortamında grup çalışmasıyla analojilerini hazırladılar ve aynı derste sunu yaptılar. Bu sırada araştırmacı öğretmen gözlemler yaparak alan notları tutmuştur.

İki hafta süren ders anlatımları sonrasında, diğer hafta bir saat bir grubun uygulaması izlenmek suretiyle 6 grubun sunumları 6 saat sürmüştür. Bazı öğrenci grupları oyun analojisi bazıları hikaye analojisi bazı gruplar resimli analojiler hazırlayıp sınıfta sundular.

Öğrencilerin hazırladıkları analojiler sırasıyla; hasta ilaç analojisi, zenon paradoksu analojisi, golf oyunu analojisi, uçak rotası analojisi, dart oyun analojisi, futbol oyunu analojisi, gelin kaynana analojisi, şelale nehir resimleri analojisi, Sakine ile evlenmek isteyen haydar analojisidir. Bu analojilerden bir örnek aşağıda verilmiştir.

Oyunun Senaryosu*:*

İki samimi arkadaş okulun bahçesinde karşı karşıya gelirler. Konuşmaya başlarlar. Erkek olan kişi kafasında yer alan bir düşünceyi bayan arkadaşa aktarır. Aralarında güzel bir konuşma ortamı oluşur.

1.Erkek : Erkekleri kadınlardan ayıran özelliklerden biri ise her erkeğin özellikleri farklıdır.

1.Kadın : Böyle bir şey yoktur. Bütün erkekler aynıdır.

1.Erkek : Hayır! Tabi ki de bütün erkekler farklıdır.

1.Bayan : İddiaya var mısın? Ben aynı yöntem ile farklı dediğin iki erkeğe aynı soruları soracağım ve bana ikisi de aynı sonucu verecektir.

1.erkek : Tamam varım. Böle bir şey olamaz. Gidelim fakülteye istediğin iki erkek seç ve onlara senin seçtiğin yöntem ile sorunu sor ve bakalım aynı sonuca ulaşabilir misin?

1.Kadın : Tamam hadi gidelim.

1.Erkek : Peki ne soracaksın onlara?

1.Kadın : Bir gün eşin çok hasta ve onu iyileştirecek bir ilaç var fakat çok pahalı senin paran onu almaya yetmiyor. İlaç bir tane eczanede satılıyor. Sen eğer ilacı çalarsan karın iyileşecek fakat sen karını hiç görmeyeceksin ve ömür boyu hapis yatacaksın bu durumda olsan hangisini seçerdin?

1.Erkek : Güzel soru ben olsam herhalde ilacı çalardım. Çünkü onu göremesem de yaşadığını bilmek yeter bana…

1.Bayan : Güzel cevap bütün herkes bu cevabı verecektir. Çünkü bütün erkekler aynı şeyleri düşünmektedir.

1.Erkek : Bu soruda alman gereken cevap bu değil mi?

1.Kadın : Tabi ki hayır…

1.Erkek : Peki nedir?

1.Kadın : Bunu sana şimdi söylemem…

1.Erkek : Peki öyle olsun…

1.Kadın : Şu gelene soralım mı? Ne dersin

1.Kadın : (karşıdan gelen erkeğe yönelir) Affedersiniz size bir soru sorabilir miyim?

2.Erkek : Tabi ki sizi dinliyorum.

1.Kadın : (soruyu sorar)

2.Erkek : Çok basit ilacı çalardım herhalde ve onun yaşaması için her şeyi yapardım.

1.Kadın : Teşekkür ederim. (Teşekkür ettikten sonra 1.erkeğe yönelir ve gülümser)

2.Erkek : Önemli değil… Rica ederim (ve gider)

1.Erkek : Bu sorunun başka cevabı yok ama ben yinede biliyorum ki buna diğer erkek farklı cevap verecektir.

1.Kadın : Sen öyle zannet bütün erkekler aynı cevabı verecekler.

1.Erkek : Bak şu gelene soralım mı?

1.Kadın : Peki olur.

1.Kadın : Bakar mısınız size bir soru sorabilir miyim? Tezimle alakalı bana yardım ederseniz sevinirim.

3.Erkek : Tabi ki elimden gelen bir şeyse neden yardımcı olmayayım.(gülümseyerek)

1.Kadın : (soruyu sorar ve alaycı bir şekilde 1.erkeğe bakar ve gülümser aynı cevabı alacam der gibi)

3.Erkek : Ben sevdiğim bir insanı kaybetmemek için elimden geleni yaparım. Fakat benim kudretim onu kurtarmaya yetmiyorsa ve ben onu bir daha göremeyeceksem eğer ben ne kadar çok seversem seveyim bunu yapmam mantıklı değil. Oda beni seviyorsa bunu benden istemez son günlerini onunla geçirir bu suçu işlemezdim ve onu kalbimde yaşatırdım. Önemli olan bu kirli dünyada kısa olan ömrümüzü temiz bir şekilde birlikte geçirmektir.

1.Kadın : Teşekkür ederim beni şaşırttınız. (hüzünlü bir sesle)

3.Erkek : Rica ederim. Umarım size yardımım olmuştur.

1.Erkek : Bende teşekkür ederim. Beni bu cevabınızla hem mutlu ettiniz hem de utandırdınız.

3.Erkek : Rica ederim. Fakat neden sizi utandırdım onu anlayamadım.

1.Erkek : Benim gibi düşünmeyip olay da farklı sonuca gittiğiniz için.

3.Erkek : Doğru olan nasıl gittiğimiz değildir nereye gittiğimizdir.(ve yoluna devam eder)

1.Kadın : Demek ki bütün erkekler aynı değilmiş farklı sonuçlara da gidebiliyorlarmış. Buradan çıkarılması gereken dersimi bende aldım.

1.Erkek : Buna ikimiz adına da sevindim. Şimdi biz de çıkardığımız sonucu toparlayıp arkadaşlarımızla paylaşalım

1.Kadın : Peki. Ulaşılması gereken bir noktaya demek ki nereden gidersen git aynı sonuca ulaşılmıyormuş. Benim hatam buydu aynı sonuca ulaşıldığını sanıyordum. Yanılmışım.

1.Erkek : Evet. Benimde hatam ise bir noktaya nereden gidersen git aynı sonuca ulaşmak imkânsız sanıyordum. Fakat yanılmışım 2.erkek benim gibi düşünerek farklı yoldan aynı noktaya ulaştı.

1.Kadın : Demek ki bu hikayemizi limite benzetebiliriz.

1.Erkek : Nasıl? (şaşkın bir ifadeyle)

1.Kadın : çok basit limit davranıştır. Bu davranış örneklerini limitle şu şekilde açıklayalım; Aynı soru karşısında kesin olmamakla beraber farklı cevaplara ulaşıldı. Sağdan yaklaşıp a değerine sahip olan limit soldan yaklaştığımızda b değerine eşit olabilir. Yani erkeklerin bu soru karşısında limiti yok diyebiliriz.

1.Erkek : Evet. Fakat bazen de sağdan da soldan da aynı değerde davranış gösterebiliyoruz.

Öğrencilerin hazırlayıp sunduğu bu analojilerden sonra her bir grupla odak grup görüşmeleri gerçekleştirildi.

Öğrencilere ders anlatımı öncesinde yapılan başarı testi uygulamalardan sonra son test olarak öğrencilere uygulandı.

3. 5. Verilerin Analizi

Başarı testinin madde analizi için 61 kişilik öğrenci grubuna pilot çalışma yapılmıştır. Hazırlanan başarı testi puanlama anahtarı doğru ve yanlış cevaplar olarak iki kategoride incelenmiştir. Puanlama anahtarı alanında uzman bir öğretim görevlisine incelettirilmiş ve alınan dönütler doğrultusunda puanlama anahtarında doğru cevap için 1 yanlış cevap için 0 ve boş cevaplar için 0 puan verilmesi kararlaştırılmıştır. Madde analizinin yapılabilmesi için 61 kişilik grupların sınav kağıtları puan ortalamasına göre sıralanmış %27 üst grup ($n_ü$=16) ve %27 alt gup (n_a=16) belirlenmiştir. Madde analizi sonucu aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 3. Başarı Testinin Madde Analizi

Madde No	Madde Güçlük İndeksi	Madde Ayırıcılık İndeksi		Madde No	Madde Güçlük İndeksi	Madde Ayırıcılık İndeksi	
1.	0,84375	0,3125	Kolay	12.	0*	0	Zor
2.	0,96875	0,0625	Kolay	13.	0,3125	0,625	Zor
3.	0,5	1	Orta	14.	0,375	0,75	Zor
4.	0,125	0,25	Zor	15.	0,28125	0,1875	Zor
5.	0,5625	0,75	Orta	16.	0,46875	0,9375	Orta
6.	0,09375	0,1875	Zor	17.	0,28125	0,5625	Zor
7.	0,71875	0,4375	Kolay	18.	0,375	0,75	Zor
8.	0,21875	0,4375	Zor	19.	0,9375	0,15	Kolay
9.	0,21875	0,4375	Zor	20.	0,375	0,75	Zor
10.	0,28125	0,1875	Zor	21.	0,46875	0,1875	Orta
11.	0,375	0,75	Zor	Ort:	0,4390	4856	

*12.soru test maddesinden çıkarılmıştır.

12. soru olan f:Z→R $f(x) = \frac{sinx}{x}$ ise $\lim_{x\to 0} f(x)$ =? Sorusuna tüm öğrenciler yanlış cevap vemiştir. Öğrenciler tanım kümesinin tamsayılar kümesi olmasına dikkat etmeden soruya 1 cevabını vermiştir. Burada tanım kümesinin tamsayı olması ve tamsayıların yığılma noktası olmadığından limitin olamayacağı öğrencilerin gözünden kaçmış dolayısıyla hata yapmış veya kavram yanılgısına sahip oldukları için yanlış cevaplanmıştır. Bu soruya doğru cevabı veren öğrenci olmadığından bu soru test maddesinden çıkarılmış ancak ders planına dahil edilmiştir.

Testin güvenilirliği KR-20 ile hesaplanmıştır (Bademci, 2011).

$$KR_{20} = \frac{K}{K-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{S_x^2}\right]$$

K = Testin soru sayısı

p = Madde güçlüğü

q = 1- p

S_x^2 = Testin varyansı

Bu hesaplama sonucunda güvenilirlik 0,93 olarak hesaplanmıştır. Güvenilirlik 0,70 in üzerinde olması güvenilirliği oldukça yüksek bir değer olarak alınmaktadır (Büyüköztürk, 2002).

Daha sonra başarı testi asıl çalışma için uygulanabilir hale getirilmiştir. Asıl uygulamada, İlk olarak hazırlanan test Rize ilinde bir üniversitenin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 2. sınıfta öğrenim gören 30 öğrenciye ön test olarak uygulanmıştır. Puanlama anahtarının öğrenci cevaplarının daha derinlemesine analiz edilebilmesi için üç kategoride ele alınmasına karar verilmiştir. Test maddeleri yanlış ve boş için “0” kısmen doğru için “1” doğru için “2” kodlanarak cevaplandırılmıştır. Test için hazırlanan cevap anahtarı 2 ayrı matematik uzmanına değerlettirilip aralarındaki uyum için bağımsız puanlayıcılar arasındaki korelasyona bakılmıştır. 30 öğrenciye uygulanan sınavın normal dağılım gösterip göstermediği shapiro-wilk testiyle analiz edilip normal dağılım (sig<0.05) göstermediği tespit edilmiştir. Uygulamalardan sonra yapılan son test sonucu da yanlış ve boş için “0” kısmen doğru için “1” doğru için “2” kodlanarak cevaplandırılmıştır. 30 öğrenciye uygulanan sınavın normal dağılım gösterip göstermediği shapiro-wilk testiyle analiz edilip normal dağılım (sig<0.05) göstermediği tespit edilmiştir. Hazırlanan cevap anahtarı 2 ayrı matematik uzmanına değerlettirilip aralarındaki uyum için bağımsız puanlayıcılar arasındaki korelasyona bakılmıştır. Sonra ön test son test arasında anlamlı bir farklılığın olup olmadığını test etmek için Wilcoxon testi yapılmıştır.

Tablo 4. Normallik Testi İçin Tanımlayıcı İstatistik Sonuçları

			İstatistik	Standart hata
Öntest	Ortalama		,7467	,10383
	95% Güven aralığı	Üst sınır	,5343	
		Alt sınır	,9590	
	5% Kesilmiş ortalama		,7306	
	Medyan		,6000	
	Varyans		,323	
	Standart sapma		,56872	
	Minimum		,05	
	Maximum		1,75	
	Ranj		1,70	
	Çeyrekler arası ranj		,94	
	Çarpıklık		,574	,427
	Basıklık		-,980	,833
Sontest	Ortalama		1,5750	,09228
	95% Güven aralığı	Üst sınır	1,3863	
		Alt sınır	1,7637	
	5% Kesilmiş ortalama		1,6157	
	Medyan		1,8500	
	Varyans		,255	
	Standart sapma		,50544	
	Minimum		,40	
	Maximum		2,00	
	Ranj		1,60	
	Çeyrekler arası ranj		,76	
	Çarpıklık		-1,152	,427
	Basıklık		-,014	,833

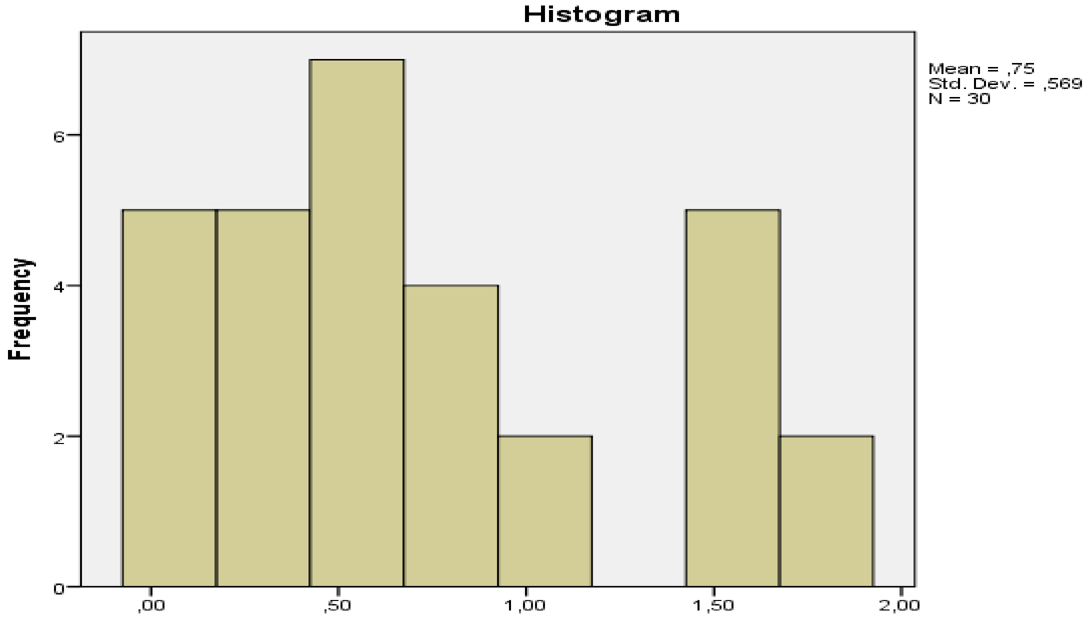
Tablo 3 den basıklık ve çarpıklık değerlerine bakıldığında çarpıklık katsayısının -1 ile +1 arasında olmadığı görülmektedir.

Tablo 5. Normallik Testi Sonuçları

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	İstatistik	df	Sig.	İstatistik	df	Sig.
öntest	,168	30	,030	,890	30	,005
sontest	,272	30	,000	,784	30	,000

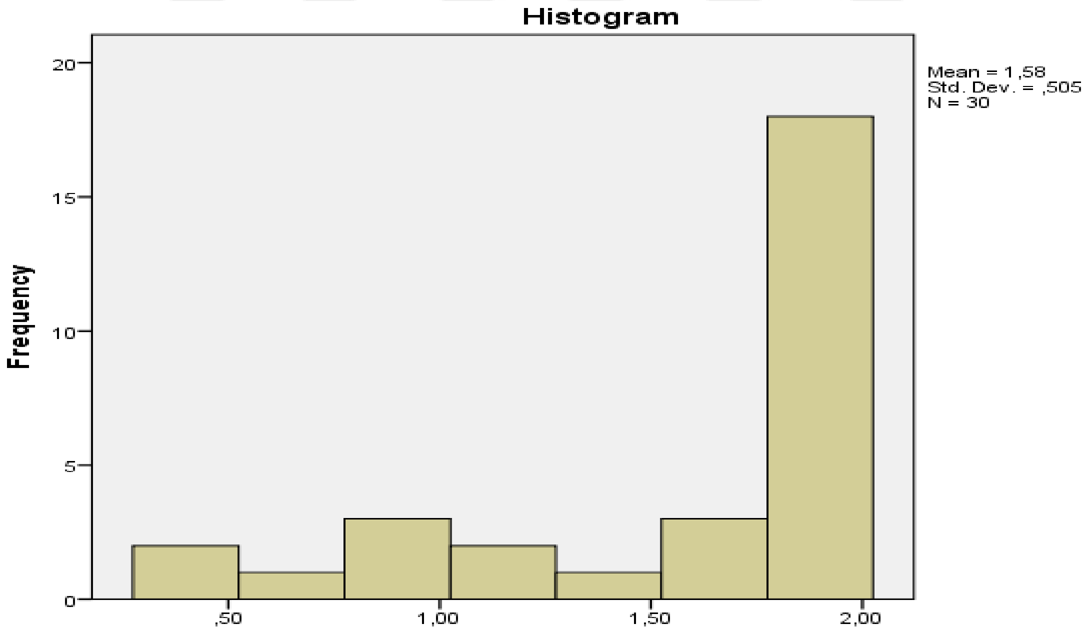
a. Lilliefors Significance Correction

Tablo 4’te Shapiro-Wilk (n=30) değerini ,05 anlamlılık düzeyine göre farkın anlamlı olduğu dolayısıyla dağılımın normal olmadığı görülmektedir.



Şekil 2. Ön testin normallik dağılımını gösteren grafik

Şekil 2'de ön test sınav sonuçlarının normal dağılım göstermediği görülmektedir.



Şekil 3. Son testin normallik dağılımını gösteren grafik

Şekil 3 te son test puanlarının normal dağılmadığını göstermektedir.

Yapılan ön test araştırmacının dışında başka bir puanlayıca okutulmuş puanlar arasındaki uyum için dağılım normal olmadığından spearman uyum testine bakılmıştır.

Tablo 6. Ön Test Uyum Yüzdesi İçin Tanımlayıcı İstatistik Tablosu

	Ortalama	Standart sapma	N
panlayıcı2	,7533	,56262	30
puanlayıcı1	,7467	,56872	30

İki puanlayıcıdan birinin ön test puan ortalaması 0,75 iken diğerinin 0,74 olduğu görülmektedir.

Tablo 7. Ön Test İçin İki Puanlayıcının Spearman Uyum İstatistiği Tablosu

		Panlayıcı 2	Puanlayıcı 1
Panlayıcı 2	Spearman korelasyon	1	1,000**
	Sig. (2-uçlu)		,000
	N	30	30
Puanlayıcı 1	Spearman korelasyon	1,000**	1
	Sig. (2-uçlu)	,000	
	N	30	30

** 0.01 düzeyindeki anlamlılık

Tablodan da görüldüğü gibi puanlayıcılar arasında toplam puanlara göre pozitif yönde güçlü bir ilişki vardır.

Daha sonra analoji destekli diyalojik yöntem ile konu anlatılmış grup çalışmaları ve grup mülakatlarından sonra aynı test yaklaşık 4 hafta sürenin sonunda tekrar 30 kişilik aynı gruba uygulanmıştır.

Son testte yine puanlama alanında uzman 2 puanlayıcı arasındaki korelasyonla ölçülmüştür.

Tablo 8. Son Test Uyum Yüzdesi İçin Tanımlayıcı İstatistik Tablosu

	Ortalama	Standart sapma	N
Puanlayıcı 1	1,5750	,50544	30
Puanlayıcı 2	1,5817	,50043	30

İki puanlayıcıdan birinin son test puan ortalaması 1,57 iken diğerinin 1,58 olduğu görülmektedir.

Tablo 9. Ön Test İçin İki Puanlayıcının Spearman Uyum İstatiği Tablosu

		Puanlayıcı 1	Puanlayıcı 2
Puanlayıcı 1	Spearman korelasyon	1	,999**
	Sig. (2-uçlu)		,000
	N	30	30
Puanlayıcı 2	Spearman korelasyon	,999**	1
	Sig. (2-uçlu)	,000	
	N	30	30

** 0.01 düzeyindeki anlamlılık

Tablodan görüldüğü üzere 2 puanlayıcının son test ortalama puanları arasında pozitif yönde güçlü bir ilişki vardır.

Ders anlatıldıktan sonra öğrencilerden limit konusuyla ilgili kendi analojilerini hazırlamaları istendi.

Öğrenciler hazırladığı analojiler "İlköğretim Programları (1.-5. Sınıflar)" kitabında yer alan "proje çalışmalarını değerlendirme formu-1" formundan esinlenerek hazırlanan ve bir uzman görüşü alınarak oluşturulan değerlendirme kriterine göre değerlendirildi (tablo 10)

Tablo 10. Analoji Ödevini Değerlendirme Kriteri

Kriter	Puan	
Motivasyon	5	Limit konusunda analoji hazırlama çalışmasına ilgi duyuldu
	5	Çalışma için anlatılanlardan notlar alındı
	10	Anlaşılmayan durumlar öğretmene soruldu
Planlama	10	Analojileri hazırlamak için birlikte karar alınıp iş bölümü sağlandı
	5	Bilgi toplama için araştırma yapıldı
	5	Zaman uygun şekilde planlandı
Bilgi Toplama	5	Hedef-kaynak belirlendi
	10	Destekleyici materyaller biraraya getirilerek gerekli bilgiler seçildi
Yazılı Rapor	5	Yazım noktalama kontrol edildi
	10	Seçilen hedef kaynak birbiriyle uyumluydu
	5	Yazılı ve görsel unsurlar birbiriyle bağlantılıydı
Sunu	10	Sunu içinde konuyu anlatabilmek için farklı etkinliklere yer verildi
	5	Konuyu anlatmak için özet hazırlandı
	5	Anlatımı destekleyici görsel materyaller kullanıldı
	5	Zaman etkili kullanıldı

Mülakatların analizi görüşmenin niçin oluşturulduğuna bağlı olarak şekillendirilebilir. Analiz aşamasını bazı araştırmacılar teypte kaydedilenleri dinleyerek, bazıları da görüşmelerin yazılı kopyasını kullanarak yapmayı uygun bulmaktadırlar (Ayas vd., 2001). Mülakatların analizi esnasında bireyin görüşmeler boyunca söylediklerinin tümünün aynen alınması uygun bulunmamaktadır. Bunun yerine mülakat esnasında araştırmacının ifadelerini ve yorumlarını çıkararak elde edilen bilgilerin bu aşamadan sonra düzenlenmesi gerekir. Bu yeni ifadeler duraksamalar, yanlış başlamalar, heyecan ve duyguların gösterimi olan bazı ifadelerin çıkartılması sonucunda elde edilmiştir. Böyle bir düzenlemenin sonucunda fazlalıklar atılmış olup daha sade veriler elde edilmiş olur (Ayas vd., 2001). Mülakatların sergilenmesi esnasında, mülakattan direk cümlelerin alınarak, bireyin düşüncelerinin olduğu gibi yansıtılmasının da çok yararlı olacağına inanılmaktadır. Nitekim araştırma konusuyla doğrudan ilişkisi olan verilerin parantez içinde verilmesiyle, okuyucu verilerle doğrudan karşı karşıya gelmekte ve verilerin ne anlama geldiğine kendi yorumlarıyla karar vermektedir (Çepni, 2001).

Bu çalışmada grup mülakatlar yapıldı. Mülakatlar sırasında araştırmacı not tuttu ve mülakatlardan sonra tuttuğu notları temize geçti. Aynı zamanda her gruba mülakat formu dağıtarak öğrencilerden mülakat sorularına verdikleri cevapları yazmaları istendi. Öğrencilerin kaydettikleri notlar ile araştırmacının kayıtları karşılaştırılarak verilerin analizi yapıldı. Böylece mülakatlar sırasında meydana gelebilecek olan algılama eksikleri veya yanlış anlamalar engellenmiş olup, verilerin geçerliliği ve güvenilirliği de arttırılmış oldu. Son olarak öğrencilerin ana sorular etrafında verdikleri cevapların benzerliklerine göre analiz yapıldı ve öğrencilerin sorularla ilişkili olarak verdikleri cevaplar arasından seçilen özgün cevaplar, örnek teşkil etmesi açısından doğrudan sunuldu. Yapılan gözlemler mülakatlar analiz edilirken görüşlerin davranışlara ne derece yansıdığı konusunda ve sınıf ortamı, sınıf ortamının dikkati ve ilgisi açısından karşılaştırılmak üzere kullanıldı. Literatürde temel alınarak gözlem ve mülakatlar karşılaştırılmalı olarak yorumlandı. Her bir öğrenci Ö1, Ö2 şeklinde isimlendirildi. Öğrenciler için ders uygulamalarında ve mülakatlarda yapılan isimlendirme bire bir aynıdır.

3. 6. Araştırmanın Yapı Geçerliliği

Araştırmada yapı geçerliliği, birden fazla veri türünün veri toplama sürecinde kullanılması, toplanan verilere ilişkin bir kanıt zincirinin oluşturulması ve son olarak da hazırlanan durum çalışma raporunun veri toplama surecinde rol almış deneklerden birine okutulması ve görüşünün alınmasıdır (Yıldırım ve Simsek, 2013).

Bu araştırmanın yapı geçerliliği gözlem ve gorusme gibi birden fazla veri toplama yöntemi kullanılarak ve araştırma raporunun bir matematik uzmanı ve her gruptan bir öğretmen adayına okutulmasıyla sağlanmıştır.

3. 7. Araştırmanın İç Geçerliği

Araştırmanın iç geçerliliği araştırmacı tarafından dışsal etkilerin ne kadar kontrol edilebildiğine bağlıdır. Eğer, araştırmacı tarafından dış etkenler kontrol edilemezse o zaman deney grubunda olabilecek değişikliklerin deneysel çalışmadan mı yoksa bazı dış etkenlerden mi olduğuna ilişkin sağlıklı bir karar verilemez. (Kabaca, 2006) Zaman araştırmanın iç geçerliliğinde önemli bir boyuttur.

Çalışma çok uzun bir zaman dilimini kapsayacak şekilde tasarlanması durumunda, öğrencilerin dikkatinin dağılması, sıkılması ve öğretmenin öğretimine alışmaları gibi başka faktörlerin devreye girmesi durumu ortaya çıkabilir. Bu durum ise araştırmadan elde edilecek bulguları etkileyebilir. Bu çalışma, 4 haftalık bir sürede gerçekleştirilmiştir. Bu çok uzun uzun bir süre ya da çok kısa bir süre değildir. Bu nedenle, araştırma süresince öğrencilerin dikkatinin dağılması, sıkılması, öğretmenin öğretim tarzına alışmaları, psikolojik ve biyolojik değişikliğe uğraması gibi dıs faktörlerin etkisini göstermez. Aynı zamanda öğrencilerin aynı yaş grubundan ve aynı çevreden seçilmesi araştırma sonuçlarını etkileyemeyecek ve dengeleri değiştiremeyecektir. Ayrıca araştırmacının kendisine gönüllü yardımcı olan iki uzmanla çalışmasıyla araştırmaya araştırmacı ön yargısının katılmasının önüne geçilmiştir.

3. 8. Araştırmanın Dış Geçerliği

Bir araştırmanın dış geçerliği, araştırmadan elde edilen sonuçların, farklı zaman dilimlerine, farklı koşullara ve farklı kişilere ne kadar genelleştirilebileceğini kapsar (Kabaca, 2006).

Araştırmaya katılan öğrenciler bir devlet üniversitesinin matematik bölümünde okuyan öğrencilerdir. Bu üniversitenin matematik bölümü puanı da ülkemizdeki diğer üniversitelerin matematik bölümleri ile karşılaştırıldığında orta seviyededir. Araştırma grubu öğrencileri, sosyo-ekonomik durumları ülke şartlarına göre orta seviyede ve matematik başarıları yine ülkemiz şartlarında orta seviyede olan öğrencilerdir. Kişisel özellikleri bakımından, kendi akranlarının sahip olması gereken genel özellikleri göstermektedirler. Dolayısıyla araştırma bulguları ve sonuçları her ne kadar genelleme mecburiyeti taşımasa da bu tanıma uygun bir alana genelleştirilebilir.

4. BULGULAR

Bu araştırma için Rize'de bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği 2. Sınıf öğrencilerinden oluşan 30 kişilik öğrenci grubuna güz dönemi dönem başında 20 sorudan oluşan limit sınavı yapıldı. Daha sonra aynı öğrenci grubuna analiz-1 dersinde limit konusu analoji destekli diyalojik yöntem ile anlatıldı. Dönem sonuna doğru aynı sınav yine aynı 30 öğrenciye tekrar uygulandı. Öğrenci grup ödevleri izlendi ve değerlendirildi. Öğrencilerle grup mülakatları yapıldı. Bu bölümde toplanan veriler araştırmanın soruları ile ilişkili başlıklar altında sunulacaktır.

4. 1. Analoji Destekli Diyalojik Yöntem ile Yürütülen Derslerin Öğrenci Başarılarına Etkisi ile İlgili Bulgular

Bu araştırma için Rize'de bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği 2. Sınıf öğrencilerinden oluşan 30 kişilik öğrenci grubuna güz dönemi dönem başında 20 sorudan oluşan limit sınavı yapıldı. Daha sonra aynı öğrenci grubuna analiz-1 dersinde limit konusu analoji destekli diyalojik yöntem ile anlatıldı. Dönem sonuna doğru aynı sınav yine aynı 30 öğrenciye tekrar uygulandı.

4. 1. 1. İlk Sınavdan Elde Edilen İstatistiksel Bulgular

Aşağıda öğrencilerin ilk sınava verdikleri cevapların yüzde ve frekans tablosu verilmiştir.

Tablo 11. Öğrencilerin İlk Sınav Sorularına Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Tablosu

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş
1	25(%83.3)	1(%3.3)	4(%13.3)	-
2	24(%80)	2(%6.6)	3(%10)	1(%3.3)
3	8(%26.6)	13(%43.3)	8(%26.6)	1(%3.3)
4	1(%3.3)	12(%40)	13(%43.3)	4(%13.3)
5	9(%30)	15(%50)	5(%16.6)	1(%3.3)
6	2(%6.6)	11(%36.6)	9(%30)	8(%26.6)
7	13(%43.3)	5(%16.6)	7(%23.3)	5(%16.6)
8	2(%6.6)	9(%30)	13(%43.3)	6(%20)
9	2(%6.6)	6(%20)	12(%40)	10(%33.3)
10	-	-	25(%83.3)	5(%16.6)
11	7(%23.3)	15(%50)	6(%20)	2(%6.6)
12	5(%16.6)	1(%3.3)	7(%23.3)	17(%56.6)
13	7(%23.3)	11(%36.6)	6(%20)	6(%20)

Tablo 11'in devamı

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş
14	-	5(%16.6)	17(%56.6)	8(%26.6)
15	8(%26.6)	3(%10)	13(%43.3)	6(%20)
16	4(%13.3)	3(%10)	11(%36.6)	12(%40)
17	7(%23.3)	1(%3.3)	8(%26.6)	14(%46.6)
18	17(%56.6)	3(%10)	5(%16.6)	5(%16.6)
19	7(%23.3)	4(%13.3)	8(%26.6)	11(%36.6)
20	11(%36.6)	12(%40)	2(%6.6)	5(%16.6)

İlk sınav yapıldıktan sonra aynı öğrenci grubuna analiz-1 dersinde limit konusu analoji destekli diyalojik yöntem ile anlatıldı. Dönem sonuna doğru aynı sınav aynı 30 öğrenciye tekrar uygulandı.

4. 1. 2. Son Sınavdan Elde Edilen İstatistiksel Bulgular

Aşağıda öğrencilerin son sınava verdikleri cevapların yüzde ve frekans tablosu verilmiştir.

Tablo 12. Öğrencilerin Son Sınav Sorularına Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Tablosu

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş
1	29(%96.6)	1(%3.3)	-	-
2	28(%93.3)	2(%6.6)	-	-
3	10(%33.3)	12(%40)	5(%16.6)	3(%10)
4	25(%83.3)	3(%10)	2(%6.6)	-
5	19(%63.3)	2(%6.6)	9(%30)	-
6	23(%76.6)	5(%16.6)	2(%6.6)	-
7	16(%53.3)	2(%6.6)	8(%26.6)	4(%13.3)
8	18(%60)	6(%20)	5(%16.6)	1(%3.3)
9	18(%60)	6(%20)	5(%16.6)	1(%3.3)
10	9(%30)	6(%20)	11(%36.6)	4(%13.3)
11	24(%80)	3(%10)	1(%3.3)	2(%6.6)
12	21(%70)	4(%13.3)	2(%6.6)	3(%10)
13	28(%93.3)	2(%6.6)	-	-
14	19(%63.3)	2(%6.6)	8(%26.6)	1(%3.3)
15	29(%96.6)	1(%3.3)	-	-
16	22(%73.3)	5(%16.6)	1(%3.3)	2(%6.6)
17	29(%96.6)	1(%3.3)	-	-
18	22(%73.3)	6(%20)	1(%3.3)	1(%3.3)
19	22(%73.3)	5(%16.6)	-	3(%10)
20	18(%60)	11(%36.6)	-	1(%3.3)

30 öğrenciye uygulanan sınavın normal dağılım gösterip göstermediği shapiro-wilk testiyle analiz edilip normal dağılım (sig<0.05) göstermediği tespit edilmiş daha sonra bağımlı örneklem için Wilcoxon testi ile ön-son test sonuçları karşılaştırılmıştır. Ön-son test sınav sonuçları arasındaki farkın anlamlılığı 0.05 anlamlılık düzeyinde incelenerek aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 13. Ön Test Son Test Sonuçları Tanımlayıcı İstatistik Tablosu

		N	Ortalama sıra	Toplam sıra
Ön test-son test	Negatif sıralar	0[a]	,00	,00
	Pozitif sıralar	30[b]	15,50	465,00
	Bağlar	0[c]		
	Toplam	30		

a. ort_sontest < ortalama
b. ort_sontest > ortalama
c. ort_sontest = ortalama

Tablo 13 de 30 kişiye uygulanan ön test son test ortalama farkın 15,50 olduğu görülmektedir. Ön test son test dağılımının normal olmaması dolayısıyla yapılan nonparametrik testi olan Wilcoxon anlamlılık testi sonucu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 14. Ön Test Son Test Puanları Arasındaki Farkın Anlamlılık Tablosu

	Ön test- son test
Z	-4,786[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test
b. Based on negative ranks.

Tablo14 den de görüldüğü gibi öğrencilerin ders işlemeden önce aldıkları sınav sonuçları ile ders işledikten sonra aldıkları sınav sonuç puanları arasında anlamlı bir fark vardır. Analoji destekli diyalojik yöntemle işlenilen dersler limit konusunda öğrenci başarılarını son test lehine arttırmıştır.

4. 1. 3. Analoji Destekli Diyalojik Yöntem ile Yürütülen Derslerle İlgili Bulgular

İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programındaki Analiz-1 dersindeki limit konusunun kazanımları göz önüne alınarak hazırlanan analoji destekli diyalojik yönteme dayalı 6 ders 2016-2017 güz döneminde 4 hafta süreyle yürütüldü. Bu dersler ve derslerle ilgili alan notlarına dayalı bulgular aşağıda verilmiştir.

4. 1. 3. 1. Birinci Dersle ilgili Bulgular

Ders 1

Hedef: epsilon kavramı, keyfi epsilon, epsilon delik civar, sonsuzluk civarı.

Kaynak: Archill paradoksu, taramalı tünelleme mikroskobu (STM)

Süre: 40 dakika

Araçlar: tablet, projeksiyon, yazı tahtası

A	*: A noktası ile B noktası arasındaki mesafe L olsun. A dan B ye doğru hareket eden bir kişi her defasında kalan mesafenin yarısını alırsa B ye ulaşabilir mi?*
Ö1	*: ulaşamaz*
A	*: niye?*
Ö1	*: her zaman bir mesafe kalacaktır*
A	*: hıım*
Ö2	*: sonsuz zaman geçseydi ulaşabilirdi*
A	*: gene bir mesafe kalmaz mıydı?*
Ö2	*: kalmaz*
A	*: yani sonsuza kadar devam edilse bu mesafe küçülmeye devam eder*
Ö2	*: 0 olur*
Ö3	*: 0 olmaz 0 a yaklaşır*
Ö2	*: x sonsuza giderken 1/x in limitini alırsak 0 olur.*
A	*: 0 mı olur 0^+ mı olur*
A	*: böyle bir mesafeye örnek verebilir misiniz?*
Ö4	*: 0,00000000000123*
A	*: daha küçük mesafe verebilir misiniz?*
Ö5	*: 0,00000000000000000000000101*
A	*: daha da küçük mesafe verebilir misiniz?*
Ö5	*: evet*
A	*: bu küçültme işlemine ne kadar devam edebilir siniz?*
Ö6	*: sonsuza kadar*
A	*: A dan B ye giden kişi 42 numara ayakkabılarla bu mesafeleri alabilir mi?*
Ö7	*: alamaz*
A	*: bir kuantum seviyesinde olsaydınız bu mesafeleri alabilir miydiniz?*
Ö7	*: o zaman belki alabilirdik.*
A	*: bir kuantum seviyesinde olsaydınız B ye yukarıdaki şekilde yazabileceğiniz istediğiniz kadar küçük mesafeden daha yakın olabilir miydiniz?*
Ö7	*: evet daha yakın olabilirdik*

A : işte bu mesafeleri 42 numaralı ayakkabıyla alamadığımızdan bu alemde B ye ulaşırız. Fakat kuantum seviyesinde olsaydık B ye istediğimiz kadar yaklaşabilirdik. Demek ki ortadaki paradoks bulunduğumuz alemden kaynaklanmaktadır. Yani kuantum seviyesinde konuşup bu dünyada 42 numaralı ayakkabıyla yürümekten kaynaklı bir durumdur.

A : Burada konuştuğumuz mesafelere geri dönelim.

Tanım : epsilon=ε İstediğiniz kadar küçük pozitif sayıdan daha küçük sayı

A : “$\forall \varepsilon>0$ için” ifadesi sizce ne anlama gelir?

Ö2 : her küçük sayıdan daha küçük pozitif sayı

Ö6 : yazabileceğimiz bütün ε lar için

Ö8 : her epsilon için

Ö9 : yazılabilen tüm epsilonların alayı için

A : $x \in R$ ve $\forall \varepsilon>0$ için $0 < |x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow$? ifadesi sizce ne anlama gelir?

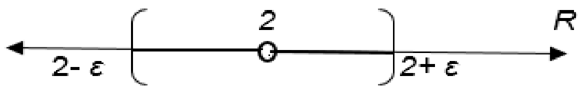
Ö1 : x=2 dir

A : $0 < |x-2|$ olduğundan x=2 olamaz. Çünkü mutlak değeri sıfırdan büyük verdik.

A : $x \in R$ ve $|x-2| < \varepsilon$, tüm epsilonlar için ne anlama gelir?

Ö1 : $-\varepsilon+2 < x < \varepsilon+2$, $x \in R$

A : bu dediğin ifadeyi sayı doğrusunda gösterelim



A : ε kuantum seviyesinde bir mesafe olduğundan yukarıdaki şekil taramalı tünelleme mikroskobu (STM) ile görülen bir görüntüdür. Bu aralıkta bulunan x ler ε küçültüldükçe nasıl bir davranış gösterir?

Ö1 : ε küçüldükçe x ler 2 ye yaklaşır

A : ε küçüldükçe x ler 2 ye her iki yönden yaklaşır, peki ne kadar yaklaşabilir?

Ö1 : istediğimiz kadar yaklaşabilir

A : o halde $x \in R$ ve $\forall \varepsilon>0$ için $0 < |x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow x \to 2$ dir. Buradaki $x \to 2$, 2 civarındaki x değişkenleri anlamına gelir. Diğer bir ifadeyle 2 nin keyfi ε delik civarındaki x değişkenleridir. Buradaki x değişkenlerinin reel sayı olduğu ve sonsuz çoklukta oldukları açıktır. x’ i rasyonel sayı olarak alsaydık gene bu komşulukta sonsuz tane rasyonel sayı olduğunu söyleyebilirdik.

A : Ancak x ler reel sayı veya rasyonel sayı değil de tamsayı olarak alınsaydı bu bahsedilen civarda x tamsayılarından bulunur muydu? Diğer bir ifadeyle 2 nin keyfi ε delik civarında tamsayılar olabilir miydi?

Ö2 : 2 ye en yakın tamsayılar 1 ve 3 dür.

A : Ancak mikroskopla bakıyoruz 2 nin keyfi ε civarında tamsayı olabilir mi?

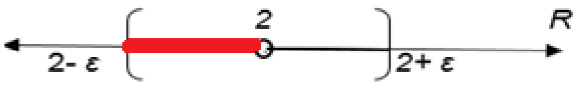
Ö2 : olamaz

A : $x \to 2$ ifadesini bir yerden hatırlıyor musunuz?

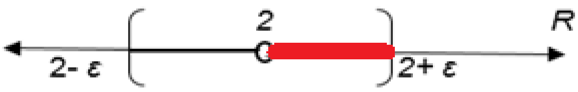
Ö1 : $lim_{x \to 2} f(x)$ ifadesindeki x → 2 mi? Aynı şey mi?

A : tamamen aynı anlamdadır ilerleyen derslerde geniş olarak görülecektir. Biz şimdi x → 2 mevzusunu biraz daha derinleştirelim.

xϵR ve ∀ε>0 için 2- ε < x < 2 ⇔ x → 2⁻



A : xϵR ve ∀ε>0 için 2 < x < 2 + ε ⇔ x → 2^+



A : Yukarıdaki tanım ve şekillerden yola çıkarak ve bu şekillere keyfi ε için taramalı tünelleme mikroskobu(STM) ile bakıldığını düşünerek x → 2^- ve x → 2^+ ifadelerini yorumlayınız.

A : bu ifade için ne söylersiniz?

Ö5 : 2 ye soldan ve sağdan yaklaşmak

A : niye sağdan ve soldan ifadelerini kullandın?

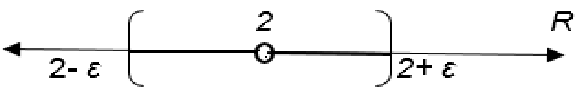
Ö5 : lisede öyle görmüştük

A : sağdan ve soldan yerine 2 ye 2 den büyük değişkenlerle ve 2 ye 2 den küçük değişkenlerle yaklaşmak dersek daha doğru olmaz mı?

Ö5 : evet diyebiliriz

A : şimdi 2 nin keyfi verilmiş bir epsilon delik komşuluğunu yazmaya çalışalım.

Keyfi bir ε>0 sayısı verilsin. 2 nin ε delik komşuluğu



şeklindedir.

A : Buradaki sonsuz x değişkenlerini bir küme olarak yazmak istesek nasıl yazarız?

Cevap yok…

A : K(2, ε) /{ 2 }={ $x: 0 < Ix - 2I < \varepsilon$, $x\epsilon R$ } biçiminde yazabiliriz. Bu delik komşuluk tanımını daha sonra yığılma noktası kavramının matematiksel ifadesini yazarken kullanacağız.

A *: şimdi x → ∞ ve x → -∞ ifadelerinin ne anlama geldiğini ve matematiksel olarak nasıl yazılacağını konuşalım.*

A *: şimdi de istediğiniz kadar büyük sayıdan daha büyük bir sayı söyleyebilir misiniz?*

Ö8 *: evet mesela* $10^{100000000}$ *gibi*

A *: daha büyüğünü söyleyebilir misiniz?*

Ö8 *:* $10^{10000000000000000}+10$

A *: o zaman söyleyebileceğiniz çok büyük sayıdan daha büyük sayı olarak M notasyonunu kullanalım. ∀M > 0 için x > M ⇔ ne anlama gelir?*

A *: Yani benim x im sizin söyleyebileceğiniz istediğiniz kadar büyük tüm sayılardan daha büyük ise x nerdedir?*

Ö9 *: sonsuzda*

A *: bunu nasıl ifade ederiz?*

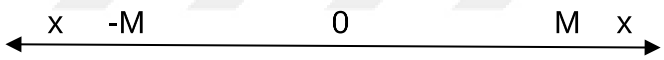
Ö9 *: x → ∞*

A *: demek ki ∀M > 0 için x > M ⇔ x → ∞*

A *: peki o zaman ∀M > 0 için ……….. ⇔ x → -∞ ifadesinin sağlanması için nokta nokta olan yere ne yazılmalıdır?*

Ö8 *: ∀M > 0 için x < -M ⇔ x → -∞*

A *: güzel aferin*



A *: M nin istediğiniz kadar büyük alındığında yukarıda söylemek istediklerimizi daha iyi anladınız mı?*

Anladık sesleri yükseldi.

A *: buraya kadar gördüğümüz civar ve yaklaşım mevzularını bir sonraki ders yığılma noktası kavramına ve oradan da limit kavramına bağlayacağız.*

Bu ders sürecinden önce öğrencilerin ε kavramıyla ilgili bilgilerinin kısıtlı olduğu ön testten görülmüştü. Ders sonunda ε kavramının yaşadığımız alemin bir kavramı olmadığı aslında kuantum seviyesinde istediğimiz kadar küçük seçebileceğimiz pozitif bir sayıyı ifade ettiği algısının öğrencilerde oluştuğu görülmüştür. Bu tür küçüklüklerle nasıl matematik yapılabileceğine dair bir algının öğrencilerde oluştuğu ve ε delik civarın ancak çok kuvvetli mikroskopla görülebilecek kadar küçük olduğunun öğrenciler tarafından algılandığı görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğrencilerin $x = a$ ve $x \to a$ ifadeleri arasındaki farkın ne olduğunu algıladıkları gözlenmiştir. Öğrenciler kuantum seviyesindeki bir kavramın matematiksel notasyonlar kullanılarak nasıl yaşadığımız aleme entegre edildiğini görmüşlerdir. Aynı şekilde, istediğiniz kadar büyük pozitif sayıdan daha büyük şeklinde ifade edilen M kavramını algılayan öğrencilerin $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin matematiksel ifadelerini zorlanmadan yazabildikleri gözlenmiştir.

4. 1. 3. 2. İkinci Dersle ilgili Bulgular

Ders 2
Hedef: Yığılma noktası
Kaynak: Kuantum tanecikleri
Süre: 40 dakika
Araçlar: Tablet, projeksiyon, yazı tahtası

A : *Bu derse bir örnek ile başlayalım:*
Örnek: f: Z →R f(x)= $\frac{sinx}{x}$ *olsun. Aşağıdaki limitleri inceleyiniz.* $lim_{x\to 0} f(x) =?$ $lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) =?$

Ö10 : *birinci limit 1 ikinci limit x yerine* $\frac{\pi}{2}$ *yazarak hesaplayabiliriz.*

Ö11 : *birinci limit 1 ikinci limit ise* $\frac{\pi}{2}$ *tamsayı olmadığından hesaplanamaz.*

A : *hangi arkadaşınız doğru söyledi?*

Ö12 : *Ö11 doğru dedi.*

Ö13 : *evet Ö11 doğru*

Ö14 : *bence Ö10 doğru*

A : *arkadaşlar ikisi de yanlış söyledi desem ne dersiniz?*

Ö10 : $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ *olduğunu biliyorduk. Diğerinde yerine yazdık neden yanlış oldu?*

A : *fonksiyonun hangi kümede tanımlandığına dikkat ediyor musunuz?*

Ö10 : *fonksiyon tamsayılarda tanımlı*

A : *evet tamsayılarda tanımlı peki x→0 ne demek?*

Ö11 : *bir önceki derste görmüştük. 0'ın istediğimiz kadar yakınındaki x ler, yani sıfırın civarı*

A : *aynen öyle, ancak 0'ın keyfi ε civarında tamsayı olabilir mi? Diğer bir ifadeyle tamsayılarla 0'a ne kadar yaklaşabiliriz?*

Ö9 : *en yakın olanlar 1 ve -1 nasıl olacak şimdi?*

A : *demek ki tamsayılarla 0'a istediğimiz kadar yaklaşamıyoruz. Dolayısıyla tamsayı olan x ler için x→0 anlamsızdır. Hatta herhangi bir* $x_0 \in R$ *için x tamsayı olmak üzere* $x\to x_0$ *ifadesi anlamsız olacaktır.*

Ö8 : *tamsayılardan tanımlı bir fonksiyonda limit bakılamaz mı?*

A : *evet bakılamaz. Sizin kural olarak bildiğiniz :* $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ *de x değişkeni reel sayıdır.*

A : Bu limitin tamsayılarda anlamsız R de ise $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ olmasını sağlayan nedir?

Ö12 : 0'a tamsayılarla istediğimiz kadar yaklaşamıyoruz. Fakat 0 a reel sayılarla istediğimiz kadar yaklaşabiliyoruz. Sanırım bundan.

A : yığılma noktası diye bir şey duydunuz mu?

Sessizlik…

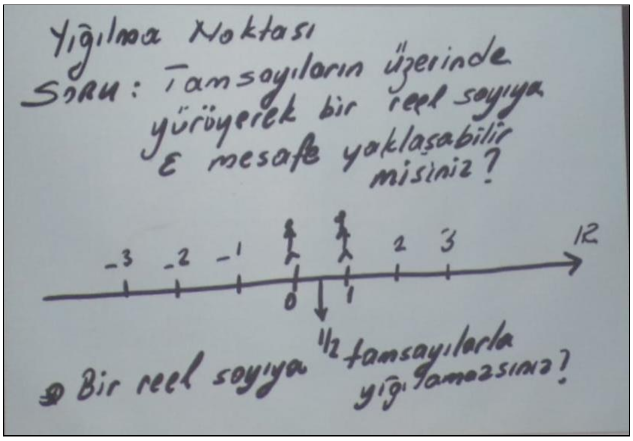
A : f:B→ R ve $x_0 \epsilon R$ olsun. $lim_{x \to x_0} f(x)$ limitinin anlamlı olması için ne gerekir? Öncelikle x_0 ın B kümesine ait olup olmamasının hiçbir önemi yoktur. Çünkü x→ x_0 demek x_0 ın keyfi epsilon delik civarındaki x değişkenleri anlamına gelmektedir, fonksiyonun tam olarak x_0 da ne değer aldığının ya da almadığının limitle hiçbir ilişkisi yoktur. Diğer taraftan x_0 ın keyfi epsilon delik civarında B ye ait elemanların mevcut olması gerekmektedir. Bu mevcudiyeti garanti altına alan ve limiti anlamlı kılan kavram yığılma noktası kavramıdır. Yani limitin anlamlı olması için x_0 ın B nin bir yığılma noktası olması gerekmektedir.

A : x_0 B nin yığılma noktası nasıl olur?

A : B boştan farklı bir küme ve x_0 bir reel sayı olsun. (x_0, B ye ait olmak zorunda değildir. Dikkat edin) B nin yığılma noktaları kümesi B' ile gösterilsin. $x_0 \epsilon B' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; için \; \left\{ K\left(x_{0,}\varepsilon\right) \backslash \{x_0\} \right\} \cap B \neq \emptyset$

A : bu tanımdan ne anladınız?

Ö14 : hiçbir şey anlamadım hocam



Şekil 4. İkinci dersteki yazı tahtası görüntüsü

A : tahtada yazdığıma bakın. Şöyle açıklamaya çalışalım: sayı doğrusu üzerinde yaşayan kuantum tanecikleri olduğumuzu varsayalım. x_0 reel sayısına sadece tamsayıların üzerine basarak istediğimiz kadar yaklaşabilir miyiz? Burada kastımız x_0 ın keyfi epsilon delik civarına girebilir miyiz? Sorusudur.

Ö14 : tamsayılara basarak yürürsek bunu yapamayız.

A : reel sayılara basarak yürürsek ?

Ö14 : reel sayılar üzerine basarak bunu yapabiliriz.

A : rasyonel sayılara basarak x_0 ın keyfi epsilon delik civarına girebilir miyiz?

Ö15 : evet x_0 ın keyfi epsilon delik civarına rasyonel sayılarla girebiliriz.

A : x_0 ın keyfi epsilon delik civarına kaçınız rasyonel veya reel sayılara basarak girebilir?

Ö14 : hepimiz

A : o zaman x_0 ın keyfi epsilon delik civarında kaç tane reel veya rasyonel sayı vardır?

Ö15 : sonsuz

A : x_0 ın keyfi epsilon delik civarına reel veya rasyonel sayılar yığılmış mıdır?

Ö14 : evet

A : işte bu x_0 a reel sayıların bir yığılma noktası denir. Aynı zamanda bu x_0 rasyonel sayıların da bir yığılma noktasıdır.

A : bu durumda : keyfi $x_0 \epsilon R$ için

$$x_0 \epsilon R' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; için \; \left\{K\left(x_{0,}\varepsilon\right) \backslash \{x_0\}\right\} \cap R \neq \emptyset$$

$$x_0 \epsilon Q' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; için \; \left\{K\left(x_{0,}\varepsilon\right) \backslash \{x_0\}\right\} \cap Q \neq \emptyset$$

İfadeleri yukarıda anlattığımız mevzunun matematiksel ifadesi olmaktadır.

A : R' = R, Q'=R olduğunu görebildiniz mi?

A : yukarıda verdiğimiz yığılma noktası tanımının değilini alarak yığılma noktası olmamanın tanımını yazmaya çalışalım.

Açık olarak x_0 ın B nin bir yığılma noktası olmaması için x_0 ın, içinde B nin elemanlarını barındırmayan en az bir ε_0 delik civarının mevcut olması gerekir. Bu açıklamayı matematiksel olarak ifade edersek;

$$x_0 \notin B' \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \; öyle \; ki \; \left\{K\left(x_{0,}\varepsilon_0\right) \backslash \{x_0\}\right\} \cap B = \emptyset$$

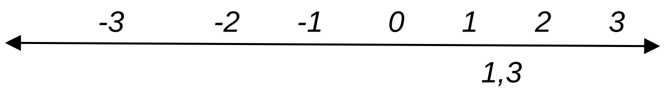
şeklinde yazabiliriz. Bu ifadenin yığılma noktası tanımının değili olduğu görülmektedir.

Yukarıda konuştuğumuz gibi herhangi bir $x_0$reel sayısına tamsayılarla istediğimiz kadar yaklaşamadığımızdan, x_0 ın içinde tamsayı barındırmayan en az bir ε_0 delik komşuluğu vardır. Yani $x_0 \notin Z'$ dir. Diğer bir ifadeyle;

$$x_0 \notin Z' \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \; öyle \; ki \; \left\{K\left(x_{0,}\varepsilon_0\right) \backslash \{x_0\}\right\} \cap Z = \emptyset$$

Herhangi bir $x_0$reel sayısı için bu durum gerçekleştiğinden açıkça görülmektedir ki Z'=∅ dır.

A : örnek:



1,3 reel sayısına tamsayılarla yaklaştığımızı düşünelim. En yakın tamsayı 1 dir. 1 ile 1,3 arasındaki uzaklık 0,3 dür. ε_0=0,003 olsun. Bu durumda 1,3 ün ε_0 delik komşuluğunda tamsayı yoktur.

Yani $1{,}3 \notin Z' \Leftrightarrow \varepsilon_0 = 0{,}003 > 0\ için\ \{K(1{,}3, \varepsilon_0)\backslash\{1{,}3\}\} \cap Z = \emptyset$

A *: yığılma noktası kavramını hissettiniz mi? Anladınız mı?*

Ö10 *: evet*

Ö13 *: biraz anladım galiba*

Ö14 *: emin değilim*

A *: oğlum senin adın ne?*

Ö14 *: Ali*

A *: arkadaşlar Ali dese ki “ben bir yığılma noktasıyım” o zaman Ali’ye sorarlar “sana hangi kümenin sonsuz elemanı yığılıyor? Senin keyfi delik epsilon komşuluğunda hangi kümenin sonsuz elemanı var? Eğer bu soruya olumlu cevap verirsen sen o kümenin bir yığılma noktası olursun. Sen bir reel sayı olsaydın tamsayılar sana yığılamazdı ama rasyonel ve ya reel sayılar sana yığılabilirdi. Daha da anlamıyorsanız yapacak bişey yok! Şimdi anladınız mı?*

Ö10 *: evet*

Ö13 *: evet hocam*

Ö14 *: anladık hocam*

A *: madem anladınız şu soruya cevap verin. Bir kümenin yığılma noktası olmak için o kümeye ait olmak gerekir mi?*

Ö10 *: gerekmez. Delik komşuluğun anlamı o zaten.*

A *: bir örnek verelim.*

A *:* $\sqrt{2}$ *irrasyonel sayısı rasyonel sayıların bir yığılma noktası mıdır?*

Ö10 *: evet hocam. Çünkü* $\sqrt{2}$ *nin keyfi epsilon delik komşuluğunda sonsuz rasyonel sayı vardır.* $\sqrt{2} \epsilon Q' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ için\ \{K(\sqrt{2}, \varepsilon)\backslash\{\sqrt{2}\}\} \cap Q \neq \emptyset$

A *: bravo*

A *: Bir kümenin yığılma noktası olmak için o kümeye ait olmak gerekmez.*

A *: Sonuç olarak;*

f:B→ R ve $x_0 \epsilon R$ (x_0 B de olmak zorunda değil) olsun. $lim_{x \to x_0} f(x)$ *limitinin anlamlı olabilmesi için $x_0 \epsilon B'$ olmak zorundadır. Demek ki bir limite bakıldığında o limitin önce anlamlı olması gerekir. Anlamlı ise limiti bulmak başka bir konudur. Şimdi ilk sorduğumuz soruya geri gelelim.*

Örnek: f: Z →R f(x)= $\frac{sinx}{x}$ *olsun. Aşağıdaki limitleri inceleyiniz.*

$lim_{x \to 0} f(x)$ =? $lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ =? *Şimdi tekrar cevap verin.*

Ö15 *: Z nin yığılma noktaları kümesi boş küme olduğundan her iki limitte anlamsızdır.*

Ö16 *: Z den tanımlı bir fonksiyonun limitinin anlamsız olduğunu söyleyebilir miyiz?*

A *: Eveeet. Z ve herhangi bir alt kümesinden tanımlı bir fonksiyonun herhangi bir x_0 civarında limiti anlamsızdır.*

A *: demek ki şunu çok iyi anlamalıyız ki f:B→ R $lim_{x \to x_0} f(x)$ limitinin anlamlı olabilmesi için x_0 ın B kümesinin yığılma noktası olması gerekir.*

A *: Bu limitin hesabında x_0 ın B kümesine ait olup olmamasının hiçbir önemi yoktur. Bu yüzden bir limitte yerine yazarak limit hesaplamak diye bir durum söz konusu değildir. Bazı örneklerde yerine yazılıyormuş gibi limit davranışları görülebilir. Bu durumu yerine yazmıyoruz fakat limit yerine yazıyormuşuz gibi davranıyor şeklinde açıklayabiliriz. Önümüzdeki derste bu mevzudan devam edeceğiz.*

Bu ders sürecinden önce yığılma noktası kavramı ve yığılma noktası kavramının limitle olan ilişkisinin öğrenciler tarafından tam olarak algılanmadığı ön test sonuçlarında görülmüştü. İkinci ders sürecinde ve sonunda bir kümenin yığılma noktası olabilmek için kümeye ait olup olmamanın önemli olmadığının öğrenciler tarafından görüldüğü gözlenmiştir. Bir noktanın bir kümenin yığılma noktası olabilmesi için o noktanın keyfi ε delik civarında kümeye ait sonsuz eleman olması gerektiği bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Ders sonunda öğrencilerin bu bilgiyi matematik notasyonları ile ifade edebildikleri görülmüştür. Öğrencilerin yığılma noktalarını bulma örneklerini çözebildikleri gözlenmiştir. Limitin ancak fonksiyonun tanım kümesinin yığılma noktalarında bakılabileceği ve bunun dışındaki durumlarda limit almanın anlamsız olacağı bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Birinci derste kullanılan kuantum seviyesi bakış açısı bu derste de reel sayı ekseni üzerinde kuantum taneciği olarak yürüme şeklinde kullanılmıştır. Öğrencilerin bu bakış açısını benimsedikleri ve yığılma noktası kavramı ile bağdaştırabildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin onlara örnek olarak verilen limit uygulamalarında ilk olarak fonksiyonun tanım kümesine baktıkları sonrada limit istenen noktanın fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığını kontrol ettikleri gözlenmiştir.

4. 1. 3. 3. Üçüncü Dersle ilgili Bulgular

Ders 3

Hedef: Limit (Civar)Tanımı

Kaynak: görücü usulü evlilik

Süre:40 dakika

Araçlar: Tablet, projeksiyon, yazı tahtası, excel uygulamaları

A : *Tanım: $A \neq \emptyset$, $f: A \subseteq R \to R$, $x_0 \in A'$ (x_0, A' nın yığılma noktası) olsun.*

$\underset{x \to x_0}{Civar} f(x)$:= x_0 civarındaki x değişkenlerinde f fonksiyonunun aldığı değer.

A : *Bu tanımdaki "x_0 civarındaki x değişkenleri" ne anlama gelmektedir? Hangi x değişkenlerinden bahsedilmektedir?*

Ö11 : *x_0 a çok yakın x ler.*

A : *ne kadar yakın?*

Ö9 : *istediğimiz kadar yakın*

A : *epsilon kavramıyla ifade edebilir misiniz?*

Ö11 : *x_0 ın epsilon civarındaki x ler.*

A : *hangi epsilon?*

Ö12 : *tüm epsilonlar için yani keyfi epsilon için*

A : *x_0 ın keyfi epsilon civarındaki x değişkenleri mi? Peki x= x_0 olabilir mi?*

Ö8 : *olamaz çünkü $x \to x_0$ hocam.*

A : *o zaman "x_0 civarındaki x değişkenleri" ifadesi tam olarak ne anlama gelir?*

Ö14 : *x_0 ın keyfi epsilon delik civarındaki x değişkenleri anlamına gelir hocam*

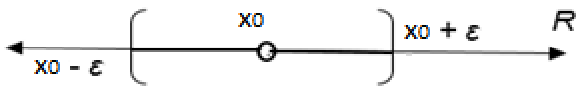
A : *evet tam olarak doğru. Bu tanımda x_0 ın, A' nın yığılma noktası olması sizce niçin gerekli?*

Ö13 : *x_0 ın keyfi epsilon delik civarında f fonksiyonunu çalıştıracak x değişkenlerinin mevcut olmasını garanti altına almak için.*

A : *Bravo sana. Geçen ders bunları konuşmuştuk.*

A : *Peki x_0 ın keyfi epsilon delik civarındaki x değişkenleri bana sayı doğrusu üzerinde gösterebilir misiniz?*

Ö13 :



A : *Bu açık aralık aslında bu aralığa atomik kuvvet mikroskobu gibi çok kuvvetli bir mikroskopla bakılmış ve şekli yukarıdaki gibi çizilmiş bir aralıktır.*

Ö14 : *mikroskobik görüntü mü hocam kimya dersi gibi oldu.*

A : *Epsilon kuantum seviyesinde bir uzunluk olduğundan çizdiğimiz aralığın ancak böyle bir mikroskopla görüleceği gözden kaçırılmamalıdır.*

A : *Tanım: $A \neq \emptyset$, $f: A \subseteq R \to R$, $x_0 \in A'$ (x_0, A' nın yığılma noktası) ve $l \epsilon R \cup \{-\infty, \infty\}$ olsun.*

$\underset{x \to x_0}{Civar} f(x) = l \Leftrightarrow \underset{x \to x_0^+}{Civar} f(x) = l \ ve \ \underset{x \to x_0^-}{Civar} f(x) = l$

Bu tanımda x_0 ın keyfi epsilon delik civarının x_0 dan büyük değişkenlerde ve x_0 dan küçük değişkenlerde olmak üzere iki parça olarak değerlendirildiğini görüyor musunuz?

Ö14 : *sağdan soldan bakıyorduk bu omu hocam?*

A : *evet ama sağdan soldan demeyeceğiz. Büyük değişkenlerden, küçük değişkenlerden diyeceğiz. Bunu size ilerleyen derslerimizde örnekle açıklayacağım.*

$Civar_{x \to x_0} f(x) = l$ *olması için gerek ve yeter koşul x_0 a x_0'dan büyük değişkenlerle yaklaştığımızda f fonksiyonunun davranışı ile x_0 a x_0'dan küçük değişkenlerle yaklaştığımızda f fonksiyonunun davranışının aynı olması yani bu değişkenlerde f fonksiyonunun l civarında değer almasıdır.*

A : *Atomik kuvvet mikroskopu ile bakılan bu şekilde, x_0ın yakın civarındaki değişkenlerde fonksiyonun l civarında değer aldığı dolayısıyla x_0 ın civarındaki değişkenlerde f fonksiyonunun davranışının belli olduğu görülmektedir. Bunun matematiksel ifadesi tam olarak; $Civar_{x \to x_0} f(x) = l$ dir. Bu konuda öğrenci arkadaşlarda olduğu literatürde de tespit edilmiş önemli bir zorluk x_0 ın f fonksiyonunun tanım kümesine ait olup olmamasının $Civar_{x \to x_0} f(x)$ hesaplanırken ne işe yaradığıdır.*

Ö12 : *tanımlı olunca yerine yazmıyor muyduk?*

Ö15 : *yerine yazma yoktu sanırım hocam tanımlı ise limit var yani civar var dimi?*

A : *Şunu kesin olarak söylemeliyim ki x_0 ın f fonksiyonunun tanım kümesine ait olup olmamasının $Civar_{x \to x_0} f(x)$ hesabıyla hiçbir alakası yoktur. Bu durumu şöyle izah edeyim:*

A : *Görücü usulünü duymuşsunuzdur.*

Ö11 : *duyduk hocam tabii*

Gülüşmeler…

A : *Tanıdıklarınız tarafından evlenmek için birisi size tavsiye edilir. Bu kişiyi tanıyor veya tanımıyor olabilirsiniz. (x_0 f fonksiyonunun tanım kümesine aittir ya da değildir)*

Ö16 : *evet hocam*

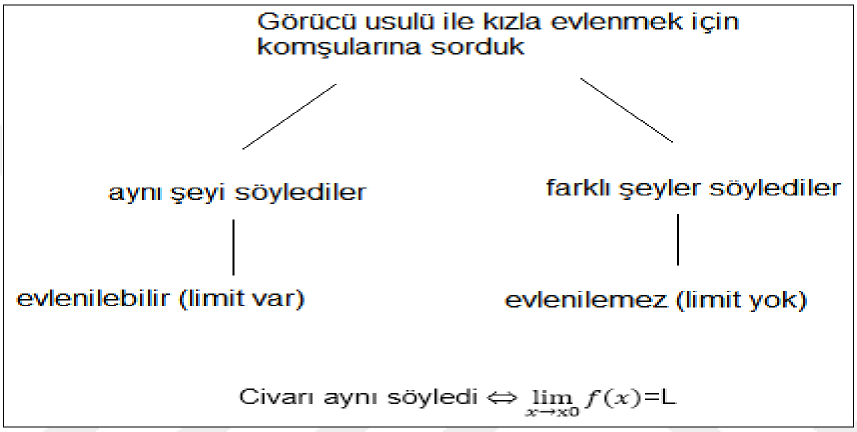
A : *Bunun konuyla hiç alakası yoktur tanısanız da olur tanımasanız da(. $Civar_{x \to x_0} f(x)$ hesaplamanın bununla bir alakası yoktur.) Bir görüşme ayarlandı, oturdunuz bir yerde çay içiyorsunuz.*

A : *Bu buluşmada elde edeceğiniz bilgilerin doğruluğu pek o kadar güvenilir olmayabilir çünkü kimse ayranım ekşidir demez. Hâlbuki siz onu tanımak, nasıl davranışlara sahip olduğunu öğrenmek istersiniz.*

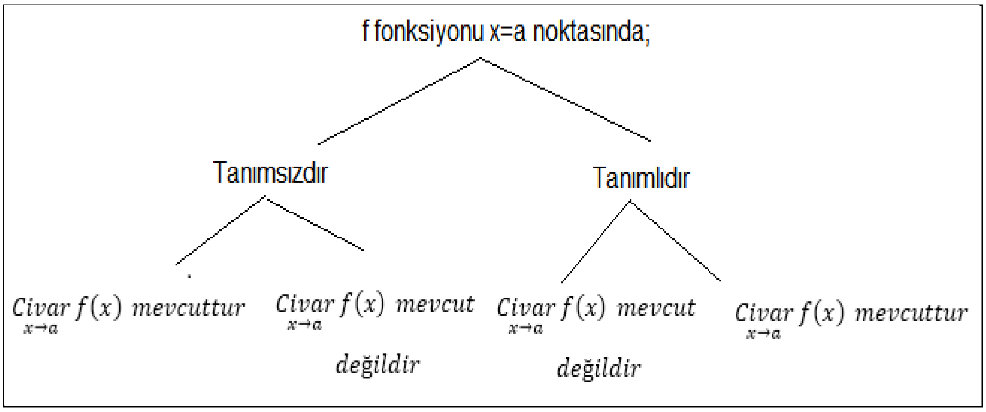
Kendisi ile ilgili söylediği şeyler, nasıl biri olduğu hakkında verdiği bilgiler aslında sizi pek tatmin etmez. Ne yapmalısınız? Onu birilerine sormalısınız, peki kime? Tabii ki onu çok yakından tanıyanlara sormalısınız. (x_0 ın keyfi epsilon delik civarındaki x değişkenlerinde f fonksiyonunun davranışını inceleriz). Onu yakın civarındaki insanlara sorduğunuzda yakın civarındaki insanlar nerdeyse aynı şeyleri söylüyorlarsa, siz artık bir fikir sahibi *olabilirsiniz. Fikir sahibi olabilirseniz civarda davranışı tespit edebildiniz anlamına gelir.* ($Civar_{x\to x_0} f(x)$ *mevcut olması).*

Eğer onun yakın civarından bilgi elde edemediniz ya da elde ettiğiniz bilgiler tamamen farklı ise o zaman bir fikir sahibi olamazsınız. $(Civar_{x\to x_0^+} f(x) \neq Civar_{x\to x_0^-} f(x)\ yani\ \ Civar_{x\to x_0} f(x)\ mevcut\ değildir.)$

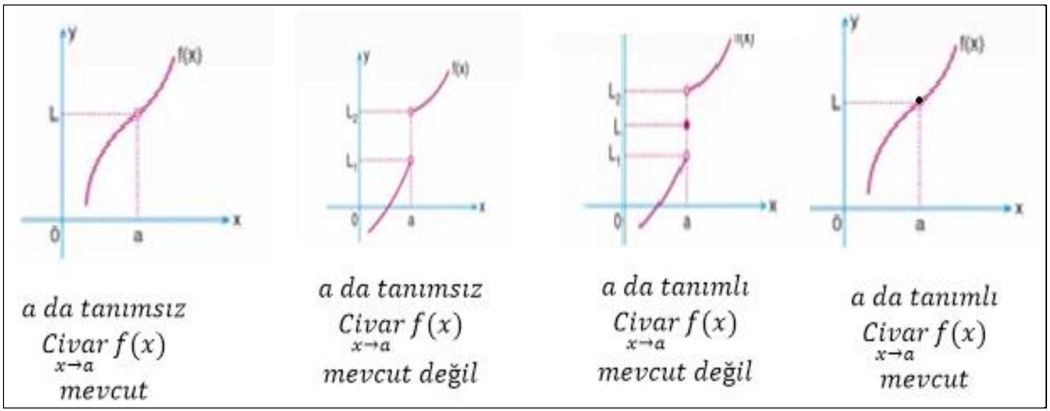
A : sonuç olarak, gördük ki $Civar_{x\to x_0} f(x)$ *civarının incelenebilmesi için* x_0 *ın f fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerekmektedir ve bu mevzunun* x_0 *ın f fonksiyonunun tanım kümesine ait olup olmamasıyla uzaktan yakından alakası yoktur. Bu durumu bir şemalar ile gösterelim:*



Şekil 5. Üçüncü dersteki görücü usulü şeması



Şekil 6. Üçüncü dersteki limit ile tanımlı olup olmama ilişkisi şeması



Şekil 7. Üçüncü dersteki limit ile tanımlı olup olmama ilişkisi grafikleri

Bu ders sürecinden önce limit kavramı, fonksiyonun limit bakılan noktada tanımlı olup olmamasının limit kavramıyla olan ilişkisi konularının öğrenciler tarafından tam olarak algılanmadığı ön test sonuçlarında görülmüştü. Üçüncü ders sürecinde ve sonunda limit kavramının anlatılması için “lim” yerine “Civar” ifadesinin kullanılmasının öğrencilerin limit kavramını algılamalarını ve derse olan ilgilerini güçlendirdiği gözlenmiştir. Öğrencilerin birinci ve ikinci derslerde anlatılan ε, ε delik civar, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to a$, yığılma noktası kavramı ve yığılma noktasıyla limitin ilişkisi kavramlarını bu dersle ilişkilendirebildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin “Civar” ifadesini oldukça benimsedikleri gözlenmiştir. Limit (Civar) örnekleri yapılırken limit bakılan noktanın fonksiyonun tanım kümesine ait olup olmamasının önemli olmadığı bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Bu bilginin açıkça görülmesi için verilen grafiklerin ve şemaların öğrenci algısını güçlendirdiği gözlenmiştir. Öğrencilerin limit (Civar) davranışının fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktasının civarındaki değişkenlerde fonksiyonun aldığı değerlerin incelenerek bulunduğu bilgisini algıladıkları gözlenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin incelenen civarın reel sayı ekseninde delik bir açık aralığa karşılık geldiği bilgisini fark ettikleri görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğrencilerin limit davranışı bulunurken sağdan ve soldan limit kavramlarının niçin kullanıldığı bilgisine ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

4. 1. 3. 4. Dördüncü Dersle ilgili Bulgular

Ders 4

Hedef: limit uygulamaları

Kaynak: civar yaklaşımı

Süre: 40 dakika

Araçlar: Tablet, projeksiyon, yazı tahtası, excel uygulamaları

A : *Bu derse bir tanımla başlayalım:*

$A \neq \emptyset \quad f: A \subseteq R \to R \quad , a \in A' \quad ve \quad l \in R \cup \{-\infty, \infty\} \quad olsun.$

$\underset{x \to a}{Civar} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$

A : *daha önceden karşılaştığınız* $lim_{x \to a} f(x)$ *ifadesinin* $Civar_{x \to a} f(x)$ *ifadesiyle tamamen aynı olduğunu gördünüz mü?*

Ö15 : *evet hocam*

Ö16 : *vay bee buymuş demek*

A : *bundan sonra* $lim_{x \to a} f(x)$ *ifadesi yerine* $Civar_{x \to a} f(x)$ *ifadesini kullanacağız. Ne dersiniz?*

Ö15 : *çok iyi olur*

Ö14 : *Kitaplarda “lim” yazıyor ama hocam.*

A : *inanıyorum ki zamanla hepsi “Civar” olacak*

A : *Şimdi* $Civar_{x \to a} f(x) = l$ *ifadesini biraz daha inceleyelim.*

A : *burada a kaç farklı durum gösterebilir?*

Ö11 : *nasıl yani hocam durum?*

A : $x \to 3, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty$ *gibi a bir sayı, sonsuz veya eksi sonsuz olabilir.*

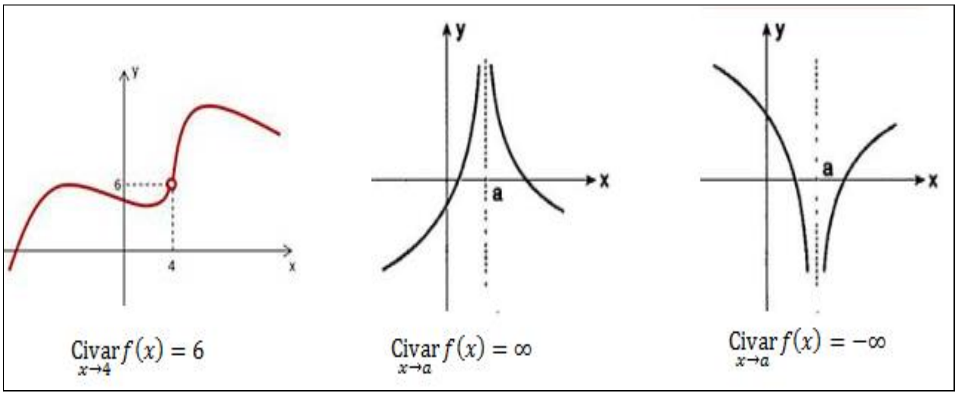
A : *peki* l $kaç\ durumda\ olabilir?$

Ö13 : l *bir sayı, sonsuz veya eksi sonsuz olabilir.*

A : *aferin buna göre;* $Civar_{x \to a} f(x) = l$ *durumu karşımıza kaç durumda çıkabilir?*

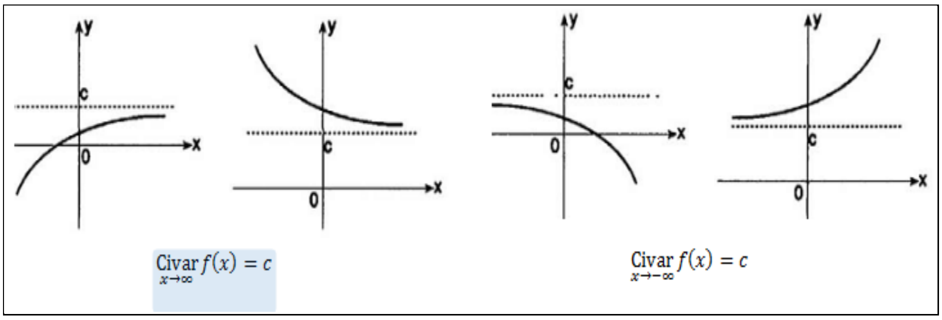
Ö10 : *9 mu hocam?*

A : *Aynen öyle; 9 durum oluşur. (a ya 3* l *ye 3 durum 3*3=9 durum) bu durumları inceleyelim.*

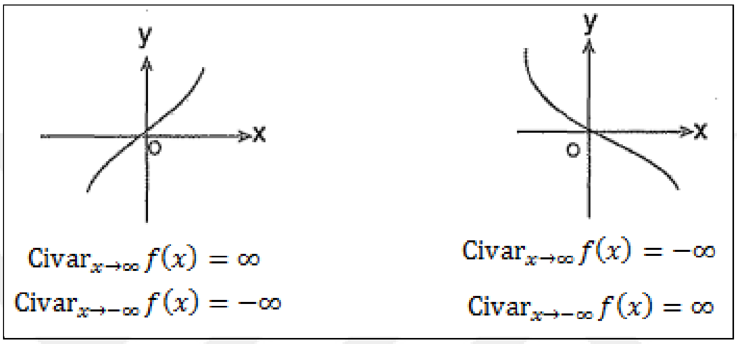


Şekil 8. Dördüncü derste mümkün limit durumlarının ilk üçünün grafiği

A : $x \to a$ *durumunda 3 farklı durumda limit mevcut olabilir.*



Şekil 9. Dördüncü derste mümkün limit durumlarının 4'nün grafiği

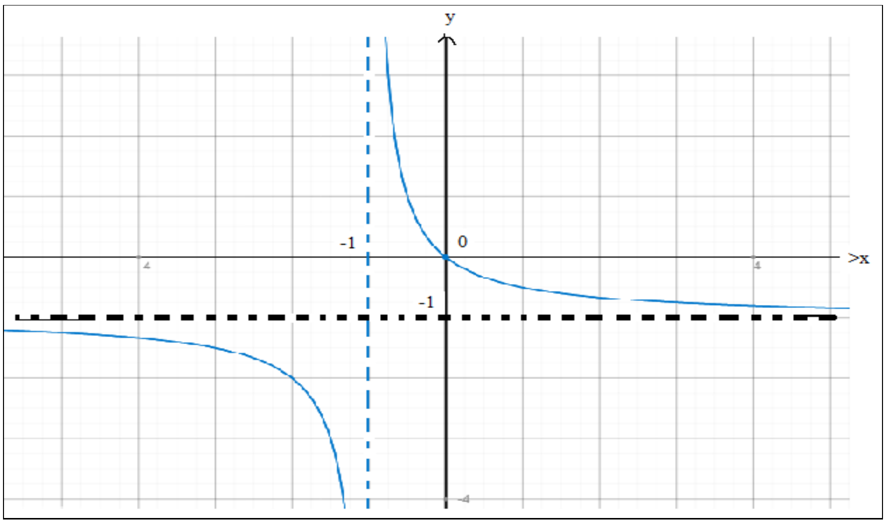


Şekil 10. Dördüncü derste mümkün limit durumlarının son ikisinin grafiği

A: *Şimdi tersini yapmaya çalışalım: Aşağıdaki civar davranışlarını sağlayan örnek bir grafik çiziniz.*

$\underset{x\to\infty}{Civar} f(x) = -1$ $\underset{x\to-\infty}{Civar} f(x) = -1$ $\underset{x\to-1^+}{Civar} f(x) = \infty$ $\underset{x\to-1^-}{Civar} f(x) = -\infty$

$ve\ f(x) = 0$



Şekil 11. Dördüncü derste civar davranışları verilerek istenen örnek fonksiyon grafiği

A : davranışları nasıl sağladığını kontrol ediniz.

x, -1 in yeterince küçük civarında fonksiyon nasıl bir davranış sergiliyor?

x, -1 in yeterince büyük civarında fonksiyon nasıl bir davranış sergiliyor?

x, -∞ in yeterince küçük civarında fonksiyon nasıl bir davranış sergiliyor?

x, +∞ in yeterince büyük civarında fonksiyon nasıl bir davranış sergiliyor?

Bu derste buraya kadar yapılan derslerle ilgili bilgiler bir araya getirilerek limit ile ilgili örnekler yapılmıştır. Bu dersteki örneklerin tamamında “lim” ifadesi yerine “Civar” ifadesi kullanılmıştır. Öğrencilerin “lim” ifadesi yerine “Civar” ifadesi kullanılmasına karşı olumlu bir tutum içinde oldukları gözlenmiştir. Civar hesabında reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için karşımıza çıkan 9 durum şekillerle gösterilmiştir. Öğrencilerin civar örneklerini 9 durum altında görmeleri ve bunların grafiklerini incelemeleri sonucu derse olan ilgilerinin oldukça arttığı gözlenmiştir. Öğrencilere birkaç civar davranışı verilmiş ve bu davranışları gösteren bir örnek fonksiyon grafiği çizmeleri istenmiştir. Öğrencilerin bu örnek çözümüne ilgiyle katılım gösterdikleri, daha önceki derslerde öğrendikleri bilgileri bu örneğe taşıyabildikleri, örneği neredeyse tüm öğrencilerin doğru çözüp çözümlerini izah edebildikleri gözlenmiştir.

4. 1. 3. 5. Beşinci Dersle ilgili Bulgular

Ders 5

Hedef: limit uygulamaları

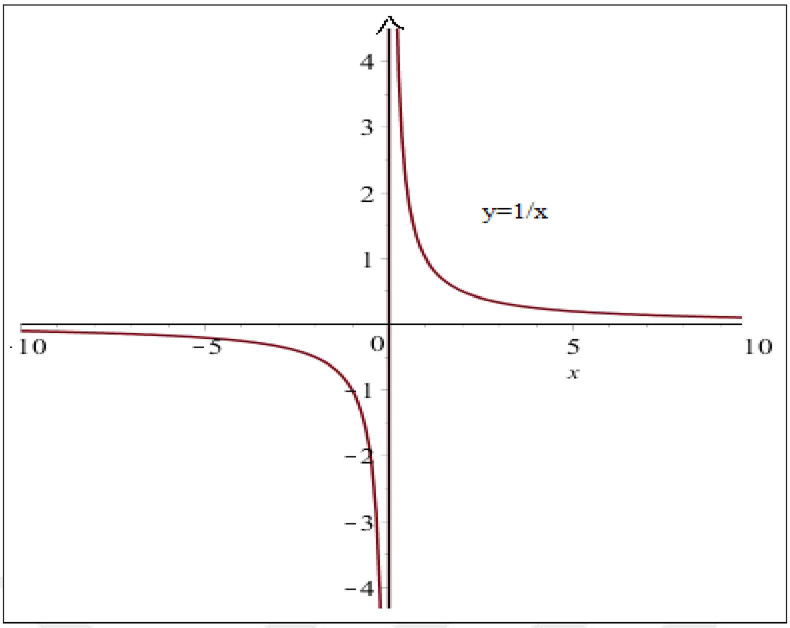
Kaynak: civar davranışları

Süre: 40 dakika

Araçlar: tablet, projeksiyon, yazı tahtası, excel uygulamaları

A : Arkadaşlar bu dersimizde bazı önemli civar davranışlarını göreceğiz.

A : $f: R\backslash\{0\} \to R\ f(x) = \frac{1}{x}$ *fonksiyonunu inceleyelim.*



Şekil 12. Beşinci derste $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği

A : *yukarıdaki grafiği inceleyerek aşağıdaki civar davranışları için ne dersiniz?*

A : $Civar_{x \to 0^+} f(x) = ?$ (*0 dan epsilon kadar büyük değişkenlerde f(x) in değeri)*

Ö18 : *sonsuz olur hocam artı sonsuz*

Ö14 : *evet x değişkenleri 0 a büyük taraftan yaklaştıklarında f(x)değerleri sonsuza gidiyor.*

A : *evet doğru çok güzel yani* $Civar_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ *diyebiliriz.*

A : $Civar_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = ?$ (*0 dan epsilon kadar küçük değişkenlerde f(x) in değeri*)

Ö17 : *eksi sonsuz mu olur hocam?*

Ö14 : *evet x değişkenleri 0 a küçük taraftan yaklaştıklarında f(x) değerleri sonsuza gidiyor.*

A : *evet doğru çok güzel yani* $Civar_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ *diyebiliriz.*

A : *Örnek:* $Civar_{x \to 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ?$ *davranışına ne dersiniz?*

Ö11 : *hocam bu civar* $\frac{2}{0^+} \to \infty$ *davranışı ile aynı değimli?*

A : *bravo işte bunu görmenizi istiyordum.* $Civar_{x \to 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = Civar_{x \to 0^+} \frac{2}{x} \to \frac{2}{0^+} \to \frac{2}{\varepsilon} \to \infty$

A : *ε (epsilon) ifadesini nasıl kullandığıma dikkat ettiniz mi?*

A : *örnek:* $Civar_{x \to -2^-} \left(\frac{x+1}{x+2}\right) = Civar_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-2-\varepsilon+1}{-2-\varepsilon+2}\right) = Civar_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{-\varepsilon}\right) \to \frac{1}{\varepsilon} \to \infty$ *şeklinde yazsam ne yaptığımı çözebilir misiniz?*

Ö14 : *hocam x yerine -2-ε yazdınız sanırım.*

A : evet böylece $Civar_{x\to -2^-}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = Civar_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-2-\varepsilon+1}{-2-\varepsilon+2}\right)$ davranışlarını eşitledim.

A : sonuç olarak : $\frac{Sayı}{0^+} \to \infty$ ve $\frac{Sayı}{0^-} \to -\infty$ yazabiliriz. (sayıların işaretlerine dikkat edilmek üzere)

A : grafiğimize geri dönerek şimdi de $Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ =? davranışına bakalım.

Ö19 : sonuç 0 hocam.

A : tam olarak sıfır mı yoksa sıfırdan epsilon kadar büyük mü dikkatli bakın grafiğe.

Ö14 : evet hocam sıfırdan epsilon kadar büyük

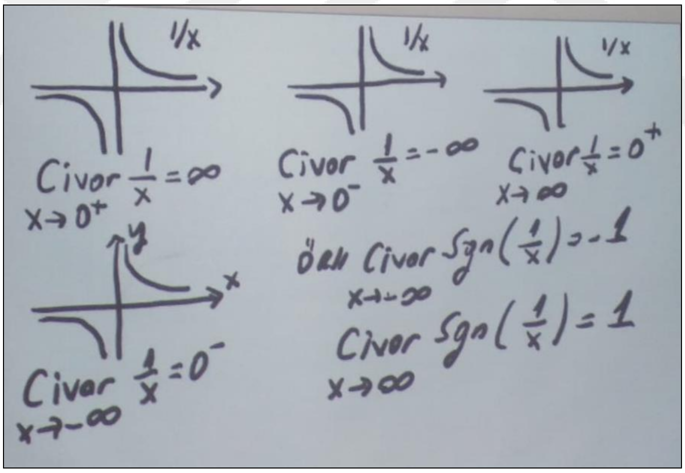
A : o zaman $Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$ dersek daha doğru olmaz mı?

Ö11 : evet hocam haklısınız.

A : $Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^-$ dersem ne dersiniz?

Ö14 : doğruda hocam ne fark edecek.

A : ne fark edeceğini bir örneklerle açıklayalım:



Şekil 13. Beşinci derste yazı tahtası görüntüsü 1

A : Örnek: Sgn $\left(Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -1$ ve Sgn $\left(Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$ olmaz mı?

A : Örnek: $\left[\left(Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = -1$ ve : $\left[\left(Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = 0$ olmaz mı?

A : tam değer ve sgn işaret fonksiyonlarını ekleyerek yazdığım bu örneklere dikkat edin.

A : $Örnek$: $\frac{1}{Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = -\infty$ Örnek: $\frac{1}{Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = \infty$ bu örneklere dikkat edelim

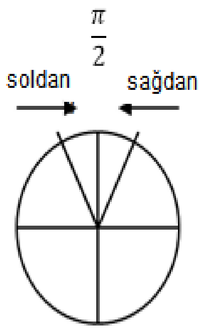
A : *Eğer* $Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ *olduğu yanılgısına düşersek ne kadar büyük hata yapacağımızı şimdi daha iyi görüyor musunuz?*

A : *sonuç olarak:* $Civar_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^{+}$ *ve* $Civar_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^{-}$ *olduğunu çok iyi kavramalıyız.*

Ö14 : *evet hocam çok haklısınız.*

A : *Birde sizin sağdan soldan diye ağzınıza doladığınız mevzuya gelelim.*

Örnek: $Civar_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}}[Cosx]=?$



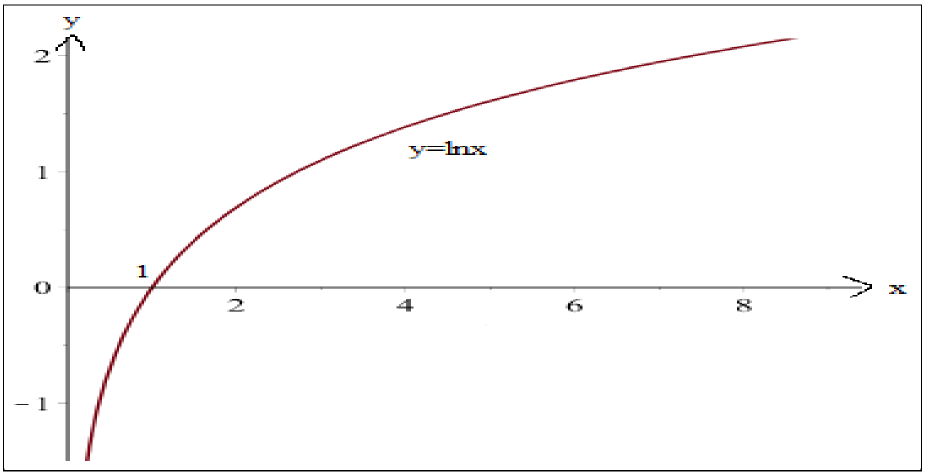
$0<\mathrm{x}<\frac{\pi}{2}$ ve $0<\cos(\mathrm{x})<1$ için $[\![Cosx]\!]=0$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}[\![Cosx]\!]=0$

$\frac{\pi}{2}<\mathrm{x}<\pi$ ve $-1<\mathrm{cox}(\mathrm{x})<0$ için $[\![Cosx]\!]=0$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\![Cosx]\!]=-1$

A : *basit şekilden de kolayca görülüyor ki* $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}$ *olan değişkenler* $\frac{\pi}{2}$ *in sağında değildir. Doğru ifade* $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}$ *olan değişkenler:=* $\frac{\pi}{2}$ *den epsilon kadar büyük değişkenler şeklinde olmalıdır. Bu durumda cevap -1 olacaktır.*

A : *hiçbir zaman sağ soldan dememeliyiz. Kaldı ki iki veya üç değişkenli fonksiyonlarda her yönden yaklaşım bakılacağından(ilerde göreceksiniz) sağdan soldan civara bakıyoruz ifadesi çok yanlış bir ifadedir ve külliyen yanlıştır.*

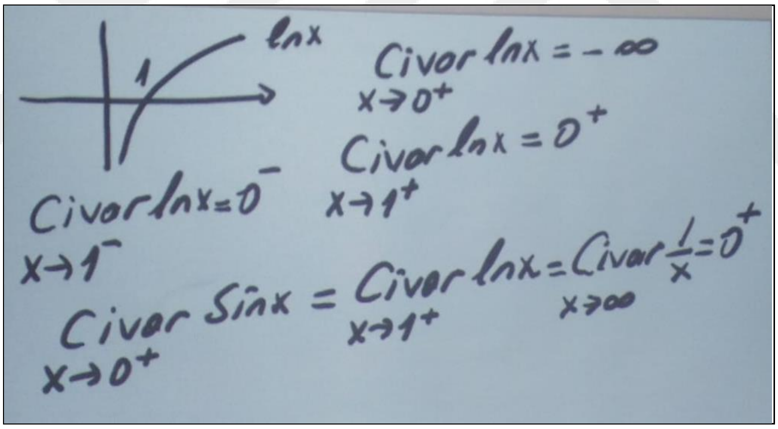
A : $f:R\backslash\{0\}\to R\ f(x)=\frac{1}{x}$ *fonksiyonundan elde ettiğimiz temel davranışlara trigonometrik ifadeleri ve y= lnx fonksiyonunu dahil ederek biraz örnek yapalım.*



Şekil 14. Beşinci derste $y = lnx$ fonksiyonunun grafiği

A : *y=lnx fonksiyonunda bilinen civar davranışlarına bakalım:*

A : $Civar_{x\to\infty}\, lnx = \infty$; $Civar_{x\to 0^+}\, lnx = -\infty$; $Civar_{x\to 1^+}\, lnx = 0^+$; $Civar_{x\to 1^-}\, lnx = 0^-$



Şekil 15. Beşinci derste yazı tahtası görüntüsü 2

A : *yukarıdaki davranışları ekran üzerinden görüyormusunuz?*

Ö15 : *evet hocam*

A : *negatif değişkenlerde lnx fonksiyonunun çalışmadığını görüyormusunuz?*

Ö13 : *evet hocam*

A : $Civar_{x\to 0^+}\, ln(Sinx) = -\infty$: ; $Civar_{x\to 1^+}\, Sin(lnx) = 0^+$; $Civar_{x\to 1^+} \frac{1}{Sin(lnx)} = \infty$

A : $Civar_{x\to 0^+}\left[Sin\left(\frac{1}{lnx}\right)\right] =$ $Civar_{x\to 0^-}[Sinx] =$ $Civar_{\varepsilon\to 0}[-\varepsilon] = -1$

A : *yukarıdaki ifadeyi dikkatlice inceleyiniz.*

A : *şimdi civar davranışları için aşağıdaki örneği inceleyiniz.*

Örnek: $Civar_{x\to\square} \tan\left(\frac{1}{lnx}\right) = \quad Civar_{t\to\square}\, lnt = \quad Civar_{w\to\square}\, Sinw$

Üç tane Civarın aynı davranışı göstermesi için boş bırakılan kutuları doldurmaya çalışın.

Ö15 *:* $x \to 0^+$ *olsa* $lnx \to -\infty$, $\frac{1}{lnx} \to 0^-$ *dolayısıyla* $Civar_{x\to 0^+} \tan\left(\frac{1}{lnx}\right) = \underset{x\to 0^-}{Civar}(tanx) = 0^-$ *olurdu.*

A *: evet doğru diğerlerinin de sonuçta* 0^- *davranışını göstermesini sağlayın.*

Ö15 *:* $t \to 1^-$ *olsa oluyor sanırım.* $Civar_{t\to 1^-}\, lnt = 0^-$

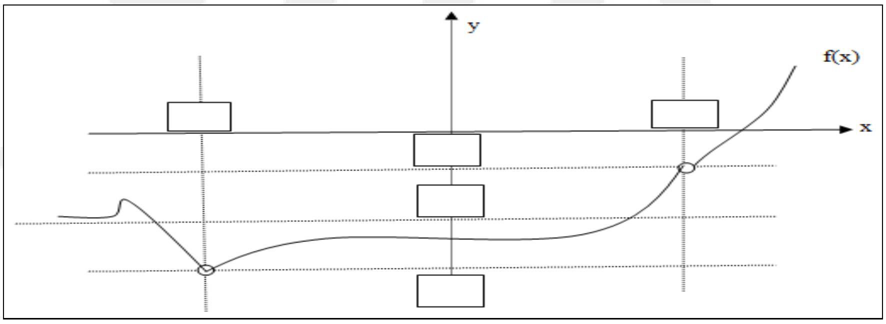
A *: evet doğrudur. Sonuncu nasıl olacak?*

Ö18 *: o en kolayı hocam* $Civar_{w\to 0^-}\, Sinw = 0^-$

A *: sonuç olarak:* $Civar_{x\to 0^+} \tan\left(\frac{1}{lnx}\right) = \quad Civar_{t\to 1^-}\, lnt = \quad Civar_{w\to 0^-}\, Sinw = 0^-$ *olur.*

A *: şimdide verilen civar davranışlarından yararlanarak aşağıdaki grafikte boş kutuları doğru harflerle dolduralım.*

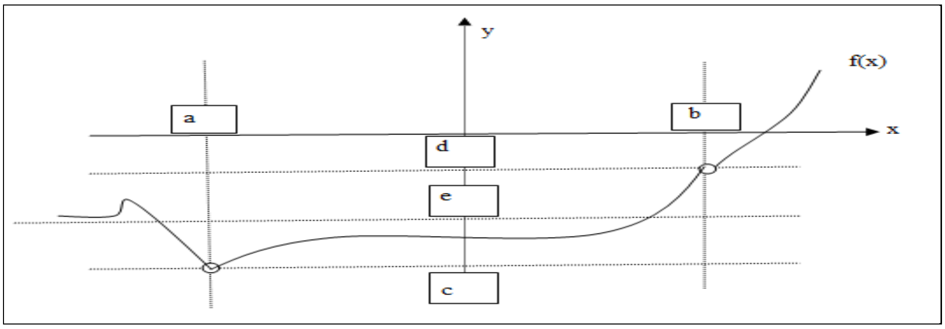
$\underset{x\to a^-}{Civar} f(x) = c^-$, $\underset{x\to b}{Civar} f(x) = d$, $\underset{x\to -\infty}{Civar} f(x) = e$ $\underset{x\to a^+}{Civar} f(x) = c^+$



Şekil 16. Beşinci derste civar davranışlarından yararlanarak boşlukları doldurma örneği grafiği

A *: civar davranışlarıyla verilen 5 harfi boş kutulara doğru şekilde yerleştiriniz.*

Ö15 *: sanırım böyle*

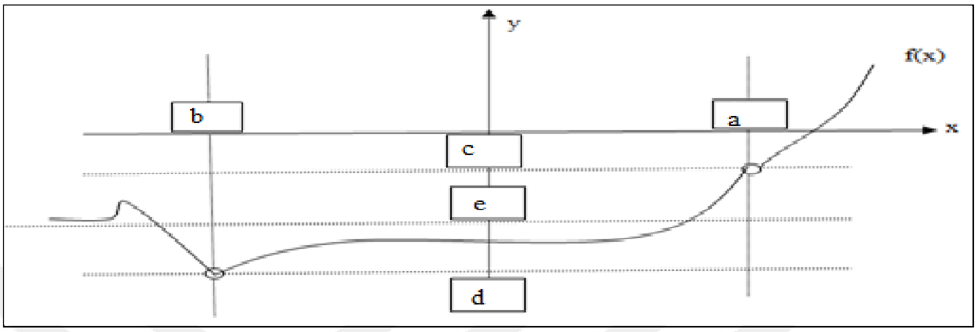


Şekil 17. Beşinci derste civar davranışlarından yararlanarak boşlukları doldurma örneğine Ö15 öğrencisinin verdiği cevabın grafiği

Ö14 : *bence yanlış oldu* $\underset{x\to a^-}{Civar} f(x) = c^-$ *davranışı sağlanmıyor. Grafikte* $\underset{x\to a^-}{Civar} f(x) = c^+$ *davranışı var hatta* $\underset{x\to a^+}{Civar} f(x) = c^+$ *ve grafiğe uymuyor ama* $\underset{x\to b}{Civar} f(x) = d$ *doğru ve* $\underset{x\to -\infty}{Civar} f(x) = e$ *doğru.*

A : *aynen katılıyorum. O halde doğrusu nasıl olacak?*

Ö14 : *bence şöyle olacak;*



Şekil 18. Beşinci derste civar davranışlarından yararlanarak boşlukları doldurma örneğine Ö14 öğrencisinin verdiği cevabın grafiği

Ö15 : *evet bence de bu doğru*

A : *çok güzel aferin*

A : *birkaç örnek daha yapıp bu dersi bitirelim.*

Örnek: $Civar_{x\to\square}(\,ln(Cosecx)) = \quad Civar_{t\to\square}\left(\frac{1}{t}\right) \; = \; Civar_{w\to\square}\, Cosw$

Ö18 : $Civar_{x\to\frac{\pi}{2}}(\,ln(Cosecx)) = \quad Civar_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right) \; = \; \underset{w\to\frac{\pi}{2}^+}{Civar}\, Cosw = 0^+$

Ö18 : *burada güzel olan* $Civar_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{Sinx}) \to \frac{1}{1^-} \to 1^+ \quad dolayısıyla$

$$\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Civar}(\,ln(Cosecx)) = \underset{x\to 1^+}{Civar}(\,lnx) = \underset{t\to\infty}{Civar}\frac{1}{t} \; = \; \underset{w\to\frac{\pi}{2}^+}{Civar}\, Cosw = 0^+$$

A : *bravo*

Örnek: $Civar_{x\to\frac{\pi}{2}}\, ln\,(\dots\dots..) = Civar_{t\to 0^+}\,(\dots\dots..) = Civar_{w\to\infty}\,(\dots\dots..)$

nokta nokta olan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

Ö16 : $Civar_{x\to\frac{\pi}{2}}\, ln\,(Sinx) = Civar_{t\to 0^+}\,(-Sint) = Civar_{w\to\infty}\,\left(\frac{-1}{w}\right) = \; 0^-$

A : *çok güzel.*

Bu derste limit uygulamaları yapılmıştır. Tüm uygulamalarda "lim" ifadesi yerine "Civar" ifadesi kullanılmıştır. Öğrencilerin "civar" ifadesini benimsedikleri ve artık "lim" ifadesini kullanmak istemedikleri öğrenci beyanlarından görülmüştür. Bu derste verilen ilk örnek $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonundur. Bu fonksiyonun $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ civarlarında gösterdiği davranışlar detaylı olarak incelenmiştir.

Öğrencilerin bu örnekteki civar davranışlarının inceliklerini algılayabildikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin $\frac{Pozitif\ sayı}{\varepsilon} \to \infty$, $\frac{Negatif\ sayı}{\varepsilon} \to -\infty$, $\frac{Pozitif\ Sayı}{\infty} \to 0^{+}$, $\frac{Negatif\ Sayı}{\infty} \to 0^{-}$, limit davranışlarını algıladıkları gözlenmiştir. Bu davranışları örnekler içinde kullanabildikleri ve trigonometrik ifadelerle bağdaştırabildikleri görülmüştür. Örnekleri çözdükçe derse ilgilerinin ve dikkatlerinin arttığı gözlenen öğrencilerin tersinden yazılmış örneklerde de gerek yerine yazılacak fonksiyonları bulmada gerekse yerine yazılacak civarları bulmada oldukça başarılı oldukları görülmüştür. Literatürde çok az rastlanan bu tür örneklerin öğrencilerde ilgiyi arttırdığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin bu ders ve buraya kadar olan derslerde gördükleri bilgileri birbirine bağlayabildikleri ve bunları kullanarak verilen uygulamalarla yüksek bir ilgiyle uğraştıkları ve çözebildikleri görülmüştür.

4. 1. 3. 6. Altıncı Dersle ilgili Bulgular

Ders 6

Hedef: limit hesaplamanın formal tanımı, limit ispat yöntemi

Kaynak: ε, δ(ε), N(ε),δ(M), N(M) notasyonları

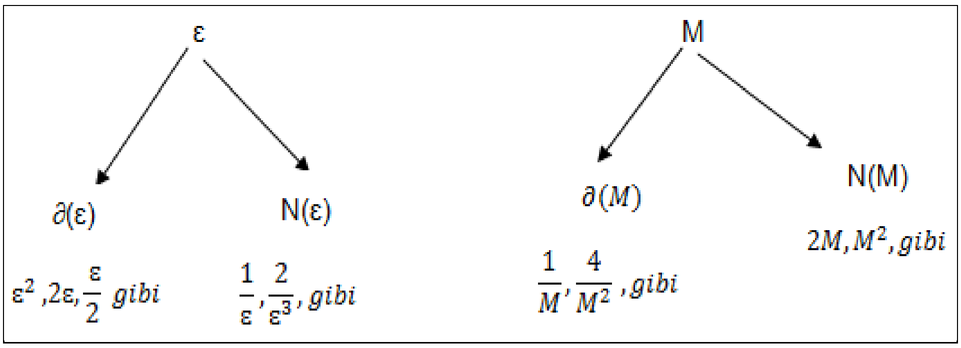
Süre:40 dakika

Araçlar: yazı tahtası

A : Bu dersimizde önceki derslerde kurduğumuz civar davranışının matematiksel olarak nasıl yazılacağını göreceğiz. Daha önce ε ve M kavramlarını kurmuştuk. Şimdide ε na bağlı $\partial(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ ve M ye bağlı $\partial(M), N(M)$ kavramlarını konuşalım.

Burada ∂; epsilon nispetindeki sayıyı ifade eder. ∂(ε) veya ∂(M) olabilir.

Burada N ise M nispetindeki sayıyı ifade eder. N(ε) veya N(M) olabilir.



Şekil 19. Altıncı derste $\varepsilon, M, \delta(\varepsilon), \delta(M), N(\varepsilon), N(M)$ notasyonlarını açıklayan grafik

A : *şimdi size bir tanım yazalım ve beraber inceleyelim:*

$Tanım$: $A \neq \emptyset$ $f: A \subseteq R \to R$ $, a \in A'$ ve $l \in R$

$\in \{-\infty, \infty\}$ $olsun.$

$Civar_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists \partial(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $0 < |x - a| < \partial(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

Ö15 : *hocam neden renkli yazdınız.*

A : $f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $için$ $|f(x) - l| < \varepsilon$ *peki hangi x ler için*

A : $\underset{x \to a}{Civar} \Leftrightarrow \exists \partial(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $0 < |x - a| < \partial(\varepsilon)$ $olan\ tüm\ x\ ler\ için$

A : *tanımdaki kırmızı kısımlar kırmızı renkle matematiksel ifadeye çevrilmiş. Tanımdaki mavi kısımlar mavi renkle matematiksel ifadeye çevrilmiş*

Ö17 : *çok güzel oldu hocam. Neyin neyle ifade edildiğini ancak gördüm.*

Ö15 : *aynen*

Ö18 : *vay be şimdi anladım.*

A : *diğer civar durumlarını da matematiksel olarak yazalım.*

$Civar_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists \partial(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $0 < |x - a| < \partial(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) > M$

$Civar_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists \partial(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $0 < |x - a| < \partial(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) < -M$

$Civar_{x \to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x > N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\underset{x \to \infty}{Civar} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x > N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) > M$

$Civar_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x > N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) < -M$

$Civar_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x < -N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$Civar_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x <$ $-N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) > M$

$Civar_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ $için$ $\exists N(\varepsilon)$ $öyle\ ki$ $x <$ $-N(\varepsilon)$

$olan\ tüm\ x\ ler\ için$ $f(x) < -M$

A : *Burada yapılan en önemli şey keyfi epsilonu çok küçükler için, keyfi M'yi de çok büyükler için kullandık. Normalde literatür de keyfi epsilon pozitif sayı hem çok küçük hem de çok büyükler için aynı anda kullanılır.*

İlgili kitapları incelerseniz kolayca görürsünüz ki limit tanımları yapılırken bir tane yazılıp diğerleri benzer şekilde yapılır ifadesi kullanılır. Diğer tanımlar yazılmaz. Bunun nedeni tek bir epsilon kavramıyla tüm durumların *tanımlarının yazılmasının çok zor olduğu olabilir. Bizim yaptığımız değişiklik ile tanımların nasıl kolayca yazılabildiği açıkça görülmektedir.*

A : *Şimdi limitin tanımını kullanarak bir limit durumunun nasıl ispatlanabildiğini görelim: örnek olarak;* $Civar_{x\to 0}\, x^2+1=0$ *gibi basit bir durumuna bakalım. Limitin tanımını yazarsak,* $\forall\varepsilon>0\ i\c{c}in\ \delta(\varepsilon)=\cdots\ olsun. 0<|\,x-0\,|<\delta(\varepsilon)$ *olan tüm* x *ler için* $|\,x^2+1-1\,|=\,|\,x^2\,|=\,|\,x\,|^2<\delta^2<\delta$ *olur* $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}$ *seçilirse bu limitin ispatı tamamlanmış olur ve ispatı gösteren ifade şu şekilde yazılabilir.* $\forall\varepsilon>0\ i\c{c}in\ \delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}\ olsun\ 0<|\,x-0\,|<\delta(\varepsilon)$ *olan tüm* x *ler için* $|\,x^2+1-1\,|=\,|\,x^2\,|=\,|\,x\,|^2<\delta^2<\delta<\varepsilon$

Ö12 : *hocam ilk yazdığınız da* $\delta(\varepsilon)=\cdots olsun$ *diye yazdınız sonra* $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}$ *yazdınız niçin böyle yaptınız?*

A : *evet tamda öyle yaptım çünkü limitin tanımını kullanarak ispat yaparken* $\delta(\varepsilon)'$ *nun nasıl seçileceğini bulmamız gerekiyor. İlk yazışta sanki* $\delta(\varepsilon)$*'u biliyormuş gibi yazdım sonra limit tanımını yazmaya devam ettim. Eşitsizlikleri yazdım ve ilerledim sonunda ifadeyi* ε*'dan küçük yapacak* $\delta(\varepsilon)$*'yi seçtim. En sonunda ispatı tekrar yazdım. Yazdığım son ifade ispatın kendisi oldu.*

Ö14 : *hocam tekniği anladım ama* $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}$ *olarak niçin seçtiniz?*

A : *eşitsizliğin sonunda* δ*' ya ulaştım dolayısıyla* δ*'yı* ε*'dan küçük yapmak için* $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}$ *seçtim isteseydim* $\frac{\varepsilon}{2}$ *seçerdim* ε*'dan küçük bir ifade seçmem yeterliydi.*

Ö14 : *anladım hocam.*

A : *başka bir örnek yapalım örneğin* $Civar_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ *olduğunu gösterelim. Bu ispatı yazarken ne ile başlamalıyım?* $\forall\varepsilon>0\ ile\ mi\ yoksa\ \forall M>0\ ile\ mi?$ *ne dersiniz?*

Ö13 : *sanırım* $\forall\varepsilon>0$ *ile çünkü limitin sonucuna bakarak başlamalıyız burada da limitin sonucu 0 eğer limitin sonucu* $\infty\ veya-\infty$ *olsaydı* $\forall M>0$ *ile başlardık tanımlarda öyle yapıyorduk.*

A : *Aferin çok güzel bravo sana, şimdi ispatı yazalım*

A : $\forall\varepsilon>0\ i\c{c}in\ N(\varepsilon)=\cdots\ olsun\ x>N\ olan\ t\ddot{u}m\ x'ler\ i\c{c}in\ \frac{1}{x}<\frac{1}{N}\ dir.$

A : $\frac{1}{N}<\varepsilon$ *eşitsizliğine ulaşmak için* $N(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}$ *seçilirse (ki* $\frac{2}{\varepsilon}$ *gerçekten çok büyük bir sayıdır.)* $Civar_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ *ifadesinin ispatı aşağıdaki gibi olur.*

A : $\forall\varepsilon>0\ i\c{c}in\ N(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}\ olsun\ x>N\ olan\ t\ddot{u}m\ x'ler\ i\c{c}in\ \left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\frac{1}{N}<\varepsilon$ *elde edilir.*

A : $Civar_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ *olduğunu gösterelim. Burada ispata ne ile başlamalıyız?*

Ö13 : *hocam* $\forall M>0$ *ile başlamalıyız ve* $\frac{1}{x}>M$ *ile bitirmeliyiz*

A : *arkadaşınız bu işi çözmüş*

A : $\forall M > 0\ için\ \delta(M) = \cdots\ \ olsun\ 0 < x < \delta(M)\ olan\ tüm\ x'ler\ için\ \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$ *dir* . $\frac{1}{\delta} > M$ *eşitsizliğine ulaşmak için* $\delta(M) = \frac{1}{M^2}$ *seçilirse (ki* $\frac{1}{M^2}$ *gerçekten çok küçük bir sayıdır.)* $Civar_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ *ifadesinin ispatı aşağıdaki gibi olur.*

A : $\forall M > 0\ için\ \delta(M) = \frac{1}{M^2}\ olsun\ 0 < x < \delta(M)\ olan\ tüm\ x'ler\ için\ \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > M$

Ö14 : *M^2'ye ne oldu hocam?*

A : $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > M^2 > M$

Ö14 : *hıııı, tamamdır hocam*

Ö13 : *zor gibi görünüyor ama belli bir sistematiği var hocam bence tanımları bilince çok daha kolay yapılıyor.*

A : *Aynen katılıyorum bu tür ispatları yapabilmek için limitin formal tanımını iyi bilmek ayrıca da mutlak değer ve eşitsizlikler konularına hakim olmak gerekir.*

Bu ders öncesinde öğrencilerin limitin formal tanımını yazmada ve bu tanımı kullanarak basit limitler için bile ispat yapmada zorluklar yaşadıkları ilk sınav sonucunda görülmüştü. Bu derste limitin formal tanımını yazabilmek için istenildiği kadar küçük seçilebilecek sayıları tasvir etmek için ε , istenildiği kadar büyük sayıları tasvir etmek için M, ε'a bağlı küçük sayıları tasvir etmek için $\delta(\varepsilon)$, ε'a bağlı büyük sayıları tasvir etmek için $N(\varepsilon)$, M'ye bağlı küçük sayıları tasvir etmek için $\delta(M)$, M'ye bağlı büyük sayıları tasvir etmek için $N(M)$ notasyonları kullanılmıştır. Bu notasyonların öğrenciler tarafından kolayca algılandığı görülmüştür. Öğrenciler bu notasyonlara örnek verebilmişlerdir. Buraya kadar yapılan derslerin içerdiği bilgilerin ışığında limitin matematiksel ifadesini yazabilmeyi amaçlayan bu derste civar tanımı yapılırken tanım ifadesi kırmızı ve mavi olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Bu uygulama öğrencilerin ilgisini çekmiştir. Burada kırmızı ile yazılan kısım değişkenin civarını anlatırken mavi kısım ise fonksiyonun davranışını anlatmaktadır. Anlaşılmasında zorluk çekilen limit tanımının bu şekilde yazılması öğrencilerin tanımda yazılan kısımların aslında ne anlama geldiklerini algıladıklarını göstermiştir. Öğrencilerin limit durumlarının tanımlarını ezbere bir yol kullanmadan yazabildikleri görülmüştür. Öğrencilerin limit tanımlarını yazarken "civar" ifadesi kullandığı, önce tanımın mavi kısmını sonrada kırmızı kısmını yazdıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin limitin mümkün tüm durumlarında tanımı yazabildikleri ve yazdıkları tanıma ait örnek grafik çizebildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin tanımı kullanarak birkaç basit limit için ispat yapabildikleri görülmüştür.

Özetle; İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programındaki Analiz-1 dersindeki limit konusunun kazanımları göz önüne alınarak hazırlanan analoji destekli diyalojik yönteme dayalı yürütülen derslerden elde edilen bulgular şu şekildedir:

ε kavramının yaşadığımız alemin bir kavramı olmadığı aslında kuantum seviyesinde istediğimiz kadar küçük seçebileceğimiz pozitif bir sayıyı ifade ettiği algısının öğrencilerde oluştuğu görülmüştür. Bu tür küçüklüklerle nasıl matematik yapılabileceğine dair bir algının öğrencilerde oluştuğu ve ε delik civarın ancak çok kuvvetli mikroskopla görülebilecek kadar küçük olduğunun öğrenciler tarafından algılandığı görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğrencilerin $x = a$ ve $x \to a$ ifadeleri arasındaki farkın ne olduğunu algıladıkları gözlenmiştir. Öğrenciler kuantum seviyesindeki bir kavramın matematiksel notasyonlar kullanılarak nasıl yaşadığımız aleme entegre edildiğini görmüşlerdir. Aynı şekilde, istediğiniz kadar büyük pozitif sayıdan daha büyük şeklinde ifade edilen M kavramını algılayan öğrencilerin $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin matematiksel ifadelerini zorlanmadan yazabildikleri gözlenmiştir. Bir kümenin yığılma noktası olabilmek için kümeye ait olup olmamanın önemli olmadığının öğrenciler tarafından görüldüğü gözlenmiştir.

Bir noktanın bir kümenin yığılma noktası olabilmesi için o noktanın keyfi ε delik civarında kümeye ait sonsuz eleman olması gerektiği bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Öğrencilerin yığılma noktalarını bulma örneklerini çözebildikleri gözlenmiştir. Limitin ancak fonksiyonun tanım kümesinin yığılma noktalarında bakılabileceği ve bunun dışındaki durumlarda limit almanın anlamsız olacağı bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Öğrencilerin onlara örnek olarak verilen limit uygulamalarında ilk olarak fonksiyonun tanım kümesine baktıkları sonrada limit istenen noktanın fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığını kontrol ettikleri gözlenmiştir. Limit kavramının anlatılması için “lim” yerine “Civar” ifadesinin kullanılmasının öğrencilerin limit kavramını algılamalarını ve derse olan ilgilerini güçlendirdiği gözlenmiştir.

Öğrencilerin ε, ε delik civar, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to a$ kavramları ile yığılma noktası kavramı ve yığılma noktasıyla limitin ilişkisini ilişkilendirebildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin “Civar” ifadesini oldukça benimsedikleri gözlenmiştir. Limit (Civar) örnekleri yapılırken limit bakılan noktanın fonksiyonun tanım kümesine ait olup olmamasının önemli olmadığı bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir.

Öğrencilerin limit (Civar) davranışının fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktasının civarındaki değişkenlerde fonksiyonun aldığı değerlerin incelenerek bulunduğu bilgisini algıladıkları gözlenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin incelenen civarın reel sayı ekseninde delik bir açık aralığa karşılık geldiği bilgisini fark ettikleri görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğrencilerin limit davranışı bulunurken sağdan ve soldan limit kavramlarının niçin kullanıldığı bilgisine ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

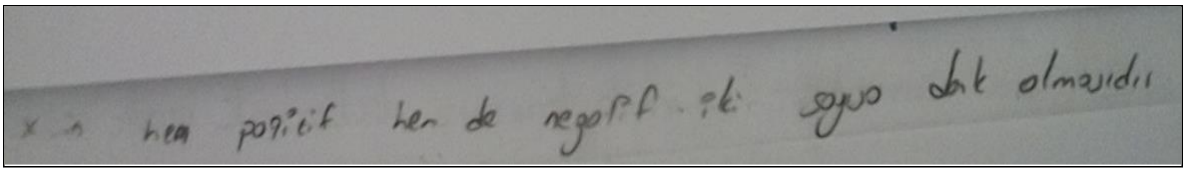
Öğrencilerin civar örneklerini 9 durum altında görmeleri ve bunların grafiklerini incelemeleri sonucu derse olan ilgilerinin oldukça arttığı gözlenmiştir. Öğrencilere birkaç civar davranışı verilmiş ve bu davranışları gösteren bir örnek fonksiyon grafiği çizmeleri istenmiştir. Öğrencilerin bu örnek çözümüne ilgiyle katılım gösterdikleri, daha önceki derslerde öğrendikleri bilgileri bu örneğe taşıyabildikleri, örneği neredeyse tüm öğrencilerin doğru çözüp çözümlerini izah edebildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin $\frac{Pozitif\ sayı}{\varepsilon} \to \infty$, $\frac{Negatif\ sayı}{\varepsilon} \to -\infty$, $\frac{Pozitif\ Sayı}{\infty} \to 0^{+}$, $\frac{Negatif\ Sayı}{\infty} \to 0^{-}$, limit davranışlarını algıladıkları gözlenmiştir. Bu davranışları örnekler içinde kullanabildikleri ve trigonometrik ifadelerle bağdaştırabildikleri görülmüştür. Örnekleri çözdükçe derse ilgilerinin ve dikkatlerinin arttığı gözlenen öğrencilerin tersinden yazılmış örneklerde de gerek yerine yazılacak fonksiyonları bulmada gerekse yerine yazılacak civarları bulmada oldukça başarılı oldukları görülmüştür. Literatürde çok az rastlanan bu tür örneklerin öğrencilerde ilgiyi arttırdığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin bu ders ve buraya kadar olan derslerde gördükleri bilgileri birbirine bağlayabildikleri ve bunları kullanarak verilen uygulamalarla yüksek bir ilgiyle uğraştıkları ve çözebildikleri görülmüştür.

Öğrencilerin limitin formal tanımında yazılan kısımların aslında ne anlama geldiklerini algıladıklarını göstermiştir. Öğrencilerin limit durumlarının tanımlarını ezbere bir yol kullanmadan yazabildikleri görülmüştür. Öğrencilerin limit tanımlarını yazarken "civar" ifadesi kullandığı, limitin mümkün tüm durumlarında tanımı yazabildikleri ve yazdıkları tanıma ait örnek grafik çizebildikleri gözlenmiştir.

4. 1. 4. Başarı Testindeki Sorulardan Elde Edilen Bulgular

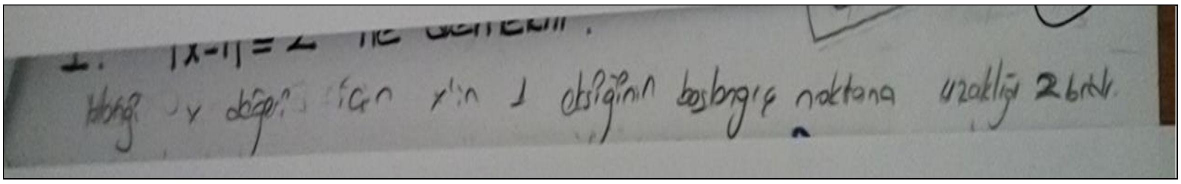
1.Soru: Ix-1I = 2 ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 25 öğrenci "doğru" cevap verirken 1 öğrenci "kısmen doğru" 4 öğrenci "yanlış" cevap vermiştir. Bu soruyu boş bırakan olmamıştır. Son sınavda ise 29 öğrenci "doğru" cevap verirken 1 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" ve "boş" cevap veren olmamıştır.



Şekil 20. Birinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Limit konusunun formal tanımına geçmeden önce x in x_0 ın civarında olmasının ne demek olduğunu öğrencilerin bilmesi gerekmektedir. Bu ön bilgi için mutlak değer sorusu sorulmuş öğrencilerin büyük çoğunluğu bu soruya doğru cevap vermiştir. Yanlış cevap veren öğrencilerin mutlak değeri ifade ederken hem pozitif hem de negatif sayıya denk olmasıdır ifadesi mutlak değerin içindeki sayının negatif veya pozitif olması durumunun yanlış ifadesidir. Bu nedenle bu cevap yanlış olarak değerlendirilmiştir.

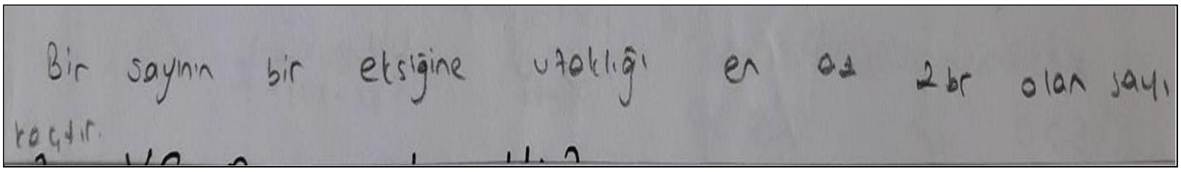


Şekil 21. Birinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Derslerden sonra üzerinde uzunca bir süre durulan mutlak değer için x-1 in ya da öğrencinin ifade ettiği gibi x in bir eksiğinin başlangıç noktasına uzaklığı 2 dir cevabı doğru cevaptır.

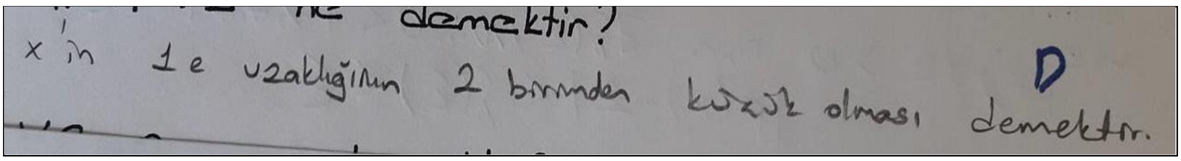
2.Soru: I x-1 I<2 ifadesi ne anlama geliyor*?*

Sorusuna ilk sınavda 24 öğrenci "doğru" cevap verirken 2 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu 3 öğrenci yanlış cevaplamış 1 öğrenci de boş bırakmıştır. Son sınavda ise 28 öğrenci "doğru" cevap verirken 2 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" ve "boş" cevap veren olmamıştır.



Şekil 22. İkinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu sorudaki amacımız civar ifadesini mutlak değer ile verebilmekti. 1 e uzaklığı 2 birimden küçük olan x ler ifadesi beklenen ifade olmasına karşın öğrenci bir sayının bire uzaklığı en az 2 birim olan sayı kaçtır diyerek yanlış cevap vermiştir.

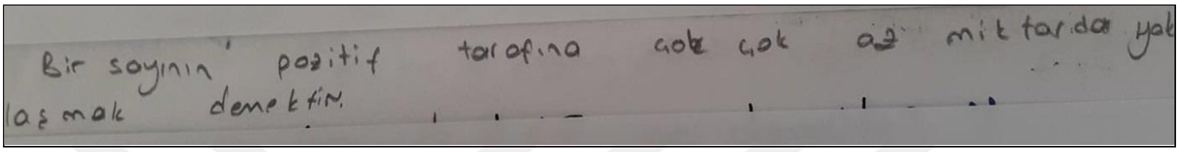


Şekil 23. İkinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Son testte öğrencilerin çoğu bu soruya x in 1 olan uzaklığı 2 den küçük olmalı diyerek doğru cevabı vermiştir. Bu soruya doğru cevap veren öğrenci sayısındaki artış derslerden sonra öğrencinin doğru ifadeyi bulmasıdır.

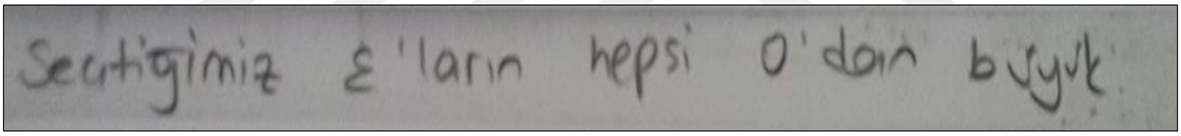
3. soru: $\forall\varepsilon > 0$ ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 8 öğrenci “doğru” cevap verirken 13 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiş 8 öğrenci “yanlış” cevaplamış ve 1 öğrenci de “boş” bırakmıştır. Son sınavda ise 10 öğrenci “doğru” cevap verirken 12 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş 5 öğrenci “yanlış” ve 2 öğrenci de “boş” cevaplamıştır.



Şekil 24. Üçüncü soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda öğrenciden sıfırdan büyük her epsilon anlamına gelir demesi beklenirken bir sayının pozitif tarafına çok az miktarda yaklaşmak ifadesiyle yanlış cevap vermiştir.

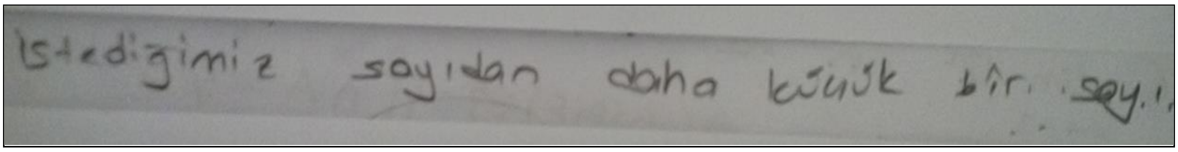


Şekil 25. Üçüncü soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Bu soruda öğrencinin seçtiğimiz epsilonların hepsinin sıfırdan büyük anlamı sıfırdan büyük her epsilon anlamına karşılık geldiği düşünüldüğünden doğru cevap olarak kabul edilmiştir.

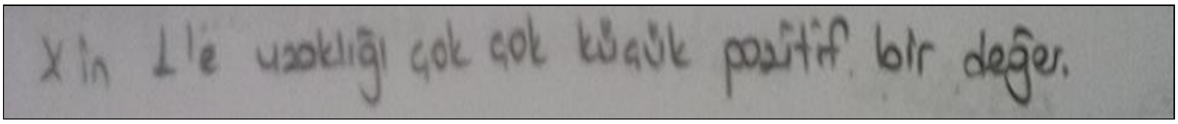
4.soru: $\forall\varepsilon > 0$ *için* $| x - 1 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 1 öğrenci “doğru” cevap verirken 12 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu 13 öğrenci “yanlış” cevaplamış ve 4 öğrenci “boş” bırakmıştır. Son sınavda ise 25 öğrenci “doğru” cevap verirken 3 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş 2 öğrenci “yanlış” cevap vermiş ve “boş” cevap veren olmamıştır.



Şekil 26. Dördüncü soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soru da öğrenciden beklenilen cevap x=1 olduğunu söylemesidir. Ancak yanlış yapan öğrenci mutlak değerin sıfırdan büyük eşit olduğunu gözden kaçırmış. Dolayısıyla bu eşitsizliği sağlayan yegane x in 1 olması gerektiğini görememiştir.



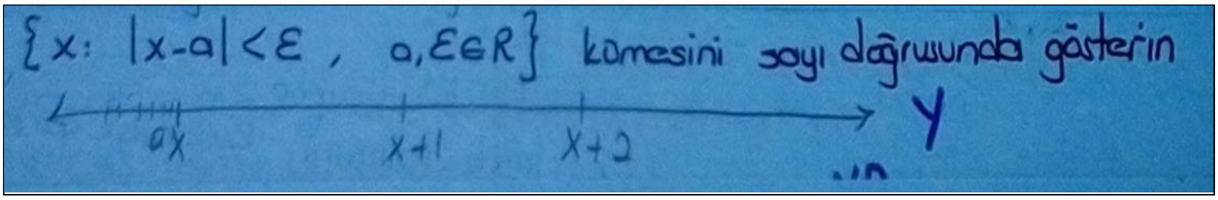
Şekil 27. Dördüncü soruya son sınavda öğrencinin verdiği kısmen doğru cevap

Burada x'in 1 e olan uzaklığı keyfi epsilondan küçük yani x=1 demesi gerekirken çok küçük bir değer diyerek biraz cevaba yaklaşmış ancak tam olarak ifade edememiştir.

Birinci, ikinci, sorular öğrencilerin mutlak değer kavramını uzaklık olarak nasıl algıladıkları yönündedir. Yukarıda ilk ve son testlerde öğrenci cevaplarından ve değerlendirmelerinden birer örnek verilmiştir. Analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınavda öğrencilerin mutlak değer kavramının uzaklık kavramıyla olan ilişkisini bağdaştırabildikleri görüldü. Üçüncü ve dördüncü sorularla ilgili verilen öğrenci cevapları yukarıda birer örnekle verilmiştir. Bu sorularla öğrencilerin mutlak değer kavramı ile ε kavramını bir araya getirip $x = a$ ve $x \to a$ ifadelerini ne anlama geldiği, matematiksel olarak bunun nasıl ifade edildiğinin öğrencilerdeki algısı görülmek istenmiştir. Analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınavda $x = a$ ve $x \to a$ ifadelerinin mutlak değer ve ε kavramları kullanılarak nasıl yazılabildiğinin inceliklerinin öğrenciler tarafından doğru algılandığı görüldü. keyfi ε ve mutlak değer özelliklerinin $x = a$ ve $x \to a$ ifadelerinin matematiksel olarak yazımındaki kullanımının öğrenciler tarafından anlaşıldığı ve bu ifadelerin limit konusu ile bağlantılarının öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir.

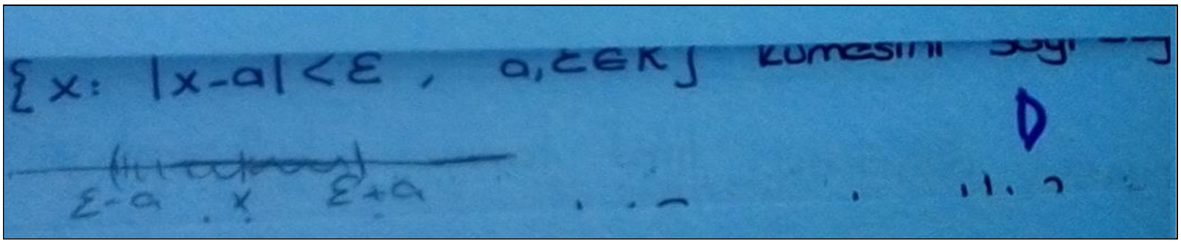
5. soru: { x: | x – a | < ε ,   a, ε ∈ R } kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

Sorusuna ilk sınavda 9 öğrenci "doğru" cevap verirken 15 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 5 ve boş bırakan 1 öğrenci olmuştur. Son sınavda ise 19 öğrenci "doğru" cevap verirken 2 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş 9 öğrenci "yanlış" cevap vermiş ve "boş" cevap veren olmamıştır.



Şekil 28. Beşinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada a’nın içerisinde a nın da dahil olduğu epsilon komşuluğunu sayı doğrusunda çizmesi gerekirken öğrenci değişkenin x olduğunu anlamamış a nın epsilon civarındaki x leri göstermesi gerekirken x in civarında bir a işaretleyerek yanlış yapmıştır.

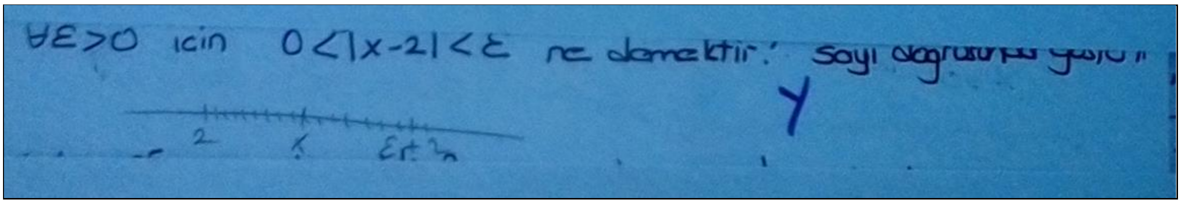


Şekil 29. Beşinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci a nın epsilon civarındaki x leri doğru göstermiştir. Dersleri dikkatli dinleyen, aktif olan katılan sorulara verilen cevapları içselleştiren öğrenciler bu soruya doğru cevabı verebilmiştir.

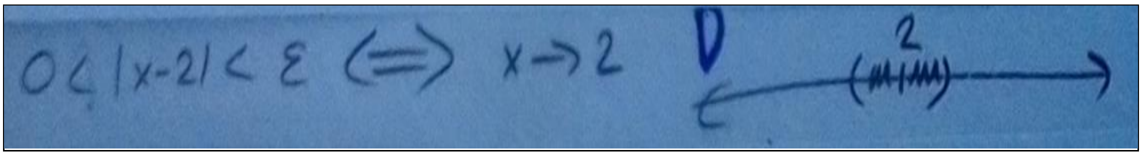
6. soru: ∀ε > 0 için 0 < | x – 2 | < ε ifadesi ne anlama geliyor*?* Sayı doğrusunda gösteriniz.

Sorusuna ilk sınavda 2 öğrenci “doğru” cevap verirken 11 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 9 öğrenci olup ve 8 öğrenci boş bırakmıştır. Son sınavda ise 23 öğrenci “doğru” cevap verirken 5 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş 2 öğrenci “yanlış” cevap vermiş ve “boş” cevap veren olmamıştır.



Şekil 30. Altıncı soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda 5. Sorudan farklı olarak mutlak değerin sıfırdan büyük alınmasıyla x=2 olması engellenmiştir. Öğrencinin x=2 değil $x \to 2$ olduğunu görmesi beklenmiştir. Ancak öğrenci bunu görememiş ve yanlış cevap vermiştir.



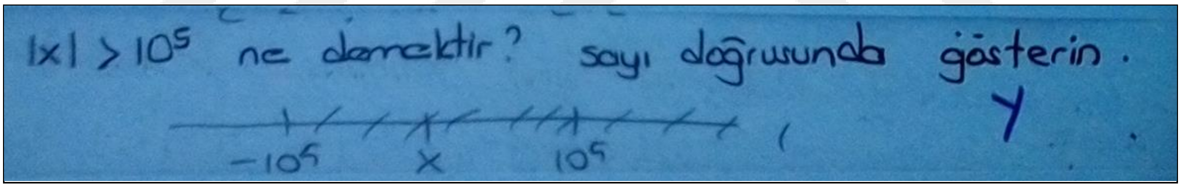
Şekil 31. Altıncı soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Bu soruda öğrenci $x \to 2$ cevabını vererek istediğimiz cevabı tam olarak cevaplamış aralığı doğru olarak göstermiştir.

Beşinci ve altıncı sorularda öğrencilerin mutlak değer kavramını ve ε kavramını kullanarak bir reel sayının ε komşuluğunu ve ε delik komşuluğunun matematiksel ifadelerini algılamaları incelenmiştir. Öğrencilerin ilk ve son testlerdeki cevaplarından bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınavda öğrencilerin bir reel sayının ε komşuluğunu ve ε delik komşuluğunun matematiksel ifadelerinin nasıl yazıldığını anladıkları görüldü. Bu ε komşulukların istenildiği kadar küçük yapılabileceği, reel eksen üzerinde çizimleri yapıldığında aslında çok kuvvetli mikroskopla bakılmış hallerinin çizildiği bilgisinin öğrenciler tarafından algılandığı gözlenmiştir. Öğrencilerin bu komşulukların limit davranışları incelenirken bakılacak olan komşuluklar olduğunu fark ettikleri görülmüştür.

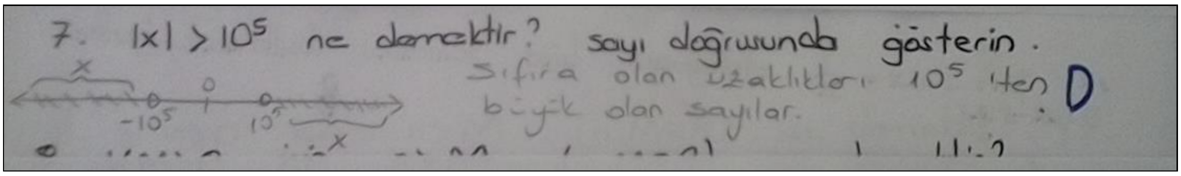
7.soru: $| x | > 10^5$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz.

Sorusuna ilk sınavda 13 öğrenci "doğru" cevap verirken 5 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 7 ve boş bırakan 5 öğrenci olmuştur. son sınavda ise 16 öğrenci "doğru" cevap verirken 2 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" cevap veren 8 öğrenci olup ve 4 öğrenci "boş" cevap vermiştir.



Şekil 32. Yedinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda x in sıfıra olan uzaklığının 10^5 den büyük olduğunu dolayısıyla $x>10^5$ veya $x<-10^5$ sonucuna ulaşılması beklenmiştir. Bu öğrenci aralığı ezberlediği biçimde yanlış çizmiştir.

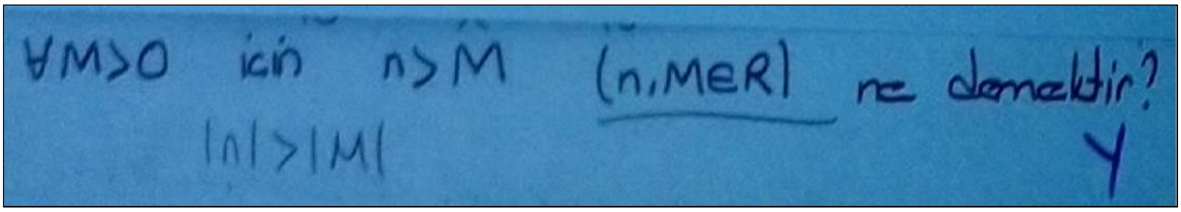


Şekil 33. Yedinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci istenilen cevabı tam olarak karşılaşmış ve doğru cevabı vermiştir.

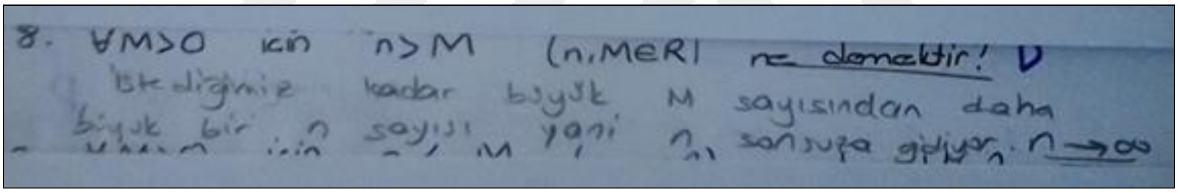
8.soru : ∀M > 0 için n > M (n,M∈R) ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 2 öğrenci “doğru” cevap verirken 9 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 13 öğrenci olup, boş bırakan 6 öğrencidir. Son sınavda ise 18 öğrenci “doğru” cevap verirken 6 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren 5 ve “boş” cevap veren 1 öğrenci olmuştur.



Şekil 34. Sekizinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda istenilen şey keyfi çok büyük bir sayıdan daha büyük bir n sayısının sonsuzlukta olduğunu kavraması istenmiştir. Ancak burada öğrenci yanlış cevap vermiştir.

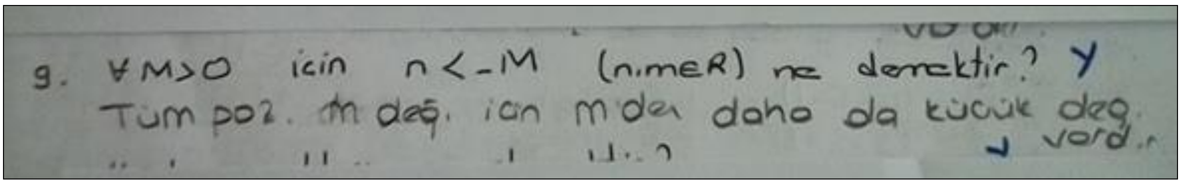


Şekil 35. Sekizinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada istediğimiz kadar büyük sayıdan daha büyük olan n in sonsuzda olduğunu fark etmiş doğru cevap vermiştir.

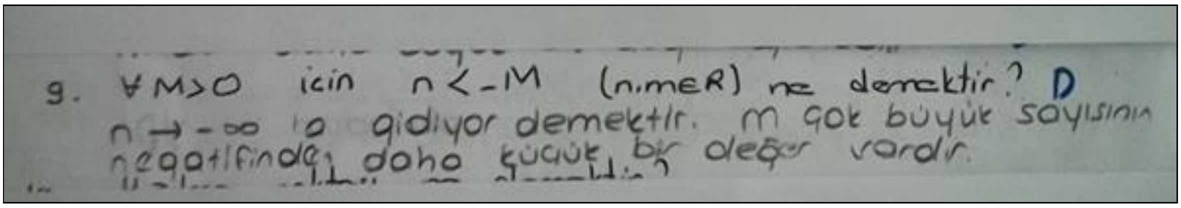
9. soru: ∀M > 0 için n < -M (n,M∈R) ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 2 öğrenci “doğru” cevap verirken 6 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 12 öğrenci olup, boş bırakan 10 öğrencidir. Son sınavda ise 18 öğrenci “doğru” cevap verirken 6 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren 5 ve “boş” cevap veren 1 öğrenci olmuştur.



Şekil 36. Dokuzuncu soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Buradaki soruda da istediğimiz kadar büyük bir sayının negatifinden daha küçük olan n in eksi sonsuza gittiğinin görülmesi istenmiştir. Ancak burada öğrencinin istenilen dışında alakasız bir cevap verdiği görülmektedir.



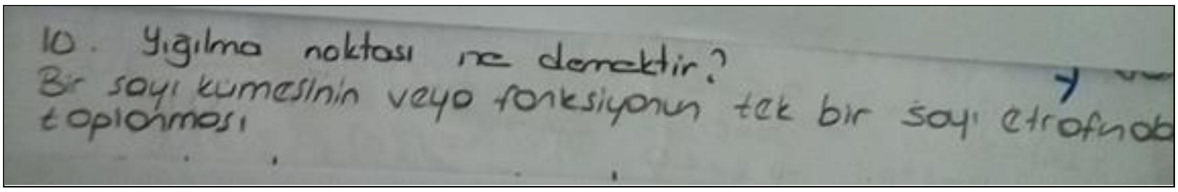
Şekil 37. Dokuzuncu soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci istediğimiz cevap olan n in eksi sonsuza gittiğini fark etmiş ve doğru cevap vermiştir.

Yedinci, sekizinci ve dokuzuncu sorularda öğrencilerin mutlak değer kavramı ve keyfi istediğiniz kadar büyük sayıyı tasvir eden M kavramı yardımı ile $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin matematiksel olarak nasıl yazıldığına dair algıları incelendi. İlk ve son sınavlara ait bir öğrenci cevabı yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınava göre öğrencilerin mutlak değer ve M kavramlarını kullanarak $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin nasıl anlamlandırıldığını fark ettikleri görüldü. Öğrencilerin pozitif sayılar için mutlak değer sonucunun aynen dışarı çıktığını dolayısıyla $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin matematiksel yazılımında mutlak değerli ifadenin nasıl bir şekil aldığını fark ettikleri görüldü. x değişkeninin sonsuzluğun civarında olması kavramının öğrenciler tarafından algılanabildiği görülmüştür. Öğrencilerin $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ ifadelerinin ve bu ifadelerin matematiksel yazılımlarının, limit kavramı ve limitin formal tanımının yazılması ile olan ilişkini fark ettikleri görülmüştür.

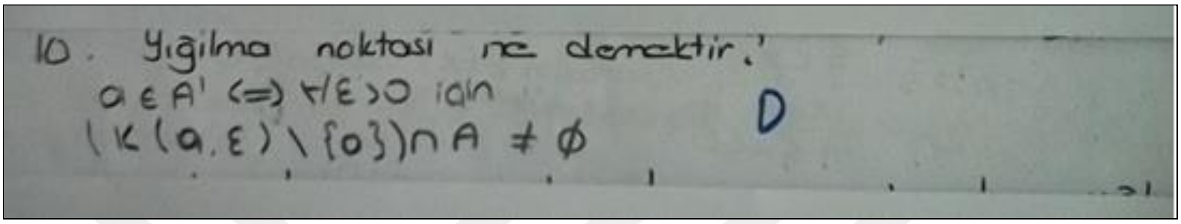
10. soru: Yığılma noktası ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda “doğru” ve “kısmen doğru” cevabını veren olmamıştır. Bu soruyu yanlış cevaplayan 25 öğrenci olup, boş bırakan 5 öğrencidir. Son sınavda ise 9 öğrenci “doğru” cevap verirken 6 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren 11 ve “boş” cevap veren 4 öğrenci olmuştur.



Şekil 38. Onuncu soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada istenilen yığılma noktası kavramının tanımını sözlü ya da matematiksel olarak ifade edebilmeleridir. Bu öğrenci bir sayı kümesinin veya fonksiyonun tek bir sayı etrafında toplanması demekle yığılma hissini tek bir sayı etrafında toplanmak olarak algılamış ve yanlış cevap vermiştir. Yığılma noktasının ne olduğuna dair doğru cevap vermesi beklenilen öğrencilerin öncelikle delik komşuluğu bilmeleri, noktanın delik komşuluğu ile noktanın elemanı olduğu kümenin arakesitinin boş küme olmaması gerektiğini bilmeleri gerekmektedir.

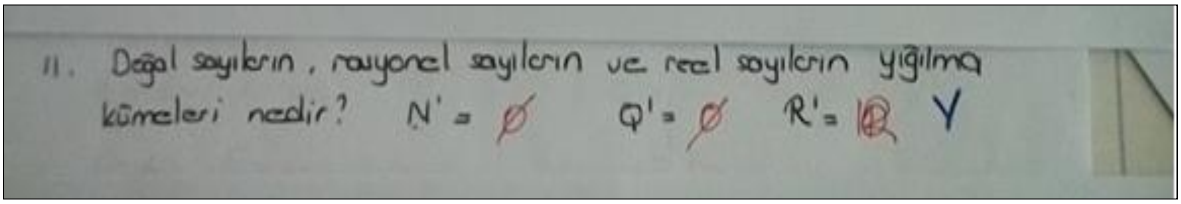


Şekil 39. Onuncu soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci derste verilen formal tanımı doğru yazmıştır.

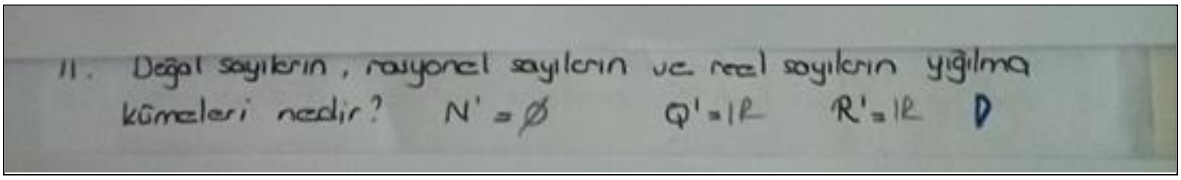
11. soru: Doğal sayıların, rasyonel sayıların ve reel sayıların yığılma kümeleri nedir?
N’ = ? Q’= ? R’ = ?

Sorusuna ilk sınavda 7 öğrenci “doğru” cevap verirken 15 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 6 öğrenci olup, boş bırakan 2 öğrencidir. Son sınavda ise 24 öğrenci “doğru” cevap verirken 3 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren 1 ve “boş” cevap veren 2 öğrenci olmuştur.



Şekil 40. On birinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada beklenilen cevap doğal sayılarla bir reel sayıya istenildiği kadar yaklaşılamayacağının görülmesi yani doğal sayıların yığılma noktalarının kümesinin boş küme olduğu, rasyonel ve reel sayılarla bir reel sayıya istediğimiz kadar yaklaşabileceğimizden rasyonel ve reel sayıların yığılma noktaları kümelerinin reel sayı kümesi olduğunun görülmesidir. Öğrenci istenilen doğru cevabı verememiştir.

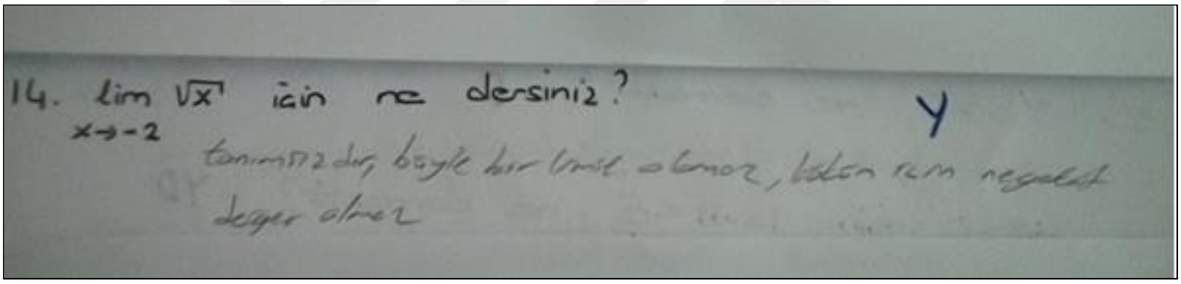


Şekil 41. On birinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci doğal sayıların yığılma kümesinin olamayacağını, rasyonel sayılar ve reel sayıların yığılma kümesinin ise reel sayılar kümesi olduğunu ifade ederek istenilen doğru cevaba ulaşmıştır.

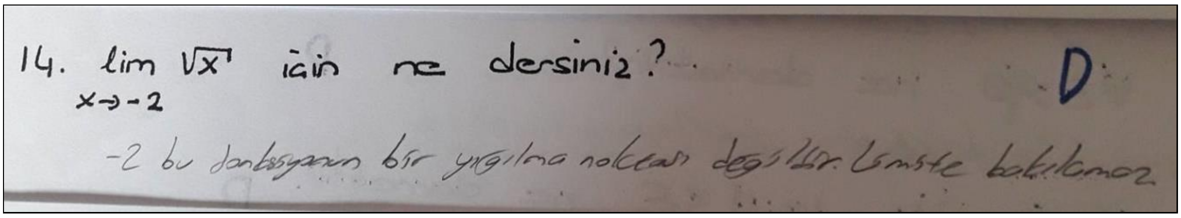
14. Soru: $\lim_{x\to -2}\sqrt{x}$ limiti için ne dersiniz?

Sorusuna ilk sınavda hiçbir öğrenci “doğru” cevap verememiştir 5 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 17 öğrenci olup, boş bırakan 8 öğrencidir. Son sınavda ise 19 öğrenci “doğru” cevap verirken 2 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş 8 öğrenci “yanlış” cevap vermiş ve 1 öğrencide “boş” cevap vermiştir.



Şekil 42. On dördüncü soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada öğrencilerden beklenilen cevap x, -2’nin civarındayken -2’nin fonksiyonun bir yığılma noktası olmadığından limitine bakılamayacağını ifade etmeleridir. Ancak öğrenci burada -2’nin yığılma noktası değil de fonksiyonu tanımsız yapan değer olarak görüp limitinin olamayacağını söyleyip yanlış cevap vermiştir.



Şekil 43. On dördüncü soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

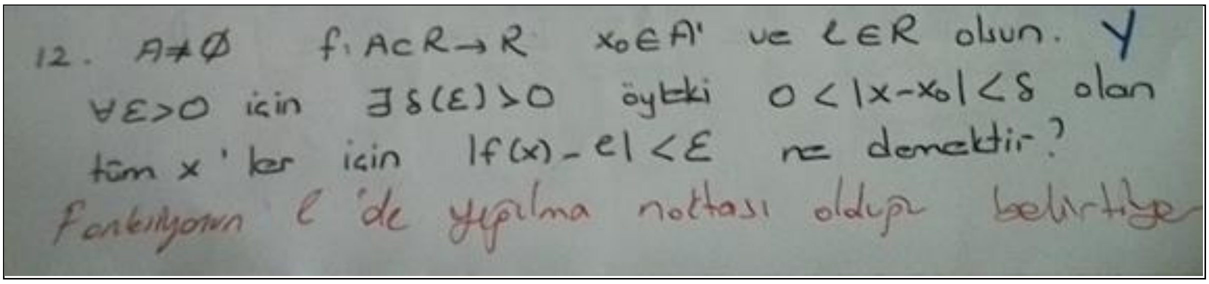
Burada öğrenci beklenilen cevap olan -2’nin yığılma noktası olmadığı cevabını verip doğru sonuca ulaşmıştır

Onuncu ve on birinci sorularda öğrencilerin yığılma noktası kavramı hakkındaki ve yığılma noktası olmak için gerek ve yeter şartın matematiksel ifadesinin nasıl yazıldığına dair bilgileri incelenmiştir. İlk ve son sınavlarda verilen cevaplara bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınava göre öğrencilerin yığılma noktası kavramını algılayabildikleri görüldü. Öğrencilerin yığılma noktası olmak için gerek ve yeter şartları ε delik komşuluk kavramını kullanarak matematiksel olarak yazabildikleri, verilen bir kümenin yığılma noktaları kümesini doğru olarak bulabildikleri görüldü. Öğrencilerin yığılma noktası kavramı ile limitin sadece verilen fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktasının civarında bakılabileceği bilgisini ilişkilendirebildiği görülmüştür.

On dördüncü soruda öğrencilerin limit bakılan noktanın fonksiyonun tanım kümesine ait olup olmamasının önemli olmadığının asıl önemli olanın limit bakılan noktanın verilen fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerektiği bilgisinin incelenmesiydi. Bu soru için ilk ve son sınavlarda alına cevaplara bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan son sınavda öğrencilerin limitin anlamsız olmasının -2'de $\sqrt{x}$ fonksiyonunun tanımsız olmasından değil de -2'nin $\sqrt{x}$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olmamasından kaynaklandığı ayrımını yaptıkları görüldü.

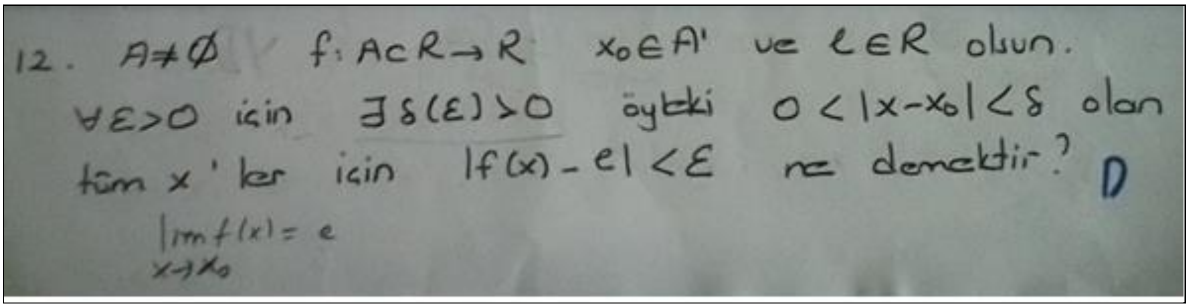
12. soru: A ≠ ∅ f: $A \subseteq R \to R$ x_0 A'nın yığılma noktası ve l ∈ R olmak üzere; ∀ε > 0 için ∃δ(ε) > 0 öyle ki 0 < | x - x_0 | < δ olan tüm x ler için $|f(x)$ *– l | < ε* ifadesi ne anlama geliyor?

Sorusuna ilk sınavda 5 öğrenci "doğru" cevap verirken 1 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 7 öğrenci olup, boş bırakan 15 öğrencidir. Son sınavda ise 21 öğrenci "doğru" cevap verirken 4 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" cevap veren 2 ve "boş" cevap veren 3 öğrenci olmuştur.



Şekil 44. On ikinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada öğrencilerden limitin formal tanımını görmesi beklenmektedir. Ancak öğrenci yığılma noktası tanımı olduğunu belirtip yanlış cevap vermiştir. Bazı öğrenciler limit tanımını yığılma noktası tanımıyla karıştırıp hataya düşmüştür. Bu öğrenciler hem yığılma noktasının formal tanımını hem de limitin formal tanımını anlamamış ve bu kavramları birbirine karıştırmıştır.

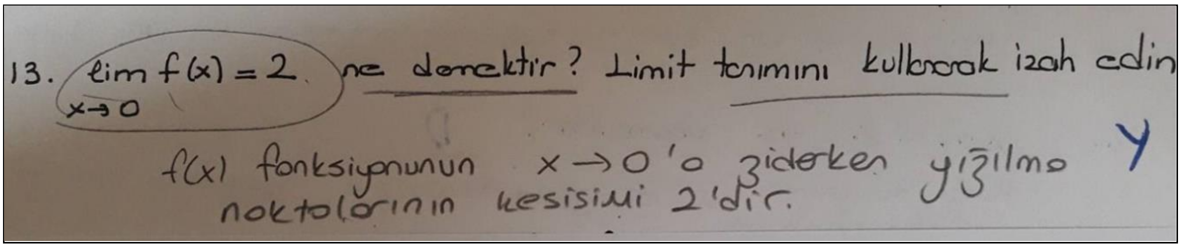


Şekil 45. On ikinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci limitin formal tanımını görmüş ve derste gördüğü şekilde kendi ifadesiyle doğru bir şekilde açıklamıştır.

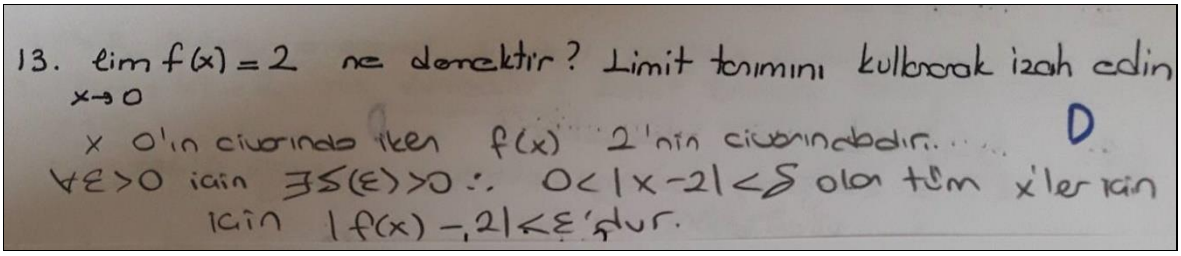
13. Soru: $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ ifadesi ne anlama geliyor? Limit tanımını kullanarak izah ediniz.

Sorusuna ilk sınavda 7 öğrenci “doğru” cevap verirken 11 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 6 öğrenci olup, boş bırakan 6 öğrencidir. Son sınavda ise 28 öğrenci “doğru” cevap verirken 2 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren ve “boş” cevap veren olmamıştır.



Şekil 46. On üçüncü soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada öğrencilerden soru 12 de olduğu gibi limitin formal tanımını kullanarak x sıfırın civarındayken fonksiyonun 2 nin civarında olduğunu ifade etmesi beklenmiştir. Ancak öğrenci yığılma noktalarının kesişiminin limit olduğu yönündeki görüşünün hatalı olduğu ve yanlış cevap verdiği görülmektedir.



13. $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ ne demektir? Limit tanımını kullanarak izah edin
x 0'ın civarında iken f(x) 2'nin civarındadır...... D
$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ∴ $0 < |x-2| < \delta$ olan tüm x'ler için
için $|f(x) - 2| < \varepsilon$'dur.

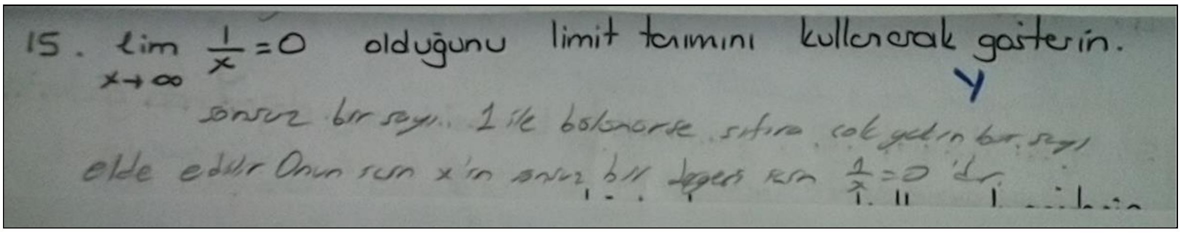
Şekil 47. On üçüncü soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Burada öğrenci istenilen cevap olan x sıfırın civarındayken fonksiyonunu 2 nin civarında olması ifadesini ve limitin formal tanımını doğru verdiği görülmektedir.

On ikinci ve on üçüncü soruda öğrencilerin limitin formal tanımını yazabilme becerileri incelenmiştir. İlk ve son sınavlardaki öğrenci cevaplarından bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan sınav sonuçlarına göre, öğrencilerin limitin formal tanımını yazabildikleri görüldü. Öğrencilerin limitin formal tanımını yazarken mutlak değer ve ε kavramlarının nasıl kullanıldığını doğru algıladıkları görülmüştür. On üçüncü soruda istenen limit tanımının öğrenciler tarafından yazılabildiği görüldü.

15. Soru: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

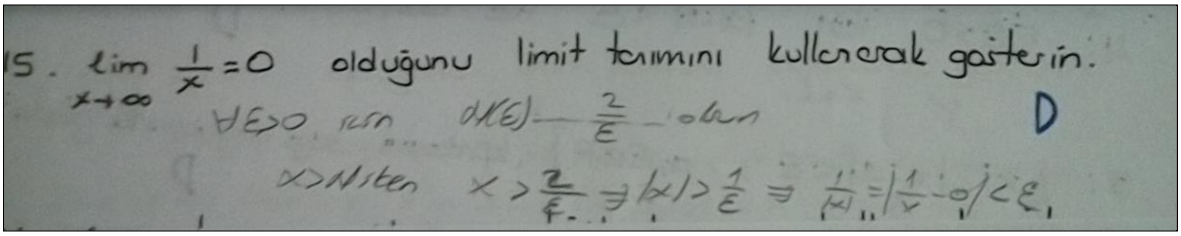
Sorusuna ilk sınavda 8 öğrenci "doğru" cevap vermiştir 3 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 13 öğrenci olup, boş bırakan 6 öğrencidir. son sınavda ise 29 öğrenci "doğru" cevap verirken 1 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" cevap veren ve "boş" cevap veren olmamıştır.



15. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösterin. Y
sonsuz bir sayı 1 ile bölünürse sıfıra çok yakın bir sayı
elde edilir Onun için x'in sonsuz bir değeri için $\frac{1}{x} = 0$ 'dır.

Şekil 48. On beşinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Tanım yardımıyla limit gösterilirken uygun deltanın $\frac{2}{\varepsilon}$ seçilmesiyle bu soruya doğru cevap vermeleri beklenmekteydi. Ancak yanlış cevap verenlerin çoğu x yerine sonsuz yazmayı tercih edip yanlış yapmıştır.

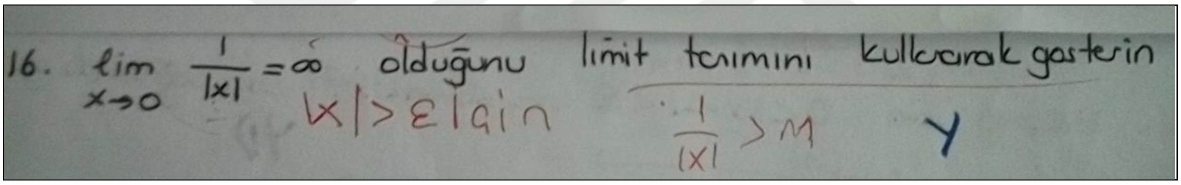


Şekil 49. On beşinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Tanım yardımıyla limit gösterilirken uygun deltanın istenilen sonuçtan geriye doğru bakılarak nasıl seçileceğini kavrayan öğrenciler bu soruya doğru cevap vermişlerdir.

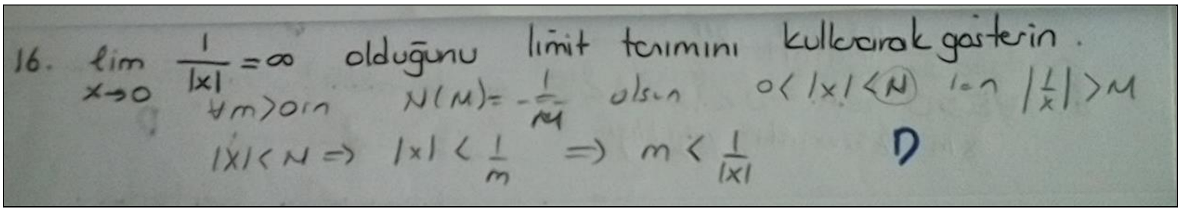
16. Soru: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

Sorusuna ilk sınavda 4 öğrenci “doğru” cevap vermiş 3 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 11 öğrenci olup, boş bırakan 12 öğrencidir. Son sınavda ise 22 öğrenci “doğru” cevap verirken 5 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş 1 öğrenci “yanlış” cevap vermiş ve 2 öğrencide “boş” cevap vermiştir.



Şekil 50. On altıncı soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Burada öğrencilerden keyfi M>0 için x in komşuluğunu 1/M olarak seçmeleri beklenmektedir. Ancak öğrencinin cevabında görüldüğü üzere $\frac{1}{IxI}$ >M seçerek hataya düşmüşler yanlış yapmışlardır.

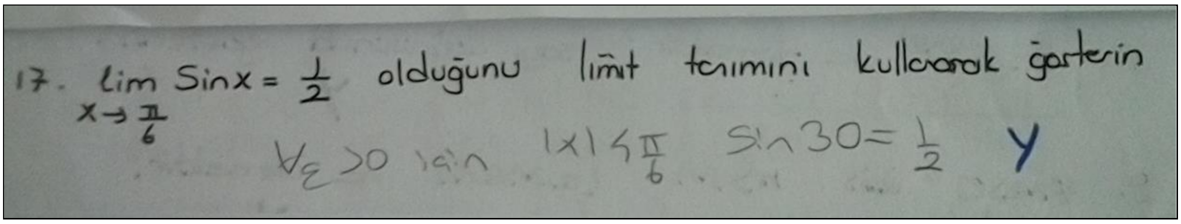


Şekil 51. On altıncı soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Tanım yardımıyla limit gösterilirken keyfi M>0 için x in komşuluğunu 1/M olarak seçerek fonksiyonun keyfi M den büyük olduğunu gösteren öğrenciler bu soruyu doğru cevaplamıştır.

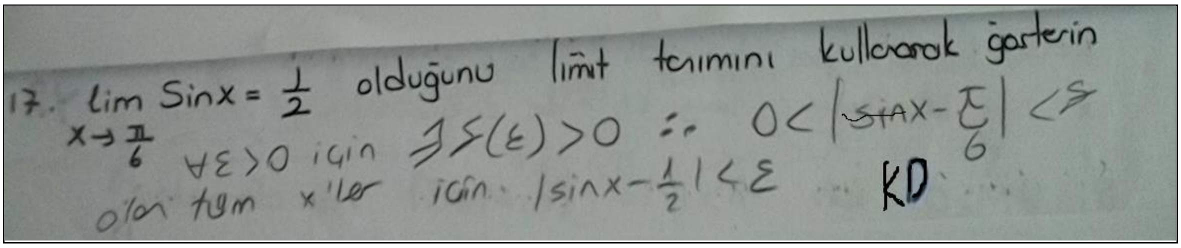
17. Soru: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Sinx = \frac{1}{2}$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

Sorusuna ilk sınavda 7 öğrenci “doğru” cevap vermiş 1 öğrenci “kısmen doğru” cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 8 öğrenci olup, boş bırakan 14 öğrencidir. Son sınavda ise 29 öğrenci “doğru” cevap verirken 1 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren ve “boş” cevap veren olmamıştır.



Şekil 52. On yedinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda öğrencilerden beklenen doğru cevap; sina-sinb açılımı yardımıyla $\left|\sin(x-\frac{\pi}{6})\right| \le \left|x-\frac{\pi}{6}\right|$ eşitsizliğine ulaşarak limit tanımını yazmalarıydı. Ancak burada görüldüğü üzere yanlış yapan öğrenciler x yerine direkt $\frac{\pi}{6}$ yazarak yanlış çözüm yapmışlardır.



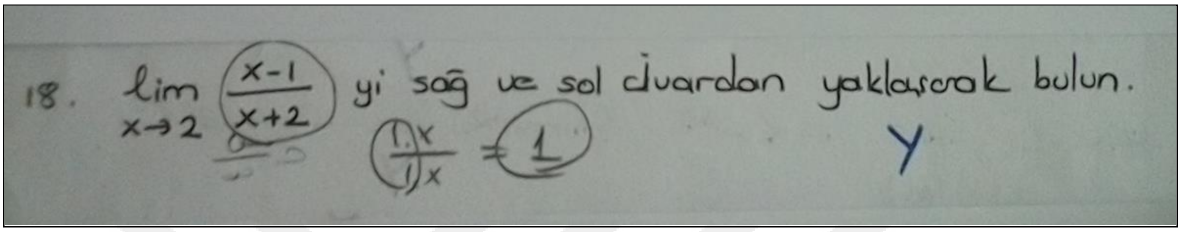
Şekil 53. Onyedinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği kısmen doğru cevap

Bu öğrencide olduğu gibi bazı öğrenciler simgeleri tam olarak istenildiği yere yerleştirememekte parantez işaretine dikkat etmemektedir. Dolayısıyla konu hakkında biraz bilgisi olmasına karşın tam istenilen ($\left|\sin(x-\frac{\pi}{6})\right| \le \left|x-\frac{\pi}{6}\right|$) şekilde ifade edemediğinden kısmen doğru kategorisinde değerlendirilmiştir.

On beş, on altı ve on yedinci sorularda öğrencilerden verilen basit limitlerin limitin formal tanımı kullanılarak ispat edilmesi istenmiştir. Bu sorularda sonsuz civarında bir limit, 0 civarında sonucu sonsuz olan bir limit ve birde trigonometrik bir limit kullanılmıştır. Öğrencilerin bu üç durumdaki limitin formal tanımını yazabilmeleri ve bu formal tanımı kullanarak ispat yapabilme becerileri incelenmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan sınav sonucuna göre öğrencilerin limit tanımı kullanarak limit ispat etme ifadelerini formal olarak yazabildikleri ve ispat yaparken limitin formal tanımının nasıl kullanıldığının inceliklerini algıladıkları görüldü.

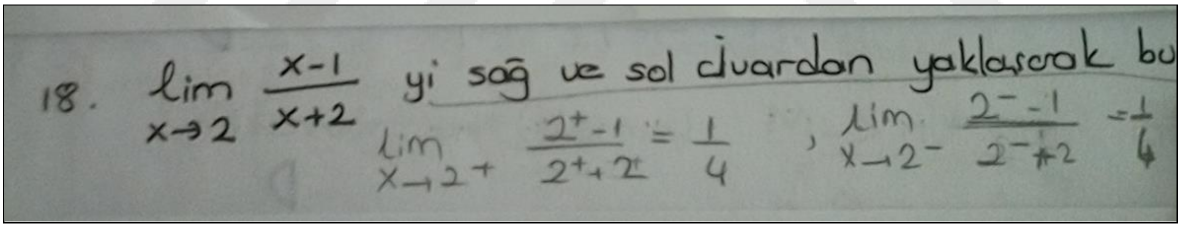
18. Soru: $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}$ limitini 2'nin büyük ve küçük civarlarından yaklaşarak bulunuz.

Sorusuna ilk sınavda 17 öğrenci "doğru" cevap vermiş 3 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 5 öğrenci olup, boş bırakan 5 öğrencidir. Son sınavda ise 22 öğrenci "doğru" cevap verirken 6 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" cevap veren 1 ve "boş" cevap veren 1 öğrenci olmuştur.



Şekil 54. On sekizinci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Önceki soruda olduğu gibi bu soruda da öğrencilerin çoğu ön testte x yerine 2 yazarak sonucu bulma eğilimi göstermişler ve soruya yanlış cevap vermişlerdir.

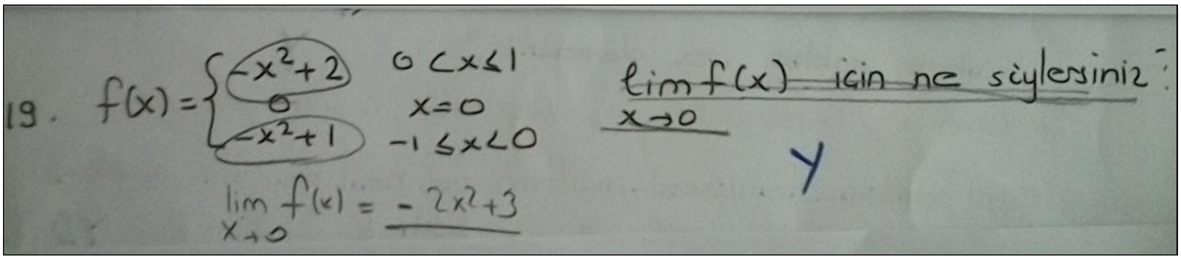


Şekil 55. On sekizinci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

Çoğu öğrenci bu soruya x yerine 2 yazarak cevap vermesine rağmen 2 den büyük ve 2 den küçük değişkenlerde fonksiyonun ¼ değerini aldığını farkeden öğrenciler bu soruya doğru cevap vermişlerdir.

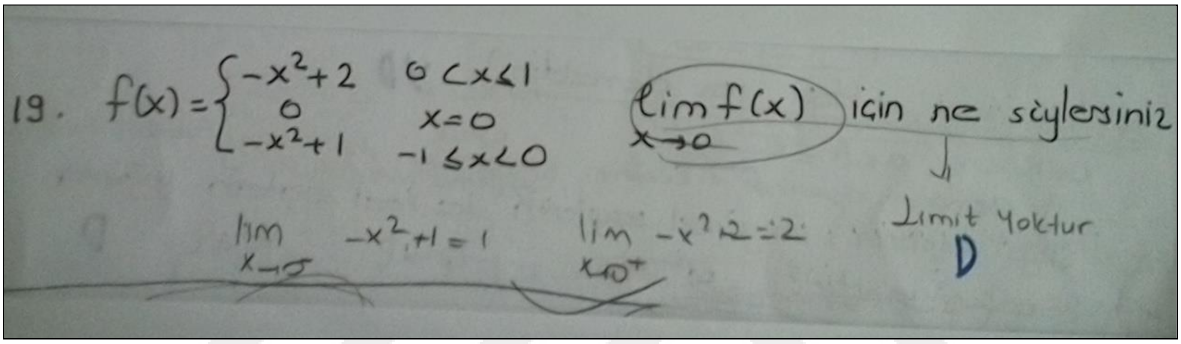
19. Soru: $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & 0<x\leq 1\\ 0 & x=0\\ -x^2+1 & -1\leq x<0\end{cases}$ *olmak üzere;* $\lim_{x\to 0}f(x)=?$

Sorusuna ilk sınavda 7 öğrenci "doğru" cevap vermiş 4 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 8 öğrenci olup, boş bırakan 11 öğrencidir. Son sınavda ise 22 öğrenci "doğru" cevap verirken 5 öğrenci "kısmen doğru" cevap vermiş "yanlış" cevap veren olmayıp ve "boş" cevap veren 3 öğrenci olmuştur.



Şekil 56. On dokuzuncu soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu öğrencide olduğu gibi birçok öğrenci yine bu soruda da yerine yazma yanılgısına düşerek x yerine 0 yazıp limiti 0 bularak yanlış yapmışlardır.



Şekil 57. On dokuzuncu soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

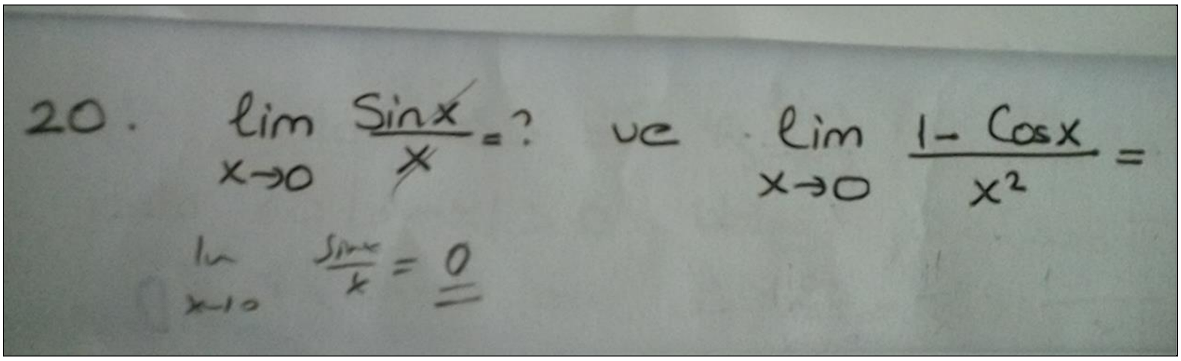
0'ın civarlarını ayrı ayrı değerlendirerek 0'ın civarında fonksiyonun 2 farklı değer alacak şekilde çalıştığını görenler limitin mevcut olmadığı sonucuna yani doğru sonuca ulaşmışlardır.

On sekiz ve on dokuzuncu sorularda limit davranışı hesaplarken limit istenen noktayı fonksiyonda yerine yazmamaları gerektiği, bazı örneklerde yerine yazıldığı zaman çıkan sonucun doğru olduğu fakat bu durumun yerine yazma değil yerine yazılıyormuş gibi davranma olduğu bilgisinin öğrencilerdeki farkındalığı incelenmiştir. İlk ve son sınav sonuçlarına ait bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan sınav sonucuna göre öğrenciler on sekizinci soruda verilen basit bir kesir tipi polinom ifadede limit istenen noktanın yerine yazılıyormuş gibi davrandığını gördü. On dokuzuncu soruda ise öğrenciler limit istenen noktayı fonksiyonda yerine yazmamış istenen noktanın civarında fonksiyonun davranışını parçalı fonksiyonu değişkenin büyük ve küçük civarında çalıştırarak bulmuştur.

20. Soru: $\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x} = ?\ \ ve\ \ \lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2} = ?$

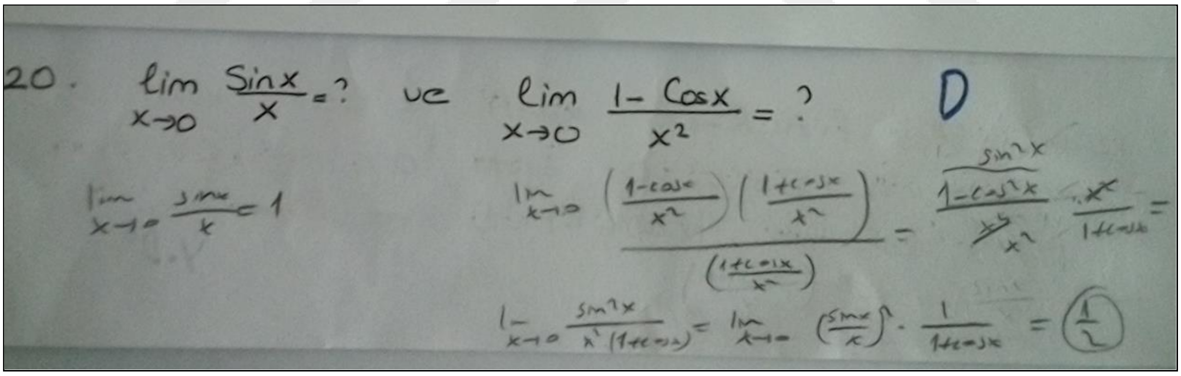
Sorusuna ilk sınavda 11 öğrenci "doğru" cevap vermiş 12 öğrenci "kısmen doğru" cevabını vermiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan 2 öğrenci olup, boş bırakan 5 öğrencidir.

Son sınavda ise 18 öğrenci “doğru” cevap verirken 11 öğrenci “kısmen doğru” cevap vermiş “yanlış” cevap veren olmayıp ve “boş” cevap veren 1 öğrenci olmuştur.



Şekil 58. Yirminci soruya ilk sınavda öğrencinin verdiği yanlış cevap

Bu soruda $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ = 1 şeklindeki bir trigonometrik limit kuralının basit iki uygulaması sorulmuştur. Cosinüslü ifadenin sinüslü ifadeye çevrilmesi ve kuralın görülmesi istenmiştir. Bu kuralı göremeyen yine yerine yazma yanılgısına düşen öğrenciler yanlış yapmışlardır.



Şekil 59. Yirminci soruya son sınavda öğrencinin verdiği doğru cevap

$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ şeklindeki olan bir trigonometrik limit kuralının cosinüslü ifadenin sinüslü ifadeye çevrilmesi ile $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{Sin^2x}{x^2(1+Cosx)} = \frac{1}{2}$ olduğunu gören öğrenciler soruya doğru cevap vermişlerdir.

Yirminci soruda öğrencilerden basit trigonometrik ilişkileri kullanarak bilinen bir limit kuralını uygulamaları istenmiştir. Öğrencilerin trigonometrik limit kurallarını uygulama becerilerine bakılmıştır. İlk ve son sınava ait öğrenci cevapları ve değerlendirmelerinden bir örnek yukarıda verilmiştir. Analoji destekli dialojik yöntemle yürütülen derslerden sonra yapılan sınav sonucuna göre öğrencilerin trigonometrik ilişkileri limit kavramıyla bağdaştırabildikleri verilen örnekleri doğru olarak çözdükleri görüldü.

Özetle, öğrencilere analoji destekli diyalojik yaklaşımı ile ders işlemeden önce limit konusu ile ilgili başarı testi yapıldı. Öğrencilerin büyük çoğunluğunda limit için ön bilgi olan mutlak değer konusunda bile hataları olduğu ve literatürde tespit edilen yanılgılara sahip oldukları görüldü. Aynı şekilde limit konusunda literatürde bulunan tanımlı ise yerine yazma, yığılma noktasına bakmama, limiti yerine yazarak hesaplama, formal tanımı yapamama, trigonometrik fonksiyonlarda limit alamama gibi tüm yanılgılara sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Analoji destekli diyalojik yöntem ile yapılan derslerden sonra alınan başarı puanı sonuçlarının anlamlı bir fak yarattığı görülmüştür. Analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen dersler limit konusunda öğrenci başarılarını son test lehine arttırmıştır. Öğrenciler ilk sınavda yaptıkları hataları büyük ölçüde düzeltip son sınavda yüksek başarı göstermiştir.

Epsilon kavramını anlayamayan öğrencilerin uygulama sonunda epsilon ve epsilon yardımıyla yazılabilen $x \to a$ civarın ne anlama geldiğini anladıkları ve uygulamalarda kullanabildikleri görülmüştür. Öğrenciler sonsuzluk da olmanın matematiksel ifadesinin nasıl yazıldığını anladıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca, öğrenciler; limit ifadesi yerine civar ifadesini kullanılması sonucu hem limitin bir davranış hesabı olduğunu hem de ancak yığılma noktalarında bakılabileceğini kolayca görebildiklerini ifade etmişlerdir. Yığılma noktasının tanımını yazamayan öğrencilerin uygulamadan sonra yığılma noktası tanımını sözel olarak anlatabildikleri ve matematiksel tanımını yapabildikleri görülmüştür. Limitin matematiksel tanımını yazabilen öğrenciler, bu tanım yardımıyla limit ispatlayabildiklerini söylemişlerdir. Öğrenciler sağdan soldan yerine artık değişkenin civarında fonksiyonun davranışına baktıklarını ve civar ifadesinin limit ifadesi yerine kullanımının çok büyük kolaylık sağladığını ifade etmişlerdir.

4. 2. Limit Konusunda Analoji Hazırlamada Üniversite Öğrencilerinin Yeterliliği ile İlgili Bulgular

Analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden sonra öğrenciler grup analojilerini hazırladılar. Beşer öğrenciden oluşan altı grup kendi analojilerini geliştirip sınıfta sundular. Öğrenciler ödevlerini sundukları sırada Tablo 10’da verilen proje çalışmalarını değerlendirme formu ile değerlendirildiler ve sınıf içi gözlemlerle izlendiler. Daha sonra öğrenci gruplarıyla odak grup görüşmeleri yapıldı. Grupların hazırladıkları analojiler ve bu analojilerden elde edilen bulgular aşağıda verilmiştir.

4. 2. 1. Birinci Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

1. Grubun analojisi(oyun analojisi)

Hedef: limit

Kaynak: Hasta ilaç analojisi, zenon paradoksu

Süre: 40

Araç gereçler: projeksiyon, kostüm, dekor

1. grubun analojisi bir oyun analojisiydi. Senaryo hazırlayarak sınıfta grup üyeleriyle oyunlarını sergilediler. Yaklaşık 1 ders saatini alan bu oyun zor durumda kalan erkeklerin bu durum karşısında davranışlarını inceleyen ve bu davranışı limitle ilişkilendiren bir oyundu. Senaryosunu hazırlayıp sınıfta sundukları bu oyuna karşı sınıfın ilgisi büyüktü. Oyun sonunda sınıftakiler bu grubu alkışlarla desteklediler ve beğendiklerini gösterdiler.

Oyunun Senaryosu*:*

İki samimi arkadaş okulun bahçesinde karşı karşıya gelirler. Konuşmaya başlarlar. Erkek olan kişi kafasında yer alan bir düşünceyi bayan arkadaşa aktarır. Aralarında güzel bir konuşma ortamı oluşur.

1.Erkek : Erkekleri kadınlardan ayıran özelliklerden biri ise her erkeğin özellikleri farklıdır.

1.Kadın : Böyle bir şey yoktur. Bütün erkekler aynıdır.

1.Erkek : Hayır! Tabi ki de bütün erkekler farklıdır.

1.Bayan : İddiaya var mısın? Ben aynı yöntem ile farklı dediğin iki erkeğe aynı soruları soracağım ve bana ikisi de aynı sonucu verecektir.

1.erkek : Tamam varım. Böle bir şey olamaz. Gidelim fakülteye istediğin iki erkek seç ve onlara senin seçtiğin yöntem ile sorunu sor ve bakalım aynı sonuca ulaşabilir misin?

1.Kadın : Tamam hadi gidelim.

1.Erkek : Peki ne soracaksın onlara?

1.Kadın : Bir gün eşin çok hasta ve onu iyileştirecek bir ilaç var fakat çok pahalı senin paran onu almaya yetmiyor. İlaç bir tane eczanede satılıyor. Sen eğer ilacı çalarsan karın iyileşecek fakat sen karını hiç görmeyeceksin ve ömür boyu hapis yatacaksın bu durumda olsan hangisini seçerdin?

1.Erkek : Güzel soru ben olsam herhalde ilacı çalardım. Çünkü onu göremesem de yaşadığını bilmek yeter bana…

1.Bayan : Güzel cevap bütün herkes bu cevabı verecektir. Çünkü bütün erkekler aynı şeyleri düşünmektedir.

1.Erkek : Bu soruda alman gereken cevap bu değil mi?

1.Kadın : Tabi ki hayır…

1.Erkek : Peki nedir?

1.Kadın : Bunu sana şimdi söylemem…

1.Erkek : Peki öyle olsun…

1.Kadın : Şu gelene soralım mı? Ne dersin

1.Kadın : (karşıdan gelen erkeğe yönelir) Affedersiniz size bir soru sorabilir miyim?

2.Erkek : Tabi ki sizi dinliyorum.

1.Kadın : (soruyu sorar)

2.Erkek : Çok basit ilacı çalardım herhalde ve onun yaşaması için her şeyi yapardım.

1.Kadın : Teşekkür ederim. (Teşekkür ettikten sonra 1.erkeğe yönelir ve gülümser)

2.Erkek : Önemli değil… Rica ederim (ve gider)

1.Erkek : Bu sorunun başka cevabı yok ama ben yinede biliyorum ki buna diğer erkek farklı cevap verecektir.

1.Kadın : Sen öyle zannet bütün erkekler aynı cevabı verecekler.

1.Erkek : Bak şu gelene soralım mı?

1.Kadın : Peki olur.

1.Kadın : Bakar mısınız size bir soru sorabilir miyim? Tezimle alakalı bana yardım ederseniz sevinirim.

3.Erkek : Tabi ki elimden gelen bir şeyse neden yardımcı olmayayım.(gülümseyerek)

1.Kadın : (soruyu sorar ve alaycı bir şekilde 1.erkeğe bakar ve gülümser aynı cevabı alacam der gibi)

3.Erkek : Ben sevdiğim bir insanı kaybetmemek için elimden geleni yaparım. Fakat benim kudretim onu kurtarmaya yetmiyorsa ve ben onu bir daha göremeyeceksem eğer ben ne kadar çok seversem seveyim bunu yapmam mantıklı değil. Oda beni seviyorsa bunu benden istemez son günlerini onunla geçirir bu suçu işlemezdim ve onu kalbimde yaşatırdım. Önemli olan bu kirli dünyada kısa olan ömrümüzü temiz bir şekilde birlikte geçirmektir.

1.Kadın : Teşekkür ederim beni şaşırttınız. (hüzünlü bir sesle)

3.Erkek : Rica ederim. Umarım size yardımım olmuştur.

1.Erkek : Bende teşekkür ederim. Beni bu cevabınızla hem mutlu ettiniz hem de utandırdınız.

3.Erkek : Rica ederim. Fakat neden sizi utandırdım onu anlayamadım.

1.Erkek : Benim gibi düşünmeyip olay da farklı sonuca gittiğiniz için.

3.Erkek : Doğru olan nasıl gittiğimiz değildir nereye gittiğimizdir.(ve yoluna devam eder)

1.Kadın : Demek ki bütün erkekler aynı değilmiş farklı sonuçlara da gidebiliyorlarmış. Buradan çıkarılması gereken dersimi bende aldım.

1.Erkek : Buna ikimiz adına da sevindim. Şimdi biz de çıkardığımız sonucu toparlayıp arkadaşlarımızla paylaşalım

1.Kadın : Peki. Ulaşılması gereken bir noktaya demek ki nereden gidersen git aynı sonuca ulaşılmıyormuş. Benim hatam buydu aynı sonuca ulaşıldığını sanıyordum. Yanılmışım.

1.Erkek : Evet. Benimde hatam ise bir noktaya nereden gidersen git aynı sonuca ulaşmak imkânsız sanıyordum. Fakat yanılmışım 2.erkek benim gibi düşünerek farklı yoldan aynı noktaya ulaştı.

1.Kadın : Demek ki bu hikayemizi limite benzetebiliriz.

1.Erkek : Nasıl? (şaşkın bir ifadeyle)

1.Kadın : çok basit limit davranıştır. Bu davranış örneklerini limitle şu şekilde açıklayalım; Aynı soru karşısında kesin olmamakla beraber farklı cevaplara ulaşıldı. Sağdan yaklaşıp a değerine sahip olan limit soldan yaklaştığımızda b değerine eşit olabilir. Yani erkeklerin bu soru karşısında limiti yok diyebiliriz.

1.Erkek : Evet. Fakat bazen de sağdan da soldan da aynı değerde davranış gösterebiliyoruz.

Aynı grup başka bir analoji hazırlayarak sınıfta projeksiyon yardımıyla sundular. Hazırladıkları bu analoji zenon paradoksu olarak da bilinen Akhillues ve kaplumbağanın değişik bir versiyonuydu. Bir hikaye analojisi olan bu analoji aşağıda verilmiştir.

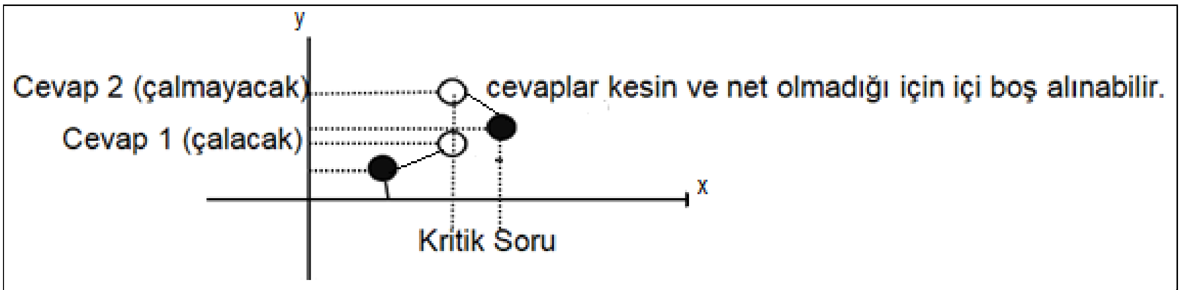
Limitle ilgili bir hikaye analojisi:(Akhillues ve kaplumbağa)

Dünyanın en hızlı koşan insanı ve en güçlü savaşçısı olan Akhilleus karşısında bizim küçük kaplumbağanın büyük yarışı tüm dünya tarafından konuşulmuş ve hikayeleştirilmiştir. İ.Ö. 5. yüzyılda yaşamış Yunanlı düşünür Zenon, kaplumbağaya karşı ünlü Akhilleus'un yarışını şu şekilde paradoksa dönüştürmüştür:

Bir gün, Antik Yunan'ın meşhur savaşçısı Akhilleus, bir kaplumbağayla koşu yarışı yapmaya karar vermiş. Akhilleus, kaplumbağadan tam 10 kat daha hızlı olduğu için kaplumbağanın yarışa 100 m önden başlamasına izin vermiş. Yarış başladıktan birkaç saniye sonra, Akhilleus aradaki 100 m'yi hemen aşmış, ama bu arada onunkinin onda biri hızla hareket eden kaplumbağa, 10 m ilerlemiş. Yani aralarındaki mesafe, artık 10 m'ymiş. Akhilleus, bu 10 m'yi de geçerken, kaplumbağa da 1 m ilerlemiş, yani artık aralarında 1 m varmış. Akhilleus, bu 1 m'yi geçerken, kaplumbağa 1/10 m, yani 10 cm ilerlemiş. Akhilleus bu 10 cm'yi geçerken de kaplumbağa 1 cm ilerlemiş. Akhilleus bu 1 cm'yi de geçince, aralarındaki uzaklık 1 mm'ye düşmüş, vs. vs. Yani fark sürekli onda birine düşüyor, ama asla kapanamıyormuş. Yani kaplumbağadan 10 kat hızlı olan Akhilleus, kaplumbağayı hiç geçememiş. Akhilleus ne yaparsa yapsın kaplumbağanın gittiği yolu kapatıyor ancak önüne geçene kadar kaplumbağa tekrar biraz da olsa yol alıyor bu sebepten kaplumbağayı geçemiyor ancak yaklaşma davranışı gösteriyor bu yol sonsuza giderken arada ki fark o kadar küçük olur ki epsilon yakınına kadar yaklaşır yani sonsuza giderken sıfır davranışı gösterir. Bu olay limitle daha basit anlatılır.

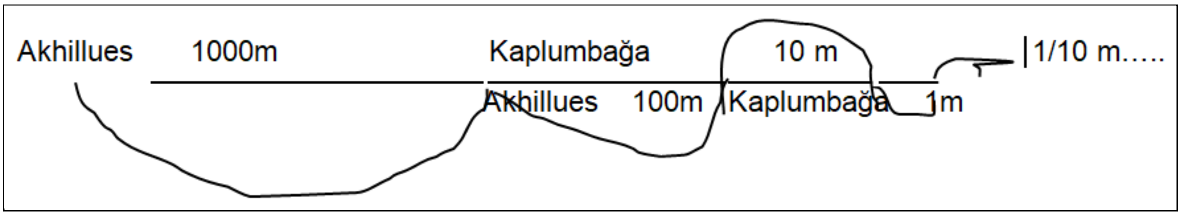
Sınıfta yapılan bu sunu büyük bir sessizlik ve ilgiyle izlendi. Bu bir mit, gerçek hayatta böyle bir şey olamaz diyenler oldu. Gerçek hayatta mutlaka kaplumbağayı yetişecek ve geçecektir diyen öğrenci kaplumbağanın ayak ölçüsüyle insanın ayak ölçüsü bir olmadığı için bu problem anlamsızdır diyenlerin de sesi duyuldu. Bu sunu arasında bir film kesiti izletildi. Bu kesitte aktörlerin davranışlarının limit tanımına uyup uymadığı tartışıldı.

1. grubun analojisi hasta ilaç analojisi ve zenon paradoksu oyun analojisiydi. Senaryo hazırlayarak sınıfta grup üyeleriyle oyunlarını sergilediler. Yaklaşık 1 ders saatini alan hasta-ilaç oyun analojisi zor durumda kalan erkeklerin bu durum karşısında davranışlarını inceleyen ve bu davranışı limitle ilişkilendiren bir oyundu. Oyunda erkeklere; hasta olan karısını iyileştirmek için ilaç çalıp hapse girmeyi ve bir daha karısını hiç görmemeyi mi, yoksa son günlerini karısıyla birlikte mutluluk içinde geçirmeyi mi tercih edecekleri soruluyor. Bu soru karşısında farklı iki cevap arasında yığılma gösteren erkek cevapları limitle ilişkilendiriliyor. Limit olan noktada fonksiyon, noktanın ε civarında aynı davranışı göstermesi gerekir. Bu analojide bir noktada karar vermesi istenen erkeklerden aynı cevabı beklemekte yani o noktanın ε civarında aynı cevabı beklemektedir. Cevapları aldığında iki farklı cevap grubuyla karşılaşmıştır. Bunlardan biri beklediği cevaptır. Diğeri ise beklenen cevaptan farklıdır. Bu durumda cevap istenen noktada farklı iki davranış görülür. Eğer cevap istenen noktada hep aynı cevabı veya yakın cevapları görseydi bunu fonksiyonun limit aranan noktasının civarında aynı davranışı göstermesiyle bağdaştıracaktı. Bu soru karşısında erkeklerin verdiği cevaplardan limiti olmadığı gösterilmeye çalışılmıştır. Bunu bir grafikle özetlersek;



Şekil 60. 1. grubun analojisinin grafiği

Bu grubun diğer bir analojisi Zenon paradoksu yani Akhillues ve kaplumbağa örneğidir. Bu örnek bildiğimiz Akhillues paradoksudur.



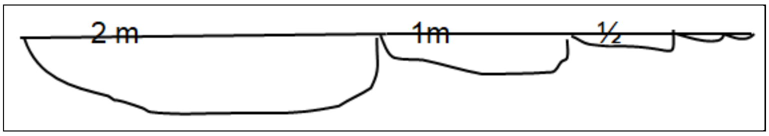
Şekil 61. 1. grubun 2.analojisinin modeli

Akhilleus'un, 1000 metre önde başlayan bir kaplumbağadan on kat daha hızlı koşabileceğini varsayalım. Akhilleus 1000 metre yol kat ettiğinde kaplumbağa 100 metre önde olacaktır; Akhilleus 100 metre kat ettiğinde kaplumbağa 10 metre önde olacaktır. Akhilleus 10 metreyi de katedince kaplumbağa 1 metre sonra bir metrenin onda biri kadar önde olacaktır ve bu böylece sonsuza kadar gider. Bunun sonucunda ortak çarpanı 1'den küçük olan ve bu nedenle terimleri gittikçe küçülen ve böylelikle de belli bir limit değerine "yakınsayan" bir geometrik dizi oluşturan sayıların sonsuz seri toplamı ile bu paradox bir çözüme kavuşturulabilir.

Yani $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{10^{(k-1)}}$ için n sonsuza giderken limiti alınırsa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)$ ≈1

Başka bir örnekle bu durumu açıklarsak;

2 metre yol gittikten sonra aldığı mesafenin her seferinde yarısını alan bir adam toplam kaç metre yol almış olur?



Şekil 62. 1. grubun 2. analojisinin çizim örneği

1+ ½ +1/4 +1/8 + 1/16+...............+$1/2^k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2$

Toplamda 4 metre yol alacaktır. Burada limit ile sonsuz durumu ortadan kaldırarak paradoxdan kurtulmuş olduk. Bu öğrencilerin hikaye analojisiyle yapmak istedikleri şeyde buydu. Limitin bir yaklaşık değer sonucunda sonsuz durumu sonlu duruma çevirebileceğinin bir örneğiydi.

4. 2. 2. İkinci Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

2. grubun analojisi:(golf, uçak ve dart)

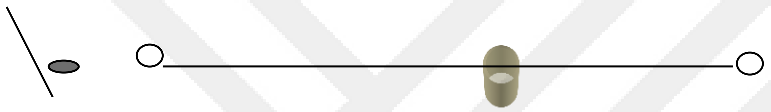
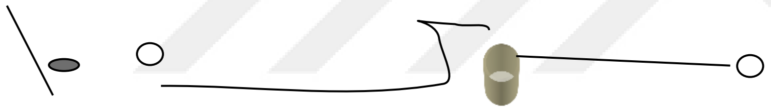
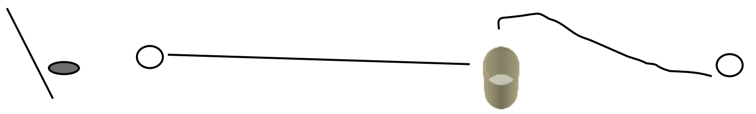
Hedef: yığılma noktası ve limit

Kaynak: golf oyunu, uçak rotası ve dart oyunu

Süre:50 dakika

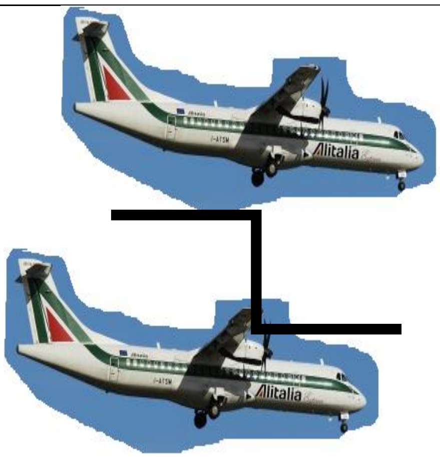
Araç ve gereçler: golf sopası, golf topu, resim modelleri, dart ve projeksiyon

İkinci grup golf oyunu ve bu oyunda topun sağdan ve soldan vuruşlarla çizeceği yörüngeyi limitle ilişkilendiren resimli analojiydi. 1 ders saati alan bu analoji sunumu bilgisayardan projeksiyonla yansıtılarak sunuldu. Ayrıca sınıfta golf sopası ve golf topu ile temsili canlandırma yapıldı.

	Golf sahasında topa sağdan vurulduğunda aynı deliğe, soldan vurulduğunda aynı deliğe ulaşıyorsa bu noktada limit vardır denir.
	Golf sahasında topa sağdan vurulduğunda aynı deliğe, soldan vurulduğunda deliğe ulaşmıyorsa bu noktada limit yoktur denir.
	Golf sahasında topa soldan vurulduğunda aynı deliğe, sağdan vurulduğunda deliğe ulaşmıyorsa bu noktada yine limit yoktur denir.

Şekil 63. 2. grubun resimli 1. analojisi

Öğrenciler hazırladıkları afişleri sınıfa tanırken bir yandan her bir hareketin oyunla temsilini canlandırdılar. Golf sopasına benzer bir sopayla ve topla olası durumları canlandırırken sınıf onlara katıldı.

	uçak rotasında giderken hava boşluğuna düşerek rotasını değiştirdiği noktada limit yoktur denebilir.

Şekil 64. 2. grubun resimli 2. analojisi

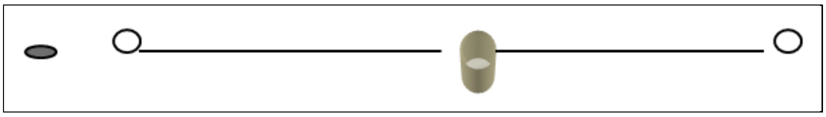
Sınıfta bu resimle uçak analojisinin hangi durumlarda limit tanımına uyduğu soruldu. Uçak rotasının hareketi fonksiyon tanımıyla karşılaştırılarak tartışıldı (Tartışma kısmında daha detaylı ele alınacaktır).

	Attığımız ilk okun darta tam 12 den isabet ettiğini diğerlerinin 12 nin etrafına isabet ettiğini düşünürsek bunu bir a_n dizisinin limitinin a gibi bir sayı olduğu, adan ε kadar küçük ve ε kadar büyük sayıların ise a nın ε komşuluğunda dolaştığına benzetebiliriz. Attığımız oklar hiç 12 ye isabet etmemiştir. Ama hep 12 nin atrafına isabet ettiğini düşünürsek bunu a_n dizisinin bir a noktasında komşuluğunda kaldığını söyleyebiliriz.

Şekil 65. 2. grubun resimli 3. Analojisi

Dart oyununda yığılma noktaları analojisinin daha iyi anlaşılması için sınıfa dart tahtası getirildi. Öğrenciler belirledikleri sayıların etrafına oklar atarak yığılmayı göstermeye çalıştılar. Bu etkinlik sınıfta katılım ve ilgiyle karşılaştı. Ancak süre tamamlandığı için sunumlarını sonuçlandırmadan bitirmek zorunda kaldılar.

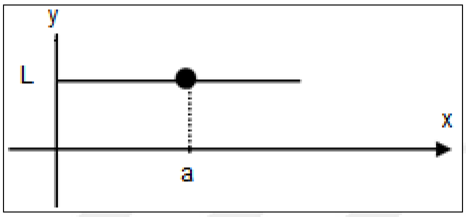
2. grubun resimli analoji golf oynayan birinin sağdan ve soldan topa vuruşuyla ilgili bir analojiydi.



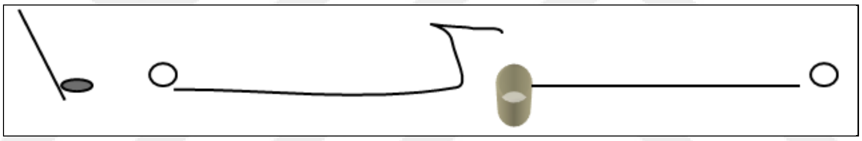
Şekil 66. 2. grubun analoji modeli

Golf sahasında topa sağdan vurulduğunda aynı deliğe, soldan vurulduğunda aynı deliğe ulaşıyorsa bu noktada limit vardır denir.

Bunu bir fonksiyonun grafiği olarak düşündüğümüzde aşağıdaki grafik çizilebilir.



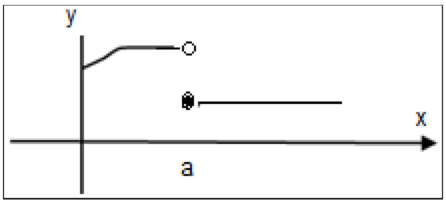
Şekil 67. 2. grubun analoji grafiği



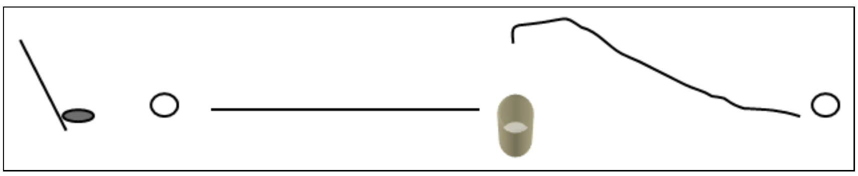
Şekil 68. 2. grubun golf analoji modeli

Golf sahasında topa sağdan vurulduğunda aynı deliğe, soldan vurulduğunda başka bir deliğe ulaşmıyorsa bu noktada limit yoktur denir.

Bu durumu da bir fonksiyon grafiği ile gösterirsek;

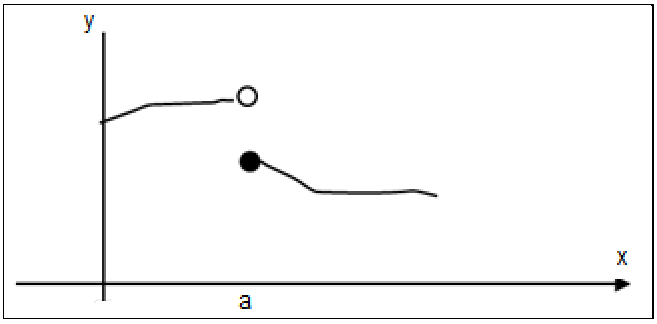


Şekil 69. 2. grubun golf analoji grafiği



Şekil 70. 2. grubun golf analojisi 2. modeli

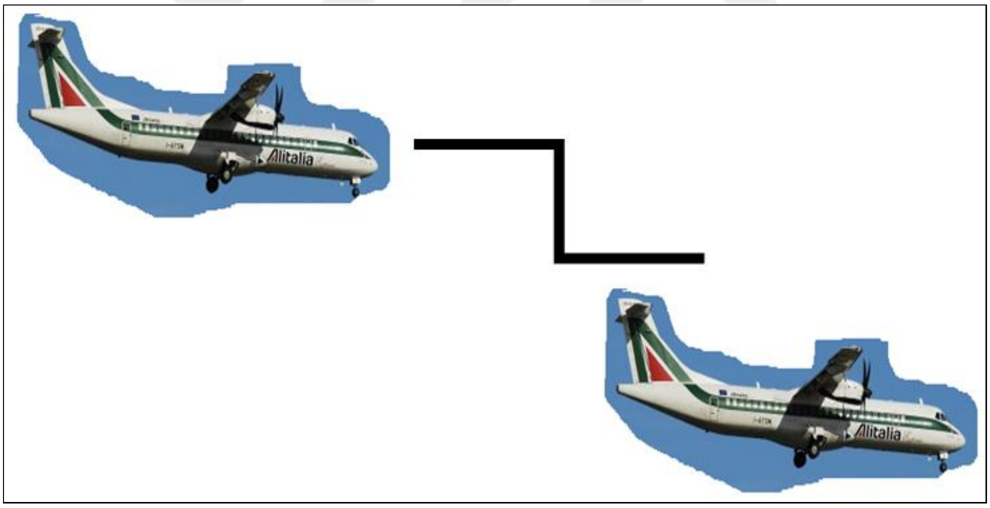
Golf sahasında topa soldan vurulduğunda aynı deliğe, sağdan vurulduğunda deliğe ulaşmıyorsa bu noktada yine limit yoktur denir. Bu durumu grafikle incelersek;



Şekil 71. 2. grubun golf analoji 2. grafiği

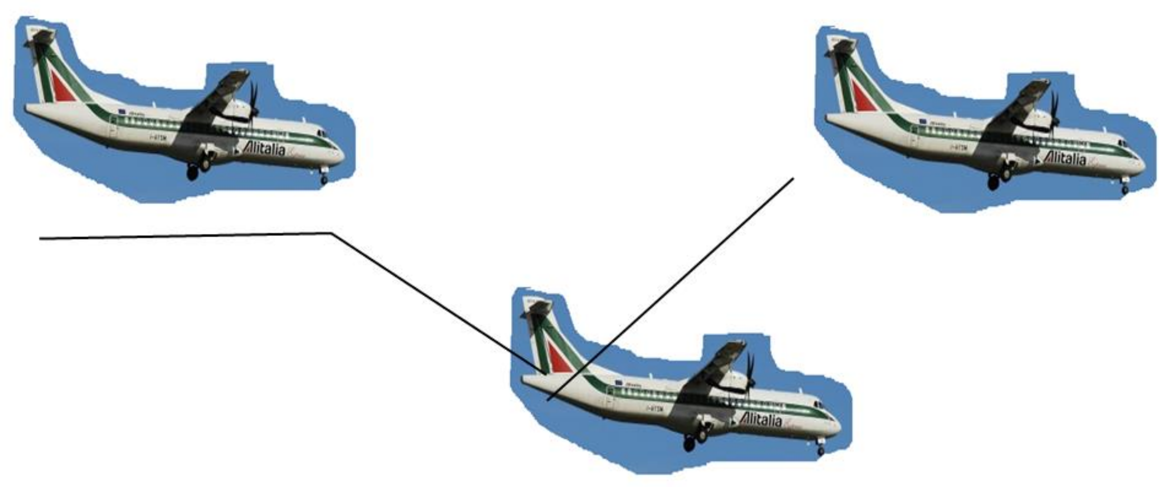
Bu analoji reel bir fonksiyonun grafiği için kullanılabilir. Kullanışlı bir model olduğu düşünülmektedir.

Başka bir resimli analoji uçak analoji olarak hazırlanmıştı.



Şekil 72. 2. grubun uçak analojisi

Uçak rotasında giderken hava boşluğuna düşerek rotasını değiştirdiği noktada limit yoktur. Yukarıdaki şeklinde analojiyi göstermişlerdi. Ancak burada öğrencilerin gözünden kaçan bir durum söz konusu: Burada uçak hava boşluğuna düştüğü noktadan yeni rotasında şekilde gösterildiği gibi devam ederse bu durum fonksiyon şartını bozar. Dolayısıyla fonksiyonun limitinden söz edilemez. Ancak rota şu şekilde olsaydı:



Şekil 73. 2. grubun uçak analoji modeli

Bu durumda fonksiyonun hava boşluğuna düşmesi ve sonra rotasına yükselerek yoluna devam etmesi hava boşluğuna düştüğü noktada limiti olduğunu gösterebilirdi.

Başka bir resimli analoji dart oyunu öğrenciler hem sınıfa dart getirip üzerinde limit davranışları incelediler hem de resimlerle gösterip projeksiyonla sınıfta sunu yaptılar.

Attığımız ilk okun dart'a tam 12 den isabet ettiğini diğerlerinin 12 nin etrafına isabet ettiğini düşünürsek bunu bir a_n dizisinin limitinin a gibi bir sayı olduğu, a'dan ε kadar küçük ve ε kadar büyük sayıların ise a nın ε komşuluğunda dolaştığına benzetebiliriz.

Atılan oklar hiç 12 ye isabet etmemiştir. Ama hep 12'nin etrafına isabet ettiğini düşünürsek bunu a_n dizisinin bir a noktasında komşuluğunda kaldığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla a_n dizisinin limitinin a sayısı olduğu bunun da a sayısına yakınsayan bir dizi olduğu söylenebilir. Kullanışlı bir analoji olduğu düşünülmektedir.

4. 2. 3. Üçüncü Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

3. grubun hikaye analojisi (şut ve gol)

Hedef: limit

Kaynak: futbol oyunu

Süre: 40 dakika

Araç ve gereçler: futbol topu, kale, projeksiyon

3 grup hazırladıkları hikaye analojisini bilgisayarda projeksiyonla 1 ders saatinde sunarak izah ettiler. Ayrıca bir futbol topu ve fileden oluşturdukları kale ile canlandırma yaptılar.

Ali ve Veli top oynamaktadır. Ali kaleye geçer. Veli Aliye şut çeker. Velinin ilk şutu Ali'nin sağına gider ve Ali şutu kurtarır. İkinci şutu Alinin soluna doğru gider ve Ali topu kurtaramaz gol olur. (sağdan yaklaştı limiti olmadı soldan yaklaştı limit var oldu ama iki değerde farklı olduğu için limit yoktu.)Veli tekrar şut çeker bu sefer ilk Ali'nin sağına şut atar ve Ali kurtaramaz gol olur. İkinci şutu ise Ali'nin soluna gider ve Ali bunu kurtarır.(sağdan yaklaştı limit var oldu soldan yaklaştı limit yoktu) Veli tekrar şut çekmeye başlar bu sefer Ali'nin sağına attığı şutta gol olur soluna attığı şutta gol olur böylelikle her iki şutta gol olmuş olur.(sağdan ve soldan yaklaşıldığında ortaya çıkan değer aynı ve var olduğu için limit mevcuttur)

Bu sunumu grup üyeleri sınıfta oyunla canlandırdılar. İki öğrenci kaleci olarak görevlendirildi. Diğer grup üyeleri getirdikleri topla kaleciye gol atmaya çalıştılar. Bu davranışla limiti ilişkilendirmeye çalıştılar. Sınıf limit konusundan çok öğrencilerin kaleciye gol atıp atamayacağı ile ilgilenmeye başlayınca sunu bitirildi.

3. grubun analojisi Veli'nin Ali'ye şut çekmesi ile ilgiliydi. Veli kaledeki Ali'nin sağına yanaşıp şut çektiğinde gol olur soluna yanaşıp şut çektiğinde gol olmaz ise limit yoktur. Bu şekilde yazılan analoji limitin sağdan ve soldan bir değere yaklaşılması ile açıklanmaya çalışılmıştır. Halbuki

$$\lim_{\text{sağdan atış}} (\text{şut})=\text{gol}$$

$$\lim_{\text{soldan atış}} (\text{şut})=\text{gol değil} \text{ ise limit yoktur.}$$

Şeklinde matematiksel olarak gösterilebilirdi. Futbol oyunu içinde matematik barındıran bir oyundur. Doğru (2002), futbol ile matematik arasında ilişki kurmuş, futbol oyununun pi sayısıyla ilişkisinden bahsetmiştir. Doğru'ya (2002) göre, futbol 11+11=22 kişilik bir takım oyunu olup 7 tane vuruşu (başlama, kale, köşe, penaltı, direk, en direk vuruşu ve taç atışı) vardır. 22/7 pi sayısına en yakın sayıdır. Yine futbol, sahası ve oyuncularıyla içinde altın oran ve fibonacci sayılarını, geometriyi, orantıyı, simetriyi barındıran bir spordur (www.futbolakademi.net).

4. 2. 4. Dördüncü Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

4. grubun analojisi: hikaye analojisi(gelin ve kaynana)
Hedef: limit
Kaynak: gelin kaynana
Süre: 50 dakika
Araç ve gereçler: projeksiyon, kostüm, dekor

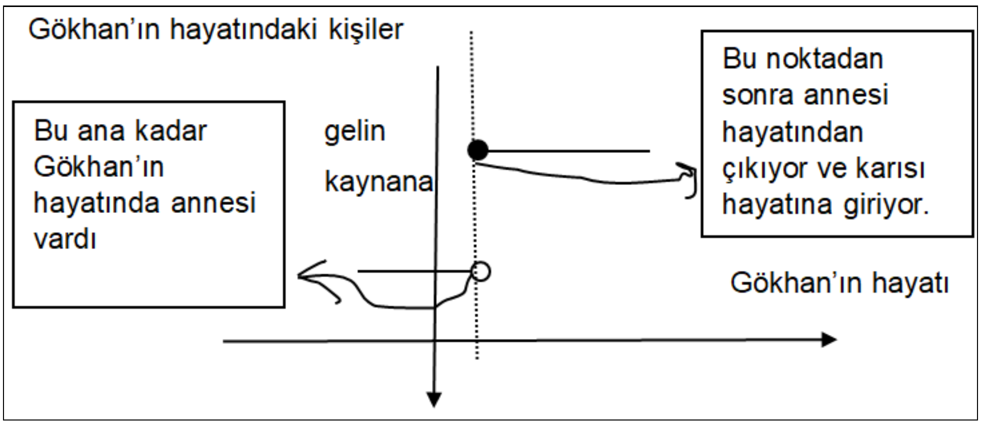
4. grubun hikaye analojisi birbirinden farklı karakterde olan gelin ve kaynananın oğluna anlaştıkları tek bir noktada aynı davranışla yaklaştığını anlatan bir analojiydi. 1

ders saatinde projeksiyonla sunuldu. Ayrıca canlandırma yaparak hikayeyi oyuna dönüştürdüler.

Yeni çift çok mutludur. Cicim ayları geçtikten sonra Ceyda'nın kozmetik ihtiyaçlarını karşılamakta zorlanan Gökhan harap ve bitap bir şekilde eve dönmektedir. İşten gelirken Gökhan uzun uzun düşünür ve bir çözüme varır. Çare olacağını düşünerek annesini birlikte yaşamak üzere eve getirir. Gökhan bu kararını Ceyda'ya zorda olsa kabul ettirmiştir. Çok geçmeden Gökhan bu kararı aldığına pişman olmuştur. Çünkü Ceyda ve Kaynanası bütün gün Gökhanın başının etini yemektedir. Gökhan sağına dönse karısı, soluna dönse annesi başının etini yemektedir. Sağında solundan farklı düşünceler duyan Gökhan ne yapacağını bilemez ve çareyi aradan çekilmekte bulur. En nihayetinde kadın bunlar, gelin kaynana da olsa tek anlaştıkları nokta alışveriş. Zaten karısından başı yanmış Gökhan'ın masrafları şimdi çifte kavrulmuş. Artık sağından da solundan da aynı ses geliyor.(para ver!)Gökhan da ne yapması gerektiğini biliyor.

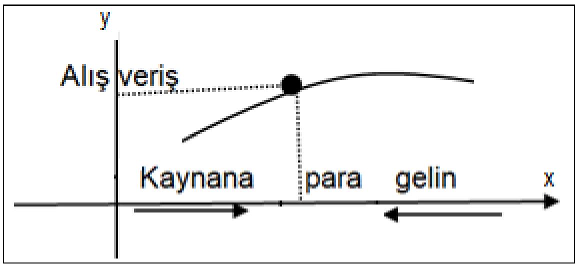
Sunuyu projeksiyonla sunan öğrenciler hazırladıkları hikaye analojiyi sınıfa anlattılar. Sunu yazılı görselle sunulmuştu. Oyun analojisi ile sunmaları istendi. Ancak öğrenciler oyun analojisi için hazır olmadıklarını ve rol kabiliyetlerinin iyi olmadığını ifade ettiler. Doğaçlama yapmaya yanaşmadılar.

4. grubun analojisi: tartışan gelin kaynana güncel olayını ele almaktadır. Gelin Gökhan'a sağdan kaynana Gökhan'a soldan yanaşmaktadır. Burada limiti araştırılan nokta aslında Gökhan'dır. Gökhan'ın evlenme tarihine kadar sol limiti annesiydi evlendikten sonra annesi hayatından çıkıyor sağ limiti karısı oluyor. Bu durumu bir grafikle özetlersek;



Şekil 74. 4. grubun oyun analoji grafiği-1

Gelin ve kaynananın anlaştıkları tek nokta alış verişse Gökhan'ın alış verişe göndermek için onlara para vermesi yeterlidir. Yani Gökhan'ın para verip alış verişe gönderdiği noktada limiti vardır. Bu durumu matematiksel olarak şöyle gösterebiliriz:



Şekil 75. 4. grubun oyun analoji grafiği-2

Para ve alışveriş grafiği değişkenin paranın civarında iken fonksiyonun alışveriş civarında dolaşması limit analojisinde kullanılabilir.

4. 2. 5. Beşinci Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

5.grubun analojisi: resimli analoji(şelale)
Hedef: yığılma noktası
Kaynak: şelale, nehir resimleri
Süre: 30 dakika
Araç ve gereçler: Projeksiyon

5 grubun analojisi limiti yığılma noktası tanımıyla ele alan farklı bir bakış açısı kullanılarak hazırlanmış bir analoji. 1 ders saati içerisinde 30 dakikalık sürede projeksiyon ile sunuldu.

Buradaki şelale herhangi bir fonksiyon olsun. Şelale akarak göl oluşturmuştur. Göl fonksiyonun bir noktadaki yığılma noktası olsun o halde bu noktada limitinin olduğundan söz edebiliriz.

Şekil 76. 4. grubun resimli analojisi

Grup üyeleri doğa resimlerini projeksiyon ile sundular. Doğadan matematik örnekleri ile başlayan sunuda doğa olaylarını matematikle ilişkilendirdiler. Kar yağışındaki karları tamsayılara, yağmuru reel sayılara benzeten öğrenciler şelalenin bir noktada göl oluşturmasıyla yığılma noktası arasında ilişki kurmaya çalıştılar.

5. grubun analojisi: Şelalenin akarak gölde birikmesiyle oluşan bir fonksiyon olmasıyla ilgiliydi. Şelale akarak göl oluşturmuştur. Göl fonksiyonun bir noktadaki yığılma noktası olsun o halde bu noktada limitinin olduğundan söz edebiliriz.

Her $\epsilon > 0$ için $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ aralığı A kümesinin a dan farklı bir noktasını içeriyorsa a noktasına A kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir.

4. 2. 6. Altıncı Grubun Geliştirdiği Analojiden Elde Edilen Bulgular

6. grubun analojisi: oyun analojisi(Haydar'ın Sakine'ye olan aşkı)
Kaynak: limit
Hedef: Sakineyle evlenmek isteyen Haydar
Süre:40
Araç ve gereçler: kostüm, dekor
6. grubun analojisi bir oyun analojisiydi. Kostümler hazırlandı profesyonel oyuncular gibi sınıfta sahnelendi. 1 ders saati içerisinde oyun canlandırıldı. Sınıf büyük bir ilgiyle oyunu izledi. Oyunun sonunda arkadaşlarını tebrik ettiler. Sınıftaki çoğu öğrencinin oyunu cep telefonlarına kayıt ettiği gözlendi.

Oyunun Senaryosu:

Cabbar ile Haydar mahallenin iki bitirim delikanlısıdır. Haydar tam bir kıro Cabbar ise efendi birisidir. Haydar gönlünü mahalleye yeni taşınan Sakineye kaptırır.

Haydar : Cabbar ben bu Sakine'ye deli gibi aşık oldum.

Cabbar : O kız sana bakmaz. Sen ev nedir bilmez, işi gücü olmayan adamın tekisin. O kız sana gelmez. Boşver, unut vazgeç bu kızdan

Haydar : Yok ben aşığım. Gerekirse iş bulurum, çalışırım. İçkiyi bırakırım. Değişirim. Bir sağından yanaşırım bir solundan. İkna ederim onu.

Sonra mahallenin en güzel kızı olan Sakine gelir. Sakine parkta oturan Cabbar ile Haydar'ın önünden geçer. Haydar onu görünce hiç de sakin durmaz Cabbar'ı yanından kovar, Sakine'nin yanına gider ve onunla konuşmaya başlar.

Haydar : Günaydın. Der. Ona güzel sözler söyleyip iltifat eder.

Haydar : Nasılsınız Sakine hanım. Mahalleye yeni taşınmışsınız. Ben size aşık oldum. Sizinle görüşmek istiyorum.

Haydar özünde iyi birine benzemektedir. Kanı ısınmıştır. Ancak Haydar ani bir hareketle Sakine'nin soluna geçer ve yanağından bir makas alır. Sakine bu ani hareket karşısında çok sinirlenir. Bu karaktersizliği ve ani değişmeyi gören Sakine tokatı patlatır. Haydar sağından yaklaştığında iyi, sevimli *biriyken ve tam Sakine'nin kanı ısınmışken soluna geçer ve hiç hoş olmayan davranışlar sergiler. Sakine tekrar tokatı patlatır. Haydar niye böyle oldu diye düşünüp dururken yanına sarhoş bir ihtiyar gelir. Bu sarhoş ihtiyar daha önceleri bir üniversitede matematik bölümünde görev yapmış bir öğretim görevlisidir. Limit ile uğraşmaktan kafayı yemiş ve gözü başka bir şey göremez olmuş. Yavaş yavaş hayattan kopmuş, aklını yitirmeye başlamış.*

Sarhoş ihtiyar: yeğen, az önce seni bir kızla konuşurken gördüm. Ama pek başarılı sayılmazsın. Anlaşılan sen bu işlerden anlamıyorsun. Kadınlar limite benzer. Sağından da solundan da aynı karakterle yaklaşacaksın. Karaktersiz olmayacaksın ki seni sevebilsin sana güvensin.

Haydar : Hadi ordan sarhoş ihtiyar sen ne anlarsın ki!

Ertesi gün Haydar, acaba bu yaşlı adamın dedikleri doğru mu diyerek Sakineye nasıl yaklaşacağını düşünür.

Haydar : Sakine'ye sağdan yaklaştım. Onun hoşuna giden güzel sözler söyledim. Ona değer verdiğimi hissettirdim. Soluna geçtim yanağından makas almaya çalıştım. Daha yeni tanıştığım insana böyle yapmamalıydım. Böylece tokadı hak ettim.

Haydar düşünür düşünür ve kendimi düzeltmem lazım, Sakine'nin istediği gibi biri olmam lazım der. Ertesi gün Haydar tekrar Sakine ile karşılaşır.

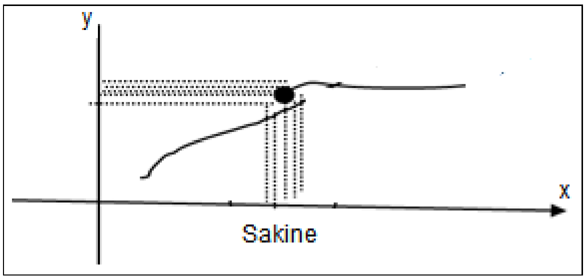
Haydar : Sakine iki gün önce yaptıklarımdan dolayı özür dilerim. Lütfen bana bir şans daha ver.

Ertesi gün Sakine'yi gören haydar yine sağından yaklaşıp iltifat eder. Güzel sözler söyler. Ama ara sıra dengesizleşir ve belirsiz davranışlar gösterir. Dolayısıyla bir türlü Sakine'nin gönlünü fethedip ona ulaşmayı başaramaz. Yaklaşık iki ay geçtikten sonra Sakine Haydar'a ısınmaya başlar. Çünkü Haydar artık iyi biri olaya başlamıştır. Sakine'ye hem sağdan yaklaşarak iyi davranışlar sergiliyor hem soldan yaklaşarak iyi davranışlar sergiliyor. Sakine onun artık sağdan ve soldan yanaştığında da güvenilir biri, iyi biri olduğu anlamıştır. Sonuçta onun teklifini kabul ederek mutlu bir evliliğe ilk adımını atmıştır.

Sonuç olarak Haydar sürekli Sakine'ye soldan yanaşsaydı Sakine'yi kazanamayacaktı. Tokadı yiyecekti. Sakine'ye bir sağından bir solundan farklı karakterde yaklaşsaydı yine Sakine onu sevmeyecekti. Ama hem sağından hem solundan aynı karakterde iyi bir insan olarak yaklaşınca Sakine'yi elde etti ve sürekli bir ilişkileri oldu.

6. grubun analojisi Haydar ile Sakine: Haydar sürekli Sakineye yanaşmaya çalışan bir delikanlıdır. Ama Sakine'nin ε komşuluğunda farklı davranışlar sergilemektedir. Sakine'ye soldan yanaştığında farklı bir karekter sağdan yanaştığında Farklı bir karekter sergilediği için Sakine'nin limiti belli olmamakta dolayısıyla Sakine'yi kazanamamaktadır.

Ama hem sağından hem solundan aynı karakterde iyi bir insan olarak yaklaşınca Sakineyi elde etmiş ve sürekli bir ilişkileri olmuştur. Yine bu analojiyi matematiksel olarak grafikle ifade edersek;



Şekil 77. 6. grubun oyun analoji grafiği

Özetle; Rize Üniversitesi Eğitim Fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği 2. Sınıf öğrencilerinden 30 kişilik öğrenci grubu kendi aralarında 6 tane 5 er kişilik gruplara ayrılarak analoji hazırladılar. Hazırladıkları bu analojileri sınıfta drama yaparak, sunuş yöntemini ve bilgisayarda projeksiyon kullanarak sundular. Grup ödevlerinin değerlendirilmesi aşağıdaki kriterler göz önüne alınarak yapılmıştır:

1. Motivasyon:

Limit konusunda analoji hazırlama çalışmasına ilgi duyuldu kriterinde tüm grupların çalışmalarını ilgiyle hazırladıkları ve sundukları gözlendi. Gruptaki bütün öğrenciler ders aralarında birbirleriyle hazırladıkları analojiler hakkında konuştular ve birbirlerine güzel bir sunu olduğu yönünde dönütler verdiler. Tüm gruplar 5 puan alarak başarılı oldular.

Çalışma için anlatılanlardan notlar alındı kriterinde öğrenciler derse katılan ve derste notlar alan öğrencilerdi. Kendilerine verilen derslerde konuya karşı ilgili olmalarının yanı sıra hazırladıkları analojilerle derste tuttukları notları karşılaştırdılar. Tüm gruplar 5 puan alarak başarılı oldular.

Anlaşılmayan durumlar öğretmene soruldu kriterinde gruplar ders aralarında araştırmacının odasına gelerek hazırlayacakları ödevle ilgili sorular sordular. Seçtikleri analojilerin konuya uygun olup olmadığını teyit etmek adına tüm grup üyeleri eksiksiz araştırmacının odasına gelmiştir. Dolayısıyla bu kriterden de tüm gruplar 10 tam puan almıştır.

2. Planlama

Analojileri hazırlamak için grupların birlikte karar alınıp iş bölümü sağladıkları gözlendi.

Bilgi toplama için araştırma yapıldı. Araştırmacıya sunular öncesinde sıkça sorular sordular. Zaman uygun şekilde planlandı. Ancak 2. Ve 4. Grup sunularını zamanında tamamlayamadı. Ders süresini aşan sunularda dinleyici öğrenciler çıkmaya hazırlanırken dikkatlerin dağılmaya başlandığı gözlendi. Bu durumda sunu hazırlayan öğrencilere sunularından önce kendi aralarında prova yapmaları şeklinde önerilerde bulunuldu. Bu yüzden de 2. Ve 4. Grubun bu kriteri sağlanmadığı için bu gruplara bu kriter için puan verilmedi.

3. Bilgi toplama

Genellikle hazırlanan sunularda hedef-kaynak ayarlamasının iyi yapıldığı belirlendi. Projeksiyon sunularıyla ve görsel materyallerle destekleyici materyaller bir araya getirildi.

Yazılı raporlar araştırmacı öğretmene sunuldu. Yazım noktalama kontrol edildi. Seçilen hedef kaynak birbiriyle uyumluydu. Yazılı ve görsel unsurlar birbiriyle bağlantılıydı. Bu yüzden bütün gruplar tam puan aldılar.

4.Sunu

Sunu içinde konuyu anlatabilmek için farklı etkinliklere yer verildi. Bazı gruplar oyun oynayarak, bazıları canlandırma yaparak bazıları da görsel materyaller kullanarak sunularını yaptılar. Ancak hiçbir grup sunuları tamamladıktan sonra ve ya sunuya başlamadan önce özet yapmadıkları belirlendi. Aynı şekilde rapor olarak verdikleri ödevde de özet kısmının olmadığı görüldü. Gözden kaçırılan bu kriter için gruplar puan alamadılar. Yine zamanı etkili kullanamadıkları belirlenen 2. Ve 4. Grup bu kriterden puan alamadılar.

Tablo 15. Grup Ödevlerinin Değerlendirilmesi

Kriter		1. grup	2. grup	3. grup	4. grup	5. grup	6. grup
Motivasyon	Limit konusunda analoji hazırlama çalışmasına ilgi duyuldu	5	5	5	5	5	5
	Çalışma için anlatılanlardan notlar alındı	5	5	5	5	5	5
	Anlaşılmayan durumlar öğretmene soruldu	10	10	10	10	10	10
Planlama	Analojileri hazırlamak için birlikte karar alınıp iş bölümü sağlandı	10	10	10	10	10	10
	Bilgi toplama için araştırma yapıldı	5	5	5	5	5	5
	Zaman uygun şekilde planlandı	5	-	5	-	5	5
Bilgi Toplama	Hedef-kaynak belirlendi	5	5	5	5	5	5
	Destekleyici materyaller biraraya getirilerek gerekli bilgiler seçildi	10	10	10	10	10	10
Yazılı Rapor	Yazım noktalama kontrol edildi	5	5	5	5	5	5
	Seçilen hedef kaynak birbiriyle uyumluydu	10	10	10	10	10	10
	Yazılı ve görsel unsurlar birbiriyle bağlantılıydı	5	5	5	5	5	5

Tablo 15’in devamı

Kriter		1. grup	2. grup	3. grup	4. grup	5. grup	6. grup
Sunu	Sunu içinde konuyu anlatabilmek için farklı etkinliklere yer verildi	10	10	10	10	10	10
	Konuyu anlatmak için özet hazırlandı	-	-	-	-	-	-
	Anlatımı destekleyici görsel materyaller kullanıldı	5	5	5	5	5	5
	Zaman etkili kullanıldı	5	-	5	-	5	5

Öğrenciler limit konusuyla ilgili hazırladıkları analojileri gruplarıyla sundular. Bu sunuları değerlendirme kriterleri olan motivasyon, planlama, bilgi toplama, yazılı rapor ve sunu kriterleri ile değerlendirildi. Öğrenciler analoji hazırlama ve sunmada oldukça başarılıydı. Ancak gözden kaçtığı düşünülen özet hazırlama kriterine uyulmadığı için tüm gruplar bu kriterden puan alamadılar. 2. ve 4. Grup zamanı verimli kullanamadığı için zaman kriterinden puan alamadı. Sınıf içi analoji sunumlarında tüm öğrencilerin ilgili olduğu, sunuları izlerken eğlendikleri ve tam katılımın sağlandığı gözlendi. Sunularını tamamlayan grupları diğer arkadaşları alkışlarla ve tebriklerle destekledi.

4. 3. Öğrencilerinin Limit Konusunda Analoji Hazırlama ile İlgili Görüşlerinin Tespiti Yönündeki Bulgular

Öğrencilere:

1. Analoji destekli diyalojik yöntemiyle limit konusunun öğretilmesi hakkında ne düşünüyor sunuz?
2. Analojiler limit konusunda kavram yanılgılarının giderilmesinde uygulanabilir mi?
3. Analojiler sınıfınızda uygulandığında yaşadığınız olumlu ve olumsuz durumlar neydi?
4. Analojileri öğretmen olduğunuzda kendi sınıfınızda uygulayabilir misiniz?

Sorularından oluşan mülakatlar yapıldı. Bu mülakatlar araştırmacı tarafından kaydedildi. Daha sonra öğrencilere bu sorulardan oluşan yazılı mülakat formu dağıtıldı ve cevaplarını tekrar yazmaları istendi. Öğrencilerin kaydadeğer cevapları aynen alınarak bu bölümde gösterildi. Gözlemlere, bulguların yorumlanmasına tartışma kısmında yer verilecektir. Gruplarla yapılan mülakatlardan parçalar ve bunlardan elde edilen bulgular aşağıda verilmiştir.

4. 3. 1. Birinci Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

1. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cevaplarından bir kesit:

Ö1 : Limit konusu kavram yanılgısı oluşmasına çok müsait bir konu ne yapılırsa yapılsın sorun limitten kaynaklanmaktadır. Civar analojisi limiti daha anlamlı hale getirdi. x değişkeni bir sayının civarındayken fonksiyonun davranışını gördük. Daha iyi anladım. Fonksiyonlar konusu olsaydı daha iyi olurdu. Analoji hazırlamak bizim için çok zor oldu. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için de zor olacaktır. Bu yüzden onlara hazır analojiler vermek daha iyi olur.

Ö4 : Öğrencide oluşan kavram yanılgılarını tespit edebileceğimiz gibi giderilmesi de mümkün olurdu. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerine analojiler hazırlatmak çok güzel bir fikir İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin analoji hazırlamalarında hayal güçleri yeterli olmayabilir. Kafalarını karıştırmadan analoji ve ya somut başka bir şey kullanılması somut düşünmesi sağlanmalıdır.

Ö2 : Limit konusu analoji hazırlanmasına uygun bir konuydu. Ancak fonksiyonlar konusu olsaydı daha güzel olurdu. Bunun yanında orta öğretimde çok faydalı olabilir.

Ö3 : Bu analojiyi hazırlarken çok zorlandık

Ö5 : Limit kavram yanılgısı oluşması ihtimali yüksek olan bir konu. Bu yüzden üniversite öğrencilerindeki kavram yanılgılarının giderilmesinde bu tür analojiler kullanılabilir. Biz hazırlık yaptık. Hazırlık yapılmadan doğaçlama ile analoji oluşturulması kavram yanılgılarını daha iyi tespit ederdi.

Ö1,Ö2,Ö3,Ö4,Ö5 : Ancak bundan sonra ben limit yerine civar ifadesini kullanmayı tercih ederim.

Birinci grubun mülakatlarından öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntem ile yürütülen derslere yönelik görüşlerinin olumlu olduğu görüldü. Özelikle “lim” ifadesi yerine “civar” ifadesinin kullanılmasının limit konusunun anlaşılmasında çok etkili olduğunu belirten öğrenciler benzer analojilerin fonksiyonlar konusunda da hazırlanmasını istediler. Öğrenciler kendi analojilerini hazırlarken zorlandıklarını fakat analoji hazırlama süreci içinde limit kavramının inceliklerini daha iyi öğrendiklerini belirtmişlerdir. Öğrenciler ayrıca analoji hazırlarken bir uzman yardımı almanın gerekli olduğuna inandıklarını beyan etmişlerdir.

4. 3. 2. İkinci Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

2. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cevaplarında bir kesit:

Ö6 *: Dersler çok etkili oldu. Yıllar önce lisede limit konusunu öğrendiğimde hep bir sayıya yaklaşan değer olarak düşünürdüm. Civar analoji bir sayının civarında olmakmış, güzel bir analoji, etkili bir dersti.*

Ö7 *: Limit konusu analoji için uygun bir konuydu. Çünkü limit anlaşılması zor ve soyut bir konu. Önce kavram yanılgıları giderildikten sonra analojilerle dersin sunulması çok güzel. Kavram yanılgılarının giderilmesinde uygulanabilir. Aynı yanılgıya düşmememiz için bizi uyarıyor. Bu hoşuma gitti.*

Ö8 *: Benim için analoji hazırlamak zor olmadı. Ancak kavram yanılgıları için değil de konunun öğretilmesinde kullanılırsa çok iyi olur. Yani önce konu anlatılmalı kavram yanılgılarına değinilmeli sonra analojiler sunulmalı limit uygun bir konuydu. Aslında matematikteki her konuda analoji yapılabilir. Analoji hazırlamak zor değildi. Limit konusuyla ilgili kavram yanılgıları analojilerle giderilebilir, öğretilmesinde de kullanılabilir. İlköğretimde ve ortaöğretimde kullanılması öğrenciler için çok iyi olur. Öğrenci konuyu iyi öğrenir.*

Ö9 *: Öğrenciler matematik konularının günlük hayatla ilişkisini göremiyorlar. Gördükleri zaman konuya daha çok ilgi duyarlar ve öğrenmeleri kolay olur. Ancak öğretmenler analojileri hazırlayıp sunmalı öğrencilerden istememeli bu konuda öğrencileri zorlamamalı. Limit konusunda analoji bizi çok uğraştırdı. Her izlediğimiz filimde, dizide, haber programında yarışma programlarında analoji arar olduk. Sohbetlerimizde acaba bu olaydan bir analoji çıkarabilir miyiz? Demeye başladık. Aslında matematiğin günlük hayatla ilişkisini kurmak güzel ama bunu yaparken çok yorulduk. Öğretmenlerin hazırlayacağı hazır analojiler sunmak daha güzel ve daha doğru olur diye düşünüyorum.*

Ö10 *: Limit konusunda analoji hazırlamak çok zordu. Yaptığımız araştırmalarda bir şey bulamadık. Kavram yanılgılarının analoji ile giderileceğini düşünmüyorum. Ancak konunun öğrenilmesinde ön bilgi olarak verilebilir. Yani öğrencinin kafasında bir şema oluşturulmasına yardımcı olur. Lise düzeyinde öğrencilerden analoji istemek vakit kaybı olabilir. Ancak ortaokulda hazır analojiler sunulursa daha iyi olur.*

Bu gruptaki öğrencilerle yapılan mülakatlarda öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerin çok etkili olduğunu belirttikleri görüldü. Öğrenciler lisede gördükleri limit konusunu o zaman hiç anlamadıklarını fakat analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden sonra limitin ne olduğunu anladıklarını belirttiler. Özellikle öğrencilerin civar ifadesinin çok güzel olduğunu belirttikleri görüldü. Bu gruptaki öğrenciler genel olarak analoji hazırlarken zorlanmadıklarını, analoji hazırlama sürecinde konunun detaylarını daha iyi öğrendiklerini, analoji bulmak için günlük hayatla ilşki kurmaya çalıştıklarını belirttiler. Öğrencilerin analoji hazırlayarak yürütülecek derslerin öğrenci algısını geliştireceğine inandıklarını beyen ettikleri görüldü.

4. 3. 3. Üçüncü Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

3. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cevaplarının bir kesiti:

Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö15 : Güzel bir dersti. Civar ifadesi limitteki anlamsızlığı kaldırıyor. Daha kolay anlaşılıyor. Bu derste düşündüğüm bazı şeyler yanlış olduğunu gördüm. Mesela limit alırken fonksiyonun tanımlı olduğu aralığa hiç dikkat etmiyordum. Yığılma noktasını bir türlü anlayamıyordum. Tamsayılarda tanımlı her fonksiyonun limiti olacağını ve yerine yazarak limit bulunacağını düşünüyordum.

Ö11 : Yerine yazmanın, bir sayıya sağdan ve soldan yaklaşmanın limit anlamının tam karşılığı olmadığını öğrendim. Öğrenciler soyut olan konuları anlamakta zorlanıyor. En azından analojilerle soyut ve zor gördükleri konulardan korkmazlar, uzaklaşmazlar. İlk ve ortaokul düzeyinde analojiler faydalı olur üniversite düzeyinde daha faydalı olur. Limit analoji için uygun bir konuydu. Limit için analoji kullanmak çok iyi oldu. İyi ürünler ortaya çıktı. Tasarlama evresi çok önemli. Bu şut ve gol örneği limiti açıklamada çok iyi bir örnek. Biraz daha üzerinde çalışıldığında limitin tüm özellikleri de analojiyle anlatılabilirdi belki. İlköğretimde ve ortaöğretimde konuların bazıları analojilerle rahatlıkla anlatılabilir.

Ö12 : Kavram yanılgıları analojilerle giderilemez bence ancak konunun öğretilmesinde kullanılabilir.Yani konuyu destekleyici olabilir. İlköğretimde ve ortaöğretimde kullanılması faydalı olur. Özellikle 4 işlemin kullanıldığı durumlar. Hem ders çekilir hale gelir hem öğrencinin dikkati toplanmış olur. Öğretmen hazır analoji sunmalı ve öğrencinin bu analojiyi geliştirmesini ve farklı örnekler bulmasını sağlamalıdır. Bizim burada gördüğümüz gibi çok etkili olacaktır..

Ö13 : limitte kullanılan analojiler limitin sadece bir kısmını ifade ediyor. Sayılar konusunda problem kurma ve çözme için analojiler kullanılırsa daha iyi olurdu. Önce konuyu bulduk sonra analojiyi uyguladık. Konunun ele aldığımız bölüme uygunluğunu sağlamak zor oldu.

Ö14 : Kavram yanılgıları daha çok bilgi anlamlı verilirse giderilebilir. Analoji şeklinde verilirse öğrenci kendine göre anlamlar yükleyebilir. Uygun bir analoji bulunursa kavram yanılgıları giderilebilir ki bu da çok zordur. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için kalıcılığı arttırabilir. Öğrenci yaparak yaşayarak öğrenme fırsatı bulur. Öğrenciler kendi analojilerini hazırlarsa araştırma becerileri gelişir öğrenme daha hızlı ve kolay olur. Öğrenci bilgiye kendi ulaşacağı ve kuracağı için anlaması kolay olur.

Ö15 : Günlük hayatla ilişkili 1. ve 2. Dereceden denklemlerde de kullanılırsa da uygun olur. Bizim için analoji bulmak zor oldu. Kavram yanılgıları analojiyle engellenebilir ama çok ciddi kavram yanılgılarına da sebep olabilir. Onun için konu seçimi ve anlatımında çok dikkatli olunmalıdır. Konu inceden inceye düşünülmelidir.

Ö11,Ö12,Ö13,Ö14 : Evet konunun öğretimine başlarken verilebilir.Tabi ki konunun öğretiminde daha etkili olur. Yanılgılar her zaman olacaktır. Yani sadece analojilerle konu verilirse öğrencinin de temeli iyi değilse gene yanılgılar olabilir. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için faydalıdır. Ancak uzman öğretmenler hazırlamalı ve öğrenciye sunmalı.

Bu gruptaki öğrencilerle yapılan mülakattan öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden ve kendi analojilerini hazırlama süreçleri sonunda limitin ne olduğunu nihayet anladıkları, yığılma noktası kavramını anladıkları, limit davranışı hesaplanırken asla yerine yazılmadığını anladıkları öğrenci beyanlarından görüldü. Analoji tasarlama evresinin çok önemli olduğunu belirten öğrenciler bu evrede günlük hayatla ilişki kurma çabası içine girdiklerini ve bu süreçte limit kavramının detaylarını yakaladıklarını belirtmişlerdir. Analoji destekli yürütülecek derslerde öğrenileceklerin daha kalıcı olduğunu beyan eden öğrenciler özellikle dört işlem becerisi için ilköğretimde analoji destekli derslerin çok verimli olacağına inandıklarını beyan etmişlerdir.

4. 3. 4. Dördüncü Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

4. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cevaplarından bir kesit:

Ö16 : Güzel bir dersti analojiler bizi güldürdü. Konuyu anlamamıza katkı sağladı. İlk öğrendiğimiz limit ifadesi hala kafamdan kolay kolay silinmiyor. İlköğretim öğrencileri de böyle analojiler hazırlamalı ama öğretmenin rehberlik etmesi şart. Limit konusuna giriş yapılırken analoji ele alınabilir. Ancak 4 işlem problemlerinde veya mutlak değer gibi konularda analojiler yapılırsa daha iyi olur.

Ö18 : İlk öğrendiğimde civar ifadesi ile öğrenmiş olsaydım daha iyi anlardım.

Ö17 : Kavram yanılgılarının giderilmesinde ve konunun öğretilmesinde analojiler etkilidir. Limit konusunun öğretiminde etkili olarak kullanılabilir. Analoji hazırlamak çok zor oldu. Çünkü soyut olan bir konuyu somut düşünüp ele aldık. Limit analojisi kavram yanılgısını bir nebze giderebilir ancak konunun analoji ile öğretilmesinde daha etkili olur

Ö19 : İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için soyut olan konuların somutlaştırılması açısından etkili bir uygulama. Öğrenciler de hazırlamalı tabi çünkü analoji hazırlarken konuyu daha iyi öğrenirler. Bizim gördüğümüz limit konusunun öğrenilmesi için etkili oldu. Kavram yanılgısı olanlar için de etkili olmuştur. Limit konusunun öğrenilmesinde analoji etkilidir. Çünkü konu az da olsa somutlaşmış olup ve öğrenilmesi daha kalıcı ve anlamlı olur. Kavram yanılgıları da buna paralel olarak azalmış olur..

Ö20 : Zor bir deneyimdi. Limitin analojiyle öğretilmesi zor bir konu. Başka matematik konuları da olabilir. Konuya giriş yaparken uygun olur. Ancak tüm konunun anlatımı analojilerle yapılamaz.

Ö16,Ö17,Ö18,Ö19 : Analojilerin ilköğretim ve ortaöğretim kademesinde konu öğretiminde kullanılması daha etkili olur. Çünkü somut düşünen öğrencilerin konuyu somutlaştırarak öğrenmeleri daha etkilidir. Bunun için öncelikle konuyla ilgili örnek bir analoji gösterilip daha sonra öğrencilerden analoji hazırlamaları istenmesi gerekir.

Bu grupla yapılan mülakatlarda öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden ve kendi analojilerini hazırlama süreçleri sonunda limit konusuyla ilgili kavramları lisede tamamen yanlış anladıklarını uygulama sonucunda ise limitle ilgili kavramları anladıklarını belirtmişlerdir. Bu grupta da civar ifadesinin çok anlaşılır olduğu ve limit davranışının ancak yığılma noktalarında bakılabildiği bilgisinin, yerine yazmıyoruz yerine yazıyormuş gibi davranan örnekler olabilir bilgisinin öğrencilerde oluştuğu öğrenci beyanlarından görüldü. Bu gruptaki öğrenciler analoji kullanımının ilköğretim seviyesinde çok verimli olacağına inandıklarını ancak bu seviyede analoji hazırlama ödevlerinin öğretmen kontrolünde yapılması gerektiğini beyan etmişlerdir.

4. 3. 5. Beşinci Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

5. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cavaplarından bir kesit:

Ö21,Ö22,Ö23,Ö24,Ö25 : Dersler akıcı ve güzel geçti.

Ö24 : Limit konusunda çok fazla semboller sembolik ifadeler var. Analojiler ilginçti. Soyut ve sembollerin fazla olduğu bu konu ancak bu kadar anlatılabilirdi. Civar ifadesini beğendik. Evet. Anoloji hazırlamak zor değil.

Analojiler öğretimde kullanılırsa etkili olur. Öğrencilerin ilgisini çeker. Öğrenciler kendi hayatlarından örnekler arar. Bu arama sayesinde konuyu daha iyi öğrenirler. Limit konusunun analoji ile hazırlanması güzel bir örnek. Ama doğadan örnekler güzel uydu.

Ö21 : Ancak kavram yanılgılarını gidermeye yönelik analoji hazırlamak zor olur. Ancak Limitle ilgili analoji bulmak zor oldu. Bizi uğraştırdı. Hayal gücümüzü zorladı. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için ilgi çekici olacaktır. Limit konusu analoji hazırlamada uygundu. Biraz zorlandık. Çünkü limitle bire bir örtüşen analoji bulmak zordu. Biraz daha düşünülürse başka konulara da uygun analojiler bulunabilir.

Ö22 : Limit konusunun öğretiminde analoji kullanmak daha doğru. Limit konusu analoji için uygun bir konuydu. Çünkü anlaşılması zor bir konu. Türev ve integral içinde analojiler hazırlanmalı. Onlarda soyut ve zor konular. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için çok faydalı olur. Öğrenciler günlük hayatla ilişkili analojiler görünce konuyu daha çok sever ve daha kolay öğrenirler. Öğrenciler matematikle günlük hayatın ilişkisini bulmakta zorlanıyor. Matematiğin zorluğu bence bundan kaynaklanıyor. Analojiler bunu giderebilir. Problemler, işçi, havuz, yol-zaman gibi problemler zaten günlük hayatla ilişkili anacak limit süreklilik türev ve integral gibi konularda analojiler hazırlanırsa konuların ilginçliği artar. Öğrencilere bu konular daha sevecen gelir. Daha iyi öğrenirler.

Ö23 : Günlük hayatla ilgili tüm olayları yoklayarak analoji bulmaya çalıştık. Ancak hazır sunulan analojilerin öğretimde etkili olacağını düşünüyoruz. Kavram yanılgılarını kendi hazırlayacakları analojilerle tespit etmek kolay olur. Ancak öğretmen analojiler sunarak konuyu anlatırsa daha iyi olur.

Ö25 : Kavram yanılgılarının tespitinden hemen sonra analojilerin kullanılması ve örneklerle desteklenmesi konuyu daha anlaşılır hale getirir ve bilgi daha kalıcı olur. Önce öğretmen uygun analojiler hazırlamalı sonra öğrencilerinden istemeli.

Bu grupla yapılan mülakatlarda öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden ve kendi analojilerini hazırlama süreçleri sonunda analoji destekli ders hazırlamanın hayal güçlerini zorladığını dolayısıyla matematik konuları ile günlük hayatla ilişki kurma becerilerinin arttığını belirtiği görüldü. Bu grupta da öğrencilerin civar ifadesinin limit kavramını anlamada çok büyük kolaylık sağladığını beyan ettikleri görüldü. Kavram yanılgılarının tespit edilmesi için analojilerin kullanılabileceğini ifade eden öğrenciler aynı zamanda bu yanılgıların analojik destekli derslerle giderilebileceğine inandıklarını beyan ettikleri görüldü. Analoji hazırlama ödevleri için önce öğretmenlerin örnek analojiler sunmaları gerektiğini belirten öğrenciler analoji hazırlama sürecinin öğrencilerin hayal gücünü geliştireceğine inandıklarını ve bunun da öğrencilerin matematik konuları ile günlük hayat arasında ilişki kurma becerilerini geliştireceğini beyan ettikleri görüldü. Ayrıca öğrenciler süreklilik, türev ve integral gibi konularda da analoji destekli diyalojik yönteme dayalı derslerin hazırlanmasının bu konulara olan ilgili ve anlamayı geliştireciği ifade ettiler.

4. 3. 6. Altıncı Grupla Yapılan Mülakat ile İlgili Bulgular

6. grup ile yapılan mülakattan öğrenci cevaplarından bir kesit:

Ö27,Ö28,Ö29,Ö30 : Güzel verimli bir etkinlik oldu.

Ö26 : Derslerin etkili olduğunu düşünüyorum. Limiti ilk öğrenirken kafamda pek çok analoji kurdum. Daha iyi nasıl öğrenirim diye düşündüm. Civar hiç aklıma gelmemişti. Limiti çok güzel ifade ediyor bence. Limit konusu analoji hazırlamak için oldukça uygun bir konu. Limitle ilgili analoji çok faydalı. Örneklerin uygunluğu ve öğrenciye hitap etmesi öğrencinin ilgisini çekmesi çok önemli. Limit oldukça soyut bir konu. Analojiler onu gerçek hayata uyarlayan örneklerle anlaşılır hale getirebilir. Limit konusu analoji için çok uygun bir konu. İnsan davranışlarını belirlemekte kullanılabilir. Analojiyi bulmada zorlanmadık. Bire bir limit kavramını anlatmıyor belki ama somutlamaya imkan sağlıyor. Analojiler konu öğretiminde etkilidir. Çünkü öğrenci konuyu somutlaştırarak hayata uygulanabileceğini görür ve dikkatini derse verir. En iyi öğrenmenin yaparak yaşayarak öğrenme olduğu düşünülürse bu analojilerle sağlanıyor zaten.

Ö27 : Kavram yanılgısı olan bir öğrenciye analojiyle konuyu anlatmak daha çok kavram yanılgısına sebep olabilir. Bu yüzden kavram yanılgıları tespit edildikten sonra uygun analojiler hazırlamak ve konuyu analojilerle öğretmek daha iyi olur.

Kavram yanılgıları analojilerle giderilebilir de giderilemez ise daha çok kavram yanılgısına da sebep olabilir. Analojiyi yapacak kişinin konuya hakim olması gerekir. Kavramlar arası bağlantıyı iyi kuramaz geçişi iyi yapamazsa öğrenciye de iyi aktaramaz ve öğrencinin kafası daha çok karışır. Limit konusu analoji hazırlamak için zor bir konu. İşci havuz problemlerinin çözümü ile ilgili analojiler hazırlanırsa daha iyi olur.

Ö28 : Limitle ilgili analoji hazırlarken öğrencinin kafasında limit kavramını nasıl canlandırabileceğimi çok düşündük ve sonunda hayatla ilgili bu örneği bulduk. Analojiler kavram yanılgıları giderilebilir, konunun anlaşılması kolaylaşır. Bu yüzden analojileri etkili buldum. Öğrenci analojiyi kendi hazırlarsa konuyu daha iyi öğrenir, bakış açısı değişir. Öğretmende *öğrencinin konuyu anlayıp anlayamadığını daha iyi tespit edebilir. Limit konusu analoji hazırlamaya uygun bir konu çünkü hayatta pek çok şeyi limite benzetebiliriz.*

Ö30 : İlköğretimde ve ortaöğretimde konuların analojilerle anlatılması yararlı olabilir. Somut ve görsel olaylarla daha kolay öğrenebilir. Öğrenciye mutlaka analoji hazırlatılmalı. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerine analojiler hazırlatmak daha etkili olur. Çünkü analojiyi hazırlayan öğrenci konuyu anlar anladığı konuyu pekiştirir. Öğretmende öğrencinin o konuyu anlayıp anlamadığını ve kavram yanılgılarını tespit edebilir. Çünkü öğrenci analoji hazırlarsa o konu hakkında belli bir fikre sahip olur. Sahip olduğu fikirlerin doğruluğu ve yanlışlığı analojide kullandığı ifadelerden belli olur.

Ö26,Ö28,Ö29 : İlköğretimde çok etkili olabilir. Ancak öğretmen hazırlamalı sunmalı sonra öğrenci analoji hazırlamalı. Öğretmende rehber olmalı.

Bu grupla yapılan mülakatlarda öğrencilerin analoji destekli diyalojik yöntemle yürütülen derslerden ve kendi analojilerini hazırlama süreçleri sonunda öğrencilerin civar ifadesini benimsedikleri ifade ettikleri görüldü. Öğrenciler limit kavramının detaylarını kolayca görebildiklerini belirttiler. Analoji hazırlama sürecinde zorlandıklarını belirten öğrencilerin süreç sonunda matematikle günlük hayat arasında ilişki kurma becerilerinin arttığını beyan etmişlerdir. Analoji ihazırlarken bir uzman desteğinin gerekli olduğunu belirten öğrenciler analojilerin iyi hazırlanmazsa öğrencilerde yanılgılara sebep olabileceğini belirtmişlerdir.

Özetle;

Öğrenciler limit konusuyla ilgili ön test olduktan sonra analoji destekli ders gördüler. Limitle ilgili analojilerini sunduktan sonra sınıf tartışmaları ve mülakat sorularına cevap verdiler. Mülakatlarda öğrencilerin çoğu, analoji destekli diyalojik yaklaşımla işlenilen derslerin güzel ve etkili bir ders olduğu yönünde görüş bildirdi. Öğrencilerin büyük çoğunluğu anaojilerin kavram yanılgılarını gidermede etkili olacağını ifade ederken bazı öğrenciler kavram yanılgıları analojilerle giderilebilir de giderilemez de diyerek bu konudaki çift yönlü düşüncesini dile getirdi. Yine bazı öğrenciler, limitin tanımı aşamasında analojilerin uygun olacağını ancak limitin tüm özellikleri ile ilgili analojiler bulmanın zor olacağını ifade etti. Bazı öğrenciler ortaokul öğrencilerine analoji hazırlatmada öğretmenin rehberliğinin gerekliği olduğunu öğretmen rehberliği ve yardımı olmadan ortaokul öğrencilerine analoji hazırlatmamaları gerektiği bazı öğrenciler ise ortaokul öğrencilerine hazırlık yaptırılmadan doğaçlama ile analoji hazırlatmaları gerektiğinin kavram yanılgılarını tespit etmede büyük kolaylık sağlayacağını ifade ettiler.

Öğrenci başarı testleri, grup ödevleri ve grup mülakatları ile toplanan verilerin sunulduğu bu bölümden sonraki bölümde, başarı testleri sonuçları, öğrenci analojilerinin yeterliliği ve öğrenci görüşlerinden hareketle derslerin öğrenciler üzerindeki olumlu veya olumsuz etkileri literatür desteğiyle yorumlanacak ve tartışılacaktır.

5. TARTIŞMA

Analoji Destekli diyalojik yönteminin üniversite düzeyinde limit kavramının öğretiminde etkililiğini belirlemek amacıyla yapılan bu çalışmada, alt problemler:

1. Analoji destekli diyalojik yöntemi ile öğretilen limit konusunun öğrenci başarılarına etkisi nedir?
2. Limit konusunda analoji hazırlamada üniversite öğrencilerinin yeterliliği nedir?
3. Öğrencilerinin limit konusunda analoji hazırlama ile ilgili görüşleri nelerdir?

olarak belirlenmiştir. Bunun için Rize Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2.sınıfta okuyan 30 öğrenciyle çalışma yapılmıştır. Literatür taraması yapılarak limit konusuyla ilgili elde edilen kavram yanılgıları ve muhtemel nedenlerini dikkate alarak ders hazırlanmış hazırlanan dersler günlük hayatla ilişkili analojilerle desteklendi. Öğrencilere limit konusuyla ilgili bilgi verilerek uygulamalar yapılmıştır. Daha sonra öğrenciler 5 erli kişiden oluşan toplam 6 gruba ayrıldılar. Kendilerinin belirlemiş oldukları gruplarla çalışmaya katılan öğrenciler, grup çalışmasıyla analojiler hazırladılar ve sundular. Sunu sonunda da kendileriyle yapılan mülakatlarla ortak görüşlerini belirttiler. Ayrıca öğrenciler derinlemesine gözlenirken günlük tutulan notlara bu gözlemler kaydedilmiştir. Toplanan verilerin geçerliliğinin ve güvenilirliğinin arttırılması açısından da kamera kaydı yapıldı. Yapılan gözlemler, mülakatlar analiz edilirken görüşlerin davranışlara ne derece yansıdığı konusunda ve sınıf ortamının dikkati ve ilgisi açısından karşılaştırılmak üzere kullanıldı. Literatürde temel alınarak gözlem ve mülakatlar karşılaştırılmalı olarak bu bölümde yorumlandı.

5. 1. Analoji Destekli Diyalojik Yöntem ile İşlenilen Derslerin Öğrenci Başarılarına Etkisi ile İlgili Tartışma

Öğrencilere limit konusu anlatılmadan önce daha önce bildikleri limit konusuyla ilgili başarı durumlarını tespit etmek için ön sınav yapıldı. Bu sınav sonuçları her bir öğrenciye bir kod isim verilerek değerlendirildi. Son sınavda aynı öğrenciler aynı kod isimleriyle sınav oldular.

Sınav sorularından;

$|x-1| = 2$ ifadesi ne anlama geliyor? sorusu limit konusu için ön şart niteliğinde olan x in x_0 ın civarında olmasının ne demek olduğunu öğrencilerin bilmesi gerekmektedir. Bu ön bilgi için mutlak değer sorusu sorulmuş öğrencilerin büyük çoğunluğu bu soruya doğru cevap vermiştir. Ön testte doğru cevap verenler geçmiş bilgilerini kullanarak doğru cevap vermişler yanlış cevap verenler geçmişteki bilgilerinin eksikliğini 1.dersten sonra gidererek doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu soruya yanlış cevap veren öğrencilerde mutlak değer konusunda hala bilgi eksikliği olduğu görülmüştür. Moralı, Köroğlu ve Çelik (2004) mutlak değer konusunun yükseköğretim düzeyindeki öğrenciler için bile hala sıkıntılı bir konu olduğun yapmış oldukları bir çalışmada ortay çıkarmışlardır.

Benzer şekilde I x-1 I<2 ifadesi ne anlama geliyor? Sorusuna tüm öğrencilerin doğru cevap vermesi beklenirdi. Limit tanımı için ön şart konu olan mutlak değer konusu tam öğrenilmeden limit konusunun öğrenilmesi mümkün değildir. Bununla birlikte son sınavda doğru yapanların sayısının artması derslerin etkili olduğunu göstermektedir. Nitekim yapılan çalışmalarda üniversite öğrencisi olmalarına rağmen mutlak değer konusunda hata yapan öğrenciler küçümsenmeyecek kadar çoktur (Güveli, 2015). $\forall\varepsilon > 0$ ifadesi ne anlama geliyor? sorusuna ilk sınavda öğrencilerin cevap verememelerinin nedeni ε sembolünü sadece limit tanımında gördükleri ve limiti de yaklaşmak olarak bildikleri için "bir sayının pozitif tarafına çok çok az miktarda yaklaşmak" olarak cevap vermeyi tercih etmiş olabilirler. Çoğu öğrenci ε, δ sembollerini anlamamaktadır. Barak, (2007) yapmış olduğu bir çalışmada öğrencilerin ε, δ sembolleriyle ne anlatılmak istendiğine yönelik bir açıklama yapamadıkları bu sembolleri iyi anlamadıklarını belirtmiştir. Son testte doğru sayısının artması derslerin etkili olmasına bağlanabilir. $\forall\varepsilon > 0$ için $| x – 1 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor? sorusunda öğrencilerden beklenen x in 1 veya 1 e istediğimiz kadar yakın bir sayı olduğunu söylemeleri iken öğrenciler daha işlemsel cevap vermeyi tercih etmişlerdir. Yanlış cevap veren öğrenciler mutlak değerin sıfırdan büyük eşit olduğunu gözden kaçırmış dolayısıyla $0\leq | x – 1 | < \varepsilon$ aralığında x=1 olması gerektiğini düşünememişlerdir. Baki ve Çekmez, (2012) yaptıkları bir çalışmada tanım içerisindeki değişkenleri ve eşitsizlikleri anlama ve yorumlamada sıkıntılar yaşadıklarını belirlemişlerdir. Ancak derslerden sonra öğrencilerin büyük çoğunluğu bu eksikliği gidermiştir. $\{ x: | x – a | < \varepsilon , \quad a, \varepsilon \in R \}$ kümesini sayı doğrusunda gösterin sorusunda öğrencilerin ilk sınavda aralığı sayı doğrusunda gösterememe hatasını yaparken son sınavda bu hatalardan kurtuldukları ve x i doğru aralıkta gösterebilmişlerdir. İlk sınavda yanlış yapan 5 öğrenci varken son sınavda 9 öğrencinin yanlış yapmış olması kısmen doğru yapan öğrencilerden bir kısmının doğruya ulaşmasına rağmen bir kısmının dikkatsizlik sonucu yanlış yapması veya ilk testte tam olarak tespit edilemeyen yanlışlarını son testte açıkça gösterdikleri ve devam ettirdikleri sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Queseda ve diğerleri (2008) yaptıkları çalışmada öğrencilerin limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulma ve ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleme adına eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması sonucunu bulmaları bu çalışmadaki öğrenci zorluklarıyla örtüşmektedir.

$\forall\varepsilon > 0$ için $0 < | x - 2 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz sorusunda ilk sınavda öğrenciler yine işlemsel olarak aralık değeri bulmaya çalışmışlar son sınavda ise x in 2 ye yaklaştığını veya x in 2'nin keyfi civarında olduğunu fark etmişlerdir. Bu fark ediş ve doğru cevapların sayısındaki artış derslerin anlaşılması ve etkili olmasına bağlanabilir. İlk sınavda öğrencilerin yaptığı yanlışları yapılan bazı çalışmalarda; öğrencilerin geçici sıranın son derece önemli olan rolünü ihmal ettikleri (Davis ve Vinner, 1986), işlemsel bilgiye ağırlık vermeleri kavramsal bilgiyi gözardı etmeleri (Williams, 1991), tanım içerisindeki değişkenleri ve eşitsizlikleri anlama ve yorumlamada sıkıntılar yaşadıkları (Baki ve Çekmez, 2012) şeklinde görmekteyiz. $| x | > 10^5$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz sorusunda yine öğrencilerin ilk sınavda hatalı aralık seçimiyle yanlış yaptıkları görülmüştür. Son sınavda x in doğru aralığını bulmuşlardır. İlk sınavda yanlış yapan 7 öğrenci varken son sınavda 8 öğrencinin olması ilk sınavda boş bırakan 5 öğrenciden birinin son sınavda cevap verme girişiminin başarısız olmasına bağlanabilir. Bu durum öğrencinin derse devam etmemesinden ya da hatalı düşüncesini devam ettirmesinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin burada yaptıkları hataların ve yanlışların mutlak değer kavramını tam bilmemesinden kaynaklandığını düşünebiliriz. Mutlak değerin bir sayıdan büyük olması durumunda yaşanılan kavram yanılgılarını Demetgül'ün (2018) mutlak değer ile ilgili yapmış olduğu bir çalışmasında da görebiliriz. $\forall M > 0$ için $n > M$ ($n,M \in R$) ifadesi ne anlama geliyor? sorusunda İlk sınavda doğru cevap veremeyen öğrenciler son sınavda "istediğimiz kadar büyük M den daha büyük bir n sayısının, n in sonsuza yaklaşması" demek olduğunu fark etmişlerdir. Bu durumdan derslerin etkili olduğu söylenebilir. Bu soruya verilen yanlış cevapların sebebinin, n in sonsuza yaklaşma olduğunun anlaşılamamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Barak (2007) öğrencilerin limit konusunda sahip olduğu yanılgılardan birinin ∞ kavramının anlaşılamaması ve işlemlerde kullanılamaması olduğunu ifade etmiştir. $\forall M > 0$ için $n < -M$ ($n,M \in R$) ifadesi ne anlama geliyor? sorusunda da ilk sınavda soruya doğru cevap veremeyen öğrencilerin son sınavda "istediğin kadar büyük bir M sayının negatifinden daha küçük bir n sayısının, n nin eksi sonsuza yaklaşması" olduğunu fark ettiklerini görmekteyiz. Öğrencilerin farkındalıklarının artmasında derslerin etkili olduğunu söyleyebiliriz. Bu soruya verilen yanlış cevapların kaynağının yine ∞ kavramının anlaşılamaması ve işlemlerde kullanılamaması (Barak, 2007) olarak düşünülmüştür. Yığılma noktası ifadesi ne anlama geliyor? sorusunda ilk sınavda hiçbir öğrenci doğru cevap verememişken son sınavda çoğu öğrencinin tanımını doğru yazdıkları görülmüştür. Limit konusunda ortaya çıkan çoğu öğrenme güçlüklerinin veya kavram yanılgılarının yığılma noktası kavramıyla ilişkisi vardır. Çünkü bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin var olması için öncelikle o noktanın yığılma noktası olması gerekmektedir (Balcı,1997). Çetin ve diğerleri (2012) yapmış oldukları bir çalışmada çalışmaya katılan Fen Edebiyat ve Eğitim Fakültesi öğrencilerinin hiçbiri “yığılma noktası” kavramını doğru olarak tanımlayamamıştır. Bu sonuç bizim çalışmamızla da paralellik göstermektedir. Son sınavda çoğunluk olmasa da bazı öğrencilerin durumu fark edip doğru cevap vermesi konuyu anlamalarına dolayısıyla derslerin etkili olmasına bağlanabilir. Doğal sayıların, rasyonel sayıların ve reel sayıların yığılma kümeleri nedir? sorusunda yığılma noktasının tanımını anlayan öğrencilerin bu soruyu doğru cevaplandırdıkları düşünülmektedir. Herhangi bir reel sayının içerisinde doğal sayı barındırmayan en az bir delik komşuluğunun bulunabilir olmasından dolayı diğer bir ifadeyle bir reel sayıya tamsayılarla istediğimiz kadar yaklaşamayacağımızdan hiçbir reel sayı doğal sayıların yığılma noktası değildir. Sonuç olarak doğal sayıların yığılma noktaları kümesi boştur. Benzer şekilde tamsayılarında yığılma noktaları kümesi boş olur. Herhangi bir reel sayının keyfi delik komşuluğunda mutlaka reel, irrasyonel ve rasyonel sayılar bulunacağından rasyonel, irrasyonel ve reel sayıların yığılma noktaları kümeleri reel sayılar kümesidir. Hiçbir reel sayı, pozitif tam sayılar kümesinin yığılma noktası olmadığından a $\in$R olmak üzere f(n)=a_n kuralı ile verilen dizinin lim f(n) $a_n \to \infty$ limitinden bahsedilemez. a $\in$R pozitif tam sayıların bir yığılma noktası olmadığından sadece n $\to$ ∞ durumunda dizilerin limiti incelenmektedir (Kadıoğlu ve Kamali, 2011). Komşuluk ve yığılma noktası kavramları iyi bir şekilde anlaşılmadığında, bu durum sadece limit tanımının yapılandırılmasını değil aynı zamanda dizilerde limit kavramının da öğrenilmesini olumsuz yönde etkileyeceği görülmektedir (Zengin, 2017). Son sınavda doğru cevap veren öğrenci sayısının artması bu konunun anlaşılmasında derslerin etkili olduğu söylenebilir.

A ≠ ∅ f: A $\subseteq R \to R$ x_0A’nın yığılma noktası ve l $\in$ R olmak üzere; ∀ε > 0 için ∃δ(ε) > 0 öyle ki 0 < | x - x_0 | < δ olan tüm x ler için |$f(x)$ – l | < ε ifadesi ne anlama geliyor? şeklinde limit tanımıyla ilgili olan bu soruya ilk sınavda öğrencilerin doğru cevap verememeleri limitin formal tanımının tam olarak anlaşılamamasıdır. Nitekim limit ile ilgili yapılan çalışmaların çoğu bu sonucu desteklemektedir. (Baki ve Çekmez, 2012; Davis ve Vinner, 1986; Tall ve Vinner, 1981; Queseda vd., 2008). Son sınavda öğrencilerin doğru cevap vermeleri onların analoji destekli diyalojik yöntem ile işlemiş oldukları derse bağlı olduğu düşünülmektedir. Analoji destekli diyalojik yöntem ile yanılgılar aktif hale getirilip görücü usulü evlilikle civar analojisi kullanılarak limitin davranışı incelenmektedir. Ancak bu yeterli değildir. Bunun yanında limit anlatılırken kullanılan hiyerarşi de önemlidir. Nitekim limit kavramı ile ilgili bölüme gelmeden önce mutlak değer, aralık kavramları üzerinde duruldu. Literatürde sıfırdan büyük keyfi sayı olarak tanımlanan ε yerine “istenildiği kadar küçük pozitif sayı olarak ε”, “istenildiği kadar büyük pozitif sayı olarak M, ε ve M ye bağlı çok küçük pozitif sayı olarak δ, ε ve M ye bağlı çok büyük sayı olarak da N notasyonları tanımlanmıştır. Bu tanımlar yardımıyla da limitin mümkün 9 durumuyla ilgili tanım yazma metodu geliştirilmiştir.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ ifadesi ne anlama geliyor? sorusuyla istediğimiz

∀ε > 0 için ∃δ(ε) > 0 öyleki 0 < | x | < δ olan tüm x'ler için $|f(x)$ – 2 | < ε olduğunu göstermektir.

Mavi olan kısım f(x)=2 olduğunu kırmızı olan kısım ise hangi x ler için böyle olduğunu ifade etmektedir. Bu x ler 0'ın civarındaki x lerdir. Dolayısıyla bu tanımın ifadesi "0'ın civarındaki değişkenlerde fonksiyonun aldığı değer 2 dir". Ancak ilk sınavda öğrencilerin çok azının bu soruyu doğru cevaplaması öğrencilerin limitin formal tanımında yukarıda kırmızı ile verilen kısmının görmezden gelinmesi ve tam olarak anlaşılamamasından kaynaklanmaktadır. Davis ve Vinner (1986) yapmış oldukları çalışmada öğrencilerin geçici sıranın son derece önemli olan rolünü ihmal etme yanılgısına sahip olduklarını, Bukova (2006) tarafından yapılmış olan bir çalışmada öğrencilerin δ −ε yaklaşımını kullanarak fonksiyonun bir noktasındaki limitinin varlığını ispat etmede zorlandıkları görülmüştür. $\lim_{x\to -2} \sqrt{x}$ limiti için ne dersiniz? sorusunda fonksiyonun -2 de tanımlı olmamasından dolayı limitin olmayacağını düşünen öğrenciler ilk sınavda yanılmışlardır. Halbu ki bir noktada tanımlı olmayan fonksiyonunu o noktanın civarında limiti olabilir. Bazı çalışmalarda öğrencilerin x = – 2 için tanımlı olmadığından limiti yoktur şeklinde yanılgılara sahip olduğu görülmektedir. Oysaki bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olmasına gerek yoktur (Kadıoğlu ve Kamali, 2011). Bir fonksiyonun a noktasındaki limiti, fonksiyonun bu noktada tanımlı olup olmamasına bağlı değildir (Zengin, 2017; Çetin vd., 2012). Ancak son sınavda -2'nin fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olmamasından dolayı limitin anlamsız olduğunu kavramışlardır.

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz sorusunda tanım yardımıyla limit gösterilirken uygun deltanın $\frac{2}{\varepsilon}$ seçilmesi gerekmektdir. Bu soruya yanlış cevap veren öğrenciler x yerine ∞ yazma eğilimi göstermişlerdir. Tanım yardımıyla limit gösterilirken uygun deltanın istenilen sonuçtan geriye doğru bakılarak nasıl seçileceğini kavrayan öğrenciler bu soruya doğru cevap vermişlerdir.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz şeklindeki soruda tanım yardımıyla limit gösterilirken keyfi M>0 için x in komşuluğunu 1/M olarak seçerek fonksiyonun keyfi M den büyük olduğunu gösteren öğrenciler bu soruyu doğru cevaplamıştır. Buradan diyalojik yöntemiyle anlatılan limit konulu derslerin etkili olduğunu söyleyebiliriz.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} Sinx = \frac{1}{2}$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz sorusunda öğrencilerden beklenen doğru cevap; sina-sinb açılımı yardımıyla $\left|\sin(x-\frac{\pi}{6})\right| \leq \left|x-\frac{\pi}{6}\right|$ eşitsizliğine ulaşarak limit tanımını yazmalarıydı. Yanlış yapan öğrenciler x yerine direkt $\frac{\pi}{6}$ yazmışlardır. Bu durumun ise öğrencilerde sıkça görülen limit bulmak için yerine yazma kuralına sıkı sıkıya bağlı olmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Williams'a (1991) göre, öğrenciler basit ve pratik limit modellerini matematiksel tanımlardan daha önemli görmekteydiler. Çünkü öğrenciler için basit ve pratik limit modelleri sınavlarda başarılı olmak için yeterli görülmektedir. Öğrenciler işlemsel bilgilerine (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırıma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L‟Hopital kuralını uygulama gibi…) kavramsal bilgilerinden daha çok önem vermekteydiler. Son sınavda ise 29 öğrenci beklenilen şekilde yazarak soruya "doğru" cevap vermiştir. $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}$ limitini 2'den büyük ve 2'den küçük civardan yaklaşarak bulunuz sorusunda çoğu öğrenci bu soruya x yerine 2 yazarak cevap vermesine rağmen 2'den büyük ve 2'den küçük değişkenlerde fonksiyonun ¼ değerini aldığını fark eden öğrenciler bu soruya doğru cevap vermişlerdir. Çünkü limit hesaplarken değişkeni fonksiyonda yerine yazmak limit almak demek değildir. Çoğu zaman öğrencilerde bir fonksiyonunun bir noktadaki limit değerini bulurken fonksiyonunu o noktadaki görüntüsü bulma algısı oluşmaktadır (Williams, 1991; Baki, 2018). Bu çalışmada öğrencilerdeki bu yanlış algının son testte değiştiğini görmekteyiz.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2+1 & -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad \textit{olmak üzere;}\ \lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

sorusuna yanlış cevap veren birçok öğrenci x yerine 0 yazıp limiti 0 bularak yanlış yapmışlardır. 0'ın civarlarını ayrı ayrı değerlendirerek 0'ın civarında fonksiyonun 2 farklı değer alacak şekilde çalıştığını görenler limitin mevcut olmadığı sonucuna yani doğru sonuca ulaşmışlardır. Öğrencilerde bir fonksiyonunun bir noktadaki limit değerini bulurken fonksiyonunu o noktadaki görüntüsü bulma algısı oluşması (Williams, 1991; Baki, 2018) bu soruda da görülmektedir. Son sınavda sonucun değişmesi doğru yapanların artması derslerin etkili olduğuna bağlanabilir.

$\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x} = ?\ ve\ \lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2} = ?$ sorusunda $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ şeklindeki bir trigonometrik limit kuralının basit iki uygulaması sorulmuştur. Cosinüslü ifadenin sinüslü ifadeye çevrilmesi ve kuralın görülmesi istenmiştir. Bu kuralı gören öğrenciler soruya doğru cevap vermişlerdir. Akbulut ve Işık, (2005) yapmış oldukları bir çalışmada bu soruya öğrencilerin % 8'inin özel bir olup $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ = 1 dir. Cevabını verdiklerini, öğrencilerin % 44'ünün ezber olarak 1 cevabını verdiklerini, öğrencilerin % 42'sinin belirsizlik var deyip

L'hospital kuralını aldıklarını, yine öğrencilerin % 6'sının integral dönüşümü ile çözmeye çalıştıklarını belirtmiştir. Akbulut ve Işık (2005) öğrencilerin bu belirsiz limit durumunun 1'e eşit olduğunu bildiklerini, buna karşın ezbere bilinen limit kurallarını kullanarak bu limit eşitliğini ispatlamada zorluk çektiklerini belirtmektedir. Genel olarak öğrenciler bu soruda L' Hospital kuralını kullanmayı tercih etmiler ve bu kural doğrultusunda çözmeye çalışmışlardır. Bu eğilim ise öğrencilerin öğrenmelerinin kavramsal bir yapıda olmaktan ziyade, formül ve kuralları ezbere dayandırdıkları için işlemsel bir yapı ile sınırlı olduğu gözlenmiştir.

Öğrencilerin ön sınav ve son sınav arasındaki başarılarında anlamlı bir farkın olması diyalog yöntemiyle işlenilen derslerin öğrenci başarısı üzerinde etkili olduğu sonucunu ortaya koymaktadır.

5. 2. Limit Konusunda Analoji Hazırlamada Üniversite Öğrencilerinin Yeterliliği ile İlgili Tartışma

Öğrenciler 5 erli kişiden oluşan toplam 6 gruba ayrıldılar. Kendilerinin belirlemiş oldukları gruplarla çalışmaya katılan öğrenciler, grup çalışmasıyla analojiler hazırladılar ve sundular. Bu sunular ders saatleri boyunca izlendi ve değerlendirme formuyla değerlendirildi.

Kula ve Bukova-Güzel (2015) 4 öğretmen adayıyla yapmış oldukları çalışmada limit kavramını öğretirken öğretmen adaylarının kullandıkları öğretim stratejilerini incelemişlerdir. Bu startejilerde öğretmen adayları limit kavramına yönelik anlayış oluşturmada resim şekil ve video gösterimlerini içeren şekilsel gösterimler, bir sayıya sağ ve soldan yaklaşmayı sezdirmede sayı doğrusunun kullanımını önermişlerdir. Limitte bakılan noktalara sağ ve soldan yaklaşımı mümkün kılan yığılma noktaların ve bu noktaların civarındaki fonksiyonun aldığı değerlerin incelenmesi ve o noktada fonksiyonun limitinin varlığını belirlenmesi amacıyla tablo gösterimini kullanmışlardır. Grafikteki bir noktaya sağ ve soldan yaklaşımı ve bu noktaya yaklaşırken fonksiyonun aldığı değerlerin incelenmesi, o noktada fonksiyonun limitinin varlığını belirlenmesi amacıyla grafiksel gösterim kullanılmıştır. Limit kavramına ilişkin cebirsel gösterimleri içeren cebirsel gösterimleri ve limit ile ilgili kavramların sözel açıklamalarını içeren sözel ifadeleri kullanmayı tercih ettiklerini ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin kullandıkları görsellerde kredi kartı limiti, ve hız limiti gibi günlük yaşam örnekleri kullandıkları görülmüştür.

Bizim çalışmamızda animasyon kullanan olmamıştır. Sadece öğrenciler fikir almak için filmlerde, dizilerde limit arayışına girmişlerdir. Yine bu çalışmada öğretmen adaylarının kullandığı bir diğer günlük yaşam benzetmesi bir ünlüye gazetecilerin sağdan ve soldan yaklaşması üzerineydi. Bu benzetme bizim çalışmamızda gruplardan birinin hazırladığı gelin kaynana benzetmesine uymaktadır.

Başka bir benzetme Aynı durum karşısında gösterilen muamele aynıysa karakteri oturmuş benzetmesi de yine bizim çalışmamızda bir grubun sunduğu Sakine'nin aşkı benzetmesine uymaktadır.

Başka bir benzetme Escher'in resimleri bizim çalışmamızda tercih edilen doğa resimleriyle uyuşmaktadır. Öğretmen adayları iki farklı çalışmada farklı yerlerde farklı öğretim stilleri kullanmakta iken benzer çalışmalar sergilemeleri dikkat çekicidir.

Eğitimin geleceğe açılan kapısı olan Eğitim Bilişim Ağı (EBA), Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü tarafından her bir bireyin kullanımına ücretsiz olarak sunulan çevrimiçi bir sosyal eğitim platformudur (URL-1, 2019). EBA'da limit konusu şöyle anlatılmaktadır:

Koşu yolunun uzunluğu 100 metre ve x hız olarak alındığında bitiş çizgisine varış süresi hızın bir fonksiyonu olarak y= f (x) dir.

f(x)=$\frac{100}{x}$ dir. Genişletilmiş sayılar kümesinde x 'in de değerleri giderek büyüdüğünde f(x)=$\frac{100}{x}$ fonksiyonuna benzer olarak f(x)= $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun değerinin ne olacağı bulunmak isteniyor. f(1)' in değeri 1, f(10)' un değeri 0,1, f(100)' in değeri 0,01 f(1000) 'in değeri 0,001'dir. Dikkat edilirse değerler hep pozitiftir. x yerine konulan değer büyüdükçe 1'in bu sayıya bölümü olan $\frac{1}{x}$ değeri de küçülmektedir. Giderek 0 sayısına yaklaşılmaktadır. Böylece f(x) = $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun x sonsuza giderken limitinin 0 olduğu anlaşılır. x'in değeri giderek küçüldüğünde f(x) = 1 bölü x in değerinin ne olacağı bulunmak isteniyor. f(-1)'in değeri -1, f(-10)'un değeri -0,1, f(-100)'in değeri -0,01, f(-1000)'in değeri -0,001'dir. Dikkat edilirse değerler hep negatiftir. x yerine konulan değer küçüldükçe 1' in bu sayıya bölümü olan $\frac{1}{x}$ değeri de negatif bir sayı olarak büyümektedir. Giderek 0 sayısına yaklaşılmaktadır. Böylece f(x) = $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun x sonsuza giderken limitinin 0 olduğu anlaşılır." Şeklinde anlatılmakta ve yüz metre koşucusu ile analoji kurulmaktadır. Eğitim sistemimiz de artık düz anlatım ve formal tanımların öğrenciye doğrudan verilmesi yaklaşımından uzaklaşmaktadır. Bu durum sevindiricidir. Ancak tüm matematik konularda analojiler bulmak zor olabilmektedir. Bunun için öğrencilerin daha çok okumaları, araştırmaları, konuşmaları ve konuşturulmaları gerekmektedir. Öğrencilerin zihinsel süreçlerini harekete geçirmek, hayal güçlerini geliştirmek, araştıran, sorgulayan bireyler olarak öğretim sürecine aktif olarak katılmalarını sağlamak için araştırmalar devam etmektedir ve devam edecektir.

Sonuç olarak; öğrencilerin hazırlamış oldukları analojilerden yola çıkarak şunları söyleyebiliriz: Öğrenciler günlük hayatla ilişkili olmasına özen gösterdikleri analojileri hazırlamada oldukça başarılıydı. Değerlendirme formu sonuçları da bunu göstermektedir. Sadece zaman kısıtlılığı olması bazı grupların sunularını tamamlamasında sorun oluşturmuştu. Ayrıca öğrencilerin hazırladığı analojilerde özet yaparak limit konusunu toparlama kriterinde eksik olduğu tespit edilmişti. Bu eksikliklerin dışında analoji hazırlamada oldukça başarılıydılar. Bu onların kavramsal bilgilerinin yeterli olduğunu gösterir. Analojiler öğrencilerin kavramsal bilgilerinin ölçülmesine imkan sağladı. 2 haftalık bir sürede bu analojileri bulmaları hazırlamaları ve sınıfta sunmaları, onların konuya ilgilerinin, farklı bakış açılarının ve orijinal yaklaşımlarının keşfine de olanak sağladı. Ayrıca öğrencilerin hazırladığı analojiler onların ilgi ve beklentilerinden ziyade duygusal ve mantıksal potansiyellerini de ortaya koydu. Çünkü bazı grupların analojilerinde mantıksal-matematiksel analojiler(G2) hakim iken, bazı analojilerde çaresizliğin (G1) bazı analojilerde hayalciliğin (G1), bazı analojilerde doğacılığın(G5) bazılarında sporculuğun(G3), bazılarında ise duygusallığın(G6) hakim olduğunu gördük. Bu durum bize aynı başarı puanıyla üniversiteye gelmiş aynı sınıfta bulunan farklı bireysel özelliklere ve zekalara sahip öğrencilerin bir arada aynı öğrenme ortamı içerisinde bulundukları gerçeğini hatırlatmış oldu. Sonuçta öğretim ilkelerinde uyulması gereken önemli bir ilke vardır ki bu da “öğrenciye görelik” ilkesidir. Bu ilke ders programının hazırlanmasında veya dersin işlenmesinde öğrencinin fizyoljik ve psikolojik özelliklerinin ve bireysel farklılıklarının esas alınması gerektiğini vurgulayan bir öğretim ilkesidir (Ergün ve Özdaş, 1997). O halde analojilerin öğrenmede, öğretmede ve değerlendirme aşamasında kullanılabileceği gibi öğrencilerin bireysel farklılılarını ve ne tür zeka alanına sahip olduklarını tespit etmede de kullanılabilecek etkili bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz.

5. 3. Öğrenci Mülakatları ile İlgili Tartışma

Öğrencilerle yapılan odak grup görüşmeleri sonucunda; Analoji destekli sokratik diyalog yöntemine dayalı limit konusunun öğretilmesi hakkında ne düşünüyor sunuz? sorusuna;

Öğretmen adaylarının çoğu, güzel ve etkili bir ders olduğu yönünde görüş bildirdi.

Bir öğrenci *yıllar önce lisede limit konusunu öğrendiğimde hep bir sayıya yaklaşan değer olarak düşünürdüm.(Ö6),* şeklinde görüş bildirirken, başka bir öğrenci;

Bu derste düşündüğüm bazı şeyler yanlış olduğunu gördüm. Mesela limit alırken fonksiyonun tanımlı olduğu aralığa hiç dikkat etmiyordum. Yığılma noktasını bir türlü *anlayamıyordum. Tamsayılarda tanımlı her fonksiyonun limiti olacağını ve yerine yazarak limit bulunacağını düşünüyordum. (Ö11)* şeklinde görüş bildirmiştir. Bu öğrenciler limitin "yaklaşan değer" ve "yerine yazma" anlamı ifade eden bir kavram olduğunu düşündüklerini ancak uygulamalardan sonra civar analojisi ile limitin daha anlamlı olduğunu ve daha iyi anladıklarını ifade ettiler. Literatürde öğrencilerde yaklaşan değer olarak limiti anlama yönünde öğrencilerde kavram yanılgıları olduğu tespit edilmiştir (Özmantar, 2008.) Yine yığılma noktası konusunda öğrencilerin kavram yanılgısına sahip olduğuna dair çalışmaya da rastlamak mümkündür (Balcı,1997). *Limit konusunda çok fazla semboller sembolik ifadeler var. Analojiler ilginçti. Soyut ve sembollerin fazla olduğu bu konu ancak bu kadar anlatılabilirdi. (Ö24)* şeklinde görüş bildiren öğrencinin de sembollerden kaynaklı öğrenme güçlüğü olduğunu anlamaktayız. Nitekim yapılan çalışmalarda limit kavramını içeren epsilon delta gibi sembolik ifadelerin anlaşılamamasından kaynaklı yanılgılar olduğu ifade edilmektedir (Bukova, 2006; Baki ve Çekmez, 2012)

Daha iyi anladım (Ö1). İlk öğrendiğimde civar ifadesi ile öğrenmiş olsaydım daha iyi anlardım. (Ö18). Civar ifadesini beğendik. (Ö24) Daha iyi nasıl öğrenirim diye düşündüm. Civar hiç aklıma gelmemişti. Limiti çok güzel ifade ediyor bence.(Ö26)

Bu ifadeler öğrencilerin daha önce limit kavramını civar ifadesi ile öğrenmiş olsalardı daha iyi öğreneceklerinin bir kanıtıydı. Öğrenciler derslerin analoji ile işlenmesini ve civar analojisinin limit öğretilirken kullanılmasını etkili buldular. Ö26, daha iyi nasıl öğreneceğini düşünürken civar ifadesinin aklına gelmemiş olmasını ifade etmesi, daha önce konuyu daha iyi anlamak için analoji bulma gayretini göstermektedir. Demek ki konuyu anlaması için bir analoji ile ilişkilendirme ihtiyacı duymuştu. Buradan analojinin konuyu anlama kavrama ilişkilendirme yapmak için analojilerin etkili olduğunu söyleyebiliriz. Ö26, nihayet civar analojisi ile karşılaştığında konuyu daha iyi öğrendiğini, dolayısıyla bu mücadelesinin ve gayretinin nihayetlendiğini söylemek mümkündür.

Hazırladığınız analojiler limit konusunda kavram yanılgılarının giderilmesinde uygulanabilir mi? nasıl sorusunda; Öğrencilerin bazıları (Ö4, Ö17, Ö19, Ö30) anaojilerin kavram yanılgılarını gidermede etkili olacağını ifade ederken Ö27, kavram yanılgıları analojilerle giderilebilir de giderilemezde diyerek bu konudaki çift yönlü düşüncesini dile getirdi. *Giderilemez ise daha çok kavram yanılgısına da sebep olabilir. Analojiyi yapacak kişinin konuya hakim olması gerekir. Kavramlar arası bağlantıyı iyi kuramaz geçişi iyi yapamazsa öğrenciye de iyi aktaramaz ve öğrencinin kafası daha çok karışır.* (Ö27). *Kavram yanılgısı olan bir öğrenciye analojiyle konuyu anlatmak daha çok kavram yanılgısına sebep olabilir. Bu yüzden kavram yanılgıları tespit edildikten sonra uygun analojiler hazırlamak ve konuyu analojilerle öğretmek daha iyi olur* diyen Ö26 ile Ö12, Ö8 ve Ö15 aynı görüşü paylaştılar. Bu görüşü savunan öğrenciler analojilerin kavram yanılgılarını gidermeden daha çok konuyu öğretirken destekleyici olarak analojilerin kullanılması gerektiğini ifade ettiler.

Öğrenciler limitten başka bazı konuların analoji için uygun olacağı ifade ettiler. İki öğrenci (Ö1, Ö2), fonksiyonlar konusu derken, biri (Ö13) sayılar konusu, başka bir öğrenci(Ö16), dört işlem ve mutlak değer konusu, başka bir öğrenci (Ö15) denklemler konusunu daha uygun görmüştü. İşci ve havuz problemlerinde analojiler olmalı diyen bir öğrencinin(Ö27) aksine başka bir öğrenci(Ö22) işci, havuz, yol-zaman problemleri zaten günlük hayatla ilişkili olduğu için bu konularda analoji yapılması gereksiz diyerek karşıt bir görüş bildirdi ve türev, integral gibi konularda analojiler yapılmasını istedi. Dikkat edildiğinde öğrencilerin seçtiği bu konular (fonksiyonlar, mutlak değer, denklemler, süreklilik, türev, integral) gerçek hayatla ilişki kurulması zor olan soyut konulardır. Nitekim literatürde bu konularla ilgili kavram yanılgılarının da mevcut olduğunu söylemek mümkündür (Tall ve Vinner, 1981; Özmantar vd., 2008, Baki, 2018) Buradan öğrencilerin, limit gibi soyut ve zor bir konuda analoji hazırlayabildiklerini, belirttikleri bu konularda da analojiler hazırlanabileceği ve hazırlanması gerektiği inancına vardılar.

Analojileri sınıfınızda uygulandığında yaşadığınız olumlu ve olumsuz durumlar neydi? Sorusuna; Öğrencilerden Ö2, Ö7, Ö11, Ö17, Ö22, Ö24, Ö26, Ö28 limit konusunun analoji hazırlamak için uygun bir konu olduğunu söylerken Ö1, Ö2, Ö10, Ö13, Ö15, Ö20, Ö21, Ö27 uygun bir konu olmadığını ifade etti. Uygun bir konu olduğu yöndeki olumlu görüşlerini bildiren öğrenciler kendi hazırladıkları analojilere inandıkları güvendikleri için bu fikre sahip olabilecekleri gibi bazılarının ifade ettiği gibi; limit soyut ve anlaşılması zor bir konu olduğu için analojilerle sunulmasının uygun olacağını söyledi. Bu soruya olumlu cevap verenlerden bazıları, analojilerin sadece limit konusu değil matematikteki her konuya uygulanabileceğini hayattaki pek çok olayın limite benzetilebileceğini söylerken, bazıları da limitte analojiler kullanmanın, somutlama yaparken insan davranışlarını ele almanın uygunluğundan söz etti. Nitekim, limit kavramı x bağımsız değişkeni ile bir sayıya eşit olmadan çok yaklaştığında f(x) fonksiyonunun “davranışının” ne olduğunun bilinmesidir (Baki, 2018). Fonksiyondaki bu davranışın insan davranışına benzetilmesi bu öğrencilerin analojik metafor oluşturduklarının da bir deliliydi. Öğrencilerin analoji kurmaya çalışmaları süreci limit konusunda kavramsal anlamaya yardımcı olmaktadır.

Bazı öğrenciler, limitin tanımı aşamasında analojilerin uygun olacağını ancak limitin tüm özellikleri ile ilgili analojiler bulmanın zor olacağını ifade etti. Bunun sebebi analoji hazırlarken çok uğraşıp zorlanmış olmalarıydı. Bunlardan biri (Ö10), çok araştırmasına rağmen limitle ilgili analoji bulamadığını söylemişti. Olumsuz düşünmesi bu konuda herhangi bir kaynağa ulaşamamasından kaynaklanmış da olabilirdi. Ayrıca ilköğretim 4.

Sınıftan sonra programların ağırlaşması, YKS gibi sınav sistemleri öğrencileri bu konularda cebirsel işlemler yapmaya alıştırırken analojik düşüncelerden uzaklaştırmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin, limit konusunun analojiye uygun bir konu olmadığını ifade etmeleri bu sebepten kaynaklanmış da olabilir. Öte yandan Ö21, limit konusunda analoji hazırlarken zorlandığını bunun sebebinin de hayal gücünü zorlamak olduğunu ifade etti. Nitekim matematik soyut bir bilim olduğundan hayal gücünü kullanmayı da gerektiren bir derstir. Eğitimde sisteminde değişimin ortak ürünleri olarak eleştirel, yansıtıcı düşünme, yapılandırmacı yaklaşım ve yaşam temelli öğrenme, yaratıcı düşünme, değişime açık olma ve hayal gücü de önemli bileşenler olarak yer almaktadır. Yaratıcı düşünme sürecinde değişime açıklık ve hayal gücü önemli belirleyicile olarak karşımıza çıkmaktadır (Çankaya, Yeşilyurt, Yörük ve Şanlı 2012). Tok (2008) hayal gücünü bireyin beden, duygu ve düşüncelerini bir noktaya odaklama ve bu unsurları birbirleriyle ilişkilendirme şeklinde tanımlamaktadır. Çankaya ve diğerleri (2012) ise yaratıcı düşünebilen nesillerin yetiştirilmesinde, yaratıcı düşünmeyi kazandırma yollarını iyi bilen, değişime açık ve hayal gücü gelişmiş öğretmen adaylarının yetiştirilmesi ile mümkün olduğuna dikkat çekmektedir.

Analoji hazırlamayı zor bulanlar sebep olarak limit konusunun soyut bir konu olduğu için somutlaştırmada ve birebir örtüşen örnekler bulmada çok zorlandıklarını hayal güçlerini zorladıklarını ifade ettiler. Bir öğrenci(Ö9) analojiyi hazırlamada zorlandığını söylerken her izlediği dizide, filmde, haber programlarında, yarışma programlarında ve sohbetlerinde analoji arama çabasında olduğunu ifade etti. Bu da analojilerin dünyayı görmeye, anlamaya ve keşfetmeye yönelik hayal gücüne dayalı yeni dünyayı yaratmada etkili bir araç ve materyal olduğunu göstermiştir.

Üzerinde işlem yapacakları, sınıf geçecekleri, belki ilerde iyi bir meslek edinmelerine yardımcı olarak kullanacakları matematiği işlemler yığını olarak görmeyi alışkanlık haline getirmiş öğrenciler günlük hayatla matematiğin ilişkisini bulmada elbette zorlandılar, yoruldular. İzledikleri filimde, dizide, haber programında yarışma programlarında analoji aramaları aslında onların matematikle günlük hayatı bağdaştırmaları, günlük hayatlarında matematiği kullanmaları ya da keşfetmeleri yönünde yaptıkları bir uğraştı. Talim ve Terbiye Kurulunca Kabul edilen ve 2006 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan yeni ilköğretim matematik programında da sadece kavramsal yaklaşıma odaklanan bir dersin matematik öğreniminde yeterli olmayacağı, soyut matematiksel kavramları oluşturabilmede somut materyaller ve yaşama ilişkin modellerinin kullanılması gerektiği belirtilmiştir (Yenilmez ve Uysal, 2007). Bu bağlamda analojiler öğrencilere yeni bir keşif olanağı sunmaktadır. Bu keşif günlük hayatta matematiği bulmayla sonuçlanacak bir keşiftir. Öğrenciler izledikleri dizide, filimde, yarışma programlarında ve sohbetlerinde limit arıyorlarsa bu onların hayatı matematikleştirme çabalarını da gösterir. Matematikle hayat arasındaki ilişkiyi bulup köprüyü kuran öğrenciye o köprüden geçip yeni alanlar keşfetmesi kalır. Demek ki analojiler hayatla matematik arasındaki geçişi sağlayan bir köprülerdir diyebiliriz.

Analojileri öğretmen olduğunuzda kendi sınıfınızda uygulayabilir misiniz? Sorusuna genellikle evet cevabını veren öğrenciler *önce öğretmen uygun analojiler hazırlamalı sonra öğrencilerinden istemeli*. (Ö25) diyerek ortaokul öğrencilerinin analoji hazırlayamayacaklarını ancak öğretmen analojiler hazırladıktan sonra öğrencilerden analojiler isteyebileceğini dile getirdi. Diğer öğrencilerde de benzer görüşler hakimdi. (Ö26,Ö28,Ö29). Öğrencilerin hayal gücü analoji hazırlamak için yeterli olamayacağı (Ö4), kavram yanılgısını tespit etmede değil de konunun başında (Ö11, Ö20) uzmanların hazırlayıp öğrencilere analojiler sunmaları gerektiği (Ö12, Ö13, Ö14), önce öğretmen hazırlamalı sonra öğrencilere hazırlatmalı ve öğrenciler hazırlarken öğretmen rehber olmalı (Ö9, Ö25, Ö26, Ö28, Ö29) şeklinde ortak görüşler arasında yer aldı.

Gruplarla yapılan mülakatlarda tüm grup üyelerinin görüş ayrılığına düşmeden hepsinin aynı kanıya vardığı ortak görüşleri analojilerin ilköğretim öğrencileri için faydalı olacağı ile ilgiliydi. Bu konuyla ilgili olarak bir öğrenci (Ö10); *öğrencinin kafasında bir şema oluşturulmasına yardımcı olur derken*, başka bir öğrenci (Ö9); *Öğrenciler matematik konularının günlük hayatla ilişkisini göremiyorlar. Gördükleri zaman konuya daha çok ilgi duyarlar ve öğrenmeleri kolay olur.* Diyerek görüşünü bildirdi. Bazı öğrenciler, İlköğretim öğrencilerinin analojilerle konuyu daha iyi öğreneceğini (Ö8, Ö22), analojilerin öğrenmede kalıcılığı arttıracağını (Ö25), yaparak yaşayarak öğrenme fırsatı bulabileceğini, araştırma becerilerinin gelişeceğini, öğrenmenin daha hızlı ve kolay olacağını, bilgiye kendi ulaşacağı ve kuracağı için anlamasının kolay olacağını(Ö14) ifade ettiler. İlköğretimde analoji kullanılmasının faydalı olacağını söyleyen öğrencilerden biri (Ö19); *Öğrenciler analoji hazırlarken konuyu daha iyi öğrenir* diyerek görüşünü bildirdi. Bazı öğrenciler (Ö16, Ö17, Ö18, Ö19); İlköğretim öğrencileri için soyut olan konuların somutlaştırılması açısından etkili bir uygulama olduğunu söylerken bir öğrenci (Ö22); *Öğrencilerin günlük hayatla ilişkili analojiler görünce konuyu daha çok sevip ve daha kolay öğrenebileceğini* ifade etti. Aynı öğrenci (Ö22); *limit süreklilik türev ve integral gibi konularda analojiler hazırlanırsa konuların ilginçliği artar. Öğrencilere bu konular daha sevecen gelir. Daha iyi öğrenirler* şeklinde düşüncesini ifade etti. Dwirahayu, Mubasyiroh ve Mas'ud (2017) anlojilerin kullanıldığı günlük hayat temsillerin türev konusunun öğretilmesinde etkili olduğu sonucunu ortaya çıkarmış ve analojilerin matematik öğretiminde kullanılmasının önemini vurgulamıştı.

Başka bir öğrenci (Ö11) ise; analojilerle öğrenmenin öğrenciler içi "*dikkat çekici*" olacağını belirtti. Öğrencilerin tüm bu cevaplarından anlaşıldığı üzere ilköğretim öğrencileri için analoji kullanmak; dersi sevmesi, dikkat çekmesi, günlük hayatla ilişki kurması, kalıcı, daha hızlı ve kolay öğrenmesi bakımından faydalı olacaktır. Literatüre baktığımızda analojilerin kavramlara karşı öğrenci ilgilerini arttıracağına dair görüş birliğine varılan çalışmalar mevcuttur (Glynn, 2008) Yine öğretmen adaylarıyla yapılan bir çalışmada analojilerin tutumları olumlu yönde arttırdığı yönünde ortaya çıkan sonuçlara da rastlamaktayız (Paris and Glynn, 2004).

Tüm öğrenciler; analojilerin kavram öğretiminde etkili olacağı yönünde görüş birliğine vardı. Bu sonuç literatürdeki bazı çalışmalarca (Bilgin ve Geban 2001; Friedel, Gabel ve Samuel, 1990; Şenpolat, 2005; Glynn, Law, Gibson, ve Hawkins, 1996; Kaptan ve Arslan 2002; Treagust vd., 1992; Wong, 1993) desteklenen bir sonuçtur.

Yapılan mülakatlarda öğrencilerin birçoğunda; konunun öğretilmesi aşamasında öğretmenin hazırlayacağı analojilerin önce kullanılması, daha sonra öğrencilerden kendi analojilerini hazırlamaları gerektiği yönünde görüş birliğine varıldığı görüldü. Bir öğrenci (Ö27) *limit konusu analoji hazırlamak için* zor bir konu olduğunu ve somutlaştırılamayacağını anlatmaya çalışıyordu. Bu öğrenci limitte analojiler kullanılması konusunda ümitsizdi. Öğrencilerden analoji istenmemesi gerektiğini ifade eden iki öğrenciden biri (Ö10) lise düzeyindeki *öğrenciden analoji istemek vakit kaybı olur* derken, başka bir öğrenci (Ö4) *İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin analoji hazırlamalarında hayal güçleri yeterli olmayabilir* diyerek öğrencinin analoji hazırlamada başarısız olacağını ve bu konuda öğrenciye güvenemeyeceğini dile getiriyordu. Bazı öğrenciler (Ö26, Ö28 ve Ö29) de, *ilköğretim öğrencilerine analoji hazırlatılmalı, öğrenci analoji hazırlarken de öğretmen ona rehberlik etmeli* derken, fazla ümitsiz olmadığı öğretmenin yardımıyla öğrencinin analoji hazırlamada başarılı olabileceğini anlatmaya çalışıyordu.

Bir öğrenci (Ö5); *Hazırlık yapılmadan doğaçlama ile analoji oluşturulması kavram yanılgılarını daha iyi tespit ederdi* derken öğretmen olduğunda öğrencilerine doğaçlama ile analojiler yaptıracağını ve böylelikle kavram yanılgılarını daha kolay tespit edebileceğine inandığı sonucunu çıkarabiliriz. Sonuçta öğrencilerin drama tekniği ile kavram yanılgılarının önlenebileceğine dair literatürde bazı bulgulara da rastlamaktayız (Başkan, 2006; Özen, Gül ve Gülaçtı 2008). Ayrıca, Kulak (2006), analojilerle drama yapılmasının konuyu daha iyi öğrenmede fayda sağlayacağını da belirtmiştir.

Özetle, mülakatlarda öğrencilerin çoğu, analoji destekli diyalojik yaklaşımla işlenilen derslerin güzel ve etkili bir ders olduğu yönünde görüş bildirdi. Öğrenciler limitin "yaklaşan değer" ve "yerine yazma" anlamı ifade eden bir kavram olduğunu düşündüklerini ancak uygulamalardan sonra civar analojisi ile limitin daha anlamlı olduğunu ve daha iyi anladıklarını ifade ettiler. Öğrencilerin büyük çoğunluğu anaojilerin kavram yanılgılarını gidermede etkili olacağını ifade ederken bazı öğrenciler kavram yanılgıları analojilerle giderilebilir de giderilemez de diyerek bu konudaki çift yönlü düşüncesini dile getirdi. Bazı öğrenciler ise, analojilerin kavram yanılgılarını gidermeden daha çok konuyu öğretirken destekleyici olarak analojilerin kullanılması gerektiğini ifade ettiler. Yine bazı öğrenciler, limitin tanımı aşamasında analojilerin uygun olacağını ancak limitin tüm özellikleri ile ilgili analojiler bulmanın zor olacağını ifade etti. Öğrenciler limitten başka bazı konuların analoji için uygun olacağını ve başka konularda analoji hazırlamanın gerektiğini ifade ettiler. Bu konular fonksiyonlar, sayılar konusu, dört işlem, mutlak değer konusu, denklemler, işci ve havuz problemleri, türev ve integral gibi konulardı. Öğrenciler ilköğretim öğrencileri için analojilerin "*dikkat çekici*" olacağını belirtti ve ilköğretim öğrencileri için analoji kullanmak; dersi sevmesi, dikkat çekmesi, günlük hayatla ilişki kurması, kalıcı, daha hızlı ve kolay öğrenmesi bakımından faydalı olacaktır şeklinde görüş bildirdi. Bazı öğrenciler ortaokul öğrencilerine analoji hazırlatmada öğretmenin rehberliğinin gerekliği olduğunu öğretmen rehberliği ve yardımı olmadan ortaokul öğrencilerine analoji hazırlatmamaları gerektiği bazı öğrenciler ise ortaokul öğrencilerine hazırlık yaptırılmadan doğaçlama ile analoji hazırlatmaları gerektiğinin kavram yanılgılarını tespit etmede büyük kolaylık sağlayacağını ifade ettiler. Sonuç olarak üniversite öğrencilerin analoji hakkındaki görüşleri olumluydu ve ilköğretim öğrencileri için analojileri faydalı olacağını ancak öğretmen rehberliğinde öğretmen yardımıyla analojiler hazırlamalarının daha etkili olacağını bildirdiler.

Bu bölümde öğrencilerle yapılan odak görüşmeleri, öntest-sontest başarı durumları ve limit konusuyla ilgili analoji hazırlama yeterlilikleri tartışıldı. Bundan sonraki bölümde sonuçlar üzerinde durulacak ve öneriler sunulacaktır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan çalışmanın bulgularına bakıldığında öğrenci mülakatlarına gözlemlere, sunulara ve başarı testi sonuçları dayanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

6. 1. Sonuçlar

6. 1. 1. Analoji Destekli Diyalojik Yöntem ile Öğretilen Limit Konusunun Öğrenci Başarılarına Etkisi ile İlgili Sonuçlar

Üniversite düzeyinde öğrencilerde mutlak değer sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerin olması mutlak değer konusunda hala bilgi eksikliği olduğunu ortaya çıkarmıştır.

1. Çoğu öğrencinin limitin formal tanımında kullanılan Ɛ, δ sembollerini anlamamaktan kaynaklı hataların olduğu ancak derslerden sonra büyük çoğunluğun bu hataları giderdiği ortaya çıkmıştır.
2. ∞ kavramının anlaşılamaması ve işlemlerde kullanılamaması yanılgısı bu çalışmada da görülmüş ancak derslerden sonra büyük çoğunluğun bu zorluğun üstesinden geldiği ortaya çıkmıştır.
3. Yığılma noktası kavramı ilk sınavda doğru cevap verilemeyen bir soru iken son sınavda büyük çoğunluğun doğru cevap vermesi kavramın anlaşılmasına bağlanmakta ve sonuç olarak analoji destekli diyalojik yöntemiyle işlenen derslerin kavram öğreniminde etkili olduğu sonucunu ortaya çıkarmaktadır.
4. Öğrencilere yapılan ön-son test sonucunda öğrencilerin başarılarında ortaya çıkan artış analoji destekli diyalojik yöntemi ile ders işlemenin kavram öğretiminde etkili olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır.
5. Fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerektiği şeklindeki yanlış algı derslerden sonra değişmiş yığılma noktası ile o noktada tanımlı olması arasındaki fark anlaşılmıştır.
6. Öğrenciler limit konusunda işlemsel bilgilerine kavramsal bilgilerinden daha çok önem vermekte ve yerine yazma (görüntüsünü bulma) eylemiyle limiti sonuçlandırmakta idiler. Ancak derslerden sonra epsilona bağlı delta bulma, civardan hareketle değişkenden küçük ve büyük olan aralıkta limit arama gibi eylemlerde başarılı oldukları ortaya çıkmıştır.

7. Özetle, geleneksel öğretim stratejilerinden farklı olarak limit konusunda hazırlanan analoji destekli sokratik diyalojik yöntemi üniversite öğrencilerinin limit konusunda başarılarının artmasında etkili olmuştur.

6. 1. 2. Limit Konusunda Analoji Hazırlamada Üniversite Öğrencilerinin Yeterliliği ile İlgili Sonuçlar

1. Analoji destekli diyalog yöntemiyle öğrencilerin günlük hayatla matematiğin ilişkisini kurmalarında yardımcı olmuştur. Öğrenciler analoji kurmakla günlük hayatla limit arasında bağ kurmayı düşünmüşler ve verdikleri örneklerle analiz ve sentez yapma imkanı bulmuşlardır.
2. Öğrenciler limit konusuyla ilgili analoji kurma çalışmaları yaparken araştırma yapmışlardır. Bu durum onların araştırma becerilerini geliştirmelerine fırsat vermiştir.
3. Öğrencilerin analojiler hazırlamaları onların kavramsal bilgilerinin ölçülmesine imkan sağlamıştır.
4. Öğrencilerin hazırladıkları analojileri sınıfta sunmaları sınıf ortamının atmosferini daha eğlenceli ve canlı hale getirmiştir.
5. İki haftalık bir sürede bu analojileri bulup hazırlamışlar ve sınıfta sunmuşlardır. Öğrencilerin hazırladığı bu analojiler onların ilgi ve beklentilerinden ziyade duyuşsal ve bilişsel potansiyellerini de ortaya çıkarmıştır. Bazı grupların analojilerinde mantıksal-matematiksel analojiler hakim iken, bazı analojilerde çaresizlik bazı analojilerde hayalcilik, bazı analojilerde doğanın, bazılarında sporculuğun, bazılarında ise duygusallığın hakim olduğu ortaya çıktı. Bu durumda, analojilerin öğrenmede, öğretmede ve değerlendirme aşamasında kullanılabileceği gibi öğrencilerin bireysel farklılılarını ve ne tür zeka alanına sahip olduklarını tespit etmede de kullanılabilecek etkili bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz.
6. Analojilerin anlaşılması ve analojiler hazırlamada öğrenci yaratıcılığı ve hayal gücünün önemi bu çalışmayla ortaya çıkmıştır. Öğrenciler analoji hazırlamak için film, dizi izleyip, mit ve hikayeleri okuyup araştırma yapmışlardır. Bu durum öğrencileri araştırma yapmaya, yaratıcı düşünme ve hayal gücünü kullanmaya teşvik etmiştir.

6. 1. 3. Öğrencilerinin Limit Konusunda Analoji Hazırlama ile İlgili Görüşlerinin Tespit Edilmesiyle Ortaya Çıkan Sonuçlar

1. Öğrenciler kendileriyle yapılan mülakatlar sonrasında kendi sınıflarında analoji uygulayacaklarını söylemişlerdir. Analoji destekli öğretim öğretmen adaylarına öğretmen olduklarında öğrencilerine uygulayacak deneyimi kazandırmada etkili olmuştur.
2. Öğretmen adayları analojilerin öğrencileri için faydalı olacağı inancını geliştirmişlerdir. Hem kavram öğretiminde hem de kavram yanılgılarını gidermede analojilerin etkili olacağını düşünmektedirler. Ancak limit konusunun soyut ve zor olması nedeniyle öğrencilerinin analojiler hazırlamada zorlanacaklarını mutlaka yardım destek almaları gerektiğini söylemeleri öğrencilerinin ancak öğretmen desteğiyle analojiler hazırlamayı başaracaklarına inandıklarını ortaya koymuştur.
3. Derslerden önce öğrenciler limitin “yaklaşan değer” ve “yerine yazma” anlamı ifade eden bir kavram olduğunu düşündüklerini ancak uygulamalardan sonra civar analojisi ile limitin daha anlamlı olduğunu ve daha iyi anladıklarını ifade ettiler. Öğrenciler derslerin analoji ile işlenmesini ve civar analojisinin limit öğretilirken kullanılmasını etkili buldular.
4. Öğrenciler limitten başka bazı konuların analoji için uygun olacağı ifade ettiler. Bu konular fonksiyonlar, sayılar konusu, dört işlem ve mutlak değer konusu, denklemler İşci ve havuz problemlerinde yol-zaman problemleri, türev, integral gibi konulardı. Buradan öğrencilerin, limit gibi soyut ve zor bir konuda analoji hazırlayabildiklerine göre bu konularında da analojiler hazırlanabileceği ve hazırlanması gerektiği inancına vardıkları oraya çıkmıştır.
5. Öğrencilerin analoji kurmaya çalışmaları ve başarmaları, limit konusunu kavramsal anlamaya yardımcı olduğunun bir göstergesidir. Öğrenciler analoji bulmak için araştırma yapmış, çalışmış ve gayret göstermiştir. Öğrencilerin bu gayret ve mücadelesine sebep olan analoji hazırlama ve sunma etkinliğiydi. Dolayısıyla analoji destekli öğretimin öğrencileri araştırmaya incelemeye sevk ettiği ve kavramsal araştırmalar içine girdikleri için bu sürecin onların kavram anlamaya yardımcı olduğu söylenebilir.
6. Limit konusunda analoji hazırlamada üniversite öğrencilerinin yeterli olduğu ancak rehberlik yapılarak geliştirilmelerinin gerektiği ortaya çıkmıştır.
7. Limit konusunda hazırlanan analojilere karşı üniversite öğrencilerinin görüşleri genel olarak olumlu olduğu, öğretmen olduklarında kendi sınıflarında analoji ile

ders işleyebilecekleri ancak öğrencilerine yardım rehberlik yapılarak analojiler hazırlatmaları gerektiği konusunda hemfikir oldukları tespit edilmiştir.

6. 2. Öneriler

Bu çalışmanın amacı limit konusunda yer alan kavramlarla ilgili ilköğretim matematik öğretmen adayları için alternatif kavramları dikkate alan ve analoji destekli diyalojik yöntem ile limit konusunun öğretilmesidir.

Bu çalışmada varılan sonuçlar bir önceki bölümde sunulmuştu. Bu sonuçlar değerlendirilerek daha sonraki çalışmalara ışık tutması için iki ayrı başlık altında öneriler sunulmuştur.

6. 2. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

1. Limit konusu anlatılırken artık "lim" ifadesi yerine "Civar" ifadesinin kullanılması bu çalışmanın en önemli önerisidir. Ayrıca ε yerine "istenildiği kadar küçük pozitif sayı olarak ε", "istenildiği kadar büyük pozitif sayı olarak M, ε ve M ye bağlı çok küçük pozitif sayı olarak δ, ε ve M ye bağlı çok büyük sayı olarak da N notasyonlarının kullanılması diğer bir önemli öneridir
2. Matematik öğretmen adayları yetiştirilirken ön kavramları ve alternatif kavramları tespit edilmeli ve bunların yanılgıların giderilmesinde ve öğretimde etkili oldukları bu çalışmada da kullanılan analojiler kullanılabilir.
3. Matematik öğrencilerine araştırmacı tarafından hazırlanan analojiler gösterildikten sonra kendilerinden konu ile ilgili analojiler hazırlamaları istendi. Bu analojiler araştırmacıya öğrencileri değerlendirme fırsatı sağladı. Öğrenciler oldukça başarılıydı. Analojiler öğrencilerin kavramsal bilgisini ölçmede kullanılabilir.
4. Analojiler soyut kavramlardan somut kavramlara geçişi sağlamada ve matematiği günlük hayatla ilişkilendirmede etkili olarak kullanılabilir.
5. Analojiler ilköğretim 1. 2. kademe ve ortaöğretim öğrencileri için faydalı olacağı düşünülmektedir. Analojiler öğretmenler tarafından uygulanmalı ve öğrencilere analojiler hazırlatılmalıdır.
6. Analojiler eğitim öğretim sürecinde matematiksel kavramların öğretilmesinde kullanılmalıdır.
7. Analojiler oyun-drama gibi etkinliklerle desteklenmesinin ilköğretim öğrencileri için daha faydalı olacağı düşünülmektedir.

8. Benzer çalışmaların ders dönemi içinde değil de sömestr veya yaz tatilinde olmasının ve katılımcı öğrencilerin çalışma için gönüllü olmasının daha yararlı olacağı düşünülmektedir

6. 2. 2. İleride Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler

1. Analojilerin kullanılması ile gerçekleştirilen diyalojik yönteme dayalı öğretimin ön kavram ve alternatif kavramlarda kavramsal değişimde etkili sonuçlar verdiği, analojilerinde kavram öğrenimi ve matematiksel kavramların günlük hayatla ilişkilendirilmesi ile ilgili etkili sonuçlar verdiği göz önüne alındığında, matematikteki diğer konularla ilgili olarak da analojiler tasarlanıp etkinliği araştırılmalıdır.
2. Analojiler fonksiyonlar, mutlak değer, denklemler, süreklilik, türev, integral gibi konular içinde kullanılmalıdır.
3. Sonuçta bu yöntem; öğrencilerin bireysel farklılılarını ve ne tür zeka alanına sahip olduklarını tespit etmede de kullanılabilecek etkili bir yöntem olduğunu gösterdi. Analojiler öğrencilerin bireysel farklılıklarını ve zeka türlerini (Çoklu zeka kuramına göre) tespit etmede kullanılabilir
4. Okullarda öğrencilerin ön bilgilerinin yetersizliğini ortaya koyabilecek, ön kavramlarını ve alternatif kavramlarını giderebilecek ve analojiler hazırlayarak öğretim etkinliklerinin planlanmasında birinci derecede sorumlu olan öğretmenlerdir. Bu nedenle, öğretmenlerin öğrencilerde kavramsal değişim meydana gelmesini ve öğrenmeyi kolaylaştıran öğretim yöntemlerinden (Analoji destekli kavram değişim metinleri gibi) haberdar olmaları gereklidir. Dolayısıyla, öğretmen adayları Eğitim Fakültelerindeki eğitimleri sürecinde bu yöntemlerle ilgili olarak yeterince eğitmelidir. Aynı zamanda, Eğitim Fakülteleri metot veya seçmeli dersleri içeriğinde analoji destekli diyalojik yöntemine de yer vererek öğretmen adayları eğitilmelidir.
5. Analojilerin hazırlanması profesyonellik isteyen bir iştir. Bu nedenle Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olan okullarda çalışan öğretmenler hizmet içi eğitim seminerlerine alınarak, analojilerin hazırlanması ve kullanılması konularında bilgilendirilmelidirler.
6. Öğretmen adaylarının günlük hayatta edindikleri kavram yanılgılarını, ilköğretim ve lise eğitimleri sürecinde edindikleri alternatif kavramlarının birçoğunun değiştirmeksizin üniversite öğretim ortamına taşıdıkları dikkate alındığında, İlköğretim ve Ortaöğretim kademelerinde öğrencilerin ön kavramlarını ve kavram yanılgılarını değiştirilmesine yönelik çalışmaların yeterince etkili

olmadığı anlaşılmaktadır. Bu yüzden bu kademelere yönelik daha etkin çalışmaların yürütülmesi gerekmektedir

7. Milli Eğitim Bakanlığının desteklediği ilköğretim ve ortaöğretim ders kitaplarına analojilerin entegre çalışmaları yapmalıdır
8. Analojilerle öğretimi çoklu zeka kuramıyla ilişkilendirilerek yeni bir çalışma yapılabilir.
9. Analojiler fonksiyonlar, mutlak değer, denklemler, süreklilik, türev, integral gibi konular için yapılıp etkililiği araştırılabilir.
10. Analoji destekli diyalojik yönteme yönelik öğretmen görüşleri alınabilir.
11. Analojilerin ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin başarılarını geleneksel yönteme kıyasla nasıl değiştireceği araştırılabilir.
12. Analojilerin, yaratıcılık ve hayal gücü ile arasında güçlü bir ilişki olduğu düşünülmektedir. Analojilerin anlaşılması ve geliştirilmesi ile yaratıcılık ve hayal gücü arasında nasıl bir ilişki olduğu araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

Akbaş, E. E. (2016). *Meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli ortamda "limit-süreklilik" konusundaki öğrenmelerinin solo taksonomisine göre değerlendirilmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akbulut, G. (2004). Coğrafya ve aktif öğrenme yöntemleri. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, *6*(1), 65-77.

Akbulut, G. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13*(2), 497-512.

Akçay, N.O., Akçay, A ve Kurt, M. (2016). Ortaokul öğretmenlerinin öğretim yöntem ve tekniklerine yönelik görüş ve yeterliklerinin incelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *5*(1), 333-342.

Akdeniz, A.R., Devecioğlu, Y. ve Ayvacı, H.Ş. (2004). Okul öncesi öğretmen adaylarına fen bilgisi öğretiminde rehber materyal geliştirme becerileri kazandırmak için bir yaklaşım. *D.E.Ü. Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *18*, 64-72.

Alexander, R.J. (2008). *Towards dialogic teaching: rethinking classroom talk (4th edition) Dialogos*. Northallerton North Yorkshire: Dialogos UK Ltd.

Altınsoy, B. (2007). *Takım-oyun turnuvaları tekniğinin ilköğretim dördüncü sınıf öğrencilerinin matematik dersindeki akademik başarısı, kalıcılık ve matematiğe ılişkin tutumları üzerindeki etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Altun, M. (2008). *İlköğretim ikinci kademede matematik öğretimi.* Bursa: Aktüel Yayıncılık.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S ve Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramlarının Künyesi*. Ankara: Gazi Kitapevi.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11.sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, *35*(156), 17-31.

Aubusson, P. J., Harrison, A.G. and Ritchie, S. M. (2006). *Metaphor and analogy in science education*. Netherlands: Springer

Ayas, A., ve Demirbaş, A. (1997). Turkish secondary students' conception of ıntroductory chemistry concepts. *Journal of Chemical Education*, *74*(5), 518-521.

Ayas, A., Karamustafaoğlu, S., Cerrah, L. ve Karamustafaoğlu, O. (2001, Haziran). *Fen bilimlerinde öğrencilerdeki kavram anlama seviyelerini ve yanılgılarını belirleme yöntemleri üzerine bir inceleme.* X. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi'nde sunulan bildiri, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Aydın, M ve Kutluca, T. (2010). 12. sınıf öğrencilerinin süreklilikle ilgili sahip oldukları kavram yanılgılarının incelenmesi. *E-Journal of New World Sciences Academy*, *5*(3), 687-701.

Aydın, M. (1998). *Müslümanların hıristiyanlara karşı yazdığı reddiyeler ve tartışma konuları*. Ankara: TDV Yayıncılık.

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi.* Ankara: Pegem Akademi.

Baki, A. (1996). Okul matematiğinden ne öğretelim, nasıl öğretelim? *Milli Eğitim Dergisi*, *130*, 72-76.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik*. İstanbul: Tübitak Bitav-Ceren Yayınları.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Trabzon: Derya Kitabevi.

Baki, A. (2014). *Matematik tarihi ve felsefesi*. Ankara: Pegem Akademi.

Baki, M. ve Çekmez, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *3*(2), 81-98.

Baki, A. ve Güç, F. A. (2014). Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin devirli ondalık gösterimle ilgili kavram yanılgıları. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 176-206.

Balcı, M. (1997). *Matematik analiz cilt II*. Ankara: Balcı Yayınları.

Barak, B. (2007). Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions at Spanish High Schools. In beyond the apparent banality of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 235-268.

Başkan, H. (2006). *Fen ve teknoloji öğretiminde drama yönteminin kavram yanılgılarının giderilmesi ve öğrenci motivasyonu üzerine etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487-500.

Biber, A. Ç. (2010). *Ortaöğretim matematġk öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bilgin, İ. ve Geban, Ö. (2001). Benzeşim (analoji) yöntemi kullanılarak lise 2. sınıf öğrencilerinin kimyasal denge konusundaki kavram yanılgılarının giderilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*, 26-32.

Bingölbali, E. ve Özmantar, M.F. (2010). *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (2. baskı). Ankara: Pegem Kitapevi.

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Büyüköztürk, Ş. (2002). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. Ankara: Pegem A yayıncılık.

Canpolat, N. ve Pınarbaşı, T. (2002). Fen eğitiminde kavramsal değişim yaklaşımı-I: teorik temelleri. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10* (1), 59-66.

Cashin, W. E. (2010). *Etkili öğretim klavuz serisi no:46*. Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi Öğrenme ve Öğretmeyi Geliştirme Merkezi.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Boston: Kluwer.

Coşkun, V. ve Çetin, D. (2007, Kasım). *Yapılandırmacı öğrenme sürecinde öğretmen-kılavuz kitap ilişkisi*. IV. Ulusal Eğitimde Yeni Yönelimler Sempozyumu'nda (Yapılandırmacılık ve Öğretmen) sunulan bildiri, Özel Tevfik Fikret Okulları, Ankara.

Coştu, B., Karataş, F.Ö. ve Ayas, A. (2002, Eylül). *Kavram yanılgılarının giderilmesinde çalışma yapraklarının kullanılması*, XVI. Ulusal Kimya Kongresi'nde sunulan bildiri, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Cruz-Hastenreiter, R. (2015). Analogies in high school classes on quantum physics. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, *167*, 38-43.

Çankaya, İ., Yeşilyurt, E., Yörük, S. ve Şanlı, Ö. (2012). Öğretmen adaylarında yaratıcı düşünmenin yordayıcısı olarak değişime açıklık ve hayal gücü. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 5*(2), 46-62.

Çepni, S. (2001). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş*. Trabzon: Üçyol Kültür Merkezi Yayınları.

Çetin, Ö. F., Dane, A. ve Bekdemir, M. (2012). Yığılma noktası kavramı ve kullanımı. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, *6*(2), 217-233.

Davis, R. B. and Vinner, S. (1986). The Notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 281–303.

Demetgül, Z. (2018). *Teknoloji donanımlı bir sınıfta mutlak değer konusunun öğretiminden yansımalar: Aksiyon araştırması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Demirci, F. (2007, Eylül). *İki siyasal eğitim modeli: Sokrates ve Platon'un eğitim ve insan anlayışları (Sokratik ve Platonik Eğitim)*. 38. Uluslararası Asya ve Kuzey Afrika Çalışmaları Kongresi'nde sunulan bildiri, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı, Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Kurumu, Ankara.

Demircioğlu, H., Demircioğlu, G. ve Ayas, A. (2004). Kavram yanılgılarının çalışma yapraklarıyla giderilmesine yönelik bir çalışma. *Milli Eğitim Dergisi, 163*, 1-13.

Demircioğlu, G., Özmen, H. ve Ayas, A. (2001, Eylül). *Kimya öğretmen adaylarının asitler ve bazlarla ilgili yanlış anlamalarının belirlenmesi*. Yeni Binyılın Başında Türkiye'de Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildiri, Maltepe Üniversitesi, İstanbul.

Dilber, R. (2006). *Fizik öğretiminde analoji kullanımının ve kavram değişim metinlerinin kavram yanılgılarının giderilmesine ve öğrenci başarısına etkisinin araştırılması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Dilber, R. ve Düzgün, B. (2008). Effectiveness of analogy on students' success and elimination of misconceptions. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(3), 3.

Dönmez, G. (2009). *Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin öğretim programı bilgisi bağlamında incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Dubinsky, E., Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behaviour*, *15*(2), 167-192.

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, *75*(6), 649-672.

Duman, A. ve Coşkun, T. O. (2014, Eylül). *Öğretmen adaylarının matematik öğretiminde analoji kullanımı hakkındaki görüşleri*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitmi Kongresi'nde sunulan bildiri, Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Adana.

Dursun, Ş ve Dede, Y. (2004). Öğrencilerin matematikte başarısını etkileyen faktörler. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(2), 217-230.

Duru, N. (2002). *Fizik dersinde analoji kullanmanın öğrenmeye ve öğrenci başarısına etkilerinin araştırılması* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Dwirahayu, G., Mubasyiroh, S. M. and Mas'ud A. (2017). The effectiveness of Teaching with Analogy on Students' Mathematical Representation of Derivative Concept. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, *115*, 57-60.

Efe, S. (2018). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin matematik öğretiminde kullandıkları analojilerin incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak.

Ekici, F., Ekici, E. ve Aydın, F. (2007). Utility of concept cartoons in diagnosing and overcoming misconceptions related to photosynthesis. *International Journal of Environmental & Science Education*, *2* (4), 111- 124.

Enderson, M. C. (1997). Old problems, new questions: using technology to enhance math education. *Learning and Leading With Technology*, *25*(2), 28-32.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning analogies, metaphors and images*. London: Lawrence Erlbaum.

English, L. D. and Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: models and processes*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. ve Ersoy, B. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, *34*(152), 45-59.

Ergün, M. ve Ali, Ö. (1997). *Öğretim ilke ve yöntemleri*. İstanbul: Kaya Matbaacılık.

Eryılmaz, A. ve Sürmeli, E. (2002, Eylül). *Üç – aşamalı sorularla öğrencilerin ısı ve sıcaklık konularındaki kavram yanılgılarının ölçülmesi.* V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Evrenosoğlu, D. (2012). Sokratik diyaloglarda mit ve işlevleri. *Felsefe ve Sosyal Bilimler Dergisi*, *13*, 145-163.

Fretzin, L. (2001). *Using metaphors in teaching*. Retrieved February 24, 2018 from http:lrs.ed.uiuc.edu/students/fretzin/ EPL11q5Metaphors.htm

Friedel, A. W., Gabel, D. L. and Samuel, J. (1990). Using understanding? *School Science and Mathematics*, *90*, 674- 682.

Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science,* 7, 155-170.

Glynn, S. M. (1989). The teaching-with-analogies (TWA) model: explaining concepts in expository text. In Muth, K, D. (Ed.), *Children's comprehension of text: research into practice* (pp. 185-204). Newark, DE: International Reading Association.

Glynn, S.M. and Takahashi, T. (1998). Learning from analogy-enhanced science text. *Journal of Research in Science Teaching*, *35*(10), 1129–1149.

Glynn, S. M. (2008). Making science concepts meaningful to students: Teaching with analogies. In S. Mikelskis-Seifert, U. Ringelband, & M. Brückmann (Eds.), *Four decades of research in science education: From curriculum development to quality improvement* (pp. 113-125). Münster, Germany: Waxmann.

Glynn, S., Law, M., Gibson, N. and Hawkins, C. (1996). *Teaching science with analogies: a research for teachers and text book authors, effectiveness of analogy on students' success and elimination of misconceptions*. Retrieved February 24, 2018 from http://curry.edschool.virginia.edu/go/clic/nrrc/html

Gömleksiz, M. (1997). *Kubaşık öğrenme: Temeleğitim dördüncü sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ve arkadaşlık ilşkileri üzerine deneysel bir çalışma*. Adana: Baki Kitabevi.

Gürbüz, M. Ç. ve Ağsu, M. (2017). Dialogic teaching model for ninth class students to conceptualize ınequalities. *Journal of Education and Practice*, *8*(28), 171-187.

Gürdal, A., Şahin, F. ve Çağlar, A. (2001). *Fen eğitimi: ilkeler, stratejiler ve yöntemler*. İstanbul: Marmara Üniversitesi Yayınları.

Güveli, E. (2015). Prospective elementary mathematics teachers' problem posing skills about absolute value. *Turkish Journal of Teacher Education, 4*(1), 1-17.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). *İlköğretim 1-5 matematik öğretimi: Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme*. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Harrison, A. G. and Coll, R. K. (2008). *Using analogies in middle and secondary science classrooms: The FAR guide an interesting way to teach with analogies*. CA: Thousand Oaks.

Hofe, R. V. (1998). Probleme mit dem grenzwert-genetische begriffsbildung und geistige hindernisse-eine fallstudie aus dem computergestützten analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *1*, 35.

Hoyless, C., Noss, R. and Sutherland, R. (1991). *The ratio and proportion microworld* (Final Report of the Microworlds Project, No: III). University of London, Institute of Education, London.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students* (Unpublished master's thesis). University of South Africa. Africa.

Kabaca, T. (2006). *Limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebir sistemlerinin etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kabael, T., Barak, B. ve Özdaş A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, *5*(1), 88-114.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2011). *Genel Matematik* (6. baskı). Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınları.

Kanalmaz, T. (2010). *İlköğretim 8. sınıf matematik dersi ölçme öğrenme alanında analoji yöntemine dayalı öğretimin öğrencilerin akademik başarılarına etkisi*

(Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kantarcı, Z. (2013). Sokrates ve eğitim felsefesi. *Mavi Atlas Edebiyat Fakültesi Dergisi*, *1*, 78-90.

Kaptan, F. ve Arslan, B. (2002, Eylül). *Fen öğretiminde soru-cevap tekniği ile analoji tekniğinin karşılaştırılması*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

King, P. J. (2003). *Matematik sanatı*. Ankara: Tübitak popüler bilim kitapları.

Knezek, G. (2004). *Computers in education worlwide: ımpact on students and teachers* (Unpublished master's thesis). University Of North Texas Denton, Texas USA.

Kula, S. ve Bukova, G. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının derslerinde kullandıkları limit kavramına özgü öğretim stratejileri. *Millî Eğitim Dergisi*, *44*(206), 160-186.

Kulak, Ö. (2006). *Eğitimde drama*. www.tiyatrom.com/egitimde_drama_7.htm adresinden 27 Aralık 2018 tarihinde erişilmiştir.

Küçükturan, G. (2003). Okul öncesi fen öğretiminde bir teknik: Analoji. *Milli Eğitim Dergisi*, *157*, 16-21.

Lehesvuori, S. (2013). *Towards dialogic teaching in science, challenging classroom realities through teacher education* (Unpublished doctoral dissertation). Jyväskylä Studıes In Educatıon, Psychology And Socıal Research, Faculty of Education of the University of Jyväskylä.

Lauten, A. D., Graham, K. J. and Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 225–237.

McCoy, L. P. (1996). Computer-based mathematics learning. *Journal Of Research On Computing in Education*, *28*(4), 438-460.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Yayınları.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Moralı, S., Köroğlu, H. ve Çelik, A. (2004). Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1,* 24.

Nouri, A., Esmaeilli, F., Seifpour, S., Talkhabi, M. and Khorami, A. (2018). The ımpact of dialogic learning on students' attention and academic achievement. *Annals of Behavioral Neuroscience*, *1*(1), 47-55.

Oktaviyanthi, R. and Dahlan, J. A. (2018). Developing guided worksheet for cognitive apprenticeship approach in teaching formal definition of the limit of a function. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, *335*, 1-5.

Orgill, M. and Bodner, G. (2003). What research tells us about using analogies to teach chemistry. *Chemistry Education Research and Practice*, *5*(1), 15-32.

Özen, Y., Gül, A. ve Gülaçtı, F. (2008). İlköğretim beşinci sınıflar sosyal bilgiler dersi "Cumhuriyete Nasıl Kavuştuk" ünitesindeki "Atatürk İlkeleri ve İnkılâpları" adlı konunun altı köşeli şapka drama tekniği ile uygulanmasının öğrenci başarısına etkisi. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(1), 155-170.

Özmantar, F. M., Bingölbali, E. ve Akkoç H. (2008). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Özmantar, F.M., Bingölbali, E. ve Akkoç, H. (2015). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (4. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Özsoy, N. ve Yüksel, S. (2007). Matematik öğretiminde drama. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *21*, 32-36.

Paris, N. A. and Glynn, S. M. (2004). Elaborate analogies in science text: tools for enhancing preservice teachers' knowledge and attitudes. *Contemporary Educational Psychology, 29,* 230-247.

Pınarbaşı, T. ve Canpolat, N. (2002). Fen eğitiminde kavramsal değişim yaklaşımı-II: Kavram değiştirme metinleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *10*(2), 281-286.

Pryle, M. (2018). *Dialogic teaching in the classroom*. Retrieved February 18, 2018 from https://www.academia.edu/25879672/Dialogic_Teaching_in_the_Classroom.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed ın the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 103-132.

Quesada, A., Richard, L. and Wiggins, M. (2008). The ımpact of the graphical approach on students' understanding of the definition of limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *15*(3), 95-102.

Quiles-Pardo, J. and Solaz-Portoles, J.J. (1995). Students and teachers misapplication of le chatelier's principle: ımplications for the teaching of chemical equilibrium. *Journal of Research in Science Teaching*, *32*(9), 939-957.

Reeve, R. A. and Pattison, P. E. (1996). The referential adequacy of students' visual analogies of fractions. *Mathematical Cognition*, *2*(2), 137-169.

Reznitskaya, A. and Gregory, M. (2013). Student thought and classroom language: Examining the mechanisms of change in dialogic teaching. *Educational Psychologist*, *48*(2), 114-133.

Richland, L.E., Zur, O. and Holyoak, K.J. (2007). Cognitive supports for analogy in the mathematics classroom. *Science Education*, *316*, 1128-1129.

Sağırlı, S. (2002). *Fen bilgisi öğretiminde analoji kullanımının öğrenci başarısına etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Saka, A., Ayas, A. ve Enginar, İ. (2002, Eylül). *Öğrencilerin, omurgalı-omurgasız canlılar ile ilgili görüşlerinin yaşlara göre değişimi.* 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Saygılı, S. (2008). *Analoji ile öğretim yönteminin 9.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarına ve yaratıcı düşünmelerine etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Çanakkale.

Schoon, J. K. and Boone, J. W. (1998). Self-efficacy and alternative conceptions of science of preservice elementary teachers. *Science Education*, *82*, 553-568.

Sedova, K. (2017). A case study of a transition to dialogic teaching as a process of gradual change. *Teaching and Teacher Education*, *67*, 278–290.

Sevim, S. (2007). *Çözeltiler ve kimyasal bağlanma konularına yönelik kavramsal değişim metinleri geliştirilmesi ve uygulanması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Sierpinska, A. (1987). Humaties students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Sutherland, R. and Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics, ınternational journal of computers for mathematical learning. *Kluwer Academic Publeshers*, *4*, 1-26.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258-276.

Şahin, F. (2000). *Okul öncesinde fen bilgisi öğretimi ve aktivite örnekleri*. İstanbul: Ya-Pa Yayınları.

Şengül, S.ve Ekinözü, İ. (2006). Canlandırma yönteminin öğrencilerin matematik yöntemine etkisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14* (2), 517-526.

Şenpolat, Y. (2005). *Fen bilgisi öğretiminde analoji kullanımının öğrenci başarısına etkisinin araştırılması* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Todorov, T. D. (2001). Back to classics: Teaching limits through infinitesimals. *İnternational Journal Of Mathematics Education in Science and Tecnology*, *32*(1), 4-20.

Tok, E. (2008). *Düşünme becerileri eğitimi programının okul öncesi öğretmen adaylarının eleştirel, yaratıcı düşünme ve problem çözme becerilerine etkisinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Toka, Y. ve Aşkar, P. (2002). Bilişsel çelişki ve kavramsal değişim metni yöntemlerinin bir bilinmeyenli birinci dereceden denklemlerle ilgili öğrenci başarısına etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*, 211-217.

Treagust, D. F., Harrison, A. G. and Venville, G. J. (1996). Using an analogical teaching approach to engender conceptual change. *International Journal of Science Education*. *18*, 213–229.

Treagust, D., Duit, R., Joslin, P.and Lindauer, I. (1992). Science teachers' use of analogies: Observations from classroom practice. *International Journal of Science Education*, *14* (4), 413-422.

Turan, S. (2002). Teknolojinin okul yönetiminde etkin kullanımında eğitim yöneticisinin rolü. *Eğitim Yönetimi Dergisi*, *30*, 271-281.

Turgut, T. (2007). *İlköğretim 7.sınıf matematik konularının öğretimde soru-cevap metodu ile analoji metodunun öğrencilerin matematik başarılarına etkileri yönünden karşılaştırılması* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Turgut, M. F., Baker, D., Cunnigham, R. and Piburn. M. (1997). *İlköğretim fen öğretimi, YÖK- Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme projesi hizmet öncesi öğretmen eğitimi*. Ankara: Yüksek Öğretim Kurumu.

Uçak, E. ve Bağ, H. (2018). Discourse Analysis of the Communicative Approaches Used by The Pre-service Teachers. *Bartın University Journal of Faculty of Education*, *7*(2), 381-428.

Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*, 145-149.

URL-1, http://www.eba.gov.tr, Eğitim Bilişim Ağı (EBA), 12 Mart 2019.

Uyanık, G. (2015). Sınıf öğretmeni adaylarının temel kimya kavramlarına ilişkin başarı düzeylerinin belirlenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education*, *4*(4), 18-28.

Uyanık, G. ve Serin, M. K. (2016). Sınıf öğretmeni adaylarının bazı temel fen konularındaki kavram yanılgılarının belirlenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *5*(2), 510-538.

Venville, G. J. and Treagust, D. F. (1996). The role of analogies in promoting conceptual change in biology. *Instructional Science*, *24*, 295–320.

Weiss, I. (1994). *National survey of science and mathematics education*. Chapel Hill: Horizon research.

Widodo, A., Duit, R. and Müler, C. (2002, April). *Constructivist views of teaching and learning in practice: teachers' views and classroom behaviour*. Paper presented Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, New Orleans.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Winarso, W. and Toheri, T. (2017). A case study of misconceptions students in the learning of mathematics&59; The concept limit function in high school. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, *4*(1), 120-127.

Wong, D. E. (1993). Self-generated analogies as a tool for constructing and evaluating explanations of scientific phenomena. *Journal of Research in Science Teaching*, *30*, 367-380.

Yenilmez, K. ve Uysal, E. (2007). İlköğretim öğrencilerinin matematiksel kavram ve sembolleri günlük hayatla ilişkilendirebilme düzeyi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*, 89-98.

Yıldırım C. (1993). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldız, İ. ve Uyanık, N. (2004). Matematik eğitiminde ölçme değerlendirme üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *12*(1), 97-104.

Yılmazoğlu, C. (2004). *Effect of analogy- enhanced ınstruction accompoined with concept maps on understanding of acid- base concept* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Zelyurt, H. (2010, Kasım). *İlköğretim 2. kademe ve ortaöğretim öğrencilerinin derslerdeki başarısızlık nedenleri (Malatya ili örneği).* Uluslararası Eğitimde Yeni Yönelimler ve Etkileri Konferansı'nda sunulan bildiri, İnönü Üniversitesi, Antalya.

Zembat, İ.Ö. (2008). Kavram yanılgısı nedir? M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 1-7). Ankara: Pegem yayınları.

Zengin, Y. (2017). Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesi üzerine bir araştırma. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 43*, 302-333.

8. EKLER

Ek 1. Madde Analizinden Önce Başarı Testi Soruları

1.soru: Ix-1I = 2 ifadesi ne anlama geliyor?

2.soru: I x-1 I<2 ifadesi ne anlama geliyor ?

3.soru: $\forall\varepsilon > 0$ ifadesi ne anlama geliyor ?

4.soru : $\forall\varepsilon > 0$ için $| x – 1 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor ?

5.soru : $\{ x: | x – a | < \varepsilon ,\quad a, \varepsilon \in R \}$ kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

6.soru : $\forall\varepsilon > 0$ için $0 < | x – 2 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz.

7.soru : $| x | > 10^5$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz.

8.soru: $\forall M > 0$ için $n > M$ ($n,M\in R$) ifadesi ne anlama geliyor?

9.soru: $\forall M > 0$ için $n < -M$ ($n,M\in R$) ifadesi ne anlama geliyor?

10.soru: Yığılma noktası ifadesi ne anlama geliyor?

11.soru: Doğal sayıların, rasyonel sayıların ve reel sayıların yığılma kümeleri nedir?
N' = ? Q'= ? R' = ?

12.soru: *$A \neq \emptyset$ $f: A \subseteq R \to R$ x_0 A'nın yığılma noktası ve $\ell \in R$ olmak üzere; $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $0 < | x - x_0 | < \delta$ olan tüm x ler için* $|f(x) – \ell | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor?

13.soru: $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ ifadesi ne anlama geliyor? Limit tanımını kullanarak izah ediniz.

14.soru: $\lim_{x\to -2} \sqrt{x}$ limiti için ne dersiniz?

15.soru: $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

16.soru: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

17.soru: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} Sinx = \frac{1}{2}$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

Ek 1'in devamı

18.soru: $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}$ limitini 2'nin büyük ve küçük civarlarından yaklaşarak bulunuz.

19.soru: $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \\ -x^2+1 & -1\leq x<0 \end{cases}$ *olmak üzere;* $\lim_{x\to 0} f(x)=?$

20.soru: $\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=?\ \ ve\ \ \lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2}=?$

Ek 2. Madde Analizinden Sonra Başarı Testi Soruları

1.soru: Ix-1I = 2 ifadesi ne anlama geliyor?

2.soru: I x-1 I<2 ifadesi ne anlama geliyor ?

3.soru: $\forall\varepsilon > 0$ ifadesi ne anlama geliyor ?

4.soru : $\forall\varepsilon > 0$ için $| x – 1 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor ?

5.soru : $\{ x: | x – a | < \varepsilon , \quad a, \varepsilon \in R \}$ kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

6.soru : $\forall\varepsilon > 0$ için $0 < | x – 2 | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz.

7.soru : $| x | > 10^5$ ifadesi ne anlama geliyor? Sayı doğrusunda gösteriniz.

8.soru: $\forall M > 0$ için $n > M$ (n,M∈R) ifadesi ne anlama geliyor?

9.soru: $\forall M > 0$ için $n < -M$ (n,M∈R) ifadesi ne anlama geliyor?

10.soru: Yığılma noktası ifadesi ne anlama geliyor?

11.soru: Doğal sayıların, rasyonel sayıların ve reel sayıların yığılma kümeleri nedir?
N' = ? Q'= ? R' = ?

12.soru: f:Z→R $f(x) = \frac{sinx}{x}$ ise $\lim_{x\to 0} f(x)$ =?

13.soru: *$A \neq \emptyset$ f: $A \subseteq R \to R$ x_0A'nın yığılma noktası ve $\ell \in R$ olmak üzere; $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $0 < | x - x_0 | < \delta$ olan tüm x ler için* $|f(x) – \ell | < \varepsilon$ ifadesi ne anlama geliyor?

14.soru: $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ ifadesi ne anlama geliyor? Limit tanımını kullanarak izah ediniz.

15.soru: $\lim_{x\to -2} \sqrt{x}$ limiti için ne dersiniz?

16.soru: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

17.soru: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

18.soru: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Sinx = \frac{1}{2}$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

Ek 2'in devamı

19.soru: $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}$ limitini 2'nin büyük ve küçük civarlarından yaklaşarak bulunuz.

20.soru: $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \\ -x^2+1 & -1\leq x<0 \end{cases}$ *olmak üzere;* $\lim_{x\to 0} f(x)=?$

21.soru: $\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=?\ \ ve\ \ \lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2}=?$

9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Hasan GÜVELİ, 1972 yılında Rize'de doğdu. İlkokulu İyidere Merkez İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu İyidere Merkez Ortaokulu'nda, lise öğrenimini Rize Lisesi'nde tamamladı. 1989 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 1993 yılında bölüm ikincisi derecesi ile mezun oldu. 1993 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik eğitiminde yüksek lisans programına girdi. 1996 yılında yüksek lisansını tamamladı. 1995 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 1997 yılında askerliğini yaptı. 1998 yılında evlendi. 2004 yılında Araştırma Görevlisi görevinden istifa etti. 2004-2008 yılları arasında özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2008 yılında Recep Tayyip Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı. 2007-2008 güz döneminde Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde doktora programına başladı. Recep Tayyip Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Öğretim Görevlisi olarak halen görevine devam etmekte olup, evli ve bir çocuk babasıdır. Yabancı dili İngilizcedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adres **:** Recep Tayyip Üniversitesi Eğitim Fakültesi Çayeli/ RİZE

E-Posta : hasanguveli@erdogan.edu.tr,