T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MODÜLÜS FOKSİYONUNA GÖRE LACUNARY A- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS

Zelal ARICA
(163114003)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

ŞUBAT-2018
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Zelal ARICA tarafından hazırlanan "Bir Modülüs Fonksiyonuna Göre Lacunary A-İstatistiksel Yakınsaklık" adlı tez çalışması 02/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Mikail ET	....
Danışman Yrd. Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL	....
Üye Doç. Dr. Mahmut IŞIK	....
Üye Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Abdulkadir KARAKAŞ	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Koray ÖZRENK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Zelal ARICA
SİİRT-2018

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

1.GİRİŞ 1

2.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 3

3.REEL SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI 9

3.1. Reel Sayıların Sınırlı İstatistiksel Yakınsaklığı **10**

4.KUVVETLİ A −TOPLANABİLİRLİK VE A −İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 13

5.BİR MODÜLÜSE GÖRE LACUNARY KUVVETLİ A-YAKINSAKLIK 17

5.1. $\boldsymbol{N\theta(A,f)}$ Yakınsaklık 17
5.2. Lacunary A-İstatistiksel Yakınsaklık 21
5.3. Bir Modülüse Göre $\boldsymbol{\alpha}$. Dereceden Lacunary Kuvvetli $\boldsymbol{A}$ −Yakınsaklık ve $\boldsymbol{\alpha}$. Dereceden Lacunary $\boldsymbol{A}$ −İstatistiksel Yakınsaklık 24

6.MODÜLÜS FONKSİYONLARININ BİR DİZİSİNE GÖRE LACUNARY KUVVETLİ A-YAKINSAKLIK 31

6.1. $\boldsymbol{N\theta(A,\mathcal{F})}$ ve $\boldsymbol{N\theta(A)}$ Arasındaki Kapsama İlişkisi 32
6.2. $\boldsymbol{N\theta(A,\mathcal{F})}$ ve $\boldsymbol{S\theta(A)}$ Arasındaki Kapsama İlişkisi 34
6.3. Modülüs Fonksiyonlarının Bir Dizisine Göre $\boldsymbol{\alpha}$. Dereceden Lacunary Kuvvetli $\boldsymbol{A}$ −Yakınsaklık ve $\boldsymbol{\alpha}$. Dereceden Lacunary $\boldsymbol{A}$ −İstatistiksel Yakınsaklık 35

7.KAYNAKLAR 39

ÖZGEÇMİŞ 43

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltma	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
₵	: Kompleks sayılar kümesi
S	: İstatistiksel yakınsak olan dizilerin uzayı
W(A)	: Kuvvetli A-toplanabilir dizilerin uzayı
W(A, F)	: F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilir dizilerin uzayı
w(A, f)	: f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilir dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\ell}_\infty$	: Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
$\mathbf{m_0}$	: Reel terimli sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi
$\mathbf{N_\theta}$	: Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta}(\mathbf{A})$	: Lacunary kuvvetli A- yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta}(\mathbf{f})$	: f modülüs fonksiyonuna göre lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta}(\mathbf{A},\mathbf{f})$	: f modülüs fonksiyonuna göre lacunary kuvvetli A-yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{S_\theta}(\mathbf{A})$	: Lacunary A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta}(\mathbf{A},\boldsymbol{\mathcal{F}})$	: $\mathcal{F} = (f_i)$ modülüs fonksiyonların bir dizisine göre lacunary kuvvetli A-yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta^\alpha}(\mathbf{A})$	: α. dereceden lacunary kuvvetli A- yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta^\alpha}(\mathbf{f})$	: f modülüs fonksiyonuna göre α. dereceden lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta^\alpha}(\mathbf{A},\mathbf{f})$	: f modülüs fonksiyonuna göre α. dereceden lacunary kuvvetli A-yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{S_\theta^\alpha}(\mathbf{A})$	: α. dereceden lacunary A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbf{N_\theta^\alpha}(\mathbf{A},\boldsymbol{\mathcal{F}})$	: $\mathcal{F} = (f_i)$ modülüs fonksiyonların bir dizisine göre α. dereceden lacunary kuvvetli A- yakınsak dizilerin uzayı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BİR MODÜLÜS FOKSİYONUNA GÖRE LACUNARY A- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Zelal ARICA

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

Yıl 2018, 42 Sayfa

Bu çalışma altı bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, konunun tarihi geçmişi verilmiştir. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde, kuvvetli $A-$toplanabilirlik ve $A-$istatistiksel yakınsaklık ve onlarla ilgili kavramlar incelenmiştir. Beşinci bölümde, bir modülüse göre lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir. Altıncı bölümde, modülüs fonksiyonlarının bir dizisine göre lacunary kuvvetli A-yakınsaklık ve lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary dizisi, Lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık, Modulus fonksiyonu, Orlicz Fonksiyonu.

ABSTRACT

MS THESIS

LACUNARY A-STATISTICAL CONVERGENCE WITH RESPECT TO A MODULUS FUNCTION

Zelal ARICA

The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science
In Mathematics

Supervisior : Yrd. Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

Year 2018, 42 Pages

This study is composed of six parts. In the first chapter, the history of the subject is given. In the second part, basic definitions and theorems are given. In the third chapter, statistical convergence of real number sequences is examined. In the fourth chapter, strong A-summability and A-statistical convergence and concepts related to them are examined. In the fifth chapter, some relations between lacunary strong A-convergence and lacunary A-statistical convergence according to a modulus are examined. In the sixth chapter, the relation between lacunary strong A-convergence and lacunarya A-statistical convergence with respect to a sequence of modulus functions is investigated.

Keywords: Lacunary sequence, Lacunarya A-statistical convergence, Modulus function, Orlicz function, Statistical convergence.

1.GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) tarafından tanımlandı. İstatistiksel yakınsaklık daha sonra Connor (1988), Fridy (1985), Salat (1980) ve Schoenberg (1959) tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda istatistiksel yakınsaklık Kolk (1991), Çolak (2010), Çolak ve Altın (2013), Et (2014), Et ve ark., (2013), Işık (2004) ve daha birçok kişi tarafından çalışıldı. Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Fridy ve Orhan (1993) tarafından ve modülüs fonksiyonu kavramı Nakano (1953) tarafından verildi. Daha sonra lacunary istatistiksel yakınsaklık Bilgin (2001), Bilgin (2004), Savaş (2013), Şengül ve Et (2014) gibi birçok yazar tarafından çalışıldı. Connor (1989), Esi (1996), Kolk (1993), Maddox (1986), Maddox (1987), Öztürk ve Bilgin (1994), Pehlivan ve Fisher (1994), Ruckle (1973) ve diğerleri, dizi uzayları oluşturmak için bir modülüs fonksiyonu kullandı. Bu çalışmada da A bir negatif olmayan regüler matris toplanabilir metodu olmak üzere Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli $A-$toplanabilirlik, $A=(a_{ik})$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olmak üzere bir modülüs fonksiyonuna göre lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık, lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık ve modülüs fonksiyonunun bir dizisine göre lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık, lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir. Ayrıca $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere bir modülüs fonksiyonuna göre $\alpha.$ dereceden lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve $\alpha.$ dereceden lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramlarıyla birlikte modülüs fonksiyonlarının bir dizisine göre $\alpha.$ dereceden lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve $\alpha.$ dereceden lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

$X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya karmaşık sayıların bir cismi olmak üzere

$+: X \times X \to X$

$\cdot: K \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir. Her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in K$ için

i) $x + y = y + x$,

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

iii) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir θ vardır,

iv) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x)$ vardır,

v) $1.x = x$,

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (Maddox, 1970).

Tanım 2.2.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$

$x \to \|x\|$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

i) $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in K$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir. Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa$(X, \|.\|)$ ikilisine reel normlu uzay denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3.

R boş olmayan bir küme ve R üzerinde $"+"$ ve $"*"$ ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(R, +, *)$ cebirsel yapısına halka denir.

i) $(R, +)$ bir değişmeli grup,

ii) Her $a, b, c \in R$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$,

iii) Her $a, b, c \in R$ için $a * (b + c) = a * b + a * c$ ve $(a + b) * c = a * c + b * c$ dir (Dönmez, 2001).

Tanım 2.4.

R birimli bir halka, halkanın sıfır elemanı 0 ve halkanın birimi 1 olmak üzere $0 \neq 1$ olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye bir bölüm halkası denir. Değişmeli bir bölüm halkasına cisim denir (Dönmez, 2001).

Tanım 2.5.

i) $\emptyset \neq I \subset R$,

ii) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$,

iii) $\forall a \in I, \forall r \in R$ için $ar \in I (ra \in I)$,

oluyorsa I ya R halkasının ideali denir (Dönmez, 2001).

Tanım 2.6.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde yazılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.7.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall\, m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.8.

$(X, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.9.

$(X, \|.\|)$ normlu uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)| \tag{2.1}$$

normu ile normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.10.

Reel veya karmaşık terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere, w

$x + y = (x_k + y_k)$

$\alpha x = (\alpha x_k)$ (2.2)

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir (Goes ve Goes, 1970).

Tanım 2.11.

$(a_k)_0^\infty$ karmaşık sayıların bir dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = L \tag{2.3}$$

limiti mevcut ise $(a_k)_0^\infty$ dizisi L ye Cesàro yakınsaktır denir. Bu şekilde yakınsak olan dizilerin uzayı $(C, 1)$ olarak gösterilir (Powell ve Sham, 1972).

Tanım 2.12.

$x \in w$ ve p pozitif reel sayı olsun.

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0 \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir L karmaşık sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli p −Cesàro toplanabilirdir denir (Connor, 1988)

Tanım 2.13.

I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \epsilon [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{2.5}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pecaric ve ark., 1992).

Tanım 2.14.

K, $\mathbb{N}$ nin bir alt cümlesi ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Eğer $\delta(K) = \lim_n \frac{|K_n|}{n}$ limiti mevcut ise $\delta(K)$ sayısına K cümlesinin doğal yoğunluğu denir (Powell ve Sham, 1972).

Eğer $x = (x_k)$ doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için bir P özelliğini sağlayacak şekilde olan bir dizi ise, x_k hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve kısaca h.h.k. şeklinde gösterilir.

Tanım 2.15.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir. İstatistiksel yakınsak olan bütün dizilerin cümlesi S ile gösterilir. x in L ye istatistiksel yakınsak olması durumu $\lim_{k\to\infty} stat\, x_k = L$, $x \underset{stat}{\longrightarrow} L$ ve $x_k \to L(S)$ ifadelerinden hehangi biriyle göserilir (Fridy, 1985).

Tanım 2.16.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_m| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.7}$$

yani h.h.k için $|x_k - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

Tanım 2.17.

$A = (a_{nk})$, $(k, n = 1,2,\ldots,n)$ sonsuz bir matris olmak üzere verilen bir $x = (x_n)$ dizisi ve bu x dizisinin $A = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi için $\lim_n x_n = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu gerçekleniyorsa, bu durumda A matrisine regüler matris denir (Hardy, 1949).

Tanım 2.18.

$F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ olsun.

(i) $F(0) = 0$,

(ii) $x > 0$ için $F(x) > 0$,

(iii) $x \to \infty$ için $F(x) \to \infty$,

(iv) F sürekli ve azalmayan,

(v) F konveks,

koşullarını sağlayan F fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir. F Orlicz fonksiyonunun tanımındaki konvekslik şartı yerine $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$ alırsak bu F fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir (Krasnoselskii ve Ruttsky, 1961).

Tanım 2.19.

Eğer, $F(2u) \leq HF(u), (u \geq 0)$ olacak şekilde $H > 0$ sayısı bulunabiliyorsa F Orlicz fonksiyonuna her u değeri için $\Delta_2 -$ koşulunu sağlar denir. Δ_2 $-$koşulu, $t > 1$ ve her u değeri için $F(tu) \leq HtF(u)$ eşitsizliğinin gerçeklenmesine denktir (Krasnoselskii ve Ruttsky, 1961).

Teorem 2.20.

f bir modülüs ve $0 < \delta < 1$ olsun. $\|u\| \geq \delta$ için $f(\|u\|) \leq 2f(1)\delta^{-1}\|u\|$ dur (Pehlivan ve Fisher, 1995).

Tanım 2.21.

$\mathrm{A} = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Eğer $\forall i$ için $A_i\,(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_i\,(\mathrm{x}))$ şeklinde yazılır (Bilgin, 2001).

Tanım 2.22.

$0 \leq t \leq 1$ için

$$\chi_t(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq t \\ 0, & t < y \leq 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

şartını sağlayan χ_t fonksiyonuna $[0, t]$ aralığının karakteristik fonksiyonu denir. (Maddox, 1970)

3.REEL SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde reel sayı dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve sınırlı istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Lemma 3.1.

$x_k \to L(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = L$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ cümlesinin var olmasıdır (Salat, 1980).

İspat.

Keyfi bir ε sayısı verilmiş olsun. $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = L$ olduğundan $\forall n > n_0$ için $|x_{k_n} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}: |x_n - L| \geq \varepsilon\}$ olsun. $|x_{k_n} - L| < \varepsilon$ olduğundan $A_\varepsilon \subset \mathbb{N} - \{k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\}$ ve sağ taraftaki cümlenin asimptotik yoğunluğu sıfırdır. Böylece $\delta(A_\varepsilon) = 0$ olup $x_k \to L(S)$ dir.

Şimdi de $x_k \to L(S)$ olsun. $K_j = \left\{n \in \mathbb{N}: |x_n - L| < \frac{1}{j}\right\}$ $(j = 1,2,3, \dots)$ seçelim. İstatistiksel yakınsaklığın tanımına göre $\delta(K_j) = 1$ $(j = 1,2,3, \dots)$ dir. K_j nin tanımından $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \cdots$ ve $\delta(K_j) = 1$ olduğu açıktır. $v_1 \epsilon K_1$ olacak şekilde keyfi bir v_1 sayısı seçelim. $\delta(K_j) = 1$ $(j = 1,2,3, \dots)$ olduğuna göre $n \geq v_2$ için $v_2 > v_1$ olacak şekilde $v_2 \in K_2$ var olup $\frac{K_2(n)}{n} > \frac{1}{2}$ dir. $\delta(K_j) = 1$ olduğuna göre $n \geq v_3$ için $v_3 > v_2$ olacak şekilde $v_3 \in K_3$ var olup $\frac{K_3(n)}{n} > \frac{2}{3}$ dür. Bu şekilde devam edilerek pozitif tamsayıların $v_1 < v_2 < \cdots < v_j < \cdots$ olacak şekilde bir $v_j \in K_j (j = 1,2 \dots)$ dizisini oluşturabiliriz ve her bir $n \geq v_j$ için $\frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j}$ dir. K cümlesi yukarıda tanımladığımız gibi olsun. $\langle 1, v_1 \rangle$ aralığındaki her bir doğal sayı K ya ait, bununla birlikte $\langle v_j, v_{j+1} \rangle$ aralığındaki her bir doğal sayının K ya ait olması için gerek ve yeter şart $\langle v_j, v_{j+1} \rangle$ aralığındaki her bir doğal sayının $K_j (j = 1,2,3, \dots)$ ye ait olmasıdır. $v_j \leq n < v_{j+1}$ aralığındaki her n için $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \cdots$ ve $\frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j}$ olduğuna göre $\frac{K_n}{n} \geq \frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j}$ elde edilir. Buradan da $\delta(K) = 1$ olduğu açıktır. $\varepsilon > 0$ olsun. Bir j sayısı seçelim öyle ki $\frac{1}{j} < \varepsilon$ ve $n \in K$ için $n \geq v_j$ olsun. O zaman öyle bir $\ell \geq j$ vardır ki $v_\ell < n < v_{\ell+1}$ dir. K nın tanımına dayanarak $n \in K_\ell$ olup böylece $|x_n - L| < \frac{1}{\ell} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$ olur. Her $n \in K, n \geq v_j$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ olup, yani $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ dir.

Lemma 3.2.

$x_k \to L_1(S),\ y_k \to L_2(S)$ ve c bir reel sayı olsun. Bu takdirde

i) $(x_k + y_k) \to (L_1 + L_2)(S)$,

ii) $(cx_k) \to (cL_1)(S)$ dir (Salat, 1980).

3.1. Reel Sayıların Sınırlı İstatistiksel Yakınsaklığı

Teorem 3.1.1.

m_0 reel sayıların bütün sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini göstersin. m_0 cümlesi, m lineer normlu uzayının kapalı lineer alt uzayıdır (Salat, 1980).

İspat.

$x^{(n)} \in m_0\ \ (n = 1,2,\dots)$ ve $x^{(n)} \to x \in m$ olsun. $x \in m_0$ olduğunu göstereceğiz. Her n için kabulümüze göre reel sayıların bir dizisi (a_n) vardır ki $x^{(n)} \to a_n(S)\ \ (n = 1,2,\dots)$ dir, yani $x^{(n)} = \left(\xi_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ ise $\xi_k^{(n)} \to a_n(S)\ \ (n = 1,2,\dots)$ dır.

Aşağıdakileri ispatlamalıyız.

$a)$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi (reel sayıların), a reel sayısına yakınsaktır.

$b)$ $x \to a(S)$ (Yani $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, olmak üzere $\xi_k \to a(S)$) dir.

$a)$ *nın ispatı:* $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, m nin elemanlarının yakınsak bir dizisi olduğundan, $\varepsilon > 0$ ve her bir j ve $n > n_0$ için $\left\|x^{(j)} - x^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Lemma 3.1 e göre $A_j, A_n \subset \mathbb{N}$ cümleleri vardır ki $\delta(A_j) = \delta(A_n) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\epsilon A_j}} \xi_k^{(j)} = a_j$, $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\epsilon A_n}} \xi_k^{(n)} = a_n$ dir.

$A_j \cap A_n$ cümlesinin asimptotik yoğunluğu 1 olduğundan sonsuz cümledir.

$k \in A_j \cap A_n$ seçebiliriz öyle ki $\left|\xi_k^{(j)} - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\left|\xi_k^{(n)} - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür.

$\left\|x^{(j)} - x^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $\left|\xi_k^{(n)} - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\left|\xi_k^{(n)} - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ olduğundan her j, $n > n_0$ için

$\left|a_j - a_n\right| \le \left|a_j - \xi_k^{(j)}\right| + \left|\xi_k^{(j)} - \xi_k^{(n)}\right| + \left|\xi_k^{(n)} - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

$(a_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisine yakınsaklık için Cauchy şartı uygulanırsa a reel sayısına yakınsak olmak zorunda olup $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ dır.

$b)$ *nin ispatı :* $\eta > 0$ olsun. $\delta(A) = 1$ olacak şekilde $A \subset \mathbb{N}$ cümlesinin var olduğunu ispatlamak yeterlidir ve her bir $k \epsilon A$ için $|\xi_k - a| < \eta$ eşitsizliği sağlanır. $x^{(j)} \to x$ olduğundan $p \in \mathbb{N}$ vardır ki $\left\|x^{(p)} - x\right\| < \frac{\eta}{3}$ dir. Bu yolla bir p sayısı seçebiliriz ve $\left|a_p - a\right| < \frac{\eta}{3}$ eşitsizliği sağlanır.

$x^{(P)} \to a_p(S)$ olduğundan bir $A \subset \mathbb{N}$ cümlesi vardır ki $\delta(A) = 1$ ve her bir $k \epsilon A$ için $\left|\xi_k^{(p)} - a_p\right| < \frac{\eta}{3}$ dür. $\left\|x^{(p)} - x\right\| < \frac{\eta}{3}$, $\left|a_p - a\right| < \frac{\eta}{3}$ ve $\left|\xi_k^{(p)} - a_p\right| < \frac{\eta}{3}$ olduğundan her bir $k \epsilon A$ için $|\xi_k - a| \leq \left|\xi_k - \xi_k^{(p)}\right| + \left|\xi_k^{(p)} - a_p\right| + \left|a_p - a\right| < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$ dır.

4.KUVVETLİ A −TOPLANABİLİRLİK VE A −İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 4.1.

$A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler matris toplanabilirlik metodu olsun. e bütün terimleri 1 olan diziyi göstermek üzere

$$W_0(A)=\left\{x\in w:\ \lim_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}|x_k|=0\right\}$$

ve

$W(A)=\{x\ \in w:\ x-Le\ \in W_0(A)\ en\ az\ bir\ L\ için\}$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x\in W\ (A)$ ise x dizisi L sayısına kuvvetli A −toplanabilirdir denir (Demirci, 1996).

Tanım 4.2.

K pozitif tamsayıların bir alt cümlesi, e bütün terimleri 1 olan dizi olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. $K(x;\varepsilon)=\{k\ \in\mathbb{N}:|x_k|\geq\varepsilon\}$ ifadesinin karakteristik fonksiyonunu $\chi_{K(x;\varepsilon)}$ ile gösterelim. Her $\varepsilon>0$ için $\chi_{K(x-Le;\varepsilon)}\in W_0(A)$ ise x dizisi L sayısına $A-$ istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $x\to L(S(A))$ ve $S(A)=\{x\in w:\ x\to L(AS)\ en\ az\ bir\ L\ için\}$ yazılır (Connor, 1989; Kolk, 1991).

Connor (1989) ve Kolk (1991) tarafından verilen, bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A −toplanabilme tanımına benzer olarak bir F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli $A-$ toplanabilme tanımını verebiliriz.

Tanım 4.3.

F bir Orlicz fonksiyonu ve $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilirlik metodu olacak şekilde

$$W_0(A,F)=\left\{x\in w:\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}F(|x_k|)=0\right\}$$

ve

$W(A,F)=\{x\in w:x-Le\in W_0(A,F)\ \ en\ az\ bir\ L\ için\}$

dizi uzaylarını tanımlayalım. Eğer $x\in\ W(A,F)$ ise x dizisi L sayısına F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli $A-$ toplanabilirdir denir.

$\varDelta_2$ −koşulunu sağlayan bir Orlicz fonksiyonu için $W_0(A) \subseteq W_0(A,F)$ ve $W(A) \subseteq W(A,F)$ dir (Demirci, 1996).

Lemma 4.4.

F, $\varDelta_2$ −koşulunu sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matris toplanabilirlik metodu olsun. Bu durumda $W_0(A,F) \cap \ell_\infty$, ℓ_∞ da bir idealdir (Demirci, 1996).

İspat.

$x \in W_0(A,F)$ ve $y \in \ell_\infty$ olsun. $xy = (x_k y_k) \in W_0(A,F) \cap \ell_\infty$ olduğunu göstermeliyiz. $y \epsilon \ell_\infty$ olduğundan $\|y\| < H_1$ olacak şekilde bir $H_1 > 1$ sayısı vardır. O halde her k için $|x_k y_k| < H_1 |x_k|$ dır. F, azalmayan ve $\varDelta_2$ − koşulunu sağladığından $F(|x_k y_k|) < F(H_1 |x_k|) \leq H H_1 F(|x_k|)$ $(H > 0)$ elde edilir. Bununla birlikte

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k|) = 0 \tag{4.1}$$

olduğundan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k y_k|) = 0 \tag{4.2}$$

sonucuna ulaşılır. O halde $xy \in W_0(A,F) \cap \ell_\infty$.

Lemma 4.5.

M, ℓ_∞ da bir ideal ve $x \in \ell_\infty$ olsun. x in, ℓ_∞ da M nin kapanışında olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\chi_{K(x;\varepsilon)} \in M$ olmasıdır (Connor, 1989).

Lemma 4.6.

A negatif olmayan regüler bir toplanabilirlik metodu ise $W_0(A) \cap \ell_\infty$, ℓ_∞ uzayının kapalı bir idealidir (Freedman ve Sember, 1981).

Teorem 4.7.

x sınırlı bir dizi olsun. F, $\varDelta_2$ −koşulunu sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$, negatif olmayan regüler bir toplanabilirlik metodu olsun. Bu takdirde $W(A,F) \cap \ell_\infty = W(A) \cap \ell_\infty$ dur (Demirci, 1996).

İspat.

$W_0(A,F) \cap \ell_\infty = W_0(A) \cap \ell_\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. $W_0(A) \subseteq W_0(A,F)$ olduğundan $W_0(A) \cap \ell_\infty \subseteq W_0(A,F) \cap \ell_\infty$ dur. $W_0(A,F) \cap \ell_\infty \subseteq W_0(A) \cap \ell_\infty$ olduğunu gösterelim. Her $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F\left(\chi_{K(x;\varepsilon)}(k)\right) = F(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \chi_{K(x;\varepsilon)}(k) \tag{4.3}$$

yazabiliriz. $x \epsilon W_0(A,F) \cap \ell_\infty$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $y \in \ell_\infty$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k}, & |x_k| \geq \varepsilon \ ise \\ 0, & aksi\ halde \end{cases} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlarsak $xy = \chi_{K(x;\varepsilon)}$ ve $\chi_{K(x;\varepsilon)} \in W_0(A,F) \cap \ell_\infty$ olduğundan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F\left(\chi_{K(x;\varepsilon)}(k)\right) = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece (4.3) den

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x;\varepsilon)}(k) = 0 \tag{4.6}$$

bulunur. Lemma 4.6 dan $x \in W_0(A) \cap \ell_\infty$ olduğu görülür. Bu durumda $W_0(A,F) \cap \ell_\infty \subseteq W(A) \cap \ell_\infty$ dur.

Şimdi de $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler toplanabilirlik metodu olmak üzere $A-$ istatistiksel yakınsaklık ve Δ_2 $-$koşulunu sağlayan bir F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A $-$toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 4.8.

F, Δ_2 $-$koşulunu sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler toplanabilirlik metodu olsun. Bu durumda

i) $W(A,F) \subset S(A)$,

ii) $S(A) \cap \ell_\infty \subset W(A,F)$,

iii) $S(A) \cap \ell_\infty = W(A,F) \cap \ell_\infty$ dur (Demirci, 1996).

İspat.

(i) $x \in W(A,F)$ ve $y \in \ell_\infty$ olsun. $y \in \ell_\infty$ olduğundan $\|y\| < H_1$ olacak şekilde $H_1 > 1$ sayısı bulunabilir. Bu durumda her k için $|x_k y_k| < H_1 |x_k|$ dır. F, azalmayan ve Δ_2- koşulunu sağladığından $F(|x_k y_k|) < H H_1 F(|x_k|), (H > 0)$ elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, F(|x_k y_k|) \leq H H_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, F(|x_k|) \to 0, (n \to 0) \tag{4.7}$$

olur ve

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, F(|x_k y_k|) = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir.

Bu durumda $xy \in W_0(A,F)$ olur. y dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k}, & |x_k| \geq \varepsilon \; ise \\ 0, & aksi \; halde \end{cases} \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 4.7 den $xy = \chi_{K(x;\varepsilon)} \in W_0(A,F) \cap \ell_\infty = W_0(A) \cap \ell_\infty$ elde edilir. Dolayısıyla x, sıfıra A −istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x \in S(A) \cap \ell_\infty$ olsun. Tanımdan her $\varepsilon > 0$ için $K(x - Le;\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\chi_{K(x-Le;\varepsilon)} \in W_0(A) \cap \ell_\infty$ dur. Şimdi Lemma 4.5 ve Lemma 4.6 dan $x - Le$ sıfıra kuvvetli $A -$ toplanabilirdir ve Teorem 4.7 den $x \in W(A,F)$ elde edilir.

(iii) (i) ve (ii) den elde edilir.

Bilindiği gibi bir dizi L sayısına $A-$ istatistiksel yakınsak ise aynı L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Kolk, 1991).

Sonuç 4.9.

x dizisi, Δ_2– şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli A −toplanabilir ise x, L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Demirci, 1996).

5.BİR MODÜLÜSE GÖRE LACUNARY KUVVETLİ A-YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir modülüse göre lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve lacunary $A-$istatistiksel yakınsaklık arasındaki bazı ilişkiler incelenecektir. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ için bir modülüse göre $\alpha.$ dereceden lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve $\alpha.$ dereceden $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp, bazı kapsama ilişkileri verilecektir.

$\theta = (k_r)$ pozitif tamsayıların bir dizisi, $r \to \infty$ için $0 < k_r < k_{r+1}$ ve $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ şartlarını sağlıyorsa lacunary dizisi olarak adlandırılır. θ tarafından belirlenen aralıklar I_r=$(k_{r-1}, k_r]$ olarak gösterilir ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ dir (Freedman ve ark., 1978).

Freedman ve ark. (1978) tarafından lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı N_θ

$$N_\theta = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} |x_i - L| = 0 \; en\; az\; bir\; L\; için \right\}$$

şeklinde tanımlandı.

Pehlivan ve Fisher (1994) tarafından lacunary kuvvetli yakınsaklık

$$N_\theta(f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} f(|x_i - L|) = 0 \; en\; az\; bir\; L\; için \right\}$$

şeklinde genelleştirildi.

5.1. $N_\theta(A, f)$ Yakınsaklık

Tanım 5.1.1.

A = (a_{ik}) karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve f bir modülüs olmak üzere

$$N_\theta\,(A, f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|) = 0 \; en\; az\; bir\; L\; için \right\}$$

ve

$$N_\theta^0(A,f)=\left\{x=(x_i):\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}f(|A_i(x)|)=0\right\}$$

tanımlayalım. Eğer $x\in N_\theta(A,f)$ olacak şekilde karmaşık bir L sayısı varsa, $x=(x_k)$ dizisi bir modülüse göre L sayısına lacunary kuvvetli $A-$yakınsaktır denir. $f(x)=x$ ise $N_\theta\,(A,f)=N_\theta\,(A)$ ve $N_\theta^0(A,f)=N_\theta^0(A)$ dır. $x\in N_\theta\,(A)$ ise x,L ye lacunary kuvvetli $A-$yakınsaktır denir. f modülüsüne göre x, L sayısına lacunary kuvvetli $A-$yakınsak ise $x_i\to L\big(N_\theta(A,f)\big)$ yazarız. $A=I$ birim matris ise sırasıyla $N_\theta(A,f)$ ve $N_\theta^0(A,f)$ için $N_\theta(f)$ ve $N_\theta^0(f)$ yazarız. $N_\theta(A,f)$ ve $N_\theta^0(A,f)$ lineer uzaylardır.

$N_\theta^0(A,f)$ uzayının lineer uzay olduğunu gösterelim. $x,y\in N_\theta^0(A,f)$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ olsun. $|a|\le T_a$ ve $|b|\le T_b$olacak şekilde T_a,T_b tam sayıları vardır.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}f(|aA_i(x)+bA_i(y)|)\le T_a\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}f(|A_i(x)|)+T_b\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}f(|A_i(y)|)\qquad(5.1.1)$$

elde edilir ki $ax+by\in N_\theta^0(A,f)$ dir (Bilgin, 2001).

Şimdi lacunary kuvvetli $A-$yakınsaklık ve bir modülüse göre lacunary kuvvetli

$A-$yakınsaklık arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 5.1.2.

f bir modülüs olsun. $N_\theta\,(A)\subseteq N_\theta\,(A,f)$ ve $N_\theta^0(A)\subseteq N_\theta^0(A,f)$ dir (Bilgin, 2001).

İspat.

$N_\theta\,(A)\subseteq N_\theta\,(A,f)$ olduğunu gösterelim. $x\in N_\theta\,(A)$ ve $\varepsilon>0$ olsun. $0\le u\le\delta$ şartını sağlayan her u için $f\,(u)<\varepsilon$ olacak şekilde $0<\delta<1$ seçelim.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}f(|A_i(x)-L|)=\frac{1}{h_r}\sum_{1}f(|A_i(x)-L|)+\frac{1}{h_r}\sum_{2}f(|A_i(x)-L|)\qquad(5.1.2)$$

yazabiliriz ve ilk toplam $|A_i(\mathrm{x})-\mathrm{L}|\le\delta$ üzerinde ve ikinci toplam $|A_i\,(\mathrm{x})-\mathrm{L}|>\delta$ üzerindedir.

f nin tanımından

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|) \le \varepsilon + 2f(1)\frac{1}{\delta}\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| \qquad (5.1.3)$$

elde edilir. Böylece $x \in N_\theta\,(A,f)$ dir.

Teorem 5.1.3.

f bir modülüs olsun. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise $N_\theta\,(A) = N_\theta\,(A,f)$ dir (Bilgin, 2001).

İspat.

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise her $t > 0$ için $f(t) \ge \beta t$ dir. $x \in N_\theta\,(A,f)$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|) \ge \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}\beta|A_i(x)-L| = \beta\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| \qquad (5.1.4)$$

yazabiliriz. Böylece $x \in N_\theta\,(A)$ dır. Teorem 5.1.2 kullanılarak ispat tamamlanır.

$\beta > 0$ olması esastır. $\beta = 0$ ise eşitlik sağlanmayabilir. Gerçekten; $\beta = 0$ olsun.

$A = I$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ olduğunu düşünelim. (x_i), $i \in I_r$ için ilk terimi h_r ve diğer terimleri sıfır olan bir dizi olsun.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)|) = \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}\sqrt{|x_i|} = \frac{1}{h_r}\sqrt{|h_r|} \to 0, (r\to\infty\ için) \qquad (5.1.5)$$

ve böylece $x \in N_\theta\,(A,f)$ dir. Ancak

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)| = \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|x_i| = \frac{1}{h_r}h_r \to 1, (r\to\infty\ için) \qquad (5.1.6)$$

ve böylece $x \notin N_\theta\,(A)$ elde edilir.

Teorem 5.1.4.

f bir modülüs fonksiyonu olsun.

i) liminf $q_r > 1$ için $w(A,f) \subseteq N_\theta\,(A,f)$,

ii) limsup $q_r < \infty$ için $N_\theta\,(A,f) \subseteq w(A,f)$,

iii) $1 < \lim\inf_r q_r \le \lim\sup_r q_r < \infty$ ise $w(A,f) = N_\theta\,(A,f)$ dir, burada

$$w(A,f)=\left\{x=(x_i):\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(|A_i\,(x)-L\,|\,)\ en\ az\ bir\ L\ için\right\}$$

dır (Esi, 1996).

İspat.

i) $x \in w(A,f)$ ve $\liminf q_r > 1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük r ler için $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\delta$, $\left(\frac{h_r}{k_r}\right) \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ ve $\left(\frac{k_r}{h_r}\right) \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r} f(|A_i\,(x)-L\,|\,) \geq \frac{1}{k_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|) = \left(\frac{h_r}{k_r}\right)\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|)$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|) \qquad (5.1.7)$$

yazabiliriz. Buradan $x \in N_\theta\,(A,f)$ dir.

ii) $\limsup q_r < \infty$ ise, her r için $q_r < K$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. Şimdi $x \in N_\theta\,(A,f)$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunu varsayalım. Her $m \geq m_0$ için m_0 vardır ki

$H_m = \frac{1}{h_m}\sum_{i\in I_m} f(|A_i(x)-L|) < \varepsilon$ dur. Böylece her m için $H_m \leq T$ olacak şekilde $T > 0$ bulabiliriz. n, $k_r \geq n > k_{r-1}$ olacak şekilde bir tamsayı olsun.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(|A_i(x)-L|) \leq \frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r} f(|A_i(x)-L|)$$

$$\leq \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sum_{m=1}^{m_0}+\sum_{m=m_0+1}^{k_r}\right)\sum_{i\in I_m} f(|A_i(x)-L|)$$

$$=\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{i\in I_m} f(|A_i(x)-L|)+\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{m=m_0+1}^{k_r}\sum_{i\in I_m} f(|A_i(x)-L|)$$

$$\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{i \in I_m} f(|A_i(x) - L|) + \varepsilon(k_r - k_{m_0}) \frac{1}{k_{r-1}}$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}} \left(h_1 H_1 + h_2 H_2 + \cdots + h_{m_0} H_{m_0}\right) + \varepsilon(k_r - k_{m_0}) \frac{1}{k_{r-1}}$$

$$\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{1 \leq i < m_0} H_i \, k_{m_o} \right) + \varepsilon K$$

$$< \frac{1}{k_{r-1}} k_{m_o} T + \varepsilon K \tag{5.1.8}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in w(A, f)$ olduğu sonucu elde edilir. (iii), (i) ve (ii) kullanılarak ispatlanır.

Aşağıdaki teorem Teorem 5.1.3. ve Teorem 5.1.4. den elde edilir.

Teorem 5.1.5.

f bir modülüs fonksiyonu olsun.

$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ve $1 < \lim \inf_r q_r \leq \lim \sup_r q_r < \infty$ ise $N_\theta(A) = w(A, f)$ dir (Bilgin, 2001).

5.2. Lacunary A-İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.2.1.

θ lacunary dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty} h_r^{-1} |K_\theta(\varepsilon)| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $|K_\theta(\varepsilon)|$, $K_\theta(\varepsilon) = \{i \in I_r : |x_i - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısını belirtmektedir. Lacunary istatistiksel yakınsak olan dizilerin cümlesi S_θ ile gösterilir.

Tanım 5.2.2.

$A = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty} h_r^{-1} |KA_\theta(\varepsilon)| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary A −istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $|KA_\theta(\varepsilon)|$, $KA_\theta(\varepsilon) = \{i \in I_r : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısını belirtir. Lacunary A −istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi $S_\theta(A)$ ile gösterilir.

Bu bölümde

$I_r^1 = \{i \in I_r : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\} = \mathrm{K}A_\theta(\varepsilon)$ ve

$I_r^2 = \{i \in I_r : |A_i(x) - L| < \varepsilon\}$ olarak alınacaktır.

Teorem 5.2.3.

A, sınırlama yöntemi olsun.

i) $x_i \to L(N_\theta\,(A))$ ise $x_i \to L\big(S_\theta\,(A)\big)$,

ii) x sınırlı ve $x_i \to \mathrm{L}(S_\theta\,(A))$ ise $x_i \to L(N_\theta\,(A))$,

iii) x sınırlı bir dizi ise $S_\theta\,(A) = N_\theta\,(A)$ dır (Bilgin, 2001).

İspat.

i) İspatın bu kısmında A sınırlama yöntemine ihtiyacımız yoktur. $\varepsilon > 0$ ve $x_i \to L(N_\theta\,(A))$ ise

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x) - L| \geq \frac{1}{h_r}|\mathrm{K}A_\theta(\varepsilon)|\varepsilon \tag{5.2.1}$$

yazabiliriz. Yani $x_i \to L(S_\theta\,(A))$ olur.

ii) x in, L ye lacunary A −istatistiksel yakınsak olduğunu varsayalım. x sınırlı ve A sınırlama yöntemi olduğundan, her i için $|A_i(x) - L| \leq \mathrm{T}$ olacak şekilde $\mathrm{T} > 0$ sabit sayısı vardır. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x) - L| = \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^1}|A_i(x) - L| + \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^2}|A_i(x) - L| \leq T\frac{1}{h_r}|\mathrm{K}A_\theta(\varepsilon)| + \varepsilon. \tag{5.2.2}$$

$\varepsilon \to 0$ için limit alırsak istenilen sonucu elde ederiz. (i) ve (ii) den (iii) elde edilir.

Şimdi lacunary A −istatistiksel yakınsaklık ve bir modülüse göre lacunary kuvvetli A −yakınsaklık arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 5.2.4.

i) f bir modülüs fonksiyonu, $x_i \to L(N_\theta\,(A,f))$ ise $x_i \to L(S_\theta\,(A))$ dır,

ii) f sınırlı ve $x_i \to L(S_\theta\,(A))$ ise $x_i \to L(N_\theta\,(A,f))$ dir,

iii) f sınırlıysa $S_\theta\,(A)$= $N_\theta\,(A,f)$ dir (Bilgin, 2001).

İspat.

i) f bir modülüs fonksiyonu olsun. $\varepsilon > 0$ ve $x_i \to L(N_\theta\,(A,f))$ ise

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|) \ \geq \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^1} f(|A_i(x) - L|) > \frac{1}{h_r}|KA_\theta(\varepsilon)\ |f(\varepsilon) \qquad (5.2.3)$$

yazabiliriz. Yani $x_i \to L(S_\theta\,(A)\ )$ olur.

ii) f in sınırlı olduğunu varsayalım. f sınırlı olduğundan, her $x \geq 0$ için $f(x) \leq T$ olacak şekilde T tam sayısı vardır. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\textstyle\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|) \ \leq \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^1} f(|A_i(x) - L|) + \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^2} f(|A_i(x) - L|)$$

$$\leq T\frac{1}{h_r}|\mathrm{K}A_\theta(\varepsilon)\ | + f(\varepsilon) \qquad (5.2.4)$$

yazabiliriz. f sürekli, ve $x_i \to L(S_\theta\,(A))$ olduğundan $\varepsilon \to 0$ için $x_i \to L(N_\theta\,(A,f))$ dir. (i) ve (ii) den (iii) elde edilir.

f sınırlı olmadığında $S_\theta\,(A)\ \neq N_\theta\,(A,f)$ olduğunu göstermek için bir örnek verelim. $A = I$ olduğunu düşünelim. f sınırsız olduğundan $f(y_i)\ \geq h_i$ olacak şekilde $0 < y_1 < y_2 < \cdots$ pozitif sayıların bir (y_i) dizisi vardır. $x = (x_i)$ dizisini, $i = 1, 2, \ldots$ için $x_{k_i} = y_i$ ve aksi durumda $x_i = 0$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $x \in S_\theta(A)$, fakat $x \notin N_\theta(A,f)$ dir.

Lemma 5.2.5.

$\liminf q_r > 1$ ise, $x_i \to L(S)$ iken $x_i \to L(S_\theta)$ dır (Fridy, 1985).

Teorem 5.2.6.

$\liminf q_r > 1$, A regüler ve f sınırlı olsun. $x_i \to L$ ise $x_i \to L(N_\theta\,(A,f))$ dir (Bilgin, 2001).

İspat.

$x_i \to L$ olsun. A regüler olduğundan ve istatistiksel yakınsaklık tanımından $A_i(x) \ \to \ L(S)$ dir. $liminf\ q_r > 1$ olduğundan ve Lemma 5.2.5. den $A_i(x) \ \to \ L(S_\theta)$ yani $x_i \to \ L(S_\theta\,(A))$ olur. Böylece Teorem 5.2.4. kullanılarak $x_i \to L(N_\theta\,(A, f))$ bulunur.

5.3. Bir Modülüse Göre α. Dereceden Lacunary Kuvvetli A −Yakınsaklık ve α. Dereceden Lacunary A −İstatistiksel Yakınsaklık

Bu alt başlık altında, yeni kavramlar olan, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bir modülüse göre α. dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsaklık ve α. dereceden lacunary A −istatistiksel yakınsaklık kavramları verilecektir. Bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri incelenecektir.

Tanım 5.3.1.

$A = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve f bir modülüs olmak üzere $0 < \alpha \leq 1$ için

$$N_\theta^\alpha(A, f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} f(|A_i(x) - L|) = 0 \ \ en\ az\ bir\ L\ \ için \right\}$$

ve

$$N_\theta^{0,\alpha}(A, f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} f(|A_i(x)|) = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımlayalım. Eğer $x \in N_\theta^\alpha(A, f)$ olacak şekilde karmaşık bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi bir modülüse göre L sayısına α. dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsaktır denir. $f(x) = x$ ise $N_\theta^\alpha(A, f) = N_\theta^\alpha(A)$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(A, f) = N_\theta^{0,\alpha}(A)$ dır. $x \in N_\theta^\alpha(A)$ ise x, L ye α. dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsaktır denir. f modülüsüne göre x, L sayısına α. dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsak ise bu yakınsaklık $x_i \to L\left(N_\theta^\alpha(A,f)\right)$ ile gösterilir. $A = I$ birim matris ise sırasıyla $N_\theta^\alpha(A,f)$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(A,f)$ için $N_\theta^\alpha(f)$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(f)$ yazarız. $N_\theta^\alpha(A,f)$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(A,f)$ lineer uzaylardır.

$N_\theta^{0,\alpha}(A,f)$ uzayının lineer uzay olduğunu gösterelim. $x,y \in N_\theta^{0,\alpha}(A,f)$ ve $a,b \in \mathbb{C}$ olsun. $|a| \le T_a$ ve $|b| \le T_b$ olacak şekilde T_a, T_b tam sayıları vardır.

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f(|aA_i(x)+bA_i(y)|) \le T_a\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)|) + T_b\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(y)|) \qquad (5.3.1)$$

elde edilir ki $ax+by \in N_\theta^{0,\alpha}(A,f)$ dir.

Tanım 5.3.2.

θ lacunary dizisi ve $0 < \alpha \le 1$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\alpha}|K_\theta\ (\varepsilon)| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $|K_\theta\ (\varepsilon)|$, $K_\theta\ (\varepsilon) = \{i \in I_r : |x_i - L| \ge \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısını belirtir. α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olan dizilerin cümlesini S_θ^α ile gösterilir.

Tanım 5.3.3.

A $= (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve $0 < \alpha \le 1$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\alpha}|KA_\theta(\varepsilon)| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına α. dereceden lacunary A −istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $|KA_\theta(\varepsilon)|$, $KA_\theta(\varepsilon) = \{i \in I_r : |A_i(x) - L| \ge \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısını belirtir. α. dereceden lacunary A −istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini $S_\theta^\alpha(A)$ ile gösterilir. $\theta = 2^r$ alınırsa $S_\theta^\alpha(A)$ yerine $S^\alpha(A)$ yazılır.

Teorem 5.3.4.

f bir modülüs olsun. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise $0 < \alpha \le 1$ için $N_\theta^\alpha(A,f) \subseteq N_\theta^\alpha(A)$ dır.

İspat.

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise her $t > 0$ için $f(t) \ge \beta t$ dir. $x \in N_\theta^\alpha(A,f)$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x)-L|) \ge \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r}\beta|A_i(x)-L| = \beta\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| \qquad (5.3.2)$$

yazabiliriz. Böylece $x \in N_\theta^\alpha(A)$ dır.

$\beta > 0$ olması gerekir. $\beta = 0$ ise kapsama sağlanmayabilir. Gerçekten; $\beta = 0$ olsun. $A = I, L = 0$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ olduğunu düşünelim. (x_i), $i \in I_r$ için ilk terimi h_r ve diğer terimleri sıfır olan bir dizi olsun. $\alpha > \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} f(|A_i(x)|) = \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} \sqrt{|x_i|} = \frac{1}{h_r^\alpha} \sqrt{|h_r|} \to 0, (r \to \infty \; için) \tag{5.3.3}$$

ve böylece $x \in N_\theta^\alpha(A, f)$ dir. Ancak $\alpha = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} |A_i(x)| = \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r^\alpha} h_r \to 1, (r \to \infty \; için) \tag{5.3.4}$$

ve

$\alpha < 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} |A_i(x)| = \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r^\alpha} h_r \to \infty, (r \to \infty \; için) \tag{5.3.5}$$

olup, böylece $x \notin N_\theta^\alpha(A)$ olduğu görülür.

Teorem 5.3.5.

f bir modülüs fonksiyonu olsun. $0 < \alpha \le 1$ için

i) liminf $q_r > 1$ ise $w^\alpha(A, f) \subseteq N_\theta^\alpha(A, f)$,

ii) limsup $\frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < \infty$ ise $N_\theta \; (A, f) \subseteq w^\alpha(A, f)$, burada

$$w^\alpha(A, f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^{n} f(|A_i\,(x) - L\,|\,)\; en \; az \; bir \; L \; için \right\}$$

dır.

İspat.

i) $x \in w^\alpha(A, f)$ ve lim inf $q_r > 1$ olsun. Bu durumda $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \ge 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $0 < \alpha \le 1$ için

$\left(\frac{h_r}{k_r}\right) \geq \frac{\delta}{1+\delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{k_r^{\alpha}}\sum_{i=1}^{k_r} f(|A_i\,(x) - L\,|\,) \geq \frac{1}{k_r^{\alpha}}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|) = \left(\frac{h_r^{\alpha}}{k_r^{\alpha}}\right)\frac{1}{h_r^{\alpha}}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|)$$

$$\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha}\frac{1}{h_r^{\alpha}}\sum_{i\in I_r} f(|A_i(x) - L|) \tag{5.3.6}$$

olur. Bu da $x \in N_{\theta}^{\alpha}(A,f)$ demektir.

ii) limsup $\frac{k_r}{k_{r-1}^{\alpha}} < \infty$ olsun. Bu durumda $r \geq 1$ için $\frac{k_r}{k_{r-1}^{\alpha}} < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. $x \in N_{\theta}^{0}(A,f)$ olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $i = 1,2,3,\ldots$ için $\sup_{i\geq R}\tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < K$ olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayıları bulabiliriz. t tamsayısı $k_{r-1} < t \leq k_r$ aralığında olsun. $r > R$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{t^{\alpha}}\sum_{i=1}^{t} f(|A_i(x)|) \leq \frac{1}{k_{r-1}^{\alpha}}\sum_{i=1}^{k_r} f(|A_i(x)|)$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}^{\alpha}}\left(\sum_{I_1} f(|A_i(x)|) + \sum_{I_2} f(|A_i(x)|) + \cdots + \sum_{I_r} f(|A_i(x)|)\right)$$

$$= \frac{k_1}{k_{r-1}^{\alpha}}\tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}^{\alpha}}\tau_2 + \cdots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}^{\alpha}}\tau_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}^{\alpha}}\tau_{R+1} + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}^{\alpha}}\tau_r$$

$$\leq \left(\sup_{i\geq 1}\tau_i\right)\frac{k_R}{k_{r-1}^{\alpha}} + \left(\sup_{i\geq R}\tau_i\right)\frac{k_r - k_R}{k_{r-1}^{\alpha}} < K\frac{k_R}{k_{r-1}^{\alpha}} + \varepsilon M \tag{5.3.7}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in w^{0,\alpha}(A,f)$ dir.

Teorem 5.3.6.

A, sınırlama yöntemi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için $x_i \to L(N_{\theta}^{\alpha}(A))$ ise $x_i \to L\big(S_{\theta}^{\alpha}(A)\big)$ dır.

İspat.

$\varepsilon > 0$ ve $x_i \to L(N_\theta^\alpha(A))$ ise

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| = \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{\substack{i\in I_r \\ |A_i(x)-L|\geq\varepsilon}}|A_i(x)-L| + \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{\substack{i\in I_r \\ |A_i(x)-L|<\varepsilon}}|A_i(x)-L|$$

$$\geq \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{\substack{i\in I_r \\ |A_i(x)-L|\geq\varepsilon}}|A_i(x)-L|$$

$$\geq \frac{1}{h_r^\alpha}|\{i\in I_r : |A_i(x)-L|\geq\varepsilon\}|\varepsilon \tag{5.3.8}$$

yazabiliriz. Yani $x_i \to L(S_\theta^\alpha(A))$ olur.

Teorem 5.3.7.

f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $x_i \to L(N_\theta^\alpha(A,f))$ ise $x_i \to L(S_\theta^\alpha(A))$ dır.

İspat.

f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $x_i \to L\ (N_\theta^\alpha(A,f))$ ise $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r}f(|A_i(x)-L|) \geq \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{\substack{i\in I_r \\ |A_i(x)-L|\geq\varepsilon}}f(|A_i(x)-L|)$$

$$\geq \frac{1}{h_r^\alpha}|\{i\in I_r : |A_i(x)-L|\geq\varepsilon\}|f(\varepsilon) \tag{5.3.9}$$

yazabiliriz. Böylece $x_i \to L(S_\theta^\alpha(A))$ elde edilir.

Lemma 5.3.8.

$0 < \alpha \leq 1$ ve $liminf\ q_r > 1$ olsun. $x_i \to L(S^\alpha)$ ise $x_i \to L(S_\theta^\alpha)$ dır (Şengül ve Et, 2014).

Teorem 5.3.9.

$0 < \alpha \leq 1$, $liminf\ q_r > 1$ ve A regüler olsun. $x_i \to L(S^\alpha)$ ise $x_i \to L(S_\theta^\alpha(A))$ dır.

İspat.

$x_i \to L(S^\alpha)$ olsun. A regüler olduğundan $A_i(x) \to L(S^\alpha)$ dır. $liminf\ q_r > 1$ olduğundan ve Lemma 5.3.8. den $A_i(x) \to L(S_\theta^\alpha)$ yani $x_i \to L(S_\theta^\alpha(A))$ olur.

6.MODÜLÜS FONKSİYONLARININ BİR DİZİSİNE GÖRE LACUNARY KUVVETLİ A-YAKINSAKLIK

Bu bölümde modülüs fonksiyonlarının bir dizisine göre lacunary kuvvetli A −yakınsaklık ve lacunary A −istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ için modülüs fonksiyonlarının bir dizisine göre $\alpha.$ dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsaklık ve lacunary A −istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp, bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri verilecektir.

Bu bölüm boyunca $\lim_{u\to 0^+} \sup_i f_i(u) = 0$ olacak şekilde $\mathcal{F} = (f_i)$ modülüs fonksiyonlarının dizisinin uzayı $\mathcal{F}$ ile gösterilecektir.

Tanım 6.1.

$A = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve $\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonlarının dizisi olsun.

$$N_\theta(A,\mathcal{F}) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x) - L|) = 0 \; en\ az\ bir\ L\ için \right\}$$

ve

$$N_\theta^0(A,\mathcal{F}) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)|) = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımlayalım. $x \in N_\theta(A,\mathcal{F})$ olacak şekilde karmaşık bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{F}$ ye göre bir L sayısına lacunary kuvvetli A −yakınsaktır denir. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $f_i = f$ alırsak $N_\theta(A,\mathcal{F}) = N_\theta(A,f)$ olur. $f(x) = x$ için $N_\theta(A,f) = N_\theta(A)$ yazabiliriz.

$x, \mathcal{F}$ ye göre L değerine lacunary kuvvetli A −yakınsak ise $x_i \to L(N_\theta(A,\mathcal{F}))$ yazılır. $A = I$ birim matris ise sırasıyla $N_\theta(A,\mathcal{F})$ ve $N_\theta^0(A,\mathcal{F})$ için $N_\theta(\mathcal{F})$ ve $N_\theta^0(\mathcal{F})$ yazarız. $N_\theta(A,\mathcal{F})$ ve $N_\theta^0(A,\mathcal{F})$ lineer uzaylardır.

$N_\theta(A,\mathcal{F})$ uzayını düşünelim. Varsayalım ki $N_\theta(A,\mathcal{F})$ de $x_i \to L$, $y_i \to L'$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ (karmaşık sayı) olsun. Bu takdirde $|a| \leq T_a$ ve $|b| \leq T_b$ olacak şekilde T_a ve T_b sayıları vardır. Böylece

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(ax+by)-(aL+bL')|) = \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|a(A_i(x)-L)+b(A_i(y)-L')|)$$

$$\leq \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}(f_i(|a(A_i(x)-L)|)+f_i(|b(A_i(y)-L')|))$$

$$\leq\ T_a\ \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|)+\ T_b\ \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(y)-L'|) \tag{6.1}$$

yazabiliriz. Bu $N_\theta(A,\mathcal{F})$ de $ax+by \rightarrow aL\ +bL'$ anlamına gelir (Bilgin, 2004).

6.1. $N_\theta(A,\mathcal{F})$ ve $N_\theta(A)$ Arasındaki Kapsama İlişkisi

Teorem 6.1.1.

$A=(a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi olsun. $\mathcal{F}\ =(f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonların bir dizisi olsun. $x=(x_k)$, L ye lacunary kuvvetli $A-$yakınsak ise $x=(x_k)$, $\mathcal{F}$ ye göre L ye lacunary kuvvetli $A-$ yakınsaktır, yani $N_\theta(A)\subseteq N_\theta(A,\mathcal{F})$ dir (Bilgin, 2004).

İspat.

$\mathcal{F}=(f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonların bir dizisi ve $sup_i\, f_i(1)=T$ olsun. $x\in N_\theta(A)$ ve $\varepsilon>0$ olsun. $0\leq u\leq\delta$ şartını sağlayan her u için $f_i(u)<\varepsilon\ (i\epsilon\mathbb{N})$ olacak şekilde $0<\delta<1$ sayısını seçebiliriz.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|) = \frac{1}{h_r}\sum_{1} f_i(|A_i(x)-L|)+\frac{1}{h_r}\sum_{2} f_i(|A_i(x)-L|) \tag{6.1.1}$$

yazalım ve burada ilk toplam $|A_i(x)-L|\leq\delta$ üzerinde ve ikinci toplam $|A_i(x)-L|>\delta$ üzerindedir.

f tanımından

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|)\leq\varepsilon+2T\delta^{-1}\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| \tag{6.1.2}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in N_\theta(A,\mathcal{F})$ dir.

Teorem 6.1.2.

$\mathrm{A} = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve $\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonların bir dizisi olsun. $\lim_{u\to\infty} inf_i f_i(u)/u > 0$ ise $N_\theta(A) = N_\theta(A,\mathcal{F})$ dir (Bilgin, 2004).

İspat.

$\lim_{u\to\infty} inf_i f_i(u)/u > 0$ ise $\beta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $u > 0$ ve $i \in \mathbb{N}$ için $f_i(u) \geq \beta u$ dur. $x \in N_\theta(A,\mathcal{F})$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x) - L|) \geq \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} \beta|A_i(x) - L| = \beta\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x) - L|, \tag{6.1.3}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in N_\theta(A)$ dır. Teorem 6.1.1. göz önüne alınırsa $N_\theta(A) = N_\theta(A,\mathcal{F})$ elde edilir.

Bu teoremde $\beta > 0$ olması esastır. $\beta = 0$ ise $N_\theta(A) = N_\theta(A,\mathcal{F})$ eşitliği sağlanmayabilir. Gerçekten $\beta = 0$ olsun, A=I ve $f_i(x) = x^{1/(i+1)}$ $(i \geq 1, x > 0)$ alalım. (x_i) dizisini $i = k_r$ ise $x_i = h_r$ ve aksi halde $x_i = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)|) = \frac{1}{h_r} f_{k_r}(h_r) = \frac{1}{h_r} h_r^{1/(1+k_r)} \to 0, (\mathrm{r} \to \infty \text{ için}) \tag{6.1.4}$$

ve böylece $x \in N_\theta^0(A,\mathcal{F}) \subseteq N_\theta(A,\mathcal{F})$ dir. Fakat

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)| = \frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r}|x_i| = h_r^{-1}h_r \to 1\,, (\,r \to \infty\ için) \tag{6.1.5}$$

olup buda $x \notin N_\theta^0(A) \subseteq N_\theta(A)$ demektir.

6.2. $N_\theta(A,\mathcal{F})$ ve $S_\theta(A)$ Arasındaki Kapsama İlişkisi

Teorem 6.2.1.

$\mathcal{F}=(f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonlarının bir dizisi ve (f_i) noktasal yakınsak olsun. $\lim_i f_i\,(u)>0$ $(u>0) \Longrightarrow N_\theta(A,\mathcal{F}) \subseteq S_\theta(A)$ dır (Bilgin, 2004).

İspat.

$\varepsilon>0$ ve $x\in N_\theta(A,\mathcal{F})$ olsun. $\lim_i f_i(u)>0$ ise $u>\varepsilon\; ve\; i\in\mathbb{N}\; için\;\; f_i(\varepsilon)\geq c$ olacak şekilde $c>0$ sayısı vardır. $I_r^1=\{i\in I_r: |A_i(x)-L|\geq\varepsilon\}$ olsun ve

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|)\geq\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^1} f_i(|A_i(x)-L|)\geq ch_r^{-1}|KA_\theta(\varepsilon)| \qquad (6.2.1)$$

dır. Bunun sonucunda $x\in S_\theta(A)$ olduğu görülür.

Aksine, $\lim_i f_i\,(u)>0$ olmadığını varsayalım, $\lim_i f_i\,(t)=0$ olacak şekilde bir $t>0$ vardır. $\theta=(k_r)$ lacunary dizisi seçelim öyle ki $i>k_r$ için, $f_i(t)<2^{-r}$dir. $A=I$ olsun. $k_{r-1}<i\leq\frac{(k_r+k_{r-1})}{2}$ ise $x_i=t$ ve $\frac{(k_r+k_{r-1})}{2}<i\leq k_r$ ise $x_i=0$ olacak şekilde $x=(x_i)$ dizisini tanımlayalım. $x\in N_\theta^0(A,\mathcal{F})\subseteq N_\theta(A,\mathcal{F})$, fakat $x\notin S_\theta(A)$ dır.

Teorem 6.2.2.

$\mathcal{F}=(f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonların bir dizisi olsun.

$sup_u sup_i f_i(u)<\infty \;\Longrightarrow S_\theta(A)\subseteq N_\theta(A,\mathcal{F})$ dir (Bilgin, 2004).

İspat.

$x\in S_\theta(A)$ olsun. Varsayalım ki $h(u)=sup_i f_i(u)$, $h=sup_u h(u)$ ve $I_r^2=\{i\in I_r: |A_i(x)-L|<\varepsilon\}$ olsun. $\forall i,u>0$ için $f_i(u)\leq h$ olduğundan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|)=\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^1} f_i(|A_i(x)-L|)+\frac{1}{h_r}\sum_{i\in I_r^2} f_i(|A_i(x)-L|)$$

$$\leq hh_r^{-1}|KA_\theta(\varepsilon)|+h(\varepsilon) \qquad (6.2.2)$$

elde edilir.

$\varepsilon\to 0$ için $x\in N_\theta(A,\mathcal{F})$ olur.

Aksine, $sup_u sup_i f_i(u) = \infty$ olduğunu varsayalım. $0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{r-1} < u_r < \cdots$ öyle ki $r \geq 1$ için $f_{k_r}(u_r) \geq h_r$ dir. A = I olsun. $i = k_r$ ise $x_i = u_r$ ve aksi halde $x_i = 0$ olacak şekide $x = (x_i)$ dizisini tanımlayalım. $x \in S_\theta(A)$, fakat $x \notin N_\theta(A, \mathcal{F})$ dir.

Lemma 6.2.3.

$\lim inf\, q_r > 1$ ise, $x_i \to L(S)$ iken $x_i \to L(S_\theta)$ dır (Bilgin, 2004).

Teorem 6.2.4.

A regüler, $\lim inf\, q_r > 1$ ve $sup_u sup_i f_i(u) < \infty$ olsun. O zaman $x_i \to L$ iken $x_i \to L\big(N_\theta(A, \mathcal{F})\big)$ dir (Bilgin, 2004).

İspat.

$x_i \to L$ olsun. A nın regülerliği ve istatistiksel yakınsaklığın tanımından $A_i(x) \to L(S)$ dir. $\lim inf\, q_r > 1$ olduğundan Lemma 6.2.3. den $A_i(x) \to L(S_\theta)$ yani $x_i \to L\big(S_\theta(A)\big)$ dır. Böylece Teorem 6.2.2. kullanılarak $x_i \to L\big(N_\theta(A, \mathcal{F})\big)$ elde edilir.

6.3. Modülüs Fonksiyonlarının Bir Dizisine Göre α. Dereceden Lacunary Kuvvetli A −Yakınsaklık ve α. Dereceden Lacunary A −İstatistiksel Yakınsaklık

Bu alt başlık altında, yeni kavramlar olan, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere modülüs fonksiyonlarının bir dizisine göre α. dereceden lacunary kuvvetli A −yakınsaklık ve α. dereceden lacunary A −istatistiksel yakınsaklık kavramları verilecektir. Bu uzaylar arasındaki kapsama ilişkileri incelenecektir.

Tanım 6.3.1.

$A = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi ve $\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonlarının dizisi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için

$$N_\theta^\alpha(A, \mathcal{F}) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(x) - L|) = 0 \ en\ az\ bir\ L\ için \right\}$$

ve

$$N_\theta^{0,\alpha}(A,\mathcal{F}) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)|) = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımlayalım. $x \in N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F})$ olacak şekilde karmaşık bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{F}$ ye göre bir L sayısına α. dereceden lacunary kuvvetli $A-$yakınsaktır denir. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $f_i = f$ alırsak $N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}) = N_\theta^\alpha(A,f)$ olur. $f(x) = x$ için $N_\theta^\alpha(A,f) = N_\theta^\alpha(A)$ yazabiliriz.

x, $\mathcal{F}$ ye göre L değerine α. dereceden lacunary kuvvetli $A-$yakınsak ise $x_i \to L(N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}))$ yazılır.

$A = I$ birim matris ise sırasıyla $N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F})$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(A,\mathcal{F})$ için $N_\theta^\alpha(\mathcal{F})$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(\mathcal{F})$ yazarız.

$N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F})$ ve $N_\theta^{0,\alpha}(A,\mathcal{F})$ lineer uzaylardır.

$N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F})$ uzayının lineer uzay olduğunu gösterelim. $x_i \to L(N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}))$ ve $y_i \to L'(N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}))$ olduğunu kabul edelim ve $a,b \in \mathbb{C}$ (karmaşık sayı) olsun. Bu takdirde $|a| \le T_a$ ve $|b| \le T_b$ olacak şekilde T_a ve T_b sayıları vardır. $0 < \alpha \le 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(ax+by) - (aL+bL')|) = \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|a(A_i(x)-L) + b(A_i(y)-L')|)$$

$$\le \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} (f_i(|a(A_i(x)-L)|) + f_i(|b(A_i(y)-L')|))$$

$$\le T_a \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|) + T_b \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(y)-L'|) \quad (6.3.1)$$

yazabiliriz. Bu da $(ax+by) \to (aL + bL')(N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}))$ demektir.

Teorem 6.3.2.

$\mathrm{A} = (a_{ik})$ karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi, $\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonların bir dizisi ve $0 < \alpha \le 1$ olsun. $\lim_{u\to\infty} inf_i f_i(u)/u > 0$ ise $N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F}) \subseteq N_\theta^\alpha(A)$ dır.

İspat.

$\lim_{u\to\infty} inf_i f_i(u)/u > 0$ ise $\beta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $u > 0$ ve $i \in \mathbb{N}$ için $f_i(u) \ge \beta u$ dur. $x \in N_\theta^\alpha(A,\mathcal{F})$ olsun. $0 < \alpha \le 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)-L|) \ge \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} \beta|A_i(x)-L| = \beta\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r}|A_i(x)-L| \quad (6.3.2)$$

yazabiliriz. Böylece $x \in N_\theta^\alpha(A)$ elde edilir.

Bu teoremde $\beta > 0$ olması esastır. $\beta = 0$ ise $N_\theta^\alpha(A, \mathcal{F}) \subseteq N_\theta^\alpha(A)$ kapsaması sağlanmayabilir. Gerçekten $\beta = 0$ olsun, A=I ve $f_i(x) = x^{1/(i+1)}$ $(i \geq 1, x > 0)$ alalım. (x_i) dizisini $i = k_r$ ise $x_i = h_r$ ve aksi halde $x_i = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. $\alpha > \frac{1}{(1+k_r)}$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x)|) = \frac{1}{h_r^\alpha} f_{k_r}(h_r) = \frac{1}{h_r^\alpha} h_r^{1/(1+k_r)} \to 0, (r \to \infty \text{ için}) \tag{6.3.3}$$

ve böylece $x \in N_\theta^{0,\alpha}(A, \mathcal{F}) \subseteq N_\theta^\alpha(A, \mathcal{F})$ dir. Fakat $\alpha = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} |A_i(x)| = \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r^\alpha} h_r \to 1\,, (\, r \to \infty\; için) \tag{6.3.4}$$

ve $\alpha < 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} |A_i(x)| = \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r^\alpha} h_r \to \infty\,, (\, r \to \infty\; için) \tag{6.3.5}$$

olup, buradan da $x \notin N_\theta^{0,\alpha}(A) \subseteq N_\theta^\alpha(A)$ elde edilir.

Teorem 6.3.3.

$\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonlarının bir dizisi ve (f_i) noktasal yakınsak olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için $\lim_i f_i\,(u) > 0$ $(u > 0) \Longrightarrow N_\theta^\alpha(A, \mathcal{F}) \subseteq S_\theta^\alpha(A)$ dır.

İspat.

$\varepsilon > 0$ ve $x \in N_\theta^\alpha(A, \mathcal{F})$ olsun. $\lim_i f_i(u) > 0$ ise $u > \varepsilon\; ve\; i \in \mathbb{N}\; için\;\; f_i(\varepsilon) \geq c$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{i\in I_r} f_i(|A_i(x) - L|) \geq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{i\in I_r \\ |A_i(x)-L|\geq\varepsilon}} f_i(|A_i(x) - L|)$$

$$\geq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{i \in I_r : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\}\,| f_i(\varepsilon) \geq c\frac{1}{h_r^\alpha} |\{i \in I_r : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\}\,| \tag{6.3.6}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in S_\theta^\alpha(A)$ elde edilir.

Teorem 6.3.4.

$\mathcal{F} = (f_i)$, $\mathcal{F}$ de modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için $\lim_i f_i\,(u) > 0\ (u > 0) \Longrightarrow w^{\alpha}(A, \mathcal{F}) \subseteq S^{\alpha}(A)$ dır. Burada

$$w^{\alpha}(A, \mathcal{F}) = \left\{ x = (x_i) :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} f_i(|A_i\,(x) - L\,|\,)\ en\ az\ bir\ L\ için \right\}$$

dır.

İspat.

$x \in w^{\alpha}(A, \mathcal{F})$ olsun. $\lim_i f_i(u) > 0$ ise $u > \varepsilon\ ve\ i \in \mathbb{N}\ için\ f_i(\varepsilon) \geq c$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} f_i(|A_i\,(x) - L\,|\,) \geq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{\substack{i=1 \\ |A_i(x) - L| \geq \varepsilon}}^{n} f_i(|A_i\,(x) - L\,|\,)$$

$$\geq \frac{1}{n^{\alpha}} |\{i \leq n : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\}\,| f_i(\varepsilon) \geq c \frac{1}{n^{\alpha}} |\{i \leq n : |A_i(x) - L| \geq \varepsilon\}\,| \qquad (6.3.7)$$

yazabiliriz. Böylece $x \in S^{\alpha}(A)$ elde edilir.

7. KAYNAKLAR

Bilgin, T., 2001. Lacunary strong A $-$ convergence with respect to a modulus, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 46 , no. 4, 39-46.

Bilgin, T., 2004. Lacunary strong A $-$ convergence with respect to a sequence of modulus functions, *Appl. Math. Comput.*, 151, no. 3, 595-600.

Connor J.S., 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47–63.

Connor, J., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canad. Math. Bull*, 32, 194-198.

Çolak, R., 2010. Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub*, 2010: 121--129.

Çolak, R., Altın, Y., 2013. Statistical convergence of double sequences of order $\tilde{\alpha}$, *J. Funct. Spaces Appl.*, Art. ID 682823, 5 pp.

Demirci, K., 1996. Strong A $-$summability and A $-$statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 27, no. 6, 589-593.

Dönmez, A., 2001. Soyut Matematik, *Seçkin Publishing*, Ankara.

Esi, A., 1996. The A $-$statistical and strongly (A-p)-Cesaro convergence of sequences, *Pure Appl. Math. Sci.*, XLIII (1–2) 89–93.

Et, M., Altınok, H., Altın, Y., 2013. On generalized statistical convergence of order α of difference sequences, *J. Funct. Spaces Appl.* 2013, Art. ID 370271, 7 pp.

Et, M., 2014. On pointwise λ $-$statistical convergence of order α of sequences of fuzzy mappings, *Filomat* 28, no. 6, 1271–1279.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Collog. Math.*, 2, 241–244.

Freedman, A.R., Sember, J.J., 1981. Densities and summability, *Pacific J. Math.*, 95, no. 2, 293-305.

Freedman, A.R., Sember, J.J., Raphel, M., 1978. Some Cesaro-type summability spaces, *Proc. Lond.Math.*, Soc. 37, (3), 508–520.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5, no. 4, 301-313.

Fridy, J., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, *Pac. J. Math.*, 160, 45–51.

Goes, G., Goes, S., 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.

Hardy, G.H., 1949. Divergent Series., *Oxford Univ.*, Pres, London.

Işık, M., 2004. On statistical convergence of generalized difference sequences, *Soochow J. Math.* 30, no. 2, 197–205.

Kolk, E., 1993. On strong boundedness and summability with respect to a sequence moduli, *Tartu Ül.*, Toimetised., 960, 41–50.

Kolk, E., 1991. The statistical convergence in Banach spaces, *Acta Comment. Univ. Tartu*, 928, 41-52.

Krasnoselskii, M.A., Ruttsky, Y.B., 1961. Convex Function and Orlicz spaces., *Groningen*, Netherlands.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley&Sons*, New York.

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge, Second Edition.

Maddox, I.J., 1986. Sequence spaces defined by a modulus, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 100 ,161–166.

Maddox, I.J., 1987. Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 101, 523–527.

Nakano, H., 1953. Concave modulars, *J. Math. Soc. Jpn.*, 5, 29–49.

Öztürk, E., Bilgin, T., 1994. Strongly summable sequence spaces defined by a modulus, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25, (6), 621–625.

Pehlivan S., Fisher, B., 1995. Some sequence spaces defined by a modulus, *Mathematica Slovaca*, vol. 45, no. 3, pp. 275–280.

Pecaric, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, *Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press*, *Inc.*, Boston-San Diego-New York.

Pehlivan, S., Fisher, B., 1994. On some sequence spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25 (10), 1067–1071.

Powell, R.E., Sham, S.M., 1972. Summability Theory and Its Applications, *London; New York : Van Nostrand-Reinhold*.

Ruckle, W.H., 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, *Canadian J. Math.*, 25, 973–978.

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca.*, 2, 139–150.

Savaş, E., 2013. Double almost lacunary statistical convergence of order α, *Adv. Difference Equ.*, 2013:254, 10 pp.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly,* 66, 261–375.

Şengül, H., Et, M., 2014. On lacunary statistical convergence of order α. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 34, no. 2, 473–482.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı	: Zelal ARICA
Doğum Yeri ve Yılı	: DİYARBAKIR / 1990
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: zelallarica@gmail.com

EĞİTİM

Lisans	: Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2007-2011)
Pedagojik Formasyon	: Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi (2011-2012)

İŞ DENEYİMLERİ

(2013 - 2016)	: Diyarbakır Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfı – SYİG
(2016 - Halen)	: Milli Eğitim Bakanlığı - Öğretmen