T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLARDA LİE GRUP YAPILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer AKSU

153114003

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

Mart-2018
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Ömer AKSU tarafından hazırlanan "Diferensiyellenebilir Manifoldlarda Lie Grup Yapılar" adlı tez çalışması 16/03/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Erol KILIÇ	……………………
Danışman Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR	……………………
Üye Doç. Dr. Ali AKGÜL	……………………

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Diferensiyellenebilir Manifoldlarda Lie Grup Yapılar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ömer AKSU

Siirt–2018

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Simge	**Açıklama**
$\mathbb{E}$	**:**Öklid uzayı,
$\mathbb{R}$	**:**Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{C}$	**:**Kompleks sayılar kümesi,
C^k	**:**k. mertebeden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi,
$\langle , \rangle$	**:**İç çarpım,
∇	**:**Lineer konneksiyon,
δ	**:**Kronecker deltası,
R	**:**Riemann eğrilik tensörü,
K	**:**Kesit eğriliği,
S	**:**Ricci tensörü,
Ric	**:**Ricci eğriliği,
τ	**:**Skalar eğrilik,
ϕ	**:**1-parametreli dönüşüm grubu,
L	**:**Lie türevi,
$M_n(\mathbb{R})$	**:**$n \times n$ tipindeki tüm reel matrislerin kümesi,
$M_n(\mathbb{C})$	**:**$n \times n$ tipindeki tüm kompleks matrislerin kümesi,
$GL(n,\mathbb{R})$	**:**Genel lineer grup,
$O(n,\mathbb{R})$	**:**Ortogonal grup,
$SO(n,\mathbb{R})$	**:**Özel ortogonal grup,
$U(n)$	**:**Üniter grup,
exp	**:**Üstel dönüşüm,
g	**:**Lie cebiri,
Ad	**:**Adjoint temsili,
ad	**:**Lie cebiri üzerinde adjoint temsili.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLARDA LİE GRUP YAPILAR

Ömer AKSU

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

2018, 84+viii sayfa

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Lie gruplarının ve Lie cebirinin tarihsel gelişimi ifade edilerek konunun öneminden bahsedildi.

İkinci bölümde, Öklid uzayı ve diferensiyellenebilir manifoldlar üzerine bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldları, konneksiyon ve Riemann eğrilik tensörü, kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skaler eğrilik kavramlarının bazı temel özelliklerinden bahsedildi.

Dördüncü bölümde, Lie türevi ve integral eğrileri hakkında temel bilgiler sunuldu. Lie gruplarının bazı örneklerinden bahsedildi. Lie cebiri tanıtılarak bu örneklerin Lie cebirleri incelendi.

Beşinci bölümde, Lie grupları ve Lie cebiri üzerinde tanımlanan bir parametreli dönüşüm grupları, üstel dönüşümler ve infinitesimal üreteçlerin özellikleri incelendi.

Altıncı bölümde, Lie grubu homomorfizmlerinin teorisi sunularak, bir Riemann manifoldu üzerinde Lie grubu yapıları çalışıldı. Sol-invariant, sağ invariant ve bi-invariant metrik kavramlarından bahsedildi. Bi-invaryant metriğe sahip bir Riemann manifoldunun kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skaler eğriliği hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyellenebilir manifold, Lie cebiri, Lie grup, Öklid uzayı, Riemann manifold.

ABSTRACT

MS Thesis

LIE GROUP STRUCTURES ON SMOOTH MANIFOLDS

Ömer AKSU

Siirt University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Ass. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

2018, 84+viii pages

This study prepared as a graduate thesis covers six chapters.

In the first chapter, the historical developments of Lie groups and Lie algebras are expressed and the importance of these topics are discussed.

In the second chapter, some basic definitions and theorems on Euclidean spaces and smooth manifolds are given.

In the third chapter, some basic facts related to the notions of Riemannian manifolds, connection, Riemannian curvature tensors, sectional curvature, Ricci curvature, scalar curvature are mentioned.

In the fourth chapter, some basic facts dealing Lie derivative and integral curve are presented. Some examples of Lie groups are mentioned. Furthermore, the notion of Lie algebra is introduced and Lie algebra of these examples investigated.

In the fifth section, some properties of one parameter translation groups, exponential maps and infinitesimal generators defined on Lie groups and Lie algebras are investigated.

In the sixth chapter, the theories of Lie groups homomorphisms are presented and the structures of Lie groups are studied. The notions of left invariant, right invariant and bi-invariant metrics are mentioned. Sectional curvature, Ricci curvature and scalar curvature of a Riemannian manifold with a bi-invariant metric are computed.

Keywords: Euclidean space, Lie algebra, Lie group, Riemannian manifold, Smooth manifold.

1. GİRİŞ

Geometri kelimesinin kökeni arazi ölçümü anlamına gelen yunanca bir kelimeden gelmektedir. Arazi ölçümü için tarihte Babiller, Mısırlılar ve Hintliler tarafından geliştirilen çeşitli pratik hesaplama teknikleri kullanılmıştır. Yunan düşünürler, M.Ö. 500 yıllarında geometriyi, tüm geometri bilgilerini içeren ve tüm geometri gerçeklerinin temeli olabilecek aksiyomlar, kabuller (postulatlar) ve tanımların bir kümesi olarak göz önüne aldılar. Bu düşünce, Öklidyen geometrinin temelinin atıldığı Öklid'in meşhur kitabı 'The Elements' başlıklı kitabın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Öklid bu kitabında aşağıdaki aksiyomların doğruluğunu kabul eder.

1. Herhangi iki noktayı birleştiren birtek düz doğru parçası vardır.

2. Herhangi bir düz doğru parçası sonsuza kadar giden bir doğruya genişletilebilir.

3. Verilen herhangi bir düz doğru parçası için, bu doğru parçasının bitiş noktasını merkez kabul eden ve uzunluğu yarıçap olan bir çember çizilebilir.

4. Tüm dik doğrular kongrüenttir.

5. Parelellik Aksiyomu: İki düz doğru bir doğru ile kesildiğinde kesenin bir tarafında oluşan iki iç açının ölçüsü 180° den küçük ise bu iki doğru 180° den küçük açıların bulunduğu tarafta kesişirler.

Burada 5. aksiyom paralel olmayan doğruların kesinlikle kesişeceğini, paralel olan doğruların ise hiçbir zaman kesişmeyeceğini ifade eder.

Öklid'in 5. aksiyomu birçok matematikçinin dikkatini çekerek bu aksiyom önceki 4 aksiyomun kullanılarak ispatlanması gereği duyuldu. Bunun sonucunda ise Öklid'in ilk dört aksiyomunu kabul eden ve 5. aksiyomunu kabul etmeyen yeni geometriler ortaya çıktı. Bu yeni geometrilerden en çok bilinenleri, N. I. Labachevski, J. Bolyai, C. F. Gauss ve E. Beltrami tarafından tanıtılan hiperbolik geometri, eliptik geometri, projektif geometridir. Literatürde bu tür geometriler Non-Öklid geometri olarak bilinir.

Üç boyutlu Öklid uzayında yüzeyler teorisi, C. F. Gauss tarafından geliştirildi. Gauss'un yüzeyler teorisi hakkında en önemli sonuçlarından birisi 'Gauss Egregium teoremi' olarak bilinen teoremidir. Bu teoreme göre bir yüzeyin eğriliği içsel bir özellik olup yüzeyin teğet düzlemindeki lineer bağımsız herhangi iki vektör alındığında yüzeyin eğriliği değişmez. Bu sonuç, bir yüzeyin içsel invaryantlarını belirleme problemini ortaya çıkararak bu tür invaryantlar yardımıyla geometriyi tanımlama fikrine ışık tutmuştur.

C. F. Gauss'un çalışmalarından sonra geometride iki farklı yol izlendi. Bunlardan birimcisi; C. F. Gauss'un yüzeyler teorisini 2-boyuttan daha büyük boyutlara genelleyen B. Riemann'ın çalışmalarıdır. B. Riemann, C. F. Gauss'un tanımlamış olduğu eğriliğin daha geneli olan kesit eğriliğininde tanımlanabildiği Öklid ve Non-Öklid geometrileri kapsayan Riemann manifoldu kavramıyla geometrinin gelişimine önemli bir yön kazandırdı. B. Riemann, çalışmalarıyla, tanjant vektörlerin oluşturduğu uzay üzerinde metrik tanımlayarak geometride bilinen gerçekleri en genel biçimde tanımlama olanağı sağladı.

İkinci yol ise, geometriyi dönüşüm grupları kavramıyla tanımlayan F. Klein'in çalışmalarıdır. F. Klein'e göre geometri çalışmanın amacı, özel dönüşüm gruplarının etkileri altında geometrik şekillerin invaryant olan geometrik özelliklerini incelemektir. Böylece farklı dönüşüm grupları incelendiğinde, Öklid geometri, afin geometri veya projektif geometri gibi farklı geometriler ortaya çıkar. Örneğin; Öklid geometrisi düzlemin, Öklidyen gruplar olarak da bilinen katı hareketler grubu etkisi ile invaryant kalan özelliklerini çalışmaktır. O halde bu tür gruplar çeşitli geometrileri tanımlama ve bu geometrileri inceleme olanağı verir. Bu tür gruplar Lie grupları olarak isimlendirilir ve bu grupların teorisi ilk olarak Norveçli bir matematikçi olan S. Lie tarafından geliştirilmiştir.

Lie grupları ilk olarak E. Cartan tarafından 1930 yılında şöyle tanımlanır.

G manifoldu

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\rightarrow xy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G &\to G \\ x &\to x^{-1} \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümleri ile bir grup yapısına sahip ise G ye bir Lie grubu denir. Lie gruplarının en basit örnekleri n-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$, kompleks n-boyutlu standart kompleks vektör uzayı $\mathbb{C}^n$ ve n-boyutlu quaternion uzayı $\mathbb{Q}^n$ nin grup izometrileridir. Ayrıca, yüksek lisans tezi olarak hazırladığımız bu çalışmada ele alacağımız reel genel lineer grup $GL(n,\mathbb{R})$, kompleks genel lineer grup $GL(n,\mathbb{C})$, ortogonal grup $O(n)$, üniter grup $U(n)$ ve simplektik grup $Sp(n)$ vb. gibi gruplarda Lie gruplarının yaygın olarak çalışılan örnekleridir.

Lie grupları ile ilgili başka bir gerçek ise Lie gruplarının tanjant uzayına karşılık gelen ve üzerinde tanımlı bir braketle bir cebir oluşturan Lie cebiridir. Bu kavram ilk olarak 1934 yılında H. Weyl tarafından isimlendirilmiştir.

Yukarıdaki ifade ettiğimiz Lie gruplarının tarihsel gelişimini göz önüne alarak; bu çalışmanın ikinci bölümünde, Öklidyen geometri ve differensiyellenebilir manifoldlar üzerine temel tanım ve kavramlardan bahsettik. Üçüncü bölümde Riemann manifoldları ve Riemann manifoldları üzerinde tanımlanan eğrilikler üzerine bazı kavramlar sunduk. Dördüncü bölümde Lie türevi ve flowlardan bahsederek, Lie grupları, Lie cebiri teorisini inceledik. Beşinci bölümde; Lie grupları üzerinde tanımlanan bir parametreli dönüşüm grupları ve infinitesimal üreteçlerden bahsettik. Altıncı bölümde ise Riemann manifoldları üzerinde Lie gruplarının teorisi hakkında bazı teorem ve hesaplamalara yer verdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. *$A \neq \phi$ bir küme ve V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir*

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya "V ile birleştirilmiş bir afin uzay" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

i) $\forall P,Q,R \in A$ *için* $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii) $\forall P \in A$ *ve* $\forall \alpha \in V$ *için* $f(P,Q) = \alpha$ *olacak şekilde bir tek* $Q \in A$ *vardır.*

Örneğin, $\mathbb{R}^2$ de tüm noktaların kümesini A ile gösterelim.

$$\begin{aligned} f : A \times A &\to V \\ (P,Q) &\to \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (P_1 - Q_1, P_2 - Q_2) \end{aligned}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu ile $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir afin uzaydır.

Tanım 2.1.2. *$\mathbb{E}$, reel bir afin uzay ve $\mathbb{E}$ ile birleştirilmiş bir vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $\mathbb{E}$ kümesine "Öklid uzayı" ve $\langle , \rangle$ dönüşümüne "Öklid iç çarpımı" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında herhangi iki nokta olmak üzere

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n) \tag{2.1.2}$$

ve

$$\left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} \tag{2.1.3}$$

dır. Ayrıca, d uzaklık fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

ile tanımlanır. $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 2.1.3. *$\mathbb{E}^n$ de bir sıralı $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ $(n+1)-$lisi verilsin.*

$$\left\{ \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n} \right\}$$

vektör $n-$lisi $\mathbb{E}^n$ de ortonormal bir baz ise bu sisteme "Öklid çatısı" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

X, $\mathbb{E}^n$ de bir nokta olmak üzere $\overrightarrow{P_0X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$ şeklinde yazılır. Buradaki $x_i : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X noktasının "Öklid koordinat fonksiyonları" denir.

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1. *$X \neq \emptyset$ bir küme, X in alt kümelerinden oluşan bir kolleksiyon τ aşağıdaki şartları sağlarsa τ ya X üzerinde bir "topoloji" ve (X, τ) ikilisine ise "topolojik uzay" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

i) $X, \emptyset \in \tau$.

ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau$ *için* $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

iii) $A_i \in \tau$ *için* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.

Tanım 2.2.2. *X ve Y birer topolojik uzay olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu*

i) sürekli, birebir ve örten

ii) *tersi var ve tersi sürekli*

ise f fonksiyonuna "X den Y üzerine bir homeomorfizm" veya "topolojik dönüşüm" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.3. *M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M ye bir "topolojik manifold" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

i) *M bir Hausdorff uzayıdır.*

ii) *M nin herbir açık alt kümesi $\mathbb{E}^n$ veya $\mathbb{E}^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorftur.*

iii) *M sayılabilir sayıda açık cümleler tarafından örtülebilir.*

Tanım 2.2.4. *$\mathbb{E}^n$ de bir açık alt cümle U olmak üzere $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun k.mertebeden kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli iseler f fonksiyonuna "C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir" denir.*

f fonksiyonu C^k sınıfından ise $f \in C^k(U,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Burada $C^0(U,\mathbb{R})$ sürekli fonksiyonların kümesini ifade eder (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.5. *$U \subset \mathbb{E}^n$ bir açık alt cümle*

$$\begin{aligned} \psi : U &\to \mathbb{E}^m \\ u &\to \psi(u) = (f_1(u), f_2(u), ..., f_m(u)) \end{aligned}$$

fonksiyonu verildiğinde tüm $f_i, 1 \leq i \leq m$ fonksiyonları C^k sınıfından ise ψ dönüşümüne "C^k sınıfındandır" denir ve $\psi \in C^k(U,\mathbb{E}^m)$ olarak gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.6. *$\mathbb{E}^n$ nin iki açık alt cümlesi U ve V olsun. $\psi : U \to V$ dönüşümü için*

i) $\psi \in C^k(U,V)$

ii) ψ^{-1} *mevcut ve* $\psi^{-1} \in C^k(V,U)$

ise ψ ye " C^k sınıfından bir diffeomorfizm" denir. Eğer $\psi \in C^\infty(U,V)$ ise ψ ye bir "diffeomorfizm" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.7. *M, $n-$boyutlu bir topolojik manifold, $U \subset \mathbb{E}^n$ ve $W \subset M$ açık alt kümeleri verilsin. $\psi : U \to W \subset M$ dönüşümü bir homeomorfizm ise (ψ, M) ikilisine M nin bir "koordinat komşuluğu" veya "harita" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

$U \subset \mathbb{E}^n, u \in U$ için $\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), ..., x_n(u))$ yazılabilir. Buradaki $x_i(u)$, $1 \leq i \leq n$, reel sayısına $\psi(u)$ noktasının "i. koordinatı" denir.

Tanım 2.2.8. *M bir topolojik manifold, $\{W_\alpha\} \subset M$ ve $\{U_\alpha\} \subset \mathbb{E}^n$ açık örtüsü ve $\psi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{E}^n \to W_\alpha \subset M$ homeomorfizmleri verilsin. Buradaki $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\} |_{\alpha \in A}$ kolleksiyonuna bir "koordinat komşuluğu sistemi" veya "atlas" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

Tanım 2.2.9. *M, $n-$boyutlu topolojik manifold ve $p \in M$ noktasının iki açık komşuluğu W_α ve W_β olsun. $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) |_{\alpha \in A}\}$ kümesi M nin bir atlası $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere*

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha, \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha$$

ve

$$\psi_\beta : U_\beta \to W_\beta, \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta$$

homeomorfizmleri verildiğinde $\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha, \phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \to U_\beta$ ve $\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta, \phi_{\alpha\beta} : U_\beta \to U_\alpha$ dönüşümleri tanımlanabilir. Buradaki $\forall \alpha, \beta \in A$ için $\phi_{\beta\alpha}$ ve $\phi_{\alpha\beta}$ dönüşümleri C^k sınıfından ise $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) |_{\alpha \in A}\}$ atlasına M üzerinde bir "diferensiyellenebilir yapı" denir. C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapıya sahip M manifolduna " C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.10. *V bir vektör uzayı ve V ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $v \in V$ için $v_p = (p, v)$ sıralı ikilisine A afin uzayının p noktasındaki "tanjant vektörü" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini T_pA ile gösterilir. Böylece $T_pA = \{(p,v) : v \in V\}$ veya $T_pA = \{p\} \times V$ dir. Burada, T_pA kümesi

$$\begin{aligned} \oplus : T_pA \times T_pA &\rightarrow T_pA \\ ((p,v),(p,u)) &\rightarrow (p,u+v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_pA) &\rightarrow T_pA \\ (\lambda,(p,v)) &\rightarrow (p,\lambda v) \end{aligned}$$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Tanım 2.2.11. *M bir manifold ve $p \in M$ olsun. M nin tüm tanjant uzaylarının kümesini $\bigcup\limits_{p\in M} T_pM$ ile gösterelim.*

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow \bigcup_{p\in M} T_pM \\ p &\rightarrow X(p) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

ile tanımlanan X operatörüne M üzerinde bir "vektör alanı" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

M nin tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Burada $\chi(M)$ kümesi

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\rightarrow (X \oplus Y)(p) = X(p) + Y(p) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (\lambda,X) &\rightarrow (\lambda \odot X)(p) = \lambda X(p) \end{aligned}$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Tanım 2.2.12. *$v=(v_1,v_{2,...,}v_n)\in\chi(M)$ ve $p\in\mathbb{E}^n$ olmak üzere $f\in C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin.*

$$v_p\left[f\right]=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\mid_p=<\nabla f,v> \tag{2.2.2}$$

ifadesine f fonksiyonunun v_p tanjant vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Burada; $\forall f,g\in C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}),\forall v_p,u_p\in T_p\mathbb{E}^n$ ve $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için

i) $(av_p+bu_p)\left[f\right]=av_p\left[f\right]+bu_p\left[f\right]$

ii) $v_p(af+bg)=av_p\left[f\right]+bv_p\left[g\right]$

iii) $v_p\left[f.g\right]=v_p\left[f\right]g(p)+f(p)v_p\left[g\right]$

dir.

Tanım 2.2.13. *$\alpha:I\to\mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t\in I$ için*

$$\alpha'(t)=(\frac{d\alpha_1}{dt},\frac{d\alpha_2}{dt},...,\frac{d\alpha_n}{dt})$$

vektörüne α eğrisinin "teğet vektörü" veya "hız vektörü" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$\mathbb{E}^n$ de α bir eğri ve $f\in C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$\alpha'(t)\left[f\right]=\frac{df(\alpha)}{dt}\mid_t=\frac{df(\alpha(t))}{dt}$$

dir. Burada $\alpha'(t)\left[f\right]$ ifadesine "f fonksiyonun α eğrisi yönünde kovaryant türevi" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.14. *$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektör alanları olmak üzere*

$$D_XY=(X_p\left[y_1\right],X_p\left[y_2\right],...,X_p\left[y_n\right])$$

ile tanımlanan türeve Y nin X e göre kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$\forall X,Y,Z,W\in\mathbb{E}^n$ ve $f\in C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R})$ olmak üzere kovaryant türev aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $D_X(Y+Z) = D_X(Y) + D_X(Z)$

ii) $D_{X+W}(Y) = D_X(Y) + D_W(Y)$

iii) $D_{f(p)X}Y = f(p)D_X(Y)$

iv) $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X(Y)$

dir.

Tanım 2.2.15. *V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde*

$$[,] : V \times V \to V$$

dönüşümü $\forall X, Y, Z \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *ve* $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ *(bilineer)*

ii) $[X, X] = 0$, *(alterne)*

iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, *(Jakobi özdeşliği)*

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme V üzerinde bir Lie parantez operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$\mathbb{E}^n$ üzerinde Lie parantezi şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} [,] : \chi(\mathbb{E}^n) \times \chi(\mathbb{E}^n) &\to \chi(\mathbb{E}^n) \\ (X, Y) &\to [X, Y] \end{aligned}$$

$\forall f \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{2.2.3}$$

dir. Ayrıca, $\mathbb{E}^n$ üzerinde tanımlı $[,]$ Lie operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$\forall X, Y \in \chi(\mathbb{E}^n)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ için

i) $[X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$.

ii) $[fX,gY] = f(X(g))Y - g(Y(f))X + fg[X,Y]$.

iii) $[X,X] = 0$.

Tanım 2.2.16. *$\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ bir dönüşüm olsun. $\beta = Fo\alpha$ şeklinde tanımlanan $\beta : I \to \mathbb{E}^m$ eğrisine α eğrisinin F altındaki resmi denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

Tanım 2.2.17. *$F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ bir dönüşüm olmak üzere*

$$(F_*)_p : T_p\mathbb{E}^n \to T_{F(p)}\mathbb{E}^m$$

lineer dönüşümüne F dönüşümünün "türevi" veya "türev dönüşümü" denir (Hacısalihoğlu, 1983). F dönüşümünün türevi dF ile de gösterilebilir.

$$\begin{aligned} F : \mathbb{E}^n &\to \mathbb{E}^m \\ p &\to F(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p)) \end{aligned}$$

$\forall v_p \in T_pE^n$ tanjant vektörü için

$$F_*(v_p) = \sum_{i=1}^{n} v_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_{F(p)}$$

dir. Burada; F_* türev dönüşümü

i) birebir ise F ye bir immersion

ii) örten ise F ye bir submersion

adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.18. *$F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ dönüşümü bir immersion olsun. Eğer $\forall v_p, w_p \in T_p\mathbb{E}^n$ için*

$$\langle v_p, w_p \rangle = \langle F_*(v_p), F_*(w_p) \rangle \tag{2.2.4}$$

ise F dönüşümüne bir izometrik immersiyon ve $\mathbb{E}^n$ uzayına ise $\mathbb{E}^m$ uzayının bir alt manifoldu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.19. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, $F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $F_* \mid_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ bir lineer izomorfizm olsun. Bu durumda p nin öyle bir U komşuluğu vardır ki $F \mid_U : U \to F(U)$ bir diffeomorfizmdir (Hacısalihoğlu, 1983).*

Tanım 2.2.20. *V bir vektör uzayı ve V den $\mathbb{R}$ ye tüm lineer dönüşümlerin kümesini $Hom(V,\mathbb{R})$ ile gösterelim.*

$$Hom(V,\mathbb{R}) = \left\{A : A : V \xrightarrow{lineer} \mathbb{R}\right\} \tag{2.2.5}$$

$Hom(V,\mathbb{R})$ kümesine V nin dual uzayı denir ve kısaca V^* ile gösterilir. V^* ın herbir elemanına kofaktör denir (Hacısalihoğlu, 2000).

$\forall \alpha^*, \beta^* \in V^*$, $\forall v \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

i) $(\alpha^* + \beta^*)(v) = \alpha^*(v) + \beta^*(v)$

ii) $(\lambda \alpha^*)(v) = \lambda \alpha^*(v)$

işlemleri ile V^* uzayı bir vektör uzayıdır. Burada boyV^* = boy$V$ dir.

Kabul edelimki boy$V = n$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ V nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde V^* uzayının bir $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ ortonormal bazı vardır.

Örnek 2.2.21. *$T_p\mathbb{E}^3$ ün ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $v_p = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ vektörü verilsin. $T_p^*\mathbb{E}^3$ de bu baza karşılık karşılık gelen dual baz $\left\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\right\}$ ise*

$$e_1^*(v) = a_1e_1^*(e_1) + a_2e_1^*(e_2) + a_3e_1^*(e_3) = a_1.1 + a_2.0 + a_3.0 = a_1$$

dir. Benzer şekilde $e_2^*(v) = a_2$ ve $e_3^*(v) = a_3$ bulunur. Böylece

$$v = e_1^*(v)e_1 + e_2^*(v)e_2 + e_3^*(v)e_3$$

olarak yazılabilir. Burada $v^* = b_1e_1^* + b_2e_2^* + b_3e_3^*$ alınırsa

$$v^*(v) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

olur.

Örnek 2.2.22. *$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında her $v = (v_1, \ldots, v_n)$ vektörünün sütun (veya satır matrisi) olarak göz önüne alınabileceğini biliyoruz. Burada $v^* = [v_1 \ldots v_n]$ (satır) vektörü v nin duali olan vektördür.*

Tanım 2.2.23. *V ve W birer vektör uzayları ve $F : V \to W$ lineer bir dönüşüm olsun. $\forall \alpha^* \in W^*$ ve $\forall v \in V$ için*

$$F^*(\alpha^*)(v) = \alpha^*(F(v)) \tag{2.2.6}$$

ile tanımlı $F^* : W^* \to V^*$ dönüşüme F nin "adjointi" denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.24. *$T_p\mathbb{E}^n$ nin cebirsel dualine "kotanjant uzayı" denir. $T_p^*\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. Burada*

$$T_p^*\mathbb{E}^n = \left\{ v_p^* : v_p^* : T_p\mathbb{E}^n \xrightarrow{lineer} \mathbb{R} \right\}$$

kümesi

$$\begin{aligned} \oplus : T_p^*\mathbb{E}^n \times T_p^*\mathbb{E}^n &\to T_p^*\mathbb{E}^n \\ (u_p^*, v_p^*) &\to u_p^* \oplus v_p^* = (p, u^* + v^*) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_p^*\mathbb{E}^n &\to T_p^*\mathbb{E}^n \\ (\lambda, u_p^*) &\to \lambda \odot u_p^* = (p, \lambda u^*) \end{aligned}$$

işlemleri ile bir vektör uzayıdır. $T_p^*\mathbb{E}^n$ nin herbir elemanına "kotanjant vektörü" denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.25. *$w : \mathbb{E}^n \to \bigcup_{p \in \mathbb{E}^n} T_p^*\mathbb{E}^n$ dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ de "1-form" denir ve $\mathbb{E}^n$ de $1-$formların kümesi $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir.*

$\phi \in \chi^*(\mathbb{E}^n)$ verilsin. ϕ diferensiyellenebilir ise

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(\frac{\partial}{\partial x_i}) dx_i \tag{2.2.7}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.26. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\mathbb{E}^n$ *nin bir koordinat sistemi olmak üzere*

$$grad\ f \equiv \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.2.8}$$

ile tanımlanan

$$grad : C(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}) \to \chi(\mathbb{E}^n)$$

lineer dönüşüme f *nin gradienti denir (Hacısalihoğlu, 1983).*

3. RİEMANN GEOMETRİ

3.1. Riemann Manifoldları

Tanım 3.1.1. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı bir g bilineer formu (metriği) varsa g ye "Riemann metriği" ve* (M,g) *ikilisine "Riemann manifoldu" denir (Şahin 2012).*

(M,g) Riemann manifoldu üzerinde iki koordinat sistemi $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ve $\{y_1,\ldots,y_n\}$ olmak üzere Riemann metriğinin bileşenleri

$$g_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,s=1}^{n}\delta_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} \tag{3.1.1}$$

ile bulunur. Burada δ_{ij} kronecker deltasıdır.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{E}^n$ *n-boyutlu Öklidyen uzayı*

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

metriği ile bir Riemann manifoldudur.

Örnek 3.1.3. S^2 *küresinin parametrik denklemi*

$$x_1 = r\sin\varphi\cos\phi$$

$$x_2 = r\sin\varphi\sin\phi$$

$$x_3 = r\cos\varphi$$

ile verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial r}+\frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial r}+\frac{\partial x_3}{\partial r}\frac{\partial x_3}{\partial r} \\ &= \sin^2\varphi\cos^2\phi+\sin^2\varphi\sin^2\phi+\cos^2\varphi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{r\varphi} &= \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial x_3}{\partial r}\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \\ &= r\sin\varphi\cos\phi\cos\phi\sin\phi+r\sin\varphi\sin\varphi\cos\varphi\sin\phi-r\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Benzer hesaplamalar ile

$$g_{r\phi}=0,\quad g_{\varphi r}=0,\quad g_{\varphi\varphi}=r^2,\quad g_{\varphi\phi}=0,$$

$$g_{\phi r}=0,\quad g_{\phi\varphi}=0,\quad g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\varphi$$

elde edilir. Böylece g metriğine karşılık gelen matris

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\phi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\varphi} & g_{\phi\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi\end{bmatrix}$$

bulunur. O halde S^2 bir Riemann manifoldudur. Burada S^2 ün yay elementi

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\phi^2$$

dir.

(M,g) bir Riemann manifoldu ve $v_p\in T_pM$ vektörün normu

$$\left\|v_p\right\|=\sqrt{g_p(v,v)} \tag{3.1.2}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $v_p,w_p\in T_pM$ ve v_p ile w_p arasındaki açı φ olmak üzere

$$\cos\varphi=\frac{g_p(v,w)}{\left\|v_p\right\|\left\|w_p\right\|} \tag{3.1.3}$$

dır.

(M,g) bir Riemann manifoldu ve $\alpha:I\to M$ bir diferensiyellenebilir eğri olsun. $\alpha'(t)=T(t)$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t_1)$ arasında kalan yay uzunluğu

$$|\alpha|_a^b\equiv\ell_a^b=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(T(t),T(t))}dt \tag{3.1.4}$$

dır (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.4. *M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere*

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M)\\ (X,Y) &\to \nabla_XY\end{aligned}$$

ile tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $\forall f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için *i)* $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$

şartları sağlanıyorsa ∇ *ya* M *üzerinde bir "afin konneksiyonu" adı verilir (do Carmo, 1992).*

Tanım 3.1.5. $\alpha : I \to M$ *bir diferensiyellenebilir eğri,* $t \in I$ *için ve* $V \in \chi(M)$ *için* $\frac{DV}{dt}$ *türevine* V *vektör alanının* α *eğrisi boyunca kovaryant türevi denir (do Carmo, 1992).*

Teorem 3.1.6. $\alpha : I \to M$ *bir diferensiyellenebilir eğrisi üzerinde* $\frac{DV}{dt}$ *vektörü aşağıdaki özellikleri sağlar (do Carmo, 1992).*

i) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ *dir.*

ii) $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *için* $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ *dir.*

iii) $Y \in \chi(M)$ *için* $V(t) = Y(\alpha(t))$ *olarak tanımlansın. Bu durumda* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$ *dir.*

İspat. T_pM nin bir bazı $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ve $W = (w_1, w_2, ..., w_n)$ ve $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ verilsin. Bu durumda

i) $V = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i$, $W = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$ ve $V+W = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)X_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{D(V+W)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(v_i+w_i)}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} (v_i+w_i)\frac{DX_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{DX_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dw_i}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{DX_i}{dt} \\
&= \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned}
\frac{D(fV)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(fv_i)}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} f v_i \frac{DX_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\frac{df}{dt} v_i + f\frac{dv_i}{dt}) X_i + \sum_{i=1}^{n} f v_i \frac{DX_i}{dt} \\
&= \frac{df}{dt} V + f\frac{DV}{dt}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) $V(t) = Y(\alpha(t)) = (y_1(\alpha(t)), y_2(\alpha(t)), ..., y_n(\alpha(t))), \alpha(0) = p$ için $\frac{d\alpha}{dt}(0) = T$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{dt}\ |_{t=0} &= (\sum_{i=1}^{n}\frac{dy_1}{d\alpha_i}\ |_p\ \frac{d\alpha_i}{dt}(0), \sum_{i=1}^{n}\frac{dy_2}{d\alpha_i}\ |_p\ \frac{d\alpha_i}{dt}(0), ..., \sum_{i=1}^{n}\frac{dy_n}{d\alpha_i}\ |_p\ \frac{d\alpha_i}{dt}(0)) \\
&= \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y \\
&= \nabla_T Y
\end{aligned}$$

bulunur. □

Tanım 3.1.7. *M diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. Bir $\alpha : I \to M$ eğrisi boyunca bir V vektör alanı, herbir $t \in I$ için $\frac{DV}{dt} = 0$ şartını sağlıyorsa V ye α eğrisi boyunca paralel vektör alanı denir (do Carmo, 1992).*

Tanım 3.1.8. *$\alpha : I \to M$ eğrisi üzerinde $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t_1)$ noktaları verilsin. $\alpha(t_0)$ noktasında bir V vektör alanının $\alpha(t_1)$ noktasındaki karşılığına V vektör alanının $\alpha(t_1)$ noktasına ötelenmişi denir (do Carmo, 1992).*

$a = \alpha(t_0)$ ve $b = \alpha(t_1)$ olsun. Yukarıdaki tanıma göre $T_{\alpha(t_0)}M$ uzayından $T_{\alpha(t_1)}M$ uzayına bir P_a^b fonksiyonu tanımlanmış olur. P_a^b fonksiyonuna $\alpha(t_0)$ noktasından $\alpha(t_1)$ noktasına "paralel kayma fonksiyonu (paralel transport)" adı verilir.

$$P_a^b : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_1)}M$$

ile tanımlı olup bu dönüşüm lineer ve iç çarpımı koruyan bir dönüşümdür (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 3.1.9. *(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde lineer bir konneksiyon olsun. M üzerinde tanımlanan herbir α eğrisi boyunca V ve W paralel vektör alanı çifti için $g(V, W) =$ sabit oluyorsa, ∇ ya "g metriği ile uyumlu konneksiyon" adı verilir (do Carmo, 1992).*

Önerme 3.1.10. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir ∇ konneksiyonu metrik ile uyumlu olması için gerek ve yeter şart $\alpha : I \to M$ eğrisi boyunca V ve W paralel vektör alanları için*

$$\frac{d}{dt}g(V,W) = g(\frac{DV}{dt},W) + g(V,\frac{DW}{dt}) \tag{3.1.5}$$

dir (do Carmo, 1992).

Sonuç 3.1.11. *(M,g) Riemann manifoldu üzerinde bir ∇ konneksiyonu metrik ile uyumlu olması için gerek ve yeter koşul $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) \tag{3.1.6}$$

olmasıdır (do Carmo, 1992).

Tanım 3.1.12. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \tag{3.1.7}$$

ise ∇ konneksiyonuna "simetrik konneksiyon" denir (do Carmo, 1992).

Teorem 3.1.13. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ konneksiyonu vardır (do Carmo, 1992).*

i) *∇ simetriktir.*

ii) *∇ Riemann metriği g ile uyumludur.*

Tanım 3.1.14. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde simetrik ve metrik ile uyumlu olan ∇ konneksiyonuna "Levi-Civita konneksiyonu" adı verilir (do Carmo, 1992).*

Tanım 3.1.15. *(M,g) bir Riemann manifoldu, $\alpha : I \to M$ diferensiyellenebilir bir eğri, $t \in I$ için $\alpha'(t) = T$ olmak üzere $\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = \nabla_T T = 0$ ise α eğrisine M nin geodeziği denir (do Carmo, 1992).*

Teorem 3.1.6 ve Tanım 3.1.15 göz önüne alınırsa, (M,g) bir Riemann manifoldu, $\alpha : I \to M$ diferensiyellenebilir eğrisinin bir geodezik olması için gerek yeter koşul

$$\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = 0 \tag{3.1.8}$$

olması gerekir.

(3.1.8) eşitliğinden, eğer $M = \mathbb{E}^n$ Öklidyen uzayı ise $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisinin bir geodezik olması için gerek ve yeter koşul $\alpha''(t) \in T_p^{\perp}\mathbb{E}^n$ olmasıdır.

Örnek 3.1.16. $\mathbb{E}^n$ *de bir düzlemin geodezikleri düz doğrulardır (Hacısalihoğlu, 1992).*

Örnek 3.1.17. $\mathbb{E}^3$ *de*

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ile tanımlanan silindir yüzeyini göz önüne alalım. C üzerinde

$$\alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct)$$

eğrisi tanımlansın. Bu durumda $\alpha''(t) \in T_p^{\perp}C$ *olup* α *eğrisi C nin bir geodeziğidir.*

Burada;

i) $a = 0$ *ise* α *eğrisinin geodeziği bir doğru parçasıdır.*

ii) $c = 0$ *ise* α *eğrisinin geodeziği bir çemberdir.*

iii) $a \neq 0$, $c \neq 0$ *ise* α *eğrisinin geodeziği silindir üzerinde bir helisdir.*

O halde silindirin geodezikleri helis, çember ve doğru parçasıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 3.1.18. $\mathbb{E}^3$ *de*

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

ile tanımlanan küre yüzeyini göz önüne alalım. S^2 *üzerinde*

$$\alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$$

eğrisi tanımlansın. Bu durumda $\alpha''(t) \in T_p^{\perp}S^2$ *olup* α *eğrisi* S^2 *nin bir geodeziğidir. Böylece, kürenin geodezikleri büyük çemberlerdir (Hacısalihoğlu, 1992).*

3.2. Riemann Eğrilik Tensörü

Tanım 3.2.1. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.2.1}$$

ile tanımlanan

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

3-lineer dönüşümüne M nin "Riemann eğrilik tensörü" denir (do Carmo, 1992).

Önerme 3.2.2. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \tag{3.2.2}$$

dır. Bu özdeşliğe I. Bianchi özdeşliği denir (do Carmo, 1992).

İspat. Riemann konneksiyonunun simetrik oluşundan

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
&\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X \\
&\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_Y [X,Z] + \nabla_Z [Y,X] + \nabla_X [Z,Y] \\
&\quad - \nabla_{[X,Z]} Y - \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X \\
&= [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Önerme 3.2.3. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için*

i) $g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Y,Z)X,W) + g(R(Z,X)Y,W) = 0$

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$

iv) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir (do Carmo, 1992).

İspat. **i)** I. Bianchi özdeşliğinden ispatı yapılabilir.

ii) Riemann eğrilik tensörünün tanımından

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= g(\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, W) \\ &= -g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,X]}Z, W) \\ &= -g(R(Y,X)Z,W). \end{aligned}$$

iii) $g(R(X,Y)Z,Z) = 0$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Burada;

$$g(R(X,Y)Z,Z) = g(\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, Z)$$

dir. Ayrıca

$$g(\nabla_Y\nabla_X Z, Z) = Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)$$

ve

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) = \frac{1}{2}[X,Y]\,g(Z,Z)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= Yg(\nabla_X Z, Z) - Xg(\nabla_Y Z, Z) + \frac{1}{2}[X,Y]\,g(Z,Z) \\ &= \frac{1}{2}Y(Xg(Z,Z)) - \frac{1}{2}X(Yg(Z,Z)) + \frac{1}{2}[X,Y]\,g(Z,Z) \\ &= -\frac{1}{2}[X,Y]\,g(Z,Z) + \frac{1}{2}[X,Y]\,g(Z,Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Z yerine $Z+W$ alınarak (iii) nin doğruluğu görülür.

iv) $i)$ den

$g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)=0$

$g(R(Y,Z)W,X)+g(R(Z,W)Y,X)+g(R(W,Y)Z,X)=0$

$g(R(Z,W)X,Y)+g(R(W,X)Z,Y)+g(R(X,Z)W,Y)=0$

$g(R(W,X)Y,Z)+g(R(X,Y)W,Z)+g(R(Y,W)X,Z)=0$

yazıabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2g(R(Z,X)Y,W)+2g(R(W,Y)Z,X)=0$$

ve böylece

$$g(R(Z,X)Y,W)=g(R(Y,W)Z,X)$$

elde edilir. Bu ise (iv) nin doğru olduğunu gösterir. □

Tanım 3.2.4. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve $X,Y\in\chi(M)$ için $\Pi=Span\{X,Y\}$ düzlemi verilsin. Π nin kesit eğriliği,*

$$K(X,Y)\equiv K(\Pi)=\frac{g(R(Y,X)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \tag{3.2.3}$$

ile tanımlanır (Bootby, 1986).

X ve Y ortonormal ise Π nin kesit eğriliği

$$K(\Pi)=g(R(Y,X)X,Y)$$

olur.

Önerme 3.2.5. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve X ile Y lineer bağımsız vektör alanları olmak üzere*

i) $K(X,Y)=K(Y,X)$ *dir.*

ii) $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc\neq 0$ *olmak üzere* $K(X,Y)=K(aX+bY,cX+dY)$ *dır (Bootby, 1986).*

İspat. **i)** Riemann eğrilik tensörünün tanımından açıktır.

ii) $X' = aX + bY$ ve $Y' = cX + dY$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(X',Y') &= \frac{g(R(Y',X')X',Y')}{g(X',X')g(Y',Y') - g(X',Y')^2} \\ &= \frac{g(R(cX+dY,aX+bY)aX+bY,cX+dY)}{g(aX+bY,aX+bY)g(cX+dY,cX+dY) - g(aX+bY,cX+dY)^2} \\ &= K(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.2.6. *$X,Y \in \chi(M)$ için $\Pi = Span\{X,Y\}$ düzlemi verilsin. Önerme 3.2.5 in (ii) den gereğince $K(\Pi)$ kesit eğriliği X ve Y vektörlerinin seçiminden bağımsızdır. Bu ise kesit eğriliğinin teğet düzlemler için invaryant (değişmez özellik) olduğunu gösterir (Bootby, 1986).*

Tanım 3.2.7. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için kesit eğriliği sabit ise (M,g) manifolduna "sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldu" veya bir "uzay form" denir (Bootby, 1986).*

Teorem 3.2.8. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. (M,g) sabit c kesit eğrilikli bir Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için*

$$g(R(X,Y)Z,W) = c\{g(X,W)g(Y,Z) - g(Y,W)g(X,Z)\} \tag{3.2.4}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (do Carmo 1992).

Tanım 3.2.9. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu, $p \in M$ noktasında T_pM nin ortonormal bir bazı $\{e_1,\ldots,e_n\}$ olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$S(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j)$$

ile tanımlanan S tensörüne "Ricci eğrilik tensörü" denir (Bootby, 1986).

Teorem 3.2.10. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$S(X,Y) = S(Y,X)$$

dir.

İspat. T_pM nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. Bu halde

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(R(Y,e_j)e_j,X) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,Y)e_j,X) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,Y)X,e_j) \\ &= S(Y,X) \end{aligned}$$

bulunur (Bootby, 1986). □

Tanım 3.2.11. *(M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $v \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda*

$$S(v,v) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,v)v,e_j) \tag{3.2.5}$$

olarak yazılabilir. Burada $S(v,v)$ ye $v \in \chi(M)$ nin "Ricci eğriliği" adı verilir (Bootby, 1986).

(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ için $\{e_1,...,e_n\}$, T_pM nin ortonormal bir bazı olsun. $\Pi_{ij} = Span\{e_i,e_j\}$, $1 \leq i \neq j \leq n$ olmak üzere

$$K(\Pi_{ij}) \equiv K_{ij} = g(R(e_j,e_i)e_i,e_j)$$

olarak yazalım. $v \in \chi(M)$ için $v = e_1$ seçilirse

$$\begin{aligned} S(e_1,e_1) &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,e_1)e_1,e_j) \\ &= g(R(e_1,e_1)e_1,e_1) + g(R(e_2,e_1)e_1,e_2) + ... + g(R(e_n,e_1)e_1,e_n) \\ &= 0 + K_{12} + ... + K_{1n} \end{aligned}$$

olur ki böylece

$$S(e_1,e_1) = \sum_{j=2}^{n} K_{1j}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde $1 \leq i \leq n$ için

$$S(e_i,e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} K_{ij} \tag{3.2.6}$$

dir.

Tanım 3.2.12. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, T_pM nin ortonormal bir bazı olsun.*

$$Ric(e_i) = S(e_i,e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} K_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{3.2.7}$$

ile tanımlanan dönüşüme M nin e_i vektör alanına göre Ricci eğriliği adı verilir (Bootby, 1986).

Kesit eğriliğinin $2-$boyutlu bir düzlem için baz seçiminden bağımsız olduğunu biliyoruz. Kesit eğriliğinin bu özelliğinden, $v \in \chi(M)$ vektörünün Ricci eğriliği, $Ric(v)$, T_pM nin $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal baz seçiminden bağımsızdır.

Tanım 3.2.13. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. T_pM nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olmak üzere $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ için*

$$Ric(e_i) = c \equiv sabit \tag{3.2.8}$$

ise (M,g) manifolduna "Einstein manifoldu" denir (Bootby, 1986).

Tanım 3.2.14. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. T_pM nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} g(R(e_j,e_i)e_i,e_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} K_{ij} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

ile tanımlanan $\tau(p)$ değerine $p \in M$ noktasında M nin "skaler eğriliği" denir (Bootby, 1986).

(M,g) Riemann manifoldunun $\tau(p)$, $p \in M$ skaler eğriliği $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

4. LİE GRUPLARININ GEOMETRİSİ

4.1. Lie Türevi

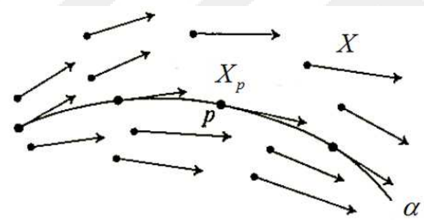
Tanım 4.1.1. *M differensiyellenebilir bir manifold ve*

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

eğrisi verilsin. $\chi(M)$ *üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere*

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t)) \tag{4.1.1}$$

ise α *eğrisine "X vektör alanının bir integral eğrisi" denir (Hacısalihoğlu, 1983).*



Şekil 4.1.1. X vektör alanın integral eğrisi

Burada;

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t X(\alpha(t))dt \tag{4.1.2}$$

ile verilir.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{E}^2$ *de sabit bir vektör alanı* $X = (1,2)$ *ve* $p(0,0)$ *noktası verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{E}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

eğrisi p noktasından geçen X vektör alanının bir integral eğrisi ise $\frac{d\alpha_1}{dt} = 1$ *ve* $\frac{d\alpha_2}{dt} = 2$ *olup* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *için* $\alpha_1 = t + c_1$ *ve* $\alpha_2 = 2t + c_2$ *yazılabilir. Böylece* α *integral eğrisi*

$$\alpha(t) = (t + c_1, 2t + c_2)$$

olur. Böylece $p(0,0)$ noktasından geçen integral eğrisi

$$\alpha(t) = (t, 2t)$$

doğrusudur.

Örnek 4.1.3. $\mathbb{E}^2$ *de bir* X *vektör alanı olmak üzere* $\forall p = (p_1, p_2) \in \mathbb{E}^2$ *için* $X_p = (-p_2, p_1)$ *olarak tanımlansın.*

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{E}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

eğrisi X *vektör alanının bir integral eğrisi ise*

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\alpha_2(t) \quad ve \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1(t)$$

denklemlerinin sağlanması gerekir. Burada;

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\frac{d\alpha_2}{dt} = -\alpha_1(t)$$

olup

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_1(t) = 0$$

olduğundan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *için*

$$\alpha_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Benzer şekilde

$$\alpha_2(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

olup

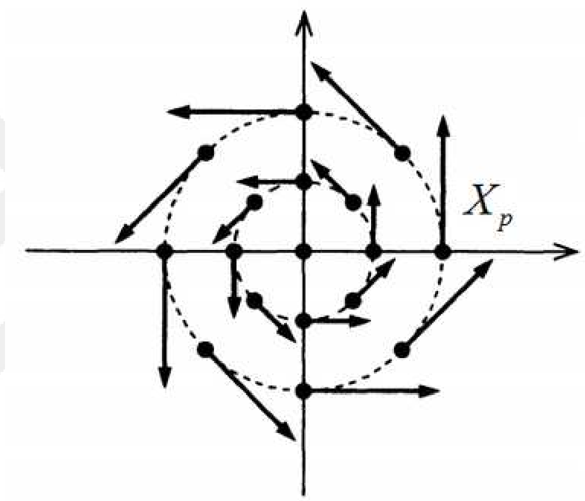
$$\alpha(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1 \sin t - c_2 \cos t)$$

elde edilir.

Bu integral eğrilerinden $(1,0)$ *noktasından geçen eğriyi bulalım. Bu durumda* $\alpha_1(0) = 1, \alpha_2(0) = 0$ *olduğundan*

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

çemberi elde edilir (Lee, 2003).



Şekil 4.1.2. *X vektör alanın integral eğrisi*

Tanım 4.1.4. *Bir X vektör alanının p noktasından geçen integral eğrisi,* $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\alpha_p'(t) = X(\alpha_p(t)),$$

verilsin. M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} \phi : M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (p,t) &\rightarrow \phi(p,t) \end{aligned}$$

veya

$$\phi(p,t) = \phi_X(t) \tag{4.1.3}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümüne X üzerinde bir flow denir (Lee, 2003).

Bu tanım gereğince, flow, bir X vektör alanının integral eğrilerinin oluşturduğu eğriler ailesidir.

Burada ϕ dönüşümüne "$1-$parametreli dönüşümler grubu" adı da verilir (Lee, 2003).

$$\begin{aligned} \phi : M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (p,t) &\rightarrow \phi(p,t) \end{aligned}$$

flowu

$$\phi(p,t+s) = \phi(\phi(p,s),t) = \phi(p,t) \circ \phi(p,s) \tag{4.1.4}$$

bileşke işlemine göre bir grup yapısına sahiptir.

$\phi(p,t) = \phi_t(p)$ ile gösterelim. Bu durumda

i) $\phi_t(p) \circ \phi_s(p) = \phi_s(p) \circ \phi_t(p) = \phi_{t+s}(p)$ olduğundan ϕ dönüşümü bileşke işlemine göre değişmelidir.

ii) ϕ_0 birim elemandır.

iii) $\phi_t^{-1}(p) = \phi_{-t}(p)$ ters elemandır.

Tanım 4.1.5. *ϕ_t, M üzerinde bir flow olsun.*

$$X_{\phi_t(p)} = \frac{d}{dt} |_{t=0} \, \phi_t(p) \tag{4.1.5}$$

ile tanımlı X vektör alanına ϕ_t flowunun infinitesimal üreteci adı verilir (Lee, 2003).

Örnek 4.1.6. *$\mathbb{E}^2$ de ϕ_t dönüşümü*

$$\phi_t(x,y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$$

ile verilsin.

$$
\begin{aligned}
\phi_s(\phi_t(x,y)) &= \phi_s(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t) \\
&= ((x\cos t - y\sin t)\cos s - (x\sin t + y\cos t)\sin s, \\
&\quad (x\cos t - y\sin t)\sin s + (x\sin t + y\cos t)\cos s) \\
&= (x(\cos t\cos s - \sin t\sin s) - y(\sin t\cos s + \cos t\sin s), \\
&\quad x(\cos t\sin s + \sin t\cos s) + y(\cos t\cos s - \sin t\sin s)) \\
&= (x\cos(t+s) - y\sin(t+s), x\sin(t+s) + y\cos(t+s)) \\
&= \phi_{t+s}(x,y)
\end{aligned}
$$

olup (i) şartı sağlanır.

$t = 0$ *için* $\phi_0(x,y) = (x,y)$ *birim elemanı olup* (ii) *şartı sağlanır.*

$$
\phi_t^{-1}(x,y) = \phi_{-t}(x,y) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t)
$$

ters elemanı olup (iii) *şartı sağlanır.*

Şimdi ϕ_t *nin infinitesimal üreteci olan* X *vektörünü bulalım:*

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t(x,y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t) \\
&= (-x\sin t - y\cos t, x\cos t - y\sin t)\Big|_{t=0} \\
&= (-y, x)
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 4.1.7. ϕ_t *dönüşümü*

$$
\phi_t(x,y) = (x+at, y+bt), \; a,b \in \mathbb{R}
$$

ile verilsin.

$$\begin{aligned}\phi_s(\phi_t(x,y)) &= \phi_s(x+at, y+bt)\\ &= (x+at+as, y+bt+bs)\\ &= (x+a(t+s), y+b(t+s))\\ &= \phi_{t+s}(x,y)\end{aligned}$$

olup (i) *şartı sağlanır.*

$t=0$ *için* $\phi_0(x,y)=(x,y)$ *birim elemanı olup* (ii) *şartı sağlanır.*

$$\phi_t^{-1}(x,y)=\phi_{-t}(x,y)=(x-at, y-bt)$$

ters elemanı olup (iii) *şartı sağlanır.*

Şimdi ϕ_t *nin infinitesimal üreteci olan X vektörünü bulalım:*

$$\begin{aligned}X &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \phi_t(x,y)\\ &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ (x+at, y+bt)\\ &= (a,b)\ |_{t=0}\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.1.8. ϕ_t *dönüşümü*

$$\phi_t(x,y)=(e^{at}x, e^{bt}y), a,b\in\mathbb{R}$$

ile verilsin.

$$\begin{aligned}\phi_s(\phi_t(x,y)) &= \phi_s(e^{at}x, e^{bt}y)\\ &= (e^{as}e^{at}x, e^{bs}e^{bt}y)\\ &= (e^{a(s+t)}x, e^{b(s+t)}y)\\ &= \phi_{t+s}(x,y)\end{aligned}$$

olup (i) şartı sağlanır.

$t=0$ için $\phi_0(x,y)=(x,y)$ birim elemanı olup (ii) şartı sağlanır.

$$\phi_t^{-1}(x,y)=\phi_{-t}(x,y)=(e^{-at}x,e^{-bt}y)$$

ters elemanı olup (iii) şartı sağlanır.

Şimdi ϕ_t nin infinitesimal üreteci olan X vektörünü bulalım:

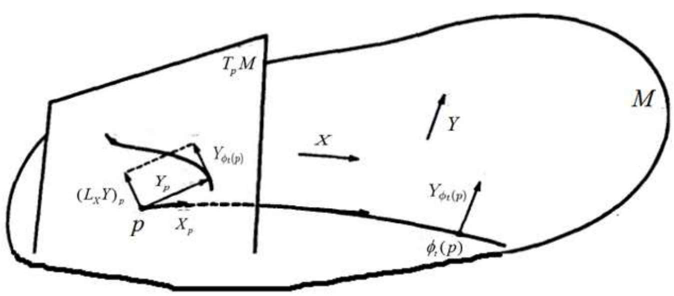
$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \phi_t(x,y) \\ &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ (e^{at}x,e^{bt}y) \\ &= (ae^{at}x,be^{bt}y)\ |_{t=0} \\ &= (ax,by) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.1.9. *X ve Y, M manifoldu üzerinde birer vektör alanı olmak üzere*

$$L_XY=[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{Y_p-d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)})\right\} \tag{4.1.6}$$

ile tanımlanan türeve "Lie türevi" denir (Warner 1983).



Şekil 4.1.3. *Lie türevi*

Burada $Y_{\phi_t(p)}\in T_{\phi_t(p)}M$ ve $d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)})\in T_pM$ olup

$$Y_p-d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)}) \tag{4.1.7}$$

farkı Y vektör alanının ϕ flowu üzerinde ne kadar değiştiğini ölçer.

Lemma 4.1.10. *$\forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için $L_X(f) = X(f)$ dir (Warner 1983).*

İspat. $\phi_t(p)$ nin koordinatları $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_X(f) &= \frac{d}{dt}(fo\phi_t)\mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f(u_i(t)))\mid_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{du_i}{dt}\mid_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}X_i \\ &= X(f) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 4.1.11. *$\mathbb{E}^2$ de*

$$\phi_t(x,y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$$

flowunun infinitesimal üreteci $X = (-y,x)$ olmak üzere $Y = (2x,y)$ vektörü verilsin. Bu durumda

$$\nabla_X Y = (2.(-y) + 0.x, 0.(-y) + 1.x) = (-2y, x)$$

ve

$$\nabla_Y X = (0.2x - 1.y, 1.2x + 0.y) = (-y, 2x)$$

olup

$$\begin{aligned} L_X Y &= [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ &= (-2y,x) - (-y,2x) \\ &= (-y,-x) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Lie Grupları

Tanım 4.2.1. *G diferensiyellenebilir bir manifold olsun. G üzerinde*

$$\cdot : G \times G \to G$$

işlemi bir grup yapısına sahip ise G ye bir "Lie grubu" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Genellikle $\cdot$ işlemi $\forall x, y \in G$ için $(x,y) \to xy^{-1}$ ile tanımlanır.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{E}^n$ *Öklidyen uzayı*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n &\to \mathbb{E}^n \\ (x,y) &\to x+y \end{aligned}$$

işlemine göre bir Lie grubudur (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 4.2.3. $\mathbb{E}^n$ *Öklid uzayındaki tüm öteleme ve dönme hareketlerinin oluşturduğu gruba "Öklidyen grup" adı verilir. Öklidyen grup bir Lie grubudur (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Örnek 4.2.4. $n \times n$ *tipindeki tüm matrislerin kümesi* $M_n(\mathbb{R})$

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A, n \times n \text{ tipinde bir matris}\}$$

olsun. $M_n(\mathbb{R})$ *nin*

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\} \subset M_n(\mathbb{R}) \tag{4.2.1}$$

alt kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba "genel lineer grup" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 4.2.5. $GL(n,\mathbb{R})$ *Lie grubunun bir alt kümesi olan*

$$O(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n\right\} \subset GL(n,\mathbb{R}) \tag{4.2.2}$$

kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. $O(n,\mathbb{R})$ *Lie grubuna "ortogonal grup" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Burada; $A,B \in O(n,\mathbb{R})$ için $AA^T = I_n$ ve $BB^T = I_n$ olduğundan

$$(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AI_nA^T = AA^T = I_n$$

olur ki $AB \in O(n,\mathbb{R})$ dir.

Örnek 4.2.6. *$O(n,\mathbb{R})$ nin bir alt kümesi olan*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\} \tag{4.2.3}$$

kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba "özel ortogonal grup" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Burada; $A,B \in SL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \det A = \det B = 1$ olduğundan

$$\det(AB) = \det A . \det B = 1$$

olur ki

$$AB \in SL(n,\mathbb{R})$$

dır.

Not 4.2.7. *$GL(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ kümesini göz önüne alalım:*

$M_2(\mathbb{R})$ nin bir vektör uzayı yapısına sahip olduğunu biliyoruz. $M_2(\mathbb{R})$ nin bir bazı

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesidir. Gerçekten

Lineer bağımsızlık:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ise

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

olduğundan lineer bağımısızlık aksiyomu sağlanır.

Germe aksiyomu:

$$\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

için

$$A = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A \in Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olup germe aksiyomu sağlanır.

Böylece, $GL(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ *Lie grubunun tanjant uzayı* $M_2(\mathbb{R})$ *olduğu görülür (Hall, 2015).*

Örneğin;

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$

noktası ve

$$A = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

vektörü verildiğinde

$$A_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in T_pGL(2,\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$$

tanjant vektörü elde edilir.

Benzer şekilde $GL(n,\mathbb{R})$ Lie grubunu tanjant uzayının $M_n(\mathbb{R})$ olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.2.8. *$M_n(\mathbb{R})$ üzerinde iç çarpım*

$$< A, B >= iz(AB^T) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \tag{4.2.4}$$

ile tanımlanır (Hall, 2015).

$X, A \in M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$$

verilsin. Bu durumda

$$X(A) = \begin{bmatrix} X(f_1) & X(f_2) \\ X(f_3) & X(f_4) \end{bmatrix}$$

dır. Benzer şekilde $GL(n, \mathbb{R})$ üzerinde gösterilebilir.

Örnek 4.2.9.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_1 \end{bmatrix} \; ve \; A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2^2 + x_3 \\ x_3 & x_1 + x_4 \end{bmatrix}$$

verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
X(f_1) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} X_i = x_1 + x_2 \\
X(f_2) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} X_i = 2x_2(x_2 + x_3) + 1.(x_3 + x_4) = 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3 + x_4 \\
X(f_3) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} X_i = 1.(x_3 + x_4) = x_3 + x_4 \\
X(f_4) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f_4}{\partial x_i} X_i = 1.(x_1 + x_2) + 1.(x_4 + x_1) = 2x_1 + x_2 + x_4
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$X(A) = \begin{bmatrix} X(f_1) & X(f_2) \\ X(f_3) & X(f_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 & 2x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek 4.2.10. *$n \times n$ tipindeki tüm kompleks matrislerin kümesi*

$$M_n(\mathbb{C}) = \{A : A, n \times n \ \text{ tipindeki kompleks matris}\}$$

olsun. $M_n(\mathbb{C})$ nin

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie Grubudur. Bu gruba "genel lineer kompleks grup" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

$\forall A \in GL(n,\mathbb{C})$ için

$$A = \begin{bmatrix} x_{11}+iy_{11} & x_{12}+iy_{12} & \ldots & x_{1n}+iy_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ x_{n1}+iy_{n1} & x_{n2}+iy_{n2} & \ldots & x_{nn}+iy_{nn} \end{bmatrix}$$

olduğundan $GL(n,\mathbb{C})$, $\{x_{ij}, y_{ij}\}$, $\forall i, j\{1,\ldots n\}$, koordinat sistemi ile birlikte $2n^2$ reel boyutlu bir diferensiyellenebilir manifoldtur.

Örnek 4.2.11. *$GL(n,\mathbb{C})$ nin*

$$U(n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A\overline{A^t} = I_n\right\}$$

alt kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba "üniter grup" adı verilir. Burada $\overline{A}$, A matrisinin eşleneği olan matristir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Özel olarak; $n = 1$ için $A = [\cos\theta + i\sin\theta]$ matrisini göz önüne alalım. $\overline{A^t} = [\cos\theta - i\sin\theta]$ olup $A\overline{A^t} = 1$ olduğundan $A \in U(1)$ dir. Burada A matrisi kompleks düzlemde birim çemberdir.

$n = 2$ için

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\overline{A^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A\overline{A^t} = I_2$ *olup* $A \in U(2)$ *dir.*

Tanım 4.2.12. *G bir Lie grup olsun.* $\forall g \in G$ *ve* $a \in G$ *için*

$$\begin{aligned} L_a : G &\to G \\ (a,g) &\to L_a(g) = ag \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_a : G &\to G \\ (a,g) &\to R_a(g) = ga \end{aligned}$$

dönüşümleri tanımlansın. Burada L_a *dönüşümüne "sol öteleme",* R_a *dönüşümüne "sağ öteleme" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

L_a *ve* R_a *dönüşümleri G üzerinde bir gruptur. Gerçekten;* $e \in G, G$ *nin birim elemanı olmak üzere*

$L_e(g) = eg = g$ *olduğundan* L_e *birim eleman olur.*

$L_a(L_{a^{-1}}(g)) = L_a(a^{-1}g) = aa^{-1}g = g$ *olduğundan* L_a *nın tersi* $L_{a^{-1}}$ *dir.*

$L_a(L_b(g)) = abg = L_{ab}(g)$ *birleşme özelliği sağlanmış olur.*

Tanım 4.2.13. *G bir Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı ve*

$$\begin{aligned} (L_a)_* : T_eG &\to T_aG \\ X_e &\to (L_a)_*X_e \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Eğer $\forall a \in G$ *için* $(L_a)_*X_e = X_a$ *ise X vektör alanına "sol invaryant vektör alanı" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

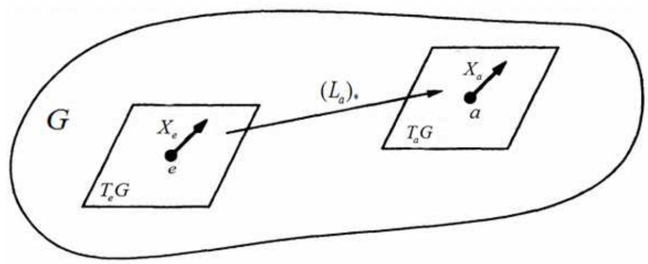
Başka bir deyişle; sol invaryant bir vektör alanı aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir:

$\forall a, b \in G$ *için* $(L_a)_*X_b = X_{ab}$ *ise X vektör alanına "sol invaryant vektör alanı" denir.*

Not edelim ki; X sol invaryant bir vektör alanı ise

$$X_b \circ L_a = (L_a)_* X_b = X_{ab} \tag{4.2.5}$$

dır.



Şekil 4.2.1 Sol invaryant vektör alanı

Tanım 4.2.14. *G bir Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı olsun. Herhangi bir $a \in G$ ve $\forall b \in G$ için*

$$(L_a)_* X_b = X_{ab} \tag{4.2.6}$$

ise X vektör alanına "L_a-bağlantılı" denir (Lee, 2003).

Örnek 4.2.15. $GL(2,\mathbb{R})$ *de*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & x_1-x_2 \\ x_1+x_4 & x_3-x_4 \end{bmatrix}$$

ve

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

verilsin. Bu durumda

$$X_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad ab = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ve \;\; X_{ab} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$L_aX = aX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$(L_a)_*X_b = \begin{bmatrix} X_b(f_1)\mid_{ab} & X_b(f_2)\mid_{ab} \\ X_b(f_3)\mid_{ab} & X_b(f_4)\mid_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece $(L_a)_*X_b = X_{ab}$ *bulunur. Bu ise* X *vektör alanının sol invaryant olduğunu gösterir.*

Örnek 4.2.16. *Örnek 4.2.15 de*

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; Y_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \; Y_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$(L_a)_*Y_e = \begin{bmatrix} Y_e(f_1)\mid_a & Y_e(f_2)\mid_a \\ Y_e(f_3)\mid_a & Y_e(f_4)\mid_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $(L_a)_*Y_e \neq Y_a$ *bulunur. Bu ise* Y *vektör alanının sol invaryant bir vektör alanı olmadığını gösterir.*

Teorem 4.2.17. *G bir Lie grubu ve G üzerinde vektör alanları X, Y olsun. X ve Y sol invaryant vektör alanı ise $[X,Y]$ Lie braketi de sol invaryant bir vektör alanıdır (Arvanitoyeorgos, 2003).*

İspat. $\forall a,b \in G$ ve $\forall f \in C^\infty(G,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} (L_a)_*[X,Y]_b(f) &= [X,Y]_b(f \circ L_a) \\ &= ([X,Y](f \circ L_a))(b) \\ &= (([X,Y]f) \circ L_a)(b) \\ &= ([X,Y]f)(ab) \\ &= [X,Y]_{ab}(f) \end{aligned}$$

$\square$

Tüm sol invaryant vektörlerin kümesi g ile gösterelim. Türev dönüşümü lineer olduğundan her $X,Y \in$ g ve $a \in G$ için

$$\begin{aligned}(L_a)_*(X+Y)_e &= (L_a)_*X_e + (L_a)_*Y_e \\ &= X_a + Y_a \\ &= (X+Y)_a\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $X+Y$ nin bir sol invaryant vektör alanı olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(L_a)_*(\lambda X)_e = (L_a)_*\lambda X_e = \lambda (L_a)_*X_e = \lambda X_a$$

olup bu ise λX yine bir sol invaryant vektör alanı olduğunu gösterir.

Böylece g kümesi $(+)$ ve skalerle çarpma $(\cdot)$ işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Önerme 4.2.18. *G bir Lie grubu ve e, G nin birim elemanı olmak üzere $X \to X_e$ fonksiyonu* g *ile T_eG arasında bir lineer izomorfizmdir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

İspat. a) Lineerlik: $\forall X,Y \in$ g için $(X+Y)_e = X_e + Y_e$ olduğunu gösterelim:

Türev dönüşümünün tanımından $\forall a \in G$ için

$$(L_a)_*(X+Y)_e = (X+Y)_a \tag{4.2.7}$$

dır. Ayrıca $(L_a)_*$ lineer olduğundan

$$\begin{aligned}(L_a)_*(X+Y)_e &= (L_a)_*X_e + (L_a)_*Y_e \\ &= X_a + Y_a \qquad (4.2.8)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(L_a)_*(\lambda X)_e = \lambda X_a \tag{4.2.9}$$

ve

$$(L_a)_*(\lambda X_e) = \lambda (L_a)_* X_e = \lambda X_a \tag{4.2.10}$$

dır. (4.2.7), (4.2.8), (4.2.9) ve (4.2.10) den $X \to X_e$ dönüşümünün lineer olduğu görülür.

$b)$ Birebirlik: $X_e = 0 \Rightarrow X$ vektörünün sıfır vektör olduğu açıktır. Gerçekten; $\forall a \in G$ için

$$X_e = 0 \Rightarrow (L_a)_* X_e = X_a = 0 \tag{4.2.11}$$

olup bu ise $X = 0$ olduğunu gösterir.

$c)$ Örtenlik: $\forall X_e \in T_eG$ için $X \in$ g olacak şekilde bir $X \in g$ vardır. □

Önerme 4.2.18 göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.19. *G bir Lie grubu ve e, G nin birim elemanı olmak üzere*

$$boy\ \mathrm{g} = boy\ T_eG \tag{4.2.12}$$

dir (Arvanitoyeorgos, 2003).

4.3. Lie Cebiri

Tanım 4.3.1. $(V,+,\cdot)$ *bir vektör uzayı, V üzerinde bir Lie braketi* $([\ ])$ *tanımlı ise* $(V,+,\cdot,[\ ])$ *dörtlüsüne bir "Lie cebiri" denir (Samelson, 2012).*

Burada; Lie braketi $[\ ] : V \times V \to V$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$i)$ Alterne özelliği: $\forall X \in V$ için $[X,X] = 0$ dır. Not edelim ki; Bir dönüşüm alterne ise ters simetrik, ters simetrik ise alternedir.

$ii)$ Bilineerlik: $\forall X,Y,Z \in V$ ve $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$

ve

$$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$iii)$ Jakobi Eşitliği: $\forall X,Y,Z \in V$ için

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.3.2. *G bir Lie grubu ve G üzerinde sol invaryant vektör alanların kümesi g olmak üzere $\forall X,Y \in \mathrm{g}$ ve $\forall f \in C^{\infty}(G,\mathbb{R})$ için*

$$[X,Y](f) \equiv [X,Y]\,(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{4.3.1}$$

ile

$$\begin{aligned} [,] : \mathrm{g}\times\mathrm{g} &\to \mathrm{g} \\ X,Y &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $(\mathrm{g},+,\cdot)$ bir vektör uzayı ve $\forall X,Y \in \mathrm{g}$ için $[X,Y] \in \mathrm{g}$ olduğundan $(\mathrm{g},+,\cdot,[\,])$ dörtlüsü bir Lie cebiridir (Samelson, 2012).

Örnek 4.3.3. *$(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ vektör uzayı, $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)$ olmak üzere*

$$u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1) \tag{4.3.2}$$

vektörel çarpım işlemi $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir Lie braketidir. Böylece $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\times)$ dörtlüsü bir Lie cebiridir (Samelson, 2012).

Örnek 4.3.4. *V bir vektör uzayı, $V \to V$ ile tanımlı tüm lineer fonksiyonların kümesini $End\,(V)$ ile gösterelim. $\forall T,S \in End\,(V)$ için*

$$[T,S] = T\circ S - S\circ T \tag{4.3.3}$$

dönüşümüne göre $(V,+,\cdot,[\;\,])$ dörtlüsü bir Lie cebiridir (Samelson, 2012).

Örnek 4.3.5. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde lineer bir konneksiyon olsun. M nin vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{4.3.4}$$

ile tanımlı $[,]$ dönüşümü bir Lie braketi olup $(\chi(M), +, \cdot, [,])$ dörtlüsü bir Lie cebiridir (Samelson, 2012).

Örnek 4.3.6. *$M_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi olmak üzere $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ için*

$$[A,B] = AB - BA \tag{4.3.5}$$

tanımlansın. Bu durumda $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, [\ \ ])$ dörtlüsü bir Lie cebiridir (Samelson, 2012).

Örnek 4.3.7. *$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ kümesinin bir Lie grubu olduğunu biliyoruz. $GL(n,\mathbb{R})$ elemanları için* (4.3.5) *de verilen $[\ \ ]$ dönüşümü tanımlanırsa $GL(n,\mathbb{R})$ nin Lie cebiri $M_n(\mathbb{R})$ ye izomorf olduğu görülür. Yani*

$$GL(n,\mathbb{R}) \text{ nin Lie cebiri } \cong M_n(\mathbb{R})$$

dir (Samelson, 2012).

5. LIE GRUPLARI ÜZERİNDE TANIMLANAN DÖNÜŞÜMLER

5.1. Bir parametreli dönüşüm grubu

Tanım 5.1.1. *G bir Lie grubu olsun.*

$$\phi : (\mathbb{R}, +) \to G$$

ile tanımlanan bir diferensiyellenebilir homomorfizmine G grubunun "bir parametreli dönüsüm grubu" denir. Burada;

$$\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$$

olup birim eleman $\phi(0) = e$ ve ters elaman $\phi(-t) = \phi^{-1}(t)$ dir (Duistermaat ve Kolk, 1999).

Örnek 5.1.2. *$S^1 = U(1)$ çemberinde $\phi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ dönüşümü $1-$parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).*

Örnek 5.1.3. *$U(2)$ uniter grubunda*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü $1-$parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).

Örnek 5.1.4. *$GL(3,\mathbb{R})$ Lie grubunda*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü $1-$parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).

Örnek 5.1.5. *$O(3)$ ortogonal grupta tanımlanan*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü $1-$parametreli dönüşüm grubudur (Duistermaat ve Kolk, 1999).

G bir Lie grubu, $X_e \in T_eG$ tanjant vektörüne karşılık gelen sol invaryant vektör alanı X olsun. Herhangi bir $a \in G$ için

$$\gamma_a : \mathbb{R} \to G$$

$\gamma_a(0) = a$ olacak şekilde X vektör alanının bir tek integral eğrisi vardır. X in birim eleman e noktasından başlayan integral eğrisi $\phi = \gamma_e$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.6. *$\phi = \gamma_e$ dönüşümü $\mathbb{R}$ kümesinden G Lie grubu üzerine tanımlanan bir grup homomorfizmidir (Duistermaat ve Kolk, 1999).*

İspat. $\forall s,t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\to G \\ t &\to \gamma_e(s)\gamma_e(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \mathbb{R} &\to G \\ t &\to \gamma_e(t+s) \end{aligned}$$

eğrilerini göz önüne alalım. $\gamma_1 = \gamma_2$ olduğunu göstermek teoremin ispatı için yeterlidir.

Bu eğrilerin başlangıç şartları için

$$\gamma_1(0) = \gamma_e(s)\gamma_e(0) = \gamma_e(s)$$

ve

$$\gamma_2(0) = \gamma_e(0+s) = \gamma_e(s)$$

olduğundan $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ olup başlangıç şartları aynıdır.

γ_2 nin $e \in G$ noktasından geçen ve X in ürettiği bir integral eğrisi olduğu açıktır. Üstelik

$$\begin{aligned} \gamma_1^{'}(t) = (L_{\gamma_e(s)^*})_{\gamma_e(t)}\gamma_e^{'}(t) &= (L_{\gamma_e(s)^*})X_{\gamma_e(t)} \\ &= X_{\gamma_e(s)\gamma_e(t)} \end{aligned}$$

olduğundan γ_1 eğrisi $e \in G$ den geçen X in ürettiği ve bir integral eğrisidir. Belli bir noktadan geçen ve bir X vektörünün ürettiği integral eğrisi tek olduğundan $\gamma_1 = \gamma_2$ olduğu görülür. Böylece $e \in G$ den geçen $1-$parametreli dönüşüm grubu ϕ olmak üzere

$$\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$$

elde edilir ki bu ise ϕ nin bir homomorfizm olduğunu gösterir. $\square$

G bir Lie grup $e = 1$, G nin birim elemanı ve $X \in \mathrm{g}$ olsun. Herhangi bir X vektör alanının ürettiği integral eğrisine karşılık bir $1-$parametreli dönüşüm grubu $\phi_X(t)$ ve başlangıç noktası $\phi_X(0) = e$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.1.7. *G nin $1-$parametreli dönüşüm grupları ile T_eG arasında birebir bir eşleme vardır (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Sonuç 5.1.8. *Herbir $X \in \mathrm{g}$ için $\phi_X : \mathbb{R} \to G$ dönüşümü verilsin. Bu durumda $\phi_X^{'}(0) = X_e$ olacak şekilde bir tek $X_e \in T_eG$ vardır (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Önerme 4.2.18 ve Sonuç 5.1.8 göz önüne alınırsa; bir G Lie grubunun $1-$parametreli dönüşüm grupları,

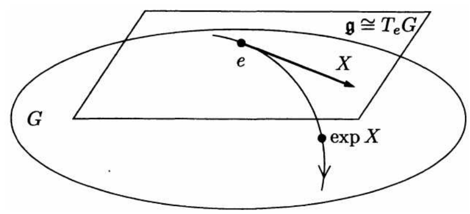
$$\mathrm{g} \to G$$

ile verilen bir dönüşüm yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 5.1.9. *G bir Lie grubu ve g, G nin sol invaryant vektör alanlarının kümesi (Lie cebiri) olsun.*

$$\begin{aligned} \exp : \mathrm{g} &\to G \\ X &\to \exp(X) = \phi_X(1) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme "exponantial dönüşüm" veya "üstel dönüşüm" denir. Burada ϕ_X, $\phi_X(0) = e$, $\phi_X'(0) = X_e$ şartlarını sağlayan bir $X \in \mathrm{g}$ nin ürettiği $1-$parametreli dönüşüm grubudur (Lee, 2003).



Şekil 5.1.1. Üstel dönüşüm

Not edelim ki $\exp(X) = \phi_X(1)$ eşitliğinde 1 yazılması dönüşümün iyi tanımlı olmasını garanti eder.

Lemma 5.1.10. *$X \in$ g nin $1-$parametreli dönüşüm grubu ϕ_X olmak üzere $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için $\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$ dir (Lee, 2003).*

İspat. $h(t) = \phi_X(st)$ olarak bir h fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda;

$$h^{'}(t) = s\phi_X^{'}(st) \tag{5.1.1}$$

olup

$$h^{'}(0) = s\phi_X^{'}(0) = sX \tag{5.1.2}$$

dır. Ayrıca sX vektörünün $1-$parametreli dönüşüm grubu ϕ_{sX} olduğundan

$$\phi_{sX}^{'}(0) = sX \tag{5.1.3}$$

dir. Böylece, Sonuç 5.1.8, (5.1.2) ve (5.1.3) den

$$\phi_X(st) = \phi_{sX}(t) \tag{5.1.4}$$

olduğu görülür. □

Sonuç 5.1.11. *G bir Lie grubu olsun. Her $X \in$ g için*

$$\exp(tX) = \phi_{tX}(1) = \phi_X(t) \tag{5.1.5}$$

dir (Lee, 2003).

İspat. Lemma 5.1.10 den, $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için

$$\phi_X(st) = \phi_{sX}(t) \tag{5.1.6}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\exp(sX) = \phi_{sX}(1)$ olduğundan $t = 1$ için

$$\exp(sX) = \phi_X(s) \tag{5.1.7}$$

yazılır. s ve t nin rolleri değiştirilerek, (5.1.6) ve (5.1.7) den iddianın ispatı açıktır.

□

Sonuç 5.1.12. g, *G Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere* $X \in$ g *için* $\gamma'(0) = X$ *ve* $\phi_X(t) = \gamma(t)$ *olacak şekilde bir* γ *eğrisi verilsin. Bu durumda*

$$\gamma(t) = \exp(tX) \tag{5.1.8}$$

dir. Ayrıca ϕ_X *bir homomorfizm olduğundan*

$$\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX) \tag{5.1.9}$$

ve

$$\exp^{-1}(tX) = \exp(-tX) \tag{5.1.10}$$

dir (Lee, 2003).

Şimdi, exp dönüşümün türevi olan $\exp_*$ dönüşümünün başlangıç noktası 0 olarak seçelim. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.13. $\exp_* : T_0G \to T_eG$ *dönüşümü birim dönüşümdür (Lee, 2003).*

İspat. $X \in$ g için

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\to \text{g} \\ t &\to \alpha(t) = tX \end{aligned}$$

ile tanımlı bir eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\exp_*(X) &= \exp_*(\alpha^{'}(0)) \\ &= (\exp\circ\alpha)^{'}(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX))\mid_{t=0} \\ &= X\end{aligned}$$

olup bu ise $\exp_*$ dönüşümünün birim dönüşüm olduğunu gösterir. □

Sonuç 5.1.14. *Üstel dönüşümünün türevi* g *üzerinde bir eğri çizer (Lee, 2003).*

Ters fonksiyon teoremi ve Teorem 5.1.13 den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 5.1.15. *Üstel dönüşüm,* g *de* 0 *ın bir komşuluğundan G de e nin bir komşuluğuna bir diffeomorfizmdir (Lee, 2003).*

5.2. İnfinitesimal Üreteçler

G bir Lie grubu ve $\phi(t)$, G üzerinde tanımlı bir $1-$parametreli dönüşüm grubu olsun. Bu durumda

$$\phi^{'}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(t+h)-\phi(t)\right]$$

olup $\phi(t)$ bir homomorfizm olduğundan

$$\phi'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(t)\phi(h)-\phi(t)\right] \tag{5.2.1}$$

$$= \phi(t)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\phi(h)-e\right] \tag{5.2.2}$$

olur. Burada G bir Lie grubu olduğundan koordinatları differensiyellenebilir olup

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-e}{h}$$

limiti mevcuttur. Bu limit değerine A diyelim. Yani

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-e}{h}$$

olsun. (5.2.2) den

$$\phi'(t) = A\phi(t)$$

elde edilir. Böylece $t = 0$ için

$$A = \phi'(0) = A\phi(0)$$

bulunur (Hall, 2015).

Tanım 5.2.1. *$\phi(t)$, G Lie grubunun $1-$parametreli dönüşüm grubu olsun. $\phi'(t) = A\phi(t)$ ile tanımlanan A ya $\phi(t)$ nin "infinitesimal üreteci" denir (Hall, 2015).*

Örnek 5.2.2. *$U(2)$ nin $1-$parametreli dönüşüm grubunun*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $\phi'(t) = A\phi(t)$ ve $\phi'(0) = A$ olduğundan

$$\phi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix}$$

ve

$$\phi'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

olup

$$\phi'(t) = A\phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $\phi(t)$ nin infinitesimal üreteci

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur (Hall, 2015).

Not 5.2.3. *Burada* $\phi^{'}(t) = A\phi(t)$ *denkleminin çözümü*

$$\phi(t) = e^{At} \tag{5.2.3}$$

dir. $\phi'(0) = A$ *dır. Gerçekten;* e^{tA} *nın taylor seri açılımı*

$$e^{tA} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n$$

olup

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

ile ifade edilir.

Not 5.2.4. *G bir Lie grubu ve* g*, G nin Lie cebiri olmak üzere*

$$\begin{aligned} \exp \quad : \quad & \mathrm{g} \to G \\ & X \to \exp(tX) = \phi_X(t) \end{aligned}$$

öyleki $\phi_X(0) = e$ *ve* $\phi_X'(0) = X$ *olarak tanımlansın. O halde*

$$\exp(tX) = \phi_X(t) = e^{tX}$$

öyleki; $\phi_X'(0) = X$ *olduğundan* exp *dönüşümü yardımıyla bir G Lie grubunun Lie cebiri bulunabilir (Hall, 2015).*

Örnek 5.2.5. $O(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\right\}$ *ortogonal grubunun Lie cebiri*

$$o(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\right\}$$

kümesidir (Hall, 2015).

Gerçekten; kabul edelim ki $\gamma(s), M_n(\mathbb{R})$ *de* $\gamma(0) = I$ *olacak şekilde bir eğri olsun.* $\gamma(s) \in O(n)$ *ise*

$$\gamma^t(s)\gamma(s) = I$$

olup $s = 0$ *noktasında türev alınırsa*

$$\left[\gamma^t(s)\right]' \gamma(s) \mid_{s=0} + \gamma^t(s)\gamma'(s) \mid_{s=0} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\left[\gamma^t(0)\right]' \gamma(0) + \gamma^t(0)\gamma'(0) = 0$$

olur ki

$$\left[\gamma^t(0)\right]' = -\gamma'(0)$$

elde edilir. Buradan

$$\left[\gamma'(0)\right]^t = -\gamma'(0)$$

dır. Bu ise γ *nın anti-simetrik olduğunu yani* $\gamma \in o(n)$ *olduğunu gösterir.*

Örnek 5.2.6.

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$O(3)$ *de* $1-$*parametreli dönüşüm grubu olduğunu biliyoruz. Buradan*

$$\phi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$A = \phi'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A \in o(3)$ *bulunur. Böylece* $O(3)$ *ün Lie cebirinin* $o(3)$ *olduğu görülür (Hall, 2015).*

Örnek 5.2.7. *$U(n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A\overline{A^t} = I_n\right\}$ üniter grubunun Lie cebiri*

$$u(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) : \overline{A^t} = -A\right\}$$

ile tanımlanan tüm ters-Hermitian kompleks matrislerdir (Hall, 2015).

Örnek 5.2.8.

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

dönüşümü $U(2)$ üzerinde $1-$parametreli dönüşüm gurubu olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\phi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^{'}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu ise $\phi^{'}(0) = u(2)$ olduğunu gösterir. Böylece $U(2)$ nin Lie cebiri $u(2)$ olduğu görülür (Hall, 2015).

Örnek 5.2.9. *$S^1 = U(1)$ çemberi üzerinde*

$$\phi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

dönüşümünün $1-$parametreli dönüşüm grubu olduğunu biliyoruz. Burada

$$\phi^{'}(t) = -\sin t + i\cos t, \phi^{'}(0) = i$$

olduğundan $\phi'(0) \in u(1)$ dir (Hall, 2015).

Önerme 5.2.10. *A ve B $n \times n$ tipinde matrisler olsun. Bu durumda*

i) $e^0 = I$ *dır.*

ii) $(e^A)^* = e^{A^*}$ *dır. Burada* $A^* = \overline{A^t}$ *dir.*

iii) e^A *nın tersi vardır ve* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *dır.*

iv) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *için* $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$ *dır.*

v) $AB = BA$ *ise* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ *dır.*

vi) C matrisinin tersi mevcut ise $e^{CAC^{-1}} = Ce^A C^{-1}$ *dir (Hall, 2015).*

İspat. $i)$

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

olduğundan

$$\begin{aligned} e^0 &= I_n + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \cdots \\ &= I_n \end{aligned}$$

elde edilir.

$ii)$

$$\begin{aligned} (e^A)^* &= \left[\overline{(e^A)}\right]^t \\ &= \left[\overline{(I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots)}\right]^t \\ &= (\overline{I_n} + \overline{A} + \frac{\overline{A}^2}{2!} + \frac{\overline{A}^3}{3!} + \cdots)^t \\ &= (\overline{I_n}^t + \overline{A}^t + \frac{(\overline{A}^t)^2}{2!} + \frac{(\overline{A}^t)^3}{3!} + \cdots) \\ &= e^{\overline{A}^t} \\ &= e^{A^*} \end{aligned}$$

elde edilir.

$iii)$

$$I_n = e^A e^B = e^{A+B} = e^0$$

ise $A+B=0$ olup $A=-B$ dir. Bu ise

$$(e^{A})^{-1}=e^{B}=e^{-A}$$

olduğunu gösterir.

$iv)$

$$\begin{aligned}
e^{\alpha A}e^{\beta A} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\alpha A)^k}{k!}\frac{(\beta A)^{m-k}}{(m-k)!}\frac{m!}{m!}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(\alpha A)^k(\beta A)^{m-k}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\alpha A+\beta A)^m\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha A+\beta A)^m}{m!}\\
&= e^{(\alpha+\beta)A}
\end{aligned}$$

olduğundan (iv) nin ispatı tamamlanır.

$v)$

$$\begin{aligned}
e^{A}e^{B} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k}{k!}\frac{B^{m-k}}{(m-k)!}\frac{m!}{m!}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}A^kB^{m-k}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(A+B)^m}{m!}\\
&= e^{A+B}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$vi)$

$$(CAC^{-1})^m=CA^mC^{-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} e^{CAC^{-1}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(CAC^{-1})^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} CA^m C^{-1} \\ &= C\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m\right] C^{-1} \\ &= Ce^A C^{-1} \end{aligned}$$

olup bu ise (vi) doğruluğunu gösterir. □

Örnek 5.2.11. *$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ Lie grubunu göz önüne alalım. $A \in M_n(\mathbb{R})$ için*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

olduğundan matrislerde normun tanımı ve

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

schwarz eşitsizliği ve

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

üçgen eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left\|e^A\right\| \leq 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \cdots = e^{\|A\|}$$

olacağından bu ise

$$\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}$$

olduğunu gösterir. Böylece e^A serisi mutlak yakınsaktır. Önerme 5.2.10 nin (iii) den e^A nın tersi tanımlı olup $\exp A \in GL(n,\mathbb{R})$ dir. O halde $\phi(t) = e^{tA}$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \exp : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow GL(n,\mathbb{R}) \\ A &\rightarrow \exp(tA) = e^A \end{aligned}$$

tanımlanabilir. Bu ise $GL(n,\mathbb{R})$ nin Lie cebirinin $M_n(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Önerme 5.2.12. *A, $n\times n$ tipinde kompleks bir matris olsun. Bu durumda e^{tA}, $M_n(\mathbb{C})$ üzerinde bir differensiyellenebilir eğri olup*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{5.2.4}$$

ve

$$\frac{d}{dt}e^{tA}\mid_{t=0} = A \tag{5.2.5}$$

dır.

İspat. e^{tA} kuvvet serisine açılırsa

$$e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \cdots$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tA} &= 0 + A + \frac{2(tA)A}{2!} + \frac{3(tA)^2A}{3!} + \frac{4(tA)^3A}{4!} + \cdots \\
&= A(I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots) \\
&= Ae^{tA}
\end{aligned}$$

elde edilir (Arvanitoyeorgos, 2003). □

Örnek 5.2.13. $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *matrisleri verilsin. Bu* *durumda*

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}}{2!} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & -a^3 \\ -a^3 & 0 \end{bmatrix}}{3!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, direkt hesaplamalar ile

$$e^B = \begin{bmatrix} 1 & a & b + \frac{ac}{2} \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$e^C = \begin{bmatrix} e^a & e^{ab} \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$$

bulunur (Arvanitoyeorgos, 2003).

$A \in GL(n, \mathbb{C})$ olsun. A nın karakteristik vektörleri $x_1, ..., x_n$ ve bu karakteristik vektörlere karşılık gelen karakteristik değerler sırasıyla $\lambda_1, ..., \lambda_n$ olsun. Burada

$$X = [x_1, ..., x_n]_{n \times n}$$

ve

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere $XA = \lambda X$ olduğundan $A = X^{-1}\lambda X$ olarak yazılabilir. Önerme 5.2.10 nin (vi) şıkkından

$$e^{A} = e^{X^{-1}\lambda X} = X^{-1}e^{\lambda}X$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitlik yardımıyla bir A matrisinin üstel dönüşümü bulunabilir (Hall,2015).

Örnek 5.2.14. *$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ olsun. A nın karakteristik vektörleri $(1,i)$ ve $(i,1)$ ve bu karakteristik vektörlere karşılık gelen karakteristik değerler, sırasıyla, $-ia$ ve ia dır. O halde*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olup

$$e^{\lambda} = \begin{bmatrix} e^{-ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix}$$

olduğundan (5.2.6) *den*

$$\begin{aligned} e^{A} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir (Hall,2015).

Sonuç 5.2.15. *$G = GL(n,\mathbb{R})$ (veya $GL(n,\mathbb{C})$) olsun. $\forall A, X \in G$ için $XAX^{-1} \in \mathrm{g}$ dir.*

Teorem 5.2.16. $\forall A, B \in \mathrm{g}$ *için*

$$[A,B] = AB - BA \in \mathrm{g} \tag{5.2.6}$$

dır.

İspat. $\forall t \in \mathbb{R}$, ve $\gamma(0) = B$ için

$$\gamma(t) = e^{tA} B e^{-tA}$$

olmak üzere

$$\gamma'(t) = A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B A e^{-tA}$$

olup

$$\gamma'(0) = AB - BA$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(h) - B}{h} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $AB - BA \in \mathrm{g}$ elde edilir (Hall,2015). □

Lemma 5.2.17. $A \in \mathrm{g}$ *için* $\det A = e^{izA}$ *dır (Hall,2015).*

İspat. $A \in g$ için A nın karakteristik vektörlerine karşılık gelen matris X ve karakteristik değerlerine karşılık gelen matris

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $A = X\lambda X^{-1}$ olarak yazılabilir ki

$$e^A = e^{X\lambda X^{-1}} = Xe^{\lambda}X^{-1}$$

dir. Bu ise

$$\det e^A = \det X \det e^{\lambda} \det X^{-1} = \det e^{\lambda}$$

olduğunu gösterir. Böylece $\det e^A = e^{izA}$ olduğu görülüp ispat tamamlanır. □

Örnek 5.2.18. *$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ (veya $M_n(\mathbb{C})$) için e^{tA} nın tersi mevcut olduğundan $e^{tA} \in GL(n,\mathbb{R})$ olur.*

$$\mathrm{g} = \left\{A : e^{tA} \in GL(n,\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

dir. Böylece $\mathrm{g} = M_n(\mathbb{R})$ dir (Hall,2015).

Örnek 5.2.19. *$G = SL(n,\mathbb{R})$ için*

$$\begin{aligned}
\mathrm{g} &= \left\{A : e^{tA} \in SL(n,\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{A : \det e^{tA} = 1, \forall t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{A : e^{t(izA)} = 1, \forall t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{A : izA = 0\}.
\end{aligned}$$

O halde $SL(n,\mathbb{R})$ nin Lie cebiri

$$\mathrm{g} = \{A : izA = 0\}$$

kümesidir (Hall,2015).

Örnek 5.2.20. *$G = O(n)$ için*

$$\begin{aligned}
\mathrm{g} &= \left\{A : e^{tA} \in O(n), \forall t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{A : (e^{tA})^T e^{tA} = I\right\}.
\end{aligned}$$

$(e^{tA})^T e^{tA} = I$ *olduğundan her iki tarafin türevi alınırsa*

$$A^T(e^{tA})^T e^{tA} + (e^{tA})^T A e^{tA} = 0$$

dır. $t = 0$ *için* $A^T + A = 0$ *olduğundan*

$$\mathfrak{g} = \left\{A : A^T = -A\right\}$$

bulunur (Hall,2015).

Örnek 5.2.21. $G = SO(n)$ *için*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{A : e^{tA} \in SO(n), \forall t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{A : e^{tA} = e^{-tA^T}, \forall t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

dir. $\forall t \in \mathbb{R}$ *için* $e^{tA} = e^{-tA^T}$ *ise* $e^{tA} = \frac{1}{e^{tA^T}}$ *olduğundan*

$$e^{t(A+A^T)} = 1$$

dir. Böylece

$$A + A^T = 0$$

olur ki $A = -A^T$ *olacağından*

$$\mathfrak{g} = \left\{A : A = -A^T\right\}$$

bulunur (Hall,2015).

6. RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE LIE GRUP YAPILARI

6.1. Lie Cebiri Homomorfizmleri

Tanım 6.1.1. *$F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $Y \in \chi(M)$ ve $Z \in \chi(N)$ olmak üzere, $\forall p \in M$ için*

$$F_* Y_p = Z_{F(p)} \tag{6.1.1}$$

ise Y ve Z vektör alanlarına "$F-$bağlantılıdır" denir (Lee, 2003).

Lemma 6.1.2. *$F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $Y \in \chi(M)$ ve $Z \in \chi(N)$ olsun. Y ve Z vektör alanları $F-$bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul herbir $f : U \subset N \to \mathbb{R}$ reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonu için*

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F \tag{6.1.2}$$

olmasıdır (Lee, 2003).

İspat. $Y \in \chi(M)$ ve $Z \in \chi(N)$ için Y ve Z vektör alanları $F-$bağlantılı ise

$$(Y(f \circ F))(p) = Y_p(f \circ F) = (F_* Y_p)(f)$$

ve

$$((Zf)oF)(p) = (Zf)(F(p)) = Z_{F(p)} f$$

olduğundan (6.1.2) eşitliği sağlanır.

(6.1.2) eşitliği sağlanması durumunda Y ve Z vektör alanları $F-$bağlantılı olduğu açıktır.

□

Örnek 6.1.3. *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, F(t) = (\cos t, \sin t)$ fonksiyonu verilsin. $\frac{d}{dt} \in \chi(\mathbb{R})$ vektör alanı ve $\mathbb{R}^2$ de*

$$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

vektörü ile $F-$bağlantılıdır. Gerçekten;

$$F_*(\frac{d}{dt}) = (-\sin t, \cos t)$$

ve

$$Z_{F(p)} = (-\sin t, \cos t)$$

olduğundan

$$F_*(\frac{d}{dt}) = Z_{F(p)}$$

dir (Lee, 2003).

Yukarıdaki örneğin doğruluğu Lemma 6.1.2 yardımıyla da bulunabilir.

$$\frac{d}{dt}(f \circ F) = \frac{d}{dt}F(t)f = (-\sin t, \cos t)f$$

ve

$$(Zf)oF = (-\sin t, \cos t)f$$

olur. Böylece $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ için

$$\frac{d}{dt}(f \circ F) = (Zf) \circ F$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Teorem 6.1.4. *G ve H Lie grupları ve bu grupların Lie cebirleri, sırasıyla,* g *ve* $\hbar$ *olsun.* $F : G \to H$ *bir homomorfizm verilsin. Bu durumda, herbir* $X \in$ g *için* $\hbar$ *da* X *ile* $F-$*bağlantılı olan bir tek vektör alanı vardır (Lee, 2003).*

İspat. $X \in$ g için $\hbar$ da Y vektör alanı X ile $F-$bağlantılı olsun. Bu durumda $F_*X_e = Y_e$ dir. Şimdi herhangi bir $a \in G$ için

$$F_*X_a = Y_{F(a)}$$

olduğunu gösterelim:

F bir homomorfizm olduğundan $\forall a, b \in G$ için

$$F(ab) = F(a)F(b)$$

olup

$$F(L_a b) = L_{F(a)} F(b)$$

elde edilir. Son eşitlik $\forall b \in G$ için doğru olduğundan

$$\begin{aligned}
(FoL_a)(b) &= F \circ L_a b \\
&= F(ab) \\
&= F(a)F(b) \\
&= L_{F(a)} F(b) \\
&= L_{F(a)} oF(b) \\
&= (L_{F(a)} oF)(b)
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$F \circ L_a = L_{F(a)} \circ F$$

elde edilir. Burada her iki tarafın türev dönüşümü alınırsa

$$F_* \circ (L_a)_* = (L_{F(a)})_* \circ F_*$$

olur. Böylece $\forall X \in$ g için X bir sol invaryant vektör alanı olduğundan

$$(L_a)_* X_e = X_a$$

olup

$$F_* X_a = F_* (L_a)_* X_e = (L_{F(a)})_* F_* X_e = (L_{F(a)})_* Y_e = Y_{F(a)}$$

bulunur. Bu ise $\hbar$ cebirinde X ile $F-$bağlantılı olan bir tek Y vektörünün var olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 6.1.5. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. M üzerinde X_1, X_2 vektör alanları, sırasıyla, N üzerinde Y_1, Y_2 vektör alanları ile F bağlantılı ise $[X_1, X_2]$ vektör alanı $[Y_1, Y_2]$ vektör alanı ile F-bağlantılıdır (Lee, 2003).*

İspat. Lemma 6.1.2 den

$$X_1X_2(f \circ F) = X_1((Y_2 f) \circ F) = (Y_1Y_2 f) \circ F$$

dir. Benzer şekilde

$$X_2X_1(f \circ F) = (Y_2Y_1 f) \circ F$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1X_2(f \circ F) - X_2X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1Y_2 f) \circ F - (Y_2Y_1 f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 6.1.5 ve Teorem 6.1.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.6. *$F : G \to H$ bir Lie grubu homomorfizmi olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \mathrm{g}$ için*

$$F_* [X, Y] = [F_* X, F_* Y] \tag{6.1.3}$$

olacak şekilde

$$F_* : \mathrm{g} \to \hbar$$

dönüşümü tanımlıdır (Arvanitoyeorgos, 2003).

Tanım 6.1.7. *G ve H birer Lie grubu ve $\varphi : G \to H$ bir homomorfizm olmak üzere*

$$\varphi_* : \mathrm{g} \to \hbar$$

ile tanımlı dönüşüme "indirgenmiş Lie cebiri homomorfizmi" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Başka bir deyişle Lie cebiri homomorfizmi şöyle tanımlanabilir.

Tanım 6.1.8. *G ve H birer Lie grubu ve $\varphi : \mathrm{g} \to \hbar$ dönüşümü $\forall X, Y \in \mathrm{g}$ için*

$$\varphi[X,Y] = [\varphi X, \varphi Y] \tag{6.1.4}$$

şartı sağlanıyorsa φ ye bir Lie cebiri homomorfizmi adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

$\varphi : G \to H$ bir Lie grubu homomorfizmi ise aşağıdaki diagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\varphi"'] \arrow[d, "\exp_{\mathrm{g}}"'] & H \arrow[d, "\exp_{\hbar}"] \\ \mathrm{g} \arrow[r, "\varphi_*"'] & \hbar \end{tikzcd}$$

Böylece

$$\varphi_* = \exp_{\hbar} \circ \varphi \circ \exp_{\mathrm{g}}^{-1}$$

elde edilir.

Örnek 6.1.9.

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{E}, +) &\to (\mathbb{E} - \{0\}, .) \\ x &\to \varphi(x) = e^x \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda ϕ nin bir Lie grubu homomorfizması olduğu açıktır. Böylece $\varphi_* : T_x\,\mathbb{E} \to T_{\varphi(x)}(\mathbb{E} - \{0\})$ dönüşümü ise bir Lie cebiri homomorfizmidir.

Örnek 6.1.10.

$$\begin{aligned} \varphi : GL(n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} &\to \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = x_1x_4 - x_2x_3 = \det A \end{aligned}$$

tanımlansın.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

olduğundan

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$$

olup φ bir Lie grubu homomorfizmidir. Böylece

$$\varphi_*\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = (x_4 - x_3 - x_2 + x_1)\frac{\partial}{\partial x}$$

ile tanımlı

$$\varphi_* : M_n(\mathbb{R}) \quad \to \quad T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$$

dönüşümü bir Lie cebiri homomorfizmidir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Tanım 6.1.11. *G sonlu boyutlu bir Lie grubu ve V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan tüm automorfizmlerin kümesi $Aut(V)$ olmak üzere*

$$\phi : G \to Aut(V)$$

homomorfizmine G üzerinde bir temsil adı verilir. V de G nin temsili (G,V) ikilisi ile ifade edilir.

Burada dikkat edilecek olursa ϕ temsilinin boyutu (rankı) ile V vektör uzayının boyutu birbirine eşittir. Ayrıca ϕ süreklidir (Arvanitoyeorgos, 2003).

(G,V), G nin bir temsili, $g \in G$ ve $v \in V$ olsun. Bu durumda

$$\Phi(g,v) = \phi(g)(v)$$

olacak şekilde

$$\Phi : G \times V \to V$$

dönüşümü tanımlanabilir. Buradaki Φ dönüşümüne G üzerinde bir “etki” adı verilir.

Kısalık için

$$\Phi(g,v) = g.v$$

olarak yazalım. Bu durumda

$$e.v = v.e$$

G nin birim elemanı ve

$$g_1.(g_2.v) = (g_1.g_2).v$$

şartları sağlanır.

Tanım 6.1.12. *V vektör uzayı standart reel (kompleks) uzayı olsun.*

$$\begin{aligned} \Phi(g) : V &\to V \\ v &\to \phi(g)(v) \end{aligned}$$

lineer dönüşüm ise ϕ temsiline "reel (kompleks) temsil" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Örnek 6.1.13. *$V = \mathbb{R}^2$ ve $g = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SO(2)$ verilsin. $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ için*

$$\begin{aligned} \Phi(g) : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\to \phi(g)(v) \end{aligned}$$

öyleki;

$$\Phi(g) = v. \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ile tanımlanırsa

$$\Phi(g)(v_1, v_2) = (v_1 \cos t - v_2 \sin t, v_1 \sin t + v_2 \cos t)$$

elde edilir. Böylece ϕ, $SO(2)$ de bir temsildir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Tanım 6.1.14. *(G,V) bir temsil olsun. U, V nin bir alt vektör uzayı olmak üzere $\forall g \in G$ için*

$$g.U \subset U$$

ise U ya "invaryant alt uzay" veya "$G-$invaryant" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Not edelimki (G,V) her zaman $\{0\}$ ve V olmak üzere enaz iki invaryant alt

uzaya sahiptir.

Burada $\{0\}$ alt uzayına "aşikar alt uzay" denir.

Tanım 6.1.15. *Eğer (G,V) temsili sadece $\{0\}$ ve V invaryant alt uzaylarına sahip ise (G,V) ye "indirgenmiş temsil" adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Tanım 6.1.16. *G bir Lie grubu ve G üzerinde*

$$\phi_1 : G \to Aut(V_1)$$

ve

$$\phi_2 : G \to Aut(V_2)$$

iki temsil olsun. Eğer V_1 ve V_2 $G-$izometrik ise, yani, $\forall g \in G$ ve $\forall v \in V$ için

$$A(\phi_1(g)(v)) = \phi_2(g)(A(v)) \tag{6.1.5}$$

başka bir deyişle

$$A\phi_1 = \phi_2 A \tag{6.1.6}$$

olacak şekilde

$$A : V_1 \to V_2$$

lineer dönüşümü varsa ϕ_1 ve ϕ_2 ye "denk temsil" denir.

ϕ_1 ve ϕ_2 denk iki temsil olmak üzere aşağıdaki diagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi_1(g)"'] \arrow[d, "A"'] & V_1 \arrow[d, "A"] \\ V_2 \arrow[r, "\phi_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

G bir Lie grubu ve $\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned} I_x : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow I_x(g) = xgx^{-1} \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

dönüşümü verilsin. Açıkça

$$I_x(g_1g_2) = xg_1g_2x^{-1} = xg_1x^{-1}xg_2x^{-1} = I_x(g_1)I_x(g_2) \tag{6.1.8}$$

olduğundan I_x bir homomorfizmdir. Ayrıca

$$I_x = R_{x^{-1}} \circ L_x \tag{6.1.9}$$

eşitliği sağlandığından ve R_x ile L_x birer diffeomorfizm olduğundan I_x bir diffeomorfizmdir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 6.1.17. *G bir Lie grubu, G üzerinde*

$$\begin{aligned} Ad : G &\rightarrow Aut(\mathrm{g}) \\ g &\rightarrow Ad(g) = (dI_g)_e \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

ile tanımlı Ad homomorfizmine G nin bir "adjoint temsili" adı verilir. Burada, Ad dönüşümü bir homomorfizm olduğundan

$$I_{xy} = I_x o I_y$$

olup

$$Ad_{xy} = Ad_x \circ Ad_y \tag{6.1.11}$$

dir. Ayrıca (6.1.9) *dan Ad dönüşümü bir diffeomorfizmdir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Adjoint dönüşümünün türevi alınırsa g Lie cebiri üzerinde bir temsil elde edilir.

Tanım 6.1.18. *G bir Lie grubu ve* g*, G nin Lie cebiri olsun.*

$$\begin{aligned} ad : \mathrm{g} &\rightarrow End(\mathrm{g}) \\ X &\rightarrow ad(X) = d(Ad)_e(X) \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

homomorfizmine g *Lie cebirinin adjoint temsili adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Teorem 6.1.19. *G bir Lie grubu ve* g*, G nin Lie cebiri olsun. Bu durumda* $\forall X, Y \in \mathrm{g}$ *için*

$$ad(X)Y = [X, Y] \tag{6.1.13}$$

dir (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. $\forall g \in G$ ve $\forall Y \in \mathrm{g}$ için adjoint dönüşümünün tanımından

$$\mathrm{Ad}(g)Y = dI_g(Y) = dR_{g^{-1}} \circ dL_g(Y) = dR_{g^{-1}}Y \tag{6.1.14}$$

dir. Kabul edelim ki $x_t = \exp(tX)$, $X \in \mathrm{g}$ nin ürettiği bir flow olsun. X sol invaryant bir vektör alanı olduğundan $\forall y \in G$ için

$$L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$$

olup bu ise

$$x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = yx_t(e) = R_{x_t(e)}(y)$$

dır. Böylece

$$dx_t = dR_{x_t(e)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y - dx_t(Y)) \\ &= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(dR_{x_t(e)}(Y) - Y) \\ &= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(x_t^{-1}(e))Y - Y) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(x_t(e))Y - Y) \\ &= \mathrm{ad}(X)Y \end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 6.1.20. *G, $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu olan matris grubu olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ ve $\forall X \in$ g için*

$$Ad(g)X = gXg^{-1} \tag{6.1.15}$$

dir (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. $t \to \exp(tX)$ eğrisi ve $d\exp(tX)\mid_{t=0} = X$ olmak üzere X in ürettiği bir parametreli dönüşüm grubu verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)X &= (dI_g)_e(X) \\
&= \frac{d}{dt} I_g(\exp(tX))\mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} g(\exp(tX))g^{-1}\mid_{t=0} \\
&= gXe^{tX}\mid_{t=0} g^{-1} \\
&= gXg^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 6.1.21. *$G = SU(2)$ Lie grubu ve bu grubun Lie cebiri*

$$\begin{bmatrix} is & z \\ -\bar{z} & -is \end{bmatrix}$$

formundaki matrisleri içeren $su(2)$ Lie cebirini göz önüne alalım.

$$Ad : SU(2) \to Aut(su(2))$$

olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{bmatrix} \in SU(2)$$

verilsin. $su(2)$ *Lie cebirinin bir bazı*

$$\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

olmak üzere

$$Ad(A)B = ABA^{-1}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & Ad\left(\begin{bmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-iy & -u-iv \\ u-iv & x+iy \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ix^2+iy^2-iu^2-iv^2 & -2ixu+2uy+2xv+2ivy \\ 2iux+2xv-2uy+2ivy & iu^2+iv^2-ix^2-iy^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

6.2. Lie grupları üzerinde bi-invaryant metrik

Tanım 6.2.1. *G bir Lie grubu ve G üzerinde bir Rieman metriği g tanımlı olsun.* $\forall a, x \in G$ *ve* $u, v \in T_xG$ *için*

$$g(u,v)_x = g((dL_a)_x u, (dL_a)_x v)_{L_a x} \tag{6.2.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa g metriğine sol invaryant,

$$g(u,v)_x = g((dR_a)_x u, (dR_a)_x v)_{R_a x} \tag{6.2.2}$$

eşitliği sağlanıyorsa g metriğine sağ invaryant metrik adı verilir (Arvanitoyeorgos, 2003).

Önerme 6.2.2. *Herhangi bir G Lie grubunun sol invaryant metriği ile,* $\mathfrak{g}$ *Lie cebirinin skaler çarpımı arasında birebir bir eşleme vardır (Arvanitoyeorgos, 2003).*

İspat. g, G üzerinde sol invaryant bir metrik ve $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$ verilsin. Bu durumda

$$\langle X,Y\rangle : G \to \mathbb{R}$$

G üzerinde sabittir. Bu halde

$$g(X,Y)\mid_a = g(X_a,Y_a) = g(dL_aX_e,dL_aY_e) = <X_e,Y_e> = <X,Y>_e$$

elde edilir. Böylece $<X,Y>$, $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir skaler çarpım tanımlar.

Tersine g_e, $\mathfrak{g}$ üzerinde bir skaler çarpım ise bu durumda $a \in G$ ve $X,Y \in T_aG$ için

$$\langle X,Y\rangle_a = g((dL_{a^{-1}})X,(dL_{a^{-1}})Y)_e$$

metriği G üzerinde sol invaryant bir metriktir. □

Tanım 6.2.3. *G bir Lie grubu olsun. G üzerinde hem sol invaryant hem de sağ invaryant olan bir metriğe "bi-invaryant metrik" denir (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Teorem 6.2.4. *G kompakt bir Lie grubu ise bu durumda G üzerinde bi-invaryant bir metrik vardır (Arvanitoyeorgos, 2003).*

Teorem 6.2.5. *X ve Y, bi-invaryant metriği ile G Lie grubu üzerinde sol invaryant vektör alanları ve ∇, G de bir afin konneksiyonu olsun. Bu durumda*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \tag{6.2.3}$$

dır (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. G üzerinde sol invaryant bir vektör alanı Z olsun. $\phi(0) = e$ ve $\phi'(0) = Z_e$ olacak şekilde G üzerinde bir parametreli dönüşüm grubu $\phi(t)$ olmak üzere her Y vektör alanı için $\nabla_{Z_e}Y = (\frac{DY_{\phi(t)}}{dt})\mid_{t=0}$ olur. Aynı zamanda $Z_{\phi(t)} = \frac{d\phi}{dt}$ ve bi-invaryant metriği ile G grupları kümesi tam olacağından $\phi(t)$ bir geodezik olur. Dolayısıyla $\frac{DZ_{\phi(t)}}{dt} = \frac{D}{dt}(\frac{d\phi}{dt}) = 0$ ve $\nabla_{Z_e}Z = 0$ eşitlikleri sağlanır. Z sol invaryant vektör alanı olduğundan $\nabla_Z Z = 0$ olur. O halde $\nabla_{X+Y}(X+Y) = 0$ olduğundan

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0 \tag{6.2.4}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \tag{6.2.5}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (6.2.4) ve (6.2.5) eşitliklerinden teoremin ispatı tamamlanır. □

Önerme 6.2.6. *G bir Lie grubu ve* g*, G nin Lie cebiri olsun. Bu durumda* $\forall g \in G$ *ve* $\forall X,Y \in$ g *için*

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X,Y\rangle \tag{6.2.6}$$

dir. Bu eşitliğe denk olarak $\forall X,Y,Z \in$ g *için*

$$\langle [X,Y],Z\rangle = \langle X,[Y,Z]\rangle \tag{6.2.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (6.1.14) eşitliğinden $\forall a \in G$ ve $\forall X \in$ g için

$$\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle = \langle dR_{a^{-1}}X, dR_{a^{-1}}Y\rangle = \langle X,Y\rangle$$

dir. $\exp(tX)$, X vektör alanının flowu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\langle [X,Y],Z\rangle &= \langle \mathrm{ad}(X)Y,Z\rangle \\
&= \langle \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0},Z\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y,Z\rangle|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\langle Y,\mathrm{Ad}(\exp(-tX))Z\rangle|_{t=0} \\
&= \langle Y,-\mathrm{ad}(X)Z\rangle \\
&= -\langle Y,[X,Z]\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 6.2.7. *Bi-invaryant metriği ile kompakt Lie grubu G olsun. G nin bir kesiti* Π *ve G üzerinde sol invaryant vektörler X ve Y olmak üzere*

$$K(\Pi) = \frac{1}{4}\,[[X,Y],[X,Y]] \tag{6.2.8}$$

dır. Ayrıca G üzerinde sol invaryant vektör alanları X,Y *ve Z Riemann eğrilik tensör alanı R olmak üzere*

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}\,[[X,Y],Z] \tag{6.2.9}$$

dır (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. G üzerinde bi-invaryant metriği ile konneksiyon $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \frac{1}{4}\,[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}\,[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}\,[[X,Y],Z] \\
&= \frac{1}{4}\,[Z,[X,Y]] \\
&= -\frac{1}{4}\,[[X,Y],Z]]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\langle [X,Y],Z\rangle = \langle X,[Y,Z]\rangle$$

eşitliğinden

$$K(\Pi) = \frac{1}{4}\,\langle [[X,Y],X]\,,Y\rangle = \frac{1}{4}\,\langle [X,Y],[X,Y]\rangle$$

olur (Arvanitoyeorgos, 2003).

□

Sonuç 6.2.8. *Bi-invaryant metriği ile kompakt Lie grubu G ve G üzerinde sol invaryant vektör alanları* X,Y,Z *olsun. Bu durumda Ricci tensör alanı S*

$$S(X,Y) = -\frac{1}{4}\,iz\,(adX)(adY)Z \tag{6.2.10}$$

şeklinde tanımlanır (Arvanitoyeorgos, 2003).

İspat. Teorem 6.2.7 göz önüne alınırsa; G üzerinde

$$R(Z,Y)X = -\frac{1}{4}\,(\mathrm{ad}X)(\mathrm{ad}Y)Z$$

olur. G nin bir ortonormal bazı $\{E_1,\ldots,E_n\}$ olmak üzere

$$\left\langle ad(X)E_i,E_j\right\rangle = \left\langle [X,E_i]\,,E_j\right\rangle = -\left\langle E_j,[X,E_i]\right\rangle = -\left\langle E_j,ad(X)E_j\right\rangle$$

elde edilir. adX e karşılık gelen matris (a_{ij}) olsun. (a_{ij}) matrisi ters simetrik olduğundan

$$\mathrm{iz}\;((\mathrm{ad}X)\;(\mathrm{ad}X)) = -\sum_{i,j} a_{ij}^2$$

olur. Bundan dolayı

$$4S(X,X) = -\mathrm{iz}\;((\mathrm{ad}X)\;(\mathrm{ad}X)) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$$

olur. Bu ise Ricci eğriliğinin sabit olduğunu gösterir. Dolayısıyla bi-invaryant metriği ile kompakt Lie grubu kümesi bir Einstein manifoldu olur. Sabit eğrilikli uzayların bütün kesitlerinin eğriliği eşit olacak sabit bir değer alması gerektiğinden bu küme sabit eğrilikli değildir. □

7. KAYNAKLAR

Arvanitoyeorgos, A. (2003). An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces (Vol. 22). American Mathematical Soc.

Bootby W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Inc.

Duistermaat J. J., Kolk J. A. (2000). Lie Groups, Sipringer, Birkhauser.

do Carmo M. P. (1992) Riemann Geometry, Birkhuser Boston.

Hacisalihoglu, H. H. (1983). Diferensiyel geometri. İnonü Univ. Yayınları, Mat., 2, 227.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Lineer cebir. Hacısalihoğlu yayınları.

Hall, B. (2015). Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction (Vol. 222). Springer.

Lee, J. M. (2003). Smooth manifolds. In Introduction to Smooth Manifolds. Springer, New York, NY.

Savage A. (2015). Introduction to Lie Groups, Department of Mathematics and Statistic, University of Ottawa, Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Sabuncuoğlu A. (2004). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dagıtım 2.Baskı.

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayın.

Samelson, H. (2012). Notes on Lie algebras. Springer Science and Business Media.

Simms, D. J. (1968). Lie groups and quantum mechanics (Vol. 52). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer.

Warner, F. W. (1983). Foundations of differentiable manifolds and Lie groups (Vol. 94). Springer Science, Business Media.

ÖZGEÇMİS

KİSŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ömer AKSU

Doğum Yeri ve Tarihi: Eruh-SİİRT 20.10.1985

Telefon: 05535282373

E-posta: Omraksu@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise:	Salim Yılmaz Lisesi Akdeniz MERSİN	2003
Üniversite:	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2009
Tezsiz Yüksek Lisans:	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans:	Siirt Üniversitesi	2016-Halen

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2010-2014	Mersin Seviye Dergisi Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2014-2017	Siirt Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2017-Halen	Batman Selahaddin Eyyubi Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI: Matematik

Yabancı Diller: İngilizce