TRABZON ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİ DESTEKLEYEN ÖĞRENME ORTAMINDAN YANSIMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Deniz ADIYAMAN

TRABZON
Temmuz, 2019

TRABZON ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİ DESTEKLEYEN ÖĞRENME ORTAMINDAN YANSIMALAR

Deniz ADIYAMAN

**Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce
Yüksek Lisans Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Danışmanı
Doç. Dr. Derya ÇELİK**

**TRABZON
Temmuz, 2019**

Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir. 05 / 07 / 2019

Tez Danışmanı	**: Doç Dr. Derya ÇELİK**	**. . . . .**
Üye	**:**	**. . . . .**
Üye	**:**	**. . . . .**

Onay

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bülent GÜVEN
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Trabzon Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

Deniz ADIYAMAN
05 / 07 / 2019

ÖN SÖZ

Sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamından yansımalar çalışması, Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu çalışma süresince danışmanlığımı üstlenerek, konunun belirlenmesinde ve çalışmanın yürütülmesinde engin bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, öğretmenlik bilgi ve tecrübelerime faydası fazlaca olan değerli hocam Doç. Dr. Derya ÇELİK'e sonsuz şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım sırasında görüş ve önerilerinden yararlandığım değerli hocam Doç. . Dr. Tuba AYDOĞDU İSKENDEROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca dersleri aracığıyla görüşlerinden faydalandığım, düşünceleri ve görüşleri ile bana yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Adnan BAKİ, DR. Ögr. Üyesi. Müjgan BAKİ, Prof. Dr. Selahattin ARSLAN, Prof. Dr. Muammer ÇALIK, Doç. Dr. Erdem ÇEKMEZ, Doç. Dr. Gönül GÜNEŞ 'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamı yürüttüğüm ortaokulda görev yapan ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen okul yöneticilerine, örneklem olan sevgili öğrencilerime de teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca manevi ve maddi anlamda destek olan, fikir alış verişinde bulunduğum matematik öğretmeni meslektaşlarım Fatma SÜLEYMAN ve Aynur BEDER ZENGİN 'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak çocukluğumdan bu yana maddi manevi desteklerini esirgemeyen canım babam ve annem Hasan ODABAŞI ile Sakine ODABAŞI ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım. Beni her daim cesaretlendiren kıymetli eşim Gökhan ADIYAMAN'a ve varlıklarıyla bana destek olan kızlarım Serra Nur ve Elif Duru'ya şükranlarımı sunarım.

Temmuz, 2019

Deniz ADIYAMAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Akıl Yürütme Becerilerini Destekleyen Öğrenme Ortamından Yansımalar

Bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamı tasarlamak, uygulamak ve ortaya çıkan öğrenme ürünlerini cebirsel akıl yürütme becerileri açısından değerlendirmek amaçlanmıştır.

Çalışmada, araştırmacı aynı zamanda uygulayıcı öğretmen olup eylem araştırması yöntemi kullanılmıştır. Çalışma 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar döneminde bir devlet ortaokulunda gerçekleşmiştir. Öğretmenin sorumlu olduğu sınıflardan benzer fiziki ve akademik özelliklere sahip iki adet sekizinci sınıf araştırma grubu olarak seçilmiştir. Eylem araştırması kapsamında çalışma planlama, uygulama, veri toplama ve yansıtma olarak dört aşamada gerçekleştirilmiştir. Planlama aşamasında öncelikle öğrencilerin cebirsel akıl yürütme eylemlerinin gözlenebilir davranışlara dönüştürülerek takip edilebilmesi için cebirsel akıl yürütme göstergeleri geliştirilmiştir. Çalışmada kullanılmak üzere sekizinci sınıf öğretim programının cebir öğrenme alanından doğrusal denklemler ve denklem sitemleri konularına ait kazanımlar seçilmiştir. Belirlenen kazanımlara yönelik ikişer dersten oluşan beş taslak ders planı, geliştirilen cebirsel göstergeler temel alınarak hazırlanmıştır. Taslak planlar önce uzman bir araştırmacıyla değerlendirilmiş daha sonra ise seçilen sınıfların birinde pilot uygulaması yapılarak elde edilen veriler ışığında geliştirilmiştir. Uygulama ve veri toplama aşamasında, son hali verilen planlar diğer sınıfta kullanılmış, dersler iki adet kamera yardımıyla kayıt altına alınmış ve araştırmacı tarafından alan notları tutulmuştur. Son olarak yansıtma aşamasında bu araçlardan elde edilen veriler ders analiz çatısı kullanılarak analiz edilmiştir. Analizler sonucunda, dersin öğrenme hedefleri, öğrencilerin öğrenmesi, öğretimin etkililiği ve dersin geliştirilmesi başlıklarına yönelik değerlendirmeler yapılmıştır.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar öğrenci davranışına dönük olarak geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergelerinin, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinin takip edilebilmesi adına bir çerçeve sunduğunu göstermiştir. Cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet edecek şekilde hazırlanan ders planlarının genel anlamda öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini desteklemiştir. Elde edilen sonuçlar geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergeler ışığında düşünüldüğünde; öğrencilerin (i)bağlantı ve ilişki kurma ile farklı gösterimleri kullanmada genel anlamda başarılı olduğu, (ii) eleştirel düşünerek değerlendirme yapma ve çıkarımda bulunmada desteklenmeye ihtiyaçları olduğu ve bireysel karar vermede zorlandıkları tespit edilmiş, (iii) en fazla problemi ise sembolleri

anlamlı kullanma ile cebirsel fikirleri, düşünceleri, yaklaşımları anlamlandırmada konusunda yaşadıkları belirlenmiştir. Problem yaşanan davranışların temelinde, uygulamalardaki yetersizliklerden ziyade öğrencilerin geçmiş cebirsel yaşantılarındaki eksikliklerin olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Akıl Yürütme, Sekizinci Sınıf Öğrencileri, Doğrusal Denklemler, Denklem Sistemleri

ABSTRACT

Reflections from Learning Environment Supporting Algebraic Reasoning Skills of Eighth Grade Students

The aim of this study is to design, implement and evaluate the learning environment that supports students' algebraic reasoning skills and to evaluate the resulting learning products in terms of their algebraic reasoning skills.

In the study, the researcher is also a teacher and an action research method is used. The study was conducted in a public secondary school in the spring of 2017-2018 academic year. Two eighth grade research groups with similar physical and academic characteristics were selected from the classes in which the teacher was responsible. Within the scope of the action research, the study was carried out in four stages: planning, implementation, data collection and reflection. In the planning stage, algebraic reasoning indicators have been developed in order to follow up the students' algebraic reasoning actions by transforming them into observable behaviors. To be used in the study, the acquisitions of linear equations and systems of equations were selected from the algebra learning area of the eighth grade curriculum. Five draft lesson plans, each consisting of two courses, were prepared based on the developed algebraic indicators. Draft plans were first evaluated by an expert researcher and then developed in the light of the data obtained by piloting in one of the selected classes. During the application and data collection phase, the final plans were used in the other classroom, the courses were recorded with the help of two cameras and field notes were kept by the researcher. Finally, the data obtained from these tools in the reflection stage were analyzed using the course analysis framework. As a result of the analyzes, the learning objectives of the course, students' learning, effectiveness of instruction and course development were evaluated.

The results of the study showed that the algebraic reasoning indicators developed for student behavior provide a framework for the follow-up of students' algebraic reasoning skills. The course plans prepared to serve the indicators of algebraic reasoning generally supported the students' algebraic reasoning skills. When the obtained results are considered in the light of developed algebraic reasoning indicators; it was found that the students (i) were generally successful in connecting and using relationships and different representations, (ii) need to be supported in making critical inquiries and making inferences, and have difficulty in making individual decisions and it was determined that the students

(iii) experienced the most problems in making meaningful use of symbols and making se
of algebraic ideas, thoughts and approaches.

Key Words: Algebraic Reasoning, Eighth Grade Students, Linear Equations, Linear Equation Systems

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NAEP	: National Assessment of Educational Progress [Ulusal Eğitimsel İlerleme Değerlendirme]
TIMSS	: Thirds/Trends in International Mathematics and Science Study [Uluslararası Matematik ve Fen Araştırmasında Eğilimler]
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics [Uluslararası Matematik Öğretmenleri Konsülü]
TTKB	: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı
PAB	: Pedagojik Alan Bilgisi
LGS	: Liselere Geçiş Sınavı
EBA	: Eğitim Bilişim Ağı

1. GİRİŞ

Değişim ve gelişim yaşamın vazgeçilmez döngüsüdür. Bu durum her alanda etkili olduğu gibi eğitim alanında da çeşitli farklılaşmalara sebep olmaktadır. Bu farklılaşmalar çağın ve zamanın hem bilişsel hem duyuşsal ihtiyaçlarına cevap verebilecek şekilde gerçekleşmektedir. Bu bağlamda, birçok ülkede eğitimde temelden değişim hareketleri gerçekleşmiş ve bu değişimler çerçevesinde yeni öğretim programları hazırlanmıştır (Cockcroft, 1982; Ersoy, 2001; NCTM, 1980, 1989, 1991, 2000). Bu dönüşümler ile eğitimin işlevi, amaçları ve paydaşlarının rolleri gözden geçirilerek yeniden yapılandırılmıştır.

Hazırlanan programlar yapılandırmacılık eğitim felsefesi ışığında geliştirilmiştir. Tüm derslerin öğretim programlarının boyutları ve bileşenlerinin değişmesi ile birlikte matematik dersi öğretim programlarında da önemli farklılıklar gerçekleşmiştir. Türkiye' de de bu değişimler baz alınarak 2004 yılında İlköğretim ve ortaöğretim okullarında matematik dersleri öğretim programları düzenlenerek MEB-TTKB komisyonu işbirliği ile yeniden yapılandırılmıştır (TTKB, 2004). Yeni matematik programları Avrupa, Amerika ve bazı Asya ülkelerinin programlarından faydalanılarak oluşturulmuş ve "Her çocuk matematiği öğrenebilir" ilkesi temel alınmıştır (Baki ve Gökçek, 2005; MEB, 2005). Önceki programlarda öğrenci davranışları ön planda iken yeni programda kazanımlar, bilişsel gelişim, öğrenme yaşantılarının zenginliği, öğrenme sürecinde bilişsel yapıların önemi gibi kavramlar ön plana çıkmıştır.

Öğrenci merkezli yaklaşımların temele alındığı bu programlarda öğrenmenin gerçekleşme sürecine odaklanılmıştır. Bu süreçte amaç; araştırma yapabilme, eleştirel ve yaratıcı düşünebilme, yorumlayabilme, sorgulama yapabilme, problem çözme becerisi kazanabilme, değerlendirme yapabilme, muhakeme yapabilme ve çıkarımlarda bulunabilme yeteneklerini öğrenciye kazandırmak olmuştur. Bu amaç ışığında yetiştirilen öğrencilerin kendi öğrenme ve anlamlandırma süreçlerine katkıda bulunmalarını, geçmişten var olan bilgilerini düzenleyebilmelerini ve yeni bilgilerle ilişki kurabilmelerini sağlamak hedeflenmiştir (MEB, 2005). Yani güncel programlarda matematik eğitiminin temel hedefi matematiği öğretmekten ziyade matematiği günlük yaşamında kullanan ve uygulayan öğrenciler yetiştirmektir. Böylece öğrencinin kendi öğrenmesine katkıda bulunması, eski bilgilerini kullanarak yeni bilgiler keşfetmesi, keşfettiği bilgiyi uygulaması yani aktif şekilde öğrenme sürecinde yer alarak üst düzey bilişsel becerilerini geliştirmesinde etkili olması hedeflenmiştir.

Matematik konularının diğer disiplinlerle ve günlük yaşamla ilişkilendirilmesi soyut düşünceden somutlaştırmaya doğru bir değişime neden olmuştur (NCTM, 2000). Bu değişim yeni matematik eğitimi programlarının temelidir. Bu temel doğrultusunda, MEB tarafından hazırlanan öğretim programlarında, öğrencilerin yaşamlarında bu ilişkilendirmeyi yapabilecek bilgi, beceri ve donanımla yetiştirilmesi amaçlanmıştır (MEB, 2013).

Matematik soyut bir bilimdir. Bu nedenle matematiği öğrenmek ve öğretmek zorlu bir süreçtir. Bu süreçte başarılı olabilmek adına etkili matematiksel düşünmeye ihtiyaç vardır. Matematiksel düşünme; anlama çabası, muhakeme etme, değerlendirme yapma, yargılama, eleştirel ve yaratıcı düşünme, problem çözme gibi süreçleri içerir (Kaya, 2015). Matematiksel düşünmede amaç; sorgulamada beceri sahibi bireyler yetiştirmek ve öğrencilere fırsatlar verip cesaretlendirmektir. Ezberleyerek çözüm adımlarını takip eden öğrenciler yerine kendi fikirlerini geliştiren ve pek çok çözüm yöntemi ortaya koyabilen öğrenci profili ön plandadır. Gerçek fayda problemin çözümünde değil, yeni ilişkiler keşfetmekte ve yeni bakış açıları geliştirebilmektedir. Buna karşılık ezberleyen öğrenci için aradaki işlemlerin bir anlamı yoktur. Sadece sonuca ulaşmayı hedefler, süreç geri planda kalır. Özellikle problem çözümlerinde öğrenciler akıl yürütme yapmadan problemi anlayamaz, analiz edemez veya problemi çözmek için nasıl yaklaşacağını planlayamaz. Matematiksel akıl yürütme, fikirler ve bunların ilişkileri hakkında sonuçların çizilip genellemelerin yapılmasını içeren matematiksel düşünmenin bir parçası (O'Daffer ve Thornquist, 1993) ve en önemli bileşenlerinden biridir.

Temel seviyede akıl yürütme ile eğitim gören öğrenciler kendi düşüncelerini geliştirerek yeni bağlantılar kurabilirler. Akıl yürütme genel anlamda; bütün bileşenleri dikkate alarak düşünüp mantıklı bir sonuca ulaşma süreci olarak tanımlanabilir. Herhangi bir konuda akıl yürütebilen biri; o konuda iyi düzeyde bilgi sahibidir, ilk defa karşılaştığı durumları inceler, keşifler yapar, tahminlerde ve varsayımlarda bulunur, düşündüklerini gerekçelendirir, sonuçlara ulaşır, sonuçları açıklar ve savunabilir (Umay, 2003). Matematikte akıl yürütme yapan birey, sorgulayarak ve ilişkilendirerek neyi neden yaptığını bilir. Bunun sonucunda kalıcı ve gelişmeye açık matematik alt yapısı oluşturur.

NCTM'in (2000) Müfredat ve Değerlendirme Standartları'na göre akıl yürütmenin varlığı;

- Problem çözmede deneme- yanılma yapıldığı,
- Varsayımlarda bulunarak kontroller yapıldığı,
- Tümevarımsal ve tümdengelimsel görüşlerinin kullanıldığı,
- Genellemelere ulaşmak için örüntüler oluşturulduğu,
- Görsel ve mantıksal düşünüldüğü

durumlarda kanıtlanabilir.

Russell (1999, s. 1) matematiksel akıl yürütmeyi aşağıda verildiği gibi açıklamaktadır.

- Matematiksel akıl yürütme temelde geliştirme, doğrulama ve genelleme yapma ile ilgilidir.
- Matematiksel akıl yürütme, ilgili alanda birbirine bağlı bilgilerin ağına ulaşmayı sağlar.
- Matematiksel akıl yürütme bilgi ağlarının oluşumu matematiksel hafıza temelini oluşturur ve matematiksel algıyı geliştirir. Benzer şekilde Umay ve Kaf'te (2005) matematiksel akıl yürütmenin, matematiksel bilgi ağı üzerinde ilerleyerek yapılandığını savunmuşlardır.

Matematiksel akıl yürütme kişisel fikirlerden bağımsız olmadığından bireyseldir. Yapılan akıl yürütmenin ön plana çıkan özelliğinin ne olduğu bakış açısına göre değişir. Bakış açısına göre çözümsel (analitik) ve bütünsel (holistik) olarak sınıflandırılır. Düşünme tarzına göre pratik ve soyut akıl yürütme gibi ayrımlar yapılabilir. Çözümsel (analitik) yaklaşımda yapıların parçaları ayrı ayrı incelenerek tümden gelimsel bir yaklaşımla akıl yürütülür. Bütünsel (holistik) yaklaşımda parçalarla değil, bütün ile ilgilenilerek akıl yürütülür. Soyut (teorik) akıl yürütme matematiksel akıl yürütmenin temelini oluşturur. Pratik akıl yürütme ise günlük yaşamda ve daha birçok uygulama alanında kullanılan yaklaşımdır (Aysun Umay, 2003). Konu bazında düşünüldüğünde ise matematiksel akıl yürütme cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel olarak adlandırılabilir (Umay, 2003).

Cebirsel akıl yürütme, matematiksel bilgiyi; kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikler ve denklemlerle sunma, gerekli bilgileri seçerek varsayımlar oluşturma ve test etme, fonksiyonel ilişkileri teşhis etme bulguları yorumlama ve analiz etmedir. (Herbert ve Brown, 1997). Kieren ve Chalouh'da (1993) cebirsel akıl yürütmeden merkezinde matematiksel muhakeme ve sembolleri anlamlandırarak kullanma olan, sembol ve işlemlerin anlamlarını inşa etme süreci olarak bahsetmişlerdir. Kaput'da (1999) ise cebirsel akıl yürütmeyi matematiksel işlemler ve ilişkilerle ilgili genellemeler yapma, bu genellemelere dayanan varsayımlarda bulunma ve tartışma ile bunları ifade etme süreci olarak belirtmiştir.

Cebirsel akıl yürütme sürecinde ortak olarak vurgulanan ifadeler, matematiksel işlemleri ve ilişkileri anlamlandırma, yorumlama, genellemeler yapmadır. Bu uygulamalar soyut süreçlerden oluşmaktadır. Cebir öğrenme alanının kendisi zaten yeterince soyuttur. Öğrenciler aritmetik ile başlayan matematiksel düşünmelerinde somut düşünceden soyut düşünceye geçiş ile cebirsel fikirlerini geliştireceklerdir. Bu gelişim ile birlikte öğrencide soyutlaştırma ve akıl yürütme yeteneği gelişir. (Herscovics ve Linchevski, 1994). Öğrencide gelişen soyut düşünme ile birlikte, cebirsel düşünme, matematiksel bilgi ve becerisi artacak, problemleri çözmesi kolaylaşacaktır. Yani cebirsel akıl yürütme ve düşünme becerisinin başlayarak olgunlaşabilmesi adına ilkokul ve ortaokul kademeleri önemli bir paya sahiptir.

Öğrenci ilkokulda geliştirdiği nedensel ve sonuçsal aritmetik içerikleri ortaokulda ilişki kurabilme yeteneği ile semboller, modeller ile ifade etmeyi başaracaktır. Böylece öğrenci cebirsel akıl yürütmeye geçiş yapmış olacak ve ilişkilendirme yeteneği kazanacaktır. Cebirsel akıl yürütme, öğrencinin cebirsel düşünme için bir araçtır.

Cebirsel düşünme matematiksel düşünmenin özel bir formu olup sadece cebir öğrenme alanı ile sınırlı değildir (Akkan, 2016; Çelik 2007). Öğrenciler matematikte ve yaşamda başarılı olabilmeleri adına cebirsel düşünmeye teşvik edilmeli ve bu duruma hizmet eden ortamlar hazırlanmalıdır. Cebirsel düşünme ve muhakemenin önemi pek çok uluslararası çalışmada vurgulanmıştır (Kaput, 1995; NAEP, 2002; NCTM, 2000; TIMMS, 2003). Cebirsel düşünme ve akıl yürütme ortamlarının hazırlanmasında en büyük görev öğretmenlerindir. Öğretmenler, cebiri öğrencilerine anlatırken anlamalarını ve akılda tutmalarını üst düzeye çıkaracak şekilde öğretim yapmalıdırlar (Leitze ve Kitt, 2000). Bu araştırma da özellikle matematik öğretiminde başrolde yer alan öğretmenlere yardımcı olabilmek ve fikir sunabilmek adına cebirsel muhakeme yapmaya hizmet eden sınıf ortamı tasarlamak, uygulamak ve bu sınıf ortamından yansımalar sunma üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda çalışmanın problemi ana problemi "Öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamı nasıl olmalıdır?" şeklinde belirlenmiştir. Bu problem kapsamında araştırılacak alt problemler aşağıda verilmektedir.

- Öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamı için ders planları nasıl olmalıdır?
- Tasarlanan ortam öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini nasıl desteklemektedir?

1. 1. Araştırmanın Amacı

2004 yılında başlayan ve devam etmekte olan reform hareketleri bağlamında; matematik öğretim programları her sınıf seviyesinde öğrenme-öğretme etkinliklerinin işlemsel bilgiyle birlikte kavramsal anlamanın gelişimini destekleyecek, öğrencilerin matematiksel düşünme, problem çözme, akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme gibi temel zihinsel becerilerini geliştirecek şekilde öğrenci merkezli tasarlanması gerekliliğini ortaya koymaktadır (TTKB, 2004). Burada akıl yürütme becerisi diğer temel becerilerle ilişkisi açısından özel bir öneme sahiptir.

Düşünme sürecinde cebirsel yöntem ve tekniklerin daha ağır bastığı cebirsel düşünme ve daha spesifik olarak cebirsel akıl yürütme becerisi öğrencilerin sadece matematik derslerinde değil aynı zamanda kendi günlük yaşamlarında karşılaştıkları güçlüklerin üzerinde düşünüp yorum yaptıkları ve çözüm yolu aradıkları zihinsel aktiviteleri içermektedir (Kaya, 2015). Cebirsel akıl yürütme, öğretim programlarında açık bir şekilde ifade edilmemiş olsa da, matematiksel düşünme becerileri geliştirmek şeklinde genel formda bir amaç olarak ortaya konmuştur. Bu bağlamda bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyecek bir ortam tasarlamak, uygulamak ve ortaya çıkan öğrenme ürünlerini cebirsel akıl yürütme becerileri açısından değerlendirmek amaçlanmıştır.

1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

2004 yılında yenilenen ilköğretim matematik programı öğrencilerin bilgiye aracılardan bağımsız ilk elden ulaşması, akıl yürütmesi, eleştirel ve yaratıcı düşünmesi, değerlendirme ve çıkarım yapabilmesi becerileri üzerine şekillenmiştir. Bu amaç ışığında yetiştirilen öğrencilerin kendi öğrenme ve anlamlandırma süreçlerine katkıda bulunmalarını, geçmişten var olan bilgilerini düzenleyebilmelerini ve yeni bilgilerle ilişki kurabilmelerini sağlamak hedeflenmiştir. Birey bilgiye ulaşmalı, anlamlandırmalı ve günlük hayatı ile ilişkilendirmelidir (TTKB, 2004).

Genelde matematik dersleri ve özelde cebir öğrenme alanı da bu beceriler ile ilişkilendirilmiştir. Bireye cebirsel akıl yürütme ortamı sunularak günlük yaşama dair problemler ve çözüm arayışları için faydalı deneyimlere sahip olması sağlanacaktır. Bu tecrübelere sahip olmak pek de kolay değildir. Nitekim cebir matematiğin en soyut alt öğrenme alanlarından biridir ve ifade etmesi de anlaması da kolay olmamaktadır. Öğrenciler cebirsel olarak düşünmekte, yorum yapmakta zorluklar yaşamaktadırlar. Blume ve Heckman (2000) çalışmasında bahsetiği NAEP'in raporuna göre öğrencilerin cebirsel konuların ele alındığı cebir derslerinde iyi performans sergilemediklerini belirtilmişlerdir. Ülkemizde de öğrencilerin cebiri öğrenmekte ve anlamakta benzer zorlukları yaşadıkları Dede ve Argün (2003) tarafından ifade edilmiştir. Öğretmenler de cebiri anlatırken somut durumlarla soyut durumları ilişkilendirmekte ve öğrencileri bu amaçla yönlendirmekte sorunlarla karşılaşmaktadırlar. Öğretmenler, cebiri öğrencilerine anlatırken anlamalarını ve akılda tutmalarını üst düzeye çıkaracak şekilde öğretim yapmalıdırlar (Leitze ve Kitt, 2000). Cebir öğrenme alanı ile ilgili var olan bu sorunlara rağmen literatürde çalışmaların az sayıda olduğu gözlemlenmektedir. Cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasındaki zorlukların nedenleri (Dede ve Argün, 2003), cebirsel sembollerin anlaşılması ve kullanımı (Bağdat ve Anapa-Saban, 2014; Capraro ve Joffrion, 2006; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2005), cebirsel muhakeme becerilerinin incelenmesi (Bike-Kalkan, 2014; Ellis, 2011; Kaya ve Keşan, 2017; Kaya, Keşan, İzgiol ve Erkuş, 2016; Öz, 2017), farklı cebir öğretme yaklaşımlarının öğrenmeye etkisi (Kanbir, 2016), cebir öğretiminde yazma etkinliklerinin önemi (Yılmaz, 2015), cebirsel kavram yanılgılarını giderme üzerine (Erdem ve Sarpkaya-Aktaş, 2018), yeni matematik öğretme programının cebirsel düşünmeye etkisi

(Ceyhun, 2012) ve öğretmenin öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinin gelişimini destekleyen bir sınıf inşa etmesinin yolları ve bu yolların ne derece etkili olduğu (Blanton ve Kaput, 2005) araştırmaları genel anlamda cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme alanındaki literatürü yansıtmaktadır. Çalışmalarda genel olarak durum tespitine odaklanılmıştır. Sınıf içinde cebirsel akıl yürütme uygulamalarına ya da uygulamalardan yapılan yansımalara dönük çalışmalar eksik kalmıştır. Bu bağlamda cebirsel akıl yürütmeyi konu edinen özellikle uygulamalara yönelik çalışmalara ihtiyaç vardır.

Bu çalışma ile öğrenci ve öğretmenlerin yaşadıkları zorluklar göz önünde bulundurularak cebir öğretim ortamında akıl yürütmeyi destekleyen, öğrencilerin iletişim kurdukları, eleştirel ve yaratıcı düşünme konusunda cesaretlendirildikleri ve nihayetinde kendilerine ait bilgileri oluşturdukları bir ortamdan yansımalar yapmak amaçlanmıştır.

Uzuner'de (2005) eylem araştırmasını şu şekilde betimlemektedir: Eylem araştırması, teori ve uygulama arasındaki boşluğu doldurarak öğretmeni yetkili ve donanımlı kılar, yansıtıcı düşünme ve öğretimi teşvik eder, öğretmenin pedagojik alanını genişletir, öğretmeni kendi uygulamalarından sorumlu kılar, öğrenci başarısı ile uygulama arasındaki bağı pekiştirir ve öğretmenlerin mesleki anlamda büyüme ve gelişimlerine pozitif katkı sunar. Eylem araştırması, uygulayıcının aynı zamanda araştırmacı olduğu ve sorunları tespit ederek çözüm önerileri sunduğu sistematik bir uygulamadır. Bu uygulama ile eğitimde yaşanabilecek sorunların odağında olan ve en kolay takip edebilen öğretmenler ile eğitimsel gelişimi sağlamak amacıyla çözüm önerileri sıralanır. Öğretmenin araştırmacı olmasının pek çok avantajı vardır. Bu uygulama arada bulunan bireyleri çıkararak bilgiye, soruna en ucuz ve en hızlı ulaşmayı sağlar. Uygulamayı gerçekleştiren birey sorunlarla muhatap olma açısından en yetkili kişi olduğundan gerçek problemlere kolay ulaşım sağlar. Ayrıca araştırmacı uygulayıcı olduğundan problemin çözümüne yönelik önerileri hızla uygulama şansına sahip olur.

Bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel akıl yürütmesine katkıda bulunmak, öğrenciyi öğrenmek için cesaretlendirmek amaçlandığından öğretmenin bu ortama katkıda bulunmak için sorunları ve çözüm önerilerini daha rahat fark edebilmesi amacıyla eylem araştırması yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmanın aşağıda sıralanan açılardan alan yazına katkı sağlayacağı ve ileride yapılacak çalışmalar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

- Öğretmenin yaptığı öğretimi değerlendirme fırsatına sahip olmasına ve ilerideki öğretimsel uygulamaları için yansımalar yapabilmesine imkan sağlama
- Çalışmanın temel aldığı kazanımlar açısından öğretimsel gelişme ve önerilerde bulunma imkanına sahip olma
- Cebirsel akıl yürütmeyi cebirsel göstergeler ile öğrenci davranışına yönelik olarak gözlemleyebilme

• Cebirsel akıl yürütme ortamına dair ipuçları verme

• Oluşturulan ders planları ile öğretmenlere ve kitap yazarlarına bakış açısı sunma

• Oluşturulan cebirsel akıl yürütme göstergeleri ile araştırmacılara cebirsel akıl yürütme adına bir çerçeve sunma

• Cebirsel akıl yürütme üzerine çalışmaların sınırlı sayıda olması nedeniyle alana katkıda bulunabilme

1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları

Hazırlanan çalışma ile ilgili sınırlılıklar şunlardır:

1. Araştırma 2017-2018 eğitim-öğretim yılının bahar yarıyılında Trabzon ilinde bir devlet okulunda 8. sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür.
2. Araştırma konu olarak 8. sınıf matematik dersi Cebir öğrenme alanındaki doğrusal denklemler ve denklem sistemleri alt öğrenme alanlarını kapsamaktadır.
3. Uygulama süresi 10 ders saati ile sınırlıdır.

1. 4. Araştırmanın Varsayımları

Yürütülen bu çalışmanın varsayımları şunlardır;

1. Araştırmaya katılan öğretmenin ve öğrencilerin derslerin video ile kayıt altına alınması esnasında doğal davrandıkları
2. Öğretmenin/araştırmacının ders analizlerine gerçek duygu ve düşüncelerini taraf tutmadan yansıttığı düşünülmektedir.

1. 5. Tanımlar

Akıl Yürütme: Herhangi bir konuda var olan bilgileri kullanarak tahminde ve varsayımda bulunma, değerlendirme yaparak sonuca ulaşma sürecidir.

Matematiksel Akıl Yürütme: Bir problemin çözümü için gerçekleşen matematiğe has yollarla akıl yürütme sürecidir.

Cebirsel Düşünme: Cebirsel semboller ve matematiksel modelleri kullanarak ilişkileri anlamlandırma, fonksiyonel ilişkileri ve çoklu temsilleri kullanarak genellemelere ulaşma sürecidir.

Cebirsel Akıl Yürütme: Cebirsel akıl yürütme, cebir becerileri kullanılarak cebirsel bir konuda tahminde ve varsayımda bulunarak değerlendirme yapma sürecidir. Ayrıca cebirsel düşünme sürecinin gerçekleşmesini sağlayan araçtır.

Cebirsel Akıl Yürütme Göstergesi: Cebirsel akıl yürütme eyleminin öğrenci davranışına yönelik gözlemlenebilir formudur.

Eylem Araştırması: Araştırmayı gerçekleştirenin öğretmen ya da başka bir eğitim çalışanı olabildiği, eğitim sorunlarına ve bu sorunlar için çözümlere odaklanılan bir araştırma yöntemidir.

Ders Analizi: Öğretmenin uyguladığı dersi irdelemek için kullanabileceği, öğrenci düşünmesine ve dersin amaçlarına ulaşmasına odaklanarak nihayetinde alternatif çözüm önerileri sunulan bir analiz yöntemidir.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde problemin kuramsal çerçevesi ve konuyla ilgili yapılan çalışmalara yer verilmektedir.

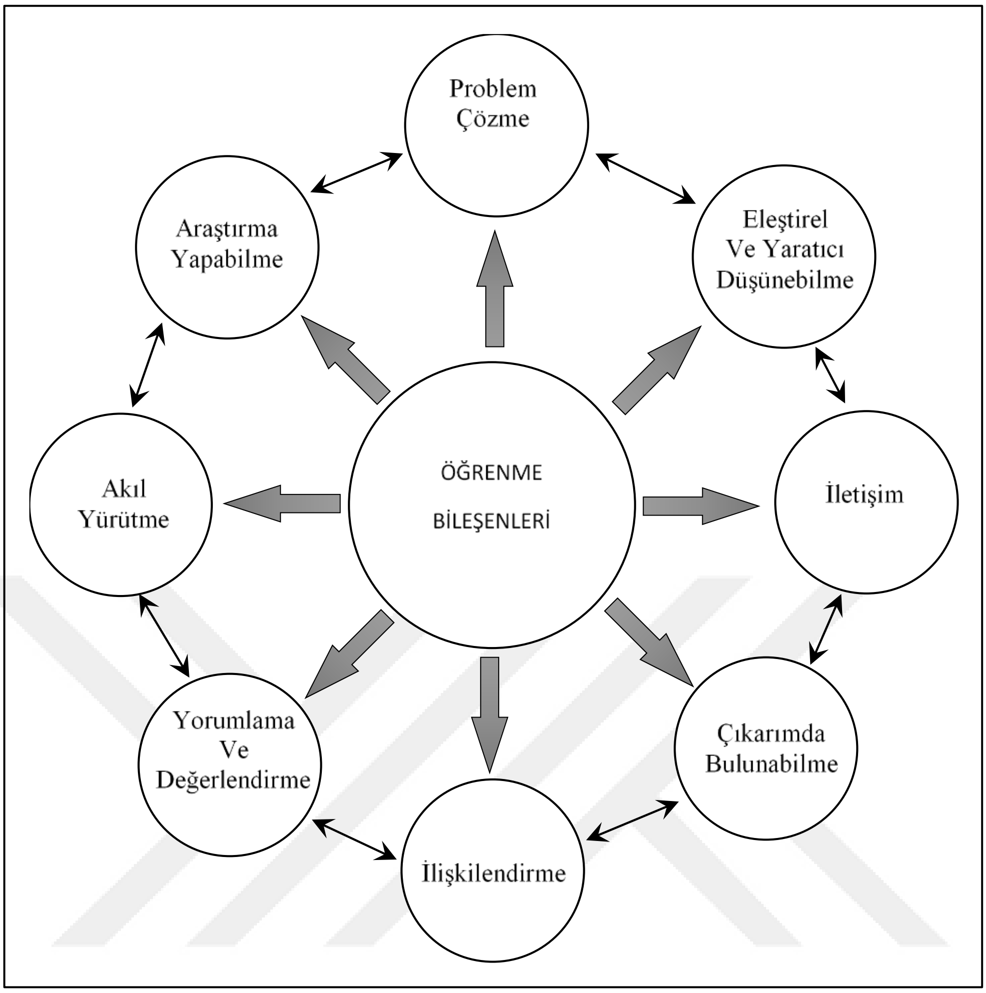
2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Literatür taramasının bu bölümünde, araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturan yeni matematik öğretim programı ve temel aldığı beceriler, cebir ve cebirsel düşünme, cebirsel akıl yürütme ve göstergeleri ile ders analizi çatısı başlıkları altında bilgilere ve yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

2. 1. 1. Matematik Öğretim Programı ve Temel Aldığı Beceriler

2004 yılında ilköğretim okulları Matematik Dersleri Öğretim Programı MEB-TTKB işbirliği çalışmaları ile yenilenmiştir (TTKB, 2004). Daha önce geliştirilen programlarda davranış bilimleri temel alınarak konu içerikleri hedef ve davranışlar vurgulanmıştır (Altun, 1995; Baykul, 1999; MEB, 2008). Yeni program ile birlikte eğitimde yapılandırmacı yaklaşım benimsenerek kazanımlara ve bilişsel gelişime vurgu yapılmıştır (Ersoy, 2006).

Program ile birlikte öğretmenin ve öğrencinin rolü, problem-çözme anlayışı, ölçme değerlendirme yaklaşımları, öğrenme ve öğretme anlayışı, sınıf içi etkinlikleri, matematiğin günlük hayatla ilişkilendirilmesi ve teknoloji kullanımı değişim geçirmiştir (Koç, Işıksal ve Bulut, 2007). Ersoy'da (2006) yeni matematik programı ile birlikte kavramsal ve işlemsel bilgilerin kaynaştırılarak ilişkilendirilmesini, ilişkilendirme eyleminin eğitim etkinlikleri ve öğrencinin aktif katılımı ile gerçekleşmesini, sonuçtan ziyade sürecin önemini vurgulamıştır. Ayrıca öğrencilerin araştırma yaparak keşifler yapacağı, problem çözeceği, çözüm yollarını paylaşarak tartışacakları ortamların önemli olduğundan bahsetmiştir. 2013 yılında ortaokul matematik öğretimi programında gerçekleştirilen değişiklikle matematiksel kavramları anlama, bunlar arasında ilişki kurma ve bu kavramları günlük hayatta ve diğer öğrenme alanlarında kullanma ile akıl yürütme becerisi vurgulanmıştır (MEB, 2013). 2017 yılında da matematiğin anlam ve dili kullanılarak birey ve nesneler arasındaki ya da nesnelerin birbirleri ile olan ilişkilerini anlamlandırılabileceği belirtilmiş ve akıl yürütme becerisi vurgusu yapılmıştır.



Şekil 1. Yeni programın geliştirmeyi hedeflediği beceriler

Yenilenen ilköğretim matematik öğretimi programı iletişim kurabilmeyi, eleştirel ve üretici düşünmeyi, problem çözmeyi, araştırma yapmayı, yorumlama ve değerlendirme yapmayı, ilişkilendirmeyi, çıkarımda bulunmayı ve akıl yürütmeyi desteklemektedir (TTKB, 2004). Yeni programın geliştirmeyi hedeflediği beceriler Şekil 1'de özetlenmiştir. Bu becerilerden bazıları MEB (2005-2013) öğretim programlarında aşağıda yer alan tanımlar ile verilmiştir (MEB, 2005; MEB, 2013).

- Problem Çözme: Plan yapma ve gerektiğinde plan ile stratejileri değiştirme verilere uygun yöntemleri belirleme ve yöntemleri değerlendirme, çözüme ulaşınca çözümün yararlılığını değerlendirme sürecidir.
- İlişkilendirme: Matematik kavramlarının kendi aralarında ve matematik kavramlarının diğer disiplinlerle ilişkisinin kurulmasıdır.
- İletişim: Matematiksel dili ve terminolojiyi etkili kullanmaktır.
- Akıl Yürütme: Sayılar, ifadeler, nicelikler ve şekiller arasındaki ilişkiyi belirleyerek problemleri çözmek için bilginin farklı öğelerini, ilgili temsilleri ve süreçleri

ilişkilendirerek, farklı problem çözme stratejileri ve farklı çözüm yollarını değerlendirerek, bilgi ve kanıt temelinde geçerli çıkarımlarda bulunmadır.

Yenilenen ilköğretim matematik dersi öğretim programının 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir başarısına etkisi ile cebirsel düşünme düzeyi ve cebir başarılarının bireysel özelliklerine göre değişimi Ceyhun (2012) tarafından araştırılmıştır. 14 ilköğretim okulundan rastgele seçilen 392'si 6. sınıf, 378'i 7. sınıf ve 394'ü 8. sınıf olmak üzere 1164 öğrenci ile çalışılmıştır. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin tespit edilmesi amacıyla ve ilköğretim matematik dersi öğretim programı ile yapılan öğretimin cebir başarısındaki değişimin belirlenmesi amacıyla iki farklı veri toplama aracı kullanılmıştır. Çalışma sonucunda, yenilenen ilköğretim matematik dersi öğretim programı temel alınarak yapılan dersler neticesinde öğrencilerin cebir başarının arttığı ve artan cebir başarısının cebirsel düşünme düzeylerine olumlu etkisi olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerini saptamak amacıyla Yenilmez ve Teke (2008) tarafından 2006-2007 öğretim yılında Eskişehir'de 6. Sınıfta olan 24 öğrenci ile çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada Altun'nun (2005) çalışmasında geliştirilen "Cebirsel Düşünme Gelişimi" testi kullanılarak tek gruplu ön test-son test yapılmıştır. 6. sınıf Matematik ve Sanat ünitesinin "Herkes Cebir Öğrenmeli" konusu beş hafta boyunca öğretmen kılavuz kitabına bağlı kalınarak işlenmiştir. Uygulama tamamlandığında son test uygulanmıştır. Veriler çözümlenirken bağımlı ve bağımsız örnekleme ilişkin t-testi analizlerinden yararlanılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre; ön test ve son test verileri arasında anlamlı farklılık görülmüştür. Ayrıca ön test ve son testte alınan toplam puanlar arasındaki gelişim cinsiyet, başarı ve matematik dersine olan ilgi değişkenleri açısından incelendiğinde başarı değişkeni için anlamlı olduğu görülmüştür.

Bu çalışmaların sonuçları değerlendirildiğinde yenilenen ilköğretim matematik öğretimi programının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine ve cebirsel başarılarına olumlu etkide bulunduğu söylenebilir. Cebirsel düşünmeyi Kieran ve Chalouh'da (1993) sembolleri anlamlı kullanarak sembol ve işlemlerin anlamlarını inşa etmek için matematiksel akıl yürütme süreci olarak tanımlamışlardır. Bu tanımdan yola çıkarak cebirsel düşünme ve cebir başarısı için akıl yürütmenin en önemli etken olduğu belirtilebilir. Yeni matematik öğretim programı ile de akıl yürütme etkeni vurgulanmakta ve matematik dersi ile cebir öğrenme alanı için vazgeçilmez unsurlar arasında görülmektedir.

2. 1. 2. Cebir ve Cebirsel Düşünme

Cebir, denklemleri çözmek amacıyla farklı yollar bulma çabasıyla ortaya çıkmış ve yaklaşık 4000 yıllık geçmişe sahip olan matematiğin en eski çalışma alanlarındadır (Göker, 1997'den akt., Çelik, 2007, s.1). Cebirin varlığıyla ilgili en eski bilgiler M. Ö. 1700-1600'lü yıllara dan kalan Mısır papirüslerinde bulunmuştur (Çelik, 2007). Mısırlılar ve Babilliler para, kar-zarar veya arazi ölçümleri ile ilgili problemlere çözüm bulmak amacıyla cebir kullanmıştır, ancak onların kullandığı cebir bugün bilinen ve kullanılan anlamda cebirden çok farklıdır. Cebirin tarihsel gelişimde bilinmeyen nicelikleri temsil etmek amacıyla çeşitli sembollerin kullanımı önemli kilometre taşlarından biri olmuştur (Baki, 2006). M. S. 825'de Harizmi "Cebri ve'l Mukabele" adlı eseri ilk cebir kitabı olmuştur. Harizmi bu kitabı sistematik bir şekilde sözel cebirsel çözümler sunmada ilk örneği olmuştur (Baki, 2006). Harizmi'nin kitabı 16. yüzyılın ortalarına kadar Avrupa'da okutulmuş ve cebir alanındaki önemli gelişmelere ışık tutmuştur. 16. yüzyılda Viette (1540-1603) ve 17. yüzyılda Descartes (1596-1650) katkıları ile modern ve çağdaş cebirin temelleri atılmıştır (Baki, 2006). Bundan sonraki süreçte cebirin ilgilendiği konular ve ne olduğuna dair tanımlar üzerine pek çok araştırma yapılmıştır.

Matematik en genel anlamda aritmetik, cebir ve geometri olmak üzere üç ana alandan oluşmaktadır. Birçok araştırmacı tarafından cebir "genelleştirilmiş aritmetik" olarak tanımlanmış. Bu tanım dikkate alındığında cebirin sayılar, işlemler ve özelliklerini en genel biçimde ele alan, bunun için çeşitli semboller kullanan ve kendine has özellikleri olan bir dil olarak ifade edilebilir. Bununla birlikte cebir için daha kapsayıcı tanımlarda yapılmaktadır (Usiskin, 1997; Baki, 2008). Bu tanımlamalara göre cebir sembolleri kullanarak çeşitli işlem ve algoritmaları yürütme, nicelikler arasındaki soyut ilişkileri inceleme, ortaya çıkarma genelleme yapma ve çok daha soyut kavramları (grup, halka, cisim vektör uzayı gibi) çalışmak için fırsatlar sunan bir alandır. Geçmişten günümüze cebirin kullanım amaçları ve tanımlarına bakıldığında ortak olarak vurgulanan noktaların problem çözme, düşünme ve düşünceleri sistematik bir yolla ifade etme amacıyla cebirin kullanıldığıdır. Bu ise bizi cebirsel düşünme tanımına götürür ki, cebirsel düşünme en genel anlamda belli bir probleme çözüm sunma sürecinde cebirin kendine has yol ve yöntemlerinin işe koşulması olarak ifade edilebilir. Bu tanımlama dikkate alındığında; cebirsel düşünme için cebir ile bağlantılı olduğu, ancak matematiksel düşünmenin özel bir formu olarak yalnızca cebir öğrenme alanı ile sınırlı olmadığı (Akkan, 2016; Çelik 2007) söylenebilir. Cebirsel düşünme ilgili literatürde bazı araştırmacılar tarafından farklı tanımlar ile yer almıştır. Literatürde yer alan bazı cebirsel düşünme tanımları şu şekildedir.

Kieran ve Chalouh'da (1993) sembolleri anlamlı kullanarak sembol ve işlemlerin anlamlarını inşa etmek için matematiksel akıl yürütme süreci olarak ifade etmişlerdir. Bu tanımda sembolleri anlamlı kullanma ve akıl yürütme vurgusu yapılmaktadır. Vance'de (1998) cebirsel düşünmenin değişkenler, genellemeler, farklı gösterimler ve hesaplamalardaki ilişkilerden elde edilen soyutlamalar içeren bir çeşit muhakeme yolu olduğunu belirterek soyutlayarak akıl yürütmeyi vurgulamıştır. Herbert ve Brown'da (1997) matematiksel bilgiyi; kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikler ve denklemlerle sunma, gerekli bilgileri seçerek varsayımlar oluşturma ve test etme, fonksiyonel ilişkileri teşhis etme bulguları yorumlama ve analiz etme olarak yorumlamıştır. Herbert ve Brown'un (1997) bu tanım ile cebirsel düşünmeyi bir süreç olarak nitelendirdikleri ve temsiller arası geçişler ile başlayan elde edilen verileri değerlendirerek çıkarımların yapılarak sonlandırılması olarak özetlemişlerdir. Cebirsel düşünme, fonksiyonel ilişkileri anlayarak ve cebirsel semboller kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı gösterimler ile temsil ederek günlük yaşamda karşılaşılan durumları analiz etmeyi gerektiren bir süreçtir (NCTM, 2000). Burada da sembol kullanımı, farklı gösterimleri kullanma ve günlük yaşamdaki problemleri analiz etme vurgusu karşımıza çıkmaktadır. Kaf'da (2007) cebirsel düşünmenin modellerle çalışarak matematiksel fikirleri geliştirmek ve açıklamak, kaydetmek ve düzenlemek amacıyla farklı gösterimler kullanma ve gösterimler arasında dönüşümler yapma gibi matematiksel beceriler içeren düşünme şekli olduğunu belirtmiştir. Kaf (2007) tanımı modellerle çalışma, gösterimler arası dönüşümler yapma odağındadır. Son olarak Kaya ve Keşan (2014)'de cebirsel düşünmeyi sembollere anlamlar yükleyerek cebirsel ilişkiler arasında ilişki kurmayı, temsiller kullanmayı, somut ve soyut kavramları tasvir etmeyi ve muhakeme ederek sonuçlara ulaşmayı sağlayan zihinsel aktivitelerin yansıması olarak ifade etmişlerdir. Bu tanımda da vurgunun diğerlerine benzer şekilde sembollerin anlamlamlandırılması ve temsiller kullanılmasına ek olarak zihinsel aktiviteler ile akıl yürütme üzerinde odaklandığı göze çarpmaktadır.

2. 1. 3. Cebirsel Akıl Yürütme ve Cebirsel Akıl Yürütme Göstergeleri

Çeşitli araştırmacılar tarafından yapılan cebirsel düşünme tanımları derlendiğinde cebirsel düşünme süreci için en önemli aracın akıl yürütme olduğu karşımıza çıkmaktadır. Cebirsel akıl yürütme, cebir becerileri kullanılarak cebirsel bir konuda tahminde ve varsayımda bulunarak değerlendirme yapma sürecidir. Kaput'da (1999) cebirsel akıl yürütmenin aşağıda verilen beş farklı biçiminden bahsetmektedir.

1. Matematiğin tümündeki aritmetik ve örüntülerden genelleme
2. Sembollerin anlamlı kullanımı
3. Sayı sistemindeki yapıların çalışılması
4. Fonksiyonlar ve örüntülerin çalışılması
5. Yukarıdaki dört maddeyi birleştirecek matematiksel modelleme süreci

Bu maddelerin içeriği ayrıntılandırılarak bazı alt başlıklara yer verilmiştir. Örneğin; sembollerin anlamlı kullanımı başlığı altında eşitlik işaretinin anlamı, eşitlik işaretinin denge olarak kavramsallaştırılması, ilişkisel düşünme, değişkenlerin anlamı, bilinmeyen değerler olarak kullanılan değişkenler, ifadeleri ve eşitlikleri sadeleştirmek alt başlıkları yer almaktadır. Sayı sistemlerindeki yapıyı görünür kılmak başlığı altında özellikler hakkında varsayımlarda bulunmak varsayımları doğrulamak yer almaktadır. Fonksiyonlar ve örüntüleri çalışma başlığı altında tekrar eden örüntülerin tanımlanması, genişletilmesi ve tahmin edilmesi, fonksiyonların grafikleri, grafiklerde değişim oranı ve eğim, orantısal ve orantısal olmayan durumlar alt başlıkları verilmiştir (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2014).

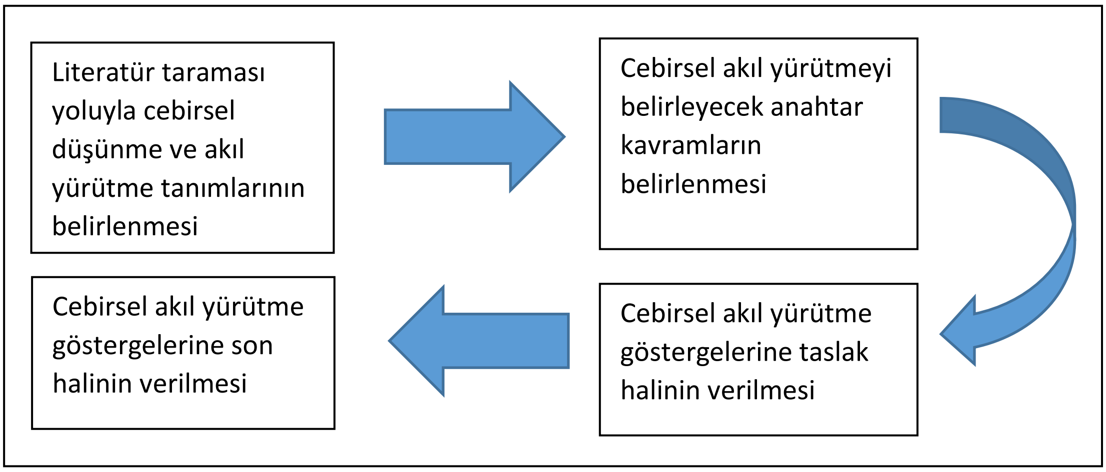
Bu araştırmada, cebirsel akıl yürütmeye hizmet eden sınıf ortamının tasarlanması ve ortamdan yansımalar yapmak amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin cebirsel akıl yürütme eylemlerini gözlenebilir davranışlara dönüştürmek için cebirsel akıl yürütme göstergeleri geliştirilmiştir. Bu göstergeler ders planı içine yerleştirilmiş ve planlar bu göstergelere hizmet edecek şekilde hazırlanmıştır. Göstergelerin geliştirilmesinde dört aşamalı bir yol kullanılmıştır.

Birinci Aşama : Cebirsel akıl yürütme göstergelerinin geliştirilmesi için literatür taraması yoluyla cebir, cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme üzerine gerçekleştirilen çalışmaların incelenerek, cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütmeye dair tanımların ele alınması.

İkinci Aşama : Birçok kuram ve pek çok araştırmacının cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme için geliştirdiği tanımların bir araya getirilerek incelenmesi,. her bir tanım için cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütmeyi tanımlayacak anahtar kelimeler ya da kavramların belirlenmesi.

Üçüncü Aşama : Cebirsel akıl yürütme için belirlenen anahtar kavramlar arasında sınıflandırmalar yapılarak ortak ana başlıklar altında isimlendirilmesi ve bu isimlendirme sonucunda göstergelere ilk taslak halinin verilmesi.

Dördüncü Aşama : Cebirsel akıl yürütme göstergelerinin taslak halinin yetersiz olduğu ve bazı başlıklarının aynı amaca hizmet ettiği düşüncesi ile geliştirilerek son haline ulaşması.



Şekil 2. Cebirsel akıl yürütme göstergelerinin geliştirilmesi için izlenen yol

2. 1. 3. 1. Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Akıl Yürütme Tanımlarının Belirlenmesi

Bu bölümde çalışmanın 2. 1. 2. ve 2. 1. 3. bölümlerinde kullanılan cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme ile ilgili çalışmalar ve tanımlar derlenerek değerlendirilmiştir.

2. 1. 3. 2. Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Akıl Yürütme Tanımlarından Çıkarılan Anahtar Kavramlar

Literatür taraması yoluyla cebirsel düşünme ve akıl yürütme sürecine dair tanımlarla açıklamalar incelenerek bunlar arasında ortak olarak vurgulanan ifadeler anahtar kavramlar olarak belirlenmiştir. Bu kavramlar cümleler ile öğrenci davranışlarına yönelik olarak ifade edilmiştir. Cebirsel göstergleri oluşturmak için belirlenen anahtar ifadeler aşağıda verilmektedir.

- Cebirin temel kavramı olan cebirsel sembolleri, kavramları muhteva eden değişkenleri nasıl ve ne şekilde kullanabileceğini anlar.
- Veri tabloları, örüntüler ve bunlar arasındaki ilişkileri görür ve anlar.
- İşlemsel-yapısal gelişimdeki geçişi yapar.
- Eşitlik kavramının anlamını, yapısını ve kullanımını anlar.
- Cebirsel kavram bilgilerini problem çözmede kullanır.
- Aritmetiksel işlemeler ile genellemeler yapar.
- Düşüncelerini anlamlı sembol sistemleri kullanarak formalize eder.
- Matematiksel ilişkileri kullanışlı şekilde tasvir eder.
- İlişkisel düşünür ve işlem yapar.
- Temsiller arasında ilişki kurar.

- Sayı sistemlerine dair anlayışlarını zenginleştirir ve daha yüksek seviyelerde soyutlamalar yapmak için temel sağlar.
- Bir varsayımı gösterme girişiminde bulunur.
- Tahminde bulunur.
- Veriler arasında bağlantı kurar.
- Kendi hatalarını analiz eder.
- Düşüncelerini, fikirlerini anlamlandırmak ve gerekçelendirmek için sorular sorar.
- Uygun terminolojiyi kullanır.
- Bulguları yorumlar.
- Gerekli bilgileri seçer ve ayıklar.
- Matematiksel bilgiyi; kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikler ve denklemler ile sunar.
- Bilinmeyenleri hesaplar.
- Varsayımları test eder.
- Fonksiyonel ilişkileri teşhis eder.
- Anlaşılmayan ya da yanlış anlaşılan durumları ortadan kaldırmak için sorular sorar.
- Somut, yarı-somut ve soyut kavramlar arasında geçişler yapar.
- Ters işlemleri kullanır.
- Kanıtlar ve doğrular.
- Farklı gösterimleri kullanır.
- Düşünce veya fikirlerini savunmak için tartışır.
- Sayısal ilişkileri kategorize eder.

2. 1. 3. 3. Cebirsel Akıl Yürütme Göstergelerinin Taslak Olarak Oluşturulması

Anahtar ifadelerin bazılarının aynı cümleler olmasa bile aynı anlamı ihtiva etmesinden dolayı bu ifadelerin sistematik olarak düzenlenmesi amacıyla bir taslak oluşturulmuştur. Bu taslakta aynı anlamı taşıyan ya da aynı amaca hizmet eden anahtar ifadeler birleştirilerek sınıflandırma yapılmıştır. Sınıflandırma ile beş ana başlık ve bu ana başlıklara ait alt başlıklar oluşturulmuştur. Alt başlıklar kodlanmış ve anahtar ifadelerin sınıflandırılması Tablo 2’te gösterilmiştir.

Tablo 1. Anahtar İfadelerin Sınıflandırılması

Anahtar İfadeler	Cebirsel Akıl Yürütme Göstergenin Kodu	Cebirsel Akıl Yürütme Göstergesi
• Anlaşılmayan ya da yanlış anlaşılan durumları ortadan kaldırmak için sorular sorar. • Düşüncelerini, fikirlerini anlamlandırmak ve gerekçelendirmek için sorular sorar. • Düşünce veya fikirlerini savunmak için tartışır.	*C1*:Anlamlandırma sürecine dair sorular sorar(Anlaşmazlıkları ve yanlış anlamaları ortadan kaldırmaya yönelik).	Cebirsel Düşünceleri, Fikirleri, Yaklaşımları Anlamlandırma ve Gerekçelendirme
• Bulguları yorumlar. • Gerekli bilgileri seçer ve ayıklar.	*C2*:Farklı konularda sonuç çıkarır ve destekler.	
• Veri tabloları, örüntüler ve bunlar arasındaki ilişkileri görür ve anlar. • Tahminde bulunur. • Bağlantı kurar.	*B1*: Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlarda bulunur varsayımı destekleyen veya çürüten örnekler sunar.	Bağlantı ve İlişki Kurma
• İlişkisel düşünür ve işlem yapar. • Bir varsayımı gösterme girişiminde bulunur. • Varsayımları test eder. • Kanıtlar ve doğrular.	*B2*: Varsayımları kanıtlar ve doğrular.	
• Aritmetiksel işlemelere genellemeler yapar. • Ters işlemleri kullanır. • Sayısal ilişkileri kategorize eder.	*B3*:Genellemeyi formüle eder, destekler ve değerlendirir.	

Tablo 1'in devamı

• Uygun terminolojiyi kullanır. • Cebirin temel kavramı olan cebirsel sembolleri, kavramları muhteva eden değişkenleri nasıl ve ne şekilde kullanabileceğini anlar. • Eşitlik kavramının anlamını, yapısını ve kullanımını anlar. • Düşüncelerini anlamlı sembol sistemleri kullanarak formalize eder.	*S1*: Sembollerin nasıl ve ne şekilde kullanılabileceğini anlar (+, -, :, x, = gibi işlemler ile a,b,x,… gibi harfli ifadelerin kullanımları hakkında fikir sahibi olur).	Sembolleri Anlamlı Kullanma
• Sayı sistemlerine dair anlayışlarını zenginleştirir ve daha yüksek seviyelerde soyutlamalar yapmak için temel sağlar.	*S2:Aritmetik özellikleri ve veriler arasındaki ilişkileri cebirsel ifadeler ile ifade eder.*	
• Bilinmeyenleri hesaplar.	*S3:Denklem çözer.*	
• Somut, yarı-somut ve soyut kavramlar arasında geçişler yapar.	*S4*-Somut, yarı-soyut ve soyut kavramlar arasında geçişler yapar.	
• Matematiksel ilişkileri kullanışlı şekilde tasvir eder. • Matematiksel bilgiyi; kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikler ve denklemler ile sunar.	*FG1*:Matematiksel bilgiyi, kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikle ve denklemler ile sunar.	Farklı Gösterimleri Kullanma
• Temsiller arasında ilişki kurar.	*FG2*:Temsiller arasında ilişki kurar.	
• İşlemsel-yapısal gelişimdeki geçişi yapar. • Farklı gösterimleri kullanır.	*FG3*:Her bir gösterim şekline ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yapar.	
• Cebirsel kavram bilgilerini problem çözmede kullanır. • Kendi hatalarını analiz eder. • Fonksiyonel ilişkileri teşhis eder.	*FÇ*-Fonksiyonel ilişkileri teşhis eder ve bu ilişkileri kullanarak mevcut durumu analiz eder ve çözüm sunar.	Fonksiyonlarla Çalışma

2. 1. 3. 4. Cebirsel Akıl Yürütme Göstergelerine Son Halinin Verilmesi

Cebirsel akıl yürütme göstergelerinin taslak formatı bir uzman araştırmacıyla gözden geçirildikten sonra yeniden düzenlenmiştir. Doğru başlık altında verilmediği düşünülen bazı başlıkların yeri değiştirilirken aynı amaca hizmet eden başlıklar da birleştirilmiştir. “Cebirsel Düşünceleri, Fikirleri, Yaklaşımları Anlamlandırma ve Gerekçelendirme” ana başlığı değiştirilerek “gerekçelendirme” bu başlıktan ayrılmıştır. Bu başlık altındaki “C2: Farklı konularda sonuç çıkarır ve destekler “ alt başlığı buradan çıkartılarak yeni oluşturulan “CY-Cebirsel Düşünceleri, Fikirleri, Yaklaşımları Yorumlama ve Değerlendirme“ ana başlığı altında düşünülmüştür. “Bağlantı ve İlişki Kurma” ana başlığı altındaki ”B1: Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlarda bulunur varsayımı destekleyen veya çürüten örnekler sunar. ” ve ”B2: Varsayımları kanıtlar ve doğrular. ” alt başlıkları birlikte düşünülmüş ve birleştirilerek “BK1: Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımda bulunur ve varsayımları gerekçelendirir, kanıtlar veya çürütür. ” oluşturulmuştur. “B3:Genellemeyi formüle eder, destekler ve değerlendirir” göstergesi “BK2: Aritmetik özellikleri ve veriler arasındaki ilişkileri kullanarak genelleme yapar ve destekler” olarak değiştirilmiştir. Sembolleri Anlamlı Kullanma ana başlığı altında yer alan “S1: Sembollerin nasıl ve ne şekilde kullanılabileceğini anlar (+, -, :, x, = gibi işlemler ile a,b,x,… gibi harfli ifadelerin kullanımları hakkında fikir sahibi olur)”, “S2:Aritmetik özellikleri ve veriler arasındaki ilişkileri cebirsel ifadeler ile ifade eder. ”, “S4-Somut, yarı-soyut ve soyut kavramlar arasında geçişler yapar” alt başlıkları aynı amaca hizmet ettikleri düşüncesi ile birleştirilerek “SK1: Ulaşılan genellemeleri cebirsel ifadeler ile gösterir (Somut-soyut kavramlar arasında geçişler yapar.)” başlığına dönüştürülmüştür. ”S3:Denklem çözer” başlığı genişletilerek “SK2:Denklem kurar ve çözer” olarak adlandırılmıştır. “Farklı Gösterimleri Kullanma” ana başlığı altındaki “FG1:Matematiksel bilgiyi, kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikle ve denklemler ile sunar” değiştirilmemiştir. “FG2:Temsiller arasında ilişki kurar” ve “FG3:Her bir gösterim şekline ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yapar” başlıklarının içeriğinin benzer olması ve birbirini tamamlıyor olması gerekçesi ile birleştirilerek “FG2:Her bir gösterim şekline ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yapar” başlığına çevrilmiştir. Taslak göstergelerde yer almayan “ED-Eleştirel Düşünme” başlığı, cebirsel düşünmede karşılaştırma yapma ve kritik yapmanın gerekliliği düşüncesi ile göstergelere eklenmiştir. Son olarak, “Fonksiyonlarla Çalışma” başlığı kapsamı genişletilerek yeniden düzenlenmiş ve “CY: Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri, Yaklaşımları Yorumlama ve Değerlendirme” başlığına dönüştürülmüştür. Yapılan değişiklikler kapsamında cebirsel akıl yürütme göstergelerinin son hali Tablo 2’de verilmektedir. Çalışma boyunca cebirsel göstergeler Tablo 2’de yer alan formu ile kullanılacaktır.

Tablo 2. Cebirsel Akıl Yürütme Göstergelerinin Son Hali

Cebirsel Akıl Yürütme Göstergeleri
CA : Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri, Yaklaşımları Anlamlandırma: Zihinsel anlamlandırma sürecine dair sorular sorar.
BK : Bağlantı ve İlişki Kurma: *BK1* : Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımda bulunur ve varsayımları gerekçelendirir, kanıtlar veya çürütür. *BK2* : Aritmetik özellikleri ve veriler arasındaki ilişkileri kullanarak genelleme yapar ve destekler.
FG : Farklı Gösterimleri Kullanma *FG1* : Matematiksel bilgiyi, kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafikle ve denklemler ile sunar. *FG2* : Her bir gösterim şekline ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yapar.
SK : Sembolleri Anlamlı Kullanma *SK1* : Ulaşılan genellemeleri cebirsel ifadeler ile gösterir(Somut-soyut kavramlar arasında geçişler yapar.) *SK2* : Denklem kurar ve çözer.
ED : Eleştirel Düşünme: Farklı problemlere ait temsilleri karşılaştırır.
CY : Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri, Yaklaşımları Yorumlama ve Değerlendirme: Zihinsel anlamlandırma süreci sonunda verileri yorumlar, değerlendirir, çıkarımda bulunur ve problem çözer.

2. 1. 4. Cebir, Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Akıl Yürütme ile İlgili Çalışmalar

Cebir aritmetik temeli üzerine yapılanmakta ve bu iki alan arasında karşılıklı ve yoğun ilişki bulunmaktadır (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2011). Cebir ile öğrencilerin tanışması ilkokul dönemlerinden itibaren aritmetiksel ilişkilerin yoğun kullanıldığı örüntüler ile başlamaktadır. Cebirsel olarak sembollerin kullanımı ilköğretim matematik öğretimi altıncı sınıf programı ile görülmektedir. Sembollerin kullanımı ile birlikte soyut yaklaşımların daha fazla kullanıldığı cebirsel uygulamaların anlaşılmasında ve anlatımında zorlukların ortaya çıkmaktadır.

Öğrencilerin cebirsel kavramları ve konuları anlamakta neden zorlandıkları Dede ve Argün (2003) tarafından incelenmiştir. Cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasını zorlaştıran faktörler, konuyla ilgili literatürden çalışmalardan yararlanılarak irdelenmiştir. Çalışmada, ana faktörler cebirin yapısı, öğrencilerin zihinsel gelişimiyle hazırbulunuşluk düzeyleri ve cebir öğretimindeki eksikler olarak belirlenmiştir. Çalışma sonucunda, cebir öğretimi sırasında belirlenen bu faktörlerin öğretmenler tarafından göz önünde bulundurulması gerektiği ve yeni öğretim tekniklerinden faydalanılabileceği vurgulanmıştır.

Cebirsel düşünme sembolleri anlamlı olarak kullanabilme üzerine yapılanır ve ilerler. Cebirsel düşünmenin doğru başlaması ve ilerlemesi için sembollerin anlamlarının doğru kodlanması gerekmektedir. Cebirsel sembollerin anlaşılması ve kullanımı ile ilgili çalışmalara örnekler aşağıda verilmiştir.

Ortaokul öğrencilerinin iki temel cebirsel fikri (eşitlik ve değişken) anlamalarını ve bu iki düşüncenin kullanılmasını gerektiren problemlerle ilgili anlayışlarına Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens (2005) tarafından odaklanılmıştır. Çalışmada, birçok eğitimcinin cebirsel akıl yürütmenin K-12 sınıf seviyelerine eklenmesi gerektiğini düşünmesiyle birlikte bu alandaki son çalışmaların özellikle cebirsel muhakemenin gelişimine odaklanarak, ortaokul matematiği bağlamında cebir reformunu araştırmaya yöneldiği belirtilmektedir. Çalışmaya altıyla sekizinci sınıf arasındaki 373 ortaokul öğrencisi katılmıştır. Veriler öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramlarını anlamalarına yönelik yazılı bir değerlendirmeyle elde edilmiş ve kodlanmıştır. Çalışma sonucunda, öğrencilerin cebir için nihai başarıları, matematiksel denklik anlayışlarını ve eşittir işaretinin anlamını geliştirmeye yönelik çabalarına bağlı olabileceği ve sembollerin çoklu değer yorumlamasını teşvik etmesinin önemi vurgulanmaktadır.

Capraro ve Joffrion (2006) ortaokul öğrencilerinin anlama ve kelime ölçütlerinin kavramsal veya prosedürel göstergeleri kullanarak İngilizce dilini matematiksel sembollere veya tersine çevirmek için nasıl bir imkan sağladığını araştırmışlardır. Çalışmalarında, lineer denklemleri temsil etmek ve çözmek için sembolik cebir kullanmanın NTCM ‘de (2000) öğrencilerin cebir içerik standardı içindeki beklentilerinden biri olduğu vurgulanarak bu kavramların, resmi bir cebir dersinden önce bile, onları gelecekteki başarıya hazırladığını belirtmişlerdir. Öğrencilerin cebirsel anlayışı geliştirilmeye başlanırken dengeli bir kavramsal (anlama bilgisi) ve prosedürel (işlem bilgisi) becerilerine sahip olması gerektiğini savunarak 25 matematik öğretmeninin sınıfında toplam 668 öğrenci ile çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada cebirsel görevler verilmiş ve rastgele seçilen 60 yanlış cevap kullanılarak bir desen araştırması yapılmıştır. Ayrıca görevlerini başarıyla tamamlayan 5 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Çalışma sonucunda sadece öğrencilerin %9 ‘u verilen görevlerin tamamını tamamladığı görülmüş ve öğrencilerin yedinci ve sekizinci sınıfta bile kavramsal ve prosedürel olarak metinden matematiksel denklemlere geçmeye hazır olmadıkları sonucuna varılmıştır.

Bağdat ve Anapa-Saban (2014) cebirsel düşünme becerilerinde olan sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanabilme, genellemeleri formüle edebilme ve çoklu gösterimlerden yararlanabilme becerilerini SOLO Taksonomisi yardımıyla 8. sınıflar için incelemişlerdir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmış ve çalışma 15 sekizinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Uzman görüşlüleriyle hazırlanan sekiz problem öğrencilere yönlendirilmiş ve bu problemler üzerinden öğrencilerle klinik görüşmeler yürütülmüştür. Veri toplama aracı olarak yazıya dökülen klinik görüşme video kayıtları ve araştırmacı notları kullanılmış ve toplanan veriler çift-kodlama yöntemiyle (Miles ve Huberman, 1994) analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda, öğrencilerin en çok sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerisi olduğu görülmüş ve öğrencilerin çoğunun SOLO Taksonomisine göre ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesinin altında kaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca ders notlarıyla cebirsel düşünme becerisi arasında doğrusal bir ilişki olduğu sonucuna varmışlardır.

Yeni program ile desteklenen cebirsel akıl yürütme eylemi de araştırmalara konu olmuştur. Bazı araştırmalarda öğrencilerin cebirsel akıl yürütmeleri cebirsel konular temel alınarak ya da süreç olarak gözlemlenmiştir.

Bike-Kalkan (2014) çalışmasında, cebir öğrenme alanında yer alan doğrusal denklemler alt öğrenme alanından doğrusal ilişki ve eğim kavramlarına ilişkin sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapılarının belirlenmesini amaçlamıştır. Veri toplama aracı olarak açık uçlu sorular ve öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler kullanmıştır. Eskişehir'de yürütülen çalışmaya sekizinci sınıflardan 103 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere açık uçlu sorular yönlendirilmiş ve verilen cevaplar iki uzman tarafından ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Verilen cevaplara göre beş orta ve beş yüksek düzey öğrenci seçilerek video ile kayıt altına alınan klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Çalışmada verilerin çözümü ve yorumlanmasında ise nitel araştırma yöntemlerinden biri olan karma yöntem tekniği kullanılmıştır. Çalışmada, öğrencilerin doğrusal ilişki, eğim ve doğrunun grafiği konularında zorluk yaşadıkları ve kavram yanılgılarına sahip oldukları, benimsedikleri kavramların çoğunun ise ezber bilgi olduğu sonucuna varılmıştır.

Ellis (2011) çalışmasında, doğrudan değerler kullanarak akıl yürütmenin ortaokul öğrencilerinin birinci ve ikinci dereceden fonksiyonları anlamalarını desteklemesinin yollarını açıklamıştır. Ellis, fonksiyonları anlamanın cebirsel akıl yürütmenin kritik bir adımı olduğunu ve fonksiyonel ilişkiler kurmanın öğrencilerin ilişkisel düşünmelerini küçük sınıflarda teşvik eden önemli bir aktivite olduğunu belirtmiştir. Çalışmada, fonksiyonel düşünmeyi geliştirmenin bir yolunun öğrencilerin nicel değerler kullanarak akıl yürütmeyi kullanılması olduğu belirtilmiştir. Nicel ilişkilerin kurulmasının fonksiyon anlayışını nasıl destekleyebileceği ve nasıl kullanılabileceği irdelenmiştir.

Kaya ve Keşan (2017) çalışmalarında, cebirsel düşünmenin sadece matematik derslerinde değil yaşamın her alanına yayılmış bir zihinsel aktivite olmasına rağmen cebir öğrenimi ile ilgili yapılan araştırmaların birçoğunda öğrencilerin cebirsel düşünmeyle akıl yürütmede ve cebiri günlük yaşamla ilişkilendirmede zorlandıklarını belirtmişlerdir. Çalışmalarında, ilköğretim seviyesindeki öğrencilerin cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerilerinin önemini tartışmışlar ve yapılan çalışmaların sonuçları değerlendirerek yaşanan zorlukların gerekçesini ortaya koymaya çalışmışlardır.

Kaya ve diğerleri (2016) öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerine yönelik başarı düzeylerinin belirlenmesini yedinci sınıf düzeyinde yapmışlardır. Veri toplama aracı olarak Kaya (2015) tarafından geliştirilen 16 çoktan seçmeli ve 22 açık uçlu sorudan oluşan Cebirsel Muhakeme Değerlendirme Aracı kullanılmış ve çalışmada nicel yöntem tercih edilmiştir. Çalışma İzmir'de 76 erkek ve 70 kız olmak üzere 146 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmada, öğrencilerin cebirsel yapıları ve ilişkileri tanıyabilme ve kullanabilme, bir veriye ait farklı cebirsel gösterimleri kullanabilme, uygun cebirsel muhakeme yolunu belirleyebilme, çıkarımda bulunabilme ve buldukları çıkarımlara yönelik cebirsel işlemler yapabilme, sonucun doğruluğunu ve çözüm yolunu test ederek karar verebilmeyle farklı problemleri çözebilme becerilerine yönelik aldıkları test puanlarının düşük veya orta düzeyde olduğu görülmüştür. Bunlara ek olarak, kız ve erkek öğrencilerin sahip oldukları cebirsel muhakeme becerilerine yönelik anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır.

7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme süreçleri Öz (2017) tarafından incelenmiştir Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden bütüncül durum çalışması deseni kullanmamıştır. İki öğretmen ve bu öğretmenlerin sınıfındaki altışar öğrenci katılımcı olarak seçilmiştir. Çalışmanın güvenirliliğini sağlamak adına çalışmanın yürütüldüğü okuldan başka bir okulda çalışmanın benzer katılımcılarla pilot uygulaması gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamadan elde edilen veriler uzamanla değerlendirilerek asıl uygulamaya son hali verilmiştir. Veri toplama aracı olarak seçilen dokuz problem kullanılmıştır. Her bir öğrenciyle iki adet toplamda 24 adet yapılandırılmış mülakat yapılmıştır. Elde edilen veriler betimsel analiz kullanılarak değerlendirilmiştir. Çalışma sonucunda 7. sınıf öğrencilerinin karşılaştıkları problem durumları karşısında, benzetmeye dayalı akıl yürütmenin alt türlerinden olan algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmeyi daha sık kullandıklarını görülmüştür. Ayrıca öğretmenler sınıflarında sundukları matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirildiğinde, öğretmenlerin zaman zaman çeşitli fırsatlar sunmalarına rağmen genel olarak matematiksel akıl yürütmeyi destekleyebilecek sınırlı fırsatlar sağladığı sonucuna varılmıştır.

Farklı cebir öğretme yaklaşımlarının cebir öğretimine etkisinin araştırıldığı Kanbir (2016)'in çalışmasında, yedinci sınıflardan oluşan üç sınıf içeren bir öğretme-müdahale çalışması açıklanmış ve müdahalelerden kaynaklanan verilerin analizi tartışılmıştır. Üç cebire giriş yaklaşımı (görsel-sayı yaklaşımı, modelleme yaklaşımı ve yapısal yaklaşımı) üç katılımcı sınıfın her birine sadece bir yaklaşım kullanılarak uygulanmıştır. Veri toplama aracı olarak öğretme öncesi ve öğretme sonrası cebir hazırlık testi, görsel sayı testi, modelleme testi ve yapı testinin yanı sıra röportaj kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucundaki ilk bulgular, modelleme sınıfının ortalama kazanç puanının sıfırdan önemli ölçüde farklı olmasına karşın, diğer iki grup için ortalama kazanç puanlarının yalnızca biraz arttığını göstermiştir.

Yılmaz (2015) çalışmasında, cebir öğretiminde yazma etkinlikleri kullanmanın öğrencilerin başarılarına olan etkisini araştırmıştır. Ankara'da yapılan çalışma 24'ü deney ve 22'si kontrol olmak üzere toplamda 46 yedinci sınıf öğrencisiyle gerçekleştirilmiştir. "Tam sayılar, cebir ve geometri" ünitesindeki cebir öğrenme alanındaki konuların işlendiği çalışma 3 hafta boyunca devam etmiştir. Nicel (test) ve nitel (görüşme) beraber kullanılarak veriler toplanmıştır. Deney grubundaki öğrencilere yazma etkinlikleri yapılmış ve araştırmacı tarafında geri dönütler verilirken kontrol grubuna herhangi bir müdahale yapılmamıştır. Veriler cebir testi ve SPSS programı kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda, deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubuna göre daha başarılı olduğu ve kovaryans analizleri sonucunda da bu başarıdaki farkın anlamlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, görüşmelerden elde edilen sonuçlara göre yazma etkinliğinin öğrencilerin dersi anlamasına ve hatırlamasına yardım ettiği sonucuna varılmıştır.

Her öğrenme alanında olduğu gibi cebirde de öğrencilerin kavram yanılgıları olmaktadır. Bu yanılgılar doğru düşünmeyi ve akıl yürütmeyi engellemektedir. Cebir öğrenme alanında karşılaşılan olası güçlükler ve kavram yanılgıları için etkinlikler üzerine tasarlanan öğrenme ortamlarının karşılaşılan kavram yanılgılarını gidermedeki etkililiğinin belirlenmesi Erdem ve Aktaş (2018) tarafından 7. sınıflar için çalışılmıştır. Araştırmacı öğretmen modelinin kullanıldığı çalışma, nitel ve nicel araştırmaların bir sentezi olan karma yöntemle desteklenmiştir. 26 soruluk kavram testi geliştirilerek Van'daki bir ilköğretim okulundaki 54 yedinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Böylece uygulamaya katılan öğrencilerin cebir öğrenme alanında yer alan kavramsal anlamaları ve kavram yanılgıları belirlenmeye çalışılmıştır. Deney ve kontrol grubundan seçilen 12 öğrenci ile yapılandırılmamış görüşmeler yapıldıktan sonra bulgular düzenlenmiştir. Çalışmada, etkinlik temelli öğretimin kavram yanılgılarının giderilmesinde daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin yoğun olarak sahip olduğu kavram yanılgılarının cebirdeki harflerin değişik kullanımlarını anlayamamaları, harflerin sadece rakam olabileceğini düşünmeleri, her harfin sadece bir değere sahip olduğuna inanmaları ve ab gibi iki harften oluşan bir değişkenin iki basamaklı olduğuna inanmaları olduğu gösterilmiştir.

Cebirsel akıl yürütme konusunda durum tespitinden ziyade uygulamaya ve uygulamalardan yansımalara yönelik Blanton ve Kaput'un (2005) çalışmalarında, öğretmenin öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinin gelişimini destekleyen bir sınıf inşa etmesinin yolları ve bu yolların ne derece etkili olduğunu araştırmışlardır. Uzun süreli bir profesyonel gelişim projesi kapsamında bir öğretmenin sınıf çalışmaları takip edilerek veriler elde edilmiştir. Bir yıl boyunca öğretmenin cebirsel akıl yürütmeyi günlük derslerin içine ne kadar kattığı ve bunun öğrencilerin akıl yürütmesi üzerine etkisi bir yıl süreyle araştırılmıştır. Öğretmenin öğrencilere cebirsel akıl yürütme sağlama kapasitesinin ölçütü olarak öğrencilerin cebirsel akıl yürütme türleri, bunların sıklıkları ve bütünleşme biçimleri ve öğretimde uygulama teknikleri kullanılmıştır. Çalışmada, öğretmenin cebirsel akıl yürütmeyi derslere entegre ederek, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinde pozitif kaymalar sağlayabileceği sonucuna varılmıştır.

2. 1. 5. Ders Analizi Çatısı

Bu çalışmada video kayıtları ile toplanan veriler Santagata, Zannoni ve Stigler (2007) tarafından geliştirilen ders analiz çatısı (lesson analysis framework) kullanılarak analiz edilmiştir. Etkili matematik öğretiminin gerçekleşmesi için öğretmen öğrenciye odaklanarak anlamasını değerlendirir, öğretimde karşılaşacağı güçlüklerin farkında olur ve güçlükleri aşmak için yollar geliştirme yeterliliğine sahiptir (Ball, Thames ve Phelps,2008). Öğretmenin bu yeterliliğe sahip olması için öğretmeyi öğrenmesi (learning from teaching) gerekmektedir. Ders analizinin de öğretmeyi öğrenme yaklaşımı için en iyi fırsatlardan olduğu savunulmuştur (Hiebert ve Morris, 2012; Santagata ve Guarino, 2011). Öğretme bilgisinin gelişimi için Sun ve Van Es'de (2015) bu sistematik analizlerin önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Ders analizi çatısı ile "bir dersin bütün olarak etkililiği nasıl anlaşılır" sorusuna odaklanılmaktadır. (Hiebert, Morris, Berk ve Jansen, 2007; Santagata vd., 2007)'de belirtildiği formuyla ders analizi çatısı dört temel başlıktan oluşmaktadır. Bu başlıklar dersin öğrenme hedeflerinin tanımlanması, öğrenci düşünmesi ve öğrenmesinin analizi, yapılan öğretim etkinliğini kritik etme, öğretimi geliştirici önerilerde bulunma, alternatif öneriler sunmadır.

Ders analizi çatısı ile dersin amaçlarına, öğrenci düşünmesine, öğretim yöntem ve tekniklerine, ölçme ve değerlendirmeye odaklanılır. Bu durumlar detaylı düşünülerek öneriler geliştirilir. Dersin öğrenme hedefleri ile derste amaçlanan ve öğrenciler tarafından anlaşılması beklenen temel fikrin ne olduğuna odaklanır. Öğrenci düşünmesi aşamasında öğrencinin dersin hedeflerine ulaşma durumu değerlendirilir. Öğretimin etkililiği başlığında kullanılan materyal/teknik/yöntemin öğrencileri hedeflere ulaştırma konusundaki başarısı ile yönlendirilen soruların hedeflere ulaştırma konusundaki başarısı değerlendirilir. Alternatif öneriler sunmada dersin geliştirilmesine yönelik tavsiyelerde bulunulur.

Ders analiz çatısıyla ilgili literatüdeki bazı çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Santagata ve diğerleri (2007) çalışmalarında hizmet öncesi matematik öğretmenleri için ders analizi üzerine video tabanlı bir programı İtalya Lazio Üniversitesi'ndeki öğretmen eğitimi programının bir parçası olarak iki yıl üst üste uygulamışlardır. Çalışmada iki sorunun cevabına odaklanılmıştır: "Öğretmen adayları videoya kaydedilmiş derslerin analizinden ne öğrenebilir?" ve "Öğretmen adaylarının analiz kabiliyeti ve gelişimi nasıl ölçülebilir?". Öğretmen adaylarının dersleri analiz etme yetenekleri açık uçlu bir ön değerlendirme ve değerlendirme sonrasında ölçülmüştür. Değerlendirmede, öğretmen adaylarından ilgi çekici buldukları olayları (öğretmenlerin eylemleri/kararları; öğrencilerin davranışları/öğrenmeleri; ve matematiksel içerik) işaretlemeleri ve yorumlamaları istenmiştir. Beş kritere dayanan bir kodlama sistemi geliştirilmiştir: detaylandırma, matematik içeriği, öğrenci öğrenmesi, eleştirel yaklaşım ve alternatif stratejiler. Çalışmada, öğretimi analiz etme kabiliyeti beş kriterin hepsinde de önemli ölçüde iyileşmiştir. Çalışma sonucunda elde edilen verilerin hem ders analizi yeteneklerini ölçen bir aracın hem de öğretmen öğrenmesi için bir modelin geliştirilmesi adına ümit vaat ettiği sonucuna varılmıştır.

Öğretmen adaylarının öğretmenlik eğitimi almasını ve öğretmeyi öğrenmelerine yardımcı olmayı amaçlayan öğretmen hazırlık programları için bir çatı Hiebert ve diğerleri (2007) tarafından önerilmiştir. Çatı, zaman içinde etkili bir öğretmen olmak için kasıtlı, sistematik bir yol sağlayan bir dizi yetkinliğin tanımlanmasına yöneliktir. Çatı, öğretimin günlük aktivitesine dayanan dört beceriden oluşur. Çatı, kasıtlı ve sistematik olarak kullanıldığında sınıf dersleri sırasında öğretme ve öğrenme arasındaki sebep-sonuç ilişkileri hakkında hipotez oluşturma ve test etme sürecinden oluşmaktadır. Bu becerilerin kazanılmasındaki zorluklara rağmen, yazarlar, çatının geleneksel programlarınkinden daha gerçekçi ve daha umut verici öğretmen başlangıç yeterliliklerini ortaya koyduğunu iddia etmişlerdir.

Santagata ve Guarino (2011) çalışmalarında matematik öğretiminden Öğrenmeyi Öğrenme isimli projeleri hakkında bilgi vermişlerdir. Bu projede video, öğretmen adaylarının yönelimlerini, matematik öğretimini analiz etme ve yansıtmaya yönelik bilgi ve becerilerini geliştirmek için kullanılmaktadır. Öğretmen adaylarının öğretimden ders alma yeteneklerini geliştirmeyi amaçlayan bir kursta videoyu kullanma yolları tartışılmıştır. Proje sonucunda, öğretmen adaylarının kursa katılma sonucunda ders analizi becerilerindeki değişim rapor edilmiştir.

Öğretmen hazırlığına yönelik uygulamaya dayalı yaklaşımların, üniversite dersleri ile saha çalışması deneyimleri arasındaki mesafeyi kapatmaya yardımcı olduğu yönünde bir fikir birliğinin olduğu Santagata ve Yeh (2014) tarafından belirtilmiştir. Buna karşın, az sayıda deneysel araştırmada öğretmenlerin bu yaklaşımdan öğrendiklerinin araştırıldığını vurgulamışlardır. Bundan yola çıkarak çalışmalarında video ve uygulama temelli bir kursun öğretmen adaylarının matematik dersi uygulamalarına ve kendi öğretimlerinin analizine etkisini incelemişlerdir. Araştırmaya iki sınıf öğretmen adayı grubu katılmıştır; biri kursa katılan, diğeri katılmayandır. Çalışma bulgularının, kursa katılanların öğrencinin görünür düşünmesini sağlamasına ve kendi öğretimlerinin kanıta dayalı analizlerini yapmalarına yardımcı olduğunu ortaya koyduğu rapor edilmiştir.

Öğrenme-öğretme etkinliklerini video kayıtları ile analiz etme ve yansıtma uygulamalarının matematik öğretmeni adayların öğrenciyi tanıma bilgisinin gelişimini incelemek amacıyla Baki, Çelik, Güler ve Sönmez'de (2018) 24 öğretmen adayı ile çalışma yürütmüşlerdir. Gönüllülük esası ile oluşturulan ilk 12 kişilik grupta öğretmenlik uygulamaları dersi alışılan şekilde, ikinci 12 kişilik grupta ise ders analiz çatısı entegre edilerek gerçekleştirilmiştir. Adayların öğrenciyi tanıma bilgisini değerlendirmek amacıyla 8 maddeli açık uçlu testten yararlanılmıştır. Çalışma sonucunda ikinci gruptaki öğretmen adaylarının öğrencilerin öğrenme güçlüklerinin nedenlerini yorumlamada ve bu durum için öneri geliştirmede daha başarılı oldukları gözlemlenmiştir.

Baki ve Sönmez (2018) Okul Deneyimi derslerinde kullanılan ders analizi etkinliklerinin öğretmen adaylarının öğretme bilgisi üzerine etkisini incelemişlerdir. Çalışma ortaokul matematik öğretmeni adayları ile yürütülmüş ve veri toplama araçları olarak adayların ders analizi ve dönem sonu değerlendirme raporları video kayıtlar, gözlem ve alan notları kullanılarak adaylar ile mülakat yapılmıştır. Veriler içerik analizi kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarında öğrenci açısından düşünme bilincinin geliştiği gözlemlenmiştir.

2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

İlgili literatür incelendiğinde öğrencilerin cebirsel kavramları ve konuları anlamakta zorlanma nedenleri (Dede ve Argün, 2003; Erdem ve Aktaş, 2018), cebirsel sembollerin kullanımı (Bağdat ve Anapa-Saban, 2014; Capraro ve Joffrion, 2006; Knuth vd., 2005), cebir öğretiminde yazma etkinliklerinin etkisi (Yılmaz, 2015), cebirin farklı yaklaşımlar ile öğretimi (Kanbir, 2016), yenilenen ilköğretim matematik dersi öğretim programının cebir başarısına etkisi (Ceyhun, 2012; Yenilmez ve Teke, 2008), cebirsel akıl yürütme ve muhakeme etme (Bike-Kalkan, 2014; Blanton ve Kaput, 2005; Ellis, 2011; Kaya ve Keşan, 2017; Kaya vd., 2016; Öz, 2017) çalışmalarının yer aldığı görülmektedir. Öğretmenin öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinin gelişimini destekleyen bir sınıf inşa etmenin yolları ve bu yolların ne derece etkili olduğu Blanton ve Kaput, (2005) tarafından incelenmiştir.

Cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme konulu çalışmaların yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Cebir öğrenimi ve öğretimi ile ilgili çalışmalar dünyada ve ülkemizde sınırlı sayıdadır. Var olan çalışmalarda da durum tespiti yapılmıştır. Uygulamaya yönelik çalışmalara ihtiyaç vardır.

Yapılan çalışmaların sonuçları arasında öğrencilerin özellikle cebiri anlamakta ve öğrenmekte zorlandıkları, bu zorlukları önlemek için alternatif öğretim yaklaşımları uygulanabileceği, yeni matematik öğretim programlarının öğrencilerin cebir başarılarına olumlu etki yaptığı, yazma ve not etme etkinliğinin cebir öğretimine olumlu katkısı, öğrencilerin somut soyut geçişlerde zorlandıkları, sembollerle ifade etmekte sıkıntı yaşadıkları, cebirsel akıl yürütme ve muhakeme etmede zorluk yaşadıkları ve kavram yanılgılarına sahip oldukları sonuçlarına varılmıştır.

Tüm bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda, öğretim ortamındaki etkileşimlerin incelenerek yorumlanmasına dayalı cebirsel akıl yürütme ortamına dair ipuçları veren ve ortamdan yansımaların yapıldığı bir çalışmanın gerekliliği ve alana katkılar sunacağı düşünülmektedir.

3. YÖNTEM

Bu bölümünde, araştırma modeline, araştırma grubuna, ders planlarının geliştirilmesine, uygulama sürecine verilerin toplanmasına verilerin analizine ve araştırmanın geçerliliği ile güvenilirliğine yer verilmiştir.

3. 1. Araştırma Modeli

Bu çalışmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamından yansımalar yapmak amaçlanmaktadır. Sınıf ortamından öğrencilere ve ders akışına yönelik dönütlere doğrudan ulaşabilmesi adına araştırmayı yapan aynı zamanda dersi uygulayan matematik öğretmenidir. Bu nedenle araştırmada uygulamacıların, öğretmenlerin, eğitim yöneticisi ve denetçilerin işlerini daha iyi anlamalarına yardımcı olan (Glanz, 1999) eylem araştırması kullanılmıştır. Eylem araştırması Avrupa ve Amerika'da savaşlar esnasında sosyal bilimcilerin bazı problemlere çözümler geliştirmeleri amacıyla ortaya çıkmıştır (Köklü, 2001). Eylem araştırması, problemi tanımlayarak çözmek için çaba harcamak ve başarı durumuna göre yeniden deneyerek yaparak yaşayarak öğrenmedir (O'Brien, 2003). Eylem araştırmaları, uygulayıcıların ve problem odağında olanlarında katılımıyla yapılan uygulamanın değerlendirildiği ve durumu iyileştirmek için önlemlerin belirtildiği araştırmalardır (Karasar, 2009).

Eylem araştırması eğitim literatüründe uygulayıcı araştırması, öğretmen araştırması, uygulanabilir araştırma, etkileşim araştırması, bilim adamı-araştırmacı olarak öğretmen, sınıf araştırması ve uygulama merkezli araştırma gibi farklı terimler ile literatürde yer almaktadır (Abdal-Haqq, 1995; Downhower, Melvin ve Sizemore, 1990; Williamson, 1992'den akt., Köklü 2001, s.35). Eğitim alanında görülmesi John Dewey' in çalışmaları ile gerçekleşmiştir. Elliot (1991) eğitimde eylem araştırmalarının temelinin bilgi üretmekten çok uygulamayı geliştirmek olduğu belirtilmiştir. Bu bağlamda eylem araştırmasının eğitim alanındaki en önemli amacının, eğitim dünyasında ortaya çıkan gerçekleri sistematik olarak anlamak ve değiştirerek geliştirmeye çalışmaktır (Kuzu, 2009) denilebilir. Öğretmenler eğitim sürecinin en önemli uygulayıcılarından olup özellikle uygulamada karşılaşılan problemlere en vakıf kişilerdir. Bu yüzden de öğretmenin doğrudan katılımı ile gerçekleştirilen eylem araştırmalarında öğretmenin yaptığı işi sürekli araştırarak incelemesi, değişime ve gelişime paralel olarak problemlere çözümler üretmesi beklenir. Sonuç olarak eylem araştırması araştırma yöntemleri ve uygulamalarında öğretmenlere bilgi ve yeteneklerini geliştirme ve değişim için gerekli olan olanaklardan ve seçeneklerden haberdar olma fırsatı vermektedir (Köklü, 2001).

Eğitim alanında eylem araştırmasının önemine ilişkin olarak pek çok araştırmacı (Baverly 1993; Borgia ve Schuler, 1996; Bogdan ve Bklen 1992; Calhoun 2002; Glanz 1999; Hansson 2003; Rearick ve Feldman 1999; Sagor 2003'den akt., Aksoy, 2003, s.485) tarafından vurgulanan noktalar aşağıda verilmektedir.

- Eylem araştırması akademik ve sosyal programlarda iyileştirme ve bilgi paylaşımı sağlar.
- Eylem araştırmasına katılan öğretmenler mesleki bilgilerinin gelişim ile teoriyi daha iyi kavrayarak yaptıkları işi daha iyi anlarlar.
- Araştırmada yer alan öğretmenler eleştirici ve değerlendirici tutuma bürünerek yansıtıcı olurlar.
- Eylem araştırması problem çözme ve çözüm neticesinde öğretimsel kararlar almada karar almayı güçlendirir.
- Eylem araştırması devamlı iyileşme yönünde destek sağlar.

Öğretmenlerin bir araştırmacı gözüyle planlama ve uygulama yapmasını, deneyimlerini yansıtmasını, öğretme etkinliklerinin gözlemcisi olmasını gerektiren eylem araştırması; öğretmenlere mesleki bilgilerini arttırma, yaptıkları öğretimin kalitesini geliştirme ve en önemlisi kendilerini tanıma (güçlü ve zayıf yönleri açısından) fırsatı sunmaktadır. Eylem araştırması gerçekleştiren öğretmenler uygulamalarında karşılaştıkları sorunlara karşı kendi güçlü ve zayıf yönlerinin farkında olacak; güçlü yönlerinden gelecekteki uygulamalarında daha fazla faydalanarak, zayıf yönlerini ise farklı yöntemler uygulayarak geliştirmek yoluna gidecektir (Kuzu, 2009).

Bu çalışmada araştırmacı kendi öğretme deneyimlerinden hareketle; sınıf içi öğrenme-öğretme faaliyetlerinin, ortaokul matematik öğretim programında geliştirilmesi önerilen temel beceriler odağından uzak olduğu ve bunun yalnızca kendi sınıflarında ortaya çıkan bir durum olmadığının tespitini yapmıştır. Dolayısıyla sınıf içi uygulamalarda program kazanımlarını gerçekleştirme yönünde sorunlar mevcuttur. Uygulamada ortaya çıkan bu sorun, araştırmacıyı "düşünme becerilerini (özel olarak akıl yürütme) kendi derslerinin merkezine nasıl çekebilirim" sorusu ile karşı karşıya bırakmış ve çözüm arama ve bu çözümü değerlendirme yoluna itmiştir. Bu durum yukarıda tanımlanan eylem araştırmasının doğası ile birebir uyum içinde olduğundan, bu çalışma araştırmacı ve uygulayıcının aynı kişi olduğu (Berg, 2001) bir eylem araştırmasıdır. Eylem araştırmalarında ayrıntılı gözlem yapabilmek için örnek olaylar ve hikâye tarzı anlatımlarla birlikte alan notları, fotoğraflar videolar, dergiler, memolar ve ses kayıtları kullanılır. Bu çalışmada da bahsi geçen araçlardan video, ses kaydı ve alan notları kullanılmış ve örnek olay ve hikâye tarzı anlatımlara yer verilmiştir.

Eylem araştırması süreci ile ilgili pek çok araştırmacını belirttiği farklı basamaklar ve aşamalar söz konusudur (Bernauer, 1999; Glanz, 1999; Kuzu, 2009; Yıldırım ve Şimşek, 2013). Literatürde karşılaşılan farklı yaklaşımların sentezi olarak eylem araştırmaları plan, eylem veri toplama ve yansıtma aşamalarında oluşmaktadır (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2017). Bu çalışmada da eylem araştırmalarının bu dört basamağı temel alınarak yapılmıştır. Aşağıda her bir aşamada araştırma kapsamında neler yapıldığı özetlenmiştir:

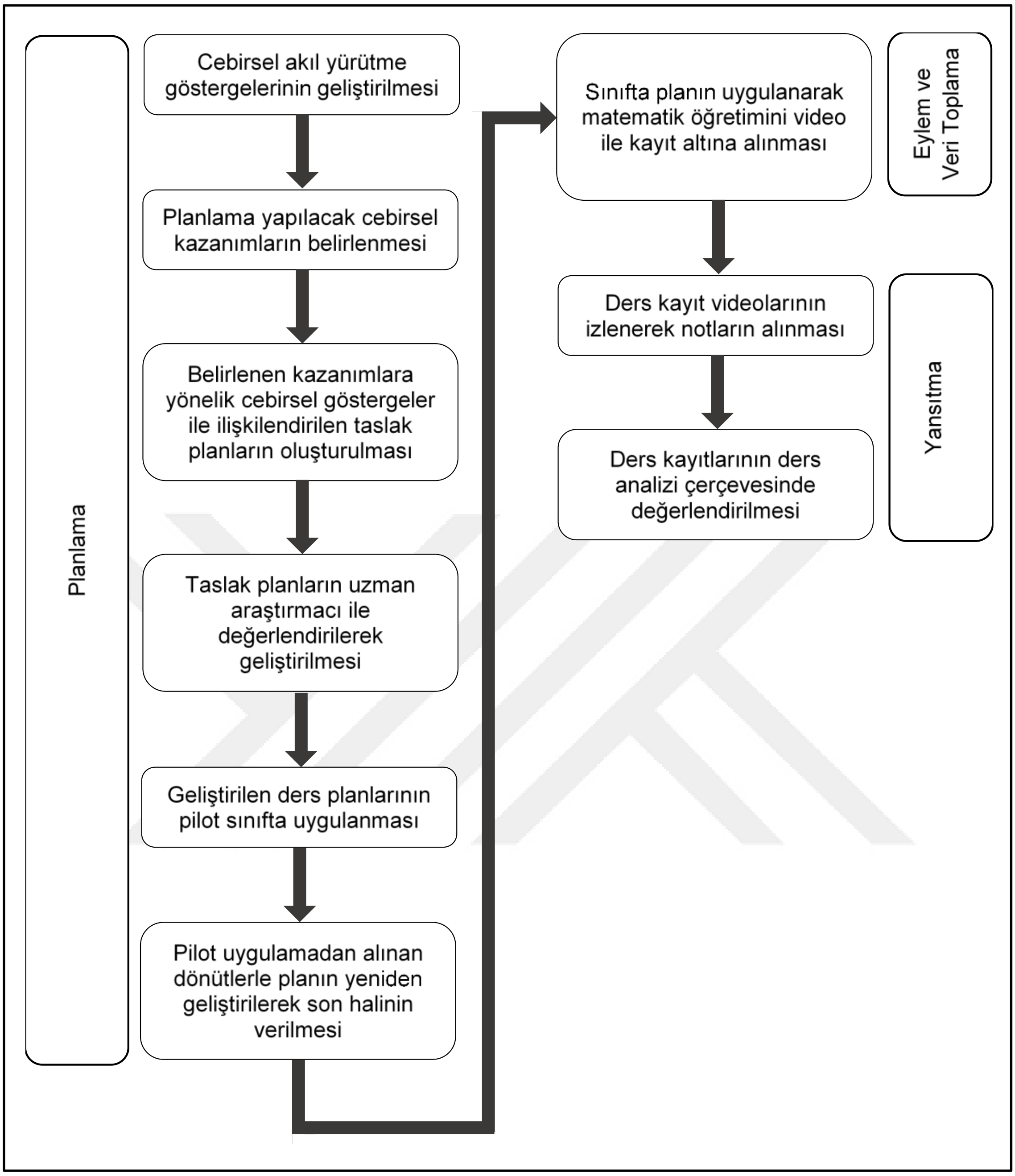
Planlama; sorun tespit edildikten sonra sorunun çözümüne ilişkin neler yapılabileceğine bu aşamada karar verilmiştir. Öncelikle literatür taraması yapılarak cebirsel akıl yürütme için gözlenebilir ve ölçülebilir göstergeler oluşturma amaçlanmıştır (Ayrıntılı bilgi için Bkz. 2. 1. 3) Daha sonra bu göstergeleri program kazanımları içine gömecek şekilde ders planları geliştirilmiştir. Bu ders planlarının geliştirme sürecine ilişkin ayrıntılara bu bölümde (Ayrıntılı bilgi için Bkz. 3. 3) başlığı altında yer verilecektir.

Eylem; geliştirilen ders planlarının gerçek sınıf ortamında uygulandığı aşamadır. Burada "Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik, denklemi oluşturur ve yorumlar", "İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer" ve "Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar" kazanımlarına dönük toplam 10 ders saati gerçekleşen bir uygulama yapılmıştır. Uygulama 8. sınıf düzeyinde 23 öğrenci içeren bir sınıfta yürütülmüştür.

Veri toplama; bu aşama aslında eylem aşaması ile iç içe geçmiş bir şekilde gerçekleşmiştir. Tüm uygulama süreci video ile kayıt altına alınmıştır. Bu şekilde araştırmacı yani öğretmen sınıf içinde gerçekleşen eylem ve iletişimi ders sonrasında da tekrar tekrar inceleme imkanı bulmuştur. Araştırmacının uygulama esnasında aldığı alan notları ise analizler esnasında odaklanılması gereken durumlara ilişkin ipuçları vermiştir.

Yansıtma; eylem araştırmasının en önemli aşamalarından biridir. Bu aşamada cebirsel akıl yürütmeyi destekleyecek şekilde yürütülmesi planlanan dersin bütün olarak etkililiğini sistematik bir şekilde değerlendirmek için Santagata ve diğerleri (2007) tarafından geliştirilen ders analizi çatısı (lesson analysis framework) kullanılmıştır (Ayrıntılı bilgi için Bkz. 2. 1. 5). Bu çerçevede araştırmacı cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından dersin öğrenme hedeflerini ortaya koyma, öğrencilerin belirlenen bu hedeflere ulaşma durumunu kritik etme, hedeflere ulaşma açısından takip edilen yol ve yöntemin etkililiğini ortaya koyma ve son olarak dersin geliştirilmesine yönelik öneriler sunma şeklinde dört ana başlıkta her bir uygulama için yansımalar yapmıştır.

Eylem araştırmasının basamakları Şekil 2'de özetlenmiştir.

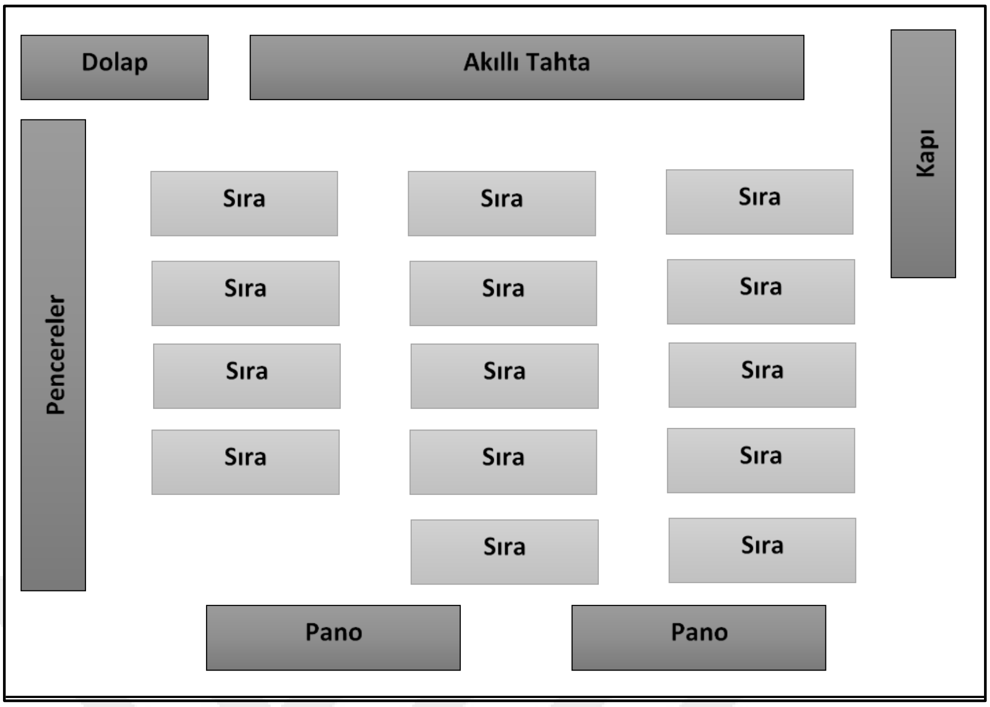


Şekil 3. Araştırma eylem planının akış şeması

3. 2. Araştırma Grubu

Araştırma 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında Trabzon ilinde ilçe merkezinde bir devlet ortaokulunda gerçekleştirilmiştir. Okulda z-kütüphane, bilgisayar laboratuvarı, spor salonu imkanları mevcuttur. Okul, 2017-2018 yılında yapılan LGS sınavında Trabzon il genelinde ilk yüz arasındadır ve okuldan 6 öğrenci nitelikli liseleri kazanmıştır. Okulda öğrenim gören altı tane beşinci sınıf, dokuz tane altıncı sınıf, altı tane yedinci sınıf ve altı tane sekizinci sınıf olmak üzere toplam 27 sınıf vardır. Uygulamanın geçerliliği açısından pilot uygulama da gerçekleştirilmesi hedeflendiğinden araştırmada iki farklı sınıf olması gerekçesi ile sekizinci sınıflar tercih edilmiştir. Sınıflar bezner fizikel özelliklere sahip olup sınıflarda akıllı tahta imkanı mevcuttur. Sınıflara ait kroki Şekil 4'de verilmektedir. Uygulama Pilot ve uygulama sınıflarının yıl sonu matematik dersi başarı ortalamaları 66 ve 64'tür. Çalışmada ders planlarını geliştirme sürecinde pilot uygulamalar 12 kız ve 12 erkek olmak üzere toplam 24 öğrencinin bulunduğu bir sekizinci sınıfta gerçekleştirilmiştir. Bu sınıfta beş öğrenci taşımalı olarak yakındaki köylerden gelmekte diğerleri ilçe merkezinde ikamet etmektedir. Asıl uygulama ise 12 kız ve 13 erkek öğrenci olmak üzere toplam 25 kişilik bir sekizinci sınıfta yapılmıştır. sınıfında bulunan iki kaynaştırma öğrencisine bireysel eğitim uygulandığından çalışma 23 öğrenci ile yürütülmüştür. Uygulama sınıfında da yedi öğrenci taşımalı olup diğerleri ilçe merkezinde yaşamaktadır. Sınıflardaki öğrencilerin çoğu sosyo-ekonomik anlamda orta halli ailelerin çocukları olup eğitim ihtiyaçlarını karşılayabilecek ve ekstra kaynaklara ulaşabilecek imkanlara sahiptirler. Ayrıca okula gelen örnek yayınlar fazlaca olup ekonomik durumu yetersiz olan öğrencilere dağıtılmaktadır. Ders öğretmeni tarafından da her konu sonunda okulda çoğaltılan test ve etkinlik kağıtları verilmektedir. Çalışma analiz edilirken öğrencilerin gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır. Araştırmayı gerçekleştiren öğretmenin 2017-2018 eğitim öğretim yılında ders sorumluluğunu aldığı iki tane sekizinci sınıf, birer tane de yedinci ve altıncı sınıfı vardır.

Bu çalışmada, araştırmacı aynı zamanda uygulamacı olan öğretmendir. Araştırmayı gerçekleştiren öğretmen 2012 / 2013 eğitim öğretim yılında devlet okulunda göreve başlamış, eğitim fakültesi 4 yıllık ilköğretim matematik öğretmenliği programı mezunudur. Araştırmanın gerçekleştiği zamanda altıncı yılını çalışmaktadır. Öğretmen göreve başladıktan sonra olağan hizmetiçi seminerler dışında uyum semineri,temel eğitim ve hazırlayıcı eğitim seminerleri, iş güvenliği semineri, ölçme ve değerlendirme farkındalık semineri, özel eğitim hizmetleri semineri, alternatif öğretim yöntemleri semineri ve matematik öğretmenlerinin öğretmenlik bilgilerini geliştirmeye yönelik seminerler almıştır.



Şekil 4. Sınıflara ait kroki

3. 3. Ders Planlarının Geliştirilmesi

Bu çalışma 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında gerçekleştirmek üzere planlanmıştır. Araştırmada temel olarak cebirsel akıl yürütmeye hizmet eden sınıf ortamı tasarlamak hedeflenmiştir. Hedefin gözlemlenebilir davranışa dönüştürülmesi amacıyla cebirsel akıl yürütme göstergeleri geliştirilmiştir. Bu hedef doğrultusunda üç farklı kazanıma yönelik her biri iki ders süresinden (40+40=80 dakika) oluşan beş ders planı hazırlanmıştır

Ders planları 8. sınıf matematik dersi cebir öğrenme alanında “Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik, denklemi oluşturur ve yorumlar”, “İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer” ve “Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar” kazanımları için geliştirilmiştir. Planlar oluşturulurken EBA (Eğitim Bilişim Ağı), 8. Sınıf matematik ve 8. Sınıf seçmeli matematik uygulamaları kitaplarından faydalanılmıştır. Geliştirilen planlar ile cebirsel akıl yürütmeyi sağlamak amaçlandığından ders akışları cebirsel akıl yürütme göstergelerindeki davranışlara yönlendirecek şekilde hazırlanmıştır. Böylece, sınıf ortamındaki öğrencilerin cebirsel akıl yürütmeye sistematik bir şekilde yönlendirilmesi hedeflenmiştir.

“Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar” kazanımı için iki ders planı, “İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer” kazanımı için bir ders planı ve “Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruları grafikleri arasında ilişki kurar” kazanımı için iki ders planı olmak üzere toplamda 5 ders planı hazırlanmıştır. Her bir planın ders süresi 40+40 olmak üzere toplamda 80 dakikadır. Planlar giriş, geçiş/geliştirme ve kapanış olmak üzere üç kısımdan oluşmuştur.

Tablo 3. Kazanımlar ve İlgili Ders Planları

Kazanım	Ders Planı	Süre (dk)
Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar	Doğrusal denklemler ve günlük yaşam-1	40+40=80 dk
	Doğrusal denklemler ve günlük yaşam- 2	40+40=80 dk
İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer	Doğrusal denklem sistemleri-3	40+40=80 dk
Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruları grafikleri arasında ilişki kurar	Doğrusal denklem sistemleri ve grafikleri-4	40+40=80 dk
	Doğrusal denklem sistemleri ve grafikleri-5	40+40=80 dk

Ders planlarını geliştirme sürecinde üç temel aşama takip edilmiştir:

1. Kazanımlar ve göstergeler göz önünde bulundurularak taslak ders planının araştırmacı tarafından oluşturulması.

2. Oluşturulan taslak planın, lisansüstü düzeyde akıl yürütme becerilerine yönelik ders veren bir alan eğitimi uzmanı ile değerlendirilerek geliştirilmesi: Her ders için taslak plan oluşturulduktan sonra ilgili alan eğitimi uzmanı ile araştırmacı bir araya gelmiş, öğretimsel açıdan ve içeriğin cebirsel akıl yürütme göstergelerini uyumluluğu açısından planı birlikte değerlendirmiştir. Öğretimsel açıdan plan değerlendirilirken kazanımların içerik ile uyumu, içeriğin sınıf düzeyine uygunluğu ve içeriğin öğretimsel ilkeler ile uyumluluğu gibi kiriterler temele alınmıştır. Cebirsel akıl yürütme göstergeleriyle uyumluluğu açısından ise taslak planın içeriğinin çalışma kapsamında geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergelerinde belirtilen davranışlara yönlendirme etkililiği değerlendirilmiştir. Herbir taslak plan için alan uzmanı ile yaklaşık 30 dk. görüşme yapılmış ve bu görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Alan eğitimi uzmanı ile yapılan görüşmeler sonunda taslak planlarda gerekli görülen revizeler yapılarak planlar güncellenmiştir.

3. Geliştirilen taslak planın 24 öğrenciden oluşan pilot sınıfta uygulamasının yapılması ve pilot uygulama anında yetersiz görülen noktalarda gerekli güncellemelerin yapılarak plana son halinin verilmesi.

Bundan sonraki kısımda herbir ders planı için yukarıda 3 basamakta açıklanan geliştirme süreci ayrıntılı bir şekilde betimlenecektir.

3. 3. 1. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-1

Birinci ders planı, "Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar" kazanımı için geliştirilmiştir. Ders akışında kullanılmak üzere doldurulacak tablolar ve grafiklerin çizileceği koordinat sistemleri tahtaya asılacak boyutta elle hazırlanmış ve benzerleri bilgisayar ortamında hazırlanılarak öğrencilere verilmiştir.

3. 3. 1. 1. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-1 Taslak Plan

Çalışmanın örneklemi olan 8. Sınıf öğrencileri, 7. Sınıfta (2016-2017 Eğitim-öğretim yılında) iken matematik müfredatı gereği doğrusal denklemler konusunu öğrenmişlerdir. "Koordinat sisteminin özellikleri, sıralı ikililer", "Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo, grafik ve denklem ile ifade etme" ve "Doğrusal denklemlerin grafiğini çizme" kazanımlarını içeren doğrusal denklemler konusu birinci planın konusu olan "Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar" kazanımının altyapısını oluşturmaktadır. Yine de, öğrencilerin hazırbulunuşluğun kontrol edilmesi ve hatırlatmaların yapılması amacıyla derse $y=2x-1$ doğrusuna ait tablo ve grafik oluşturma problemiyle giriş yapılmıştır. Bu problem ile ilgili iki soru sorularak doğrusal ilişkili iki değişkenin birbirlerine bağlı olarak değişimini gözlemeleri ve gözlemlerini tablo ve grafik ile ifade etmeleri amaçlanmıştır. İlk soruda, cebirsel olarak ifade edilen matematiksel bilgiyi öğrencinin farklı gösterimler kullanarak (tablo) ifade etmeleri (*FG1*) beklenmektedir. Tabloda belirlenen x değerleri için öğrenciler $y=2x-1$ değerini elde ederek (x,y) sıralı ikililerini bulacaklardır. Öğretmen "$y=2x-1$ tablosunda hangi sütunlar vardır?" sorusuyla süreci başlatacaktır. İlişkileri görmekte zorlanan öğrencilerin ilişkileri teşhis etmelerini kolaylaştırmak adına " x ile y arasında nasıl bir ilişki vardır " sorusu ile daha da ayrıntılandırılacaktır. İkinci soruda ise oluşturdukları tablodan grafiğe geçiş yapmaları istenmektedir. Böylece probleme ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yaparak temsiller arasında ilişki kurabileceklerdir (*FG2*). Grafiğe geçiş yapmak için tablo oluştururken elde ettikleri sıralı ikilileri kullanacaklardır. Koordinat sisteminde bu ikililerin temsil ettiği noktalar birleştirerek $y=2x-1$ doğrusunu oluşturacaklardır. Doğru oluşturulduktan sonra öğrencilere "doğruyu oluştururken kaç nokta kullandınız?","doğru oluşturmak için en az kaç nokta yeterli olur?" gibi sorular yönlendirilerek iki noktanın bir doğru belirteceği genellemesine ulaşmaları amaçlanmıştır. Tüm bunları yaparken anlamlandırma sürecine dair sorular soracaklardır (*CA*). Anlamlandırma süreçlerine dair soruları kendi kendilerine, arkadaşlarına veya öğretmene yönelik olabilecektir.

Dersin geçiş aşamasında öğrencilerin biraz daha kompleks düşünmeleri beklenmektedir. Bu amaçla yeni evlenecek bir çiftin davetiye bastırmada tercihleri ile ilgili bir soru kullanılmıştır. Çifte sunulan iki alternatif vardır. Birinci alternatifte peşinat vermeden her bir davetiye için 2 lira ödeme yapılırken, ikinci alternatifte peşinat olarak 200 lira verildikten sonra her bir davetiye için 1 lira ödenmektedir. Öğrenciler önce problem temasını anlayabilmek adına sorular sorarak, cevaplar arayacaklardır (*CA*). Alternatifler üzerinden öğrencilere 6 farklı soru yönlendirilmiştir. Sorulardan ilki her bir seçenek için fiyat ve davetiye sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren tabloların oluşturulması ile ilgilidir. İkinci tablo oluşturulduktan sonra ilişki sütununda "*200, 200+1. 1, 200 +1. 2, 200+1. 3 …*" örüntüsüyle devam eden durumla karşılaşılacaktır. Burada ilişkiyi fark etmelerini kolaylaştırmak adına "1 çarpanı yazılmasa olur mu ve eğer 1 değil de başka bir çarpan olsaydı yani davetiye fiyatı farklı olsaydı durum değişir miydi" sorusu yönlendirilecektir. İlk soru ile probleme ait bilgilere dair ilişkileri keşfetmeleri (*BK1*) ve bu ilişkileri tabloya aktarmaları beklenmektedir (*FG1*). İkinci soruda tabloya aktarılan ilişkilerin koordinat sisteminde gösterilmesi istenmektedir (*FG2*). Tablolara ait doğruları çizerken aynı grafiği kullanmaları istenecektir. Böylece iki durumu aynı anda karşılaştırma fırsatı yakalayacaklardır (*ED*). Öğrencilerin eleştirel düşünmelerine katkıda bulunabilmek adına " grafiklerin özellikleri, başlangıç noktalarının farklı olma sebepleri ve kesişip kesişmeme durumları" ile ilgili sorular yönlendirilecektir. Grafiklerin çizimi tamamlandıktan sonra değişkenlerin birbirine göre bağımlı ve bağımsız olma durumlarının değerlendirilmesi istenecektir (*FG2*). Ayrıca doğru grafiklerinin başlangıç noktalarının farklı olması (doğrunun orjinden geçmesi ve geçmemesi) durumları tartışılacaktır (*ED*). Üçüncü soruda 150 ve 250 davetiye için ödenecek para miktarlarının bulunarak hangi alternatifin daha kazançlı olacağını değerlendirmeleri beklenmektedir. Çözüme ulaşmaları için veriler arasındaki ilişkileri tekrar gözden geçirmeleri ve bu ilişkileri kullanarak genelleme yapmaları gerekmektedir (*BK1, BK2*). Ayrıca hangi alternatifin daha kazançlı olacağına karar vermeleri için sonuçları yorumlayıp değerlendirmeleri gerekmektedir (*CY*). Dördüncü soruda *x* sayıda davetiye için ne kadar para ödenmesi gerektiği sorulmaktadır. Böylece bu soru ile daha önceki sorularla destekledikleri genellemeye dair fikirlerini cebirsel ifade ile göstermeleri beklenmektedir (*SK1*). Beşinci soru ile dördüncü soruda ulaştıkları genellemeyi ifade eden cebirsel ifadeyi kullanmaları adına 500 lira ile hangi alternatifte kaç davetiye alınabileceği sorulmaktadır. Genelleme sonucu ulaştıkları cebirsel ifadeyi kullanarak denklem kurarak çözmeleri amaçlanmıştır (*SK2*). Son soruda ise kaç davetiye için iki seçeneğe de ödenecek miktarın aynı olacağı sorulmaktadır. Bu soruyu da beşinci soru gibi ulaştıkları cebirsel ifadeyi kullanarak denklem kurarak çözmeleri gerekmektedir (*SK2*). Bu soruyu çözerken ikinci soruda hazırladıkları aynı koordinat sistemi üzerindeki doğruları farklı temsilde de karşılaştırma yapabilmeleri adına tekrar değerlendirmeleri istenecektir (*ED*). İki doğrunun geometrik olarak kesişmesinin cebirsel olarak kesiştikleri noktada denklemlerdeki değişken değerlerinin aynı olduğu anlamına geleceği fikrine vurgu yapılacaktır. Nihayetinde ulaştıkları verileri yorumlayarak, değerlendirerek çıkarımda bulunacaklardır (*CY*).

Dersin devam eden kısmında kapasitesi 2000 litre olan bir havuzun bir musluk ile dakikada 40 litre su boşaltması ile ilgilidir. Bu soru ilk sorudan farklı olarak negatif eğime sahiptir (*CA*). Bu soru metni ile ilgili olarak 6 soru sorulacaktır. İlk soruda geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren tabloyu doldurmaları beklenmektedir (*FG1*). Matematiksel bilgiyi tabloya dönüştüreceklerdir. İkinci soru geçen sürede havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi grafik ile göstermeye dayalıdır (*FG2*). Bu soruda da veriler arasındaki ilişkileri teşhis ederek oluşturdukları tablodaki bilgileri kullanarak grafik oluşturmaları istenmektedir *(FG2*). Üçüncü soruda öğrencilerden birinci soruda fark ettikleri ilişkileri kullanarak genelleme yapmaları beklenmektedir. *(BK2)* Buna dayanarak 35. Dakikada havuzda kalan su miktarını bulacaklardır (*BK1, BK2*). Dördüncü soruda ulaştıkları genellemeyi cebirsel ifade ile göstermeleri yani x. dakikada havuzda kalan su miktarını ifade etmeleri beklenmektedir (*SK1*). Beşinci soruda ise havuzda 400 litre su kaldığı durumda musluğun kaç dakika açık kaldığı sorulmaktadır. Bu soru ile öğrencilerden cebirsel ifadelerle gösterdikleri genellemeleri denkleme çevirerek çözmeleri beklenmektedir (*SK2*). Son soruda ise havuzun tamamının kaç dakikada boşalacağı sorulmaktadır. Bu soru için öğrencilerin yine denklem kurması ve çözmesi gerekmektedir. Ayrıca havuzun tamamının boşalması durumunda hiç su kalmayacağı yorumuna ulaşmaları ve bu yorumu denklem ile birleştirmeleri beklenmektedir (*SK2, CY*). Ders akışı içinde öğrencilerin ilerleme ve uygulamalarına göre gerekli ipuçları ve yönlendirme soruları kullanılacaktır.

Son sorunun da tamamlanması ile birlikte dersin sonuç kısmına geçilir. Bu kısımda derste kullanılan tablo ve grafikler tekrar edilerek orjinden geçen ve orjinden geçmeyen doğruların özellikleri hakkında yoklama ve hatırlatmalar yapılır.

3. 3. 1. 2. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-1 Taslak Planına İlişkin Uzman Görüşleri

8. sınıf düzeyinde “Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar” kazanımı için oluşturulan birinci taslak plan alanında

uzman araştırmacı ile değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonucunda taslak planın içeriğinin cebirsel akıl yürütme göstergeleriyle desteklendiği düşünülmektedir. Taslak planın içeriğinin kazanıma ve sınıf düzeyine de uygun olduğu kararına varılmıştır. Ancak taslak planın içeriğinin öğretimsel ilkeler açısından basitten karmaşığa ve kolaydan zora ilkelerine uygun olmadığı değerlendirilmesi yapılmıştır. Taslak planda giriş kısmında yer alan *y=2x-1* sorusunun geçmiş bilgileri hatırlatmak ve hazırbulunuşluğun kontrol etmek adına iyi bir başlangıç olduğu düşünülmüş ve değiştirilmeden kullanılmasına karar verilmiştir. Taslak planda geçiş kısmında kullanılan davetiye sorusu matematiksel bilgiye dair çıkarımlarda bulunarak iki alternatifi birlikte değerlendirmeyi gerektirecek niteliktedir. Yani kıyaslama, değerlendirme ve eleştirel düşünme içermektedir. Analiz ve sentezi birlikte içerdiğinden derste kullanılacak ilk örnek olmak için uygun olmadığı kanaatine varılmıştır. Dersin ilk örneği olarak pozitif eğimli tek bir doğru içeren problem durumunun kullanılmasının doğru olacağı fikri desteklenmiştir. Bu amaç doğrultusunda geçiş kısmında ilk örnek olarak ölçülü bir kapla gözlem yapmak isteyen bir öğrencinin gözlemlerine dair bir soru çözülecektir.

Soruda 100 ml su bulunan ölçülü bir kaba musluk açılınca her saniyede 50 ml su aktığı belirtilmektedir. Temanın anlaşılmasını kolaylaştırmak adına olay bir animasyon videosu haline getirilerek izletilecektir*. (CA)* Akan suyun hızının sabit olduğu bilgisini de kullanarak beş soru çözmeleri istenmektedir. İlk soruda geçen süre ile kapta biriken suyun hacmi arasındaki ilişkiyi tablo olarak göstermeleri beklenmektedir (*FG1*). Sorudaki bilgilerini tabloya dönüştürürken dönüşümü gerçekleştirmek ve anlamlandırmayı sağlamak adına sorular sorarlar (*CA*). Anlam kazanan ve ilişkilendirilen bilgilerini tablo ile ifade ederler (*FG1*). Bu soruda ayrıca hacimdeki değişimi zamandaki değişime oranlayarak değişim oranı bulmaları istenmektedir. Eşit aralıklarla sabit değişim oranına sahip olan ilişkilerin doğru ilişki olduğu vurgulanacaktır. İkinci soruda ilk soruda fark ettikleri geçen süre ile hacim arasındaki ilişkiyi grafik ile göstermeleri istenmektedir (*FG2*). Üçüncü soruda 9. ve 16. Saniyelerde kapta kaç ml su birikeceği sorulmaktadır. Birinci ve ikinci sorularda keşfettikleri ilişkileri gerekçelendirerek kanıtlamaları (*BK1*) ve ilişkileri kullanarak genelleme yapmaları beklenmektedir(*BK2*). Dördüncü soruda ise *x.* saniyede kapta kaç ml su birikeceğini keşfetmeleri beklenmektedir. Bu soru ile ulaştıkları genellemeleri cebirsel olarak ifade etmeleri gerekecektir (*SK1*). Son olarak kapta 1350 ml birikmesi için kaç saniye geçmesi gerektiğini araştırmaları beklenmektedir. Bu soru ile de cebirsel olarak ifade ettikleri denklemi çözmeleri istenmektedir (*SK2*).

Yapılan değişiklikle taslak planda geçiş kısmında yer alan havuz sorusu geliştirilen planda da ikinci problem olarak kullanılması düşünülmektedir.

3. 3. 1. 3. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-1 Taslak Planına İlişkin Pilot Uygulama Sonuçları

Taslak plan alanında uzman araştırmacı ile değerlendirilerek geliştirildikten sonra ortalaması ve mevcudu uygulama sınıfı ile yaklaşık aynı olan bir pilot sınıfta uygulanmıştır. Pilot uygulamada öğrencilerin tepkileri akıl yürütme için beklenilen seviyeye ulaşamamıştır. Bu nedenle öğrencileri yönlendirmek amacıyla aşağıdaki değişiklikler yapılarak plan revize edilmiştir.

Dersin geçiş kısmında yer alan bağlamsal problemlerde öğrencilerin anlamlandırma sürecine katkıda bulunabilmek adına soru metinlerini birkaç öğrencinin ayrı ayrı okuması ve yorumlaması istenecektir.

Geçiş kısmında kullanılan ilk soru olan ölçülü kap sorusunda zaman ile kapta değişen suyun hacmi arasındaki ilişkinin belirlenmesi istenmektedir. Zaman ile hacim ilişkisini rahat fark etmeleri adına suyun yüksekliği ile hacim arasındaki ilişki vurgulanacaktır. Yine bu problemin ilk sorusu için zaman ile hacim ilişkisini bulacakları tabloya zaman ve hacim sütunlarının yanına ilişki sütunu da eklenmiştir. Böylelikle hem ilişkiyi daha kolay fark etmeleri ve ifade etmeleri sağlanacaktır. Ölçülü kap probleminin ikinci sorusunda grafik çizildikten sonra “ başlangıçta kapta su olamasaydı grafik nasıl olurdu” sorusu sorulacaktır. Bu soru ile $y=50x$ ile $y=50x+100$ farkındalığı oluşturulmak istenmektedir. Tablo oluşturduktan sonra buldukları değişim oranını (eğimi öğrenmedikleri için) hissetmeleri hedeflenmiştir. Ölçülü kap ile ilgili dördüncü soruda “*x.* saniyede kapta ne kadar su birikeceği” sorulmaktadır. Geneleme yapmalarını kolaylaştırmak adına “5. Saniyede musluktan ne kadar su akar, 11. Saniyede musluktan ne kadar su akar, *x.* saniyede musluktan ne kadar su akar” sorularak yönlendirilecektir. Ölçülü kap ile ilgili son soruda “1350 ml su birikmesi kaç saniye de gerçekleşir” sorusunu denklem kullanarak ya da aritmetik yöntemler kullanarak çözenler olmuştur. Çözümlerinin analizini daha net yapabilmeleri için “kapta başlangıçta hiç su olmasaydı nasıl bir yol izlerdiniz “ sorusu yönlendirilecektir.

Geçiş kısmında yer alan ikinci problem 2000 litre kapasiteli bir havuzun dakikada 40 litre su boşaltması ile ilgilidir. Problemin ilk sorusu zaman ile havuzda kalan su miktarı arasındaki değişimi ve ilişkiyi gözlemlemeye yöneliktir. İlişkiyi keşfederken örneğin 2. Dakika için ”40. 2-2000“ olacağını belirtenler olmuştur. Bu karışıklığın önüne geçmek için “fazla olan havuzun kapasitesi mi boşalan miktar mı “ diye sorulacaktır. Problemin üçüncü sorusunda 35. Dakika da havuzda kaç litre su kalacağı sorulmaktadır. Soruya bütün olarak bakmakta zorlandıkları için parça olarak düşünmelerini istenecektir. Bu amaçla öncelikle “35. Dakikada ne kadar su boşaldığını “ düşünmeye yönlendirileceklerdir. Problemin dördüncü sorusunda “*x.* dakikada havuzda ne kadar su kalacağı sorulmaktadır. Pek çok öğrencinin *40x–2000* yanılgısını gidermek adına üçüncü soruya benzer şekilde "başlangıçta var olan ne", " başlangıçtaki su mu fazla boşalan mı" soruları sorulacaktır. Ayrıca "dakikada 40 litre boşaldığına göre *x.* dakikada ne kadar su boşalır" sorusu ile parçadan bütüne geçiş yapmaları hedeflenmiştir. Problemin beşinci sorusunda havuzda 400 litre su kaldıysa ne kadar süre geçtiği sorulmaktadır. Doğru yaklaşım sergileyebilmeleri adına kalan miktar üzerinden gitmeleri gerektiğini anlamalarını sağlamak için " 400 litre su kalmış ise acaba ne kadar su boşalmıştır" sorusu yönlendirilecektir.

Değişikliklerden sonra son hali verilen plan Ekler bölümünde verilmiş olup bu şekliyle uygulanacaktır.

3. 3. 2. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-2

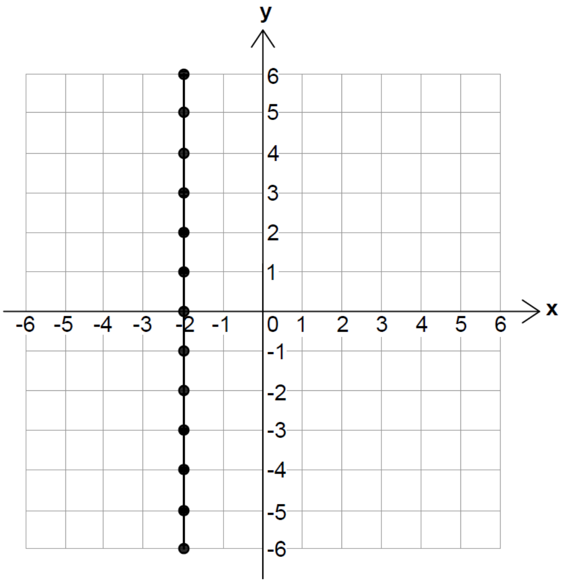
İkinci ders planı "Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar" kazanımı için geliştirilmiştir. Ders akışında kullanılmak üzere çalışma kağıtları ve materyaller hazırlanmıştır.

3. 3. 2. 1. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-2 Taslak Plan

İkinci plan birinci planla aynı kazanıma hizmet ettiğinden birinci planın devamı niteliğindedir. Derse, birinci planda yer verilen bağımlı ve bağımsız değişkenlerle değişim oranlarından bahsedilerek giriş yapılacaktır.

Dersin geçiş aşamasında birinci planda da belirtildiği gibi öğrencilerin biraz daha kompleks düşünmeleri beklenmektedir. Birinci taslak planda geçiş kısmının ilk problemi olan yeni evlenecek çiftin davetiye bastırma tercihleri ile ilgili soru, uzmanla yapılan değerlendirme sonrasında "Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar" kazanımın ilk örnek problemi olmak için öğretimsel açıdan uygun bulunmadığından birinci taslak plandan çıkarılmıştır. Birinci planın son halinde yer almayan bu soru, ikinci taslak planın geçiş kısmının ilk problemi olarak bölüm 3. 1. 1. 2. 1. 1'de verildiği şekliyle kullanılacaktır.

Dersin kalan kısmında kullanılmak üzere bir etkinlik tasarlanmıştır. Bu etkinlik ile öğrencilerin derste öğrendikleri bilgileri hatırlamaları, aktif olarak kullanmaları, işbirliği içinde kararlar alarak düşüncelerini gerekçeleriyle birlikte ifade etmeleri amaçlanmıştır. Etkinliğe tahtaya 4 farklı grafik asılarak başlanacaktır. Bu grafiklerden ilki, x eksenini dik kesen ve y eksenine paralel olan ve Şekil 5'de verilen *x= -2* doğrusuna ait grafiktir. Şekil 6'da verilen ikinci grafik ise x ve y eksenlerini orijinden (0,0) keserek geçen *y=x* doğrusuna aittir. Şekil 7'de eksenleri *x=-3* ve *y=3* noktalarından eksenleri kesen *y=x+3* doğrusuna ait üçüncü grafik verilmektedir. Son grafik ise eksenleri *x=3* ve *y*=3 noktalarından kesen ve Şekil 8'de verilen *y=-x+3* doğrusuna aittir. Doğru grafikleri eksene paralel, orijinden geçen ve eksenleri keserek geçen olmak üzere üç farklı durumu özetlemektedir. Grafikler asılırken öğrenciler daha önceden belirlenmiş 5'er kişilik grupları oluşturacaktır. Gruplar seçilirken başarı açısından karma öğrencilerden oluşmasına dikkat edilmiştir. Böylece öğrencilerin işbirliği içinde fikir alışverişi ile öğrenmelerine katkıda bulunulması amaçlanmıştır. Gruplara, tahtadaki ilk üç grafikle ilgili önceden hazırlanan tablo veya denklem içeren toplamda 20 adet kâğıttan (her gruba en az 4 kâğıt olacak şekilde) verilecektir. Öğrencilere verilecek kâğıtlardan 4 tanesi denklem ve 2 tanesi de grafiğin geçtiği noktaları içeren tablo olmak üzere toplamda 6 âdeti Şekil 5'de verilen birinci grafik ile ilgilidir. Şekil 6'da verilen ikinci grafik ile ilgili ise 4 tanesi denklem ve 3 tanesi de grafiğin geçtiği noktaları içeren tablo olmak üzere toplamda 7 âdet verilecektir. Verilecek kâğıtlardan 4 tanesi denklem ve 3 tanesi de grafiğin geçtiği noktaları içeren tablo olmak üzere toplamda 7 âdeti Şekil 7'de verilen üçüncü grafiğe aittir. Öğrencilere verilecek kâğıtlar arasında dördüncü grafik ile ilgili herhangi bir denklem ya da grafiğin geçtiği noktaları gösteren tablo bulunmamakta olup bu grafik çeldirici olarak etkinliğe eklenmiştir. Bahsi geçen kâğıtlar dağıtılırken her gruba en az bir tablo ve bir denklem içeren kağıt gelmesine dikkat edilecektir. Öğrencilerden ellerindeki kâğıtlarda yer alan tablo veya denklemleri inceleyerek hangi grafiğe ait olduğunu tahmin etmeleri nedenleri ile birlikte istenecektir. Tahmin aşamasında grup üyeleri birlikte tartışacak ve karar vereceklerdir. Öğretmen gruplar arasında dolaşarak dönüt verecek ve sorular hakkında yönlendirmeler yapacaktır. Doğruların geçtiği noktalara dikkat etmeleri vurgulanacaktır. Bu noktaların sıralı ikililer olduğuna ve doğruların bu noktalardan geçtiğine göre kağıtta verilen noktaların hepsinin tahtada verilen grafiklerden hangisini sağlayacağını düşünmeleri istenecektir. Aynı şekilde, kağıtlarındaki denklemlerin grafiklerini çizince tahtadaki şekillerden birini elde etmeleri gerektiği vurgulanacaktır. Ellerindeki kağıtları değerlendirmeleri için verilen süre tamamlandıktan sonra öğrenciler tahtaya gelerek ellerindeki kağıtların hangi şekle ait olduğunu arkadaşlarına sırayla anlatacak ve her bir grupta tahtaya gelecek öğrenci her seferinde değişecektir. Verilen kağıtların sınıf önünde değerlendirilmesi tamamlandıktan sonra tahtadaki grafiklerin özellikleri hakkında konuşulacaktır. Öğrenciler etkinlik süresince tablodan grafiğe, denklemden grafiğe, denklemden tabloya gibi dönüşümler yaparak temsiller arası geçiş gerçekleştireceklerdir (*FG2*). Ayrıca farklı problemlere ait temsilleri karşılaştıracakları için eleştirel düşünme yaklaşımı sergileyeceklerdir (*ED*).



x=-2

x+2=0

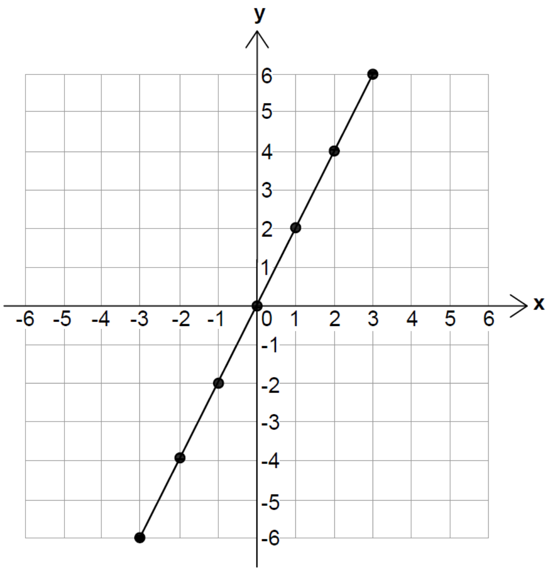
-2-x=0

2x=-4

x	y
-2	3
-2	5
-2	7
-2	9

x	y
-2	-2
-2	-1
-2	0
-2	1

Şekil 5. Birinci probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



y=2x

y-2x=0

2x-y=0

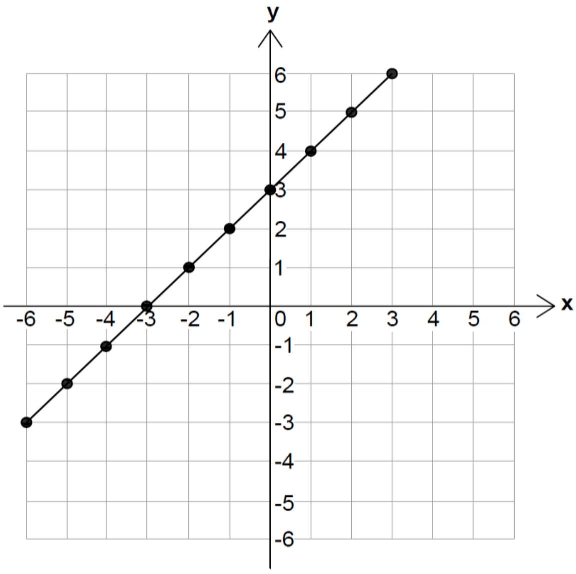
-y+2x=0

x	y
-2	-4
-1	-2
1	2
2	4

x	y
0	0
-1	-2
-2	-4
-3	-6

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6

Şekil 6. İkinci probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



y=x+3

y=3+x

y-x=3

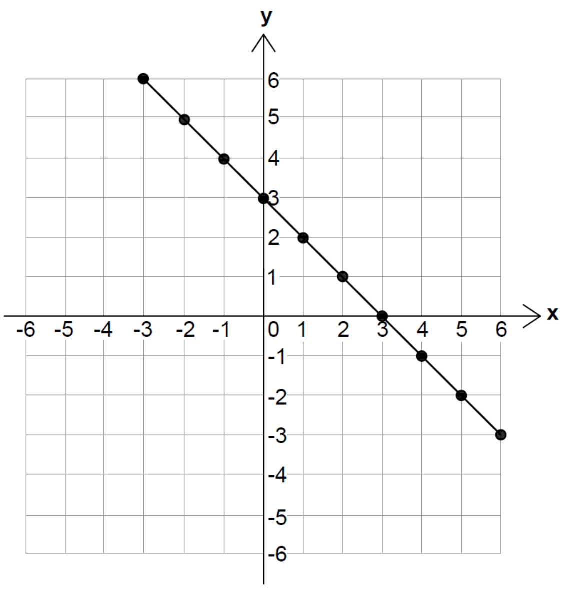
-3=x-y

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3

x	y
0	3
2	5
4	7
5	9

x	y
0	3
1	4
2	5
3	6

Şekil 7. Üçüncü probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



Şekil 8. Dördüncü probleme ait grafik

3. 3. 2. 2. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-2 Taslak Planına İlişkin Uzman Görüşleri

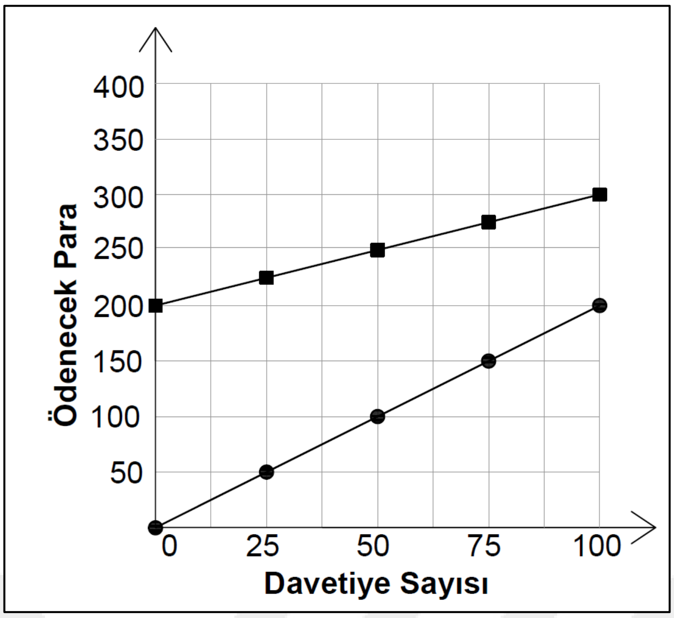
İkinci taslak planın geçiş aşamasındaki ilk problem olan yeni evlenecek çiftin düğün davetiyesi seçimi ile ilgili soru, birinci taslak planda olduğu için uzman tarafından önceden değerlendirilmişti. Değerlendirme sonunda, bu problemde iki durumun karşılaştırılması gerektiğinden ilk ders için kompleks olduğu düşünülmüş ve birinci plandan çıkarılmıştı. Yapılacak birinci ders ile öğrencilerin bu problem için altyapılarını hazırladıkları düşünüldüğünden, bu soruya ikinci planda yer verilmiştir. Uzman ile değerlendirme sonunda sorunun cebirsel akıl yürütme göstergeleriyle uyumlu olduğu ve dersin içeriğinin kazanıma hizmet ettiği belirtilmiştir. Öğrencilerin gerekli hazırbulunuşluğa ulaştığı düşünüldüğünden sorunun ikinci planda yer almasının öğretim ilkeleri açısından da uygun olduğu kararına varılmıştır.

Dersin ikinci kısmında kullanılmak istenen etkinliğin cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet ettiği belirtilmiştir. Etkinliğin kazanım ile örtüştüğü ve sınıf seviyesine de uygun olduğu kararına varılmıştır. Ayrıca öğretim ilkeleri açısından (öğrenciye görelik, bilinenden bilinmeyene) uygun olduğu değerlendirmesi yapılmıştır.

İkinci taslak plan için uzman araştırmacıyla yapılan görüşme sonucunda planda her hangi bir değişime gerek olmadığı kararına varılmıştır.

3. 3. 2. 3. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-2 Taslak Planına İlişkin Pilot Uygulama Sonuçları

Uzman ile değerlendirmeden sonra revizeye gerek duyulmayan ikinci taslak plan pilot sınıfa uygulanmıştır. Bu uygulama esnasında, dersin geçiş kısmında kullanılan yeni evlenecek çiftin davetiye seçimi ile ilgili ilk problemin ikinci sorusunda öğrenciler sıkıntı yaşamışlardır. Şekil 9'da verilen grafiği yorumlayarak doğruların ileride bir yerde kesişeceklerini ve bu noktadan sonra alttaki grafiğin üstte ve üstteki grafiğin altta geçeceğini fark etmekte zorlanmışlardır. Taslak planda, öğrencileri akıl yürütmeye sevk etmek için belirtilen sorular uygulama esnasında sorulmadan önce öğrencilerin dikkatlerini tam olarak öğretmene vermeleri sağlanacaktır. Ayrıca, taslak plandaki sorulara ek olarak “Grafiğin altta veya üstte olması ne anlama geliyor?” ve “Her bir davetiye sayısı için iki firmanın maliyet farkının nasıl değiştiği?” soruların sorulması düşünülmüştür.



Şekil 9. Davetiye sayısına göre ödenecek para.

Bahsi geçen değişikliklerden sonra son hali verilen plan bu şekliyle uygulanacaktır.

3. 3. 3. Doğrusal Denklem Sistemleri-3

Üçüncü ders planı "İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer" kazanımı için geliştirilmiştir.

3. 3. 3. 1. Doğrusal Denklem Sistemleri-3 Taslak Plan

Planın içerdiği kazanımın ön koşulu olan " koordinat sistemi ve sıralı ikililer, doğrusal ilişkili değişkenler, bu değişkenleri tablo, grafik ve denklem ile ifade etme ve tek bilinmeyenli denklemler" konuları daha önce verilmiş olduğundan öğrencilerin hazırbulunuşlukları bulunmaktadır.

Derse, iki bilinmeyenli iki denklem ile çözülebilecek en temel sorulardan biri olan toplamları 175 ve farkları 105 olarak verilen iki sayının bulunması ile başlanılacaktır. Bu problemin giriş sorusu olarak seçilmesinin sebebi öğrencilerin okuyup anlamakta ve denklem kurmakta zorlanmadan konuya rahat bir başlangıç yapmalarını sağlamaktır. Ayrıca seçilen bu problemdeki denklemler, iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerinin kolayca uygulanabilecekleri katsayılara sahiptir. Öğrenciler, soruyu çözerken anlamlandırma yapabilmek için problemi kendi içlerinde sorgulayacak (CA) ve anlaşılmayan noktaları sınıfla paylaşmaları noktasında teşvik edileceklerdir (*CA*). Problem anlaşılarak cebirsel denklemle ifade edildikten sonra kurulan denklem sistemi farklı yöntemlerle çözülebilecektir (*SK1, SK2*). Denklem kurmakta zorlanan öğrenciler için daha önce öğrendikleri problem ifadelerinin matematik diline çevrilmesine yönelik hatırlatmalar yapılacaktır. Problem çözümü için gerekli olan $x+y=175$ ve $x-y=105$ denklemleri kurulduktan sonra "denklemler tek tek çözülebilir mi?" sorusu ile öğrenciler denklemlerin ortak çözümü için yönlendirileceklerdir. Buna ek olarak daha önceden bildikleri tek bilinmeyenli denklemlerin çözümden yola çıkarak problemin çözümünü düşünebilmeleri için "Tek bilinmeyenli denklemleri çözmeyi biliyorsunuz, buradan hareketle nasıl devam edersiniz " sorusu öğrencilere sorulacaktır. Ders akışı içinde öğrencilerde farklı bakış açıları geliştirebilmek için yeri geldikçe öğrencilere daha önceden gördükleri kazanımlara göndermeler yapılacaktır. Örneğin, öğrencilerin "bir değişkeni diğeri cinsinden ifade eder" kazanımını hatırlamaları için "Denklemlerdeki bilinmeyenleri birbirleri cinsiden ifade edebilir miyiz? Nasıl yapabiliriz?" soruları sorulacaktır. Bahsi geçen problemin çözümü için öğrenciler sırasıyla "yok etme", "yerine koyma" ve "karşılaştırma" yöntemlerini hissetmeleri amacıyla yönlendirilmeye çalışılacaktır. "Yok etme" yöntemi için öğrencilerden bir dönüş olmazsa öğrencilere "$x=5$ ve $y=10$ ise $x+y$ kaç olur?" ve "x=5 ise $-x=-5$ olur değil mi? Peki bu ikisini toplarsam ne olur?" soruları sorulacak ve bu toplama işlemlerini nasıl yaptıkları irdelenecektir. Bu örnekten yola çıkarak problem için oluşturulan iki denklemin taraf tarafa toplanarak bir bilinmeyenin yok edilmesine geçiş yapmak amaçlanmaktadır. Daha sonra ise katsayıların eşit olmama durumunda ne yapılabileceği üzerinde durulacaktır. Öğrencilerin sıkıntı yaşaması durumunda "$x=5$ ve $y=10$ ise $2y-3x$ kaç olur?" sorusu sorularak öğrencilere bakış açısı kazandırılacaktır. "Yerine koyma" yöntemine gelince öğrencilere "Sizce yukarıdaki x ile aşağıdaki x aynı mı?" ve "Birinin yerine diğerini yazsam sonuç değişir mi?" gibi sorular sorarak denklemlerdeki bilinmeyenlerin aynı olduğu ve bir denklemden elde edilen bilinmeyene ait ifadenin diğeri içinde kullanılabileceği fikrine ulaşmaları hedeflenmektedir. "Karşılaştırma" yönteminde ise bir önceki yöntemde gördüğümüz denklemlerdeki bilinmeyenler aynı olduğu fikrinden yola çıkarak "Madem her iki denklemdeki x ve y bilinmeyenleri aynı, her iki denklemde de bunları bulsam elde edilen ifadeler için ne yazabilirim? Bunları birbirine eşitleyebilir miyim?" sorusu öğrencilere yönlendirilecektir. Her üç çözüm yönteminde de bilinmeyenlerden biri bulunduktan sonra diğer bilinmeyenin bulunması benzerdir. Öğrencileri yönlendirmek için "Bulduğum değer nedir?", "Diğer bilinmeyeni bulmak için ne yapabilirim?" ve "Bulduğum değeri hangi denklemde yerine yazabilirim?" soruları sorulacaktır. Problemin çözüm aşamasında, öğrenciler bireysel olarak defterlerinde çözüm için uğraşacaklar ve sonra öğrencilerden birinin tahtaya kalkarak diğer öğrenciler ve öğretmenle fikir alışverişi içinde problemin çözümünü yapması sağlanacaktır. Çözüm yapılırken yerlerinde olan öğrencilerin de sorgulama yapmasına izin verilecektir. Öğrencilerin iki bilinmeyenli denklem sistemi çözümünde kullanılan yerine koyma, yok etme ve karşılaştırma yöntemlerini hissetmelerini ve bu yöntemleri kullanarak iki denklem sistemlerini çözebilmelerini sağlamak temel hedeflerdendir.

Dersin geçiş kısmında kullanılan bağlamsal problemde, Yusuf'un kumbarasına sadece 5 TL ve 10 TL'den oluşan 30 banknot atarak 210 TL biriktirmesine ilişkin bir soru vardır. Problemde, kumbarada kaçar tane 5 ve 10 TL'lik banknotlar olduğu sorulmaktadır. Sorunun çözümünde öğrencilerden ayrı ayrı yok etme, yerine koyma ve karşılaştırma yöntemlerini kullanmaları istenecektir (*SK2*). Öncelikle probleme ilişkin denklemler kurularak denklem sistemi elde edilecektir (*CA, SK1*). Elde edilen denklemlerdeki katsayılar bir önceki problemdekinin aksine taraf tarafa toplama ile bir bilinmeyenin yok edilebileceği katsayılar içermemektedir. Dolayısıyla öğrencilerin yok etme yöntemini kullanırken bir önceki probleme göre daha fazla çaba harcamaları gerekmektedir. Öğrencilerin, yok etme ile çözüm sırasında, denklemlerde bilinmeyenler önündeki katsayılardan bir değişken için olanların eşit ve zıt işaretli olması gerektiğini fark etmeleri gerekmektedir (*CY*). Öğrencilere yardımcı olmak için "*2x* ile kaç *x* 'i toplarsam sonuç 0 olur?", "Bir denklemdeki tüm ifadeleri 2 ile çarpsam denklemin eşitliği bozulur mu?" ve "Peki bir denklemdeki ifadeleri –2 ile çarpsam durum değişir mi?" soruları sorulacaktır. Yerine koyma ve karşılaştırma metotlarında ise denklem sistemindeki katsayılar 1 'den farklı olsa bile öğrenciler bir önceki problemdekine benzer şekilde bilinmeyenleri birbirleri cinsinden yazarak çözüm yapabileceklerdir. Öğrencilerin zorlanması durumunda değişkenlerinin katsayılarını çarparak ya da bölerek eşitleme işlemini gerçekleştirebilecekleri vurgusu yapılacaktır. Yok etme metodunda denklem sistemindeki katsayılar eşit ve zıt yapıldıktan ve diğer yöntemlerde ise bilinmeyenler birbirleri cinsinden yazıldıktan sonra problemin çözümü bir öncekine benzer şekilde kolaylıkla tamamlanacaktır.

Dersin son aşamasında iki bilinmeyenli birinci dereceden denklem sistemlerinin tanımı ve çözüm yolları hakkında konuşulacaktır. Yerine koyma, yok etme ve karşılaştırma yöntemleri tekrar edilecek ve her üç yöntemden de elde edilen sonuçlar aynı olacağından problemlerde istedikleri yöntemi kullanabilecekleri vurgulanacaktır.

3. 3. 3. 2. Doğrusal Denklem Sistemleri-3 Taslak Planın Uzman Araştırmacıyla Geliştirilmesi

Üçüncü taslak planın giriş kısmında kullanılan toplamları 175 ve farkları 105 olan iki sayının sorulduğu problemle geçiş bölümünde kullanılan içinde toplam 30 banknot ve 210 TL para bulunan kumbaradaki 5 ve 10 TL'lik banknot sayılarıyla ilgili problem, alanında uzman araştırmacı ile değerlendirilmiştir. Problemler, "problemlerin kazanıma ve sınıf düzeyine uygunluğu", "cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet edip etmediği" ve “öğretimsel açıdan uygunluğu” olmak üzere üç açıdan incelenmiştir. Problemler kazanıma ve sınıf düzeyine uygun bulunmuş ve problemlerin cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet ettiği kararına varılmıştır. Öğretimsel açıdan yapılan değerlendirme sonucunda, ilk kullanılan problemin konunun kolayca anlaşılmasını sağlayacak denklemler içerdiği düşünülmüştür. Öğrencilerin bir önceki problemde öğrendikleri çözüm yöntemlerini biraz daha genelleştirerek kullanmasını gerektiren bir soru içerdiğinden taslak planda kullanılan ikinci problemin birinci probleme göre daha zorlayıcı olduğu sonucuna varılmıştır. Problemlerin bu yapısından dolayı, taslak planın kolaydan zora, basitten karmaşığa ilkelerine uygun olduğu düşünülmüştür. Ayrıca öğrenci hazırbulunuşluklarının problemlerin seviyesine uygun olduğu değerlendirmesi yapılmıştır.

3. 3. 3. 3. Doğrusal Denklem Sistemleri-3 Taslak Planına İlişkin Pilot Uygulama Sonuçları

Uzman araştırmacı ile geliştirilen taslak plan pilot sınıfta uygulanmıştır. Uygulamada öğrencilerin “toplamları 175 ve farkları 105 olan iki sayı kaçtır?” probleminin çözümü için gerekli olan denklemleri kolaylıkla kurdukları gözlemlenmiştir. Ancak denklem sistemi kurulduktan sonra problemin çözümü için değer vererek (deneme yanılma yoluyla) ilerleme yolunu tercih edenler çoğunlukta olmuştur. Problemi deneme yanılma yoluyla değil de problem için yazılan denklem sisteminin çözümü ile sonuç bulmaya yönlendirmek için “Bu denklemler küçük sayılar içermekte bu nedenle sayıları tahmin edebiliyorsunuz. Peki, sayılar tahmin edemeyeceğiniz kadar büyük olsaydı nasıl bir yol izlerdiniz?” sorusu sorulacaktır

İkinci problemde 5 TL ve 10 TL’lik banknotlardan oluşan 30 adet banknotun toplam tutarının 210 TL olduğu bilgisi verilerek hangi banknottan kaçar tane olduğu sorulmaktadır. Öğrenciler, 5 ve 10 TL’lik banknotların toplam tutarının 210 TL olduğu bilgisini kullanarak ilk denklemi kurmuşlar fakat toplamda 30 adet banknot olduğu ifadeye ait denklemi kurarken zorlanmışlardır. Öğrencilere bu denklemi oluştururken yardımcı olmak adına ”Kumbaraya ilk 5 TL atsam kumbara da kaç tane banknot olur?”, “Peki bir tane daha 5 TL atsam kaç tane olur?” ve “Kumbaraya önceki iki tanesinden sonra bir tane 10 TL atsam kumbarada kaç tane banknot olur” soruları sorulacaktır. Problemin yok etme yöntemiyle çözümü aşamasında öğrenciler zorlanmış ve genellikle denklemlerdeki katsayıları eşit ve zıt işaretli yapmadan çözüm yapmak istemişlerdir. Bu nedenle tek bilinmeyenli bir denklem yerine yine iki bilinmeyenli bir denklem elde ederek çözüme devam edememişlerdir. Katsayıların eşit ve zıt işaretli yapılması gerektiğini hatırlatmak ve öğrencileri çözüm yöntemini doğru uygulamaya yönlendirmek için “Bir önceki problemde üstte $+y$ altta ise $–y$ vardı. Toplayınca *y* ‘ler ne oldu? Peki, bu problemdeki katsayıları öncekindeki gibi yapmak için yani eşit ve zıt yapmak için ne yapabiliriz? ” sorusu plana eklenecektir.

Yapılan değişikliklerle birlikte plana uygulanmak üzere son hali hazırlanmıştır.

3. 3. 4. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4

Dördüncü ders planı “ Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğru grafikleri arasında ilişki kurar” kazanımı için geliştirilmiştir.

3. 3. 4. 1. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4 Taslak Plan

Dördüncü ders planının kazanımının konusu, ilk iki dersin kazanımı olan “Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik, denklemi oluşturur ve yorumlar” kazanımı ile üçüncü dersin kazanımı olan “İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer” kazanımının beraber kullanılacağı içeriktedir. Öğrencinin bu derse hazır olabilmesi için iki bilinmeyenli denklem sistemlerini çözebilmesi ve doğru denklemlerine ait grafikleri çizebilmesi gerekmektedir. Bu plandan önce hazırlanan üç ders planı, bu amaçlara hizmet etmiştir. Başka bir ifadeyle, ilk üç ders planı temel olup dördüncü ders planı bu temel üzerine kurulacaktır.

Dersin giriş kısmında *2x+y=2* ve *x-y=4* denklemlerinin grafiğini çizmeye odaklanılacaktır. Amaç öğrencilerin temsiller arasında geçiş yapabilmesini (*FG2*), düşüncelerini ve yaklaşımlarını anlamlandırmasını (*CA*) sağlamaktır. Denklemlere ait grafikler çizilirken, öğrencilerin önceden öğrendikleri yöntemler kısaca hatırlatılarak istedikleri yöntemi kullanabilecekleri belirtilecektir. Örneğin, doğruların eksenlerini kestiği noktalar bulanarak grafikler çizilebileceği gibi denklemi sağlayan noktalar tablolaştırılarak da grafikler çizilebilir. Her iki denkleme ait grafikte aynı koordinat sistemi üzerinde çizdirilerek doğruların birbirlerine göre durumlarını net bir şekilde fark etmelerini sağlamak hedeflenmektedir. Grafikleri çizmekte zorlanan öğrencilere önceki derslerde yapılan çalışmalara yönelik küçük hatırlatmalar yapılacaktır. Örneğin, “*x* yerine 0 koysam y kaç olur?”, “Bulduğun bu (*x,y*) ikilisini koordinat sisteminde nasıl gösterebilirim” ve “Bir doğru çizmek için en az kaç nokta gerekliydi?” soruları öğrencilere yönlendirilebilir. Çizilen grafiklerden doğruların (2,-2) noktasında kesiştiği gözlemlenecektir. Dersin devamında verilen *2x+y=2* ve *x-y=4* denklemlerinin birlikte düşünüldüğünde iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir denklem sistemi olduğu vurgusu yapılacaktır. Bir önceki ders bilgileri hatırlatılarak bu tür sistemlerin cebirsel olarak çözümüne yönlendirileceklerdir (SK2). Bu denklem sisteminin çözümü için öğrendikleri yöntemlerden (yok etme, yerine koyma, karşılaştırma yöntemleri) istediklerini kullanabilecekleri söylenecektir. Cebirsel çözüm neticesinde, denklemleri sağlayan (*x,y*) ikilisinin (2,-2) olduğunu göreceklerdir. Öğrenciler verilen denklemlere ait grafik çizimiyle buldukları doğruların kesişim noktaları ile denklemlerin cebirsel çözümü neticesinde elde ettikleri ortak çözüm noktasının aynı olduğunu fark edeceklerdir (*ED*). Denklemlerin cebirsel çözümü ile elde edilen ikilinin verilen denklemlerden her ikisini de sağladığı, yani farklı grafiklere sahip denklemlerin çözüm noktasında kesiştikleri vurgulanacaktır (*CY*).

Girişte verilen problem ile önceden işlenen konuları hatırlatmak ve öğrenilen konuların beraber düşünülmesi hedeflenmiştir. Planın geçiş kısmında ise bağlamsal bir problem kullanılarak konular pekiştirilecektir. İkinci problem olarak bir öğrencinin kırtasiyeden yaptığı alışverişe yönelik bir soru sorulmaktadır. Problemde, öğrencinin kırtasiyeden 2 kalem ve 4 silgi alırsa 8 TL, 3 kalem ve 3 silgi alırsa 9 TL ödeyeceği bilgisi verilmekte ve bu bilgilerin kullanılarak kalem ve silgi fiyatlarının bulunması istenmektedir. Problemde, hem grafik yönteminin kullanılması hem de çözümün cebirsel olarak yapılması beklenmektedir. Problem bağlamsal olduğundan fikirlerini anlamlandırmak için öğrenciler içe(kendilerine) ve dışa yönelik(arkadaşlarına ve öğretmene) sorular soracaklardır (*CA*). Anlamlandırma sonrasında matematiksel bilgiyi denklemlere dönüştüreceklerdir (*FG1*). Yani somut ve soyut kavramlar arasında geçiş yapacaklardır (*SK1*). Denklem kurmakta zorlanan öğrencilere "Kalem ve silgi fiyatlarını bilmiyorum. Kalem ve silgi fiyatlarını adlandırarak başlayabilirsiniz" yönlendirmesi yapılacaktır. Denklemleri oluşturan öğrenciler, denklemlerin doğru grafiklerini çizeceklerdir (*FG2*). Doğru grafikleri bulurken, denklemlere ilişkin tablo oluşturarak veya denklemlere ilişkin doğruların eksenleri kestiği noktaları bularak ilerleyebileceklerdir. Doğruların grafiği bir önceki problemde olduğu gibi aynı koordinat sistemi üzerinde çizileceğinden doğruların kesiştikleri nokta kolaylıkla görülebilecektir. Kesim noktasından elde edilen ikiliden hangisinin hangi ürüne denk geldiği fark etmeleri adına öğrencilere "Kesim noktasını bulduk. Peki, elde edilen bu ikiliden hangisi kalemin hangisi silginin fiyatı?" sorusu yönlendirilecektir. Öğrenciler, problem için elde edilen iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan denklem sistemini istedikleri yöntemle çözeceklerdir (*SK2*). Çözüm neticesinde denklemleri sağlayan *x* ve *y* değeri bulunacaktır. Grafik çözümünde olduğu gibi bu değerlerden yola çıkarak kalem ve silginin fiyatlarını belirleyeceklerdir. Cebirsel çözümden elde edilen (*x,y*) ikilisinin aynı zamanda denklemlere ait doğru grafiklerin çizimiyle elde edilen kesişim noktası olduğunu bu problem içinde fark edeceklerdir (*ED, CY*). Problemin çözümü sırasında zorlanan öğrencilere, gerek grafik çizimi yapılırken gerekirse cebirsel çözüm yapılırken seçtikleri yöntemlere göre gerekli hatırlatmalar ve yönlendirmeler yapılacaktır.

Dersi sonlandırırken doğrusal denklem sistemlerini oluşturan doğru grafiklerinin kesim noktası ile denklem sistemini sağlayan cebirsel çözümle elde edilen çözüm kümesinin aynı olduğu vurgusu yapılacaktır.

3. 3. 4. 2. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4 Taslak Planının Uzman Araştırmacı ile Geliştirilmesi

Giriş bölümünde olan *2x+y=2* ve *x-y=4* denklemlerine ilişkin sorusuyla, geçiş bölümünde verilen bir öğrencinin kırtasiyeden yaptığı alışverişle ilgili problem içeren dördüncü taslak plan uzman araştırmacıyla üç farklı başlık altında değerlendirilmiştir. Bu başlıklar diğer ders planlarında da olduğu gibi ders içeriğinin cebirsel akıl yürütme göstergeleri ile örtüşmesi, içeriğin kazanımlar ile uyumlu olması ve içeriğin öğretim ilkeleri açısından uygunluğudur. Problemlerin geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet ettiği belirtilmiş ve öğrencilerin cebirsel akıl yürütme eylemlerine katkıda bulunulacağı kanaatine varılmıştır. Ders planının içeriği, "Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğru grafikleri arasında ilişki kurar" kazanımıyla uyumlu bulunmuştur. Öğretim ilkeleri açısından değerlendirildiğinde, ilk kullanılan problemin (hazır denklemleri içeren bir problem), ikinci problemden (denklemler öğrenciler tarafından yazılacak) daha kolay olması nedeniyle basitten karmaşığa, bilinenden bilinmeyene ilkelerine uygun olduğu düşünülmüştür. Önceki ders planlarına ait kazanımlar da düşünüldüğünde öğrenci hazırbulunuşluğunun da var olduğu kanaatine varılmıştır. Bu değerlendirmeler ile birlikte dördüncü taslak planda herhangi bir değişikliğe gerek görülmemiştir.

3. 3. 4. 3. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4 Taslak Planına İlişkin Pilot Uygulama Sonuçları

Uzman araştırmacıyla yapılan görüşme sonucunda değişiklik yapılmasına gerek görülmeyen dördüncü taslak plan pilot sınıfta uygulanmıştır. Derste geçiş kısmında kullanılan *2x+y=2* ve *x-y=4* denklemlerinin grafiğini çizme ve bu denklem grafiklerinin kesim noktasını bulma sorusunda, öğrenciler grafik çiziminde öncelikle doğru denklemlerini analiz etmişler ve doğruların karakteristik özelliklerine odaklanmışlardır. Öğrenciler bu soruyu çözerken denklemlerin koordinat eksenlerini kestiği noktaları bularak grafik çizimini yapma yöntemini tercih etmişler ve tablo kullanarak grafik çizme yolunu tercih eden olmamıştır. Öğrencilere grafik çizimi yaparken farklı bakış açıları kazandırmak amacıyla "Doğru grafiği çizerken sadece denklemlerin eksenleri kestiği noktaları bularak mı çizim yaparız? Yoksa önceden gördüğümüz başka yöntemler de var mıydı?" soruları sorulacaktır. Böylece farklı yöntemler kullanan öğrencilerin aynı grafikleri çizerek aynı kesişim noktasını bulduklarını fark etmeleri sağlanacaktır. Grafiklerin çizilmesinden sonra doğru denklemlerinin kesiştikleri nokta (2,-2) olarak bulunmuştur. Öğrenciler, problemde verilen denklemlerin cebirsel çözümünü yaparak denklem sisteminin çözüm kümesinide (2,-2) olarak bulmuşlardır. Denklem sisteminin cebirsel çözümü öğrenciler tarafından farklı metotlar kullanılarak yapılmış ve çözüm yapmakta zorlanan öğrencilere gerekli hatırlatmalar yapılmıştır. Grafiklerin çizimi ile elde edilen kesişim noktası ve cebirsel çözümden elde edilen sonuçların aynı olduğu öğrenciler tarafından kolaylıkla görülmüştür.

Geçiş/geliştirme kısmında kullanılmış olan problemde bir öğrencinin kırtasiyeden 2 kalemle 4 silgi alırsa 8 TL, 3 kalemle 3 silgi alması durumundaysa 9 TL vereceği bilgisi verilerek kalem ve silginin fiyatları sorulmaktadır. Problemin çözüm aşamasında geçebilmek için öncelikle problemlere ilişkin denklemlerin oluşturulması gerekmektedir. Denklem oluşturma aşamasında, öğrencilerden bazıları problemde 4 farklı değişkenin olduğunu düşünerek denklem yazmaya çalışmışlardır. Bu yanlış anlaşılmanın önüne geçmek için "Eğer kırtasiyeye gidip bir silgi alsanız sonra hemen aynı silgiden bir tane daha alsanız, fiyatları aynı mı olur yoksa değişir mi?" ve "Fiyat birinde *x* ise diğerinde ne olur sizce?" soruları sorulacaktır. Denklemler yazıldıktan sonra grafik çizme aşamasında $2x+4y=8$ denkleminde x=0 için $y=2$ değeriyle y=0 için bulunan $x=4$ değerlerini birlikte düşünüp doğru oluşturmak yerine koordinat sisteminde (4,2) noktasını bulan öğrenciler olmuştur. Bu durumu önlemek için öğrencilere "$y=2$ değerini bulurken x 'i kaç aldın ve $x=4$ değerini bulurken y 'i kaç aldın?" soruları sorularak aslında bir değil iki nokta buldukları fark etmeleri sağlanacaktır. Doğru çizmek için gerekli olan nokta sorusu öğrencilere sorularak, doğru grafiğini çizmek için bulacakları ((0,2) ve (4,0)) noktaları sorgulanacaktır. Probleme ait diğer denklemde de sıkıntı yaşanması durumunda benzer sorular orada da öğrencilere yönlendirilecektir. Yapılan bu değişiklikler ile dördüncü ders planına son hali verilmiştir.

3. 3. 5. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5

Beşinci ders planı " Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğru grafikleri arasında ilişki kurar" kazanımı için geliştirilmiştir. Dersin ikinci kısmında kullanılmak üzere materyaller hazırlanarak öğrenciler ile paylaşılmıştır.

3. 3. 5. 1. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5 Taslak Plan

Beşinci ders planı, dördüncü ders planı ile aynı kazanıma hizmet etmektedir. Dördüncü planla temeli atılan bu kazanım beşinci planla geliştirilecek ve pekiştirilecektir. Dördüncü planda, tek noktada kesişen doğrulara ilişkin denklem sisteminin cebirsel çözümüyle elde edilen çözüm kümesinin, doğruların kesiştikleri noktayı verdiğini göreceklerdir. Beşinci planda ise farklı iki doğrunun tek bir noktada kesişmesi yerine birbirlerine paralel olması veya iki doğrunun çakışık olması durumlarına ilişkin denklem sistemlerinin cebirsel çözümlerinden elde edilecek olan çözüm kümeleri incelenecektir. Dersin ilerleyen bölümlerinde, iki doğrunun birbirine göre durumları (kesişen, paralel, çakışık) ve bu durumlara ilişkin denklem sistemlerinin cebirsel çözümden elde edilen çözüm kümeleri arasındaki ilişkileri pekiştirmek amacıyla etkinlik düzenlenecektir.

Derse başlarken, bir buğday ekmeği ile bir kepek ekmeğine 2 TL ve iki buğday ekmeği ile iki kepek ekmeğine 6 TL veren Ahmet'in aldığı ekmeklerin her birinin fiyatının sorulduğu bağlamsal bir problem kullanılacaktır. Öğrenciler problemi okuyarak anladıktan (*CA*) sonra matematiksel verileri denklemlere dönüştüreceklerdir (*FG1*). İlk olarak probleme ilişkin yazılan denklemlere ait doğru grafiklerini aynı koordinat sistemi üzerinde göstermeleri beklenmektedir (*FG2*). Bu çizim sonrasında eğimleri aynı birbirine paralel iki doğru elde edeceklerdir. Daha sonra öğrencilerden problem için yazılan denklemlerin cebirsel çözümlerini yapmaları istenecektir (*SK2*). Çözüm yaparken daha önceden öğrendikleri yöntemlerden istedikleri yöntemi (yok etme, yerine koyma, karşılaştırma yöntemlerinden) kullanabilecekleri belirtilecektir. Denklemlerin cebirsel çözümü ile birlikte *x*'e ya da *y*'ye ait bir değer bulmak yerine bir eşitsizlik durumu ile (örneğin; 0=2 veya 4=6) karşılaşacaklardır. Aslında bu ifadelerin birer eşitsizlik belirttiğini fark edeceklerdir. Bu durumun neyi ifade ettiğini görebilmeleri adına "*x+1=3* iken *x* yerine ne koyarsak denklem sağlanır? Peki denklemde *x* olmazsa burada 1 ve 3 ne zaman eşit olur?" soruları yönlendirilecektir. Bu eşitliklerin doğru olmadığını ve hiçbir zaman sağlanmayacağını fark etmeleri beklenmektedir. Problem için daha önceden çizdikleri paralel (kesişmemesi) doğru grafikleri ile cebirsel denklem çözümünden elde edilen eşitsizlik durumunu önceki derste bahsedilen kesişen doğrularla karşılaştırmaları istenecektir (ED). Böylece paralel doğrulara ait denklem sistemlerini sağlayacak *x* ve *y* değerlerinin olmayacağı sonucuna varmaları hedeflenmektedir. Diğer bir ifadeyle öğrenciler, doğru grafikleri arasında kesişim noktası yoksa bu doğrulara ait denklemlerin cebirsel çözümünden denklemleri sağlayacak bir ikilinin elde edilemeyeceği (çözüm kümesinin boş küme olduğu) çıkarımında bulunacaklardır (*CY*).

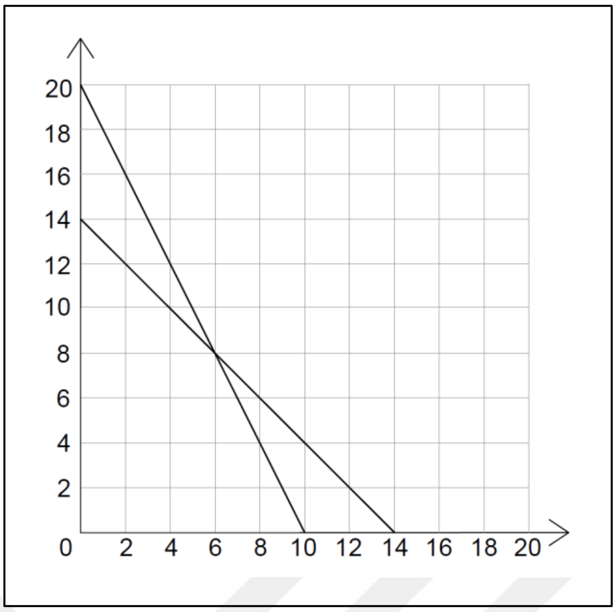
Dersin devamında iki doğrunun birbirine göre çakışık olma durumları ve bu doğrulara ait denklemlerinin cebirsel çözümlerinin sonucunu irdelemeleri istenecektir. Bunun için, manavdan bir kilo elma ile iki kilo armuda 4 TL ve iki kilo elma ile dört kilo armuda 8 TL veren Mehmet'in aldığı armut ve elmanın kilogram fiyatının sorulduğu bağlamsal bir problem kullanılacaktır. Öğrenciler, probleme dair fikir ve düşüncelerini anlamlandırarak (*CA*) akıl yürütme sürecine başlayacaklardır. Anlamlandırdıkları matematiksel bilgileri denkleme çevirerek sürece devam edeceklerdir (*FG1*). Öğrencilerin, problem için yazılan doğru denklemlerine ait grafikleri aynı koordinat sistemi üzerinde göstererek probleme ait denklem temsilinden grafik temsiline geçiş yapmaları beklenmektedir (*FG2*). Gerek denklem kurma gerek grafik oluşturma aşamalarında problem yaşayan öğrencilere yol göstermek adına önceki dersleri hatırlatan sorular sorulacaktır. Örneğin, "Bir önceki problemde Ahmet bir buğday ekmeğine ve bir kepek ekmeğine 2 TL vermişti değil mi? Bunu nasıl ifade etmiştik?" veya "Bir doğru çizmek için en az kaç nokta gerekiyordu? Bir doğrunun *x* eksenini kestiği noktada *y* kaç olur" soruları sorulabilir. Probleme ilişkin denklemlere ait grafikleri oluşturan öğrenciler, iki doğrunun üst üste (çakışık) olduğunu göreceklerdir. Bu farkındalığın ardından öğrencilerden probleme ait denklemler sistemini cebirsel olarak çözmeleri istenecektir (*SK2*). Cebirsel çözüm yaparken iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan çözüm yöntemlerinden (yok etme, yerine koyma, karşılaştırma) istediklerini kullanabileceklerdir. Kullandıkları yönteme göre (0=0, 8=8, . . .) gibi iki sayısal ifadenin eşitliğini gösteren sonuçlara ulaşacaklardır. Sonuçların ne anlama geldiği hakkında akıl yürütmeleri istenecektir. "Çözümde *x* ya da *y* yok ancak eşitlik durumu var"," Ne anlam ifade ediyor acaba?" soruları ile yönlendirmeler yapılacaktır. Bir önceki problemde verilen paralel doğrular durumuna ilişkin elde edilen çıkarımları kullanmaları için "Bir önceki problemde doğrular paraleldi ve cebirsel çözümde eşitsizlik durumu elde etmiştik. Peki, çakışık doğrular ve eşitlik durumu sizce ne ifade ediyor olabilir?" ve "Sizce bu denklemleri hangi (*x,y*) ikilileri sağlar" soruları sorulacaktır. Böylece, her (*x,y*) ikilisi için eşitlik durumunun değişmeyeceği vurgusu yapılarak *x* ve *y*'nin her değeri için çözüm vardır fikri uyandırılmak istenmektedir. Bu aşamadan sonra öğrencilerin iki doğru denklemine ait grafiklerin çakışık olması durumu ve bu duruma ait denklemlerin cebirsel çözümlerinin her değer için sağlanmasının birlikte nasıl ifade edilebileceğine dair çıkarımlarda bulunmaları beklenmektedir (*ED*). Çözülen bu iki problem sonucunda öğrencilerden "Eğer iki doğru paralel ise bu doğrulara ait cebirsel denklemlerin çözümü boş kümedir. Yani doğrular kesişmediğinden denklemleri sağlayan çözümde yoktur. Fakat iki doğru çakışık ise iki doğru sonsuz noktada kesiştiğinden cebirsel çözümünde sonsuz çözüm ikilisi içerir (*CY*)" değerlendirmesine ulaşmaları beklenmektedir.

Dersin ikinci kısmında kullanılmak üzere bir etkinlik tasarlanmıştır. Etkinlik hazırlanırken dördüncü ve beşinci ders planları ile gerçekleştirilen derslerin tekrar edilmesi ve pekiştirilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca ikinci ders planında da olduğu gibi öğrencilerin aktif olarak ve işbirliği içinde öğrenmesi temel amaçlardandır. Etkinliği gerçekleştirirken öğrenciler daha önceden belirlenmiş beşer kişilik beş grup olacaklardır. Gruplar başarı açısından karma öğrencilerden seçilmiştir. Böylece dayanışma ile değerlendirme yapmaları ve birbirlerinin öğrenmesine katkıda bulunmaları hedeflenmiştir. Tahtaya önceden hazırlanmış 7 farklı bağlamsal problem yansıtılacaktır. Problemler şu şekildedir:

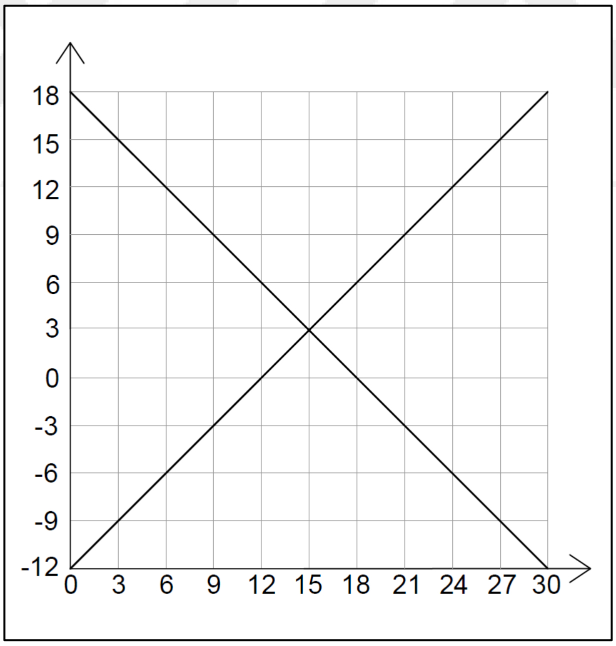
1. İçinde tavuk ve tavşanların olduğu bir kümeste 14 baş ve 40 ayak vardır. Bu kümeste kaç tavuk ve kaç tavşan vardır?
2. Ali ile Ayşe'nin yaşları toplamı 18'dir. 4 yıl sonra Ali'nin yaşı Ayşe'nin yaşının 4 katı olacaktır. Ali ile Ayşe'nin şimdiki yaşlarını bulunuz.
3. Toplamları 400, farkları 80 olan iki sayı kaçtır?
4. Elif hanım marketten 2kg un ile 1kg şeker alarak 8 TL ödüyor. Fatma hanım ise 1kg un ile 2kg şeker alarak 10 TL ödüyor. Buna göre un ve şekerin kilogramı kaçar liradır?
5. Bir çiftlikte toplam 20 tane tavuk ve horoz bulunmaktadır. Bu hayVanların ayak toplamlarının sayısı 30 ise tavuk ve horoz sayısı için ne söylenebilir?
6. Yusuf ve Ahmet'in yaşları toplamı 20'dir. 5 yıl sonra yaşları toplamı 30 olduğuna göre Yusuf ve Ahmet'in şu anki yaşları için ne söylenebilir?
7. Mehmet aldığı 2 defter ve 4 kalem için 12 TL ödemiştir. Eğer 3 defter ve 6 kalem almış olsaydı 18 TL ödeyeceğine göre defter ve kalemin fiyatları için ne söylenebilir?

Bu sorulardan 5 tanesinin grafiği A4 kağıtlara büyük boy çıktı alınarak beş grubun her birine bir grafik olacak şekilde dağıtılacaktır. Dağıtılan grafikler arasında iki problem (problem 3 ve problem 6) ile ilgili grafik yoktur. Onlar çeldirici olarak kullanılacaktır. Gruplardan beklenen, ellerindeki grafiğin hangi probleme ait olduğunu bulmak ve gruptaki öğrencilerden birinin tahtaya gelerek bu probleme ilişkin grubunun yaptığı cebirsel çözümünü sınıfa anlatarak göstermesidir.

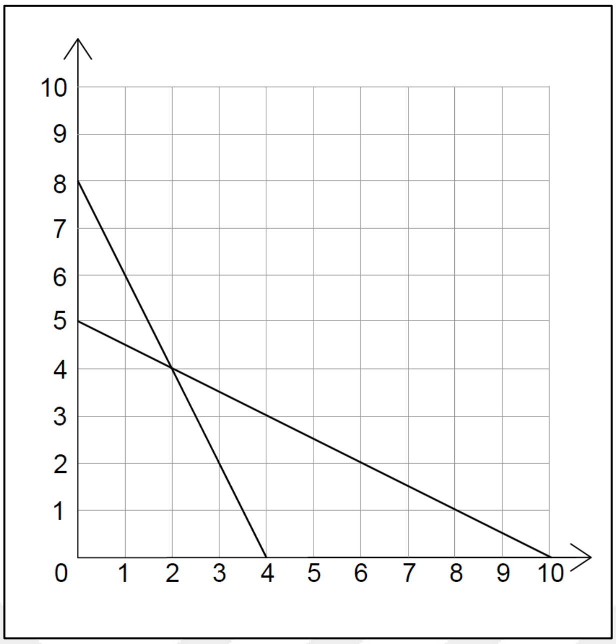
Grafik kağıtları dağıtıldıktan sonra gruplara 10 dakikalık düşünme ve sorgulama süresi verilecektir (*CA*). Grup üyeleri denklem kurarak (*FG1*), denklemlerden doğru grafiklerine geçiş yaparak (*FG2*) ve denklemleri cebirsel olarak çözümleyerek (*SK2*) yorumlar yapmaya çalışacaklardır. Bu aşamalar esnasında zorlanan öğrencilere ve gruplara, kullandıkları yönteme ve duruma göre geri dönütler verilecek ve yönlendirici sorular sorulacaktır. Değerlendirme yaparken farklı durumlara ait problemleri karşılaştırma ve yorumlama fırsatları olacaktır (*ED, CY*). Tahtaya yansıtılan yedi problemden beş tanesinin grafiği Şekil 10-14'de verilmektedir.



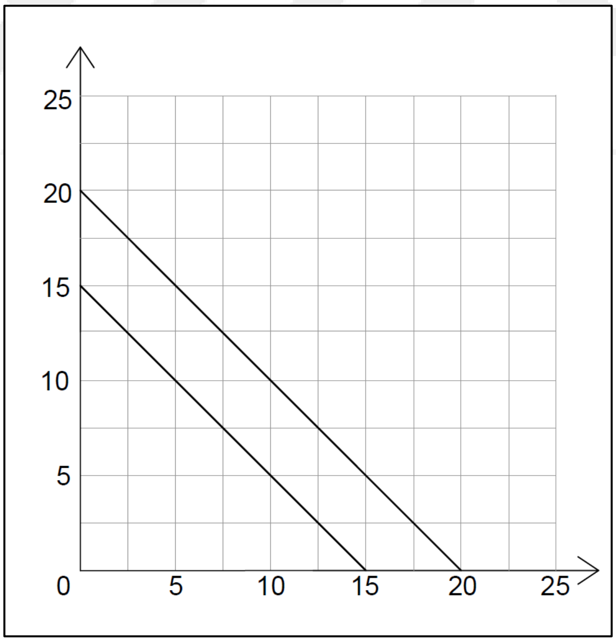
Şekil 10. Birinci probleme ait grafik



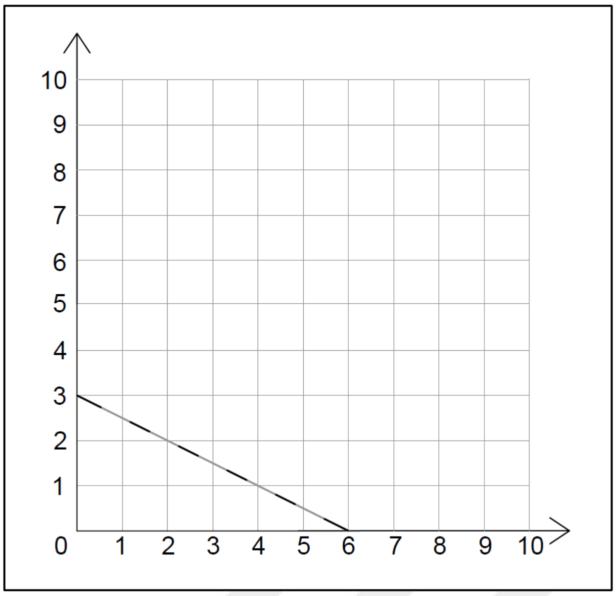
Şekil 11. İkinci probleme ait grafik



Şekil 12. Dördüncü probleme ait grafik



Şekil 13. Beşinci probleme ait grafik



Şekil 14. Yedinci probleme ait grafik

Problem 5 parelel iki doğruyu, problem 1,2 ve 4 kesişen doğruları, problem 7 ise çakışık iki doğruyu örneklendirmektedir. Böylece öğrenciler, iki doğrunun birbirlerine göre farklı durumları (kesişen, paralel, çakışık) ve bu durumlara ilişkin iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümleriyle (tek noktada çözüm, sonsuz noktada çözüm ve boş küme) ilgili pratik yapma imkanına sahip olacaklardır.

Dersi sonlandırırken dördüncü ve beşinci ders planlarının özeti olan aşağıdaki bilgiler vurgulanacaktır.

- İki doğru sadece bir noktada kesişiyorsa doğrusal denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm, doğruların kesiştiği noktanın koordinatlarıdır.
- İki doğru paralel ise bu doğrular hiçbir noktada kesişmez ve bu doğrulara ait denklem sisteminin çözümü yoktur.
- İki doğru çakışık ise sonsuz sayıda noktada kesişir ve bu doğrulara ait denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır.

3. 3. 5. 2. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5 Taslak Planının Uzman Araştırmacı ile Geliştirilmesi

Beşinci taslak plan, diğer planlarda olduğu gibi üç başlık altında uzman araştırmacıyla değerlendirilmiştir. Bu başlıklar, ders içeriğinin cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet etmesi, içeriğin kazanımlarla uyumlu olması ve içeriğin öğretim ilkeleri açısından uygun olmasıdır. Uzman ile değerlendirme sonucunda, planda kullanılan problemlerin etkinlikte kullanılanlarda dahil olmak üzere cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet ettiği sonucuna varılmıştır. Ders planına ait içeriğinin de kazanımlara uygun olduğu düşünülmüştür. Ders planının içeriğin öğretim ilkeleri açısından da yeterli olduğu kanaatine varılmıştır. Taslak planda herhangi bir değişime gerek görülmemiş ve hazırlandığı şekliyle uygulanmasına karar verilmiştir.

3. 3. 5. 3. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5 Taslak Planına İlişkin Pilot Uygulama Sonuçları

Beşinci taslak plan, dördüncü planın devamı niteliğinde olduğundan öğrencilerin derse hazırbulunuşlukları üst seviyedeydi. Problemlerde verilen matematiksel bilgiden başlayarak bağlamsal problemlere ait denklemleri oluştururken üçüncü ve dördüncü planlarda edindikleri bilgi ve tecrübelerini kullanarak ilerlemişlerdir. Öğrencilerden bazıları, problemlere ait grafikleri oluştururken ve denklemlerin cebirsel çözümlerini yaparken zorluklar yaşamışlar ve zorluk yaşayan öğrencilere diğer planlara benzer dönütler verilerek zorlukları aşmalarına yardımcı olunmuştur.

Öğrenciler, planın ilk problemi olan bir buğday ekmeğiyle bir kepek ekmeğinin 2 TL ve iki buğday ekmeğiyle iki kepek ekmeğinin 6 TL olduğu soruda bir sorun olduğunu problemi okur okumaz sezmişlerdir. Problemde, ekmek sayıları iki katına çıktığı halde ekmekler için ödenen miktar üç katına çıkmıştır ve öğrenciler fiyatında iki katına çıkması gerektiğini ifade ederek soruya itiraz etmişlerdir. Problemde yanlışlık olmadığı ve problemde verilen bilgilerin birlikte kullanılarak önceki planda öğrenilen çözüm yöntemleri ile ilerlemeleri ifade edilmiştir. Öğrencilerde sorulan sorunun hatalı olduğu düşüncesi oluşmaması için problem öğrencilere verilmeden önce soruda hatalı gibi görünen bilginin belli bir nedenle o şekilde verildiği ve problemin çözümü ile bunun daha iyi anlaşılacağı öğrencilere ifade edilecektir. Verilen problemin grafik gösterim ve cebirsel çözüm yöntemleriyle çözülmesinden sonra öğrenciler problemi sağlayan bir ikilinin olmadığını görmüşlerdir. Probleme ilişkin grafiklerin paralel olması (ortak noktalarının olmaması) ve denklemlerin cebirsel çözümünden bir eşitsizlik durumunun elde edilmesiyle birlikte öğrenciler probleme ait problem metninde verilen ekmek fiyatlarındaki sorunun kaynağını görmüşlerdir. Bu problem için soru metninden de probleme ait bir çözümün olmadığı kolayca görülebilmektedir. Fakat bu durumun her zaman kolayca anlaşılamayacağı öğrencilere belirtilecektir.

Dersin devamında kullanılan problemde, öğrenciler bir kilo elma ile iki kilo armuda 4 TL ve 2 kilo elma ile 4 kilo armuda 8 TL ödenen manavda elma ve armudun kilogram fiyatlarını bulmaya çalışmışlardır. Bir önceki probleme benzer şekilde, problemin metninden sorunun özel bir anlamı olduğu öğrenciler tarafından fark edilmiştir. Problemin çözümü önceki çözümlere benzer şekilde çözülmeye çalışılmıştır. Problemde verilen matematiksel bilgileri, denklem ile ifade etmişler ve öncelikle denklemlere ait doğru grafiklerini çizmişlerdir. İki doğrunun üst üste geldiğini yani aynı doğruyu ifade ettiğini fark etmişlerdir. Denklem sisteminin cebirsel çözümünü yaparken istedikleri yöntemi seçerek devam etmişlerdir. Son beş ders saatinde problemlerin cebirsel yöntemlerle çözümleri yapıldığından, öğrencilerden birçoğu çözümde kolayca ilerlemişlerdir. Denklemlerin cebirsel çözümünden denklemler sağlayan bir ikili yerine bir eşitlik (8=8, 0=0,. .) durumu ile karşılaşmışlardır. Öğrenciler, bir önceki problemde eşitsizlik ile karşılaşmışlar ve ne anlam ifade ettiğini öğrenmişlerdi. Bu bilgiden yola çıkarak eşitlik durumunun ne anlam geldiğini zorlanmadan görmüşlerdir. Cebirsel çözüm sonucunda eşitlik elde edilmesi veya doğru grafiklerinin çakışık olması durumlarında problemi sağlayan sonsuz sayıda çözüm noktasının bulunabileceği öğrenciler tarafından görülmüştür. Fakat, öğrenciler sonsuz sayıda çözüm kümesinin ne ifade ettiğini kavramakta sıkıntı yaşamışlardır. Her (x,y) ikilisinin doğru olduğunu düşünen öğrenciler olmuştur. Her ne kadar problem sonsuz çözüm içerse de çözüm noktalarının probleme ait denklemleri sağlaması gerektiği vurgulandıktan sonra öğrencilere problemin çözümü olabilecek bazı örnek noktalar buldurulabilir. Bunu sağlamak adına öğrencilere, önce bir meyvenin kilogram fiyatı verilerek diğerinin fiyatı sorulabilir. Daha sonra öğrencilerden iki meyvenin de kilogram fiyatları istenerek problemi sağlayacak çözümlerin nasıl elde edilebileceği pekiştirilebilir.

Dersin ikinci kısmında kullanılan etkinlik grup çalışması olarak gerçekleşti. Öğrenciler grup çalışmasına aşina olmadıklarından aralarında fikir alışverişi yapmakta zorlandılar. Bu nedenle, birbirlerinin düşüncelerinden yeterince etkilenemediklerinden akıl yürütmede ve çıkarımda bulunmada sıkıntı yaşamışlardır. Öğrencilerin beraber çalışarak daha kolay akıl yürütme yapmalarına yardımcı olmak adına etkinlik başlamadan önce grup çalışmasına yönelik birkaç hatırlatma yapılabilir ve uygulama sınıfında bu durumun önüne geçilebilir. Gruplarına verilen grafiğin hangi probleme ait olduğunu bulabilmek için verilen problemlerin her birini tek tek grafiğini çizen gruplar olmuştur. Bazı gruplar ise problemlerin cebirsel çözümlerini yapmışlar ve elde ettikleri çözümlerin sahip olabileceği grafiklerle (tek noktada kesişen doğrular, paralel doğrular veya çakışık doğrular) gruplarına verilen grafiği karşılaştırarak problemleri daralttıktan sonra doğru sonuca ulaşmışlardır. Uygulama sınıfında, her problemi tek tek çözen çözmek isteyen gruplara son iki planda öğrendikleri hatırlatılarak bu bilgileri kullanmaları adına yönlendirmeler yapılabilir.

3. 4. Uygulama Süreci

Uygulama ders planlarında belirtilen “Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik, denklemi oluşturur ve yorumlar”, “İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer” ve “Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar" kazanımlarına yönelik 10 (5x2 ders saati) saatlik ders öğretimi sürecini kapsamaktadır. Her bir ders 40 dakikadan oluşmakta olup, dersler video ile kayıt altına alınmıştır. Buna ek olarak, öğrencilere verilen bireysel dönütleri görüntülemek için farklı bir el kamerası kullanılmıştır. Uygulamacı aynı zamanda araştırmacı görevini de üstlenmiştir. Uygulamalar ortalamaları birbirine yakın iki farklı sınıfta gerçekleştirilmiştir. Bu sınıflar pilot ve uygulama sınıfları olarak kabul edilmiştir. Hazırlanan ders planları belirlenen tarihlerde öncelikle pilot sınıfa uygulanmıştır. Pilot sınıf ile işlenen dersin video görüntüleri uygulayıcı tarafından izlenip değerlendirilerek ders planları revize edilerek uygulama sınıfında uygulanmıştır.

Bu araştırmada 3 hafta devam eden toplam 10 saat dersin video çekimleri yapılmıştır. Ana çekimler dışında ders akışı içinde öğrenciler ile yaşanan bireysel konuşmalara ve verilen dönütlere vakıf olmak amacıyla el kamerası ile ekstra çekimler yapılmıştır. Uygulama durumu için ön hazırlık olması amacıyla ve yaşanabilecek problemleri belirleyerek önüne geçebilme düşüncesi ile uygulamalardan birer hafta önce pilot uygulama yapılmıştır.

3. 5. Verilerin Toplanması

3. 5. 1. Veri Toplama Araçları

Eylem araştırmalarında veri toplama yöntemleri araştırma sorularına, araştırmanın durumuna ve araştırmacının yeterliliklerine göre değişiklik gösterebilir (Kuzu, 2009). Yıldırım ve Şimşek (2013) çalışmalarında eylem araştırmalarında birden fazla veri toplama yöntemi kullanılabileceğini ve böylece birbirini destekleyen zengin veriler elde edilebileceğini belirtilmiştir. Bu araştırmada da veri toplama aracı olarak video kayıtları ve araştırmacının alan notları kullanılmıştır.

3. 5. 1. 1. Video Kayıtları

Eylem araştırmasında geçerli ve çoklu görüş açısı sağlaması için alan notları, dergiler, fotoğraflar, filmler video kayıtlar kullanılabilir (Köklü, 2001). Özellikle video kayıtları araştırmacının araştırma sürecini tekrar tekrar inceleyerek analiz etmesine ve düzeltme şansına sahip olmasına imkân verir. Video kayıtlar, araştırmacının öğretme ve öğrenme ortamına dair yansımalar yapmasına zemin hazırlar (Sherin, Linsenmeier ve Van Es, 2009). Sınıf ortamında ders akışını kayıt altına alan bir kamera ile birlikte el kamerası da kullanılmıştır. El kamerası ile öğretmen ile öğrencilerin bireysel diyologları görüntülenmiştir. Ders akışını kayıt altına alan kamera ile tüm dersler 80x5=400 dk'lık ders akışı kaydedilmiştir. El kamerasıda farklı derslerde farklı sürelerde kayıtlar yaparak gerektikçe kullanılmıştır. Pilot ve uygulama sınıflarındaki video kayıtlar ile el kamerası kayıtları birlikte düşünüldüğünde toplam 1000 dakikanın üzerinde video çekim yapılmıştır.

3. 5. 1. 2. Alan Notları

Nitel araştırma yöntemlerinde zengin betimleme ve detaylandırma yapabilmek adına görüşme, gözlem video kaydı, mülakat gibi veri toplama yöntemlerinin yanında alan notları da kullanılır. Alan notları bu çalışmada pilot uygulama olumlu ve olumsuz durumları kaydederek uygulama için revize yapılması amacıyla kullanılmıştır. Ayrıca cebirsel akıl yürütme göstergelerinin derslerde uygulanma ve gösterilme durumlarını analiz ederken ve videoları analiz ederken kullanılarak önemli noktaların akılda kalmasını ve yorumlanmasını kolaylaştırmak adına kullanılmıştır.

3. 6. Verilerin Analizi

Video ile kayıt altına alınan dersler uygulama sonrasında uygulayıcı tarafından izlenerek betimlenmiş ve ders analizi çerçevesi kullanılarak değerlendirilmiştir. Ders analizi, öğretme uygulamalarından öğretmeyi öğrenme fırsatı sağlayan yollardan biridir (Hiebert ve Morris, 2012; Santagata ve Guarino, 2011). Dersin amaçlarına, öğrenci davranışlarına, öğretime ve önerilere odaklanmayı sağlar, öğretmende fark etme becerisinin gelişmesini destekler. Ders analizi yapılan öğretimin etkililiğini değerlendirmek amacıyla öğrenci fikirlerini yakalama ve yorumlama, öğretim hakkında sonuç çıkarma ve önerilerde bulunmak için sistematik bir analiz çerçevesi sunmaktadır (Barnhart ve Van Es, 2015; Santagata ve Yeh, 2014).

Ders analizi aşağıda verilen soruları ve cevaplarını düşünmeyi kapsamaktadır (Hiebert vd., 2007).

- Öğrencilerin ne öğrenmesi bekleniyor?
- Öğrenciler neler öğrendi?
- Öğretim öğrencilerin öğrenmesine nasıl yardımcı oldu ya da olmadı?
- Öğrencilerin öğrenmesi için öğretim nasıl daha etkili hale getirilebilir?

Ders analizi çerçevesinde, dersin öğrenme hedefleri ve cebirsel akıl yürütme göstergeleri (dersin amacı ve öğrencilerin anlaması gereken temel fikirler ile öğrencilerin sergilemesi gereken cebirsel akıl yürütme becerileri), öğrencilerin öğrenmesi (öğrencilerin öğrenme hedeflerine ulaşıp ulaşmadığına dair kanıtlar), öğretimin etkililiği (öğrenme hedeflerine ulaşmaya yardımcı olan veya olmayan yöntem, teknik ve materyaller, öğrencilerde düşünceleri açığa çıkarmak için sorulan ve öğrenme hedeflerinin gerçekleşme durumunu sorgulayan sorular) ve dersin geliştirilmesi (kullanılabilecek alternatif stratejiler) başlıkları altındaki sorulara yanıtlar aranarak ders videoları analiz edilmiştir.

Eylem planın yansıma aşaması, ders analiz çatısına dayanarak yapılan değerlendirmenin son basamağı olan dersin geliştirilmesine yönelik iyileştirme ve geliştirme tavsiyelerini kapsamaktadır. Çalışma için geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergeleri temel alınarak uygulamacının hangi alternatif öğretme stratejilerini kullanabileceği, önerilen stratejinin öğrenme hedeflerine ulaşmadaki rolü ve öğrencilerin dersin hedeflerine ulaşmak için farklı olarak neler yapılabileceği gibi sorulara yanıtlar oluşturulmaya çalışılmıştır.

3. 7. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bu çalışma araştırmanın tasarlanması ve gerçekleştirilmesinde esneklik olması, sayısal verilere ve istatistiklere yer verilmemesi, sözlü ve nitel analizlere vurgu yapılması nedeni ile nitel araştırma kapsamındadır. Nitel araştırma, "gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, olayların gerçekçi olarak betimlendiği yaklaşımdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). "Nitel yöntemle tasarlanmış araştırmalarda ele alınan konu hakkında derin bir kavrayışa ulaşma çabası vardır" (Karataş, 2015, s.71).

Bir araştırmanın güvenilirliği sağlanması gereken ilk koşuludur. Nitel bir araştırmanın güvenilirliğinden bahsedebilmek için veri toplama ve analiz yöntemleri ile ilgili detaylı açıklamalara yer vermesi, toplanan verilerin önce betimsel bir yaklaşımla sunulması, aynı araştırmaya birden fazla araştırmacının dahil edilmesi, önceden oluşturulan ve ayrıntılı olarak tanımlanan kavramsal çerçeveye göre veri analizi yapılması güvenirliliği arttıran etkenlerdendir (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 274). Bu etkenler göz önünde bulundurularak bu çalışmada uzman bir araştırmacının görüşlerine başvurulmuş ve ders analizi çerçevesi(lesson analays framework) kullanılarak veri analizi yapılmıştır. .

Nitel araştırmalarda geçerliliğin sağlanabilmesi için konu tarafsız gözlemlenmelidir. Yıldırım ve Şimşek'de (2008, s.256) çalışılan konunun bütün olarak incelenmesi gerektiğini elde edilen verilerin doğruluğunu göstermek için bazı ek yöntemler (katılımcı teyidi, meslektaş teyidi, uzman incelemesi v. b.) kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Bu çalışmada da ders planlarının ve cebirsel akıl yürütme göstergelerinin geliştirilmesi aşamamasında alanında uzman bir araştırmacı ile görüş alış verişi yapılmış ve değerlendirmelerde bulunulmuştur. Araştırma sürecinde araştırmacı devamlı olarak kendini ve süreci eleştirel gözle sorgulamış ve denetlemiştir. Elde edilen veriler açık ve net olarak ifade edilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s.257-258). Ayrıca araştırmanın sonuçları benzer ortamlara ve durumlara genellenebilir olacak şekilde tüm aşamaları ayrıntılı bir şekilde verilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s.258-259). Bu çalışmada da benzer iki farklı ortamda uygulama gerçekleştirilerek pilot uygulama yapılmıştır.

4. BULGULAR

Araştırmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamından yansımalar yapmak amaçlandığından öğretmenin video ile kayıt altına aldığı öğretim sürecine odaklanılmış ve bu öğretim süreci ders analiz çatısı temel alınarak analiz edilmiştir. Hazırlanan ve uygulanan her bir ders için ayrı ders analizi yapıldığından beş başlık oluşturulmuştur. Bu başlıklar “Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-Plan:1”, “Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-Plan:2”,”İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklemler-Plan:3”, “Doğru Grafikleri-Plan:4” ve “Doğru Grafikleri-Plan:5” dir.

4. 1. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-1

Birinci ders planı “Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar” kazanımı için hazırlanmıştır. Derste öğrencilerin günlük yaşamdan durumlar için tablo, denklem ve grafik oluşturmaları, bu farklı temsiller arasında dönüşümler yapmaları ve yorumlamaları amaçlanmıştır. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından zihinsel sorgulamalar ile anlamlandırmaları (CA), matematiksel bilgilerini tablo, denklem ve grafik ile sunmaları (FG1), farklı temsiller arasında geçişler yapmaları (FG2) veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlar oluşturmaları (BK1) ve varsayımlarını destekleyerek genelleme yapmaları (BK2), genellemeleri cebirsel ifadeler ile göstermeleri (SK1), denklem kurup çözmeleri (SK2), değerlendirme yaparak yorumlamaları (CY) hedeflenmiştir. Ders boyunca kullanılacak tablolar ve koordinat sistemini gösteren şekiller önceden hazırlanarak A4 kâğıtlara basılmış şekilde öğrencilere dağıtılmıştır. Öğrencilerin derse başlarken dikkatlerini toplayarak derse odaklanmalarını kolaylaştırmak adına bağlamsal olmayan $y=2x-1$ doğrusuna ait tablo ve grafik oluşturma sorusuyla giriş yapılmıştır. Öncelikle öğrencilerden Şekil 15’de verilen tabloyu doğru denklemine göre doldurmaları istenmiştir. Tabloda x’e ait değerler verilmiştir ve öğrencilerden bu değerlere bağlı olarak $2x-1$, y değerleri ile (x,y) sıralı ikililerini bulmaları istenmiştir.

x	2x-1	y	(x,y)
-2			
-1			
0			
1			
2			

Şekil 15. Doldurulacak olan tablonun görüntüsü

Öğretmen : *Tabloda neler var? Neler isteniyor? Hangi sütunlar var? Ne düşünürsünüz? (Bu soru kullanılırken, öğrencilerin denklemde yer alan değişkenleri ve bu değişkenlerin birbiri ile ilişkilerini fark etmeleri ve bu ilişkileri tablo ile sunmaları amaçlanmıştır (FG1, FG2)).*

Gamze : *x' i yerine koyup değer bulacağız.*

Esra : *y'yi nasıl bulacağız?*

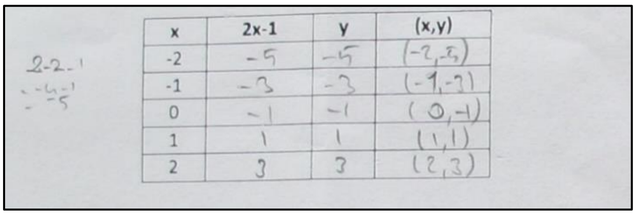
Öğretmen : *y=2x-1 'dir diyor. Söyler misiniz x ile y arasında nasıl bir ilişki vardır? Y değeri nasıl oluşmuştur? (Sembolleri nasıl ve ne şekilde kullanabileceklerini fark etmelerini, anlamlandırma sürecine dair sorgulamalar yapmaları istenmiştir(CA).)*

Esra : *x'in 2 katı alınıp 1 çıkarılarak y oluşturulmuştur.*

Öğretmen : *Tabloyu doldururken değerler için 2x-1 'i bulduğunuzda y'yi bulmuş olur musunuz acaba?*

Öğrenciler : *Evet.*

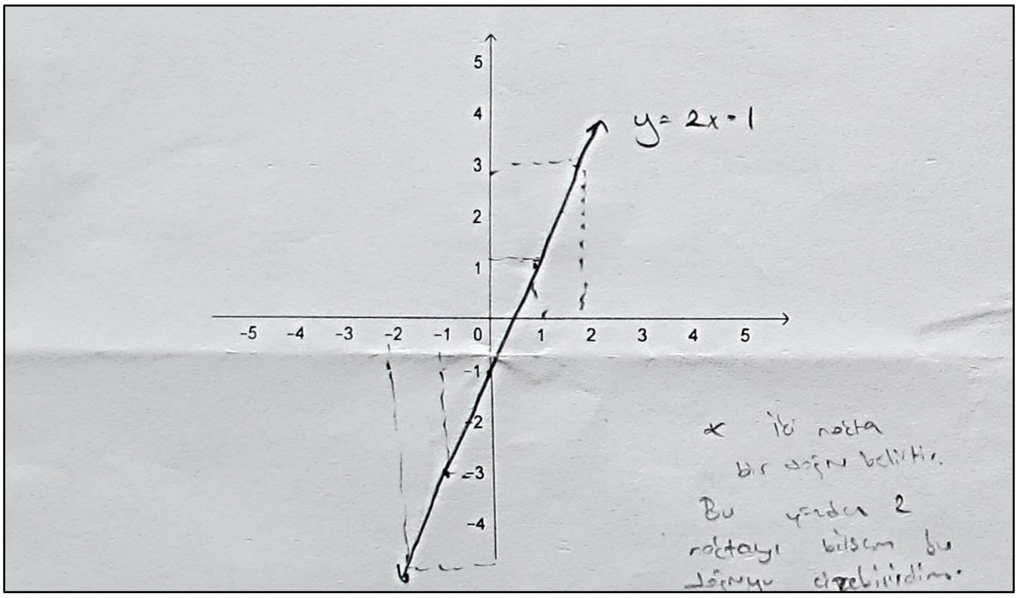
Öğrenciler kâğıtlar üzerinde çalışmaya başladıktan sonra hepsi ile birebir ilgilenilerek takip edilmiş, sorularına cevap verilmiş ve yönlendirici sorular sorulmuştur. Birçok öğrenci tabloyu doğru şekilde doldurabilmiştir fakat zorlanan öğrenciler de olmuştur. Bu öğrencilere yardımcı olabilmek adına *y* ile *x* arasındaki ilişki tekrar vurgulanmıştır. "*x*'i ne yaparsak *y*'ye ulaşırız?" gibi sorularla bakış açıları genişletilmeye çalışılmıştır. Bu yönlendirmelerdeki amaç, *x* ile *y* değişkenleri arasındaki ilişkiyi teşhis etmelerini ve bu ilişkiyi kullanarak (FG) tablodaki değerleri bulmalarını sağlamaktır. Pek çok öğrenci bu sorulardan sonra tabloyu doldurmayı başarmıştır. Problem yaşayan öğrencilere de bireysel dönütler verilmiştir. Öğrencilerin bireysel çalışması bittikten sonra tablodaki her bir satır için bir öğrenci tahtaya gelerek o satırdaki *x* değerine karşılık gelen değerleri ve sıralı ikiliyi bulmuştur.



x	2x-1	y	(x,y)
-2	-5	-5	(-2,-5)
-1	-3	-3	(-1,-3)
0	-1	-1	(0,-1)
1	1	1	(1,1)
2	3	3	(2,3)

Şekil 16. Esra’nın çalışma kağıdında doldurduğu tablo

Tabloyu doldurma işi bittikten sonra öğrencilere buldukları *(x,y)* ikililerinin aslında ne anlama geldiği ve neyi ifade ettiği sorulmuştur. Bu sıralı ikililerin aslında koordinat sisteminde birer nokta ifade ettiği fikrine yönlendirilerek doğru grafiğine geçiş yapabilmeleri hedeflenmiştir. Farklı gösterim şekillerine ilişkin bir temsilden diğer temsile geçiş yapmaları ve temsiller arasında bağlantı kurmaları (FG2) amaçlar arasındadır. Öğrenciler, bu ikililerin koordinat sisteminde noktalar olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilerden tablodaki bu noktaları çalışma kâğıtlarındaki koordinat sistemine işaretleyerek birleştirmeleri istenmiştir. Öğrencilerden birçoğu sorun yaşamadan noktaları işaretlemiş ve daha sonra noktaları birleştirerek doğru grafiğini çizmişlerdir. Doğru grafiğini doğru şekilde oluşturan Esra’nın çalışma kağıdının görüntüsü Şekil 17‘de verilmektedir. Bu görüntü sınıftaki öğrencilerin çoğunun kağıdındaki görüntüyü yansıtmaktadır. Bu görüntü tablodaki bilgilerini kullanarak temsiller arası geçiş yaptıklarını (FG2) göstermektedir.



Şekil 17. Esra‘nın çalışma kağıdına çizdiği grafik

Öğrencilerin bireysel çalışmalarından sonra sıralı ikilileri koordinat sisteminde nasıl göstereceğini unutanlar olduğundan tablodaki her bir nokta için bir öğrenci tahtaya gelerek noktaları koordinat sisteminde göstererek açıklamıştır. Sonrasında, bir öğrenci ile aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : *Peki, noktaları bulduk. Bu noktaları birleştirirsek ne olur?*
Esra : *Kesen doğru.*

Öğrenci ile geçen diyalog burada sonlanmıştır. Öğrencinin ne ifade etmek istediğini anlamak ve varsa yanlış anlaşılmaları düzeltmek adına "Ne demek istedin?" ve "Kesen doğru ne demek" gibi sorular öğrenciye yönlendirilerek diyaloğa devam edilebilirdi. Koordinat sisteminde işaretlenen noktalar öğrencilere görev verilmeden birleştirilmiştir. Birleştirme eylemi de bir öğrenciye yaptırılarak aynı denkleme ait noktaların tek bir doğru ifade ettiği öğrencilere hissettirilebilirdi.

Doğruyu oluşturduktan sonra doğru hakkında konuşulmaya başlanmıştır. Aşağıda verilen diyalog ile geçen seneye ait bilgi olan (orijinden geçen, eksenleri keserek geçen doğrular) bilgilerinin hatırlatılması amaçlamıştır. Ayrıca oluşan doğrunun analiz edilerek yorumlanması beklenmiştir.

Öğretmen : *Evet. Bir doğru ortaya çıktı. Bu doğrunun özelliği nedir ?*
Fatih : *Orijinden geçen doğru.*
Öğretmen : *Orijin neresiydi? Geçiyor mu orijinden?*
Ceyda : *Orijinden geçmiyor. İki ekseni keserek geçiyor.*
Öğretmen : *Hangi bölgelerden geçiyor?*
Doğan : *1., 3. ve 4. bölgelerden geçiyor.*
Öğretmen : *Bu doğruyu oluştururken kaç nokta buldunuz? (Bu soru ile ellerindeki veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımda bulunmalarını ve bu fikirlerini destekleyen farklı yorumlar sunmaların, sonuçta genellemeye ulaşmaları amaçlanmıştır(BK1, BK2).)*
Beyza : *Beş nokta.*
Öğretmen : *Acaba doğruyu oluşturmak için kaç nokta yeterli olur? Neden?*
Ceyda : *Üç nokta yeterlidir. Baştaki, ortadaki ve sondakini bulsaydık yeterliydi.*
Gamze : *İki tane bulsak yeterli.*
Esra : *Baştakini ve sondakini bulsak yeterlidir.*
Öğretmen : *Peki bir şey soracağım. Sadece baştaki ve sondaki mi olmak zorunda? Rastgele iki nokta verilirse olmaz mı?*
Beyza : *Yeterli olurdu.*
Öğretmen : *Evet. Bir doğrunun çizilebilmesi için üzerinde olan herhangi en az iki noktayı bilmeniz yeterlidir. Çünkü iki noktadan yalnız bir doğru geçer.*

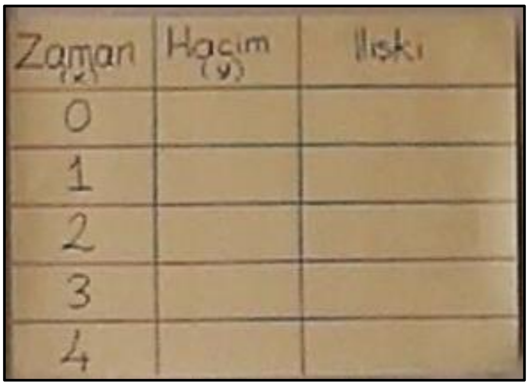
Beyza isimli öğrencinin verdiği cevap sorgulanmadan kabul edilmiştir. Öğrencinin düşüncesini açması ve aynı sonuca ulaşamayan öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için öğrenciden tahtadaki doğru grafiği üzerinden farklı nokta örneklerinin verilmesi istenebilirdi. Başka düşüncesi olan öğrencilerin olup olmadığı sorgulanarak sınıftaki herkesin aynı sonuca ulaşıp ulaşmadığı araştırılabilirdi.

Bu diyalogla birlikte dersin ilk bölümü tamamlanmıştır. Öğrencilere verilen çalışma kâğıdında birinci örnek olarak verilen problem ile derse devam edilmiştir. Problemde, ölçülü bir kaba ilişkin zaman hacim değişimin sorulduğu bir soru vardır. Kabın içinde başlangıçta 100 ml su vardır ve bir musluk kaba saniyede 50 ml su akıtmaktadır. Akıllarında oluşabilecek anlaşmazlıkları ve yanlış anlamaları ortadan kaldırmak, anlamlandırma ve gerekçelendirme süreçlerine yardımcı olmak için soruyu öğrencilerden birkaçının okuması ve yorumlaması istenmiştir(CA). Akıllı tahtayı da kullanarak içinde başlangıçta 100 ml su olan ve hacmi saniyede 50 ml artan bir animasyon izletilmiştir. Böylece, problem bir görselle desteklenerek öğrencilerin zihninde problemin somutlaşmasını sağlanmak istenmiştir. Problem metni anlaşıldıktan sonra çalışma kağıtlarında bahsi geçen probleme ilişkin verilen ölçülü kaptaki su hacminin zamanla değişimini gösteren tabloyu doldurmaları istenmiştir (FG1). Tabloda (Bkz. Şekil 18) zaman değerleri verilmişti ve öğrenciler boş bırakılan hacim değerlerini doldurmuşlardır.

Zaman (s)(x)	**Hacim(ml)(y)**	
0	100	50
1	150	50
2	200	50
3	250	50
4	300	

Şekil 18. Ölçülü kapta zaman-hacim değişim tablosu

Problem için tahtaya asılan materyalde öğrencilerdeki tabloda yer alan zaman ve hacim sütununa ek olarak Şekil 19'da verildiği gibi "ilişki" sütunu da mevcuttur.



Şekil 19. Probleme ilişkin tabloda asılı olan materyal

Öğrenciler bu sütun yardımıyla ölçülü kaptaki su hacminin zamana göre değişimini irdeleyeceklerdir. Öğrencilere, geçişleri nasıl yapacaklarına ve nasıl ilişki kuracaklarına dair sorular sorulmuştur. Tablonun doldurulması esnasında öğrencilerle aşağıda verilen diyalog gerçekleşmiştir.

Öğretmen : Tablodaki sıfırıncı saniye neyi ifade ediyor burada?
Ceyda : Başlangıç.
Öğretmen : Başlangıçta ne kadar su vardı?
Ceyda : 100 ml.
Öğretmen : Birinci saniyede ne kadar su oldu?
Fatih : 150 ml.
Öğretmen : Ne kadar su geliyor bir saniyede?
Fatih : 50 ml.

Devamında öğrenciler söz alarak, her bir saniyedeki hacmi belirtmişlerdir. Tablo doldurulduktan sonra öğrencilerden hacim-zaman ilişkisini tam olarak kuramayanlar olabileceği düşünülerek, öğrenciler yükseklik ile hacim arasındaki ilişkiyi kurmaya yönlendirilmiştir. Onlar için somut şekilde yükseklik artmaktadır. Zaman ile kaptaki suyun yüksekliği arasındaki ilişki öğrencilere sorulmuştur.

Öğretmen : Zaman ile kaptaki suyun yüksekliği arasında ilişki var mı?
Öğrenciler : Evet.
Öğretmen : Nasıl bir ilişki vardır?
Esra : Hacim artarsa yükseklikte artar.
Öğretmen : Yani zaman artıkça hem hacim hem de suyun yüksekliği mi artıyor? (Burada soyut olan hacim artışını fark etmeleri için somut olan

yükseklik artışını kullanmak hedeflemiştir ancak yeteri kadar vurgulanmadığı görülmüştür.)

Öğrenciler : Evet.

Öğretmen : Zaman ile hacim arasındaki ilişkiye dikkat edersek ne diyebiliriz? Yani ilişkiyi başlangıçta bulunan su miktarına bağlı düşünebilir miyim?

Gamze : Denklem kurmaya mı çalışacağım.

Öğretmen : Hayır. Denklem kurmaya çalışmıyoruz. Başlangıçta 100 ml su olan kaba bir saniyede 50 ml su aktıysa birinci saniye sonunda kapta ne kadar su olduğunu nasıl ifade edebiliriz?

Gamze : Birinci saniyede 100 artı 50' dir.

Öğretmen : İkinci saniye sonunda ne kadar su birikir?

Selin : 150 artı 50 .

Öğretmen : Öyle de diyebilirsin ama mantığı birinci saniyedeki ne benzerse nasıl olur? (Amaç genellemeyi formüle etmelerini ve değerlendirme yapmalarını sağlamaktır (BK2)) Ya da başlangıçtaki su miktarı sabit kalacak şekilde düşünürsen ne dersin?

Selin : O zaman 100 artı 100 olur.

Öğretmen : Her saniye de geleni ayrı ayrı eklesek olur mu?

Selin : Tamam. 100 artı 50 artı 50 olur.

Öğretmen : Üçüncü saniyede nasıl olur?

Fatih : 100 artı 50 artı 50 artı 50 olur.

Öğretmen : Dördüncü saniyede nasıl olur?

Ferhat : 100 atı 50 artı 50 artı 50 artı 50 olur.

Öğretmen : (100+50+50) 'yi göstererek burada daha farklı nasıl ifade edersiniz?

Ceyda : 100+ 2. 50 olarak.

Öğrenciler, diğerleri arasındaki ilişkiyi de diyaloğun yardımıyla buldular. Farklı öğrenciler söz alarak konuştular. Bu diyalogdan sonra zaman ile hacim arasında ilişkinin kurabilmesi için tablodaki ilişki sütunu nasıl doldurabilir diye öğrencilere sorulmuştur ve bu konuşmaya ait diyalog aşağıda verilmektedir.

Öğretmen : Zaman sütunu ile ilişki sütunu arasında nasıl bir ilişki vardır?

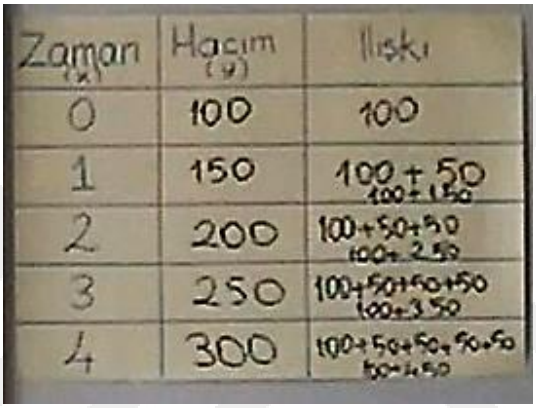
Esra : Artış miktarı ile zamanı çarptığımda 100'e eklenen şeyi buluyoruz.

Beyza : Hacimleri parçaladığımızda kaç tane 50 varsa o kadar saniye geçmiş oluyor.

Öğretmen : O halde şöyle ifade edebilir miyiz? Başlangıçta kapta olan su miktarı 100 ml'yi sabit alıyoruz ve kaç saniye geçerse o kadar 50'yi üzerine ekliyoruz.

Hacim-zaman arasındaki ilişkinin fark edilmesinden sonra durumu özetleyen cümle öğrenciler tarafından kurulmalıydı. Düşüncelerini düzenleyerek ifade etmelerine imkân tanınmalı ve genellemeye öğrencilerin kendi akıl yürütmeleri yardımıyla ulaşmaları sağlanmalıydı .

Bu tablo için ilişki sütununun verilmesi öğrencilerin hacim-zaman ilişkisini fark etmeleri adına kolaylık sağlamıştır. Dersin devamında, farklı öğrenciler tahtaya gelerek buldukları değerleri tabloya zorlanmadan yazmışlardır Doldurulan tablonun görüntüsü Şekil 20‘de verilmektedir.



Zaman (x)	Hacım (y)	İlişki
0	100	100
1	150	100+50 100+1.50
2	200	100+50+50 100+2.50
3	250	100+50+50+50 100+3.50
4	300	100+50+50+50+50 50+4.50

Şekil 20. Birinci planın birinci problem için tahtadaki dolu tablonun görüntüsü

Tablo doldurulduktan sonra tablodaki (*x,y*) ikilileri tahtaya gelen öğrenciler yardımıyla koordinat sistemine yerleştirilmiştir. Koordinat sistemindeki bu noktalar öğrencilerle tartışılmıştır. Sistemdeki noktaları birleştirerek doğru oluşturmaları hedeflenmiştir (FG2).

Öğretmen : Bu noktaları birleştirince ne oluşur?

Hale : Bir doğru oluşur.

Öğretmen : (Noktalar birleştirilerek doğru oluşturuldu) Ne tür özellikleri olan bir doğrudur.

Beyza : Eksenleri keserek geçen bir doğrudur.

Öğretmen : Peki kapta başlangıçta su olmasaydı bu doğru değişir miydi? (Bu soru sorulurken y= mx+n ve y= mx vurgusu yapılmak istenmiştir.)

Öğrenciler : Evet.

Öğretmen : Nasıl bir değişiklik olurdu?

Hale : Grafiğin başlangıç noktası 50’ye inerdi, 50’den başlardı.

Öğretmen : Grafiğin başlangıç noktasının 50’den başlaması hiç su olmadığı anlamına gelir mi?

Fatih : *Grafik 0'dan başlardı, orijinden geçerdi. Çünkü başlangıçta hiç su olmadığı için 0 ml vardır derim.*

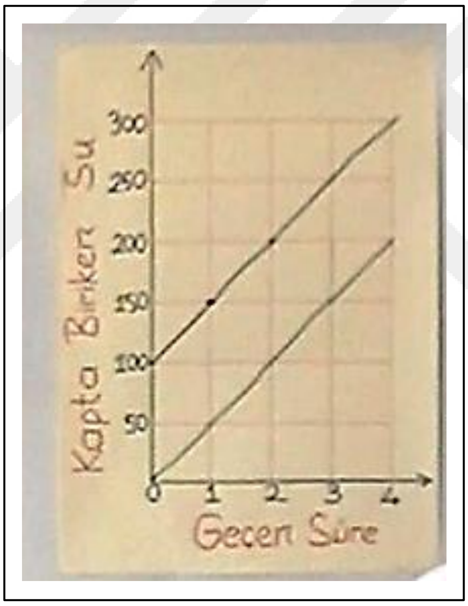
Gamze : *Grafiğin başlangıç noktası değişmezdi.*

Esra : *0'dan başlayan orijinden geçen bir grafik olur.*

Öğretmen : *Evet başlangıçta kapta su olmasaydı ama yine her saniye 50 ml su aksaydı 0'dan başlayıp artan bir grafik olurdu (Bu duruma ilişkin doğru da koordinat sistemine eklenmiştir) (Bkz. Şekil 21). Peki oluşan bu iki grafiği yorumlarsak ne diyebiliriz? (Bu soruyu sorarak y= 50x+100 ve y=50x denklemlerine ulaşmaları ve değişim oranını yani doğruların eğimini fark etmeleri hedeflemiştir.)*

Gamze : *Paralel doğrular.*

Öğretmen : *Güzel, paralel olduklarına göre bu iki doğru için ne aynıdır? Düşünün bakalım.*



Şekil 21. Birinci planın birinci problem için tahtadaki grafiğin görüntüsü

Öğrencilerle diyalog sırasında, yanlış akıl yürütme yapan Hale ve Gamze'nin cevapları irdelenmemiş ve yanlış cevapların sebepleri araştırılmamıştır. Esra'dan doğru yanıt alındıktan sonra diğer öğrencilerin akıl yürütmesine fırsat tanımadan bilgiler doğrudan verilmiş ve bir sonraki soruya geçilmiştir. Bu nedenle, Hale ve Gamze gibi farklı düşünen öğrencilerin verilen cevaba ikna olup olmadıklarına emin olunamamıştır. Sonraki soruya geçmeden önce öğrencilerle konuşmaya devam edilip "Başlangıç noktasının Hale'nin dediği gibi 50 olması için soru nasıl olmalıydı?" veya "Gamze, başlangıç noktası değişmez dedin. Peki, hangi durumda başlangıç noktası değişir" gibi sorularla öğrenciler yönlendirilebilirdi.

Doğruların paralel oldukları vurgulandıktan sonra teneffüs zili çalmıştırı. Öğrencilerden, teneffüs sürecinde soruya ait bağımlı ve bağımsız değişkeni düşünmeleri istenerek derse ara verilmiştir. Teneffüsten dönüldüğünde öğrencilerden sadece bir kaçının bağımlı ve bağımsız değişken üzerine düşündüğü görülmüştür. Bu öğrencilerden biri söz alarak sürenin sorunun bağımsız değişkeni ve kapta biriken suyun ise sorunun bağımlı değişkeni olduğunu belirtmiştir Yani, kapta biriken su miktarının süreye bağlı olduğunu ifade etmiştir. Farklı düşünen öğrenci olup olmadığı sınıfa sorulmuş ve öğrenciler verilen cevapta hem fikir olduğundan derse devam edilmiştir. Öğrencilere değişim oranının (eğimden bahsedilmediği için bu şekilde adlandırılmıştır) sezdirilmesi adına "Zamanın değişimi ile hacmin değişimi karşılıklı olarak aynı şekilde mi gerçekleşiyor? Hacim zamana bağlı olarak nasıl değişiyor?" soruları yöneltilmiştir. Tablodaki ilişki sütunun, kaptaki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi anlattığını ve hacimdeki değişimin saniyede 50 ml olduğunu öğrenciler kolaylıkla fark etmişlerdir. Ancak, bir önceki dersin sonunda yapılacağı belirtilen iki doğrunun karşılaştırılması unutulmuştur. Dersin devamında, öğrencilerin tablo ve grafik oluştururken yeterli deneyimi kazandıkları düşünülerek, 9. ve 16. saniyelerde kapta ne kadar su birikeceği öğrencilere sorulmuştur. Bu sorular ile öğrencilerin şu ana kadar elde ettikleri bilgilerden sonuçlar çıkarmaları ve anlamlandırma yapmaları hedeflenmiştir (BK1, BK2). Ayrıca bu sorular ile genelleme yapmak için alt yapı hazırlanmıştır. Derse, " Öncelikle 9 saniyede kaba ne kadar su akar?" sorusuyla devam edilmiştir. Bu soruyla başlayarak devam eden diyalog aşağıda verilmiştir.

Selin : *450 olur.*
Öğretmen : *Nasıl buldun?*
Selin : *Her saniye için 50+50+… yaparak buldum.*
Öğretmen : *Kısa yolu yok mu bu işin?*
Selin : *Her saniyede 50 ml su aktığı için 9 ile 50'yi çarparak da bulurum.*
Engin : *Ama başlangıçta 100 ml su zaten vardı. 100'de eklerim 550 olur.*
Öğretmen : *Evet güzel, 16. saniyeyi düşünelim.*
Fatih : *100 ml zaten vardı. 50, 50… ekleyerek ilerledim. 900 olur.*
Öğretmen : *Ben örneğin 40. saniyeyi ya da 100. saniyeyi sorsam yine ekleyerek mi ilerlerdin? (Bu soru ile genelleme yapmaları kolaylaştırılmaya çalışılmıştır.)*
Fatih : *Ben yine öyle yapardım.*
Engin : *16. saniye ile 9. saniye arasında 7 sn fark var. 7 saniyede 7. 50'den 350 ml su akar. Bunu 450'nin üzerine ekledim ve başlangıçtaki 100 ml suyu*

ekledim. 900 ml su olur. (Bu yanıt beklenen çözümlerden değildi. Genelleme yapmaya uygun bir yol olmasa da bu soru için iyi bir akıl yürütme adımıydı.)

Emre : *16 saniyede 16. 50'den 800 ml su akar. Başlangıçta 100 ml su olduğundan toplam 900 ml su olur.*

Öğrenciler sorunun çözümünde farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Fatih zaman hacim ilişkisini kullanarak çözüm yapmıştır. Fakat kurduğu ilişkiden yola çıkarak bir genellemeye ulaşamamıştır. Selin'de Fatih gibi başlamış ve sorulan soruların yardımıyla genelleme yönelik bir adım atmıştır. Engin ve Emre ise hacim zaman ilişkisinden yola çıkarak doğrudan genelleme yapabilmişlerdir. Bundan sonraki soruda sınıfın genellemeye ulaşması amaçlanmıştır. Öğrencilere *x*. saniyede ne kadar su birikeceği sorusu yöneltilmiştir. Öğrenciler arasında dolaşılırken, somut verilerle ulaştıkları genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür. Bu nedenle ilişkiyi cebirsel olarak formüle etmelerine yardımcı olmak (SK1) amacıyla öncelikle belirli bir sürede musluktan akan su miktarına odaklanmaları istenmiştir. Art arda "5. saniyede musluktan ne kadar su akar?", "11. saniyede musluktan ne kadar su akar?" soruları sorularak cevap alınmıştır. Arada sorulan sorularla veriler arasındaki ilişkileri fark ederek değerlendirme yapmaları ve genellemeye ulaşmaları hedeflenmiştir. Videoyu izlenirken fark edilmiştir ki doğru cevap veren birden fazla öğrenci olmasına rağmen (söz almadan konuştukları için ya da doğru cevabı duymaya odaklanıldığından) onlar fark edilmemiştir ve dönüt verilmemiştir. Bu sorulara verilen cevaplara dayanılarak öğrencilere "*x.* saniyede musluktan ne kadar su akar?" sorusu yöneltilmiştir ve *50. x* cevabı öğrencilerden rahatlıkla alınmıştır. Böylelikle öğrenciler farklı gösterimleri kullanarak fonksiyonel bir ilişkiyi temsil etmeyi başarmışlardır. Buradan tekrar başa dönülerek *x.* saniyede kapta toplam ne kadar su birikeceği sorulmuştur. Bu soru sorulurken toplam kelimesi özellikle vurgulanmıştır. Bu vurgu üzerine başlangıçtaki 100 ml suyu da göz önünde bulundurarak *100+50. x* cevabına ulaşmışlardır. Elde ettikleri bu genellemeyi kullanarak denklem kurup çözecekleri "kapta 1350 ml su birikmesi kaç saniyede gerçekleşir?" sorusuna geçilmiştir. Bu soru ile genelleme yaparak ulaştıkları denklemi çözerek (SK2) test etme fırsatına sahip olmuşlardır. Öğrencilere öncelikle bireysel çalışmaları için zaman verilmiştir. Bireysel çalışmalar esnasında öğrenciler çözüme dönük farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Daha sonra tüm öğrencilere hitap edecek şekilde öğrencilerin çözümlerini yansıtan şu diyalog gerçekleşmiştir:

Öğretmen : *Bu soru için ne düşünürsünüz? Yorum yapabilir misiniz?*

Gamze : *100+50. x= 1350 derim ve x'e ulaşmak için çözerim.*

Öğretmen : *Denklemden gitti yani. Salih sen ne dersin?*

Salih	*: 25. saniye olur.*
Öğretmen	*: Nasıl ulaştın 25' e?*
Salih	*: Denklem kurarak çözdüm.*
Engin	*: 25x50 olur.*
Öğretmen	*: Tamam, nasıl ulaştın ona?*
Engin	*: Ters işlem yaptım.*
Selin	*: 1350'den önce 100'ü çıkardım. Çünkü kapta zaten 100 ml su var. Ondan sonra her saniyede 50 ml dolduğu içinde 1250' yi de 50 ' ye böldüm.*

Sorunun cevabını hem denklem çözerek hem de aritmetik işlemler yaparak bulanlar olmuştu. Aritmetik işlemler yapan Engin ve Selin aslında aynı yolu kullanmışlardı. Ama ifade tarzları farklıydı. Aritmetik işlemlerde öğrenciler denklem çözülürken uygulanan işlem sırasını uygulamışlardı. Denklem çözerek yapılan çözümden farklı olarak bilinmeyen x olarak adlandırılmamıştı. İki farklı çözümde açıklanarak bu soru için farklı bir durumu düşünmelerini sağlamak amacıyla "bu soruda, başlangıçta kap boş olsaydı çözümde bir değişiklik olur muydu?" sorusu yöneltilmiştir. Bu soru ile ulaşılan genellemede yani denklemde farklılık olacağını hissettirmek amaçlanmıştır. Değişiklik olmayacağını belirten öğrenciler olmuştur. "Kapta hiç su olmaması ile başlangıçta su olması aynı durum mudur?" sorusu yöneltilmiştir. Bu durumda 100'ü çıkarmayacaklarını ve sonucun değişeceğini fark etmişlerdir. Özel bir durumu irdeleyerek çözümler sunmayı başarmışlardır.

Dersin ikinci problemi, 2000 litre kapasiteli bir havuzun dakikada 40 litre su boşaltan bir muslukla boşaltılmasından bahsediyordu. İlk problemde artan bir durum varken bu problemde azalan durum söz konusuydu. Öncelikle, öğrenciler soruyu okuyup yorumladılar. Yorumların sorudaki verileri nasıl kullanacaklarına dair zihinsel anlamlandırmalara katkıda bulunacağı düşünülmüştür (CA). Daha sonra bu bilgilere dayanarak aşağıda verilen tabloyu bireysel olarak doldurmaya başlamışlardır. Dakika sütunundaki bilgiler verilmişti. Diğer sütunları doldurmaları istenmiştir (FG1). Azalan durumu anlamakta zorlanan öğrenciler vardı. Zorlanan öğrencilere yardım edebilmek için "Bir önceki soruda kaba saniyede 50 ml su akıyordu ve kaptaki suyun hacmi artıyordu. Bu soruda ise havuzdaki su boşaltılıyor. Yani havuzdaki suyun miktarı ne oluyor?" diye sorulmuştur. Böylece ilişkinin negatif olduğu hissettirilmeye çalışılmıştır. Birinci sorudaki tecrübelerinin de yardımıyla veriler arasında bağlantıyı görmüşler ve aralarındaki ilişkiyi kurmuşlardır. Daha sonra her bir satır için bir öğrenci tahtaya gelerek tabloyu doldurmuştur (Bkz. Şekil 22).

Dakika (x)	Havuzda kalan su miktarı(y)	İlişki
0	2000	2000
1	1960	2000-40.1
2	1920	2000-40.2
3	1880	2000-40.3

Şekil 22. Birinci planın ikinci problemi için öğrencilerin doldurduğu tablo

Problemin ikinci sorusu olarak bir önceki problemde olduğu gibi öğrencilerden tablo olarak sundukları verileri koordinat sisteminde işaretleyerek probleme ait grafiği çizmeleri istenmiştir (FG2). Öğrenciler sırayla tahtaya gelerek tablodaki ikilileri koordinat sisteminde bularak, işaretleyerek çizmişlerdir ve daha sonra çizilen doğruyu yorumlamaları istenmiştir.

Öğretmen : Nasıl bir doğru bu?
Esra : Eksenleri keserek geçen.
Öğretmen : Birinci sorudaki doğru ile karşılaştır mısınız? (Değerlendirme yaparak eleştirel düşünmeleri istemiştir.)
Selin : Birinci doğruda artıyordu burada azalıyor.
Öğretmen : Evet. Birinci doğru artan iken bu azalandır.

Öğrencilerden doğru cevaplar alındıktan sonra öğrencilerin bu sonuca nasıl ulaştıklarına yönelik sorgulama yapılmamıştır. Ayrıca cevap doğrulanmadan önce farklı düşüncede olan öğrenciler olup olmadığı araştırılmamıştır. Dersin kalan süresi azaldığından dolayı öğrencilerin yeterince akıl yürütmesine ve bilgilerini tam olarak yapılandırmalarına izin verilmeden yeni soruya geçilmiştir. Öğrencilerle yapılan bu diyalogdan sonra, 35. dakikada havuzda kaç litre su kalacağı sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Bu soru ile ilişkilere dair varsayımları destekleyerek genelleme için adımlar atmaları hedeflenmiştir (BK1, BK2). Öğrencilerin bireysel çalışmasına izin verilmiş ve aralarında dolaşılarak cevapları kontrol edilmiştir. Öğrencilerin ilk 3 saniye için yazdıkları ilişkiyi 35. saniyeye genişletmekte zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilere bir bakış açısı kazandırmak adına " Öncelikle 35. dakikada acaba ne kadar su boşalmıştır?" sorusu yöneltilmiştir. Böylelikle ilişkiyi adım adım ilerleyerek daha kolay kurabilecekleri düşünülmüştür. Öğrencilerin biraz daha düşünmelerine fırsat tanınmış ve bir öğrenci söz alarak "her dakikada 40 litre su boşaldığı için 35 dakikada 35x40 dan 1400 litre su boşalır ve 600 litre su kalır. " cevabını vermiştir. Öğrenci havuzdan boşalan su miktarı ile dakika arasındaki ilişkiyi kurarak havuzdan boşalan su miktarını 35x40 olarak ifade etmiştir.

Havuzda kalan su miktarı ise havuzun tamamından boşalan su miktarının çıkartılmasıyla bulunmuştur. Öğrenci zaman ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi aritmetik işlemlerle ifade etmiştir. Ama tam bir genellemeye ulaşamamıştır. Fakat ders esnasında bu cevap yeterli görülüp bir sonraki soruya geçilmiştir. Diğer birkaç öğrencinin de düşüncelerinin alınması sınıfın genellemeye ulaşması adına yararlı olabilirdi. Derse devam edilmiş ve öğrencilerin genelleme yapabilecek duruma geldiklerini düşünülerek "*x.* dakikada havuzda ne kadar su kalacağı" sorusu öğrencilere yönlendirilmiştir (SK1). Öğrenciler önce bireysel olarak soruya cevap aramışlardır. Öğrenciler arasında dolaşılırken bazı öğrencilerin cevaplarında "*40. x-2000*" cevabıyla karşılaşılmıştır. Bunun üzerine "başlangıçtaki su mu fazla boşalan mı" ya da "başlangıçta var olan miktar ne" soruları ile doğru genellemeye ulaşmaları hedeflenmiştir. Sınıfta doğru genellemeye ulaşmakta hala zorlanan öğrenciler vardı. Zorlanan öğrencilere yardımcı olmak için "O halde düşünelim, dakikada 40 litre boşaldığına göre x dakikada ne kadar su boşalır?" sorusu sorulmuş ve kolaylıkla *40x* cevabına ulaşılmıştır. Bir sonraki adım, olarak boşalan suyun havuzda kalan su miktarıyla ilişkisinin kurulması olmuştur. Öğrencilere, "Boşalan su nereden geliyor?", "Başlangıçta havuzda ne kadar su var?" ve "Havuz boşalıyorsa havuzdaki su zamanla ne olur?" sorularıyla öğrencilerin somut olarak düşünebildikleri havuzdaki suyun zamanla azalması bilgisinden genellemeye geçmeleri amaçlanmıştır. Sorulan sorular öğrencilerin "*2000-40. x"* genellemesine ulaşmasını kolaylaştırmıştır.

Derse, elde ettikleri genellemeyi kullanmalarını gerektirecek " havuzda 400 litre su kaldıysa ne kadar zaman geçmiştir?" şeklindeki soru ile devam edilmiştir. Öğrenciler, kalan miktar üzerinden düşünmeye başlamaları gerektiğini fark etmişlerdir. Vurgulanarak "400 litre su kalmış acaba ne kadar boşalmış?" sorusunu yinelenmiştir. Soruya cevap veren öğrenciler elde ettikleri genellemeyi kullanmak yerine aritmetik bir yaklaşımla havuzdan boşalan su miktarı 1600'ü dakikada boşalan su miktarı olan 40'a bölerek geçen zamanı, 40 dakika olarak bulmuşlardır. Öğrenciler yine aritmetik yöntemler kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Ancak, sorunun asıl sorulma amacı olan elde edilen genellemeden yararlanarak soruya ilişkin denklemin kurulup sorunun cebirsel olarak çözülmesi yöntemi, hiçbir öğrenci tarafından kullanılmamıştır. Buna rağmen öğrenciler cebirsel çözüm yapmaya yönlendirilmemişlerdir. Problemin son sorusunda, yine tersten ilişki kurmalarını sağlamaya yönelik havuzun tamamının kaç dakikada boşalacağı öğrencilere sorulmuştur. Öğrenciler, aritmetik düşünmeye alıştıklarından havuzdan boşalan suyun havuzun tamamı yani 2000 litre olduğunu kolaylıkla ifade etmişlerdir. Dakikada 40 litre su havuzdan boşaldığı için 2000'i 40'a bölerek 50 dakikada havuzun tamamen boşalacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu soruda da elde edilen genelleme aritmetiksel işlemlerle kullanılarak sonuç elde edilmiştir. Aslında önceki aşamalarda da pek çok soruda karşılaşılan bu durum öğrencilerin ilişkisel bağlantıları anlamakta zorluk yaşamadıklarını ancak cebirsel temsiller kullanarak çözümler sunmak yerine aritmetiksel çözüm yaklaşımlarını tercih ettiklerini göstermektedir. Bu soruda öğrenciler, bir önceki soruda unutulan denklem kurarak sorunun cebirsel çözümüne yönlendirilmiştir. “Havuzun tamamı boşaldığına göre havuzda su kalmış mıdır?” sorusu ile genellemenin kullanılarak soruya ilişkin denklemin kurulması hedeflenmiştir (SK2, CY). Bu soruyla birlikte genellemeye ait buldukları denklemin havuzda kalan su miktarına eşit olduğu hatırlatılmıştır ve bu genellemenin sıfıra eşitlenerek sorunun çözülebileceği sonucuna ulaşmışlardır. Cebirsel olarak da soru çözüldükten sonra aritmetik yöntemle ve cebirsel yöntemle elde edilen cevapların aynı olduğu görülmüştür. Böylece probleme ait genelleme yardımıyla da soruların kolayca çözülebileceği görülmüştür. Problemin son iki sorusu ile öğrencilerin somut ve soyut kavramlar arasında geçişler yaparak ilişkisel düşünmelerinin sağlanması hedeflenmiştir.

Bağımlı ve bağımsız değişkenler ikinci problem için de konuşulmuştur. Son tekrar yapılırken ilk problemde konuşulan değişim oranının neyi ifade ettiği öğrencilere sorulmuştur. Planda, bu sorunun daha önce sorulması gerekiyordu fakat teneffüs araya girdiği için unutulmuştur. Öğrenciler değişim oranının ne anlama geldiğini yorumlayamamışlar ve problemdeki önemini hemen fark edememişlerdir. 50 değerinin ne anlama gediğini görebilmeleri adına ilgili problemin çalışma kâğıdına dönerek 50 değerinin nerede geçtiği sorulmuştur. Bazı öğrencilerin genellemede kullanılan 50 katsayısı dikaktlerini çekmiştir ve bu değerin saniyede hacimdeki değişim bilgisini verdiğini belirtmişlerdir. Burada, öğrencilere ”Bu değerin büyük ya da küçük olması neyi değiştirirdi? Grafikte etkileri nasıl olurdu?” soruları sorularak değişim oranının anlamı pekiştirilebilirdi. Eleştirel yaklaşımlar ile düşünmelerine zemin hazırlanmış olurdu. Benzer şekilde, havuz sorusunda da bir değişim oranı olup olmadığını sorulmuştur. Öğrenciler probleme ait genelemeye bakarak bu oranın 40 olduğunu belirtmişlerdir fakat değişimin negatif olduğunu hemen fark edememişlerdir. Birinci problem ile ikinci problem arasındaki değişim oranları arasındaki farkı görebilmeleri adına “Birinci problemde kabımız doluyordu. Bu problemde ise havuzumuz boşalıyor. Sizce iki problemde de değişim aynı mı?” diye sorulmuştur. Yaptıkları hatayı fark eden öğrencilerden bazıları değişim oranının -40 olacağını belirtmişlerdir. Havuzdaki suyun zamanla azalmasından dolayı değişimin eksi olduğu belirtilerek değişim oranının -40 olduğunu vurgulanmıştır.

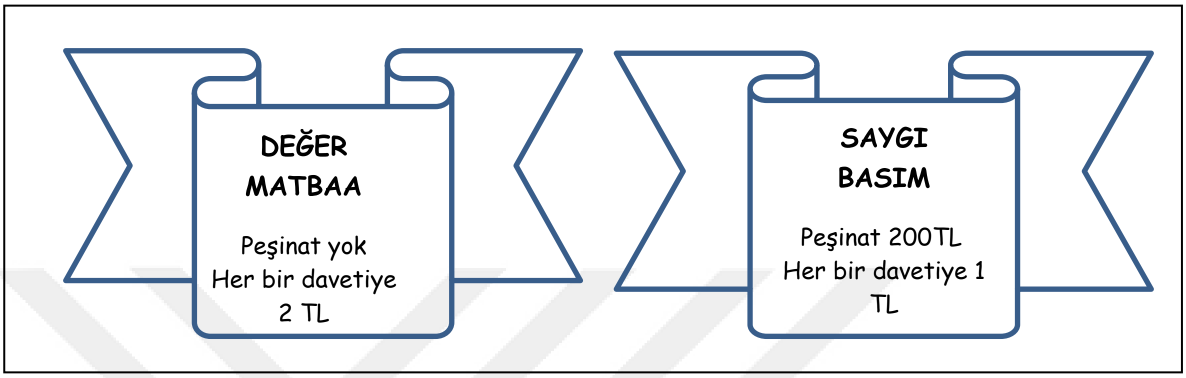
Ders videolarının analizi neticesinde öğrenci davranışları cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından değerlendirildiğinde öğrencilerin zihinsel anlamlandırmalar (CA) yapmak için birbirlerine ya da öğretmene sorular sormakta pasif kaldıkları gözlemlenmiştir. Bu durum genel anlamda cebirsel olarak bir sonra ki davranışlara ulaşmalarını zorlaştırmıştır. Veriler arasında ilişkiler kurarak varsayımlar (BK1) ile genellemeye ulaşmalarında (BK2), farklı gösterimler kullanarak temsiller arasında (tablodan grafiğe, denklemden tabloya) geçişlerde (FG) problem yaşamamışlardır. Ancak işin içine semboller ve cebirsel temsiller girince sıkıntı yaşadıkları gözlemlenmiştir. Aritmetik yaklaşımlar kullanarak çözüm stratejileri sergileme alışkanlıklarından kurtulamadıkları ve cebirsel yöntemleri tercih etmedikleri (SK) görülmüştür. Eleştirel düşünerek yorumlar ve çıkarımlar yapmaları (CY) hususunda da desteklenmeleri gerektiği gözlemlenmiştir.

Ders, öğrenci merkezli olarak anlatılmaya çalışılsa bile ders içeriği için ayrılan sürenin sınırlı olması nedeniyle ders anlatımı sırasında genellikle doğru cevabın duyulmasına odaklanılmıştır. Yanlış cevapları ve nedenlerini irdelemek için yeterli zamanın ayrılmadığı video kayıtlarında görülmüştür. Dersin içeriği sadeleştirilerek, öğrenciler ile daha fazla birebir iletişime geçilebilir, öğrencilerin kendilerini daha fazla ifade etmelerine yardımcı olarak bilgiyi yapılandırmaları kolaylaştırabilir. Problem aralarında kullanılan yönlendirici sorular öğrencilerin düşünmelerine ve fark etmelerine yardımcı olmuştur. Öğrenciler video ile ders ortamına adapte olmakta zorlandıkları için konuya ilişkin anlamadıklarını sormakta istenilen ölçüde etkin değillerdir. Bu nedenle öğrencilerin kavramakta zorlanmış olabileceği durumlar öğrencilere sorulan sorularla tespit edilmeye çalışılmıştır.

4. 2. Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam-2

“Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar” kazanıma ilişkin ikinci 80 dakikalık derse, aynı kazanıma hizmet eden birinci plana ait derste yaptıklarımızı ve öğrendiklerimizi hatırlayarak başlanmıştır. Bu dersin cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından hedefleri arasında öğrencilerin sorular sorarak zihinsel anlamlandırma süreçlerine katkıda bulunmak veriler arasında bağlantı ve ilişki kurmalarını ve farklı gösterimleri kullanarak temsilden temsile geçiş yapmalarını desteklemek, sembolleri ve cebirsel gösterimleri kullanarak stratejiler geliştirmelerini sağlamak, karşılaştırmalar yaparak eleştirel düşünmelerine zemin hazırlamak ve yorumlar yapabilmeleri için imkanlar sunmak bulunmaktadır. Hatırlatma amacı ile bir doğru denklemine ait grafiğin çizebilmesi için en az kaç noktanın bilinmesi gerektiğinin üzerinde durulmuştur. Birinci dersin birinci problemi olan ve içinde başlangıçta 100 ml su bulunan kaba saniyede 50 ml su akması ile ilgili konuşulmuştur. Sorulan soruda, başlangıçta kapta su olması ve olmaması durumları için çizilen grafikler ve aralarındaki farkları anımsanmış ve bir önceki dersin ikinci problemi olan ve içinde 2000 litre su bulunan bir havuzun dakikada 40 litre su boşaltan bir muslukla boşaldığı soruya ilişkin önemli noktalar gözden geçirilmiştir. Bu problem üzerinden, bağımlı ve bağımsız değişkenler konuşulmuş ve bu hatırlatmalarla birlikte dersin giriş kısmı tamamlanmıştır.

Dersin geçiş/ geliştirme kısmına birinci ders planından farklı olarak içinde iki durum barındıran bir problem ile başlanmıştır. Probleme ilişkin soru metninde “Yeni evlenecek bir çift düğün davetiyesi yaptırmak istemektedir. Bunun için farklı matbaalardan fiyat araştırması yapmış ve aşağıdaki iki seçeneği en uygun seçenekler olarak değerlendirmişlerdir. ” şeklindedir (Bkz. Şekil 23).



Şekil 23. İkinci planın ilk problemine ilişkin şekil

Öğrencilerden bir kaçı sesli bir şekilde soruyu okuyarak yorumlamış ve anlamlandırmaya çalışmıştır. Öğrenciler soru metninden anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmişlerdir (CA). Bu soruda, her bir seçenek için ayrı ayrı tablolar oluşturulacak (FG1, BK1), ancak bu seçeneklere ilişkin grafikleri aynı koordinat sistemi üzerinde göstererek sonuçları karşılaştıracaklardı (FG2, ED). Her bir durum için ayrı ayrı doldurulacak tablo aşağıda verilmiştir (Bkz. Şekil 24).

Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı (y)	İlişki
0		
1		
2		
3		
...		
25		
50		
100		
...		

Şekil 24. İkinci planın birinci sorusunda öğrencilerin dolduracağı tablo

Tabloları doldururken, öğrencilerin problemde verilen matematiksel verileri tablo ile sunmaları ve davetiye sayıları ile bunlar için ödenecek para arasındaki ilişkilere dair varsayımlarda bulunarak ilişkiyi keşfetmeleri hedeflenmiştir. İki durum arasında özellikle sabit ücret farkının olması vurgulanmıştır. İlk seçenekte olan “Peşinat yok” ifadesi ile “davetiye alınmayacaksa para da verilmeyecektir” bilgisi öğrencilere hissettirilmeye çalışılmıştır. Peşinat ifadesi sözlükte “bir alışveriş veya hizmet için önceden verilen bir miktar para” anlamına gelmekte olup soruda ifade edilmek istenen davetiye sayısı ne olursa olsun ödenecek sabit parayı doğru olarak ifade etmemektedir. Öğrenciler bu “peşinat” ifadesinde problem yaşamamış olsalar bile sorunun daha anlaşılır olabilmesi adına peşinat yerine “sabit ücret” ifadesi kullanılabilirdi. Tabloları öğrenciler önce yerlerinde çalışma kağıtları üzerinde doldurmuş, daha sonra ise her bir satır için bir öğrenci tahtaya gelerek tahtadaki tabloyu tamamlamıştır. Böylece farklı öğrencilerin genellemeye ulaşmak yolunda tecrübe edinmelerine imkan sunulmuştur. Tablo doldurulduktan sonra tablodaki verilerden yararlanarak davetiye sayısıyla ödenecek para arasındaki ilişkiyi daha rahat fark etmeleri adına, öğrencilerden düşüncelerini öncelikle sözel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Bir öğrenciyle tahtaya arkadaşları gelmeden önce aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir:

Öğretmen : *Davetiye sayısı ile ödenecek miktar arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade eder misiniz?*

Selin : *Davetiye sayısının iki katı kadar para ödüyoruz.*

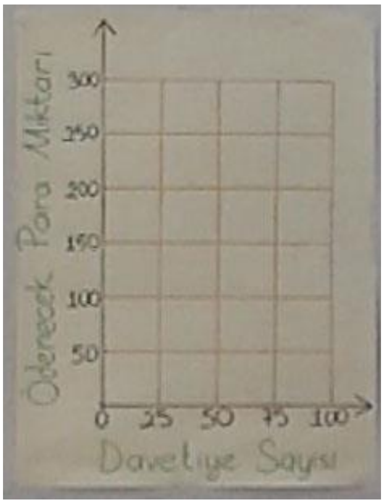
Bu cevap yeterli bulunarak probleme devam edilmiştir. İkinci seçenek için “davetiye alma olayını başlatmak için belli bir miktar vermek gerekiyor mu?” sorusu ile yönlendirme yapılmıştır. Başlangıçta (x=0) 200 lira sabit ücret verilmesi gerektiği anlaşıldıktan sonra her bir davetiye için (x=1,2,…) ödenmesi gereken para miktarı tek tek belirlenmiştir. İkinci seçenek için davetiye sayısı ile ödenecek miktar arasındaki ilişkiyi fark edilmesi adına yine öğrencilerden düşüncelerini öncelikle sözel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin birçoğu, ödenecek miktarı hesaplamak için peşinat olan 200 liranın üstüne davetiye sayısını davetiye ücreti ile çarparak eklemleri gerektiğini kolayca fark etmişlerdir. Ancak, sınıfta bu ilişkiyi hala fark edemeyen öğrencilerde bulunmaktadır.

Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı (y)	İlişki
0	200	200
1	201	200+1.1
2	202	200+1.2
3	203	200+1.3
...	...	...
25	225	200+1.25
50	250	200+1.50
100	300	200+1.100
...	...	...

Şekil 25. İkinci planın birinci sorusunun ikinci seçeneğine ait öğrencilerin doldurduğu tablo

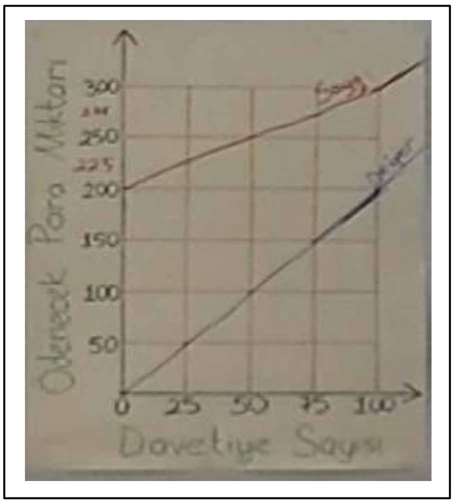
Tablodaki ilişki sütunu özellikle gösterilerek "Bu sütunda, 200'den sonra neden 1. 1, 1. 2, 1. 3 eklendiği" vurgulanarak sorulmuştur. Bu sorulurken 0 davetiye içinde 200+1. 0 vurgusunun yapılabilceği fark edilmiştir. Aradaki ilişkiyi henüz fark edememiş öğrenciler için her bir davetiye 1 lira olduğu için bu şekilde yazıldığı belirtilmiştir. Öğrencilere, "Her davetiye 3 lira olsaydı ne yapardık?" sorusu sorulmuş ve onlardan beklenildiği gibi bu durumda davetiye sayısının 1 değil 3 ile çarpılması gerektiğini fark etmeleri sağlanmıştır (Bkz. Şekil 25).

Tablolardaki bilgilere dayanarak her iki seçeneğe ilişkin grafiği aynı koordinat sistemi üzerine çizmeleri istenmiştir. Grafikleri göstermek için hazırlanan ve tahtaya asılan koordinat sistemi Şekil 26'da verilmektedir.



Şekil 26. İkinci planın birinci problemine ait grafiklerin çizileceği koordinat sistemi

Koordinat düzleminde x ekseni üzerinde tablodaki verilerde yer almayan 75 davetiye içinde ödenecek miktar sorgulanmaktadır. Grafik çizimine geçilmeden önce 75 davetiye için ödenecek para miktarı sözel olarak sorulmuştur. Davetiye sayısı ile ödenecek miktar arasındaki ilişkileri daha önce bulduklarından kolayca cavaba ulaşmışlardır. Daha sonra her bir davetiye sayısını ve buna ilişkin ödenecek miktarı sıralı ikililer gibi düşünerek koordinat sisteminde göstermeleri istenmiştir. Böylece, öğrencilerin tablodaki bilgilerini kullanarak bir temsilden diğerine geçiş yapmaları hedeflenmiştir (FG2). Koordinat sisteminde noktaları belirleyemeyen öğrencilere sıralı ikilideki her bir sayının ne ifade ettiği hatırlatılarak (davetiye sayısı ve ödenecek para) bu noktaları eksenler üzerinde göstermeleri istenmiştir. Daha sonra ise bu noktalardan eksenlere paralel çizilen doğruların kesim noktasının sıralı ikilisinin gösterdiği nokta olduğu gösterilmiştir. Bireysel çalışmalar tamamlandıktan sonra her bir noktayı farklı öğrenci koordinat sistemi üzerinde göstermiştir. Birinci seçeneğe ilişkin grafik çizimi tamamladıktan sonra ikinci grafiğin başlangıç noktasının hangi nokta olacağı sorulmuştur. Böylece grafikler arasındaki farkı hissetmeleri istenmiştir. Probleme ilişkin oluşturulan grafikler Şekil 27'de verilmektedir.



Şekil 27. İkinci planın birinci problemi için çizilen grafikler

Grafik çiziminin ardından, iki seçeneğe ait grafiksel temsilleri (doğruları) öğrencilerden karşılaştırmaları istenmiştir. Böylece, eleştirel düşünerek çıkarımda bulunmaları için harekete geçirmek hedeflenmiştir (ED, CY). Öğrencilerin çoğu, doğrular arasındaki mesafenin değiştiğini ve doğruların birbirine yaklaştığını fark etmişlerdir. Bu durumdan dolayı doğruların paralel olmadığını ve ileride kesişeceğini ifade etmişlerdir Grafiklerin sınıfta yorumlanması anında aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen	*: Aynı sayıda davetiyeler için ödenen miktarları gördünüz. Hangi davetiyeciden alışveriş yapmak daha kazançlı görünüyor?*
Engin	*: Değer matbaa.*
Öğretmen	*: Neden Değer matbaa?*
Hale	*: Aynı sayıda davetiye için Değer Matbaa daha ucuz.*
Öğretmen	*: Grafiğin altta ya da üstte olması ne demek? Bizim için birşeyler ifade ediyor olabilir mi?*
Selin	*: Saygı Basımda başlangıçta bir miktar para ödüyoruz ama Değer Matbaa da ödemediğimiz için Saygı Basımın grafiği daha yukarıda oluyor.*
Öğretmen	*: Yani grafik aşağıda olunca neyin göstergesi oluyor?*
Selin	*: Orjinden başladığının göstergesidir.*
Beyza	*: Kazancın göstergesidir.*
Öğretmen	*: Evet, değerlerin daha düşük olduğunun daha az para ödediğimizin göstergesidir. Değer Matbaaya ait değerler grafikte altta kaldığı için daha kazançlıdır.*

Ama bu kazanç durumunun her durumda aynı kalmayacağının farkına varılması için 150 ve 250 davetiye için hangi basımevinin daha kazançlı olacağı incelenmiştir Bu inceleme ile veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlar yapılarak öğrencilerin bir genellemeye ulaşmaları beklenmiştir (BK1, BK2). Ayrıca matbaaların durumlarını karşılaştırarak yorumlayıp çıkarımda bulunacaklardır (CY). Çözüm sürecinde aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : *150 davetiye için Değer Matbaada ne kadar para ödüyorsunuz?*
Engin : *İki katı kadar 150. 2'den 300 lira öderiz.*
Öğretmen : *Saygı Basımdan alırsanız 150 davetiye için ne kadar ödeme yaparsınız?*
Salih : *200 başlangıçta vereceğiz zaten. 150 davetiye için de 150 lira ödersem toplam 350 lira öderiz.*
Öğretmen : *150 davetiye yaptırırlarsa hangi davetiyeciden yaptırmak bu çift için daha kazançlı olur?*
Okan : *Değer Matbaadan yaptırırlarsa daha karlı olur. 50 lira ceplerinde kalır.*
Öğretmen : *250 davetiye için Değer Matbaa ve Saygı Basımda ki ödeme miktarlarınız ne kadar?*
Esra : *Değer matbaa için 250. 2 den 500 liradır.*
Beyza : *Saygı Basımda 250 davetiye için 200+250'den 450 liradır.*
Öğretmen : *Hangisini tercih etmek daha kazançlıdır?*
Doğan : *Burada da Saygı Basımı tercih etmek daha kazançlıdır.*
Öğretmen : *Her durumda kazançlı olan seçenek var mıdır?*
Salih : *Böyle bir seçenek yoktur.*
Öğretmen : *Neden böyledir? Her iki seçenekte de aynı davetiye sayısına eşit miktarda para ödenen bir durum olacak mıdır?*
Esra : *Olacaktır.*
Öğretmen : *Böyle bir durum varsa nasıl olacak? Bu durumun öncesini ve sonrasını karşılaştırır mısınız? (Bu soruları yönlendirirken ileride kullanılacak sorular için düşünmeye başlamaları hedeflenmiştir.)*

Öğrenciler ile gerçekleşen bu konuşmalar cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından eleştirel düşünerek karşılaştırma yaptıklarının ve yorum yapabildiklerinin kanıtı olmuştur. Ayrıca günlük hayata dair bir probleme çözüm üretme becerisi kazanmışlardır.

"Ödenecek paranın eşit olacağı bir durum var mıdır?" sorusunun ucu açık bırakılarak bir sonraki soruya geçilmiştir. *x* davetiye için iki seçenekte de ne kadar ödenmesi gerektiğini bulmaları istenmiştir Öğrenciler arasında dolaşırken sözlü olarak ifade edebildikleri genellemeleri cebirsel olarak göstermekte zorlandıkları görülmüştür. Örneğin, tabloda verilen değerler ve 150 ile 250 davetiye için ödenecek miktarları rahatlıkla bulurken x davetiye için ifade etmekte zorlanmışlardır. Diğer bir ifadeyle aritmetik yollarla genelleme yaparken sembolleri kullanmakta yetersiz kalmışlardır. Bu öğrencilere yardım etmek adına oluşturdukları tabloların ilişki sütunundan yardım alabilecekleri belirtilmiştir. Tabloları tekrar inceleyerek veriler arasındaki ilişkilerden yola çıkarak ödenecek para miktarının Değer Matbaa için *2x* ve Saygı Basım için *200+x* olacağı sonucuna öğrencilerden pek çoğu ulaşmıştır. Ardından bu problemdeki değişkenler için bağımlı ve bağımsız değişkenleri düşünmeleri istenmiştir. Bu konu hakkında da karar verirken tablodan faydalanmışlardır. "Davetiye miktarını biz belirliyoruz, ödenecek miktar ise davetiye miktarına göre değişiyor. O halde davetiye sayısı bağımsız ve ödenecek miktar bağımlı değişkendir. " ortak kanısına ulaşmışlardır. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından değerlendirme ve yorumlama yaparak çıkarımda bulunmuşlardır. Böylece değişkenler arası ilişkiyi fark etmişlerdir.

Bir sonraki soruda, 500 lira ile her iki seçenekte kaçar davetiye alınabileceği sorulmuştur. Bu soruyla, *x* davetiye için ulaştıkları genellemeyi kullanarak denklem kurmaları ve çözmeleri beklenmiştir. Düşünmeleri için bir süre beklendikten sonra Değer Matbaa için bir öğrenci söz alarak konuşmuştur. "500'ü ikiye bölerim, 250 davetiye alınır" diyerek çözümünü açıklamıştır. Sınıfta pek çok öğrenci bu öğrenci gibi çözümünü aritmetik çözümle yapmıştır. Sınıfta, soruyu denklem kullanarak çözen olmamış ya da çözümünü sınıfa belirtmemiştir. Saygı Basım için yapılan çözümde de tersten düşünerek aritmetik yolla yapmışlardır. Doğru cevabı duymaya odaklanıldığından bu çözümler yeterli bulunmuştur. Fakat öğrencileri daha karmaşık problemlerle karşılaştıklarında da kullanabilecekleri denklem kurma ve çözmeye yönlendirilmeliydiler.

Problemin son sorusu olarak kaç davetiye için iki seçeneğe de ödenecek miktarın aynı olacağı sorulmaktaydı. Sorunun cevabını deneme yanılma yoluyla ya da denklem kurup çözerek bulmaya çalışanlar olmuştur. Bu sorunun sorulma hedeflerinden biri öğrencilerde sembolleri anlamlı kullanma davranışını (SK) görmek olduğundan denklem kurarak çözme dışındaki diğer yöntem hakkındaki konuşmalar görmezden gelinerek tüm öğrenciler cebirsel çözüme yönlendirilmiştir. İstenen cebirsel davranışın sergilenmesi için doğru bir yönlendirme gibi görülse de öğrencilerin akıl yürütme davranışları sınırlandırılmıştır. Öğrencilerden biri kullandığı yolu şu şekilde açıklamıştır: "Değer Matbaa için *x* davetiye de iki katını alıyorduk, Saygı Basımda *x* davetiye için *200+x* oluyordu. Ödeyeceğimiz para aynı ise ikisinin birbirine eşit olması gerekir. *2x=200+x* denkleminin çözümünden *x*'i 200 buluruz. 200 davetiye alınca iki seçenekte de aynı miktarı yani 400 lira öderiz.". Soruyu denklem kurarak çözmeleri ve soruya ilişkin yorum yapmaları beklendiğinden bu soruda birkaç öğrencinin daha yorum yapması istenebilirdi. Dersin devamında, ulaştıkları bu bilgiyi de kullanarak seçeneklere ilişkin çizilen grafikleri tekrardan yorumlamaları beklenmiştir. İki seçenek içinde ödenen paranın eşit olduğu fakat koordinat sistemi üzerinde görünmeyen *x=200* noktasında grafiklerin kesişeceğini idrak etmeleri ve seçeneklere ait grafiksel temsilleri karşılaştırarak probleme ilişkin değerlendirme yapmaları hedeflenmiştir (ED, CY) (Bkz. Şekil 28). Öğrencilerle aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : Grafikte 200 davetiye için ne kadar ödediğimiz görünmüyor ama gösterebilir misiniz? Grafik nasıl görünür?

Esra : Grafikteki doğruları uzatmaya devam edersek davetiye sayısının 200 olduğu yerde kesişecekler. (Öğrenci durumu özetledi, öğretmen çizimi yaptı.)

Öğretmen : Kesişim durumundan sonra doğruların durumu nasıl olur?

Beyza : Değer Matbaanın doğrusu daha dik olduğu için yukarı doğru gitmeye devam eder ve kesiştikleri noktadan sonra Değer Matbaa yukarıda ve Saygı Basım doğrusu aşağıda olur. Saygı Basım daha kazançlı duruma geçer.

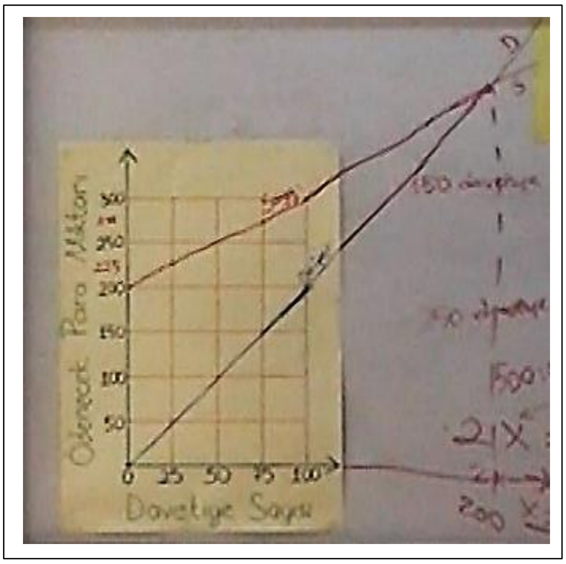
Gamze : Yani az davetiyede Değer Matbaa, çok davetiyede Saygı Basımdan alışveriş yapmak daha karlıdır öyle mi?

Öğretmen : Evet öyle görünüyor. Peki, ne kadar az, ne kadar çok davetiye?

Ceyda : 200' den az ve 200'den çok.

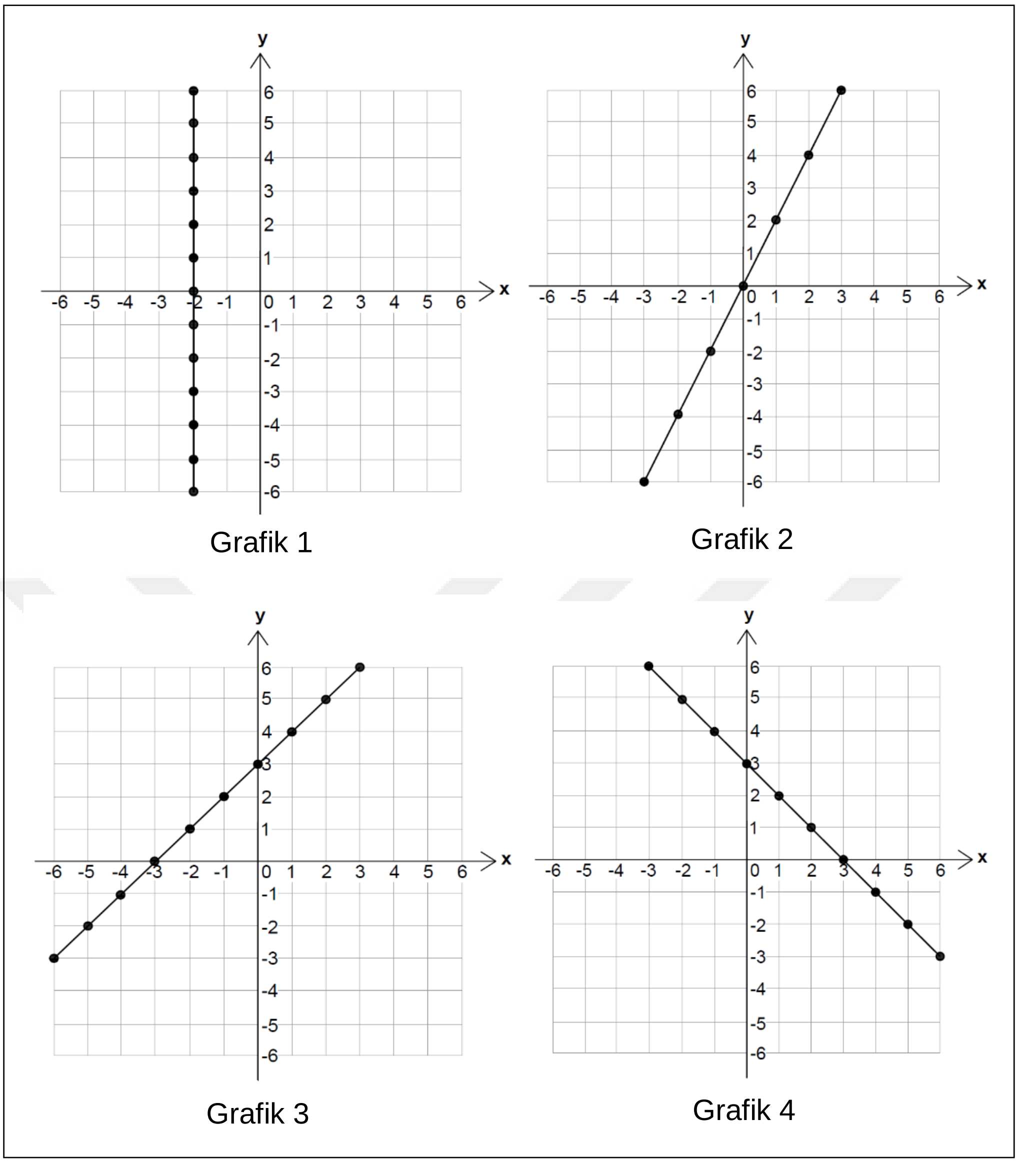
Öğretmen : Evet, 200 kritik noktadır 200'den az sayıda davetiye yaptırılacaksa Değer Matbaa, 200'den fazla sayıda davetiye yaptırılacaksa Saygı Basım tercih edilmelidir.

Diyalogdaki ifadeler incelendiğinde değerlendirme yaparak çıkarımda bulundukları görülmektedir (CY).



Şekil 28. İkinci planın birinci problem için tahtadaki grafiğin görüntüsü

Davetiye problemine ait soruları tamamladıktan sonra temsilden temsile geçiş yapmalarını (FG2) ve farklı problemlere ait temsilleri karşılaştırarak eleştirel düşünmelerini (ED) sağlayacak bir etkinlik yapılmıştır Etkinliğe ilişkin dört farklı grafik tahtaya asılmıştır (Bkz. Şekil 29). Bu grafikler *x=-2*, *y=x*, *y=x+3* ve *y=-x+3* doğrularına ait doğruları göstermektedir. Öğrenciler beşer kişilik beş gruba ayrılmış ve her bir gruba tahtadaki sadece ilk üç grafikle ilgili önceden hazırlanan tablo veya denklem içeren toplamda 20 adet kâğıttan (her gruba en az 4 kâğıt olacak şekilde) verilmiştir. Öğrencilere verilen kâğıtlarda dördüncü grafik olan *y=-x+3* doğrusuna ait tablo veya denklem bulunmamaktadır. Bu grafik çeldirici olarak etkinliğe eklenmiştir. Öğrencilerden ellerindeki kâğıtlarda yer alan tablo veya denklemleri inceleyerek hangi grafiğe ait olduğunu tahmin etmeleri nedenleri ile birlikte istenmiştir. Grup üyeleri kendi aralarında tartışarak karar vermişlerdir. Gruplar arasında dolaşarak, dönütler verilerek yönlendirmeler yapılmıştır. Gruplar belli bir süre düşünerek, fikir alışverişi yaptıktan sonra tahtaya grup adına bir temsilci gelerek grubun elindeki kâğıda ilişkin grubun cevabını açıklamıştır.



Şekil 29. İkinci plandaki etkinlik için tahtada verilen grafikler

Tahtaya gelen öğrencilerin yaptıkları açıklamalar sırasında öğretmen ile öğrenciler arasında gerçekleşen konuşmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Engin : *2x-y=0 denklemi 2. grafiğe (2x=y doğrusu) aittir.*

Öğretmen : *Neden? Nasıl anladın?*

Engin : *Bu denklemde x ve y yerine 0 koyunca denklem sağlanıyor. Yani bu doğru (0,0) noktasından orjinden geçer. Orjinden geçen tek doğru da 2. grafiktedir.*

Öğrenci denklem temsilinden grafik temsiline dönüşüm yaparak, yorum yaparak çıkarımda bulunmuştur (FG2, CY). Şekil 30'da dersin devamında farklı gruplardan öğrencilere ait tablolar verilmiştir. Bu tablolar ve farklı denklemler için grafiği tespit etmeye çalışan öğrenciler ile diyaloglar aşağıda verilmiştir. Öğretmen tablosunun veya denkleminin hangi grafiğe ait olduğunu anlatmak için gelen öğrencilerin hepsine "Nasıl karar verdiniz, nasıl anladınız, neden, niçin,…" gibi sorular sorarak yönlendirmiştir.

x	y
-2	3
-2	5
-2	7
-2	9

Selin

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3

Fatih

x	y
-2	-2
-2	-1
-2	0
-2	1

Ceyda

x	y
-2	-4
-1	-2
1	2
2	4

Sare

x	y
0	3
2	5
4	7
5	9

Mehmet

Şekil 30. İkinci plandaki etknilik için öğrencilere verilen tablolar

Selin *: Bu tablo (Bkz. Şekil 30) 1. Grafiğe (x=-2 doğrusuna) aittir. Çünkü x değerleri sabit kalıp y değerleri değiştiği için y eksenine paralel bir doğru olur. Bu durumda sadece grafik 1' de vardır.*

………

Fatih *: Bu tablo (Bkz. Şekil 30) grafik 3' e aittir. Çünkü bu doğrunun geçtiği (-3,0) ve (0,3) noktaları eksenleri kestiği noktalardır. Eksenleri bu noktalardan keserek geçen tek doğru 3. grafiktedir.*

……

Beyza *: Bu kağıtta 2x=-4 denklemi var. Bu denklemde x'i yalnız bırakarak her iki tarafı 2 ile bölersek x=-2 oluşur. Bu da 1. Grafiktir. x eksenine -2 noktasından dik ve y eksenine paralel olan bir doğrudur.*

…….

Ceyda *: Birinci grafiğe aittir (Bkz. Şekil 30). Çünkü değişen y değerlerine rağmen x hep -2 olmaktadır.*

……

Okan *: x=-2 doğrusu birinci grafik ile gösterilmiştir. Çünkü y değişirken x daima -2 'dir.*

…. .

Sare *: Bu tablo (Bkz. Şekil 30) 2. grafiğe aittir. Çünkü doğrunun geçtiği noktalar olan (-2, -4), (-1, -2), (1,2), (2,4) noktaları tabloda görülmektedir*

…. .

Salih *: y=x+3 denklemi 3. grafiğe aittir. Çünkü (1,4) ve (-1,2) (3. grafikten seçtiği iki noktayı göstererek) gibi iki noktanın değerlerini yerine koyunca denklemi sağlıyor. Demek ki bu doğru bu denklemin doğrusudur.*

…….

Esra *: y-x=3 doğrusu üçüncü grafiğe aittir. Hangi doğruya ait olduğunu bulmak için önce eledik. x, y ve sabit terim olduğu için eksenleri keserek geçen doğru olduğunu düşündük. Üçüncü ve dördüncü grafik arasında karar verirken de doğru üzerindeki noktaları yerine yazarak karar verdik.*

Diyaloglardan görüldüğü gibi öğrenciler tablolarına ya da denklemlerine ait olan grafiği bulurken farklı farklı yollar kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu durum birbirlerinin akıl yürütmelerinden yola çıkarak anlamlandırma süreçlerine katkıda bulunmuştur. Aşağıda başka bir öğrenci ile gerçekleştirilen diyalog yer almaktadır.

…….

Doğan *: -y+2x=0 doğrusunun hangi grafiğe ait olduğunu bulamadık. Yardımcı olur musunuz?*

Öğretmen *: Tamam. Bu denklemde neler var?*

Doğan *: y ve x var. Sabit terim yok.*

Öğretmen *: Değerleri düşünmeden önce doğruların özelliklerini düşünürsen iki değişkenli sabit terimin olmadığı doğrular ne tarz doğrular olurdu?*

Doğan *: Orjinden geçen doğrular olur.*

Öğretmen *: O halde seçeneğin var mı?*

Doğan *: 2. grafik olur.*

Öğretmen *: Evet. İkinci grafiğe aittir. Bu denklemde y'yi pozitif 1 katsayılı olarak yalnız bırakırsan y=2x denklemini elde edebilirsin. Ya da Grafikte gördüğün değerleri denklemde yerine koyup işleme tabi tutarak da görebilirsin*

Öğrenciyle yapılan diyalogda öğrenci seçeneksiz bırakılarak tek bir cevaba yönlendirilmiştir. Öğrencinin yapılan akıl yürütmeyi anlayıp anlamadığı sorgulanmadan görüşme sonlandırılmıştır. Bunun yerine, bahsi geçen akıl yürütmeyi öğrencinin kendisini fark etmesi adına yönlendirmeler yapabilir veya gruptaki başka öğrencilere söz hakkı verebilirdi. Farklı bir öğrenci ile gerçekleşen konuşma aşağıda verilmiştir.

Mehmet *: Bu tablonun (Bkz. Şekil 30) hangi grafiğe ait olduğuna karar veremedik.*

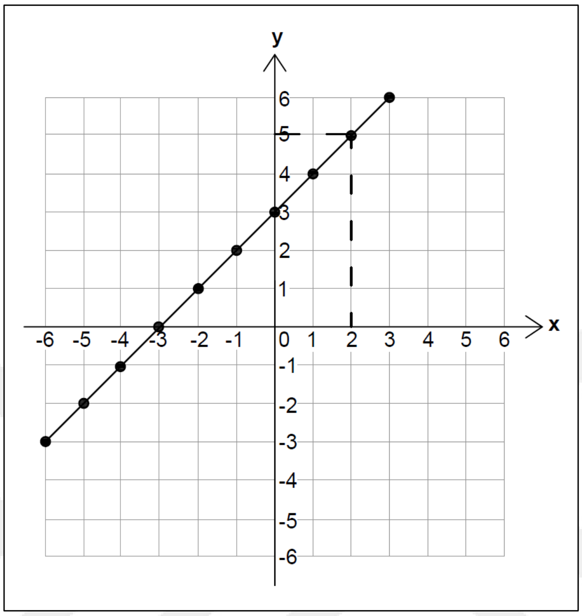
Öğretmen *: İlk noktadan hareketle eleme yöntemini kullanabilirsin.*

Mehmet *: İlk nokta (0,3) birinci ve ikinci doğrular üzerinde değildir. Üçüncü ve dördüncü doğrular üzerindedir.*

Öğretmen *: Tablodaki ikinci nokta ile devam edebilirsin.*

Mehmet   *: İkinci nokta (2,5) üçüncü ve dördüncü grafik üzerinde de değildir.*

Öğretmen   *: (2,5) grafikler üzerinde görünmeyebilir ancak biz bu noktada doğruyu devam ettirebiliriz (Öğrenci kâğıtlarında (2,5) noktası grafik üzerinde işaretli değildir. Öğretmen çizim ile söylediklerini desteklemiştir) (Bkz. Şekil 31).*



Şekil 31. (2,5) noktası işaretli üçüncü grafiğe ait şekil

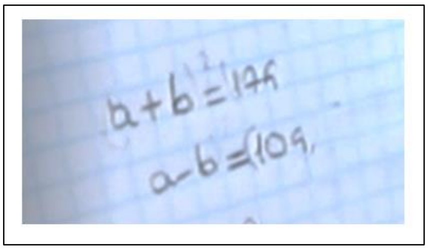
Diyalogda üçüncü grafik üzerinde görünmeyen (2,5) noktası öğrenciye sezdirilmeden net bir şekilde öğretmen tarafından belirtilmiştir. Öğrencinin grafik üzerinde görünmese de çizimin devam edeceğini ve doğrunun (2,5) noktasından geçeceğini fark etmesine imkân tanınmalıydı. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından öğrencinin yorumlama, değerlendirme ve çıkarımda bulunma(CY) fırsatına engel olunmuştur. Öğrenciler cevaplarını ve nedenlerini sıralayarak etkinliği tamamlamışlardır. Etkinlik bitince zihinsel genellemelerine destek olmak amacıyla tahtada yer alan doğruların genel karakteristik özellikleri (eksenlere paralel, orijinden geçen ve eksenleri keserek geçen doğrular) hakkında konuşulmuştur.

Bu derste öğrencilerin sorular sorarak anlamlandırması (CA), matematiksel bilgiyi tablolaştırması (FG1) veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlarda bulunarak kanıtlaması veya çürütmesi (BK1), tabloları grafik ile göstererek (FG2) yorumlaması (ED), değerlendirmesi, çıkarımda bulunması (CY), genellemeleri cebirsel ifadeler ile göstermesi (SK1), denklem kurması ve çözmesi (SK2) hedeflenmiştir. Videoların analizi neticesinde öğrencilerin birbirlerine ya da öğretmene soru sormakta etkin olmadıkları gözlemlenmiştir. Bu duruma sebep olarak öğrencilerin video ile ders anlatımına aşina olmamaları düşünülmüştür. Çözüm olarak video ile ders işleme sürecine alışmaları için önceden işlenen derslerde hazırlık yapılabilirdi. Öğretmen bu konuda daha cesaretlendirici yönlendirmeler yapabilirdi. Varsayımlarda bulunma ve ispatlama ya da çürütme, bilgilerini tablolaştırma, tabloları grafikleştirme süreçlerinde pek problem yaşamamışlardır. Bu süreçlerde sorulan yönlendirici sorular fikirlerinin önünü açmak adına olumlu sonuçlar vermiştir. Yorumlama, değerlendirme ve çıkarımda bulunma süreçlerinde ders süresinin kısıtlı olması, öğretmenin dersi tamamlama kaygısı nedeni ile öğrencilerin imkânları kısıtlanmıştır. Daha esnek davranılarak öğrencilerin sonuçların tamamına kendi başlarına ulaşmaları için yardımcı olunmalıydı. Öğrenciler birinci derste de olduğu gibi cebirsel ifadeler kullanarak denklemler kurmakta ve çözmekte problemler yaşamış ve ağırlıklı olarak aritmetik yöntemleri tercih etmişlerdir. Cebirsel yöntemler ile stratejiler geliştirmeleri hususunda cesaretlendirilerek yönlendirilmelidirler.

4. 3. Doğrusal Denklem Sistemleri-3

Üçüncü ders planı “ İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer” kazanımına ilişkin hazırlanmıştır. Daha önceki yıllardan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözebilen öğrenciler için iki bilinmeyenli denklem sistemleri yeni bir bilgi olmuştur. Amaç, öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözmeyle ilgili bildiklerinden yola çıkarak daha önce karşılaşmadıkları iki bilinmeyenli denklem sistemi problemleri için yeni yollar aramalarını ve uygulamalarını sağlamaktı. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından öğrencilerin zihinsel anlamlandırmalarına katkıda bulunmak (CA), sembolleri anlamlı kullanarak cebirsel gösterimlerden faydalanmalarını (SK1) ve denklemler kurarak çözmelerini (SK2) sağlamak, yorumlama ve değerlendirme yaparak çıkarımda bulunmalarına (CY) imkan sunmak hedeflenmişti.

Derse giriş, toplamları 175 ve farkları 105 olan iki farklı sayının sorulduğu bir soruyla yapılmıştır. Soru açık, yalın ve anlaşılması kolaydır. Öğrenciler bireysel çalışmaları için serbest bırakılmış ve gözlemlenmişlerdir. Bağlamsal problemlere ait denklem kurmaya ilişkin gerekli hazırbulunuşlukları bulunduğundan ve sorulan problemin denklem ile ifade edebilmek için net bir yapısı olduğundan probleme ilişkin denklemleri oluştururken pek zorlanmamışlardır. Denklem kurma aşamasında problemdeki somut verilerden soyut verilere geçiş yapmışlardır (SK1). Gamze adlı öğrencinin defterinden denklem kurma aşamasına dair örnek görüntü Şekil 32’de verilmektedir. Öğrencilerin genel olarak çalışma sonuçları bu şekildeydi, sadece değişkenler değişmiştir.



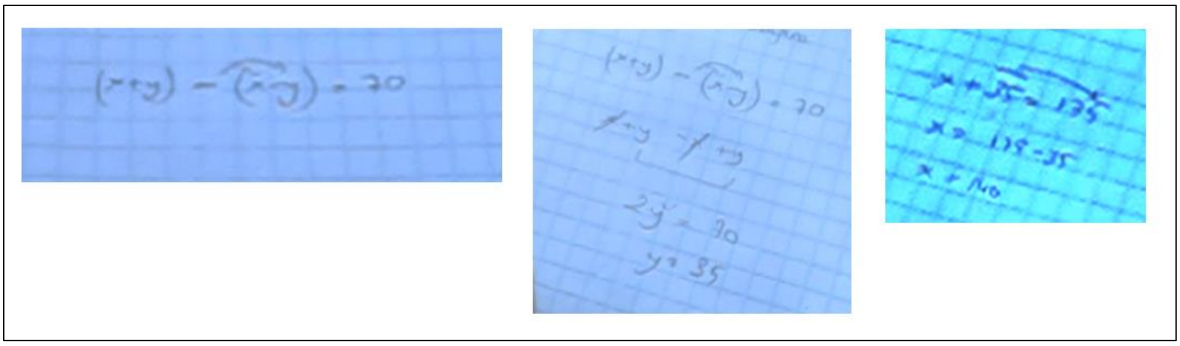
Şekil 32. Gamze’nin defterinden görüntü

Denklem kurma aşamasını tamamlayan öğrencilere “Bu denklemleri nasıl çözebiliriz?” diye sorulmuştur ve yine bireysel çalışmaları için fırsat verilmiştir. Öğrencilerden biri ile denklem çözme aşamasında şöyle bir konuşma gerçekleşmiştir:

Selin *: 175 ile 105’in farkını aldım.*
Öğretmen *: Neden böyle yaptın? Farkını alarak neyi bulursun?*
Selin *: 70 bulurum ama bu sayı neyi ifade eder (Düşünmeye başladı).*

Selin işlemlerine devam ederek 70’i ikiye bölerek küçük sayı olan 35’ i bulmuştu. Aslında farkında olmadan ve değişkenleri kullanmadan *denklem* çözmüştü. Öğrenciye “bulduğun sonuç iki sayıdan biri olabilir mi”, “denklemler üzerinden düşünürsen değişkenlerin de farkını alabilir miydin” soruları sorularak yaptığını anlamlandırmasına ve çıkarımda bulunmasına (CY) yardımcı olunabilirdi.

Yine başka bir öğrenci kurduğu denklemlerin farkını almıştı. Öğrenci ile yaşanan konuşmalar ve defterinden görüntüler Şekil 33’de verilmektedir.



Şekil 33. Beyza’nın defterinden görüntü

Beyza *: Çıkardım denklemleri.*
Öğretmen *: Neden çıkardın?*
Beyza *: Bilmiyorum .*

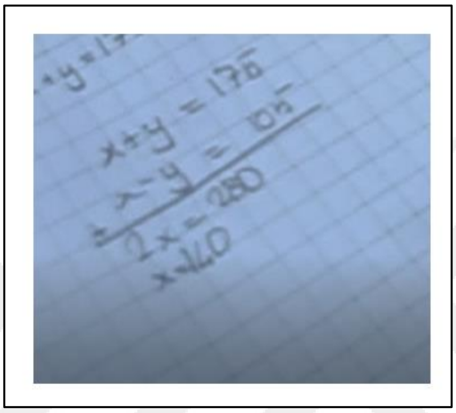
Öğretmen : Tamam devam edebilirsin.

Beyza : (İşlemi yaparken anlatıyor ve x ve y'ye ulaşıyor).

Öğretmen : Demek ki eşitliklerin iki tarafı da kendi aralarında çıkarılabiliyormuş.

Beyza ise daha sistematik bir yaklaşım sergilemiş ve cebirsel ifadelerin de toplanıp çıkarılabildiğini anımsayarak denklemleri çıkarmıştı. Geçmiş bilgilerini, yorumları ile birleştirmiş ve değerlendirme yaparak (CY) problemi çözmüştü.

Ceyda ise taraf tarafa toplama işlemi yaparak çözüm yapmıştır (Bkz. Şekil 33).



Şekil 34. Ceyda'nın defterinden görüntü

Ceyda' da Beyza gibi cebirsel ifadeler ile yapılan işlemlere ait bilgilerini bu soruya transfer ederek çözüm sunmuştur. Zihinsel anlamlandırma sürecini başarıyla tamamlamıştır. Bireysel düşünmeleri ve çözüm yapma süreçleri tamamlanınca bir öğrenci tahtaya gelerek probleme ait denklemi kurmuştur. Denklemlere ne tür işlemler uygulayacağını tahmin ederek bildiklerinden yola çıkıp çözümler yapan öğrenciler olsa da çoğunluk denklem kurmakla kalmış (SK1) ve ilerleyememişlerdir. Öğrencileri çözüm adına yönlendirmek amacıyla sınıf içinde tüm öğrencilere hitap ederek aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir:

Öğretmen : x+y=175 ve x-y=105 denklemleri nasıl denklemlerdir?

Fatih : Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerdir.

Öğretmen : Tek başına x+y=175 veya x-y=105 denklemini çözebilir misiniz?

Salih : Çözemiyorum sanki.

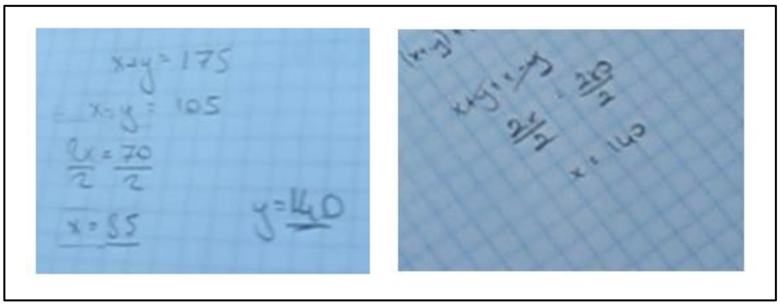
Öğretmen : Evet ilk denklemde x'i yalnız bırakıp y'yi karşı tarafa atsanız 175-y olur ki yine bilinmeyendir. Tersini yaparak y'yi yalnız bırakıp x'i karşı tarafa atarsak 175-x olur bu da yine bilinmeyendir. Bizi bir sonuca ulaştırmaz.

Peki o halde ne düşünmeliyiz? (Bu denklemleri tek başına çözemeyeceklerini fark etmeleri adına açıklama yapılmıştır).

Biraz süre verilmesine rağmen cevap veren olmayınca düşünmelerini sağlamak amacıyla diyaloğa devam edilmiştir.

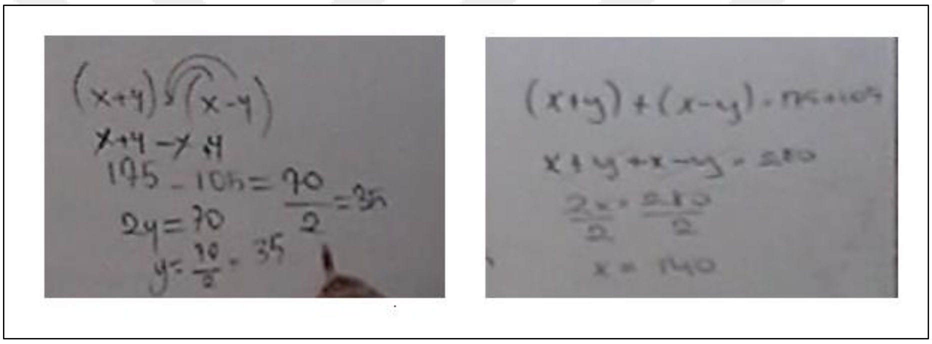
Öğretmen : Bildiklerinizden yola çıkmaya çalışın. Denklemler ile ilgili nasıl olursa çözebilirsiniz?
Gamze : Bir bilinmeyenli denklemleri çözebiliyoruz.
Öğretmen : Evet bu denklemlerde bir bilinmeyenli olsaydı çözebilirdiniz. İki denklemi birlikte kullanarak bir bilinmeyenli denkleme dönüştürebilir misiniz? Nasıl dönüştürebilirsiniz?
Engin : Sayıları çıkararak.
Öğretmen : Bilinmeyenler ne olacak?
Engin : ……?

Söz hakkı alarak devam etmek isteyen öğrenci olmayınca bir örnek ile yönlendirme yapılmak istenmiştir. *40=40* ve *20=20* eşitliklerini alt alta yazarak bir tarafı alt alta toplayınca ya da çıkarınca diğer tarafa da aynı işlemin uygulanabileceği ve eşitliklerin değişmeyeceği gösterilmiştir. Burada kullanılan örnekte eşitliğin iki tarafı bilinenlerden oluşmaktadır. Örneğin; iki tane *a+b=10* gibi cebirsel ifade içeren eşitlik kullanılarak taraf tarafa toplayıp çıkararak değişimleri gözlemlemeleri desteklenebilirdi. Cebirsel ifade içeren denklemlerde de aynı işlemlerin uygulayabileceği belirtilmiştir (bireysel düşünme ve çözme aşamasında taraf tarafa çıkarma işlemi yaparak çözüm yapmaya çalışan öğrenciler olmuştur. Ancak neyi neden yaptıklarını anlamadıklarından mı, yoksa konuşmak istemediklerinden mi söz alıp yaptıklarının ifade etmemişlerdir. Bu öğrencilerin düşüncelerinin farkındalığını oluşturmak amacıyla yönlendirme soruları sorulmamıştır. Zaman tanınmasına rağmen çözüme yönelik fikir beyan edemeyen öğrenciler bilinçli olarak taraf tarafa toplayarak ya da çıkararak yok etme yöntemine yönlendirilmeye çalışılmıştır. Tekrar bireysel çalışmaya başlamışlardır. Farklı yönelimler ile (taraf tarafa toplama işlemi ya da taraf tarafa çıkarma işlemi) çözüm yapan öğrenciler olmuştur (SK2). Yönlendirmelerin ardından bazı öğrenci defterlerinden çözüm görüntüleri Şekil 35'de verilmektedir.



Şekil 35. Öğrencilerin defterinden görüntüler

Öğrencilerden biri gelerek tahtada taraf tarafa çıkarma işlemini kullanarak çözüm yapmıştır. Başka bir öğrencinin de taraf tarafa toplama işlemi yaparak çözmesi istenmiştir (Bkz. Şekil 36).

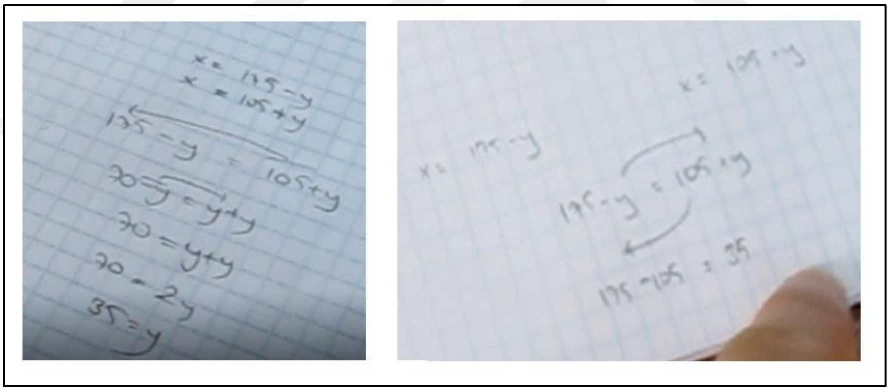


Şekil 36. Tahtadaki öğrenci çözümlerinden görüntü

Taraf tarafa çıkarma işlemi ile küçük sayının, taraf tarafa toplama işlemi yapılarak ise büyük sayının bulunduğu belirtilerek her iki çözümden de bulunan sayıyı istenilen denklemde yerine yazılarak diğer bilinmeyene ulaşabileceği belirtilmiştir. Bilinmeyenlerden birinin ortadan kaldırılarak uygulanan bu yöntemin adının “yok etme yöntemi” olduğu vurgulanmıştır.

Aynı sorunun farklı bir yöntem kullanılarak çözülmesi amacıyla yönlendirmeler yapılmıştır. Farklı yöntemleri kullanmaya yönlendirilerek değişik cebirsel stratejiler üretmelerini sağlamak hedeflenmiştir. Amacın tek bilinmeyenli denkleme dönüştürerek çözmek olduğu vurgulanarak “başka nasıl bir işlem uygulanırsa tek bilinmeyenli denkleme dönüştürebiliriz?” sorusu öğrencilere yönlendirilmiştir. Herhangi bir dönüt alınamayınca denklemlerde yer alan *x* ve *y*’lerin aynı olduğu vurgusu yapılmıştır. Ancak hala öğrenciler dönüt vermemişlerdir. İstedikleri bir denklemde *x* veya *y*’yi yalnız bırakarak diğer denklemde yerine koyabilecekleri belirtilmiştir. Bireysel çözümlerinde de bu çözüm yolunda pek başarılı olamamışlardır. Bir öğrenci tahtaya gelerek çözüm yapmıştır. Öğrenci ilk denklemde *y*’yi *x* cinsinden yazmayı tercih etmiştir. İkinci denklemde *y* yerine *175-x* yazmıştır, ancak ikinci denklemdeki *y*'nin katsayısı *-1* olduğundan negatif işaretin *175-x*'in tamamına ait olması konusunda problem yaşamıştır. Bu nedenle *y* yerine yazılan *175-x*'in bütün olduğu ve parantez kullanılarak yazılabileceği vurgulanmıştır. Parantez kullanarak yazınca eksi işaretinin parantez içine dağıtılması gerektiği fark edilmiştir. Öğrenci yerine yazma işlemiyle oluşan *x-(175-x)=105* denkleminin bir bilinmeyenli denklem olduğunu vurgulayarak sonuca ulaşmıştır (SK2). Bulduğu değeri de denklemlerden birinde yerine yazarak diğer değişkeni bulmuştur. Bu yöntemin adının da "yerine koyma yöntemi " olduğu belirtilmiştir.

Son olarak başka bir yöntem daha kullanabilecekleri belirtilerek düşünmeleri istenmiştir. Bireysel çalışmaları için zaman verilmiştir. Biraz zaman geçmesine rağmen öğrencilerden fikir belirten olmamıştır. Zaman daraldığı için düşünme süreçlerini hızlandırmak adına bu kez her iki denklemde de aynı değişkenler yalnız bırakılarak diğer değişken cinsinden yazılırsa ne olabileceği hakkında farkındalık oluşturulmaya çalışılmıştır. Aynı semboller ile ifade edilen değişkenlerin aynı olduğu vurgusu yapılmıştır. Bireysel çalışmaları esnasında bazı öğrencilerin defterindeki çözümler Şekil 37'de verilmektedir.

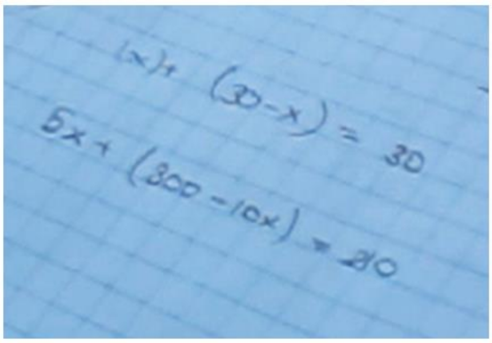


Şekil 37. Öğrencilerin defterinden görüntüler

Görüntülerde de yer aldığı gibi pek çok öğrenci x değişkenini y değişkeni cinsinden ifade etmeyi tercih ederek devam etmiştir (SK2). İstediğimiz bir değişkeni diğeri cinsinden ifade edebileceğimiz ve çözüm uygulayabileceğimiz vurgulanmıştır.

Öğrencilerden biri tahtaya gelerek defterindeki çözümü tahtaya yapmıştır. Burada, aynı değişkenleri birbiri ile kıyaslama yaparak çözüm yaptığımız için bu yöntemin adının "karşılaştırma yöntemi" olduğu belirtilmiştir. Öğrenciler tek bilinmeyene dönüştürerek çözümler yapabileceklerini idrak etmişler ancak çözüme ulaşmak için stratejiler geliştirememişlerdir. Yani denklemler oluşturabilmiş ancak çözmekte yetersiz kalmışlardır. Bu duruma sebep geçmiş yaşantılarındaki cebirsel alt yapı yetersizliği olduğu düşünülmektedir.

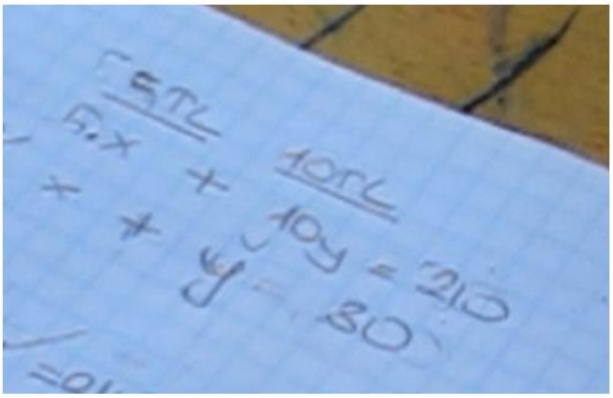
Dersin ikinci kısmına başka bir bağlamsal problem ile başlanmıştır. Bu problem birinci probleme kıyasla hem denklem kurma hem de çözüm yapma adına daha komplekstir. Problemde, para biriktirmek için kumbaraya 5 TL ve 10 TL'lik banknotlar atan Yusuf'un kumbarasında 30 banknot ve toplam 210 TL biriktiği verilmektedir. Bu matematiksel bilgilerden yola çıkılarak kumbaradaki 5 TL ve 10 TL'lik banknotların sayıları öğrencilerden istenmektedir. Soruyu birkaç öğrenci okuyarak yorumlamıştır. Her öğrenci okurken veya yorumlarken farklı yerleri vurguladığı için anlamlandırmaları adına birbirlerinin fikirlerinin önünü açmışlardır (CA). Bu problemdeki amaç, önceki problemde kısmen keşfettikleri kısmen de sezdirilen ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemleri çözerken kullanılabilecek üç yöntemi de bu problemin çözümünde kullanmaları ve bilgilerini pekiştirmeleridir. Bu nedenle problem çözümünde kullanacakları yöntemler sırasıyla belirtilmiştir. Bu problemde verilen soru metnine benzer bir metne sahip bağlamsal bir problem ile dönemin önceki derslerinde birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler çözülürken karşılaşmışlardır. Daha önceden bu problemin çözülmüş olmasının bugünkü problemin çözümü için kolaylaştırıcı etki yapacağı düşünülmüştür. Ancak, öğrenciler denklem kurma aşamasında zorlanmışlardır. Öğrencilerden bazıları probleme ait denklemleri tek bilinmeyenli olarak kurmuşlar, bilgilerini transfer etmişlerdir. Bu yöntemi kullanan öğrenciler aslında farkında olmadan yerine koyarak çözme yöntemini kullanmışlardır. Bahsi geçen duruma örnek bir öğrenci defterinin görüntüsü Şekil 38'de verilmektedir.



Şekil 38. Öğrencinin defterinden görüntü

Öğrencileri problemde iki bilinmeyen olduğu fikrine yönlendirebilmek için 5 TL ve 10 TL'lik banknotların birbirinden farklı iki grup olduğu belirtilmiştir. 5 ve 10 TL'lik banknotları iki farklı grup olarak düşünen ve bu banknotların sayısına x ve y demesine rağmen probleme ait denklemi *x+y =210* şeklinde kuran bir öğrenci olmuştur. Bu öğrenciye, *x* ve *y* değerlerinin neyi ifade ettiğini sorulmuştur ve problemde verilen bilgilere dikkat etmesi gerektiğine dikkat çekilmiştir. Öğrencinin diğer denklemi kurabilmesine yardımcı olabilmek için öğrenciyle aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : x tane 5 TL varsa toplam kaç TL olur?
Salih : ……. . ?
Öğretmen : 3 tane 5 TL varsa toplam kaç TL olur?
Salih : 15 TL
Öğretmen : Bulmak için ne yaptın?
Salih : Çarptım.
Öğretmen : Aynı şekilde düşüneceksin. x tane var diyor.
Salih : 5x olur.
Öğretmen : Aynı şekilde 10 TL'lik banknotları düşünürsen.
Salih : 10y olur. Toplam miktarda 5x+10y=210 olur.
Öğretmen : Evet iki farklı denklem elde ettin. Şimdi çözüm yolunu düşünebilirsin (Bkz. Şekil 39).



Şekil 39. Salih'in defterinden görüntü

Diyalogda yer alan yönlendirme soruları ile öğrencinin aritmetik özellikleri kullanarak genelleme yapması hedeflenmiştir. Ulaştığı genellemeyi somut ve soyut kavramlar arasında geçişler yaparak cebirsel olarak ifade edeceği (SK1) düşünülmüştür.

Öğrenciler probleme ilişkin denklem kurma aşamasını tamamlayınca "yok etme yöntemi" kullanarak çözüm yapmaları istenmiştir. Dersin birinci problemindeki denklemlerde bilinmeyen katsayıları eşit olduğundan "yok etme yöntemi" kolaylıkla uygulanabilmişti. Bu problemde ise bilinmeyenlerin katsayılarını eşitlemek için denklemler üzerinde bazı değişiklikler yapmaları gerekmiştir. Değişiklikleri nasıl yapabilecekleri hakkında bir fikir yürütebilmeleri için sınıfta aşağıda verilen konuşma geçmiştir.

Beyza : *Bir önceki problemdeki denklemimizde x+y=175 ve x-y=105 denklemleri vardı. Taraf tarafa toplanınca 2x kaldı bilinmeyen olarak y yok oldu. Yok olması toplamlarının 0 olmasıydı. Ama bu problemin denklemlerini taraf tarafa toplasam da çıkarsam da hiçbir değişken yok olmuyor.*

Öğretmen : *Denklemleriniz değişkenlerden birinin yok olması için hazır değilse hazır duruma getirmek için nasıl bir yol izlersiniz?*

Esra : *Eksi ile çarparım.*

Öğretmen : *Sadece eksi ile denklemlerden birini çarparak toplarsanız yeni iki değişkenli denklemler elde edersiniz (Tahtada göstererek yapılmıştır).*

Esra : *x+y=30 denkleminde y'yi -10 ile çarparım.*

Öğretmen : *Sadece y'yi değiştirirsen denklemin eşitliği etkilenmez mi bu durumdan?*

Gamze : *Bence x+y=30 denkleminin tamamını -5 ile çarparız.*

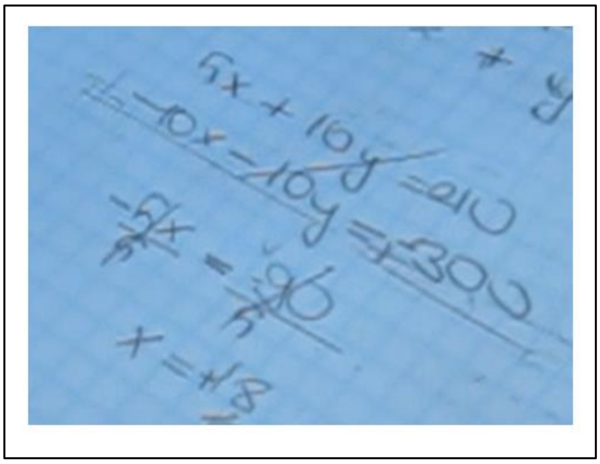
Öğretmen : *Olabilir. Ne ile çarpacağınıza karar verirken hangi değişkeni yok etmek istediğinizi düşünüyorsunuz. x+y=30 denklemindeki x, 5x+10y=210 denkleminde ki x ile hangi durumda toplanınca yok olur? Ya da x+y=30 denklemindeki y, 5x+10y=210 denkleminde ki y ile hangi durumda toplanınca yok olur?*

Selin : *-5x ve -10y olunca.*

Öğretmen : *O halde istediğinizi seçerek denklemler üzerinde gerekli değişiklikleri yapabilirsiniz.*

Ders süresi sınırlılığı nedeniyle yaptıkları tahminleri denemelerine ve eksik düşündüklerini görmelerine imkân sunulamamıştır. Bu yönlendirmelerden sonra problemin çözümüyle bireysel uğraşmaları için öğrencilere zaman tanınmıştır. Bu yönlendirmelerde öğrencilerden fikir alınmış olsa da bireysel uğraşmalarına fırsat verildikten sonra bu diyaloğun gerçekleşmesi gerektiği videolardan fark edilmiştir.

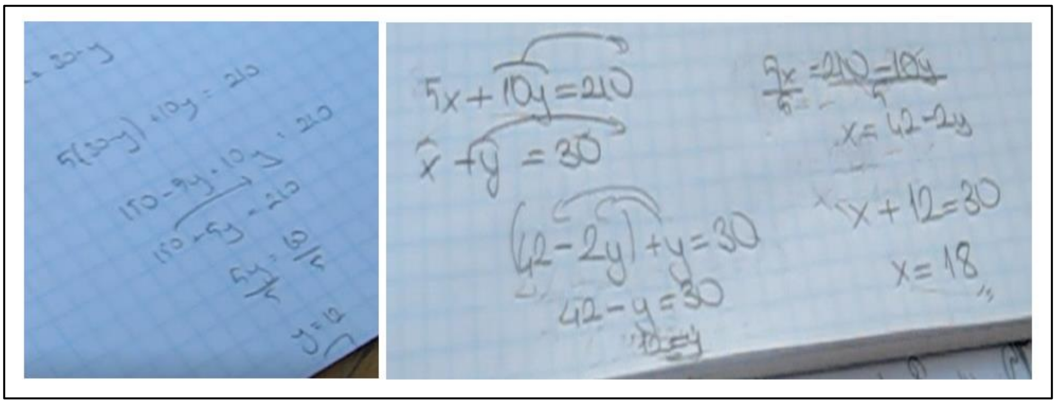
Bireysel defter çözümlerinin ardından öğrencilerden Gamze Şekil 40'da verilen defter örneğine benzer biçimde problemin çözümünü tahtada yapmıştır (SK2).



Şekil 40. Gamze’nin defterinden görüntü

Bir başka öğrenci söz alarak güzel bir soru sormuştur. ”Birinci denklemi genişletmek yerine ikinci denklemi -5 ile bölsek olur mu” sorusu problemlerin yok etme yöntemiyle çözümü için farklı bir bakış açısı getirmesi adına iyiydi. ”Önemli olan katsayılarının yok etmek adına uygun duruma gelmesidir. Bunu her zaman çarparak genişleterek yapmak zorunda değilsiniz. Sadeleştirme de yapabilirsiniz. İkinci denklemdeki bütün katsayılar 5’in katı olduğundan -5 ile bölünce katsayıları tam sayı olan yeni denklemler elde edilir. Ortak bölünebilecekleri sayı olmasaydı rasyonel katsayılara dönüşebilirlerdi. Bu durumda çözümü zorlaştırabilirdi “ diye açıklanmıştır. Öğrenci soruya dair kendi bakış açısını geliştirerek farklı bir yaklaşım sergilemiştir. Öğrencinin sorusu arkadaşlarının da zihinsel anlamlandırma süreçlerine katkıda bulunarak yorumlarının önüne açabilecek türden iyi bir soruydu.

İlk yönteme dair konuşmalar tamamladıktan sonra problemin çözümünü “yerine koyma yöntemi” ile yapmaları istenmiştir. Öğrenciler öncelikle kendi defterlerinde problemi çözmeye çalışmışlardır. Sınıfta dolaşılarak zorlanan öğrencilere zorluklarını aşmaya yardımcı olacak yönlendirici sorular sorulmuştur.

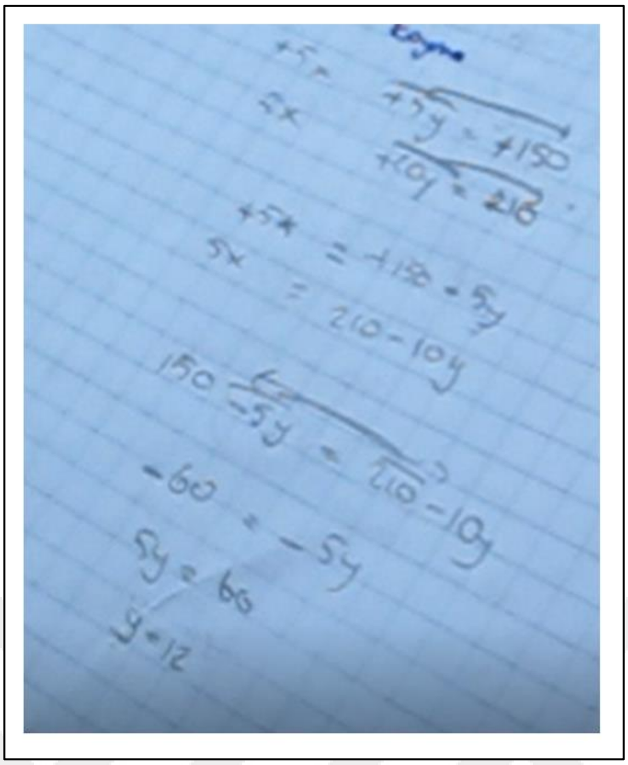


Şekil 41. Öğrencilerin defterlerinden görüntüler

Şekil 41’de solda defter örneğinde öğrenci *x+y=30* denkleminden yalnız bıraktığı x değerini *5x+10y=210* denkleminde yerine yazarak çözüm yapmıştır. Şekil 41’de sağda verilen defter örneğinde ise *5x+10y=210* denkleminde yalnız bırakılan *x* *x+y=30* denkleminde yerine yazılıyordu (SK2). Öğrenciler tercih ettikleri yolda ilerlemişlerdi. Burada öğrencilerin bu probleme başlarken tek bilinmeyenli forma dönüştürerek kullandıkları yöntemin aslında yerine koyarak çözme metodu olduğu belirtilmeliydi.

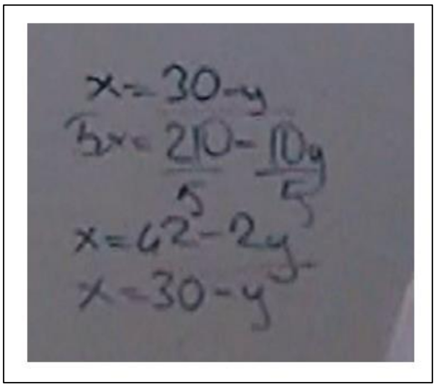
Bireysel çalışmalar tamamlandıktan sonra öğrencilerden biri tahtada gelerek problemin çözümünü yapmıştır. İstedikleri denklemde istedikleri değişkeni yalnız bırakarak diğer denklemde yerine yazabilecekleri tekrardan vurgulanmıştır. Bu çözüm yönteminde öğrenciler yok etme yönteminde olduğu gibi zorluk yaşamamışlardır.

Son olarak problemi “karşılaştırma yöntemi“ kullanarak çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerden Beyza karşılaştırma yöntemini kullanırken Şekil 42‘de verilen defter görüntüsündeki yolu tercih etmiştir. Bu çözüm diğer öğrencilerin çözümünden farklı bir yaklaşım içermektedir. Her iki denklemde de *x* terimleri yalnız bırakılmıştır, ancak birinci denklemin tamamını *5* katsayısı ile çarparak elde ettiği *5x*’li terimleri birbirine eşitlemiştir. Kendi düşünceleri doğrultusunda farklı bir yaklaşım sergileyerek değişik bir yol izlemiştir. Bu öğrencinin yaklaşımları arkadaşlarına kalıpların dışında düşünmeyi aktarmak adına olumlu örnekler olmuştur (CY).



Şekil 42. Beyza’nın defterinden görüntü

Bireysel çözümler tamamlandıktan sonra öğrencilerden biri tahtaya gelerek problemin çözümünü Şekil 43‘de verilen yolu izleyerek yapmıştır.



Şekil 43. Üçüncü planın ikinci problemine ait tahtadaki öğrenci çözümünün görüntüsü

Tahtadaki öğrenci çözümünü tamamladıktan sonra sınıftaki arkadaşlarından problemin çözümünde farklı bakış açısı kullananlar birbirlerinin anlamlandırmalarına katkıda bulunabilmek adına (CA) kendi çözüm yollarını ifade etmişlerdir.

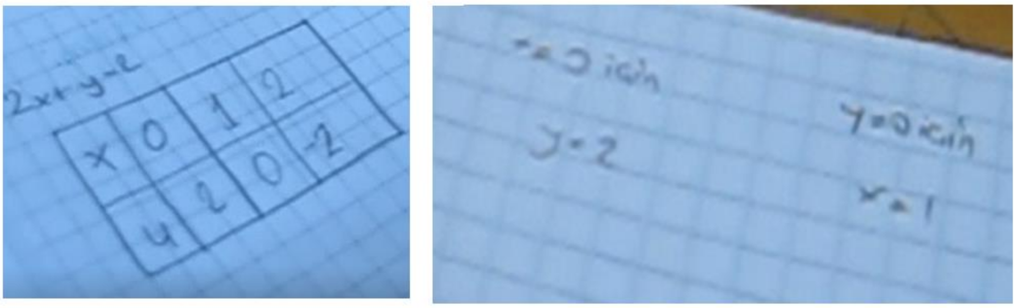
Ders, öğrenilen iki bilinmeyenli iki denklemin çözüm yöntemleri özetlenerek tamamlanmıştır. Her yöntemin aynı çözüme götüreceği ve istedikleri yöntemi çözümlerinde kullanabilecekleri belirtilmiştir.

Öğrencilerin bu derste öğrendikleri yeni bir bilgiydi. Ders planlanırken bu yeni duruma adapte olmaları için eski bilgilerini kullanarak keşifler yapmaları hedeflenmiştir. İlk probleme ait olan *x+y=175* ve *x-y=105* denklemlerini birbirinden çıkarırken, ikinci probleme ait denklemlerin karşılaştırma yöntemi ile çözümünde (Bkz. Şekil 42) keşifler yapan öğrenciler olmuştu. Videolardan yapılan gözlemlere göre öğrencilere keşfetmeleri için pek fırsat verilmemiş, amaçlı olarak yönlendirilmişlerdir. Bu durumun sebepleri arasında öğrenci ve öğretmenin tamamen öğrenci merkezli ders işlemek için hazırlıklı olmamaları, bu hazır olmama durumunun zaman kayıplarına yol açması nedeni ile planın yetişmeyeceği kaygısının oluşması gösterilebilir. Öğrenciler cebirsel akıl yürütme göstergelera açısından ikinci problemde cebirsel olarak ifade ederken (SK1) sorunlar yaşamışlardır. Bu durumun önüne geçmek için sorulan yönlendirici sorular problemleri kısmen ortadan kaldırmıştır. Derste kullanılan her iki problemde de denklem çözme ve çözüm stratejisi uygulama(SK2) konularında yetersiz olmuşlardır. Bu durum cebirsel yöntemler geliştirme ve çözüm üretme konularında yani cebirsel akıl yürütmede yetersiz olduklarının göstergesidir. Ayrıca değerlendirmeler yaparak yorum yapan öğrenci sayısı da yetersizdir. Bu durumun çözümü için o derste uygulanabilecek çözümlerden ziyade geçmişe dönük uygulama ve önerilere ihtiyacı vardır. Öğrencilerin geçmiş yaşantılarında daha fazla cebirsel akıl yürütmelere imkân sağlanmalıdır.

4. 4. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4

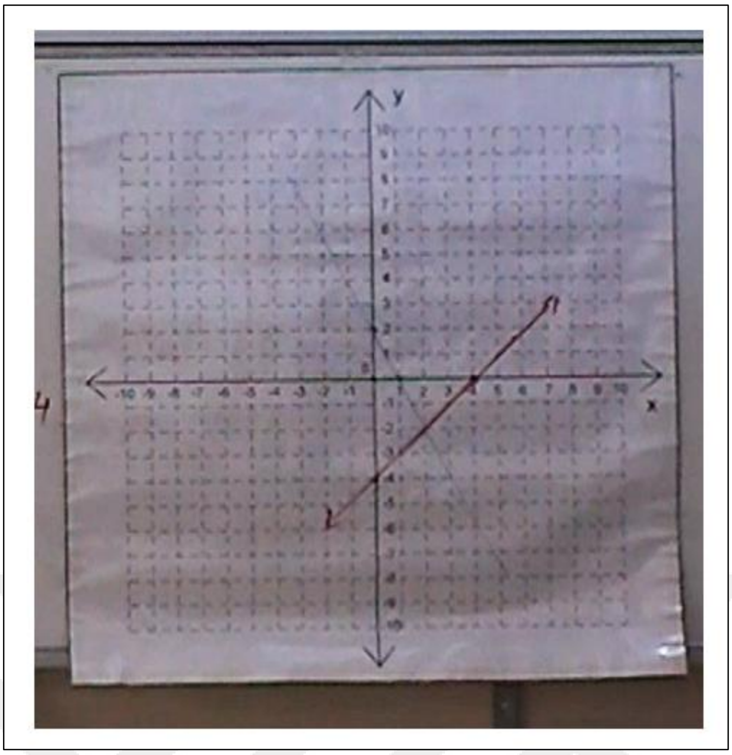
Dördüncü ders planı “Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar” kazanımı için hazırlanmıştır. Doğru grafiklerini doğruyu sağlayan ikilileri kullanarak çizebilme ve iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan doğrusal denklem sistemlerini çözebilme altyapısı önceki derslerde oluşturulmuştur. Bu dersin amacı ise doğru grafiklerinin birbirine göre durumları ile doğrulara ait denklemlerin oluşturduğu denklem sisteminin çözümleri arasındaki ilişkiyi fark etmelerini sağlamaktır. Ayrıca cebirsel akıl yürütme göstergeleri bağlamında sorular sorarak anlamlandırma yapma (CA), matematiksel bilgiyi farkı temsillere çevirme (FG1), temsiller arasında geçişler yapma (FG2), denklem kurma ve çözme (SK1, SK2), yorumlama, değerlendirme ve çıkarımda bulunma (CY), eleştirel düşünme ve kritik yapma (ED) davranışlarını gözlemlemek hedeflenmiştir. Bu amaçla derse giriş problemi olarak konuya tam odaklanmayı sağlamak için bağlamsal olmayan bir soru kullanılmıştır. Soruda, öğrencilerden *2x+y=2* ve *x-y=4* doğrularına ait grafikleri aynı koordinat sistemi üzerinde göstermeleri ve bu denklem sistemini çözmeleri istenmektedir. Doğrulara ait denklemden yola çıkarak doğru grafiklerini oluşturmaları (FG2) ve böylece temsilden temsile geçiş yapmaları hedeflenmiştir. Grafik çizimine başlanmadan önce öğrencilere “Bir doğru çizebilmek için en az kaç nokta gereklidir?” sorusu sorularak grafiklerin nasıl çizebileceklerine dair önceki derslere ait hatırlatma yapılarak öğrenciler yönlendirilmiştir. Ayrıca doğruya ait denklemi kullanarak grafik oluştururken hangi yöntemlerin kullanılabileceğini düşünmeleri istenmiştir. Bireysel düşünmeleri ve grafik çizimlerini defterlerine yapması için öğrencilere zaman tanınmıştır. Öğrencilerden grafikleri aynı koordinat sistemi üzerinde göstermeleri istenmiştir.

Şekil 44’de görüldüğü gibi öğrenciler arasında denklemleri sağlayan *(x,y)* sıralı ikililerini tablolaştırarak denklemlere ait grafikleri çizenler olmuştur. Ancak, denklem grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları bularak grafik çizimi yapan öğrenciler sınıfta çoğunluğu oluşturmuştur.



Şekil 44. Dördüncü planın ilk problemin çözümüne ilişkin öğrenci defterlerinden görüntüler

Öğrencilerden, denklemlere ait doğruları aynı koordinat sistemi üzerinde çizmelerinin amacının ne olduğunu sorgulayanlar (CA) olmuştur. Doğruların birbirlerine göre durumlarını incelemek amacıyla aynı koordinat sisteminde çizildiği ve dersin ilerleyen kısımlarında neden böyle bir yol izlendiğinin daha net anlaşılacağı anlatılmıştır. Öğrencilerden biri tahtaya gelerek denklemlerin grafiklerini, grafiklerin eksenleri kestiği noktaları bularak çizmiştir. Çözüme ait tahta görüntüsü Şekil 45’de verilmektedir.



Şekil 45. Tahtaya asılan materyale öğrencinin çizdiği denklem grafiklerinin görüntüsü

Doğrulara ait grafikler çizildikten sonra öğrencilerden doğruların birbirlerine göre durumlarını irdelemeleri (CY) istenmiştir. Öğrenciler, doğruların tek noktada kesişen doğrular olduğunu belirtmişlerdir. Her ne kadar doğruların tek noktada kesiştiğini kolaylıkla görebilseler de bunun ne ifade ettiğini henüz fark edememişlerdir. Öğrencilerin anlamasına yardımcı olabilmek için öğrenciler cebirsel çözüme yönlendirilmiştir. Problemde verilen doğru denklemlerinin iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir denklem sistemi olarak düşünülmesi ve bu sistemin cebirsel çözümünün yapılması istenmiştir. Sistemin çözümünde istedikleri çözüm yöntemini tercih edebilecekleri belirtilerek, bireysel çalışmaları için öğrencilere fırsat tanınmıştır. Yapılan çalışmalar kontrol edilerek öğrencilere gerekli görülen dönütler verilmiştir. Denklem katsayıları yok etme metodu ile çözmeye elverişli olduğundan öğrenciler genellikle bu yöntemi tercih etmiştir ve sıkıntı yaşamadan denklemleri sağlayan çözüm kümesini bulmuşlardır (SK2).

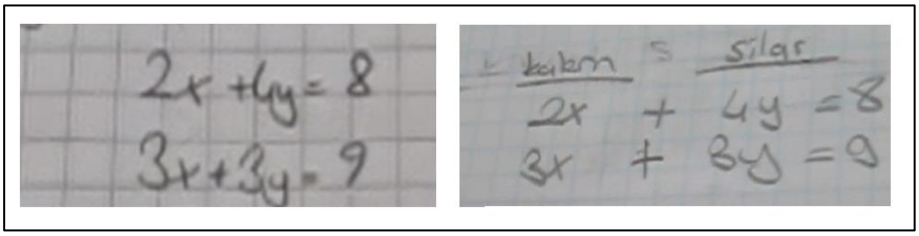
Bireysel çalışmalar tamamlandıktan sonra öğrencilerden biri tahtaya gelerek yok etme yöntemiyle denklem sisteminin çözümünü yapmıştır. Denklem sistemini sağlayan çözüm noktası *(2,-2)* olarak bulunmuş ve öğrencilerden elde edilen bu nokta ile denklemler için çizilen grafikleri beraber yorumlamaları istenmiştir (CY). Öğrencilerden probleme ilişkin elde edilen verileri değerlendirmeleri, yorumlamaları ve çıkarımda bulunmaları beklenmiştir.

Denklem sisteminin çözüm kümesi ile sistemi oluşturan denklemlere ait doğruların kesim noktasının aynı olduğunu fark etmişlerdir. Diğer bir ifadeyle, denklem sistemini çözerek ya da denklemlere ait doğruların grafiklerini çizdiklerinde oluşan kesişim noktasını bularak problemin çözümünü yapabileceklerini anlamışlardır (CY). Devamında bir öğrenci ile aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : Tek bir nokta bulmamızın özel bir anlamı olabilir mi?
Esra : Sistemi sağlayan tek çözüm olduğunun göstergesidir.
Öğretmen : Evet. Tek çözümü vurgular.

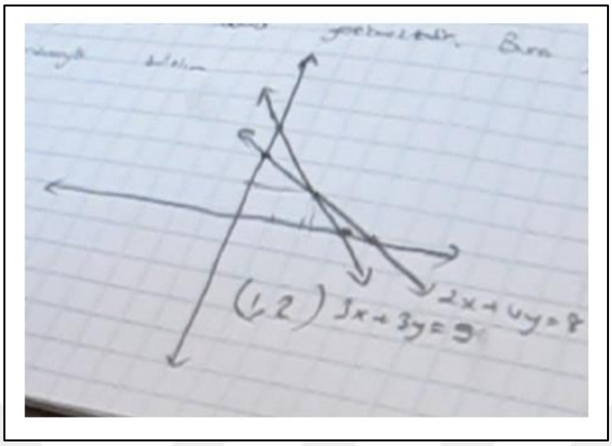
Tek öğrencinin cevabı yeterli bulunmuş ve diğer öğrenciler sorgulanmamıştır. Birkaç öğrencinin daha fikirlerini açıklaması için fırsat verilebilirdi. Diğer öğrenciler için bu cevap ikna edici olmuş mudur ya da farklı düşünen öğrenciler var mıdır yoklaması yapılmamıştır.

Derse bağlamsal olmakla beraber dersin ilk problemine benzer bir mantığa sahip bir problem ile devam edilmiştir. Problemde, kırtasiyeden 2 kalem ile 4 silgi alırsa 8 TL, 3 kalem ile 3 silgi alırsa 9 TL vermesi gereken bir öğrencinin almak istediği kalem ve silgilerin birim fiyatları sorulmaktadır. Öğrenciler verilen probleme ilişkin denklemlerin grafiklerini çizdiklerinde ilk probleme benzer şekilde kesişen iki doğru ile karşılaşacaklardı. Böylece, çözümü kesişen iki doğrunun kesim noktasına karşılık gelen problemler için öğrenciler bilgilerini pekiştireceklerdi. Problem bağlamsal olduğu için öncelikle birkaç öğrenciden problemi okuyarak yorumlamaları istenmiştir (CA). Öğrencilere zaman tanınarak probleme ait matematiksel bilgileri, denklemler ile sunmaları beklenmiştir (SK1).



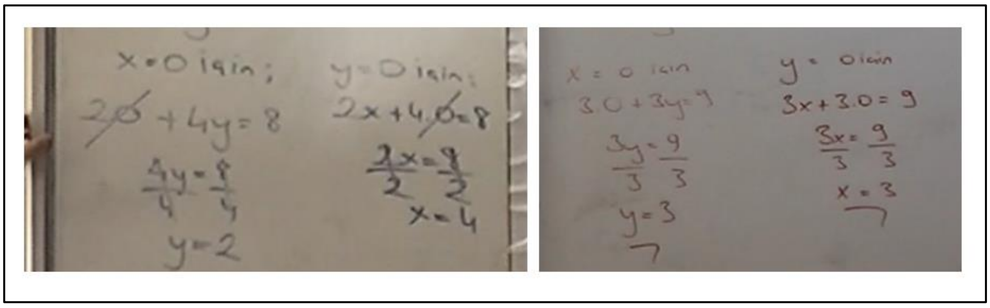
Şekil 46. Öğrenci defterlerinden görüntüler

Şekil 46'da verilen öğrencilerin defterleri sınıfta genel olarak sergilenen performansları özetlemektedir. Öğrenciler problemin verilerini kullanarak ilgili denklemleri kurmakta zorlanmamışlardır. Denklem kurma işlemlerindeki becerilerini yapılan tekrarlar neticesinde pekiştirmişlerdir. Öğrencilerden biri tahtaya gelerek kurduğu denklemleri tahtaya yazmıştır. Yazılan bu denklemlere karşılık gelen doğruları aynı koordinat sisteminde çizmeleri istenmiştir. Öğrencilere bir önceki problemde sorulan "Doğru çizebilmek için en az iki noktanın yeterli olacağı?” sorusu yinelenerek defterlerine çizim yapmaları için zaman tanınmıştır (FG1). Şekilde verilen defter örneği pek çok öğrencinin bireysel çizimleri ile benzer olup sınıftaki genel eğilimi göstermektedir.



Şekil 47. Öğrencinin defterinden görüntü

Bireysel çalışmalar bittikten sonra bir öğrenci tahtaya gelerek doğru grafikleri çizmesi istenmiştir. Öğrenci, Şekil 48‘de verildiği gibi doğruların eksenleri kestiği noktaları bularak grafikleri çizmiştir.

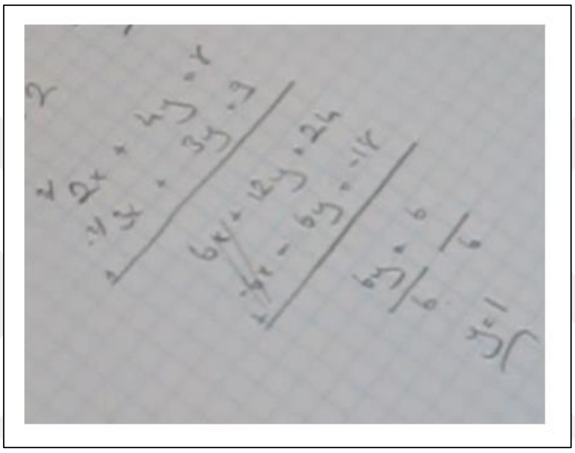


Şekil 48. Dördüncü planın ilk problem için öğrencilerin tahtada yaptığı cebirsel çözümlerin görüntüleri

İkinci denklemin eksenleri kestiği noktaların bulunmasından sonra öğrencilere, denklemi sadeleştirmek için *3x+3y=9* denkleminde eşitliğin her iki tarafını *3* ile sadeleştirilebileceği ve böylece *x+y=3* denkleminin elde edebileceği belirtilmiştir. Sadeleştirilmiş denklem ile denklemi sağlayan değerleri daha rahat görebilecekleri düşünülmüştür. Bu ifadenin doğrudan verilmesi yerine öğrencileri “Bu denklemi başka nasıl ifade edebiliriz?” sorusuyla yönlendirerek kendilerinin bu sonuca ulaşması sağlanabilirdi. Böylece sadeleştirme bilgisi pekiştirilebilirdi. Farklı yolları keşfetmelerine ve akıl yürütmelerine imkân sunulabilirdi. Probleme ait doğru grafiklerinin kesiştikleri nokta olan

(2,1) sıralı ikilisinin ne ifade ettiği öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerden biri, probleme ait denklemleri oluştururken kaleme *x*, silgiye *y* dediklerini belirterek, bu sıralı ikilide de *x* 'in 2 ve *y*'nin 1 değerine sahip olduğunu söylemiştir. Yani," kalem 2 TL ve silgi 1 TL 'dir" demiştir.

Grafiksel çözüm tamladıktan sonra öğrenciler cebirsel çözüm için düşünmeye başlamışlardır. Cebirsel çözümde istedikleri çözüm yöntemini kullanabilecekleri belirtilmiştir. Problem için yazılan iki bilinmeyenli iki denklemin bir denklem sistemi olarak çözülmesi hedeflenmiştir. Bireysel çözümler yapılırken öğrencilere seçtikleri yönteme ve işlem aşamalarına dair sorularına dönütler verilmiştir. Farklı yöntemler kullanarak cebirsel çözümler yapan öğrenciler olmuştur (SK2) (Bkz. Şekil 49).



Şekil 49. Yok etme yöntemini kullanan bir öğrenci defteri örneği

Bir öğrenciye farklı bir bakış açısı sunabilmek için aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Öğretmen : *Bu iki denklemi de sadeleştirip devam etmek istersek nasıl ilerleyebiliriz?*

Beyza : *İlk denklem 2 ile sadeleşir, ikinci denklem 3 ile sadeleşir. x+2y=4 ve x+y=3 denklemleri elde edilir.*

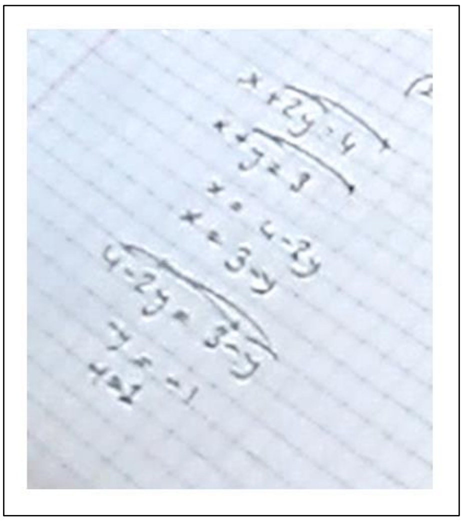
Öğretmen : *Devamında nasıl düşünürsün?*

Beyza : *Denklemlerden birini -1 ile çarparak x'i yok edebilirim.*

Öğretmen : *Başka bir yöntem düşünsen.*

Beyza : *Her iki denklemde x'leri yalnız bırakarak karşılaştırma yöntemini kullanabilirim.*

Öğretmen : *Katsayıları ortak bölebilen çarpanlar bulunduğundan rahatlıkla katsayıları sadeleştirerek kullanabiliriz. Ancak her denklem çiftinde uygulayamayabiliriz.*



Şekil 50. Karşılaştırma yöntemini kullanan öğrenci defterinden çözüm görüntüsü

Başka bir öğrenci yine karşılaştırma yöntemi ile çözüm yaparken (Şekil 50) her iki denklemde de *x*'i *y* cinsinden yazdığını ve birbirine eşitleyerek bir bilinmeyenli denklem elde ettiğini belirtmiştir. Başka bir öğrenci ise yerine koyma metodunu tercih etmiştir. Öğrenciler çözümlerinde her üç çözüm yöntemi kullanılmış olsa bile denklemdeki katsayıların uygun olması sebebiyle en çok yok etme metodu tercih edilmiştir.

Bireysel çalışmalardan sonra bir öğrenci tahtaya gelerek problemin cebirsel çözümünü yapmıştır. Öğrenci karşılaştırma yöntemini tercih etmiş ve denklemlerdeki x değişkenlerini yalnız bırakıp elde ettiği ifadeleri birbirine eşitleyerek çözüm yapmıştır. Elde edilen cebirsel çözüm değerleri ile grafik çözümden elde edilen kesişim noktasının aynı değerler olduğu tekrar görülmüştür (CY). Böylece, tek bir noktada kesişen doğrulara ait denklemlerin cebirsel çözümünden de tek bir çözüm elde edildiği ve bu çözüm değerlerinin kesişim noktasının değerleri ile aynı olduğu vurgulanmıştır.

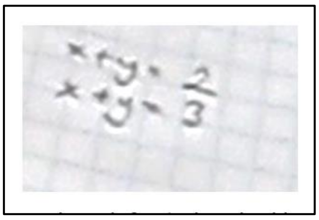
Ders genel anlamda değerlendirildiğinde ağırlıklı olarak ilk üç dersin tekrarı niteliğindeydi. Bu dersteki yeni bilgi kesişen doğruların kesişim noktaları ile cebirsel çözüm noktalarının aynı olduğudur. Eski bilgileri üzerine temellenen bu derste öğrenciler zorlanmamışlardır. Dersin başlangıç kısmında belirlenen hedeflere ulaşıldığı düşünülmektedir. Öğrenciler doğrusal denklem sistemi cebirsel çözümü ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurabilmişlerdir. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri bağlamında da kısmen yetersiz olsa da sorular sorma, denklemler kurma ve çözme, grafikler ile temsil etme, yorumlama ve çıkarımda bulunma davranışlarında etkili performans sergilemişlerdir.

4. 5. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5

Beşinci ders, dördüncü dersin devamı niteliğinde olup "Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar" kazanımına hizmet etmektedir. Derse, dördüncü dersin kısa tekrarı yapılarak başlanmıştır. Böylece, öğrenciler önceki derste edindikleri bilgileri hatırlayarak yeni derse hazırlanmışlardır. Dördüncü derste, denklemleri verilen iki doğrunun grafiğini aynı koordinat sistemi üzerinde gösterilerek doğruların birbirlerine göre durumları incelenmiş ve aynı denklemlerin cebirsel çözümleri de yapılarak her iki çözümden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Dördüncü derste yapılanlar aslında ilk üç dersin sentezi niteliğindedir ve yeni olan koordinat sistemi üzerindeki doğruların kesişim noktası ile doğrulara ait denklem sisteminin cebirsel çözümü neticesinde elde edilen noktaların aynı olduğu bilgisidir. Bu bilgiden yola çıkarak denklem sistemlerini grafik kullanarak ya da cebirsel olarak çözebilecekleri sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca, denklem sisteminin cebirsel çözüm kümesinin tek bir ikili olması ve doğru grafiklerinin tek noktada kesişmesi bilgilerinin birbirlerini desteklediği yargısına varmışlardır. Dördüncü derse benzer şekilde, bu derste de öğrencilerin geçmiş bilgilerini kullanarak yeni çıkarımlara ulaşmaları hedeflenmektedir (CY). Bu derste de iki doğru denkleminin cebirsel çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğru grafikleri arasında ilişki kurmaları amaçlanmıştır. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından derste zihinsel anlamlandırma süreci (CA), farklı gösterimleri kullanma (FG), denklem kurma ve çözme (SK2), eleştirel düşünme (ED),yorumlama, değerlendirme (CY) süreçleri gözlemlenmeye çalışılmıştır.

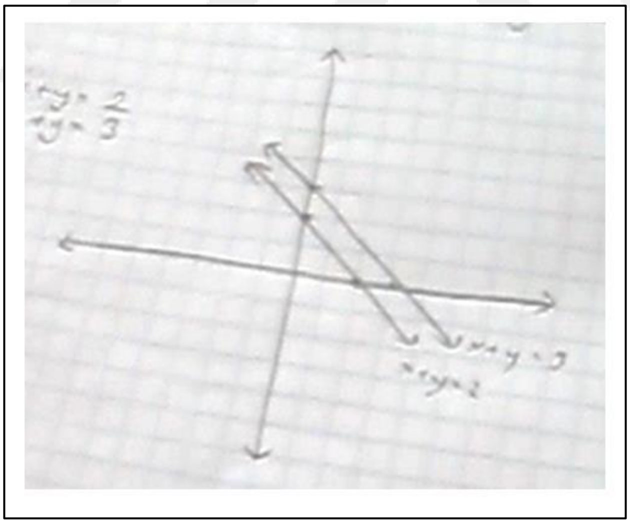
Dersin ilk probleminde, fırından bir buğday ve bir kepek ekmeği alan Ahmet'in 2 TL, iki buğday ve iki kepek ekmeği aldığında ise 6 TL verdiğinden bahsedilmektedir. Öğrencilerden her bir ekmeğin fiyatını bulmaları beklenmiştir. Birkaç öğrenci problemi sesli şekilde okuyarak yorumlamıştır. Problem çözümüne başlamadan, problemde yolunda gitmeyen bir şeyler olduğunu sezmişlerdir (CA). Birer ekmek için 2 lira ise ikişer ekmek için 4 lira olmalı diye düşünmüşlerdir. Ancak bu durumun grafiksel ve cebirsel sonuçlarını tahmin edememişlerdir. Öncelikle öğrencilerden bireysel çalışma yaparak problemi temsil eden denklemleri oluşturmaları (FG1) ve bu temsilleri kullanarak doğru grafiklerini çizmeleri (FG2) istenmiştir. Bir önceki dersten alışık olduklarından probleme ilişkin denklemleri oluştururken zorlanmamışlardır. Fakat elde ettikleri denklemleri ve doğruları yorumlamada zorlanmışlardır. Öğrencilerin bireysel çalışmaları esnasında karşılaştıkları zorluklardan bazıları aşağıda özetlenmektedir.

Esra isimli öğrenci, denklemleri $x+y=2$ ve $2x+2y=6$ olarak oluşturmuştur. İkinci denklemi 2 ile sadeleştirerek $x+y=3$ denklemini elde ettiğini belirterek soruda bir yanlışlık olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir (Bkz. Şekil 51). "$x+y$ ifadesi hem 2'ye hem de 3'e nasıl eşit olabiliyor?" sorgulamasını yapmıştır. Bu durum öğrencinin zihinsel anlamlandırma yaptığının (CA) göstergesidir.



Şekil 51. Esra'nın defterinden denklemlerin görüntüsü

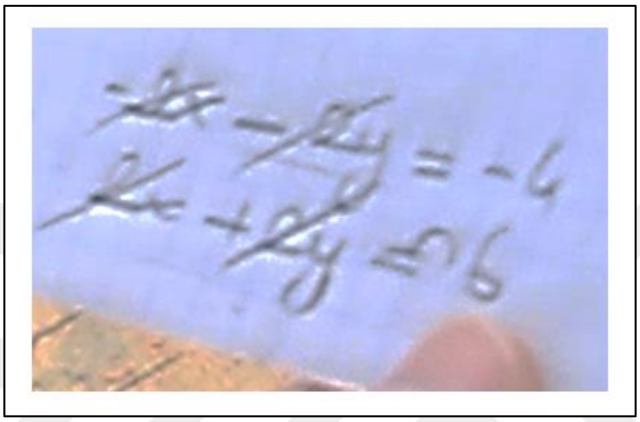
Öğrenci, doğruların grafiğini çizmeye yönlendirilmiştir (Bkz. Şekil 52). Çizilen grafiklerden ekmeklerin fiyatını grafiksel olarak ifade etmesi istenmiştir. Öğrenci daha önce kesişmeyen doğrularla karşılaşmadığı için cevap vermekte zorlanmıştır. Grafiklerin kesim noktası olmadığından değer olarak söyleyecek bir şey göremediğini belirtmiştir (CY). Öğrencinin sonuca kendi kendine ulaşaması ve bulduklarını yorumlaması beklendiğinden bir açıklama yapılmadan önce problemin bir de cebirsel çözümünü yapması istenmiştir .



Şekil 52. Esra'nın defterinden grafiklerin görüntüsü

Cebirsel çözüm yapan Esra, çözümünde yoketme yöntemini kullanmış (SK2) ve iki değişkeninde işlemler sonucunda yok olduğunundan ortada değeri bulunacak bir değişken kalmadığını belirmiştir.

Başka bir öğrenci, *x+y=2* denklemini -2 ile çarptıktan sonra *2x+2y=6* denklemi ile taraf tarafa toplamıştır. Eşitliğin bir tarafının 0 ve diğer tarafının 2 olduğunu ve böyle bir eşitliğin olamayacağını belirtmiştir (Bkz, Şekil 53). Benzer sonuçlara ulaşan tüm öğrencilerden karşılaştıkları bu durumların ne ifade ediyor olabileceğini düşünmeleri istenmiştir. Sınıfta doğru akıl yürütme yaparak, böyle ekmekler olamayacağını ve problemin çözüm kümesinin boş küme olacağını belirten öğrenciler olmuştur (CY). Buğday ve kepek ekmeğinin fiyatlarının 1'er lira olacağını söyleyenler de olmuştur. Böyle düşünen öğrencilere problem metni tekrar okunarak "İlk denkleme göre belki olabilirdi ama eşit olacağından emin olamayız ayrıca ikinci denklemi 1'er lira olması durumu sağlamaz" dönütü verilmiştir. İlk defa karşılaştıkları bu durumu düşünmeleri ve yorum için biraz daha zaman tanınmıştır.



Şekil 53. Selin'in defterinden cebirsel çözüm görüntüsü

Öğrencilerden Selin "bu eşitlikler doğru değil ve doğrularda paralel ancak nasıl ifade ederim bilemiyorum" diye belirtmiştir. Engin adlı öğrenci "iki denklemde de alınan ekmekler kesinlikle aynı ekmekler olamaz" diyerek aslında durumu özetlemiştir (CY). Doğru yolda ilerlemiş ve problemi sağlayan bir çözümün olmadığı sonucuna yaklaşmışlardır. Sınıf olarak, bu problemin bir çözümünün olmadığına dair fikir birliğine varmışlardır. "Çizdiğiniz grafikler kesişmediğinden buğday ve kepek ekmeğinin birlikte sağladığı bir nokta yok ve cebirsel çözümde de ekmeklerin fiyatı yerine bir eşitsizlik durumu ile karşılaşıyorsunuz" vurgusu ile her iki yöntemden de sonuç alamadıkları hissettirilmeye çalışılmıştır.

Farklı öğrenciler gelerek tahtada çözüme katkıda bulunmuşlardır. Defterlerindekine benzer şekilde grafikler çizilmiş ve paralel iki doğru elde edilmiştir. Cebirsel çözüm yapılmış fakat x ve y bilinmeyenlerine ait değerler bulunamamıştır. Benzer durum ile geçmiş derslerde birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözerken de karşılaşmışlardır. Öğrencilerden biri " yani denklemler ortak çözülemiyorsa doğru grafikleri paralel mi olur" diye sormuştur (ED). "Bu doğruları birlikte sağlayan ortak noktaları var mı?" sorusu yönlendirilmiştir. Ortak noktaları olmadığına dair verilen cevapların ardından "Ortak noktaları yok ise bu doğruları birlikte sağlayan bir nokta yok demektir" diyerek öğrenciler onaylamıştır. Elde edilen bilgi doğrudan onaylanmadan önce sınıfta farklı düşünen öğrenciler olup olmadığı kontrol edilebilirdi. Farklı düşünen öğrencilerin fikirleri de dinlenebilirdi. Böylece hem bilgi pekiştirilmiş olur hem de varsa yanlış anlaşılmaların önüne geçilmiş olabilirdi. Öğrenciler, hedeflenen sonuca ulaştıklarından desteklenmişlerdir. Bir önceki derste öğrendiklerini eleştirel bir gözle yorumlayarak bu sonuca ulaşmışlardır. Öğrencileri buldukları sonucu yorumlamaya yönlendirmek amacıyla aşağıda verilen konuşma yapılmıştır:

Öğretmen *: Bu sonucu cümlelere dökerek not etmek isteseniz nasıl ifade edersiniz?*
Ceyda *: Eğer sonuç boş küme çıkarsa yani eşitsizlik durumunda bir değer bulamayız.*
Esra *: Bir denklem sisteminin sonucu boş küme ise bu denklemlerin grafiklerindeki doğrular paralel olur.*
Beyza *: Denklem doğruları birbirine paralel ise çözümleri boş kümedir.*

Öğrenciler zihinsel şemaları içinde şekillenen bilgilerini bu cümleler ile ifade etmişlerdir. Bu cümlelerden de anlaşıldığı gibi çözüm süreçlerini değerlendirerek yorumlamış ve çıkarımda bulunmuşlardır (CY). Öğrencilerin ifadelerinden sonra toparlamak amacıyla “Birinci dereceden iki bilinmeyenli iki doğrunun grafiği birbirine paralel ise bu doğruların denklemlerinin çözüm kümesi boş kümedir” denilerek ulaşılan bilgi özetlenmiştir.

Derse çözümü çakışık doğrular içeren başka bir problem ile devam edilmiştir. Problemde, manavdan bir kilo elma ile iki kilo armut alırsa 4 lira ve iki kilo elma ile dört kilo armut alırsa 8 lira ödeyen Mehmet’in elma ve armudun kilosuna kaçar lira verdiği sorulmuştur. Birkaç öğrenci problemi sesli bir şekilde okuyarak yorumlamışlardır ve bir önceki problem ile karşılaştırarak verilerde sıkıntı olmadığını belirtmişlerdir (CA). Denklem kurmaları ve doğru grafiklerini defterlerinde çizmeleri için serbest çalışmışlardır. Salih, probleme ait denklemleri oluşturmuştur (FG1) ve elde ettiği $x+2y=4$ denklemini -2 ile genişleterek, ikinci denklem olan $2x+4y=8$ denklemi ile taraf tarafa toplamıştır (SK2). Nihayetinde de $0=0$ sonucuna ulaşmıştır. Devamında öğrenci ile aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

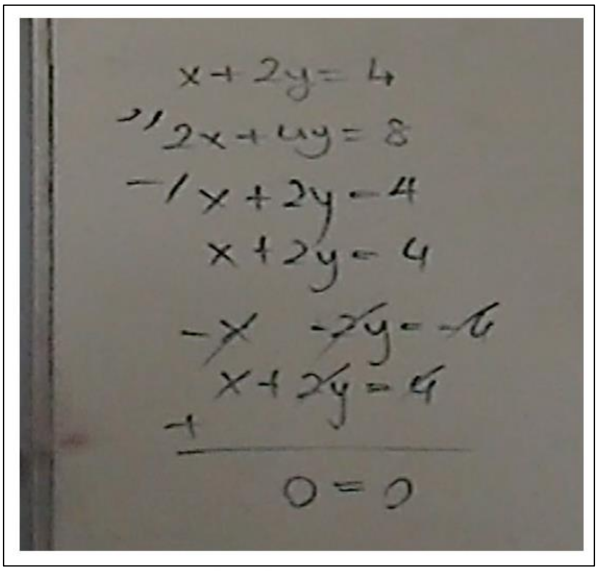
Salih *: Yani bu denklemi sağlayan değer sadece 0’mı?*
Öğretmen *: Ama x=0 ya da y=0 bulmamışsın ki.*
Salih *: ……. ?*
Öğretmen *: Şimdi de bu doğruların grafiklerini çizebilir misin?*

Öğrenci cebirsel çözüm için yorum yapamadığından çözümü grafik ile desteklemesi (FG2) istemiştir. Başka bir öğrenci de aynı cebirsel çözümü yapmıştır ve aşağıda verilen diyalog gerçekleşmiştir.

Gamze : *0=0 olduğuna göre bu denklemlerin çözümü de boş küme mi?*
Öğretmen : *Eşitsizlik durumunda boş küme olmuştu. Bu durumu farklı bir anlamı olabilir mi?*
Gamze : *……. ?*

Gamze'de cebirsel çözüm için değerlendirme yapamadığından grafikler ile çözümünü desteklemesi (FG2) istenmiştir. Öğrencilerden biri de *2x+4y=8* denklemini 2 ile sadeleştirmiş ve diğer denklemin aynısını elde etmiştir. Denklemlerden ilkini -1 ile çarparak denklemleri taraf tarafa toplamış ve denklemlerin tamamen yok olduğunu görmüştür. *0=0* sonucuna ulaştığını ve bütün reel sayıların çözüm olduğunu belirtmiştir. Öğrenciye bu sonuca nasıl ulaştığı sorulmuştur. Öğrenci cevap olarak, denklemlerin doğru grafiklerini de çizdiğini ve doğruların çakışık olduğunu yani bütün noktalarının ortak olduğunu belirtmiştir (CY). Bu nedenle problemin sonsuz çözüm noktası olduğu düşüncesini yinelemiştir. Öğrenci zorlanmadan problemi çözmüş ve elde ettiği sonuçları doğru akıl yürütmelerle destekleyerek yorumlamıştır. Başka bir öğrencide, probleme ait doğru denklemlerinin aynı olduğunu belirtmiştir. Öğrenciye, "Peki problemin çözüm kümeleri nasıl ifade edilebilir" diye sorulmuştur. Öğrenci "çözüm kümeleri yoktur" diyerek hatalı bir yorumda bulunmuştur. Öğrencinin hatasını görebilmesi için bir önceki problemde eşitsizlik durumunda çözümün olmadığı belirtilerek bu problemde eşitlik durumunun elde edildiği ve doğruların paralel değil çakışık olduğu belirtmiştir. Öğrenci söylemini değiştirerek "çözüm kümeleri çoktur" demiştir (CY). Kendi bakış açısıyla değerlendirerek doğru akıl yürütme yapmıştır.

Bireysel çalışmalardan sonra fikirlerini arkadaşları ile paylaşmak için tahtaya gelen bir öğrenci problem verilerinden yola çıkarak probleme ait denklemleri yazmış (FG1) ve bu denklemlere ilişkin doğru grafiklerini koordinat sistemine çizmiştir (FG2). Öğrenci, doğru grafiklerini doğruların eksenleri kestiği noktaları belirleyerek tamamlamıştır. Çizim sonucunda doğruların üst üste düştüğünü görmüştür (Bkz. Şekil 54). Grafik çözümden sonra Fatih isimli öğrenci de tahtaya gelerek cebirsel çözüm yapmıştır (SK2) (Bkz. Şekil 53).

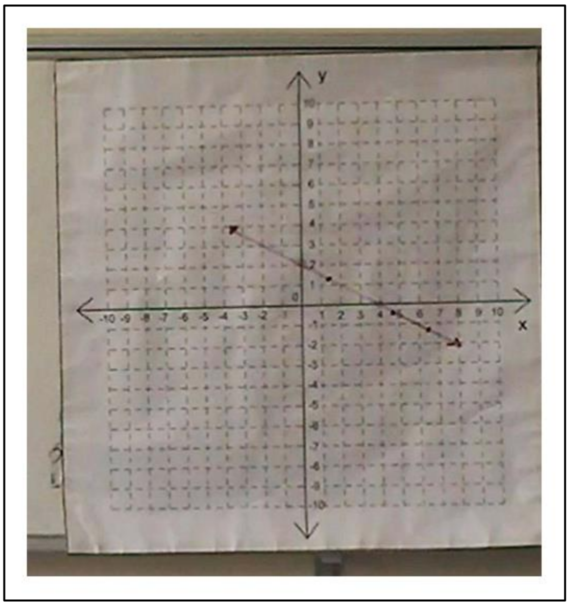


Şekil 54. Fatih’in problemin cebirsel çözümüne ilişkin tahtada yaptıkları

Öğretmen *: 0=0 ne anlama gelir?*

Fatih *: Boş küme.*

Öğretmen *: Grafiğin çakışık olması ile cebirsel çözümün 0=0 olması bilgilerini birleştirir misiniz? (Dönüt alamayınca daha farklı bir ifade yolu aranmıştır).*



Şekil 55. Probleme dair doğru grafiklerinin tahtadaki görüntüsü

Öğrenci cebirsel çözüm yapmıştır ve arkadaşı da grafiksel olarak temsilleri çizmiştir. Bu iki farklı çözümü birleştirerek yorumlayamamıştır. Öğrencilerden beklenen dönütler alınamadığından, öğrencilerin düşünmelerine yardımcı olmak adına çakışık doğru grafikleri üzerinde rastgele noktalar işaretlenmiştir. Böylece birden fazla noktanın bu problemin çözümü olabileceği öğrencilere hissettirilmek istenmiştir. Farklı ve çok sayıda olan bu noktaların iki doğru üzerinde olduğu sorularla öğrencilere fark ettirilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerden gelen olumlu dönütlerden sonra işaretlenen bu noktalar gibi kaç noktanın daha işaretlenebileceği sorulmuştur. Bir doğru üzerinde seçilen herhangi bir noktanın doğrular çakışık olduğundan diğer doğruyu da sağlayacağını hissetmişler ve sonsuz sayıda çözüm noktası olabileceğini belirtmişlerdir (CY). Yönlendirilen bu sorularla çıkarımda bulunabilmeleri için yardımcı olmaya çalışılmıştır. Sonucu yorumlayarak özetlemeleri istenmiştir.

Selin : *Birinci dereceden iki bilinmeyenli iki doğrunun grafiği çakışık ise çözüm kümeleri sonsuzdur.*

Engin : *Doğrular çakışık ise bütün noktaları ortaktır, çözüm kümesine bütün o ortak noktalar girebilir. Yani çözüm kümesi sonsuzdur.*

Hale : *Doğru grafikleri çakışık olan denklemlerin çözüm kümeleri sonsuzdur.*

Öğrenciler farklı ifadelerle elde edilen sonucu özetlemişlerdir.

Dersin ikinci kısmında, problem verilerini grafiğe grafiği matematiksel ifadelere dönüştürerek temsilden temsile geçiş yapacakları (FG) bir etkinlik yapılmıştır. Etkinliğin hedeflerinden biri dördüncü ve beşinci derslerde öğrenilen problem durumlarının (tek çözüm noktası olan, çözüm noktası olmayan ve sonsuz çözüm noktası olan doğru durumlarının) tekrar edilerek pekiştirilmesidir. Etkinliğin diğer bir hedefi ise farklı problemlere ait temsillerin eleştirel yaklaşarak değerlendirilmesi (ED) ve eldeki verileri kullanarak çıkarımlarda bulunulmasıdır (CY). Öğrenciler önceden belirlenmiş başarı açısından karma beşer kişilik beş gruba (Grup 1-5) ayrılmıştır. Başarı düzeyleri farklı öğrencilerin birbirlerinin öğrenmesine katkıda bulunacağı düşünülmüştür. Tahtaya ders planında belirtilen ve aşağıda verilen 7 farklı bağlamsal problem yansıtılmıştır.

1) İçinde tavuk ve tavşanların olduğu bir kümeste 14 baş ve 40 ayak vardır. Bu kümeste kaç tavuk kaç tavşan vardır?
2) Ali ile Ayşe'nin yaşları toplamı 18'dir. 4 yıl sonra Ali'nin yaşı Ayşe'nin yaşının 4 katı olacaktır. Ali ile Ayşe'nin şimdiki yaşlarını bulunuz.
3) Toplamları 400, farkları 80 olan iki sayı kaçtır?

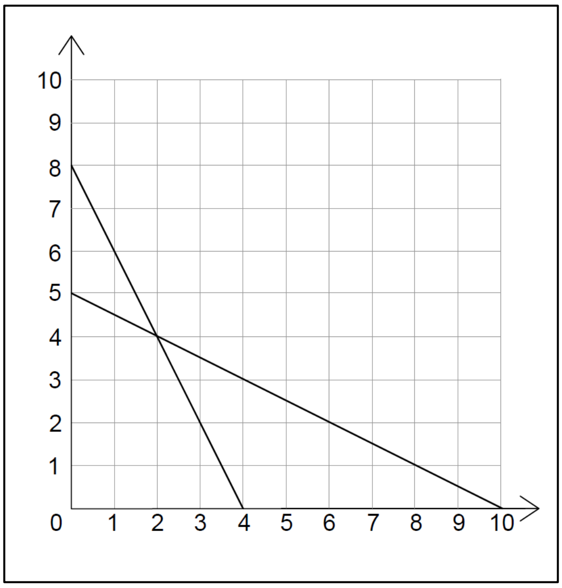
4) Elif Hanım marketten 2kg un ve 1kg şeker alarak 8 TL ödüyor. Fatma Hanım ise 1kg un ve 2kg şeker alarak 10 TL ödüyor. Buna göre un ve şekerin kilogramı kaçar liradır?
5) Bir çiftlikte toplam 20 tane tavuk ve horoz bulunmaktadır. Bu hayVanların ayaklarının toplam sayısı 30 ise tavuk ve horoz sayısı için ne söylenebilir?
6) Yusuf ve Ahmet'in yaşları toplamı 20'dir. 5 yıl sonra yaşları toplamı 30 olacağına göre Yusuf ve Ahmet'in şu anki yaşları için ne söylenebilir?
7) Mehmet aldığı 2 defter ve 4 kalem için 12 TL ödemiştir. Eğer 3 defter ve 6 kalem almış olsaydı 18 TL ödeyeceğine göre defter ve kalemin fiyatları için ne söylenebilir?

Bu problemlerden 5 tanesine ait doğru grafikleri farklı A4 kâğıtlara büyük boy çıktısı alınarak her gruba bir tane olacak şekilde dağıtılmıştır. Problem-3 ve problem-6 çeldirici olarak etkinliğe eklenmiş ve bu problemlere ait grafikler gruplara verilmemiştir. Gruplar ellerindeki grafiğin hangi probleme ait olduğunu belirleyecek (CA, FG, SK, ED) ve nedenlerini açıklayacaklardır (CY). Gruplara, grafikler dağıtıldıktan sonra 10 dakikalık düşünme ve tartışma süresi tanınmıştır.

Grupların bireysel çalışmaları ve grupların çözüme nasıl gittikleri takip edilmiştir. Grup 1-5 'e sırasıyla dördüncü, yedinci, birinci, ikinci ve beşinci probleme ait grafikler gelmiştir. Beş grupta aynı çözüm yolunu takip etmiştir. Etkinlikte verilen problemlere ait denklem grafiklerini tek tek çözmüş ve kendi gruplarına ait problemi tespit etmişlerdir.

Öğrencilerin bireysel çalışmalarından yansımalar aşağıda verilmektedir.

Birinci gruba Şekil 56'da verilen dördüncü probleme ait grafik verilmiştir.

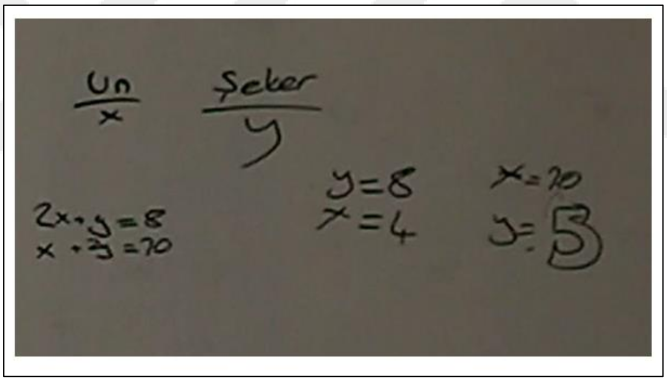


Şekil 56. Birinci gruba verilen grafik (Problem 4)

Birinci grup üyelerinden biri ile şu konuşma gerçekleşmiştir.

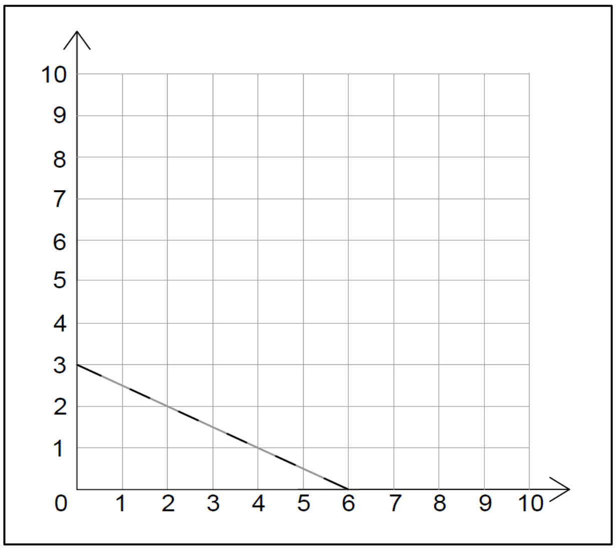
Öğretmen : *Ne yapmayı düşünüyorsunuz?*
Doğan : *Bütün problemlerin grafiğini çizerek deneyeceğim.*
Öğretmen : *Deneyerek yapacaksanız grubun her üyesi bir problemi deneyebilir. Ya da grafiğin eksenleri kestiği noktaları dikkate alarak ilerleyebilirsiniz.*

İşbirliği içinde ve istişare yaparak ilerlemeleri için yönlendirilmişlerdir. Ayrıca bütün problemlerdeki doğruların grafiklerini çizerek ilerlemek uğraştırıcı bir süreç gerektirdiğinden daha pratik ilerleyebilecekleri farklı yollara yönlendirilmişlerdir. Bu yönlendirme yapılırken “daha farklı nasıl düşünebilirsiniz”, “grafikler için ayırt edici neler vardır bu ayırt edici durumlardan ilerleyebilirsiniz” gibi dönütler verilerek nasıl devam edeceklerine kendileri karar verebilirdi. Birinci grubun grafiğine ait çözümü Şekil 57’de verilmiştir.



Şekil 57. Birinci grubun tahtadaki çözümü

Şekil 58’de verilen yedinci probleme ait grafik ikinci gruba verilmiştir.



Şekil 58. İkinci gruba verilen grafik (Problem 7)

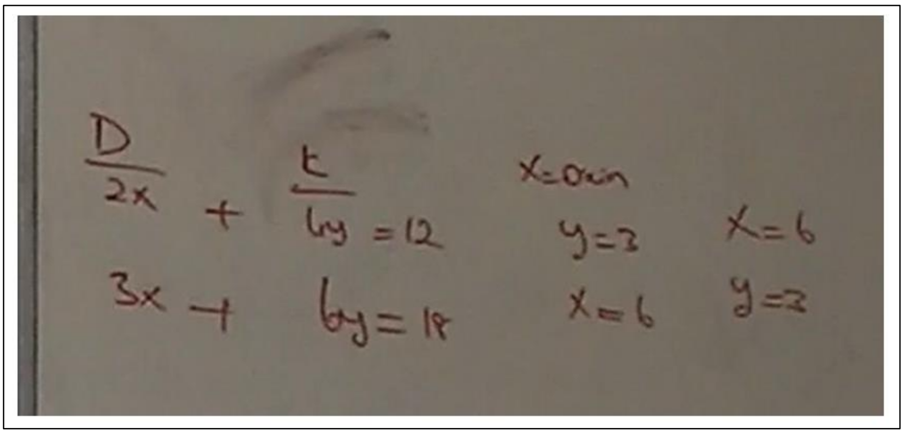
İkinci grup üyesi Gamze ile şu konuşma gerçekleşmiştir.

Gamze : *Hepsini deneyerek ilerliyoruz. Şu an beşinci sorudayız şu ana kadar bulamadık. 6. veya 7. problemden biri bizim grafiğimize aittir.*

Öğretmen : *Denerken nasıl bir yol izliyorsunuz?*

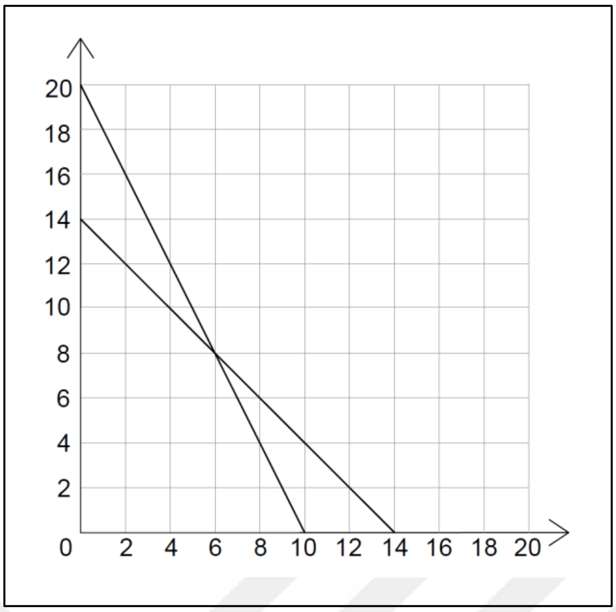
Gamze : *Bütün problemlerin denklemlerini oluşturduk ve grafiklerini çiziyoruz.*

Bu grubun ilk grup gibi zaman alıcı stratejisi onaylanarak geçilmiş ve grup üyeleri farklı bir yol belirleme hususunda teşvik edilmemiştir.Şekil 58'de ikinci grubun tahtadaki cebirsel çözümü verilmiştir.



Şekil 59. İkinci grubun tahtadaki çözümü

Üçüncü grubun grafiği Şekil 60'da verilmiştir.



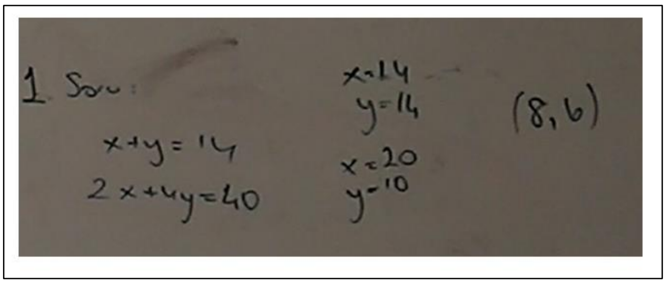
Şekil 60. Üçüncü gruba verilen grafik (Problem 1)

Bütün problemlere ait denklemleri kurdukları halde bulamadıklarını iddia eden üçüncü grup üyesi Beyza ile şu konuşma gerçekleşmiştir.

Beyza : *Bütün problemlere ait denklemleri kurduk ama bulamadık. Hiçbir probleme ait değildir.*

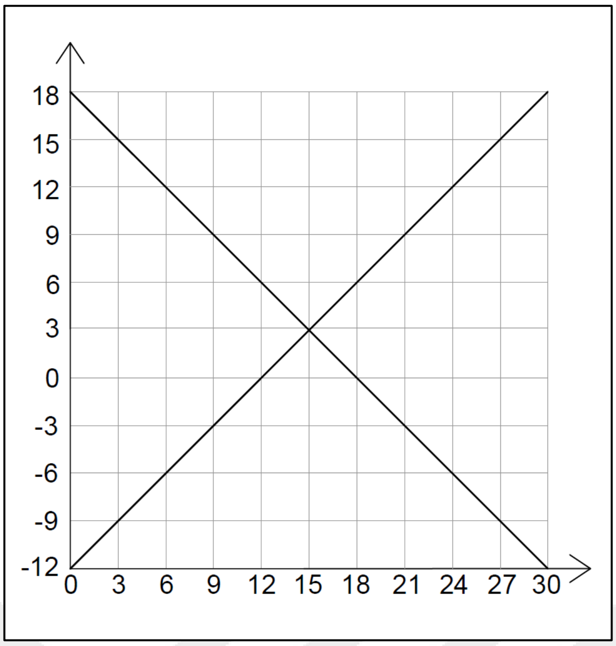
Öğretmen : *Gözden kaçırmışsınız kurduğunuz denklemler doğru ise eksenleri kestiği noktalardan ya da iki doğrunun kesiştiği noktadan bulabilirsiniz.*

Öğretmenin verdiği dönüt ile öğrencinin ve grubunun farklı düşünmesi engellenmiştir. Şekil 60'da üçüncü grubun cebirsel çözümü verilmiştir.



Şekil 61. Üçüncü grubun tahtadaki çözümü

Dördüncü gruba Şekil 62'de verilen ikinci probleme ait grafik verilmiştir.

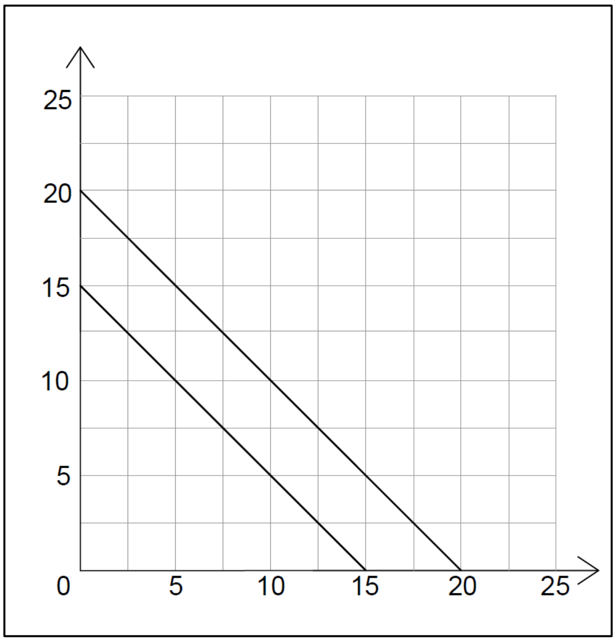


Şekil 62. Dördüncü gruba verilen grafik (Problem 2)

Öğretmen : *Nasıl ilerliyorsunuz?*

Ceyda : *İki doğrunun kesiştikleri nokta (15,3) noktasıdır. Tüm problemlere ait denklemleri oluşturarak cebirsel çözüm ile kesişim noktalarını buluyoruz.*

Şekil 63'te verilen beşinci probleme ait grafik beşinci gruba verilmiştir.



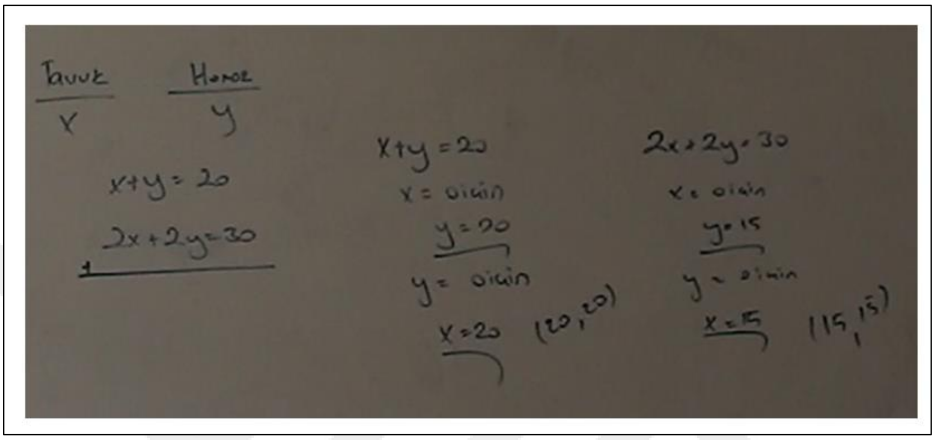
Şekil 63. Beşinci gruba verilen grafik (Problem 5)

Esra *: Beşinci probleme ait olduğunu bulduk.*

Öğretmen *: Nasıl buldunuz?*

Esra *: Tek tek deneyerek problemlere ait denklemleri kurduk, eksenleri kestikleri noktaları bulduk.*

Şekil 64’te verilen beşinci grubun tahtadaki çözümü verilmiştir.



Şekil 64. Beşinci grubun tahtadaki çözümü

Öğrenciler genellikle bütün problemleri denklemler kurup cebirsel çözümler yaparak (FG, SK) ilerlemeyi tercih etmişlerdir. Doğruların grafiklerini de çizen gruplar olmuştur. Öğretmen tavsiyesi ile doğruların eksenleri kestiği noktalardan ya da kesişim noktalarından, kesişmeme durumlarından ya da çakışık olma durumlarından devam eden gruplar da vardır. Öğretmenin yaptığı tavsiye zamansal ve işlemsel açıdan pratik olarak akıl yürütmeye yöneliktir.

Öğrencilerin çözümleri tamamlaması ile birlikte ders tamamlanmıştır. Planda belirtilen hedefler doğrultusunda yapılan yönlendirmeler ve bireysel çalışmalar ile ders sonlandırılmıştır. Ulaşılmak istenen cebirsel becerilerin çoğu öğrenciler tarafından sergilenmiştir. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri anlamında öğrencilerin zihinsel anlamlandırmalar yaparak (CA) farklı göstergeler arasında geçişler (FG) ile denklemler kurarak çözmüşlerdir (SK). Yapılan yönlendirmeler ile problemlere ve çözümlerine dair kritikler yaparak (ED) yorumlamışlardır (CY). Geçmiş derslerdeki tecrübelerinden dolayı derste pek problem yaşamamışlardır. Doğruların birbirine göre durumları ile cebirsel çözümleri arasındaki ilişkiler tekrar konuşularak ders sonlandırılmıştır.

5. TARTIŞMA

Bu çalışma cebirsel akıl yürütme ortamını destekleyen ipuçları elde etmek ve bunları yansıtmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. 2004 yılında MEB-TTKB işbirliği ile yeniden yapılandırılan ilköğretim matematik öğretimi programı ile farklı beceriler geliştirilmesi hedeflenmiştir (TTKB, 2004). Bu beceriler arasında iletişim kurma, ilişkilendirme, çıkarımda bulunma, akıl yürütme, problem çözme gibi beceriler bulunmaktadır. Özellikle akıl yürütme becerisi matematik dersleri ve cebir öğrenme alanı için önemli bir beceridir. Yenilenen matematik dersi öğretim programının ortaokul öğrencilerinde cebir başarısına ve cebirsel düşünme düzeyine etkisi inceleyen Ceyhun (2012), bu program çerçevesinde yapılan eğitimin öğrencilerin cebir başarılarına olumlu katkı yaptığını, öğrencilerin cebir başarısını arttıkça cebirsel düşünme düzeylerinin arttığı sonucuna ulaşmıştır. Yeni öğretim tekniklerin, cebir öğretimindeki eksikleri gidereceğine Dede ve Argün (2003) tarafından vurgu yapılmıştır. Cebirsel akıl yürütme becerisine odaklanılan çalışma yenilenen matematik programı çerçevesinde hazırlanmıştır. Çalışmada, öğrencilerin kendi bilgilerini yapılandırmasına, tartışmasına, sorgulamasına ve akıl yürütmesine imkanlar verilmiştir. Cebirsel akıl yürütme eylemleri soyut olduğundan, bu eylemler ilk olarak öğrenci davranışlarına yönelik olarak cebirsel akıl yürütme göstergeleri yardımıyla somutlaştırılmıştır. Bu şekilde eylemlerin rahat gözlemlenebilmesine imkan sağlanmıştır. Sekizinci sınıf müfredatının ve cebir öğrenme alanının konuları içinde yer alan doğrusal denklemler ve denklem sistemleri içinde belirlenen üç kazanıma yönelik ders planları hazırlanmıştır. Planlar, önceden geliştirilen cebirsel davranışları öğrencilere kazandırma hedefi göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur. Uygulanan planların ders videolarının analizi sonucunda hedeflenen cebirsel eylemlerin gerçekleşme durumları ve planların cebirsel eylemlerin gerçekleşme durumlarına etkisi araştırılmıştır.

Cebirsel akıl yürütme göstergelerinin ilki olan cebirsel fikirleri, düşünceleri, yaklaşımları anlamlandırma tüm planlarda ve derslerde yer almıştır. Ders akışı içinde kullanılan problemleri öğrencilerin okuyarak yorumlamasına imkânlar verilmiştir. Ayrıca, öğrenciler sürekli olarak soru sormaya teşvik edilmiş ve yönlendirici sorularla öğrenciler düşünmeye sevk edilmiştir. Yılmaz (2015) çalışmasında yazma etkinliğinin öğrencilerin cebir derslerini anlamasına ve hatırlamasına yardım ettiği vurgulanmaktadır. Bu nedenle çalışmada, ders boyunca ve özellikle problem çözümlerinde yazma eylem ve etkinliklerinden yararlanılmıştır. Videolar analiz edildiğinde öğrencilerin zihinsel anlamlandırmalar yapmak için birbirlerine ya da öğretmene sorular sormakta genellikle pasif kaldıkları gözlemlenmiştir. Bu durum öğrencilerin cebirsel olarak bir sonraki davranışlara ulaşmalarını zorlaştırmıştır. Öğrencilerin iletişim kurmakta zorlanmalarının temel sebebi olarak video ile ders anlatımına aşina olmamaları düşünülmüştür. Bu sıkıntının önüne geçmek için araştırma kapsamı dışındaki bazı derslerde de video kayıtları kullanılabilirdi. Öğretmen, öğrencilerin soru sormada yetersiz kaldığı durumlarda öğrencilerin anlamlandırma süreçlerine yardımcı olmak için soruları kendisi sormuştur. Örneğin; birinci ders planının giriş sorusu olan *y=2x-1* doğrusuna ait tabloyu öğrencilerin sütunlar arasında ilişki kurarak doldurması beklenmiştir. Öğrenciler tabloyu doldurmada zorluk yaşamlarına rağmen kendilerinden beklenen soruları sormamaları üzerine "tabloda neler var, neler isteniyor, tabloda hangi sütunlar var ya da x ile *y* arasında nasıl bir ilişki vardır" soruları öğretmen tarafından öğrencilere yönlendirilerek öğrencilerin düşünmeleri ve tabloyu nasıl doldurabilecekleri konusunda kendi yaklaşımlarını oluşturmaları konusunda onlara imkan sunulmuştur. Bu gösterge için elde edilen öğrencilerin soru sormakta ve kendilerini ifade etmekte zorluk yaşamaları tüm matematik derslerine genellenebilecek bir durumdur. Daha çok sorunun sorulduğu bir sınıfta öğrencilerin anlatılan konuyu daha iyi anlamasına paralel olarak akademik başarının da arttığı Saylık, Memduhoğlu ve Yayla (2017) tarafından bildirilmiştir. Bu sonucun bir yansıması olarak yetersiz soru sorulmasının matematik derslerindeki başarının düşük olmasının bir nedeni olduğu söylenebilir.

Öğrenciler, planların bağlantı ve ilişki kurma cebirsel akıl yürütme göstergesine yönelik hazırlanan bölümlerinde fazla problem yaşamamışlardır. Birinci planda yer alan ölçülü kapla ilgili problem öğrencilerin bağlantı kurma ve ilişkileri keşfetmelerine adına sorulan ilk soruyu içermektedir. Öğrenciler ilk kez genelleme yapacaklarında zorlanabilecekleri plan hazırlanırken öngörülmüştür. Bu durumun önüne geçmek adına, planlardaki diğer problemlerde olduğu gibi bu problemde de öğrencilerin veriler arasında bağlantı ve ilişki kurmasına yardımcı olmak adına kademeli yönlendirmeler yapılmıştır. Problemde öncelikle 9. ve 16. saniyelerde ölçülü kapta birikecek su miktarını araştırdıkları soru sorulmuş ve öğrenciler kendilerine öğretmen tarafından yönlendirilen sorular ve sınıfta geçen diyaloglarla genelleme yapmak adına tecrübe kazanmışlardır. Geneleme yapmalarına yardımcı olmak için problemde olmamasına karşın sözlü olarak öğrencilere 40. ve 100 saniyelerde kapta biriken su miktarı sorularak öğrencilere genelleme yapmaya hazır hale getirilmişlerdir. Genellemeye kademeli geçişe başka bir örnek ise birinci planın ikinci problemindeki havuzda kalan su miktarına yönelik soru verilebilir. Bu soruda, havuzda kalan su miktarı için genelleme yapmadan önce öğrencilerden havuzdan çıkan su miktarını belirlemeleri istenmiş. Havuzdan çıkan suyun havuzda kalan suyla olan ilişkisine yönelik öğretmen tarafından yönlendirici sorular sorulduktan sonra öğrencilerden herhangi bir andan havuzda kalan su miktarını bulmaları beklenmiştir. Bazı durumlarda öğretmenin süre probleminden dolayı aceleci davranması öğrencilerin genellemeye kendi çabalarıyla ulaşmasına engel olmuştur. İlk derste yer alan *y=2x-1* denklemine ait doğru oluşturulduktan sonra doğrunun oluşturulması aşamasında kaç nokta kullanıldığı ve doğruyu oluşturmak için kaç noktanın yeterli olacağı soruları yönlendirilmiştir. Bir kaç farklı cevaptan sonra iki noktanın bulunmasının yeterli olacağı fikrine amaçlı olarak “rastgele iki nokta yeterli olmaz mı” sorusu ile öğrenciler ikna edilmişlerdir. Böylece öğrencilerin bağımsız düşüncelerine müdahalede bulunulmuştur. Bu soru üzerine iki noktanın yeterli olacağını belirten bir öğrencinin cevabı sorgulanmadan derse devam edilmiştir. Cevabı veren öğrencinin bunu ne düşünerek söylediği araştırılmadan cevap doğru olarak kabul edilmiştir. Diğer öğrenciler için bu cevabın ne ifade ettiği anlaşılıp anlaşılmadığı da irdelenmemiştir. Bu duruma başka bir örnek ikinci dersten verilebilir. Problemde, başlangıçta içinde 100 ml su bulunan bir kaba saniyede 50 ml su akmasına ilişkin sorular sorulmaktadır. Problemdeki soruların birinde, öğrencilerden kaptaki su miktarının zamana göre değişimine ait tabloyu doldurarak zaman ile hacim arasındaki ilişkiyi belirtmeleri istenmiştir. Birkaç öğrenci cevabının ardından hızlı davranılmış ve öğrencilerin kendi genellemelerini yapmalarına yeterli fırsat tanınmadan genelleme öğretmen tarafından yapılmıştır. Öğretmenin ders planlarındaki içeriği tamamlayabilmek için öğrenci cevaplarına müdahale etmesini engellemek adına plan yeniden düzenlenerek içerik azaltılabilir. Böylece, öğretmenin karşılaştığı süre problemi aşılarak öğrencilerin kendilerini daha fazla ifade etmesine imkan verilebilir. Bu çalışma kapsamında elde edilen bulgular göstermektedir ki öğrencilerin bakış açılarını genişletmek amacıyla yönlendirici sorular sormak ve genellemeyi doğrudan istemek yerine öğrencilerin genellemeye kendi çabalarıyla kademeli olarak ulaşmasını sağlamak bağlantı ve ilişki kurma davranışına yönelik zorlukları önemli ölçüde azalmaktadır.

Öğrenciler cebirsel akıl yürütme eylemleri kapsamında zaman zaman farklı gösterimler arası geçişler yapmışlardır. Planlardaki problemler matematiksel bilgi, denklem, tablo ve grafikler arası dönüşümleri içeren pek çok problemler içermektedir. Temsilden temsile geçişin karşılaşılan ilk problemlerinde sıkıntı yaşayan öğrenciler olmuştur. Fakat benzer problemlerle karşılaşıldıkça önceki tecrübelerinin yardımıyla geçişleri daha rahat yapmışlardır. Örneğin, denklemden tabloya geçiş içeren ilk planın giriş bölümündeki problemde *y=2x-1* denklemine ilişkin tablonun doldurulması öğrencilerden istenmiştir. Öğrencilerin zorluk yaşaması nedeniyle öğretmen tarafından yönlendirici sorular sorulmuş ve karşılaşılan zorluklar sınıf içi diyalogla aşılmıştır. Matematiksel bilgiden tabloya geçişi içeren ilk soru yine birinci planda yer alan ölçülü kaptaki su miktarı ile ilgili sorudur. Denklemden tabloya geçişte olduğu gibi öğrencilere “Tablodaki sıfırıncı saniye neyi ifade ediyor burada?”, ”Başlangıçta ne kadar su vardı?” ve “Birinci saniyede ne kadar su oldu?” gibi yönlendirici sorular sorularak öğrencileri geçişi rahat yapmaların yardımcı olmaya çalışılmıştır. Benzer bir geçişi dördüncü kez içeren ikinci planın davetiye sorusunda ise yönlendirici sorulara gerek kalmadan pek çok öğrenci problemdeki matematiksel bilgiden yola çıkarak ilgili tabloyu kolaylıkla doldurmuştur. İlk iki planda matematiksel bilgi genellikle tablolara dönüştürülürken sonraki üç planda ise daha çok denklemlerden grafiklere geçişi içermektedir. Diğer bir ifadeyle öğrenciler planların uygulandığı derslerde benzer geçişleri tekrar etme imkanına sahip olmuşlar ve edindikleri bilgilerin pekişmesiyle başlangıçta yaşadıkları gösterimler arası geçiş sorunları aşmışlardır. Fakat, bazı durumlarda öğretmenin süre sorununu düşünerek hızlı davranması öğrencilerin bireysel keşifler yapmasını engellemiştir. Örneğin, ikinci dersteki etkinlikte gruplardan birinden öğrenci –$y+2x=0$ doğrusuna ait grafiği bulamadıklarını belirtmiştir. Öğrenci yönlendirilmek adına denklemde hangi değişkenlerin olduğuna dikkat çekilmiş ve öğrenciler "sabit terim olmadan sadece değişkenlerin olduğu doğrular orijinden geçen doğrulardır" fikrine amaçlı olarak yönlendirilmiştir. Öğrencinin verileni cevaptan tatmin olup olmadığı yoklanmamıştır. Öğrenciler gösterimler arası geçişle ilk kez karşılaştıklarında sıkıntı yaşasalar bile yeterli yönlendirmeyle bu sorunları kendileri aşabildikleri ve benzer geçişleri sonraki karşılaşmalarında çok daha rahat yapabildikleri görülmüştür.

Ders akışı içinde ulaşılan genellemelerin cebirsel ifadelerle gösterilmesi ve bazı problemlerde ise soruya ilişkin denklemlerin kurularak çözülmesi öğrencilerden istenmiştir. Cebirsel akıl yürütme göstergeleri arasında öğrencilerin en çok sorun yaşadığı gösterge bu eylemleri içeren yani sembolleri anlamlı kullanma olmuştur. Diğer bir ifadeyle öğrenciler en çok ulaştıkları genellemeleri sembollerle ifade ederken, denklemlerin cebirsel çözümünü yaparken ve problemlerdeki matematiksel bilgiyi denklemlere dönüştürürken zorlanmışlardır. Benzer şekilde Capraro ve Joffrion (2006) yaptıkları çalışmada öğrencilerin yedinci ve sekizinci sınıfta bile kavramsal ve işlemsel olarak matematiksel denklemlere geçmeye hazır olmadıklarını görmüşlerdir. Genelleme yapılması gereken problemlerde daha önceden de belirtildiği gibi öğrenciler kademeli olarak genellemeye yönlendirilmiştir. Fakat öğrenciler ulaştıkları genellemeyi sembollerle gösterirken tekrardan zorluk yaşamışlardır. Diğer zorluk yaşanan durumlarda olduğu gibi yönlendirici sorularla bu sorunlara çözüm aranmıştır. Fakat diğer zorluklardan farklı olarak tekrar benzer bir durumla karşılaşıldığında pek çok öğrencinin yaşadığı zorlukta belirgin bir azalma gözlenmemiştir. Planlarda öğrencilerin denklem kurarak çözüm yapması beklenen pek çok durumda öğrenciler aritmetik yolla çözümü tercih etmişlerdir. Örneğin, ikinci dersteki davetiye probleminde yer alan 500 TL ile her bir seçenekte kaçar davetiye alınabileceğine dair soruda, denklem kurarak cebirsel çözümün yapılmasının beklenildiği önceki sorularda olduğu gibi öğrenciler aritmetik yöntemlerle çözüm yapmayı tercih etmişlerdir. Bu durum cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından değerlendirildiğinde öğrencileri sembolleri anlamlı kullanmada yetersiz kalmışlardır. Her ne kadar öğrenciler aritmetik çözümü tercih etseler de öğrencilerden cebirsel çözüm de yapmaları özellikle istenebilirdi. Matematiksel bilginin denklemlere dönüştürülmesi gereken pek çok bağlamsal problemde öğrenciler denklem kurma aşamasında problem yaşamışlardır. Örneğin, üçüncü derste kullanılan Yusuf'un kumbarasında biriktiği parayla ilgili problemde öğrencilerden iki bilinmeyenli iki denklem kurmaları beklenmektedir. Sembolleri kullanmada zorluk yaşayan öğrenciler denklemleri kurarken de zorlanmışlardır. Karşılaştıkları bu probleme kadar sadece bir bilinmeyenli denklemlerle uğraşan öğrenciler problemde yer alan iki değişkeni anlamada zorlanmışlardır. Öğrencilerden bir kısmı eski bilgilerinden yola çıkarak problemi tek bilinmeyen kullanarak denkleme dönüştürmüştür. Böyle yapan öğrenciler farkında olmadan yerine koyma yöntemiyle çözüm yapmışlardır. Her ne kadar bu şekilde doğru sonuca ulaşılabilecek olsa bile öğrencilerden beklenen cebirsel davranış bilinçli olarak eyleme dökülmediğinden öğrencilere öncelikle problemdeki iki farklı değişken "Kumbarada 5 ve 10 TL var. Yani iki farklı para grubu var" gibi yönlendirici açıklamalarla sezdirilmiştir. Banknotların toplamı için yazılan $x+y=30$ denkleminden sonra öğrencilerden bir kısmı kumbaradaki toplam parayla ilgili denklemde de sıkıntı yaşamışlardır. Bir önceki denkleme benzer şekilde toplam para miktarı içinde $x+y=210$ yazan öğrenciler olmuştur. "3 tane 5 TL varsa toplam kaç TL olur?", "x tane 5 TL varsa ne kadar para olur?" ve "y tane 10 TL varsa ne kadar para olur?" gibi yönlendirici sorularla sorunlar çözülmeye çalışılmıştır. Elde edilen denklemlerin çözümü sırasında öğrenciler denklemlerde yer alan aynı gösterimli sembollerin aynı değişkenler olduğu ve aynı değerleri alacakları konusunda karmaşa yaşamışlardır. Benzer sonucu Erdem ve Aktaş'ın (2018) yedinci sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmada, öğrencilerin yoğun olarak sahip olduğu kavram yanılgılarının cebirdeki harflerin değişik kullanımlarını anlayamamaları, harflerin sadece rakamlardan oluşacağını düşünmeleri, her harfin sadece bir değere sahip olduğuna inanmaları olduğunu belirtmişlerdir. İlerleyen derslerde problemlere ilişkin denklemleri kurma ve çözmede sorunlar azalsa öğrenciler bu konuda sıkıntı yaşamaya devam etmişlerdir. Öğrencilerin sembolleri anlamlı kullanmada karşılaştıkları bu problemler yönlendirmeler yapılarak ders anında aşılmaya çalışılsa bile bu durumun temel kaynağı öğrencilerin geçmiş cebirsel öğrenme yaşantılarındaki yetersizliklerdir. Bu nedenle öğrenciler öğretim yaşantılarının en başından itibaren uygun cebirsel yaşantıları tecrübe etmelidirler.

Öğrencilerin eleştirel düşünerek yorumlar ve çıkarımlar yapmaları hususunda yetersiz kaldığı ve değerlendirmeler yaparak yorum yapan öğrenci sayısının az olduğu gözlemlenmiştir. Ders planları içinde pek çok kez öğrencileri eleştirel düşünmeye teşvik edecek imkânlar sunulmuştur. Örneğin birinci ders planında ilk soruyla ilgili doğru grafiği oluşturulduktan sonra sorulan "kapta hiç su olmasaydı grafik değişir miydi?", ikinci dersin davetiye probleminde yer alan "kaç davetiye için iki seçenekte de aynı para ödenir?",

”bulunan bu davetiye sayısında az ya da çok alsak tercihimiz nasıl değişmeli?” ve son ders planında sorulan “cebirsel çözümden elde edilen eşitsizlik durumu ile denklemler için elde edilen paralel doğrular ne ifade etmektedir” gibi sorular bu amaca hizmet etmektedir. Öğrenciler, planlarda yer alan bu ve benzeri sorularla eleştirel düşünmeye, eldeki bilgileri kullanarak yorum yapmaya ve çıkarımda bulunmaya yönlendirilmişlerdir. Öğrencilerden beklenen yorumlar ve dönütler alınamayınca öğrencilere düşünmelerini kolaylaştıracak yeni bilgiler verilmiştir. Beşinci planın ikinci probleminde öğrencilere cebirsel çözümünden eşitlik ve grafik çiziminden çakışık doğrular elde edilen denklemler verilmiştir. Öğrencilerden bu durumu değerlendirmeleri istendiğinde ise bilgiler yanlış yorumlanmıştır. Öğrenciler bir önceki problemde yer alan eşitsizlik ve paralel doğrular durumu için yapılan değerlendirmeleri bu problem içinde aynen yapmış ve çözüm kümesinin boş küme olduğu pek çok öğrenci tarafından ifade edilmiştir. Öğretmen tarafından çakışık doğrular üzerinde birkaç nokta işaretlenerek öğrencilere bu noktaların denklemleri sağlayıp sağlamadıkları sorulmuştur. Böylece birden fazla noktanın bu problemin çözümü olabileceği öğrencilere hissettirilmiş ve verilen yeni bilgiyle öğrencilerin doğru değerlendirmelere ulaşması hedeflenmiştir. Öğrencilerin eleştirel düşünme, değerlendirme ve çıkarımda bulunması için daha fazla cesaretlendirilmeye ihtiyaç duydukları görülmüştür. Öğrencilerin düşünmekte zorlandıkları veya yanlış çıkarımlarda bulundukları kısımlarda öğretmen sorular ya da yeni bilgilerle araya girerek öğrencileri yönlendirmelidir. Her ne kadar ders içerinde yapılacak müdahalelerle bu göstergelere yönelik sorunlar azaltılabilse de beklenen davranışlar ancak öğrencilerin eğitim hayatları boyunca sorgulayıcı bir zihinle yetiştirilmesiyle mümkündür.

Ders planları bir bütün olarak değerlendirildiğinde elde edilen bulgulardan biri öğrencilerin cebirsel akıl yürütme eylemlerini gündelik yaşamla ilişkilendirmekte zorlandıklarıdır. Örneğin, birinci ders planında yer alan havuz problemiyle ilgili genelleme yapılırken havuzda kalan su miktarını *40x-2000* olarak, yani boşalan sudan dolu havuzdaki su miktarını çıkararak yapan öğrenciler olmuştur. Hâlbuki buradaki durumu gündelik yaşamla ilişkili olarak düşünebilselerdi havuzun daha fazla kapasiteye sahip olduğunu ve boşalan suyun dolu havuzdan geldiğini idrak ederek *2000-40x* denklemine ulaşabileceklerdi. Sorun yaşayan öğrencilere yardımcı olmak adına öğrencilere “boşalan su nereden geliyor, başlangıçta havuzda ne kadar su var” soruları yönlendirilmiş ve öğrencilerin doğru genellemeye ulaşmaları sağlanmıştır. Kaya ve Keşan (2017) yaptıkları çalışmada cebirsel düşünmenin sadece matematik derslerinde kullanılmadığını, yaşamın her alanına yayılan zihinsel bir süreç olmasına rağmen literatür araştırması sonucunda pek çok öğrencinin cebirsel akıl yürütmede ve cebiri günlük yaşamla ilişkilendirmekte problem yaşadığını vurgulamışlardır. Bu çalışmada, destekleyici ve yönlendirici bir ders sınıf ortamında öğrencilerin cebiri günlük yaşamla ilişkilendirmeyi daha kolay ve anlamlandırarak yaptıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca bu ilişkilendirmenin somutlaştırma eylemlerini desteklediği görülmüştür.

Cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasını zorlaştıran faktörler, konuyla ilgili literatür çalışmalarından faydalanılarak Dede ve Argün (2003) tarafından yapılan çalışmada belirtilmiştir. Yaptıkları çalışmada cebirsel akıl yürütme yetersizliğinin ana faktörleri cebirin yapısı, öğrencilerin zihinsel gelişimleri, hazırbulunuşluk düzeyleri ve cebir öğretimindeki eksiklikler olarak belirtilmiştir. Dede ve Argün'ün (2003) çalışmalarındaki sonuçlar bu çalışmanın bulgularıyla da paralellik göstermektedir. Cebir öğrenmeyi ve öğretmeyi yetersiz kılan durumların cebirin soyut yapısı, öğrencilerin geçmiş cebirsel öğrenme yaşantılarının azlığı ve cebir öğretim ortamlarının yetersizliği olduğu görülmüştür. Özellikle sembol kullanımının cebirin soyut yapısı içinde öğrencilerin en çok zorlandığı ve cebirin anlaşılmasını engelleyen en önemli nedenlerden biri olduğu yine bu çalışmanın bulgularından biridir. Bike-Kalkan (2014) çalışmasında cebir öğrenme alanında yer alan ve bu çalışma için seçilen konulara yakınlık gösteren doğrusal denklemler ve eğim konularına ilişkin sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapılarını araştırmıştır. Bike-Kalkan (2014) çalışmasında, öğrencilerin doğrusal ilişki, eğim ve doğru grafiği konularını öğrenmekte zorluk yaşadıklarını, kavram yanılgılarına sahip olduklarını, benimsedikleri çoğu kavramın ezber bilgi olduğunu gözlemlemiştir. Literatürdeki benzer çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile bu çalışmadan elde edilen sonuçlar öğrencilerin cebir öğrenmekte ve anlamakta, cebirsel akıl yürütmede zorlandıklarını teyit etmektedir.

Sınıf için etkileşimler incelendiğinde, geri bildirim verme noktasında yani cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından zihinsel anlamlandırma yapmalarına katkıda bulunma konusunda eksiklikler yaşandığı görülmüştür. Araştırmacı her ne kadar öğrenci merkezli, öğrenciyi cesaretlendirici, akıl yürütmeye teşvik edici, esnek bir ders akışı yürütmeye çalışsa da görmezden gelme, dikkat etmeme ve farkında olmama nedenleri ile öğrencileri yönlendirmek için dönütler verme konusunda yetersiz kaldığı durumlar olmuştur. Örneğin, ilk derste yer alan $y=2x-1$ doğrusuna ait (x,y) sıralı ikililerinin bulunmasının ardından noktaların koordinat sisteminde gösterilmesi ve gösterilen noktaların birleştirilmesi ile ne elde edileceği öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerden birinden "kesen doğru" cevabının alınmasıyla yapılan diyalog sonlanmış ve öğrencinin cevabı sorgulanmamıştır. "Kesen doğru ne demek", "bu doğru nereyi keser", "ne demek istedin" gibi sorular sorularak öğrencinin fikrini daha fazla açmasına ve arkadaşları tarafından da net olarak anlaşılmasına imkan sağlanmamıştır Ayrıca gerçekleşmeyen sorgulamalardan dolayı öğrencinin bu cevapla ne ifade ettiği ya da bu konuda kavram yanılgısına sahip olup olmadığı tam olarak anlaşılamamıştır. Öz (2017) çalışmasında, öğretmenlerin sınıflardaki davranışlarının cebir alanında matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirildiğinde, öğretmenlerin öğrencilere zaman zaman çeşitli fırsatlar sunmasına rağmen cebirsel akıl yürütmeyi destekleyecek sınırlı imkânlar sağladıkları sonucuna varmıştır. Bu çalışmaya ait video analizleri neticesinde de yetersiz yönlendirme ve sorgulama gibi nedenlerle öğretmenin bazı durumlarda öğrencilerin akıl yürütme imkanını sınırladığı gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin zihinsel anlamlandırma, bağlantı ve ilişki kurma, farklı gösterimleri kullanma konularında genel anlamda başarılı oldukları gözlemlenmiştir. Eleştirel düşünerek değerlendirme yapma ve çıkarımda bulunma hususunda desteklenmeye ihtiyaçları olduğu ve bireysel karar vermekte zorlandıkları gözlemlenmiştir. En fazla problemi sembolleri anlamlı kullanma konusunda yaşamışlardır. Aritmetik işlemlere bağlı kalmayı tercih ederek cebirsel sembollerin soyut yapısı ile uğraşmamayı tercih etmişlerdir. Öğrencilerin sembolleri kullanırken yaşadıkları önyargılarını ve problemlerini ortadan kaldırabilmeleri için geçmişteki cebirsel öğrenme yaşantıları daha verimli ve kaliteli olmalıdır. Bu amaçla öğrencilere ilkokul seviyesinde örüntüler ile başlayan cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi amacıyla daha geniş imkanlar sunulmalıdır. Öğrenci merkezli, esnek ortamların hem öğrencinin bilişsel hem de duyuşsal becerilerine iyi geldiği görülmüştür. Derste öğrencilerin aktif olduğu, kendi bilgilerini oluşturma fırsatı yakaladıkları, fikir ürettikleri ve fikirlerini sorguladıkları görülmüş ve böyle bir ortamda öğrencilerin derse olan ilgi ve katılımı artmıştır.

Bu çalışmada veri toplama yöntemi olarak eylem araştırması yöntemi kullanılmış ve derslere ait video kayıtları da uygulama sonrasında ders analiz çatısı kullanılarak irdelenmiştir. Video kayıtların analizi sırasında öğrenci düşünmesine ve öğrenmesine odaklanılmıştır. Ancak bulguların analizi esnasında video kayıtların mülakatlar ile desteklenmesi durumunda daha etkili sonuçlar elde edilebileceği fark edilmiştir. Çünkü videoda gözlenen bazı öğrenci davranışlarının nedeni tam olarak anlaşılamamıştır. Zaman problemi nedeniyle sınıf ortamında bazı öğrenci fikirlerinin kaybolduğu ve analiz edilmediği görülmüştür. Örneğin ilk planın ikinci örneğinde ölçülü kapta başlangıçta su olmasaydı grafikte değişiklik olup olmayacağını düşünmeleri istendiğinde grafiğin değişmeyeceğini ya da 50'den başlayacağını savunanlar olmuştur. Bu öğrencilerin neden böyle düşündükleri araştırılmamıştır. Öğrenciler ile mülakat yapılması imkanı olsaydı öğrenci düşünceleri daha iyi analiz edilebilirdi. Bu araştırma ile video kayıtlar kullanılarak gerçekleştirilen eylem araştırmasının mülakat ile desteklenmesi durumunda verilerin daha iyi analiz edileceği sonucuna ulaşılmıştır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen ortamdan yansımalar yapmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırma bu amaca yönelik resmi bir ortaokulun sekizinci sınıfında öğrenim gören öğrencilerle yürütülmüştür. Yürütülen çalışma ders analizi çerçevesinde analiz edilmiş ve değerlendirilerek yansımalar yapılmıştır. Çalışmanın bu bölümünde elde edilen bulgular ışığında ulaşılan sonuç ve önerilere yer verilmektedir.

6. 1. Sonuçlar

Çalışma kapsamında geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergelerinin öğrenci davranışına dönük olması sınıf ortamında cebirsel eylemlerin gözlemlenebilmesine ve öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerinin takip edilebilmesine imkan sağlamıştır. Ayrıca, göstergeler planların uygulama sürecinde karşılaşılan cebirsel akıl yürütme eylemlerinin tamamını kapsamıştır.

Uygulama öncesinde geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergelerine hizmet edecek şekilde tasarlanan ders planlarının uygulanması ile öğrencilerin cebirsel düşünme durumlarına katkıda bulunulduğu ortaya konulmuştur. Hazırlanan ders planları öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini genel anlamda desteklemiştir.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergeleri ışığında düşünüldüğünde, öğrencilerin cebirsel fikirleri, düşünceleri, yaklaşımları anlamlandırma da yetersiz kaldıkları görülmüştür. Öğrencilerin kendi aralarında ve öğretmenleriyle iletişim kurmada pasif kalmışlar ve yeterli soru sormamışlardır. Öğrencilerin sonraki cebirsel akıl yürütme eylemlerinde ve genelde de cebir derslerinde problemler yaşamasının bir nedeninde bu cebirsel akıl yürütme göstergesinde yetersiz kalınması olduğu sonucu varılmıştır.

Öğrencilerden genellemeye ulaşmalarını doğrudan beklemek yerine farklı bakış açıları kazandıracak yönlendirici sorular sormak ve öğrencilerin genellemeye kendi çabalarıyla kademeli olarak ulaşmasını sağlamak bağlantı ve ilişki kurma davranışına yönelik zorlukları önemli ölçüde azalmaktadır.

Öğrenciler temsiller arası geçiş yapacakları durumlarla ilk defa karşılaştıklarında sıkıntı yaşasalar bile yeterli yönlendirmeyle bu sorunları kendileri aşabildikleri ve benzer geçişleri sonraki karşılaşmalarında çok daha rahat yapabildikleri görülmüştür.

Öğrencilerin cebirsel akıl yürütme göstergelerinin en fazla sembolleri anlamlı kullanma basamağında problem yaşadıkları değerlendirmesi yapılmıştır. Karşılaşılan problemler yönlendirmeler yapılarak ders anında aşılmaya çalışılsa bile bu durumun temel kaynağı öğrencilerin geçmiş cebirsel öğrenme yaşantılarındaki yetersizliklerdir.

Öğrencilerin eleştirel düşünme, eldeki verileri değerlendirme ve bunlardan çıkarımda bulunma davranışlarında eksiklikler olduğu ve ders içinde cesaretlendirilmeleri gerektiği sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin bu davranışlarda yetersiz kaldığı durumlarda da öğretmenin öğrencilere sorular sorarak veya yeni bilgiler sunarak düşünmeye sevk etmesi öğrencilerin karşılaştığı sorunları azaltmaya yardımcı olduğu düşünülmüştür.

Öğrencilerin desteklendikleri ve yönlendirildikleri ortamlarda cebiri daha kolay anladıkları ve anlamlandırarak günlük yaşamla ilişkilendirdikleri kanaatine varılmıştır. Ayrıca bu ilişkilendirmenin somutlaştırma eylemlerini desteklediği görülmüştür.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar öğrencilerin cebir öğrenmekte ve anlamakta, cebirsel akıl yürütmede zorlandıklarını teyit etmektedir. Bu çalışma öğretimi ve öğreniminin zor olduğu bilinen cebirin güç bir öğrenme alanı olduğunu bir kez daha göstermiştir. Öğrencilerin cebirsel konularda zorlandıkları ve kavram yanılgıları yaşadıkları tespit edilmiştir.

Bu çalışma, derste karşılaşılan güçlüklerin temel nedenleri üzerine düşünme fırsatı sunmuştur. Bu nedenlerin ortam, öğrenci, öğretmen kaynaklı olabileceği gibi öğretimsel stratejiler olabileceği de görülmüştür. Çalışmanın amacı gereği özellikle ortama ve öğretimsel etkinliklere odaklanılmıştır. Çalışma sonucunda, uygun ortam ve öğretim etkinlikleri ile cebirsel akıl yürütme etkinliklerinin desteklenebileceği ve geliştirilebileceği ortaya konulmuştur.

Çalışmanın ana odaklarından olmasa da dersin öğrenci merkezli, sorgulamaya dönük ve keşfetmeye dayalı işlenmesi sadece bilişsel değil duyuşsal becerilerini de olumlu etkilemiştir. Dersler öğrencilerin ilgisini çekmiş, dikkat toplamalarına yardımcı olmuş ve motivasyonu sağlamıştır. Dolayısıyla, derslerin öğrenci merkezli, farklı öğretim tekniklerinin işe koşulduğu ve düşünme odaklı bir forma dönüşmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmenin ders videolarını analiz etmesi, öğretimini değerlendirmesine, öğrenci düşünmesine odaklanmasına, öğretim adına güçlü ve zayıf noktaları tespit etmesine ve güçlü olanları arttırıp güçsüz olanları geliştirmesine, yansımalar yaparak tecrübesini genişletmesine imkân sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca video kayıtların mülakatlar ile desteklenmesi ile verilerin daha iyi analiz edilebileceği kanaatine varılmıştır.

Yetersiz yönlendirme ve yetersiz sorgulama gibi bazı öğretmen davranışlarının öğrencilerin akıl yürütme davranışlarını sınırladığı sonucuna ulaşılmıştır.

6. 1. Öneriler

Araştırmada ulaşılan sonuçlar göz önünde bulundurularak matematik öğretmenlerine, araştırmacılara ve program geliştiricilere öneriler bu bölümde verilmektedir.

6. 1. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Cebir öğrenme alanı için geliştirilecek ders planlarında bu çalışmada geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergeleri çerçeve olarak kullanılabilir.

Öğrenciler zihinsel anlamlandırmalar yapmak için çaba harcamada ve iletişim kurmada cesaretlendirilmelidirler.

Öğrencilerden genelleme becerisine ulaşmaları beklendiğinde, öğrencilerin genellemeye doğrudan ulaşmasını beklemek yerine yönlendirici sorular ile kademeli olarak ilerlemelerine imkân sunulmalıdır.

Öğrenciler farklı gösterimleri birbirine dönüştürmede aşama kaydedebilmeleri adına benzer pekiştirici örnek durumlarla karşılaşmalıdırlar.

Öğrenciler öğretim yaşantılarının en başından itibaren uygun cebirsel yaşantıları tecrübe etmelidirler. Öğrencilerin sembolleri kullanırken yaşadıkları önyargılarını ve problemlerini ortadan kaldırabilmeleri için ve eleştirel değerlendirmeler yapabilmeleri adına geçmişteki cebirsel öğrenme yaşantıları daha verimli ve kaliteli olmalıdır. Ayrıca öğrencilere ilkokul seviyesinde örüntüler ile başlayan cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi amacıyla daha geniş imkanlar sunulmalıdır Öğrenciler eğitim hayatlarının başından itibaren sorgulayıcı zihniyetle yetiştirilmelidir. Öğrencilerin cebiri günlük yaşamla ilişkilendirirken desteklenmeli ve yönlendirilmelidirler.

Çalışma esnasında verileri çözümlerken kullanılan ders analizi öğretmenlerin mesleki birikim ve yeterliliklerine pozitif katkı sunacağı için her bir öğretmenin lisans dönemindeki öğretmen adaylığı sürecinden başlayarak mesleğe dair uygulamaların içine dâhil edilmelidir. Kendi öğretim süreçlerini analiz eden öğretmenler bir araya gelerek fikir alış verişinde bulunabilir ve tecrübelerini paylaşabilirler. Yüz yüze ya da imkânlar çerçevesinde sosyal platformlarda paylaşımlar ile öğretmenlerin kendilerini geliştirmesine imkânlar verilebilir.

Genelde akıl yürütme eylemlerinin özelde cebirsel akıl yürütme becerilerinin gelişebilmesi için öğrenci merkezli, öğrencilerin matematik ile ilgili olumsuz düşüncelerini ortadan kaldıracak, inançlarını güçlendirecek, esnek ve sınıf içi etkinliklerin sonuca değil sürece odaklandığı ortamlar oluşturulmalıdır.

Sadece matematik ile sınırlandırılmaması gereken akıl yürütme eylemleri tüm eğitim uygulamalarına yansımalıdır. Akıl yürütme tecrübesi edinmeleri için öğrenciler ilk eğitim dönemlerinden itibaren desteklenmelidir.

Öğretmenlerin akıl yürütmeyi teşvik edebilmesi için öğrencilere hazır algoritmalar kullanmayı öğretmeleri yerine zihinsel faaliyetler sergileyecekleri ortamlar sunmayı öğrenmesi gerekir. Öğretmenler bu konuda desteklenmeli ve eğitimlere tabi tutulmalıdır.

Program geliştiriciler bu çalışma için kullanılan ders planlarını ve araştırma sonuçlarını göz önünde bulundurarak yeni ders programlarında da hedeflenen ancak gerçek manada derslere yansımayan akıl yürütmeyi destekleyen programlar geliştirebilirler. Akıl yürütme eylemlerinin derslere tam anlamı ile yansıtılamamasının sebepleri arasında matematik dersi programlarının yoğun olması, temelden öğrencilerin bu duruma alışık olarak gelmemeleri, sınıflarda bu ortamların sağlanamaması olarak gösterilebilir. Bu amaçla programlar sadeleştirilebilir, öğrenciler temelden akıl yürüterek yetiştirilebilir ve ders ortamları öğrencilerin akıl yürütebilmesini, tartışmasını sağlamak için esnetilebilir. Bu çalışma için geliştirilen cebirsel akıl yürütme göstergeleri öğretmenler, kitap yazarları ve etkinlik tasarlayanlar tarafından dikkate alınarak içerik düzenlemesi yapılabilir.

6. 1. 2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler aşağıda verilmektedir.

- Cebir öğrenme alanının farklı alt öğrenme konularına ilişkin benzer çalışmalar yapılarak öğretmen yansımaları yapılabilir.
- Hizmet içi eğitimlerde matematik öğretmenlerine akıl yürütmenin önemi farkındalığı kazandıracak çalışmalara yer verilebilir.
- Benzer çalışma birkaç öğretmen tarafından birlikte yapılarak yansımalar ders imecesi yoluyla geliştirilebilir.
- Bu çalışmada cebirsel akıl yürütmeyi destekleyen ortamdan yansımalar bulunmaktadır. Bu yansımalar geliştirilerek öğretmen adaylarına ve öğretmenlere yol göstermesi adına öğretmen eğitimi faaliyetine dönüştürülebilir.

7. KAYNAKLAR

Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan & Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 43-63). Ankara: Pegem Akademi.

Akkan, Y., Baki, A. ve Çakiroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online Dergisi*, *10*, 812-823.

Aksoy, N. (2003). Eylem araştırması: Eğitimsel uygulamaları iyileştirme ve değiştirmede kullanılacak bir yöntem. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi, 36*, 474-489.

Altun, M. (1995). İlköğretim matematik programının değerlendirilmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(1), 143-154.

Bağdat, O. ve Anapa-Saban, P. (2014). İlköğretim 8. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies, 26*, 473-496.

Baki, A. (2006). *Matematik tarihi ve felsefesi*. Ankara: Pegem Akademi.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Kitabevi Egitim Yayıncılığı.

Baki, A. ve Gökçek, T. (2005). Türkiye ve Amerika Birleşik Devletlerindeki ilköğretim matematik (1-5) program geliştirme çalışmalarının karşılaştırılması. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 5*(2), 557-588.

Baki, M., Çelik, D., Güler, M. ve Sönmez, N. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının öğrenciyi tanıma bilgilerinin incelenmesi: Bir ders analizi çalışması. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi, 26*, 143-152.

Baki, M. ve Sönmez, N. (basımda). Öğretmen adaylarının öğretme bilgisini geliştirmek için ders analizi kullanımının incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.

Barnhart, T. and Van Es, E. A. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyse and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83-93.

Baykul, Y. (1999). *İlköğretimde matematik öğretimi - 1. ve 5. sınıflar*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Bernauer, J. A. (1999). Emerging standarts: Empowerment with purpose. *Kappa Delta Pi Record, 35*(2), 68-70.

Bike-Kalkan, D. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446. doi:10. 2307/30034944

Blume, G. W. and Heckman, D. S. (2000). Algebra and functions. In E. Silver & P. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment* (pp. 269-306). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2017). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pagem Yayınları.

Capraro, M. M. and Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols. *Reading Psychology, 27*(2-3), 147-164.

Ceyhun, E. Y. (2012). *İlköğretim matematik dersi öğretim programi çerçevesindeki öğretimin öğrencilerin cebir başarisina etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi.* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D. ve Güneş, G. (2013). Farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlama seviyeleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, *13(2)*, 1168-1186.

Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 180-185.

Dede, Y., Yalın, H. İ. ve Argün, Z. (2002, Eylül). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanılgıları*. 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan sözlü bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers*, *Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Elliot, J. (1991). *Action research for educational change*. Buckingham: Open University Press.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 215-238). Berlin, Heidelberg: Springer.

Erdem, Ö. ve Sarpkaya-Aktaş, G. (2018). Ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanılgılarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 9*(2), 312-338.

Ersoy, Y. (2001). Matematik öğretiminde eğitsel araçlar-1: Genel bir bakış ve bazı düşünceler. *Matematik Derneği*. http://www.matder.org.tr/matematik-ogretiminde-egitsel-araclar-1 adresinden Nisan 2019 tarihinde edinilmiştir.

Ersoy, Y. (2006). İlköğretim matematik öğretim programındaki yenilikler-I: Amaç, içerik ve kazanımlar. *İlköğretim Online, 5*(1), 98-108.

Glanz, K. (1999). Introduction. *Health Education ve Behavior, 26*(3), 306-307.

Herbert, K. and Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 340-344.

Herscovics, N. and Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hiebert, J. and Morris, A. K. (2012). Teaching, rather than teachers, as a path toward improving classroom instruction. *Journal of Teacher Education, 63*(2), 92-102.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D. and Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education, 58*(1), 47-61.

Kanbir, S. (2016, April). *Middle school students' development of algebraic reasoning: Comparing effects of three instructional approaches (visual, structural, and modeling)*. Paper presented at the NCTM Research Conference, San Francisco.

Kaput, J. J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. B. Lacampagne, W. Blair & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Karasar, N. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Nobel Yayınları.

Kaya, D. (2015). *Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme.* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Kaya, D. ve Keşan, C. (2017). İlköğretim seviyesindeki öğrencİler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports &Science Education, 6*(1), 29-38.

Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D. ve Erkuş, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(1), 142-163.

Kieren, C. and Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 178-192). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. and Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Koç, Y., Işıksal, M. and Bulut, S. (2007). Elementary school curriculum reform in Turkey. *International Education Journal, 8*(1), 30-39.

Köklü, N. (2001). Eğitim eylem araştırması – öğretmen araştırması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 2*(6), 425-433.

Kuzu, A. (2009). Öğretmen yetiştirme ve meslek gelişimimde eylem araştırması. *Uluslararası Sosyal Aratırmalar Dergisi, 2*(6), 425-433.

Leitze, A. R. and Kitt, N. A. (2000). Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts. *Mathematics Teacher*, *93*(6), 462-666.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *İlköğretim matematik dersi 6-8 ögretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2008). *Ortaokul matematik dersi (6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Miles, M. B. and Huberman, A. M. (1994). *An expanded source books qualitative data analysis* (2th ed.). London: Sage Publications.

National Assessment of Educational Progress [NAEP]. (2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. Washington, DC: National Assessment Governing Board.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1980). *An agenda for action*. Reston VA: National Assessment Governing Board.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston VA: National Assessment Governing Board.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston VA: National Assessment Governing Board.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards*. Reston VA: National Assessment Governing Boardr.

O'Brien, R. (2003). Action research and the professional learning of teachers. Retrieved April, 2019, from http://www.web.ca/robrien/papers/arfinal.html.

O'Daffer, P. G. and Thornquist, B. A. (1993). *Critical thinking, mathematical reasoning, and proof.* In Patricia S Wilson & Sigrid Wagner (Eds.), *Research ideas for the classroom.* New York: Maxwell Macmillan International.

Rosnick, P. (1999). *Some misconceptions concerning the concept of variable* ,ed: b. moses, algebraic thinking, grades 9-12: *Readings from NCTM's school based journals and other publications.* Reston VA: National Councl of Teachers of Mathematics

Öz, T. (2017). *7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Santagata, R. and Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM The International Journal of Mathematics Education, 43*(1), 133-145.

Santagata, R. and Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: Evidence from a video- and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*, 491-514.

Santagata, R., Zannoni, C. and Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(2), 123-140.

Saylık, N., Memduhoğlu, H. ve Yayla, A. (2017). İlkokul öğrencilerinde eleştirel ve sorgulayıcı düşünmeyi geliştirmeye yönelik yeni bir öğretim tekniği denemesi: Soru topları tekniği. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 16*(61), 519-533.

Sherin, M. G., Linsenmeier, K. A. and Van Es, E. A. (2009). Selecting video clips to promote mathhematics teachers' discussion of student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(3), 213-230.

Stacey, K. and MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra, *Mathematics Teacher*, *90*, 110-113

Thirds/Trends in International Mathematics and Science Study [TIMMS]. (2003). *IEA's TIMMS 2003 international report on achievement in the mathematics cognitive domains: Findings from a developmental project international association for the evaluation of educational achievement*. Boston College: TIMSS ve PIRLS International Study Lynch School of Education.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB]. (2004). *Talim terbiye kurulu program gelistirme çalısmaları*. www.ttkb.meb.gov.tr adresinden Nisan 2019 tarihinde edinilmiştir.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 234-243.

Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 188-195.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 5-7). Reston, VA: NCTM.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S. and Bay-Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği* (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel Yayınevi.

Yenilmez, K. ve Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(15), 229-246.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Nitel araştırma yöntemleri.* İstanbul: Şeçkin Yayınevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, N. (2015). Cebir öğretiminde yazma etkinliklerini kullanmanın ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin başarılarına etkisi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 15*(1), 357-376.

8. EKLER

PLAN 1	
Konu	Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam 1
Kazanım	Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar.
Cebirsel Göstergeler	CA, FG1, FG2, BK1, BK2, SK1, SK2, CY

Ders üç kısımdan oluşacaktır. Giriş, geçiş/geliştirme ve sonuç.

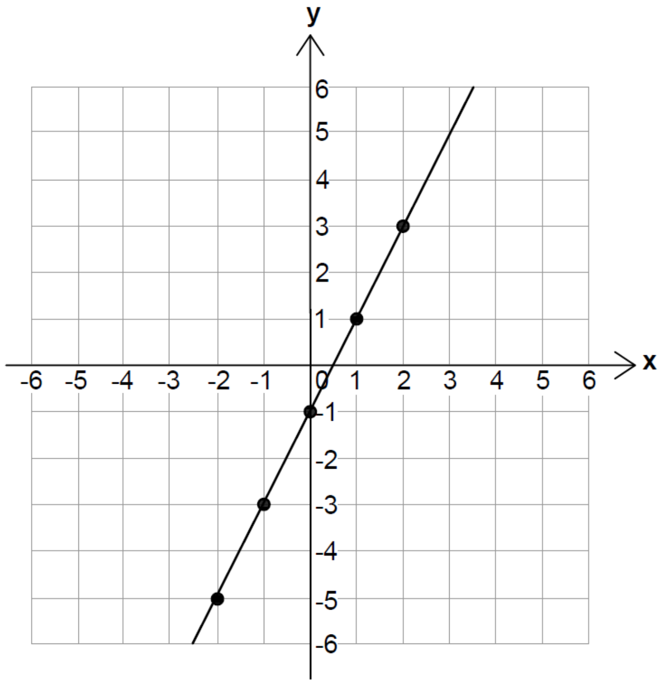
Giriş (15 dakika)

Geçen yıl öğrendikleri doğrunun grafiğini çizmeyi hatırlatmak amacıyla *y=2x-1* doğrusuna ait öncelikle tablo oluşturma ve tabloya ait grafik çizme örneğiyle giriş yapılır.

Farklı *x* değerleri için *y* değerleri bulunarak tabloda gösterilir. Tabloda bulunan sıralı ikililer koordinat sisteminde gösterilir. (CA, FG1, FG2)

x	**2x-1**	**y**	**(x,y)**
-2	2.(-2)-1	-5	(-2,-5)
-1	2.(-1)-1	-3	(-1,-3)
0	2.(0)-1	-1	(0,-1)
1	2.(1)-1	1	(1,1)
2	2.(2)-1	3	(2,3)

Soru metnini birkaç öğrencinin ayrı ayrı okuması ve yorumlaması istenecektir. Öğretmen "y=2x-1 tablosunda hangi sütunlar vardır?" sorusuyla çözüm süreci başlatacaktır. İlişkileri görmekte zorlanan öğrencilerin ilişkileri teşhis etmelerini kolaylaştırmak adına " x ile y arasında nasıl bir ilişki vardır " sorusu ile daha da ayrıntılandırılacaktır. İkinci soruda ise oluşturdukları tablodan grafiğe geçiş yapmaları istenmektedir. Grafiğe geçiş yapmak için tablo oluştururken elde ettikleri sıralı ikilileri kullanacaklardır. Koordinat sisteminde bu ikililerin temsil ettiği noktalar birleştirerek y=2x-1 doğrusunu oluşturacaklardır.



Şekil 1. *y=2x-1* doğrusuna ait grafik

Doğru oluşturulduktan sonra öğrencilere "doğruyu oluştururken kaç nokta kullandınız?" ,"doğru oluşturmak için kaç nokta yeterli olur?" gibi sorular yönlendirilerek iki noktanın bir doğru belirteceği genellemesine ulaşmaları amaçlanmıştır.

Koordinat sisteminde gösterilen sıralı ikililer birleştirilerek grafik çizilir. "Doğrusal denklemlerin grafiği çizilirken en az iki noktanın bulunmasının yeterli olduğu " belirtilir. "İki noktadan yalnız bir doğru geçeceği" gerekçesi açıklanır.

Geçiş/Geliştirme (55 Dakika)

Bu bölümde geçen seneye ait bilgilerini hatırladıkları düşünülen öğrencilerle 2 farklı durum bulunduran örnek çözülecektir. Bu örnekler gerçek yaşam durumlarına ait olup kazanıma hizmet etmektedir.

Örnek-1: Okul laboratuvarında çalışan Başak içinde bir miktar su bulunan ölçülü bir kabı musluğun altına yerleştiriyor. Musluğu açarak zamanla kabın içindeki su miktarının değişimini gözlemlemek istiyor. Musluk açılınca her saniyede 50 ml su akıyor. Başlangıçta kapta 100 ml su bulunduğuna ve akan suyun hızı değişmediğine göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.(CA)

Öğrenciler önce problem temasını anlayabilmek adına sorular sorarak, cevaplar arayacaklardır.

a) Zaman ve kapta biriken suyun hacmi arasındaki ilişkiyi tablo ile gösterelim. (FG1)

Zaman (s)(x)	**Hacim(ml)(y)**
0	100
1	150
2	200
3	250
4	300

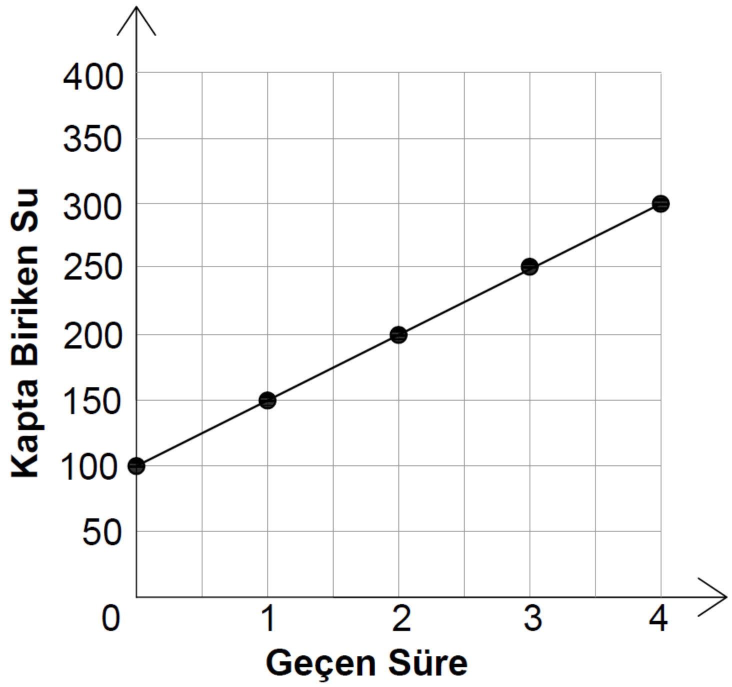
50
50
50
50

Tabloya bakarak hacimdeki değişimin zamandaki değişime oranı bulunur.

$$\text{Değişim Oranı} = \frac{\text{Hacimdeki Değişim}}{\text{Zamandaki Değişim}} = \frac{50ml}{1s} = 50ml/s$$

Eşit aralıklarla sabit bir değişim oranına sahip olan ilişkilerin doğru ilişki olduğu vurgulanır. Herhangi bir ilişkinin doğrusal olup olmadığını anlamak için tablo ya da grafiği kullanabiliriz. Tabloda, herhangi iki eşit aralık için değişim oranının sabit olup olmadığına bakılır. Grafikte ise, bütün noktaların bir doğru üzerinde yer alıp almadığına bakılarak karar verilebilir.

b) Zaman ile hacim arasındaki ilişkiyi grafik ile gösterelim. (FG2)



Şekil 2. Zaman ile kapta biriken su arasındaki ilişkiyi gösteren grafik

Grafik çizildikten sonra " başlangıçta kapta su olamasaydı grafik nasıl olurdu" sorusu sorulacaktır. Bu soru ile y=50x ile y=50x+100 farkındalığı oluşturulmak istenmektedir. Tablo oluşturduktan sonra buldukları değişim oranını yani eğimi hissetmeleri hedeflenmiştir.

c) 9. ve 16. Saniyelerde kapta kaç ml su birikecektir? (BK1,BK2)

100+9.50=100+450=550 ml ve 100+16.50=100+800=900 ml su birikecektir.

d) x. saniyede kapta kaç ml su birikecektir? (SK1)

Geneleme yapmalarını kolaylaştırmak adına "5. Saniyede musluktan ne kadar su akar, 11. Saniyede musluktan ne kadar su akar, x. saniyede musluktan ne kadar su akar" sorularak yönlendirilecektir.

100+x.50 ml su birikecektir. Burada değişim oranının x'in katsayısı olduğu vurgulanır.

e) Kapta 1350 ml su birikmesi kaç saniyede gerçekleşir? (SK2)

Geneleme yapmalarını kolaylaştırmak adına "5. Saniyede musluktan ne kadar su akar, 11. Saniyede musluktan ne kadar su akar, x. saniyede musluktan ne kadar su akar" sorularak yönlendirilecektir.

1350=100+x.50 ise 1350-100=50x ve 1250=50x olur. Buradan da x=25 olarak bulunur.

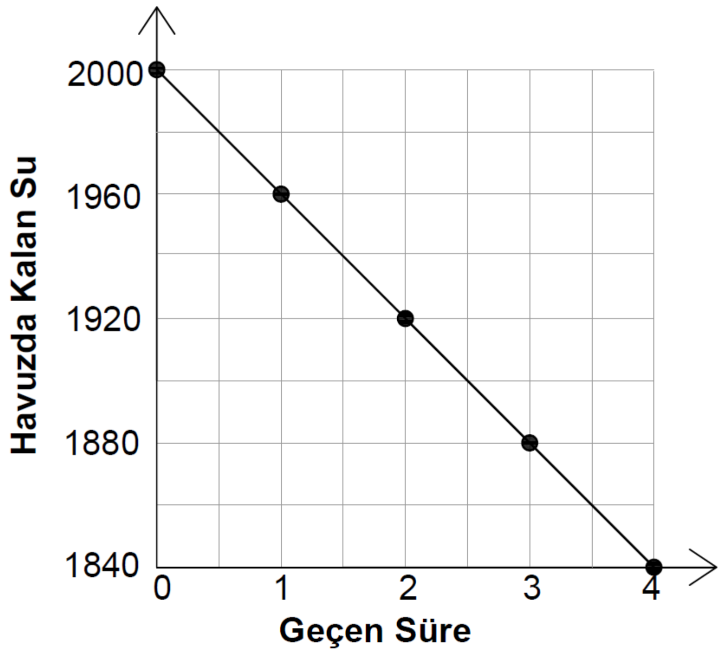
Örnek 2: Bir çocuk havuzu tam dolu iken 2000L su almaktadır. Bu havuzu boşaltmak için kullanılan musluk dakikada 40L su boşaltabilmektedir. Havuz tam dolu iken musluk açıldığında;(CA)

a) Geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi tablo olarak gösterelim. (FG1)

Dakika (x)	Havuzda kalan su miktarı(y)	İlişki
0	2000	2000
1	1960	2000-40.1
2	1920	2000-40.2
3	1880	2000-40.3
…	…	…
x	2000-40x	2000 ile 40'ın x katının farkı

Dakika ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi 2000-40x yerine 40x-2000 şeklinde algılanmasını önlemek adına "fazla olan havuzun kapasitesi mi boşalan miktar mı " diye sorulacaktır.

b) Geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi grafik ile gösterelim. (FG2)



Şekil 3. Geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren grafik

c) 35. dakikada havuzda kalan su miktarını hesaplayalım. (BK1,BK2)

2000-35.40=2000-1400=600 litre su kalacaktır.

Soruya bütün olarak bakmakta zorlananlar için öncelikle "35. Dakikada ne kadar su boşaldığını " sorusunun cevabı aranacaktır.

d) x. dakikada havuzda kalan su miktarını hesaplayalım (SK1)

x. dakikada 2000-40.x olarak bulunur.

Oluşabilecek 40x–2000 yanılgısını gidermek adına üçüncü soruya benzer şekilde "başlangıçta var olan ne", " başlangıçtaki su mu fazla boşalan mı" soruları sorulabilir. Ayrıca "dakikada 40 litre boşaldığına göre x. dakikada ne kadar su boşalır" sorusu ile parçadan bütüne geçiş yapılabilir.

e) Havuzda 400L su kaldığına göre musluk kaç dakika açık kaldığını bulalım.(SK2)

2000-40.x=400 ise 2000-400=40.x ve 1600=40.x ,x=1600:40=40

Havuzda 400 litre su kalması için musluk do dakika açık kalmalıdır.

Öğrencilerin doğru yaklaşım sergileyebilmeleri adına kalan miktar üzerinden gitmeleri gerektiğini anlamalarını sağlamak için “ 400 litre su kalmış ise acaba ne kadar su boşalmıştır” sorusu yönlendirilebilir.

f) Havuzun kaç dakikada tam olarak boşalacağını hesaplayalım. (SK2,CY)

Havuz tam olarak boşalacağına göre havuzda su kalmayacaktır. Yani 2000-40.x=0 olmalıdır.2000=40.x ve x=2000:40=50 olacaktır. Havuz 50 dakikada boşalacaktır.

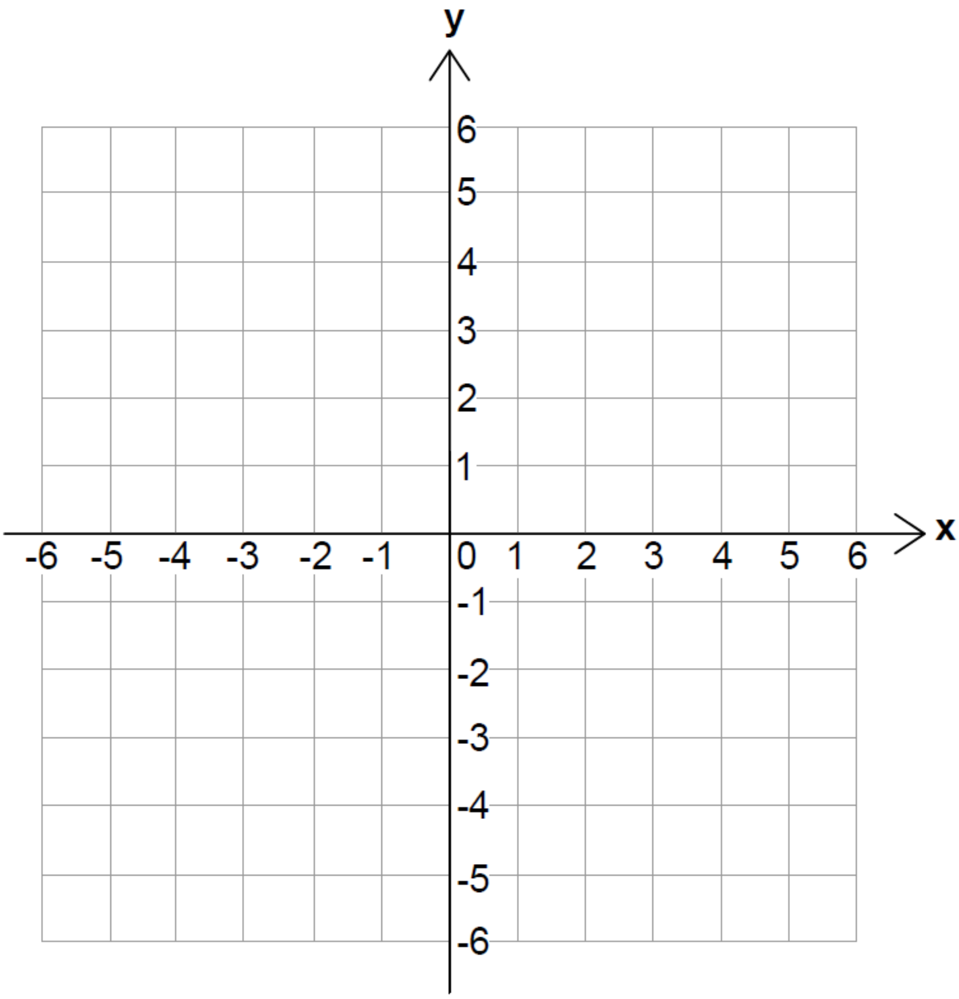
Sonuç (10 dakika)

Yapılan tablolar ve çizilen grafikler üzerine genel değerlendirmeler yapılır. Orijinden geçen ve geçmeyen doğruların özellikleri ve geçtikleri bölgeler üzerinde konuşulur. Grafiklerdeki bağımlı ve bağımsız değişkenler tekrar hatırlatılır ve konuşulur.

DERS 1 – ÖĞRENCİ ÇALIŞMA KAĞIDI

y=2x-1 doğrusu için aşağıdaki tabloyu doldurarak, tabloya ait grafiği çizelim.

x	**2x-1**	**y**	**(x,y)**



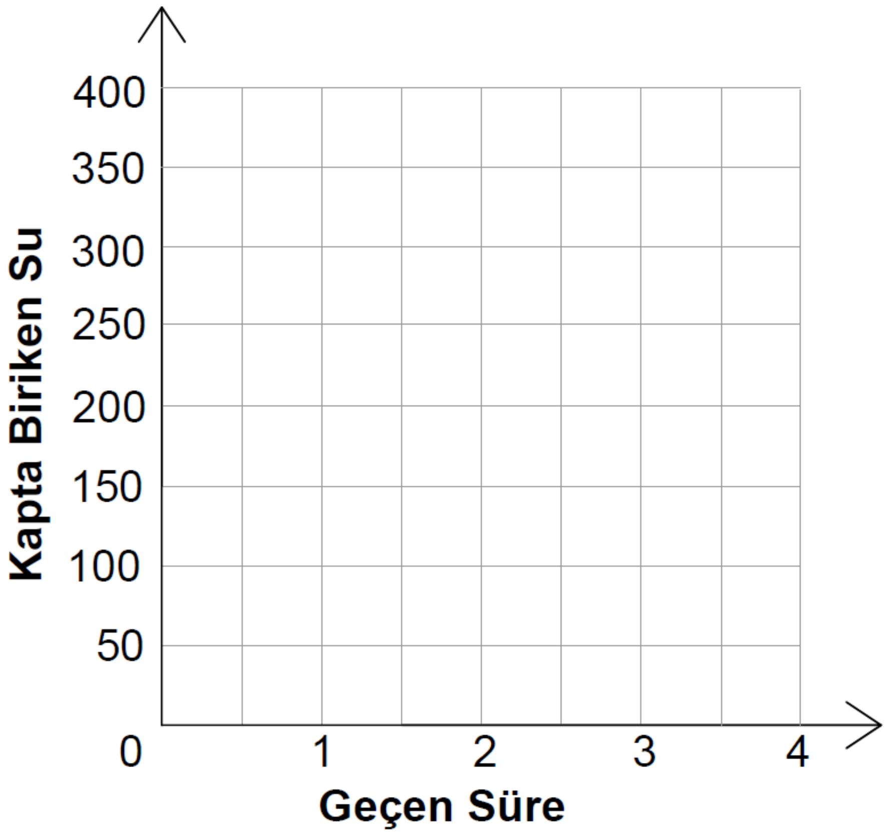
Örnek 1: Okul laboratuvarında çalışan Başak içinde bir miktar su bulunan ölçülü bir kabı musluğun altına yerleştiriyor. Musluğu açarak zamanla kabın içindeki su

miktarının değişimini gözlemlemek istiyor. Musluk açılınca her saniyede 50 ml su akıyor. Başlangıçta kapta 100 ml su bulunduğuna ve akan suyun hızı değişmediğine göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) Zaman ve kapta biriken suyun hacmi arasındaki ilişkiyi tablo ile gösterelim.

Zaman (s)(x)	Hacim(ml)(y)
0	
1	
2	
3	
4	

b) Zaman ile hacim arasındaki ilişkiyi grafik ile gösterelim.



c) 9. ve 16. Saniyelerde kapta kaç ml su birikecektir

d) x. saniyede kapta kaç ml su birikecektir?

e) Kapta 1350 ml su birikmesi kaç saniyede gerçekleşir?

Örnek 2: Bir çocuk havuzu tam dolu iken 2000L su almaktadır. Bu havuzu boşaltmak için kullanılan musluk dakikada 40L su boşaltabilmektedir. Havuz tam dolu iken musluk açıldığında;

a) Geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi tablo olarak gösterelim.

Dakika (x)	Havuzda kalan su miktarı(y)	İlişki
0		
1		
2		
3		
…		

b) Geçen süre ile havuzda kalan su miktarı arasındaki ilişkiyi grafik ile gösterelim.

c) 35. dakikada havuzda kalan su miktarını hesaplayalım.

d) x. Dakikada havuzda kalan su miktarını hesaplayalım.

e) Havuzda 400L su kaldığına göre musluk kaç dakika açık kaldığını bulalım.

f) Havuzun kaç dakikada tam olarak boşalacağını hesaplayalım.

PLAN 2	
Konu	Doğrusal Denklemler ve Günlük Yaşam 2
Kazanım	Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar.
Cebirsel Göstergeler	CA, FG1, FG2, BK1, BK2, SK1, SK2, CY, ED

Ders üç kısımdan oluşacaktır. Giriş, geçiş/geliştirme ve sonuç.

Giriş Kısmı (10 dakika)

Geçen derste konuşulan doğru grafiklerinin özelliklerinden ve bağımlı-bağımsız değişkenlerden tekrar bahsedilerek hatırlatmalar yapılır. Tablodan grafiğe, grafikten denkleme geçişler yapmak üzerine konuşulur.

Geçiş/Geliştirme(55 Dakika)

Bu bölümde geçen ders ile ilgili gerekli hatırlatmalar yapıldıktan sonra hem geçen dersin hem de geçen senenin pekiştirici niteliğinde 1 soru çözülerek, iki farklı durum karşılaştırılarak bir etkinlik yapılacaktır.

Soru 1: Yeni evlenecek bir çift düğün davetiyesi yaptırmak istemektedir. Bunun için farklı matbaalardan fiyat araştırması yapmış ve aşağıdaki iki seçeneği en uygun seçenekler olarak değerlendirmişlerdir.(CA)

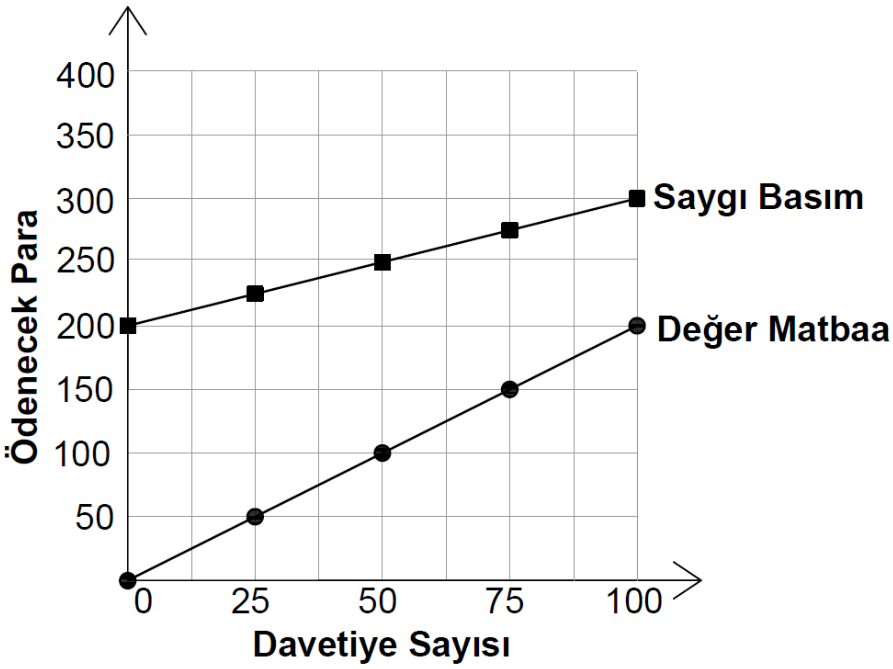
a) Her bir seçenek için fiyat ile davetiye sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren tabloları oluşturalım. (FG1,BK1)

Değer Matbaa		
Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı(y)	İlişki
0	0	0
1	2	2.1
2	4	2.2
3	6	2.3
…	…	…
25	50	2.25
50	100	2.50
100	200	2.100
…	…	…
x	2x	2'nin x katı

Saygı Basım		
Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı(y)	İlişki
0	200	200
1	201	200+1.1
2	202	200+1.2
3	203	200+1.3
…	…	…
25	225	200+1.25
50	250	200+1.50
100	300	200+1.100
…	…	…
x	200+x	1'nin x katının 200 fazlası

Tablolar oluşturulduktan sonra Saygı Basım'a ait tablonun ilişki sütununda "200, 200+1.1 , 200 +1.2 , 200+1.3 …" örüntüsüyle devam eden durumla karşılaşılacaktır. Burada ilişkiyi fark etmelerini kolaylaştırmak adına "1 çarpanı yazılmasa olur mu ve eğer 1 değil de başka bir çarpan olsaydı yani davetiye fiyatı farklı olsaydı durum değişir miydi" sorusu yönlendirilecektir.

b) Tabloları grafik ile göstererek , yorumlayalım. (FG2,ED)



Şekil 1. Her bir seçenek için davetiye sayısı ile ödenecek para arasındaki ilişkiyi gösteren grafik

Öğrencilerin eleştirel düşünmelerine katkıda bulunabilmek adına " grafiklerin özellikleri, başlangıç noktalarının farklı olma sebepleri ve kesişip kesişmeme durumları" ile ilgili sorular yönlendirilecektir. Çizilen grafikleri yorumlayarak doğruların ileride bir yerde kesişeceklerini ve bu noktadan sonra alttaki grafiğin üstte ve üstteki grafiğin altta geçeceğini fark etmekte zorlananlar olabilir. Bu öğrencilere yardımcı olmak için "Grafiğin altta veya üstte olması ne anlama geliyor?" ve "Her bir davetiye sayısı için iki firmanın maliyet farkının nasıl değiştiği?" soruları sorulabilir.

Grafikle birlikte "hangi değişkene bağlı olarak hangi değişken değişmektedir?" sorusu yöneltilir (davetiye sayısı)'in bağımsız ve y(ödenecek para)'nin bağımlı değişken olduğu cevabı önce öğrencilerden istenir. Sonra belirtilir. Grafiğin orijinden geçmesinin ve geçmemesinin nedenleri üzerinde durulur.

c) 150 ve 250 davetiye için ödenmesi gereken para miktarını bularak hangi seçeneğin daha kazançlı olduğunu bulalım. (BK1,BK2,CY)

Değer Matbaada 150 davetiye için 150.2=300 ve 250 davetiye için 250.2=500 lira ödenir.

Saygı Basımda 150 davetiye için 200+150.1=350 ve 250 davetiye için 200+250.1=450 lira ödenir.

150 davetiye için değer matbaa ve 250 davetiye için ise saygı basım tercih edilirse daha kazançlı olur.

d) x davetiye için hangi seçenekte ne kadar para ödenmesi gerektiğini bulalım. (SK1)

Değer Matbaada x davetiye için 2.x ve Saygı Basımda x davetiye için 200+x.1 lira ödenecektir.

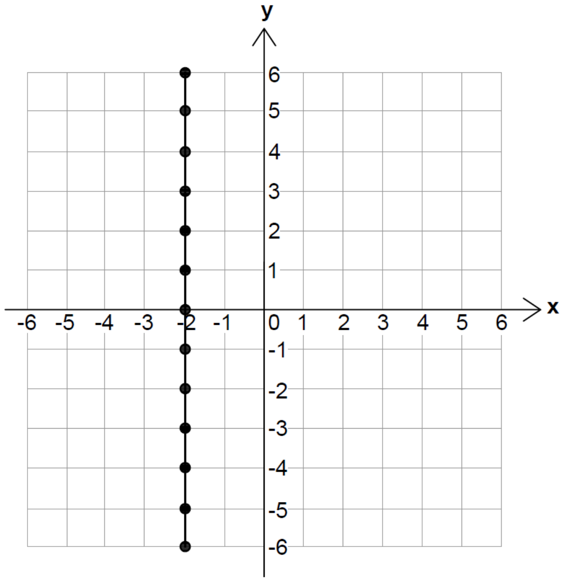
e) 500 TL ile hangi seçenekte kaç davetiye alınabilir? (SK2)

2.x=500 ise x=250 (Değer Matbaa) ve 200+1.x=500 ise x=500-200=300(Saygı Basım) olacaktır.

f) Kaç davetiye için iki seçeneğe de ödenecek miktar aynı olur bulalım. .(SK2,CY,ED)

2.x=200+1.x ise 2.x-1.x=200 ve x=200 olacaktır.Her iki seçenek için 200 davetiye alındığında ödenecek miktar aynı olacaktır.

Etkinlik 1: Bu kısımda öğrencilerin öğrendikleri bilgileri hatırlamaları ve aktif kullanmaları için bir etkinlik tasarlanmıştır. Derse başlarken tahtaya 4 farklı grafik asılacaktır. Ayrıca öğrenciler 5 ‘er kişilik gruplara ayrılacaktır. Gruplara bazılarının üzerinde denklem bazılarının üzerinde tablolar olan kağıtlar dağıtılacaktır. Öğrencilerden ellerindeki kağıttaki denklem ya da tablonun hangi grafiğe ait olduğunu tahmin etmeleri nedenleri ile birlikte istenecektir. Tahmin kısmı tamamlandıktan sonra tahtadaki grafiklerin özellikleri hakkında konuşulacaktır. (FG2,ED)



x=-2

x+2=0

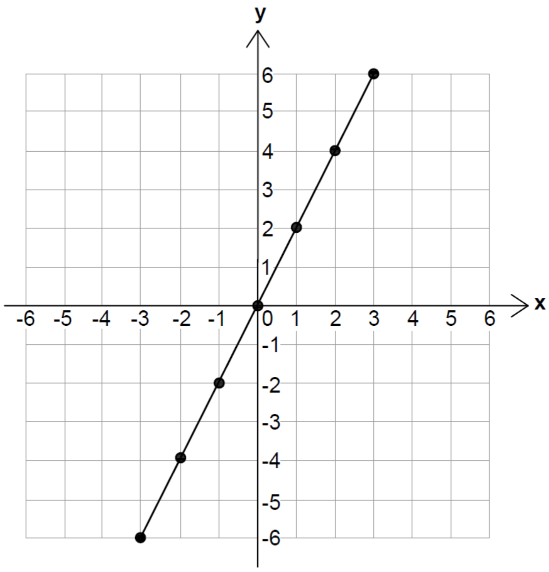
-2-x=0

2x=-4

x	y
-2	3
-2	5
-2	7
-2	9

x	y
-2	-2
-2	-1
-2	0
-2	1

Şekil 2. Birinci probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



y=2x

y-2x=0

2x-y=0

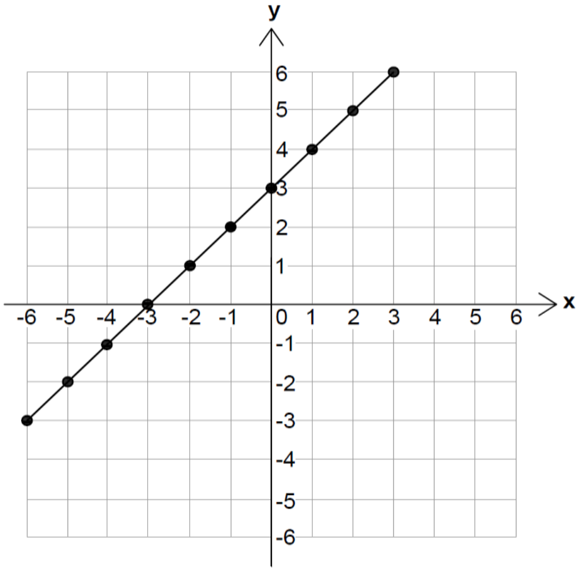
-y+2x=0

x	y
-2	-4
-1	-2
1	2
2	4

x	y
0	0
-1	-2
-2	-4
-3	-6

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6

Şekil 3. İkinci probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



y=x+3

y=3+x

y-x=3

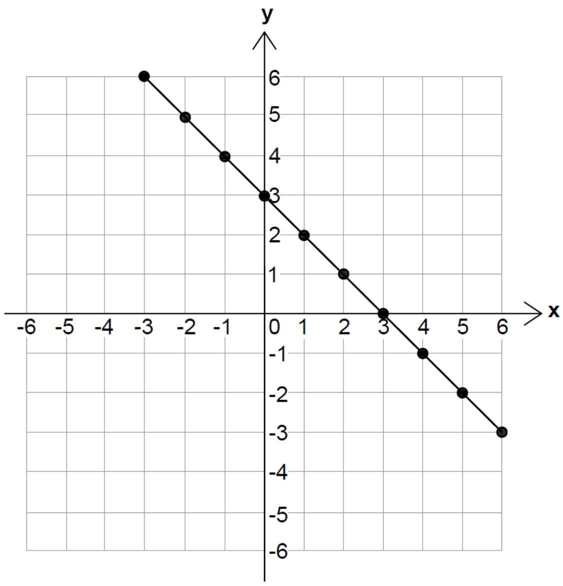
-3=x-y

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3

x	y
0	3
2	5
4	7
5	9

x	y
0	3
1	4
2	5
3	6

Şekil 4. Üçüncü probleme ait grafik, denklemler ve tablolar



Şekil 5. Dördüncü probleme ait grafik

Dördüncü grafiğe ait veri yoktur. Bu grafik çeldirici olarak kullanılacaktır.

Öğrencilerin ellerindeki kâğıtların hangi grafiğe ait oldukları hakkında yorumları alındıktan sonra grafiklerin özellikleri hakkında konuşulacaktır. Örneğin;

1. Grafik için, y eksenine paraleldir. x eksenini dik keser. y'nin değişen tüm değerlerine karşılık x her zaman -2 değerini alır.
2. Grafik için, orijinden geçer. x ve y eksenlerini 0 noktasından keser. 1. ve 3. bölgelerden geçer.

3. Grafik için, orijinden geçmez. x'i -3 ve y'yi 3 noktalarından keser. 1. , 2. ve 3. bölgelerden geçer. Bu doğru ile eksenler arasında kalan bölge üçgensel bir bölgedir.

yorumları yapılabilir.

Sonuç (10 dakika)

Yapılan tablolar ve çizilen grafikler üzerine genel değerlendirmeler yapılır. Orijinden geçen ve geçmeyen ile eksenlere paralel doğruların özellikleri ve geçtikleri bölgeler üzerinde konuşulur. Örneğin; bir anne ile kızının yaşlarının farkının 24 olduğu ve kızının yaşına bağlı olarak zamanla farkın nasıl değiştiği hakkında öğrencilerin düşünmeleri sağlanır. Grafiklerdeki bağımlı ve bağımsız değişkenler tekrar hatırlatılır ve konuşulur.

DERS 2 – ÖĞRENCİ ÇALIŞMA KAĞIDI

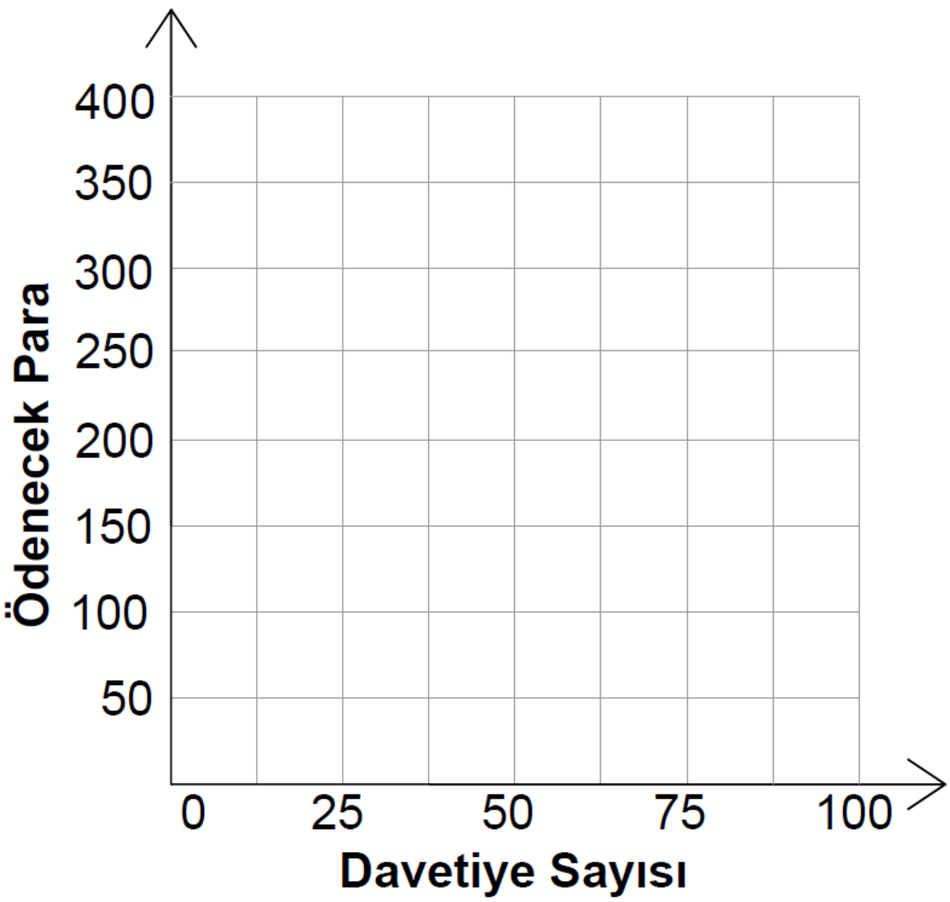
Soru 1: Yeni evlenecek bir çift düğün davetiyesi yaptırmak istemektedir. Bunun için farklı matbaalardan fiyat araştırması yapmış ve aşağıdaki iki seçeneği en uygun seçenekler olarak değerlendirmişlerdir

a) Her bir seçenek için fiyat ile davetiye sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren tabloları oluşturalım. (FG1,BK1)

Değer Matbaa		
Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı(y)	İlişki

Saygı Basım		
Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı(y)	İlişki

b) Tabloları grafik ile göstererek , yorumlayalım.



c) 150 ve 250 davetiye için ödenmesi gereken para miktarını bularak hangi seçeneğin daha kazançlı olduğunu bulalım.

d) x davetiye için hangi seçenekte ne kadar para ödenmesi gerektiğini bulalım.

e) 500 TL ile hangi seçenekte kaç davetiye alınabilir?

f) Kaç davetiye için iki seçeneğe de ödenecek miktar aynı olur bulalım.

Etkinlik:

PLAN 3	
Konu	İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklemler
Kazanım	İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer.
Cebirsel Göstergeler	CA, SK1, SK2, CY

Ders üç kısımdan oluşacaktır. Giriş, geçiş/geliştirme ve sonuç.

Giriş Kısmı (30 dakika)

Örnek: İki sayının toplamı 175 ve farkı 105 olduğuna göre büyük sayı kaçtır? Sorusu ile derse giriş yapılır. Bu tarz soru seçilmesinin nedeni öğrencilerin zorlanmadan ve eski bilgilerini de yoklayarak denklem kurmasını ve çözüm yapmasını sağlamaktır.
Denklem kurmaları için sayıları bilmediğimiz bu durumda nasıl düşünmek doğru olur şeklinde yönlendirilirler.
$x+y=175$ ve $x-y=105$ denklemlerinin kurulmasından sonra nasıl davranmalıyız, nasıl devam etmeliyiz, iki bilinmeyen var biz ise bir bilinmeyenli denklem çözmeyi biliyoruz, gibi sorularla yönlendirmeler yapılır. Acaba bir değişkeni diğeri cinsinden yazarsak bilinmeyen sayısını teke düşürür müyüz? Bulduğumuz bu eşitliği diğer denklemde yerine yazsak bir işimize yarar mı?
Eşitlikleri taraf tarafa toplasak nasıl bir sonuca ulaşırız? Değişkenlerden biri kaybolup tek bilinmeyenli denkleme dönüşür mü? Taraf tarafa toplarken tek bilinmeyenliye dönüşebilmesi ya da değişkenlerden birinin yok olması için nasıl olmaları gerekir? Ne durumda daha rahat değişkenlerden biri yok edilir?
İki eşitlikte de x'i ya da y'yi yalnız bırakırsak değişkenlerden birini diğeri cinsinden yazmış oluruz. Bu durumda yeni elde edilen eşitlikler aynı değişkenleri temsil ettiğine göre birbirlerine eşit midirler? Eşitleyerek tek bilinmeyenli denklem gibi düşünebilir miyiz?.gibi yönlendirici sorularla öğrencilerin farklı yöntemleri fark ederek kullanmaları ve 3 farklı yöntemle sonuca ulaşmaları sağlanır. Öğrencilerin çözümler ile defterlerinde bireysel uğraşmaları sağlanır. Bu esnada defterler kontrol edilerek dönüt verilir, yönlendirmeler yapılır. Daha sonra öğrencilerin tahtada 3 farklı metot ile düşünmeleri ve çözümler yapmaları sağlanır. Çözümler bittikten sonra bu yöntemlerin isimleri hakkında konuşularak yerine koyma, yok etme ve karşılaştırma yöntemleri olduğundan bahsedilir.

Geçiş/Geliştirme (40 Dakika)

Bu aşamada biraz daha uğraştırıcı bir örneğin verileri ile denklem kurmaları ve bu denklemi yöntemleri pekiştirmeleri amacıyla 3 yöntemi de kullanarak çözmeleri beklenmektedir.
Soru: Yusuf para biriktirmeye karar veriyor. Bunun için aldığı kumbarasına sadece 5TL ve 10TL lik banknotlardan atıyor. Belli bir süre sonra kumbarada 30 banknot ve toplamda 210 TL biriktirdiğine göre kumbarada kaç tane 5TL ve 10TL lik banknot vardır? (CA,SK1,SK2,CY)

$x+y=30$ ve $5x+10y=210$ denklemlerinin kurulması ile birlikte giriş kısmında yer alan sorudaki yönlendirmelere benzer yönlendirmelerle öğrencilerin 3 yöntemi kullanarak çözümler yapmaları sağlanır. Giriş kısmındaki örneğe göre hem işaretleri aynı hem de katsayıları farklı olduğu için biraz daha düşünmeleri gerkecektir. Farklı açılardan düşünerek farklı yollarla çözüm yapmış öğrenciler için tüm yöntemlerle çözüme yönlendirilir ve çözüm yapılır.

Sonuç (10 Dakika)

Ders sonlandırılırken iki bilinmeyenli birinci dereceden denklem sistemlerinin ifade ettikleri, tanımı üzerinde durulur. Çözümleri için farklı yollar tercih edilebileceği hakkında konuşulur. Yerine koyma, yok etme ve karşılaştırma yöntemleri tekrar edilir. Kısaca nasıl yapıldıkları hakkında hatırlatmalar yapılır. Sorusuna göre istedikleri, uygun yöntemi kullanabilecekleri vurgulanır.

DERS 3 – ÖĞRENCİ ÇALIŞMA KAĞIDI

Örnek: İki sayının toplamı 175 ve farkı 105 olduğuna göre büyük sayı kaçtır?

Soru: Yusuf para biriktirmeye karar veriyor. Bunun için aldığı kumbarasına sadece 5TL ve 10TL lik banknotlardan atıyor. Belli bir süre sonra kumbarada 30 banknot ve toplamda 210 TL biriktirdiğine göre kumbarada kaç tane 5TL ve 10TL lik banknot vardır?

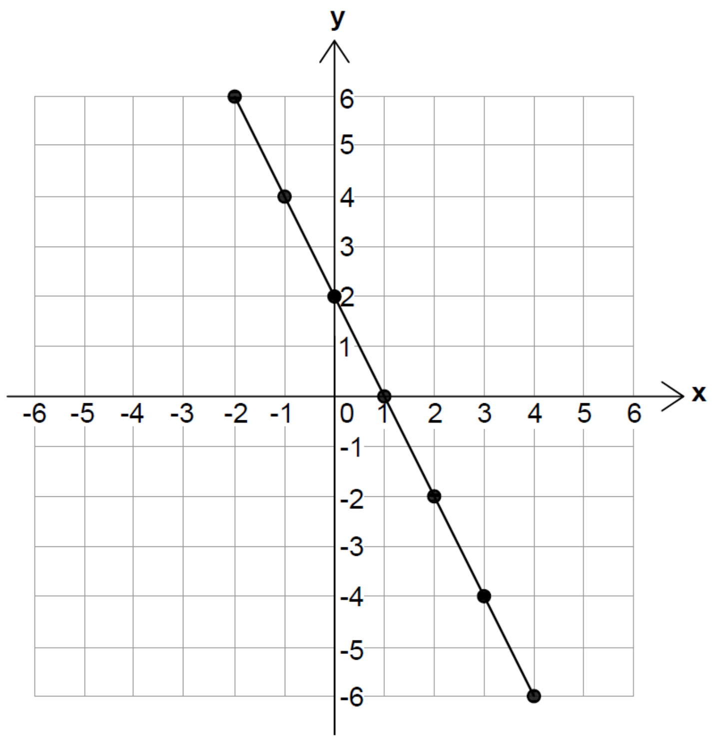
PLAN 4	
Konu	Doğrusal Denklem Sistemlerini Grafik Kullanarak Çözme 1
Kazanım	Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar
Cebirsel Göstergeler	CA, FG1, FG2, SK1, CY, ED

Ders üç kısımdan oluşacaktır. Giriş, geçiş/geliştirme ve sonuç.

Giriş Kısmı (30 dakika)

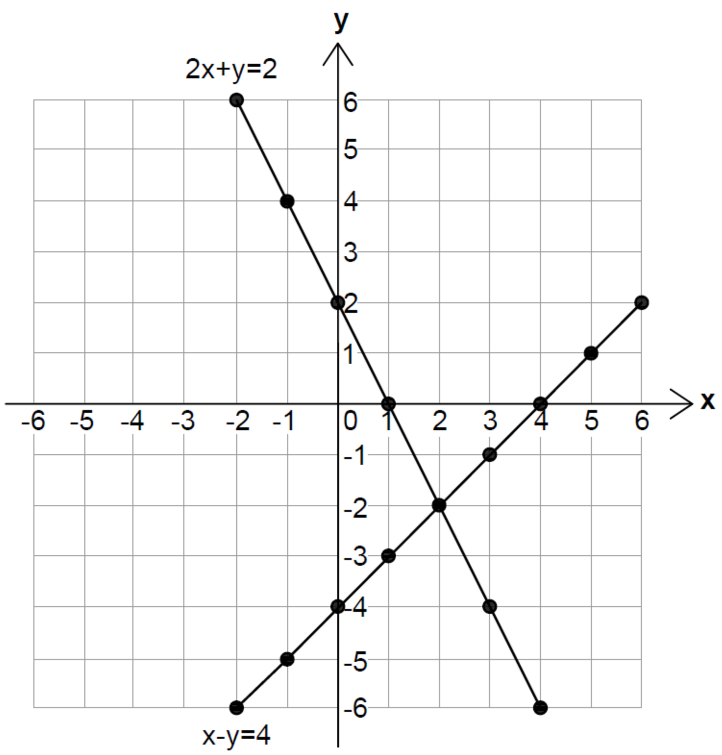
$2x+y=2$ denkleminin grafiğini çizelim.

Denklemlere ait grafikler çizilirken, öğrencilerin önceden öğrendikleri yöntemler kısaca hatırlatılarak istedikleri yöntemi kullanabilecekleri belirtilir. Örneğin, doğruların eksenlerini kestiği noktalar bulanarak grafikler çizilebileceği gibi denklemi sağlayan noktalar tablolaştırılarak da grafikler çizilebilir. Grafikleri çizmekte zorlanan öğrencilere önceki derslerde yapılan çalışmalara yönelik küçük hatırlatmalar yapılabilir. Örneğin, "x yerine 0 koysam y kaç olur?", "Bulduğun bu (x,y) ikilisini koordinat sisteminde nasıl gösterebilirim" ve "Bir doğru çizmek için en az kaç nokta gerekliydi?" soruları öğrencilere yönlendirilebilir. Bunlara ek olarak, öğrencilere grafik çizimi yaparken farklı bakış açıları kazandırmak amacıyla "Doğru grafiği çizerken sadece denklemlerin eksenleri kestiği noktaları bularak mı çizim yaparız? Yoksa önceden gördüğümüz başka yöntemler de var mıydı?"



Şekil 1. 2x+y=2 doğrusunun grafiği

x-y=4 denkleminin grafiğini bir önceki grafiğin üzerine çizelim



Şekil 2. 2x+y=2 ve x-y=4 doğrularının grafikleri

Çizilen grafiklerden doğruların (2,-2) noktasında kesiştiği gözlemlenir. Bu iki denklem yerine koyma yöntemiyle çözülürse:

$$2x + y = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2 - 2x$$
$$x - y = 4 \quad \rightarrow \quad y = x - 4$$
$$2 - 2x = x - 4 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$$
$$2.2 + y = 2 \quad \rightarrow \quad y = -2$$

Ç={2,-2}

Bir önceki ders bilgileri hatırlatılarak bu tür sistemlerin cebirsel olarak çözümüne yönlendirilir . Bu denklem sisteminin çözümü için öğrendikleri yöntemlerden (yok etme, yerine koyma, karşılaştırma yöntemleri) istediklerini kullanabilecekleri söylenecektir.

Düzlemdeki kesişim noktaları ile çözüm kümesinin aynı olduğu vurgulanır.

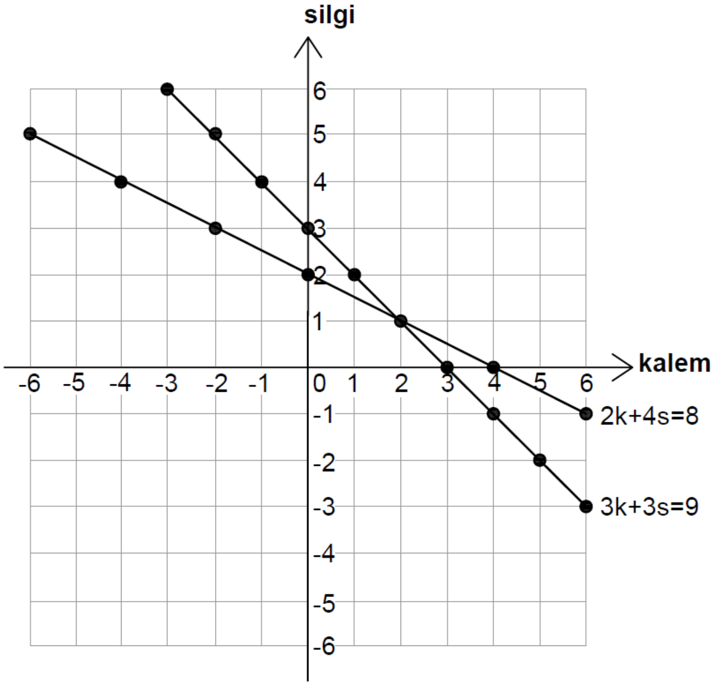
Geçiş/Geliştirme (40 Dakika)

Bu bölümde giriş kısmındaki hatırlatmadan ve ispattan sonra günlük yaşam durumunda içeren bir problem çözülecektir.

Örnek: Bir öğrenci kırtasiyeden 2 kalem ve 4 silgi alırsa 8 TL, 3 kalem 3 silgi alırsa 9 TL ödemesi gerekmektedir. Buna göre kalem ve silginin fiyatını grafik yardımıyla bulalım ve cebirsel olarak çözelim.

$$2k + 4s = 8$$
$$3k + 3s = 9$$

Denklem kurmakta zorlanan öğrencilere "Kalem ve silgi fiyatlarını bilmiyorum. Kalem ve silgi fiyatlarını adlandırarak başlayabilirsiniz" yönlendirmesi yapılacaktır. Denklem kurarken iki yerine dört değişken kullananalar olabilir. Bu yanlış anlaşılmanın önüne geçmek için "Eğer kırtasiyeye gidip bir silgi alsanız sonra hemen aynı silgiden bir tane daha alsanız, fiyatları aynı mı olur yoksa değişir mi?" ve "Fiyat birinde x ise diğerinde ne olur sizce?" soruları sorulabilir.



Şekil 2. Doğruların grafikleri

Doğru grafikleri bulurken, denklemlere ilişkin tablo oluşturarak veya denklemlere ilişkin doğruların eksenleri kestiği noktaları bularak ilerleyebilirler. Eksenlerin kesim noktasından yola çıkarak grafik çizimleri yapılırken denklemlerde x=0 için y=2 değeriyle y=0 için bulunan x=4 değerlerini birlikte düşünüp doğru oluşturmak yerine koordinat sisteminde (4,2) noktasını bulan öğrenciler olabilir Bu durumun önlemek için öğrencilere "y=2 değerini bulurken x 'i kaç aldın, ve x=4 değerini bulurken y 'i kaç aldın?" soruları sorularak aslında bir değil iki nokta buldukları fark ettirilmeye çalışılabilir. Doğruların grafiği bir önceki problemde olduğu gibi aynı koordinat sistemi üzerinde çizileceğinden doğruların kesiştikleri nokta kolaylıkla görülebilir. Kesim noktasından elde edilen ikiliden hangisinin hangi ürüne denk geldiği fark etmeleri adına öğrencilere "Kesim noktasını bulduk. Peki, elde edilen bu ikiliden hangisi kalemin hangisi silginin fiyatı?" sorusu yönlendirilebilir.

Grafikten görülmektedir ki kalem 2 TL ve silgi 1 TL'dir. Aynı çözümü bir de cebirsel olarak görelim.

$\left.\begin{array}{l} 2k+4s=8 \\ 3k+3s=9 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde 1. denklemi 3 ile ve 2. denklemi -2 ile çarpılırsa,

$\left.\begin{array}{l} 6k+12s=24 \\ -6k-6s=-18 \end{array}\right\}$ denklem sistemi elde edilir. Bu sistem taraf tarafa toplanırsa 6s=6 ise s=1 olur.1. denklemde s=1 yerine yazılırsa 2k+4.1=8 ve 2k+4=8 ise 2k=4 , k=2 olarak bulunur.

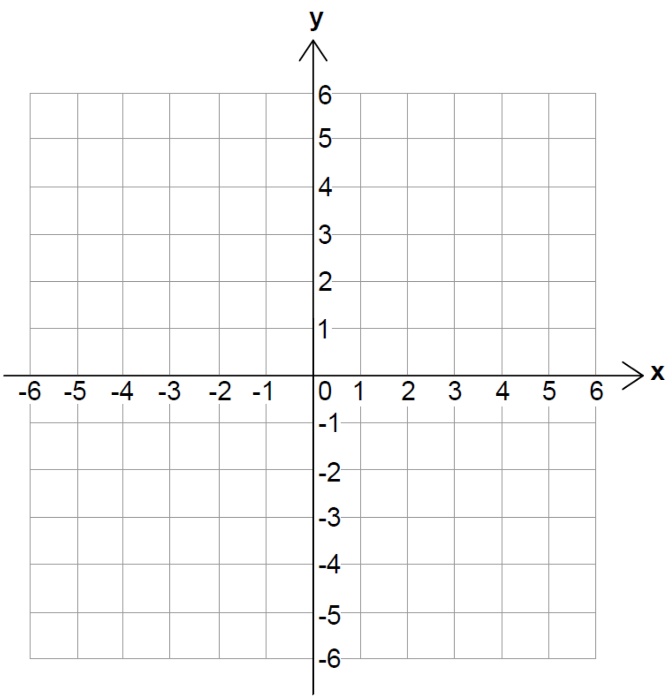
Cebirsel çözümden elde edilen (x,y) ikilisinin aynı zamanda denklemlere ait doğru grafiklerin çizimiyle elde edilen kesişim noktası olduğunu bu problem içinde kolaylıkla fark edilecektir.

Sonuç (10 Dakika)

Doğrusal denklem sistemini oluşturan doğruların grafiklerinin kesim noktası, denklem sistemini sağlayan (x,y) sıralı ikilisini yani denklemin çözümünü verdiği bilgisi vurgulanır. Grafiklerin tek noktada kesişmelerinden dolayı bu sistemi sağlayan tek çözüm olduğu vurgulanır.

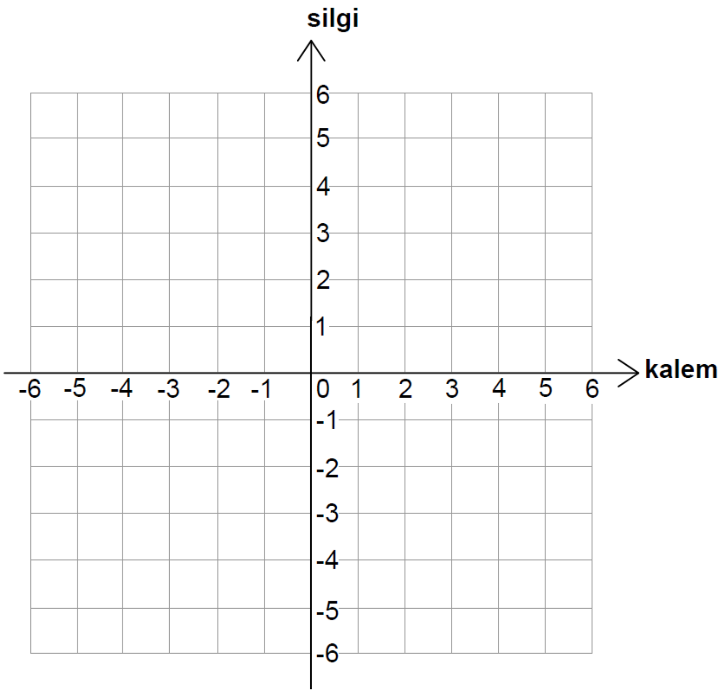
DERS 4 – ÖĞRENCİ ÇALIŞMA KAĞIDI

Örnek: *2x+y=2* ve x-y=4 denklemlerinin grafiğini aşağıdaki koordinat sistemine çiziniz. Aynı denklemlerin cebirsel çözümlerini yapınız.



Cebirsel Çözüm:

Soru: Bir öğrenci kırtasiyeden 2 kalem ve 4 silgi alırsa 8 TL, 3 kalem 3 silgi alırsa 9 TL ödemesi gerekmektedir. Buna göre kalem ve silginin fiyatını grafik yardımıyla bulalım ve cebirsel olarak çözelim.



Cebirsel Çözüm:

PLAN 5	
Konu	Doğrusal Denklem Sistemlerini Grafik Kullanarak Çözme 2
Kazanım	Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruların grafikleri arasında ilişki kurar
Cebirsel Göstergeler	CA, FG1, FG2, SK2, CY, ED

Ders üç kısımdan oluşacaktır. Giriş, geçiş/geliştirme ve sonuç.

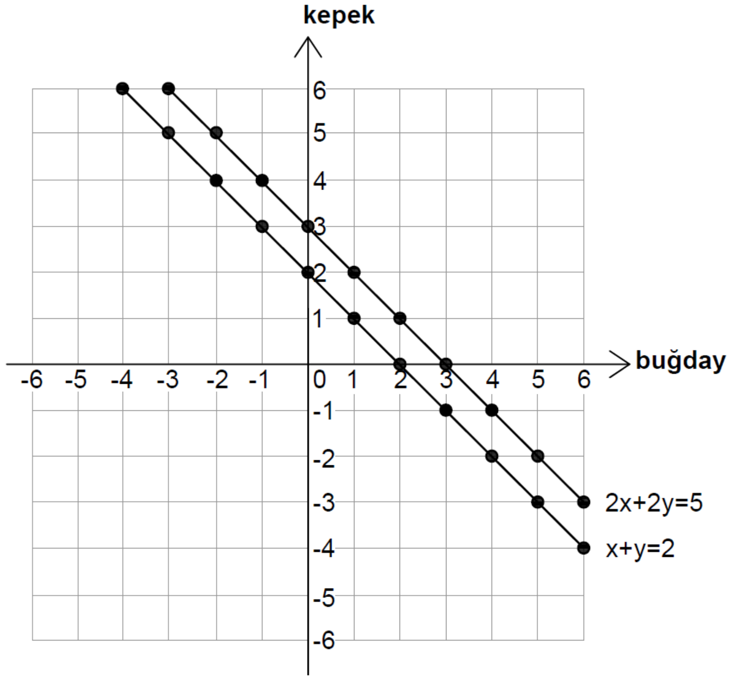
Giriş (15 dakika)

Öğrencilerde sorulan sorunun hatalı olduğu düşüncesi oluşmaması için problem öğrencilere verilmeden önce soruda hatalı gibi görünen bilginin belli bir nedenle o şekilde verildiği ve problemin çözümü ile bunun daha iyi anlaşılacağı öğrencilere ifade edilebilir.

Örnek 1: Ahmet fırından bir buğday ekmeği ve bir kepek ekmeği alındığında 2TL, iki buğday ekmeği ve 2 kepek ekmeği aldığında ise 6TL vermektedir. Buna göre ekmeklerin fiyatları ne kadardır?

Öğrenciler, planın ilk problemi olan bir buğday ekmeğiyle bir kepek ekmeğinin 2 TL ve iki buğday ekmeğiyle iki kepek ekmeğinin 6 TL olduğu soruda bir sorun olduğunu problemi okur okumaz sezebilirler. Problemde, ekmek sayıları iki katına çıktığı halde ekmekler için ödenen miktar üç katına çıkmıştır ve öğrenciler fiyatında iki katına çıkması gerektiğini ifade ederek soruya itiraz edebilirler. Problemde yanlışlık olmadığı ve problemde verilen bilgilerin birlikte kullanılarak önceki planda öğrenilen çözüm yöntemleri ile ilerlemeleri ifade edilmelidir

Probleme ait denklemler x(buğday) ve y(kepek) için aşağıdaki gibidir.
$x+y=2$
$2x+2y=6$



Şekil 1. Doğruların grafikleri

Doğruların grafiği Şekil 1'de görüldüğü gibidir. Herhangi bir ortak kesim noktaları yoktur. Cebirsel çözümlerine gelince, 1. denklemin her iki tarafını -2 katsayısı ile çarparak iki denklemi taraf tarafa toplarsak ,

-2x-2y=-4
2x+2y=6

denklemleri yok etme metodunu kullanarak çözebiliriz. Hem x hem de y'nin yok olduğunu görürüz. Bu durumda 0=2 eşitliği elde edilir. Bu bilgiye dayanarak doğru bir eşitlik olmadığı için doğruların kesiştiği ortak bir çözüm noktası yoktur.

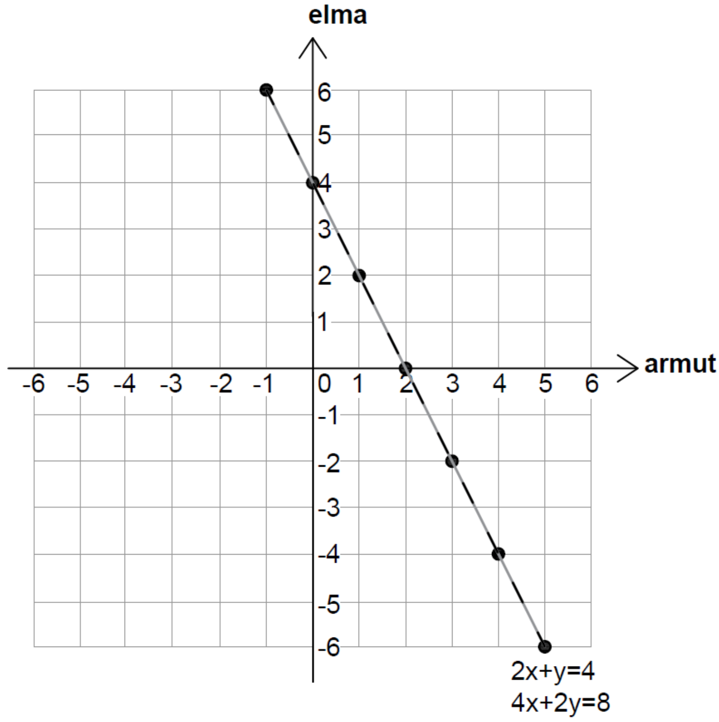
Eşitsizlik durumunun neyi ifade ettiğini görebilmeleri adına "x+1=3 iken x yerine ne koyarsak denklem sağlanır? Peki denklemde x olmazsa burada 1 ve 3 ne zaman eşit olur?" soruları yönlendirilebilir. Bu eşitliklerin doğru olmadığını ve hiçbir zaman sağlanmayacağını fark etmeleri beklenmektedir.

Devamında doğruların paralel olması ve bu nedenle kesişmedikleri üzerinde konuşulur. Kesişim noktası yoksa çözümün olmadığı vurgulanır.

Örnek 2: Mehmet manavdan bir kilo elma ve iki kilo armut alırsa 4TL, 2 kilo elma ve 4 kilo armut alırsa 8TL ödeyeceğine göre elma ve armudun kilosu ne kadardır?

Probleme ait denklemler x(armut) ve y(elma) için aşağıdaki gibidir.

2x+y=4
4x+2y=8



Şekil 2. Doğruların grafikleri

Gerek denklem kurma gerek grafik oluşturma aşamalarında problem yaşayan öğrencilere yol göstermek adına önceki derslerde yapılanları hatırlamaları adına sorular sorulabilir. Örneğin, "Bir önceki problemde Ahmet bir buğday ekmeğine ve bir kepek ekmeğine 2 TL vermişti değil mi? Bunu nasıl ifade etmiştik?" veya "Bir doğru çizmek için en az kaç nokta gerekiyordu? Bir doğrunun x eksenini kestiği noktada y kaç olur" soruları sorulabilir.

Doğruların grafiği Şekil 2'de görüldüğü gibidir. Üst üste çakışmışlardır. Bu durumun cebirsel olarak nasıl gözlemleneceğini görebilmek adına çözelim.1. denklemde x'i yalnız bırakarak 2. Denklemde yerine yazalım.1. denklemde x=(4-y)/2 olur. Bu veri 2. denklemde yerine yazılırsa 4.(4-y)/2+2y=8 olacaktır. Denklem düzenlenirse, 8-2y+2y =8 olur. Burada 2y'ler zıt işaretli oldukları için toplamları 0 olacaktır. 8=8 eşitliği oluşacaktır.

"Çözümde x ya da y yok ancak eşitlik durumu var"," Ne anlam ifade ediyor acaba?" soruları ile yönlendirmeler yapılacaktır. Bir önceki problemde verilen paralel doğrular durumuna ilişkin elde edilen çıkarımları kullanmaları için "Bir önceki problemde doğrular paraleldi ve cebirsel çözümde eşitsizlik durumu elde etmiştik. Pek, çakışık doğrular ve eşitlik durumu sizce ne ifade ediyor olabilir?" ve "Sizce bu denklemleri hangi (x,y) ikilileri sağlar" soruları sorulabilir.

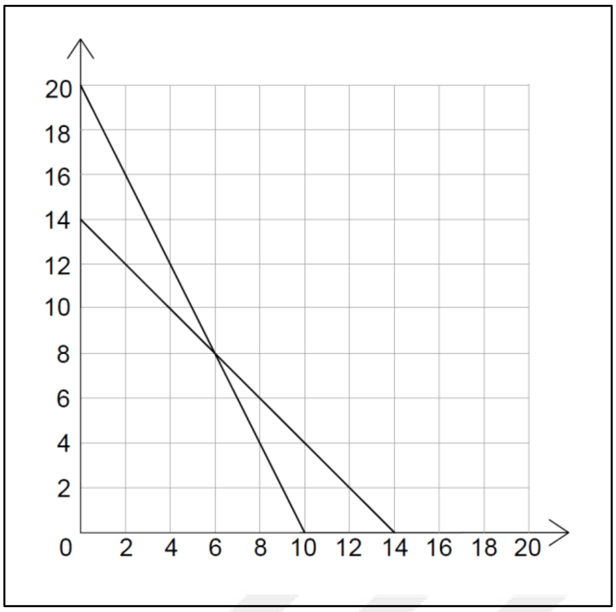
Bu durum her zaman sağlanan bir eşitliktir. Yani her sıralı ikili için sağlanacaktır. Çözüm sonsuzdur. Sonsuz sayıda kesişim noktasının sonsuz sayıda çözüm olduğu vurgulanır.

Etkinlik:

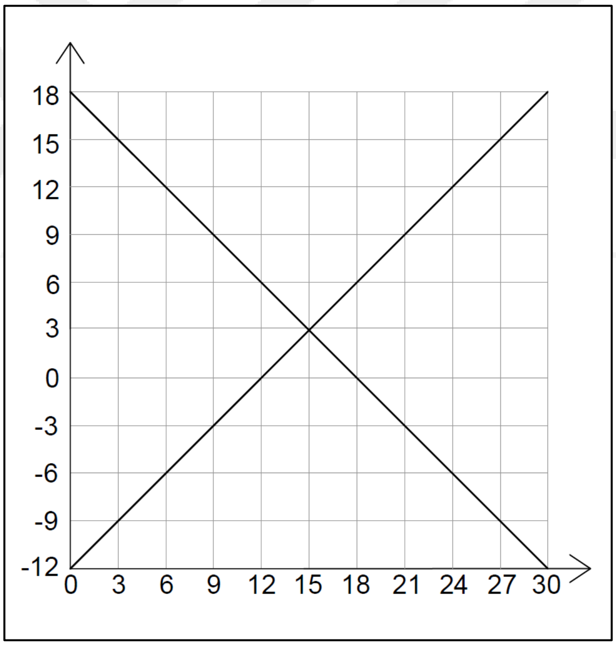
- Öncelikle sınıf 5'er kişilik 5 gruba ayrılır.
- Tahtaya daha önceden hazırlanmış 7 soru yansıtılır.
- Her bir gruba tahtadaki bir sorunun çözümü olan grafikleri içeren kağıtlar verilir. Toplamda beş sorunun (problem 1,2,4,5 ve 7) cevabı kağıtlarda olup 2 soru (problem 3 ve 6) çeldiricidir.
- Her bir gruptan kağıtlarındaki çözümün hangi soruya ait olduğu nedenleri ile birlikte belirtmeleri istenir.

Sorular:

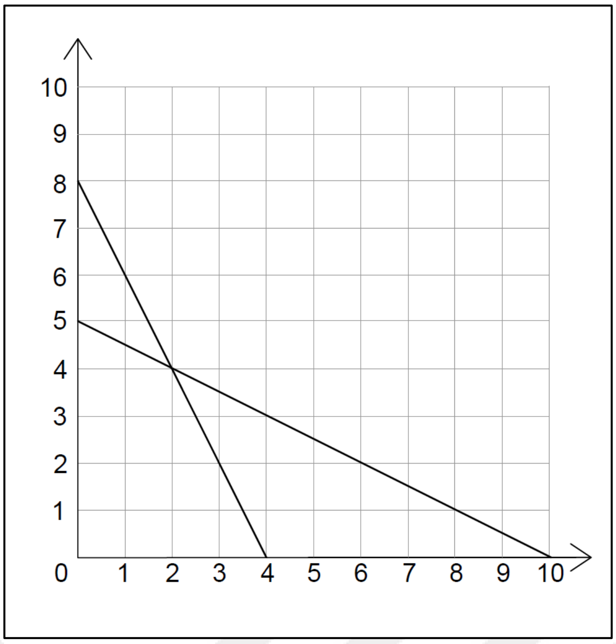
1) İçinde tavuk ve tavşanların olduğu bir kümeste 14 baş ve 40 ayak vardır. Bu kümeste kaç tavuk kaç tavşan vardır?
2) Ali ile Ayşe'nin yaşları toplamı 18'dir. 4 yıl sonra Ali'nin yaşı Ayşe'nin yaşının 4 katı olacaktır. Ali ile Ayşe'nin şimdiki yaşlarını bulunuz.
3) Toplamları 400, farkları 80 olan iki sayı kaçtır?
4) Elif hanım marketten 2kg un 1kg şeker alarak 8 TL ödüyor. Fatma hanım ise 1kg un ve 2kg şeker alarak 10 TL ödüyor. Buna göre un ve şekerin kilogramı kaçar liradır?
5) Bir çiftlikte toplam 20 tane tavuk ve horoz bulunmaktadır. Bu hayvanların ayak toplamlarının sayısı 30 ise tavuk ve horoz sayısı için ne söylenebilir?
6) Yusuf ve Ahmet'in yaşları toplamı 20'dir. 5 yıl sonra yaşları toplamı 30 olduğuna göre Yusuf ve Ahmet'in şu anki yaşları için ne söylenebilir?
7) Mehmet aldığı 2 defter ve 4 kalem için 12 TL ödemiştir. Eğer 3 defter ve 6 kalem almış olsaydı 18 TL ödeyeceğine göre defter ve kalemin fiyatları için ne söylenebilir?



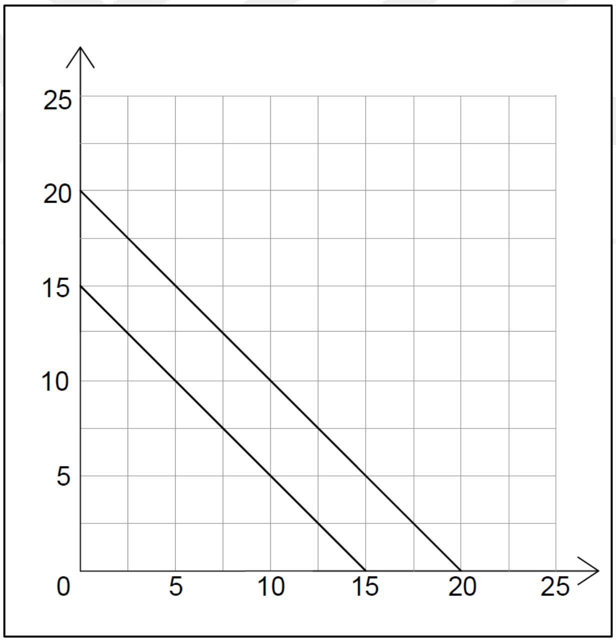
Şekil 3. Birinci probleme ait grafik



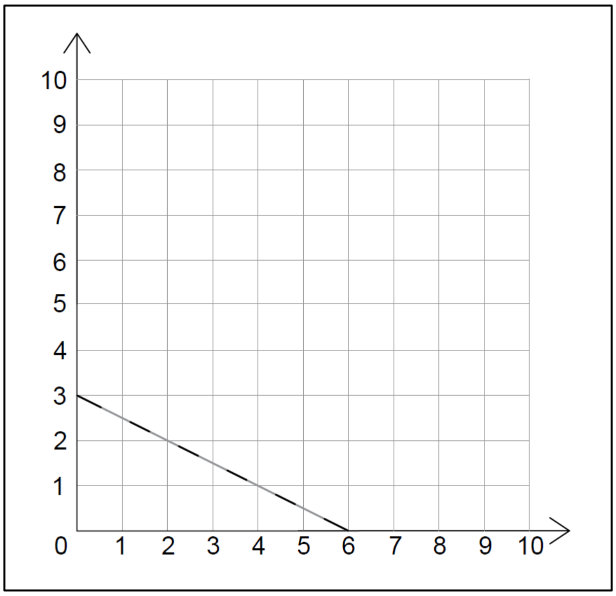
Şekil 4. İkinci probleme ait grafik



Şekil 5. Dördüncü probleme ait grafik



Şekil 6. Beşinci probleme ait grafik



Şekil 7. Yedinci probleme ait grafik

Sonuç (10 Dakika)

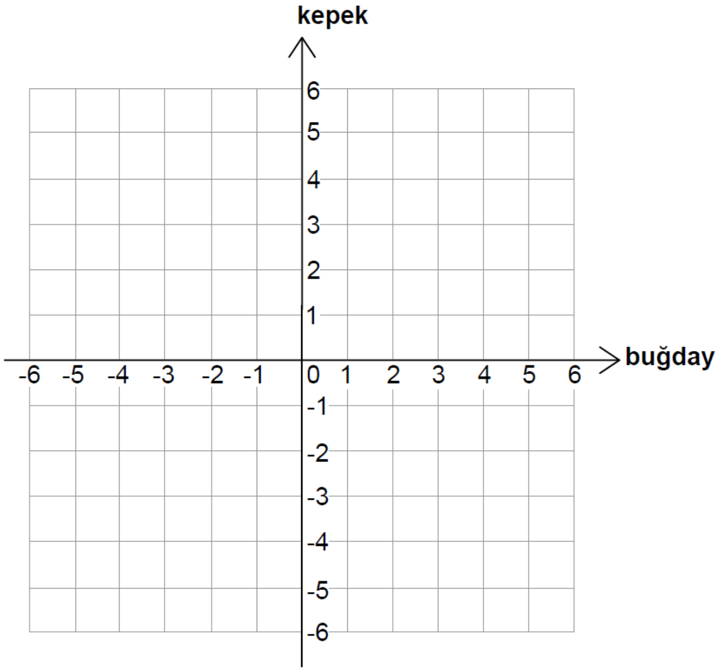
İki doğru tüm noktalarda çakışık ise yani sonsuz sayıda noktada kesişiyorsa doğrusal denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır ve denklemleri sağlayan tüm (x,y) ikilileridir.

İki doğru sadece bir noktada kesişiyorsa doğrusal denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu çözümde doğruların kesiştiği noktanın koordinatlarıdır.

İki doru paralel ise bu doğruların eğimi birbirine eşittir. İki doğru hiçbir noktada kesişmiyorsa doğrusal denklem sisteminin çözümü yoktur.

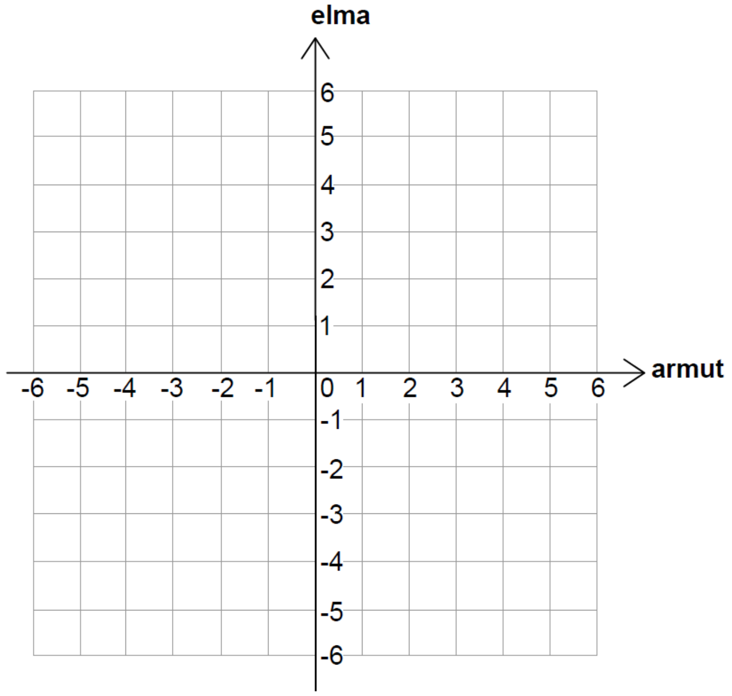
DERS 5 – ÖĞRENCİ ÇALIŞMA KAĞIDI

Örnek 1: Ahmet fırından bir buğday ekmeği ve bir kepek ekmeği alındığında 2TL, iki buğday ekmeği ve 2 kepek ekmeği aldığında ise 6TL vermektedir. Buna göre ekmeklerin fiyatları ne kadardır? Grafik yardımıyla ve cebirsel olarak çözünüz.



Cebirsel Çözüm:

Örnek 2: Mehmet manavdan bir kilo elma ve iki kilo armut alırsa 4TL, 2 kilo elma ve 4 kilo armut alırsa 8TL ödeyeceğine göre elma ve armudun kilosu ne kadardır? Grafik yardımıyla ve cebirsel olarak çözünüz.



Cebirsel Çözüm:

Etkinlik:

ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Deniz ADIYAMAN, 1987 yılında Malatya'da doğmuştur. İlköğrenimini Hidayet İlköğretim Okulu'nda, lise eğitimini Hacı Ahmet Akıncı Lisesi'nde tamamlamıştır. 2011 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun olmuştur. 2012 yılında Trabzon ili Arsin ilçesindeki Atayurt Ortaokulu'nda matematik öğretmeni olarak göreve başlamıştır. Evli ve iki kız çocuğu sahibi olan ADIYAMAN, Trabzon Yomra Merkez Ortaokulu'nda matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

Adres: Yomra Merkez Ortaokulu, Yomra/Trabzon

E-posta: dnzodbs@hotmail. com