T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇEKİRDEK ÜRETEN METOD VE GRUP KORUMA METODU İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Idrees Sedeeq MUSTAFA
(153114018)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali AKGÜL

Nisan - 2018
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Idrees Sedeeq MUSTAFA tarafından hazırlanan "Başlangıç Değer Problemlerinin Çekirdek Üreten Metod ve Grup Koruma Metodu İle Çözümleri" adlı tez çalışması 16/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Mustafa İNÇ	
Danışman	
Doç. Dr. ALİ AKGÜL	
Üye	
Dr.Öğr.Üyesi Esra KARATAŞ AKGÜL	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Tarih: Nisan /2018

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali Akgül'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarım sunarım.

Idrees Sedeeq MUSTAFA

SİİRT-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR

Sayfa

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

(BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇEKİRDEK ÜRETEN METOD VE GRUP KORUMA METODU İLE ÇÖZÜMLERİ)

Idrees Sedeeq MUSTAFA

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali AKGÜL

2018, 50 Sayfa

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bolümde temel tanımlar verildi. İkinci bölümde literatürde var olan çekirdek üreten uzaylar ve bu uzaylarda üretilen çekirdek fonksiyonlar ele alındı. Üçüncü bolümde başlangıç değer problemlerinin çözümü için üretilen çekirdek fonksiyonlar elde edildi. Dördüncü bolümde çekirdek üreten $0_{W_2^3}[0,1]$ uzayında çözümler bulundu. Besinci bolümde ana sonuçlar elde edildi. Altıncı bolümde grup koruma metodu probleme uygulandı. Yedinci bölümde sonuç ve tartışma verildi.

Anahtar Kelimeler: Başlangıç Değer Problemleri, Grup Koruma Metodu, Üretilen Çekirdek Fonksiyonlar ve Yaklaşık Çözümler.

Bu tez 2017-SİÜFEB-40 tarafından desteklenmiştir. Bu nedenle Siirt Üniversitesi BAP birimine teşekkürlerimizi sunarız.

ABSTRACT

MS. THESIS

SOLUTIONS OF INITIAL VALUE PROBLEMS BY REPRODUCING KERNEL METHOD AND GROUP PRESERVING SCHEME

Idrees Sedeeq MUSTAFA

The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science
In Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof.Dr. Ali AKGÜL

2018, 50 Pages

This thesis consists of seven chapters. The main definitions are given in the first chapter. Reproducing kernel spaces and their reproducing kernel functions in the literature have been considered in the second chapter. Reproducing kernel functions for solving initial value problems have been obtained in the third chapter. Solutions in the reproducing kernel space $0_{W_2^3}[0,1]$ have been found in the fourth chapter. The main results have been obtained in the fifth chapter. Group preserving scheme have been applied to the problem in the sixth chapter. Conclusion and discussion have been given in the seventh chapter

Keywords: Initial-Value Problems, Group Preserving Scheme, Reproducing Kernel Functions and Approximate Solutions.

1. GİRİŞ

Bu tezimizde başlangıç değer problemlerine çekirdek üreten metod ve grup koruma metodunu uyguladık. Çekirdek üreten metod kullanışlı bazı üretilen çekirdek fonksiyonlar yardımıyla uygulandı. Sayısal sonuçlar elde edilip bu sonuçlar tablolar ve grafiklerle verildi. Elde ettiğimiz yaklaşımlar araştırdığımız metodların etkinliğini ortaya koydu. İkinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerle modellenen tekil başlangıç değer problemler üzerine çalışmalar birçok matematikçi ve fizikçi için ilgi çekici olmuştur. Bu denklemlerden bir tanesi de White-Dwarf denklemidir [Singh ve ark. 2009]. Biz bu tezimizde çekirdek üreten metod ve grup koruma metodunu kullanarak bu özel denklemi inceledik. Aşağıdaki problemi

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u^3 = 0, \qquad 0 < x \le 10, \tag{1}$$

başlangıç şartlarıyla birlikte

$$u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0, \tag{2}$$

göz önüne alalım [Hashemi,2017 ve ark.]. Burada $v(x)$ yeterince düzgün bir fonksiyondur. Bu problem astrofizik denklemler sınıfından bir denklemdir [Pandey ve ark., 2012; Kaur ve ark., 2013; Nasab ve ark., 2015]. Çekirdek üreten uzay özel bir Hilbert uzayıdır. Çekirdek üreten metod ile birçok lineer olmayan problemin çözümü üzerine birçok makale yapılmıştır. Üretilen çekirdek kavramı Zarembanın 19082'lerde yapmış olduğu bir çalışmaya dayanmaktadır. Bu çalışmasında Zaremba harmonik fonksiyonların sınır-değer problemleri üzerine tartışmıştır. Bu çalışma üretilen çekirdeğin ispatı bakımından özel durumda verilen bir fonksiyon ailesine tekabül eden ilk üretilen çekirdek fonksiyondur. Üretilen çekirdeğin ilk gelişim aşamasında çalışmaların birçoğu Bergman tarafından uygulanmıştır. Bergman bir ve birkaç değişkenli harmonik fonksiyonlara tekabül eden çekirdekleri ve kare metrikte analitik fonksiyonun tekabül ettiği çekirdeği elde edip bunları eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır-değer problemlerinde uygulamıştır. Bu üretilen
çekirdeğin tarihi gelişiminde ilk adımdır. Üretilen çekirdeğin tarihi gelişiminde ikinci adım Mercer tarafından başlatılmıştır. Mercer pozitif belirli integral denkleminin sürekli çekirdeğinin pozitif tanımlı olma özelliğine sahip olduğunu keşfetmiştir [Cui ve Lin,2009)]:

$$\sum_{i,j=1}^{n} k(x_i, y_j) şişj \ge 0.$$

Mercer bu özelliğiyle bu çekirdeğe pozitif tanımlı Hermite matrisi ismini vermiştir. Mercer aynı zamanda bir Hilbert uzayını $\Leftarrow\{\Leftrightarrow\}\Rightarrow$ iç¸ çarpımıyla sunup çekirdeğin üretilebilir olduğunu aşağıdaki şekilde ispatlamıştır.

$$v(s) = \langle v(t), |k(t,s)\rangle$$

1950 yılında Aronszajn kendinden önceki tüm çalışmaları toplayıp Bergman üretilen çekirdek fonksiyonunu da içine katarak sistematik bir üretilen çekirdek teorisi oluşturmuştur. Üretilen çekirdeğin teorisi integral denklemlerde, diferansiyel denklemlerde, olasılık ve istatistikte çok önemli uygulamalara sahiptir. Bu teori yakın zamanda birçok model problem için uygulanmıştır. Çekirdek üreten metod birçok uygulamada ele alınmıştır [Chen ve Chen, 2008; Cui ve Lin, 2009; Turkyilmazoglu, 2013; Akgül, 2014]. Çekirdek üreten metod ile ilgili daha detaylı [Biswas ve Zerrad, 2007; Adem ve ark., 2011 ; Ebadi, ve Biswas, 2016] çalışmalara bakılabilir.

Bu tezimizde ele aldığımız grup koruma metodu başlangıç değer problemlerinin Liu [Liu, 2004] tarafından ortaya atılan değişmez grup şemalarına dayanmaktadır. Runge-Kutta metodu gibi mevcut geleneksel metodlar ile grup koruma metodu arasındaki en önemli fark geleneksel yöntemlerin olağan Euclid R^k uzayında doğrudan formüle edilmesidir. Ayrıca bu geleneksel metodların hiçbiri M^{k+1} Minkowski uzayında göz önüne alınmamıştır. M^{k+1} Minkowski uzayında formülasyon yapmanın bir avantajı da bu yeni teknikler sayesinde sahte çözümler ve hayali sabit noktalardan kaçınılabilmektedir. Grup koruma metodu ile ilgili bazı ilginç çalışmalar [Liu, 2004; Abbasbandy ve Hashemi, 2011; Akgül, 2014] olarak düşünülebilir.

2. ÇEKİRDEK ÜRETEN UZAYLAR VE ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR

Bu bölümde literatürde var olan bazı önemli çekirdek uzayları ve bu uzaylarda üretilen çekirdek fonksyonları ele aldık.

Tanım 2.1. (Üretilen Çekirdek Fonksiyon). E boş olmayan bir küme olsun.

$$K : E \times E \to \mathbb{C}$$

fonksiyonu H Hilbert uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu olarak adalandırılır ancak ve ancak aşağıdaki iki şart sağlanırsa.

(a) $K(\cdot, t) \in H$ her $t \in E$ için,

(b) $\langle \varphi, K(\cdot, t) \rangle = \varphi(t)$ her $t \in E$ and her $\varphi \in H$ için.

Bu son özellik çekirdek üretme özelliği olarak adlandırılır. Yani φ'nin t noktasındaki değeri iç çarpım yardımıyla yeniden üretilir.

Tanım 2.2. $W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzay aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$W_2^3[0,1] = \{v \mid v, v', v'' : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$\text{mutlak sürekli reel değerli fonksiyonlar}, v^{(3)} \in L^2[0,1]\}$$

bir Hilbert uzayıdır. Çekirdek üreten $W_2^3[0,1]$ uzayında iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\langle v, g \rangle_{W_2^3} = \sum_{i=0}^{2} v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^1 v^{(3)}(x) g^{(3)}(x) \mathrm{d}x, \quad v, g \in W_2^3[0,1].$$

$$\|v\|_{W_2^3} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^3}}, \quad v \in W_2^3[0,1].$$

Böylece $W_2^3[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olur. Yani, her bir sabit $y \in [0,1]$ ve $v \in W_2^3[0,1]$ için aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde bir R_y üretilen çekirdek fonksiyonu mevcut olur.

$$v(y) = \langle v(x), R_y(x) \rangle_{W_2^3}.$$

Tanım 2.3. Benzer bir şekilde $T_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzay aşağıdaki şekilde tanım-lanır.

$$T_2^3[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} v \mid v, v', v'' : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ \\ v'' \in L^2[0,1], v(0) = 0, v'(0) = 0. \end{array} \right\}$$

Çekirdek üreten $T_2^3[0,1]$ uzayında iç çarpım ve norm

$$\langle v, g \rangle_{T_2^3} = \sum_{i=0}^{2} v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^1 v'''(t) g'''(t) \mathrm{d}t, \quad v, g \in T_2^3[0,1],$$

$$\|v\|_{T_2^3} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{T_2^3}}, \quad v \in T_2^3[0,1],$$

şeklinde verilir. Çekirdek üreten $T_2^3[0,1]$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu r_s

$$r_s = \begin{cases} \frac{1}{4}s^2t^2 + \frac{1}{12}s^2t^3 - \frac{1}{24}st^4 + \frac{1}{120}t^5, & t \leq s, \\ \\ \frac{1}{4}s^2t^2 + \frac{1}{12}s^3t^2 - \frac{1}{24}ts^4 + \frac{1}{120}s^5, & t > s, \end{cases}$$

şeklinde verilir [Cui ve Lin, 2009].

Tanım 2.4. Çekirdek üreten $G_2^1[0,1]$ uzayı

$$G_2^1[0,1] = \left\{ v | v : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mutlak sürekli fonksiyon,} v'(x) \in L^2[0,1] \right\},$$

bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle v, g \rangle_{G_2^1} = v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^1 v'(x) g'(x) \mathrm{d}x, \quad v, g \in G_2^1[0,1],$$

$$\|v\|_{G_2^1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{G_2^1}}, \quad v \in G_2^1[0,1],$$

şeklinde tanımlanır. $G_2^1[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu Q_y

$$Q_y = \begin{cases} 1 + x, & x \leqslant y \\ \\ 1 + y, & x > y. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir [Cui ve Lin, 2009].

Teorem 2.1. $W_2^3[0,1]$ uzayı tam bir çekirdek üreten uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu R_y

$$c_1(y)=1,\quad c_2(y)=y,\quad c_3(y)=\frac{y^2}{4},$$

$$c_4(y)=\frac{y^2}{12},\quad c_5(y)=-\frac{1}{24y},\quad c_6(y)=\frac{1}{120},$$

$$d_1(y)=1+\frac{y^5}{120},\quad d_2(y)=\frac{-y^4}{24}+y,$$

$$d_3(y)=\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{12},\quad d_4(y)=d_5(y)=d_6(y)=0,$$

olacak şekilde aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$R_y(x)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{6}c_i(y)x^{i-1}, & x\le y,\\ \\ \sum\limits_{i=1}^{6}d_i(y)x^{i-1}, & x>y.\end{cases}\tag{3}$$

İspat.

$$\langle v,R_y\rangle_{W_2^3}=\sum_{i=0}^{2}v^{(i)}(0)R_y^{(i)}(0)+\int_0^1 v^{(3)}(x)R_y^{(3)}(x)\mathrm{d}x,\quad (v,R_y\in W_2^3[0,1])$$

olduğundan kısmi integrasyonlarla

$$\begin{aligned}\langle v(x),R_y(x)\rangle_{W_2^4}=&\sum_{i=0}^{2}v^{(i)}(0)\left[R_y^{(i)}(0)-(-1)^{(2-i)}R_y^{(5-i)}(0)\right]\\&+\sum_{i=0}^{2}(-1)^{(2-i)}v^{(i)}(1)R_y^{(5-i)}(1)+\int_0^1 v(x)R_y^{(6)}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

elde edilir. Çekirdek üretme özelliğine dayanarak

$$\langle v(x),R_y(x)\rangle_{W_2^3}=v(y),$$

yazılabilir. Eğer

$$
\begin{aligned}
R_y(0) - R_y^{(5)}(0) &= 0, \\
R_y'(0) + R_y^{(4)}(0) &= 0, \\
R_y''(0) - R_y'''(0) &= 0, \\
R_y^{(3)}(1) &= 0, \\
R_y^{(4)}(1) &= 0, \\
R_y^{(5)}(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

olarak ele alınırsa

$$R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y),$$

elde edilir. $x \neq y$ iken

$$R_y^{(6)}(x) = 0,$$

olur. Bu nedenle

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{6} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum\limits_{i=1}^{6} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

elde edilir.

$$R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y),$$

olduğundan

$$\partial^k R_{y^+}(y) = \partial^k R_{y^-}(y), \quad k = 0,1,2,3,4,$$

$$\partial^5 R_{y^+}(y) - \partial^5 R_{y^-}(y) = -1,$$

bulunur. Böylece $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ $(i = 1,2,...,6)$ bilinmeyen katsayıları hesaplanabilir.

Bu taktirde üretilen çekirdek R_y fonksiyonu

$$R_y = \begin{cases} 1 + yx + \dfrac{1}{4}y^2x^2 + \dfrac{1}{12}y^2x^3 - \dfrac{1}{24}yx^4 + \dfrac{1}{120}x^5, & x \leq y \\ \\ 1 + yx + \dfrac{1}{4}y^2x^2 + \dfrac{1}{12}y^3x^2 - \dfrac{1}{24}xy^4 + \dfrac{1}{120}y^5, & x > y. \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.5. $W(\Omega)$ ikili çekirdek üreten uzay aşağıdaki şekilde verilir [Cui ve Lin, 2009].

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v(x,t) | \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}, \Omega = [0,1] \times [0,1] \text{ da tam sürekli fonksiyonlar,} \\ \\ \frac{\partial^6 v}{\partial x^3 \partial t^3} \in L^2(\Omega), v(x,0) = 0, \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0 \end{array} \right\}$$

Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \langle v(x,t), g(x,t) \rangle_W = & \sum_{i=0}^{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} v(0,t) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0,t) \right] \mathrm{d}t \\ & + \sum_{j=0}^{2} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x,0), \frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x,0) \right\rangle_{W_2^3} \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v(x,t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} g(x,t) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\|v\|_W = \sqrt{\langle v, v \rangle_W}, \quad v \in W(\Omega).$$

Teorem 2.2. $W(\Omega)$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu

$$K_{(y,s)} = R_y r_s$$

şeklinde elde edilir. Herhangi bir $v \in W(\Omega)$ için

$$v(y,s) = \langle v(x,t), K_{(y,s)}(x,t) \rangle_{W'}$$

$$K_{(y,s)}(x,t) = K_{(x,t)}(y,s),$$

bulunur.

Tanım 2.6. Benzer bir şekilde $\widehat{W}(\Omega)$ ikili çekirdek üreten uzay aşağıdaki şekilde verilir.

$$\widehat{W}(\Omega) = \{v(x,t) | v(x,t)\ \Omega = [0,1] \times [0,1]\text{da tam sürekli fonksiyonlar}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L^2(\Omega)$$

Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle v(x,t), g(x,t) \rangle_{\widehat{W}} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} v(0,t) \frac{\partial}{\partial t} g(0,t) \right] \mathrm{d}t + \langle v(x,0), g(x,0) \rangle_{W_2^1} + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} g(x,t) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\|v\|_{\widehat{W}} = \sqrt{\langle v,v \rangle_{\widehat{W}}}, \quad v \in \widehat{W}(\Omega),$$

şeklinde verilir. $\widehat{W}(\Omega)$ ikili çekirdek üreten uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $G_{(y,s)}$

$$G_{(y,s)} = Q_y Q_s,$$

şeklinde verilir [Cui ve Lin, 2009].

Tanım 2.7. $W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzay

$$W_2^3[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} u(x) | u(x), u'(x), u''(x), [0,1] \text{ da mutlak sürekli fonksiyonlar} \\ \\ u^{(3)}(x) \in L^2[0,1], x \in [0,1], u(0) = 0, u(1) = 0. \end{array} \right\}$$

şeklinde verlir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u(x), g(x) \rangle_{W_2^3} = \sum_{i=0}^{2} u^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(x) g^{(3)}(x) \mathrm{d}x, u(x), g(x) \in W_2^3[0,1]$$

ve

$$\|u\|_{W_2^3} = \sqrt{\langle u,u \rangle_{W_2^3}}, \quad u \in W_2^3[0,1],$$

şeklinde verilir. $W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzayın üretilen çekirdek $R_y(x)$ fonksiyonu

$$u(y) = \langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_2^3},$$

şeklinde çekirdek üretme özelliğini sağlar.

Teorem 2.3. $W_2^3[0,1]$ uzayı tam çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $R_y(x)$

$$\begin{aligned}
c_1(y) &= 0,\\
c_2(y) &= \frac{5}{516}y^4 - \frac{1}{156}y^5 - \frac{5}{26}y^2 - \frac{5}{78}y^3 + \frac{3}{13}y,\\
c_3(y) &= \frac{5}{624}y^4 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{21}{104}y^2 - \frac{5}{312}y^3 - \frac{5}{26}y,\\
c_4(y) &= \frac{5}{1872}y^4 - \frac{1}{1872}y^5 + \frac{7}{104}y^2 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{78}y,\\
c_5(y) &= -\frac{5}{3744}y^4 + \frac{1}{3744}y^5 + \frac{5}{624}y^2 + \frac{5}{1872}y^3 - \frac{1}{104}y,\\
c_6(y) &= \frac{1}{120} + \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{18720}y^5 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{1872}y^3 - \frac{1}{156}y,\\
d_1(y) &= \frac{1}{120}y^5,\\
d_2(y) &= -\frac{1}{104}y^4 - \frac{1}{156}y^5 - \frac{5}{26}y^2 - \frac{5}{78}y^3 + \frac{3}{13}y,\\
d_3(y) &= \frac{5}{624}y^4 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{21}{104}y^2 + \frac{7}{104}y^3 - \frac{5}{26}y,\\
d_4(y) &= \frac{5}{1872}y^4 - \frac{1}{1872}y^5 - \frac{5}{312}y^2 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{78}y,\\
d_5(y) &= -\frac{5}{3744}y^4 + \frac{1}{3744}y^5 + \frac{5}{624}y^2 + \frac{5}{1872}y^3 + \frac{5}{156}y,\\
d_6(y) &= -\frac{1}{156}y + \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{18720}y^5 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{1872}y^3,
\end{aligned}$$

olacak şekilde

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{6} c_i(y)x^{i-1}, & x \le y,\\[2ex] \sum\limits_{i=1}^{6} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

olarak elde edilir.

İspat. $W_2^3[0,1]$ uzayındaki iç çarpımdan

$$\begin{aligned}\langle u(x), R_y(x)\rangle_{W_2^3} = &\sum_{i=0}^{2} u^{(i)}(0) R_y^{(i)}(0) \\ &+ \int_0^1 u^{(3)}(x) R_y^{(3)}(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

elde edilir. Bir kaç kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}\langle u(x), R_y(x)\rangle_{W_2^3} = &\sum_{i=0}^{2} u^{(i)}(0) \left[R_y^{(i)}(0) - (-1)^{(2-i)} R_y^{(5-i)}(0) \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{2} (-1)^{(2-i)} u^{(i)}(1) R_y^{(5-i)}(1) \\ &- \int_0^1 u(x) R_y^{(6)}(x) \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

elde edilir. Çekirdek üretme özelliğinden

$$\langle u(x), R_y(x)\rangle_{W_2^3} = u(y),$$

yazılabilir. Eğer

$$\begin{cases} R_y''(0) - R_y^{(3)}(0) = 0, \\ R_y'(0) + R_y^{(4)}(0) = 0, \\ R_y^{(3)}(1) = 0, \\ R_y^{(4)}(1) = 0, \end{cases}$$

olarak ele alınırsa bu taktirde $-R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y)$ elde edilir. $x \neq y$ iken $R_y^{(6)}(x) = 0$, olur. Bu nedenle

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{6} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \\ \sum_{i=1}^{6} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

olur. $-R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y)$,
olduğundan

$$\partial^k R_{y^+}(y) = \partial^k R_{y^-}(y), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

ve

$$\partial^5 R_{y^+}(y) - \partial^5 R_{y^-}(y) = -1,$$

elde edilir. $R_y(x) \in W_2^3[0,1]$ olduğundan

$$R_y(0) = 0, R_y(1) = 0, \tag{4}$$

bulunur. Böylece $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ $(i = 1, 2, ..., 6)$ bilinmeyen katsayıları bulunabilir. Bu taktirde $R_y(x)$ üretilen çekirdek fonksiyonu

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{5}{516}xy^4 - \frac{1}{156}xy^5 - \frac{5}{26}xy^2 - \frac{5}{78}xy^3 + \frac{3}{13}xy \\ +\frac{5}{624}x^2y^4 - \frac{1}{624}x^2y^5 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ -\frac{5}{312}x^2y^3 - \frac{5}{26}x^2y + \frac{5}{1872}x^3y^4 \\ -\frac{1}{1872}x^3y^5 + \frac{7}{104}x^3y^2 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}x^3y \\ -\frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{1}{3744}x^4y^5 + \frac{5}{624}x^4y^2 \\ +\frac{5}{1872}x^4y^3 - \frac{1}{104}x^4y - \frac{1}{156}x^5y + \frac{1}{3744}x^5y^4 \\ -\frac{1}{18720}x^5y^5 - \frac{1}{624}x^5y^2 - \frac{1}{1872}x^5y^3, \quad x \le y \\ \\ \frac{5}{516}yx^4 - \frac{1}{156}yx^5 - \frac{5}{26}yx^2 - \frac{5}{78}yx^3 + \frac{3}{13}xy \\ +\frac{5}{624}y^2x^4 - \frac{1}{624}y^2x^5 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ -\frac{5}{312}y^2x^3 - \frac{5}{26}y^2x + \frac{5}{1872}y^3x^4 \\ -\frac{1}{1872}y^3x^5 + \frac{7}{104}y^3x^2 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}y^3x \\ -\frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{1}{3744}y^4x^5 + \frac{5}{624}y^4x^2 + \frac{5}{1872}y^4x^3 \\ -\frac{1}{104}y^4x - \frac{1}{156}y^5x + \frac{1}{3744}y^5x^4 \\ -\frac{1}{18720}x^5y^5 - \frac{1}{624}y^5x^2 - \frac{1}{1872}y^5x^3, \quad x > y \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.8. $W_2^4[0,1]$ çekirdek üreten uzayı

$$W_2^4[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} v(x) \mid v(x), v'(x), v''(x), v'''(x) \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar ,} \\ \\ v^{(4)}(x) \in L^2[0,1], x \in [0,1]. \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle v(x), g(x) \rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^{3} v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^1 v^{(4)}(x) g^{(4)}(x) \mathrm{d}x, \quad v(x), g(x) \in W_2^4[0,1],$$

$$\|v\|_{W_2^4} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^4}}, \quad v \in W_2^4[0,1].$$

şeklinde verilir. $W_2^4[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır. Yani her bir sabit $y \in [0,1]$ ve $v(x) \in W_2^4[0,1]$ için

$$v(y) = \langle v(x), R_y(x) \rangle_{W_2^4},$$

olacak şekilde üretilen $R_y(x)$ çekirdek fonksiyonu mevcuttur.

Tanım 2.9. Benzer bir şekilde $W_2^2[0,T]$ çekirdek üreten uzayı

$$W_2^2[0,T] = \left\{ \begin{array}{c} v(t) \mid v(t), v'(t) \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar} \\ \\ v''(t) \in L^2[0,T], t \in [0,T], v(0) = 0, \end{array} \right\}$$

şeklinde verilir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle v(t), g(t) \rangle_{W_2^2} = \sum_{i=0}^{1} v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^T v''(t) g''(t) \mathrm{d}t, \quad v(t), g(t) \in W_2^2[0,T],$$

$$\|v\|_{W_1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^2}}, \quad v \in W_2^2[0,T],$$

şeklinde tanımlanır. $W_2^2[0,T]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $r_s(t)$

$$r_s(t) = \begin{cases} st + \frac{s}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3, & t \leq s, \\ \\ st + \frac{t}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3, & t > s, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.10. $W_2^2[0,1]$ çekirdek üreten uzayı

$$W_2^2[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} v(x) \mid v(x), v'(x) \\ \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ \\ v''(x) \in L^2[0,1], x \in [0,1] \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle v(t), g(t) \rangle_{W_2^2} = \sum_{i=0}^{1} v^{(i)}(0) g^{(i)}(0) + \int_0^T v''(t) g''(t) \mathrm{d}t, \quad v(t), g(t) \in W_2^2[0,1],$$

$$\|v\|_{W_2^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^2}}, \quad v \in W_2^2[0,1],$$

şeklinde verilir. $W_2^2[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $Q_y(x)$

$$Q_y(x) = \begin{cases} 1 + xy + \frac{y}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3, & x \leq y, \\ \\ 1 + xy + \frac{x}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3, & x > y, \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.11. Benzer bir şekide $W_2^1[0,T]$ çekirdek üreten uzayı

$$W_2^1[0,T] = \left\{ \begin{array}{c} v(t) \mid v(t), [0,T] \text{da mutlak sürekli bir fonksiyon,} \\ \\ v'(t) \in L^2[0,T], t \in [0,T] \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu azayda iç çarpım ve norm

$$\langle v(t), g(t)\rangle_{W_2^1} = v(0)g(0) + \int_0^T v'(t)g'(t)\mathrm{d}t, \quad v(t), g(t) \in W_2^1[0,T],$$

$$\|v\|_{W_2^1} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{W_2^1}}, \quad v \in W_2^1[0,T].$$

şeklinde verilir. $W_2^1[0,T]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $q_s(t)$

$$q_s(t) = \begin{cases} 1+t, & t \le s, \\ \\ 1+s, & t > s, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.12. $W(\Omega)$ ikili çekirdek üreten uzay

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v(x,t) \mid \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial t}, \text{ tam sürekli fonksiyonlar,} \\ \\ \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial t^2} \in L^2(\Omega), v(x,0) = 0 \end{array} \right\}$$

olarak verilir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\begin{aligned} \langle v(x,t), g(x,t)\rangle_W = & \sum_{i=0}^{3} \int_0^T \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^i}{\partial x^i} v(0,t) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0,t) \right] \mathrm{d}t \\ & + \sum_{j=0}^{1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x,0), \frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x,0) \right\rangle_{W_2^3} \\ & + \int_0^T \int_0^1 \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) \frac{\partial^4}{\partial x^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ve

$$\|v\|_W = \sqrt{\langle v, v\rangle_W}, \quad v \in W(\Omega).$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.4. $W_2^4[0,1]$ uzayı tam bir çekirdek üreten uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu $R_y(x)$

$$c_1(y) = 1, \qquad c_2(y) = y, \qquad c_3(y) = \frac{1}{4}y^2$$

$$c_4(y) = \frac{1}{36}y^3, \qquad c_5(y) = \tfrac{1}{144}y^3, \qquad c_6(y) = -\frac{1}{240}y^2,$$

$$c_7(y) = \tfrac{1}{720}y, \qquad c_8(y) = -\frac{1}{5040},$$

$$d_1(y) = 1 - \tfrac{1}{5040}y^7, \quad d_2(y) = y + \frac{1}{720}y^6,$$

$$d_3(y) = \tfrac{1}{4}y^2 - \tfrac{1}{240}y^5, \quad d_4(y) = \frac{1}{36}y^3 + \frac{1}{144}y^4,$$

$$d_5(y) = 0, \qquad d_6(y) = 0, \qquad d_7(y) = 0, d_8(y) = 0,$$

olacak şekilde

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{8} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \\ \sum_{i=1}^{8} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

şeklinde belirtilir.

İspat. $W_2^4[0,1]$ çekirdek üreten uzayda iç çarpımdan yararlanılarak

$$\langle v(x), R_y(x)\rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^{3} v^{(i)}(0)R_y^{(i)}(0) + \int_0^1 v^{(4)}(x)R_y^{(4)}(x)\mathrm{d}x,$$
$$(v(x), R_y(x) \in W_2^4[0,1])$$

elde edilir. Bir kaç kısmi intgrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}\langle v(x), R_y(x)\rangle_{W_2^4} = &\sum_{i=0}^{3} v^{(i)}(0)\left[R_y^{(i)}(0) - (-1)^{(3-i)}R_y^{(7-i)}(0)\right] \\ &+ \sum_{i=0}^{3}(-1)^{(3-i)}v^{(i)}(1)R_y^{(7-i)}(1) \\ &+ \int_0^1 v(x)R_y^{(8)}(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

elde edilir. Çekirdek üretme özelliğinden

$$\langle v(x), R_y(x) \rangle_{W_2^4} = v(y),$$

bulunur. Eğer

$$\begin{aligned}
R_y(0) + R_y^{(7)}(0) &= 0,\\
R_y'(0) - R_y^{(6)}(0) &= 0,\\
R_y''(0) + R_y^{(5)}(0) &= 0,\\
R_y'''(0) - R_y^{(4)}(0) &= 0,\\
R_y^{(4)}(1) &= 0,\\
R_y^{(5)}(1) &= 0,\\
R_y^{(6)}(1) &= 0,\\
R_y^{(7)}(1) &= 0,
\end{aligned}$$

olarak ele alınırsa bu taktirde

$$R_y^{(8)}(x) = \delta(x-y),$$

elde edilir. $x \neq y$ olduğunda

$$R_y^{(8)}(x) = 0,$$

olur. Bu nedenle

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{8} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \\ \sum_{i=1}^{8} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

elde edilir.

$$R_y^{(8)}(x) = \delta(x-y), \tag{5}$$

olduğundan

$$\partial^k R_{y^+}(y) = \partial^k R_{y^-}(y), \quad k = 0,1,2,3,4,5,6,$$

$$\partial^7 R_{y^+}(y) - \partial^7 R_{y^-}(y) = 1,$$

yazılabilir. Böylece bilinmeyen $c_i(y)$ ve $d_i(y)(i = 1, 2, ..., 8)$ katsayıları elde edilebilir. Sonuç olarak üretilen çekirdek fonksiyon $R_y(x)$

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + yx + \frac{1}{4}y^2x^2 + \frac{1}{36}y^3x^3 + \frac{1}{144}y^3x^4 \\ \\ -\frac{1}{240}y^2x^5 + \frac{1}{720}yx^6 - \frac{1}{5040}x^7, \quad x \leq y, \\ \\ \\ 1 + xy + \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{36}x^3y^3 + \frac{1}{144}x^3y^4 \\ \\ -\frac{1}{240}x^2y^5 + \frac{1}{720}xy^6 - \frac{1}{5040}y^7, \quad x > y, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.13. $W_2^4[0,1]$ çekirdek üreten uzayı

$$W_2^4[0,1] = \begin{cases} u \mid u, u', u'', u''', \quad \text{mutlak sürekli fonksiyonlar} \\ \\ u^{(4)} \;\epsilon\; L^2[0,1], \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

şeklinde verilir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, g \rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^{3} u^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(4)}(x)g^{(4)}(x)\mathrm{d}x, \quad u, g \in W_2^4[0,1],$$

$$\|u\|_{W_2^4} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^4}}, \quad u \in W_2^4[0,1].$$

şeklinde ifade edilir. $W_2^4[0,1]$ uzayı bir çekirdek üreten uzaydır. Yani her bir $y \in [0,1]$ ve her bir $u(x) \in W_2^4[0,1]$ için

$$u(y) = \langle u, R_y \rangle_{W_2^4}$$

olacak şekilde bir $R_y(x)$ üretilen çekirdek fonksiyonu mevcuttur.

Teorem 2.5. $W_2^4[0,1]$ uzayı bir tam çekirdek uzaydır. Bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu R_y

$$c_1(y) = 0,$$
$$c_2(y) = 0,$$
$$c_3(y) = \frac{21}{5680}y^5 + \frac{1}{5680}y^7 - \frac{7}{1136}y^4 - \frac{7}{284}y^3 + \frac{2}{71}y^2 - \frac{7}{5680}y^6,$$
$$c_4(y) = \frac{7}{17040}y^5 + \frac{1}{51120}y^7 - \frac{7}{10224}y^4 + \frac{16}{639}y^3 - \frac{7}{284}y^2 - \frac{7}{51120}y^6,$$
$$c_5(y) = \frac{7}{68160}y^5 + \frac{1}{204480}y^7 - \frac{7}{40896}y^4 + \frac{4}{639}y^3 - \frac{7}{1136}y^2 - \frac{7}{204480}y^6,$$
$$c_6(y) = \frac{-7}{113600}y^5 - \frac{1}{340800}y^7 + \frac{7}{68160}y^4 + \frac{7}{17040}y^3 - \frac{1}{2130}y^2 + \frac{7}{340800}y^6,$$
$$c_7(y) = \frac{7}{340800}y^5 + \frac{1}{1022400}y^7 - \frac{7}{204480}y^4 - \frac{7}{51120}y^3 - \frac{7}{5680}y^2 - \frac{7}{1022400}y^6 + \frac{1}{720}y,$$
$$c_8(y) = \frac{-1}{340800}y^5 - \frac{1}{7156800}y^7 + \frac{7}{204480}y^4 + \frac{1}{51120}y^3 + \frac{1}{5680}y^2 + \frac{1}{10224000}y^6 - \frac{1}{5040},$$
$$d_1(y) = \frac{-1}{5040}y^7,$$
$$d_2(y) = \frac{1}{720}y^6,$$
$$d_3(y) = \frac{-1}{2130}y^5 + \frac{1}{5680}y^7 - \frac{7}{1136}y^4 - \frac{7}{284}y^3 + \frac{7}{21}y^2 - \frac{7}{5680}y^6,$$
$$d_4(y) = \frac{4}{639}y^4 + \frac{1}{17040}y^5 + \frac{7}{40896}y^7 + \frac{16}{639}y^3 - \frac{7}{284}y^2 - \frac{7}{51120}y^6,$$
$$d_5(y) = \frac{7}{68160}y^5 + \frac{1}{24480}y^7 - \frac{7}{40896}y^4 - \frac{7}{10224}y^3 - \frac{7}{1136}y^2 - \frac{7}{204480}y^6,$$
$$d_6(y) = \frac{-7}{113600}y^5 - \frac{1}{340800}y^7 + \frac{7}{68160}y^4 + \frac{7}{17040}y^3 + \frac{21}{5680}y^2 + \frac{7}{340800}y^6,$$
$$d_7(y) = \frac{7}{34080}y^5 + \frac{1}{1022400}y^7 - \frac{7}{204480}y^4 - \frac{7}{51120}y^3 - \frac{7}{5680}y^2 - \frac{7}{1022400}y^6,$$
$$d_8(y) = \frac{-1}{340800}y^5 - \frac{1}{7156800}y^7 + \frac{1}{204480}y^4 + \frac{1}{51120}y^3 + \frac{1}{5680}y^2 + \frac{7}{1022400}y^6.$$

$olacakşekildeto$ $$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{8} c_i(y)x^{i-1}, & x \le y, \\ \sum\limits_{i=1}^{8} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$ şeklinde elde edilir.

İspat. $W_2^4[0,1]$ uzayındaki iç çarpımdan

$$\langle u, R_y\rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^{3} u^{(i)}(0)R_y^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(4)}(x)R_y^{(4)}(x)\mathrm{d}x, \quad \Big(u, R_y \ \epsilon \ W_2^4[0,1]\Big).$$

elde edilir. Bir kaç kısmi integrasyonla

$$\langle u(x), R_y(x)\rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^{3} u^{(i)}(0)[R_y^{(i)}(0) - (-1)^{(3-i)}R_y^{(7-i)}(0)] + \sum_{i=0}^{3}(-1)^{(3-i)}u^{(i)}(1)R_y^{(7-i)}(1) + \int_0^1 u(x)R_y^{(8)}(x)\mathrm{d}x$$

bulunur. Çekirdek üretme özelliğinden

$$\langle u, R_y\rangle_{W_2^4} = u(y),$$

elde edilir. R_y üretilen çekirdek fonksiyonu aşağıda sınır şartlarıyla birlikte verilmiş genelleştirilmiş diferansiyel denklemin çözümü olur.

$$R_y^{(8)}(x) = \delta(x-y),$$

$$R_y^{3}(0) - R_y^{(4)}(0) = 0,$$

$$R_y''(0) + R_y^{(5)}(0) = 0,$$

$$R_y^{(4)}(1) = 0,$$

$$R_y^{(5)}(1) = 0,$$

$$R_y^{(6)}(1) = 0.$$

(6)

$x \neq y$ iken $R_y^{(8)}(x) = 0$ olur. Bu nedenle

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{8} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{8} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases},$$

olur.

$$R_y^{(8)}(x) = \delta(x-y),$$

olduğundan

$$d^k R_{y^+}(y) = d^k R_{y^-}(y), \ \ k = 0,1,2,3,4,5,6,$$

$$d^7 R_{y^+}(y) - d^7 R_{y^-}(y) = 1,$$

yazılabiliir. $R_y(x) \in W_2^4$[0,1] olduğundan

$$R_y(0) = 0, \quad R_y'(0) = 0, \quad R_y(1) = 0,$$

elde edilir. Böylece bilinmeyen $c_i(y)$ ve $d_i(y)(i = 1,2,...,8)$ katsayıları elde edilebilir.

Bu taktirde $R_y(x)$ üretilen çekirdek fonksiyonu $x \le y$ ve $x > y$ için

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{21}{5680}x^2y^5 + \frac{1}{5680}x^2y^7 - \frac{7}{1136}x^2y^4 - \frac{7}{284}x^2y^2 \\ -\frac{7}{5680}x^2y^6 + \frac{7}{17040}x^3y^5 + \frac{1}{51120}x^3y^7 \\ -\frac{7}{10224}x^3y^4 + \frac{16}{639}x^3y^3 \\ -\frac{7}{284}x^3y^2 - \frac{7}{51120}x^3y^6 + \frac{7}{68160}x^4y^5 \\ +\frac{1}{204480}x^4y^7 - \frac{7}{40896}x^4y^4 \\ +\frac{4}{639}x^4y^3 - \frac{7}{1136}x^4y^2 \\ -\frac{7}{20440}x^4y^6 - \frac{7}{113600}x^5y^5 - \frac{1}{340800}x^5y^7 \\ +\frac{7}{68160}x^5y^4 + \frac{7}{17040}x^5y^3 - \frac{1}{2130}x^5y^2 \\ +\frac{7}{340800}x^5y^6 + \frac{7}{340800}x^6y^5 \\ +\frac{1}{1022400}x^6y^7 - \frac{7}{204480}x^6y^4 - \frac{7}{51120}x^6y^3 \\ -\frac{7}{5680}x^6y^2 - \frac{7}{1022400}x^6y^6 \\ +\frac{1}{720}x^6y - \frac{1}{340800}x^7y^5 - \frac{1}{7156800}x^7y^7 \\ +\frac{7}{204480}x^7y^4 + \frac{1}{51120}x^7y^3 \\ +\frac{1}{5680}x^7y^2 + \frac{1}{10224000}x^7y^6 - \frac{x^7}{5040} \quad x \le y \end{cases}$$

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{21}{5680}y^2x^5 + \frac{1}{5680}y^2x^7 - \frac{7}{1136}y^2x^4 - \frac{7}{284}y^2x^3 \\ +\frac{2}{71}y^2x^2 - \frac{7}{5680}y^2x^6 \\ +\frac{7}{17040}y^3x^5 + \frac{1}{51120}y^3x^7 - \frac{7}{10224}y^3x^4 \\ +\frac{16}{639}y^3x^3 - \frac{7}{284}y^3x^2 - \frac{7}{51120}y^3x^6 \\ +\frac{7}{68160}y^4x^5 + \frac{1}{204480}y^4x^7 - \frac{7}{40896}y^4x^4 \\ +\frac{4}{639}y^4x^3 - \frac{7}{1136}y^4x^2 \\ -\frac{7}{204480}y^4x^6 - \frac{7}{113600}y^5x^5 \\ -\frac{1}{340800}y^5x^7 + \frac{7}{68160}y^5x^4 + \frac{7}{17040}y^5x^3 \\ -\frac{1}{213}y^5x^2 + \frac{7}{340800}y^5x^6 + \frac{7}{340800}y^6x^5 \\ +\frac{1}{1022400}y^6x^7 - \frac{7}{204480}y^6x^4 \\ -\frac{7}{51120}y^6x^3 - \frac{7}{5680}y^6x^2 - \frac{7}{1022400}y^6x^6 \\ +\frac{1}{720}y^6x - \frac{1}{340800}y^7x^5 - \frac{1}{7156800}y^7x^7 \\ +\frac{7}{204480}y^7x^4 + \frac{1}{51120}y^7x^3 + \frac{1}{5680}y^7x^2 \\ +\frac{1}{10224000}y^7x^6 - \frac{y^7}{5040} \quad x > y. \end{cases},$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.14. $T_2^8[0,1]$ çekirdek üreten uzayı

$$T_2^8[0,1] = \begin{cases} f \mid f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, f^{(7)} \text{ mutlak sürekli fonksiyonlar} \\ f^8 \ \epsilon \ L^2[0,1], \quad x \in [0,1], \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f(1) = f'(1) = f''(1) = 0. \end{cases}$$

şeklinde verilir. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle f,g\rangle_{T_2^8} = \sum_{i=0}^{7} f^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(8)}(x)g^{(8)}(x)\mathrm{d}x, \quad f,g \in T_2^8[0,1],$$

$$\|f\|_{T_2^8} = \sqrt{\langle f,f\rangle_{T_2^8}}, \quad f \,\epsilon\, T_2^8[0,1],$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.6. $T_2^8[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu R_y

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{16} c_i(y)x^{i-1}, & x \le y, \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{16} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases},$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.15. ϖ uzayı

$$\varpi = \{u \mid u : [a,b] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\},$$

şeklinde tanımlanır.

$$\langle u,v\rangle_A = u(a)v(a) + \sum_{\xi=a}^{b=1} \Delta u(\xi)\Delta v(\xi), \quad u,v \in \varpi, \quad a,b \in \mathbb{N}$$

ve

$$\|u\|_A = \sqrt{\langle u,v\rangle_A}, \quad u \in \varpi$$

sırasıyla $(\varpi, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ uzayında iç çarpım ve normu belirtir.

Teorem 2.7. $(\varpi, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu Q_η

$$Q_\eta(\xi) = \begin{cases} 1+\eta-a, & a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1+\xi-a, & a \le \xi < \eta \le b. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

İspat.

$$Q_\eta(\xi) = \begin{cases} 1+\eta-a, & a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1+\xi-a, & a \le \xi < \eta \le b. \end{cases},$$

olduğundan

$$\Delta Q_\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1, & a \le \xi < \eta \le b, \end{cases}$$

yazılabilir. $u \in \varpi$ ve $\eta \in [a,b]_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu taktirde Tanım 2.15'e dayanılarak

$$\begin{aligned} \langle u, Q_\eta \rangle_A &= u(a)Q_\eta(a) + \sum_{\xi=a}^{b-1} \Delta u(\xi)\Delta Q_\eta(\xi) \\ &= u(a) + \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta u(\xi) \\ &= u(a) + u(\eta) - u(a) \\ &= u(\eta), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.16. $(\varpi, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ uzayında herhangi bir ξ ve

$$\xi^{\underline{2}} = \xi(\xi-1), \quad \xi^{\underline{3}} = \xi(\xi-1)(\xi-2),$$

için iç çarpım ve norm

$$\langle u, v \rangle_B = u(a)v(a) + \Delta u(a)\Delta v(a) + \sum_{\xi=a}^{b-2} \Delta^2 u(\xi)\Delta^2 g(\xi), \quad u, v \in \varpi, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

ve

$$\|u\|_B = \sqrt{\langle u, v \rangle_B}, \quad u \in \varpi,$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.8. $(\varpi, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu T_η

$$T_\eta(\xi) = \begin{cases} 1 + a^2 + \xi\eta - a\eta - a\xi + (\eta - a)\frac{(\xi-a)^{\underline{2}}}{2} \\ -\frac{(\eta-\xi+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(a-\xi+1)^{\underline{3}}}{6}, \quad a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1 + a^2 + \eta\xi - a\xi - a\eta + (\xi - a)\frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2} \\ -\frac{(\xi-\eta+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(a-\eta+1)^{\underline{3}}}{6}, \quad a \le \xi < \eta \le b. \end{cases},$$

şeklinde elde edilir.

İspat.

$$T_\eta(\xi) = \begin{cases} 1 + a^2 + \xi\eta - a\eta - a\xi + (\eta - a)\frac{(\xi-a)^{\underline{2}}}{2} \\ -\frac{(\eta-\xi+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(a-\xi+1)^{\underline{3}}}{6}, \quad a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1 + a^2 + \eta\xi - a\xi - a\eta + (\xi - a)\frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2} \\ -\frac{(\xi-\eta+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(a-\eta+1)^{\underline{3}}}{6}, \quad a \le \xi < \eta \le b. \end{cases},$$

olduğundan

$$\Delta T_\eta(\xi) = \begin{cases} \eta - a + (\eta - a)(\xi - a) + \frac{(\xi-\eta+1)^{\underline{2}}}{2} - \frac{(\xi-a+1)^{\underline{2}}}{2}, \quad a \le \eta \le \xi \le b-1, \\ \eta - a + \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2} - \frac{(\xi-\eta+1)^{\underline{2}}}{2}, \quad a \le \xi < \eta \le b-1 \end{cases}$$

ve

$$\Delta^2 T_\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & a \le \eta \le \xi \le b-2, \\ \eta - 1 - \xi, & a \le \xi < \eta \le b-2. \end{cases}$$

elde edilir. $u \in \varpi$ ve $\eta \in [0, b-1]_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu taktirde Tanım 2.16'ya dayanılarak

$$\begin{aligned}
\langle u, T_\eta \rangle_B &= u(a)T_\eta(a) + \Delta u(a)\Delta T_\eta(a) + \sum_{\xi=a}^{b-2} \Delta^2 u(\xi)\Delta^2 T_\eta(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) - \sum_{\xi=a}^{\eta-1} (\xi - \eta + 1)\Delta^2 u(\xi) \\
&= u(a) + \eta \Delta u(a) - \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta((\xi - \eta)\Delta u(\xi)) + \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta u(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) - 0\Delta u(\eta) + (a - \eta)\Delta u(a) + u(\eta) - u(a) \\
&= u(\eta),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.17. $(\varpi, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ uzayında herhangi bir reel ξ ve

$$\xi^{\underline{4}} = \xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3), \quad \xi^{\underline{5}} = \xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3)(\xi-4),$$

için iç çarpım ve norm

$$\langle u.v \rangle_C = \sum_{i=0}^{2} \Delta^i u(a)\Delta^i v(a) + \sum_{\xi=a}^{b-3} \Delta^3 u(\xi)\Delta^3 v(\xi), \quad u, v \in \varpi, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

ve

$$\|u\|_C = \sqrt{\langle u, u \rangle_C}, \quad u \in \varpi,$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.9. $(\varpi, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu R_η

$$R_\eta(\xi) = \begin{cases} 1+\eta(\xi-a) - a\xi + a^2 + \frac{(\xi-a)^2(\eta-a)^2}{4} + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)^3}{12} \\ +\frac{(\eta-\xi+2)^5}{120} - \frac{(a-\xi+2)^5}{120} - \eta\frac{(a-\xi+2)^4}{24} + a\frac{(a-\xi+2)^4}{24}, \quad a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1+\xi(\eta-a) - a\eta + a^2 + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)^2}{4} + \frac{(\xi-a)^2(\eta-a)^3}{12} \\ +\frac{(\xi-\eta+2)^5}{120} - \frac{(a-\eta+2)^5}{120} - \xi\frac{(a-\eta+2)^4}{24} + a\frac{(a-\eta+2)^4}{24}, \quad a \le \xi < \eta \le b, \end{cases}$$

şeklinde verilir.

İspat.

$$R_\eta(\xi) = \begin{cases} 1+\eta(\xi-a) - a\xi + a^2 + \frac{(\xi-a)^2(\eta-a)^2}{4} + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)^3}{12} \\ +\frac{(\eta-\xi+2)^5}{120} - \frac{(a-\xi+2)^5}{120} - \eta\frac{(a-\xi+2)^4}{24} + a\frac{(a-\xi+2)^4}{24}, \quad a \le \eta \le \xi \le b, \\ \\ 1+\xi(\eta-a) - a\eta + a^2 + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)^2}{4} + \frac{(\xi-a)^2(\eta-a)^3}{12} \\ +\frac{(\xi-\eta+2)^5}{120} - \frac{(a-\eta+2)^5}{120} - \xi\frac{(a-\eta+2)^4}{24} + a\frac{(a-\eta+2)^4}{24}, \quad a \le \xi < \eta \le b, \end{cases}$$

olduğundan

$$\Delta R_\eta(\xi) = \begin{cases} \eta - a + \frac{(\xi-a)(\eta-a)^2}{2} + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)^2}{4} - \frac{(\xi-\eta+2)^4}{24} \\ +\frac{(\xi-a+2)^4}{24} + (a-y)\frac{(\xi-a+1)^3}{6}, \quad a \le \eta \le \xi \le b-1, \\ (\eta-a) + \frac{(\eta-a)^2(\xi-a)}{2} + \frac{(\xi-a)(\eta-a)^3}{6} + \frac{(\xi-\eta+2)^4}{24} \\ -\frac{(a-\eta+2)^4}{24}, \quad a \le \xi < \eta \le b-1, \end{cases}$$

$$\Delta^2 R_\eta(\xi) = \begin{cases} \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2} + \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}(\xi-a)}{2} - \frac{(\xi-\eta+2)^{\underline{3}}}{6} \\ + \frac{(\xi-a+2)^{\underline{3}}}{6} + (a-\eta)\frac{(\xi-a+1)^{\underline{2}}}{2}, \quad a \le \eta \le \xi \le b-2, \\ \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2} + \frac{(\eta-a)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(\xi-\eta+2)^{\underline{3}}}{6}, \quad a \le \xi < \eta \le b-2, \end{cases}$$

$$\Delta^3 R_\eta(\xi) = \begin{cases} 0, \quad a \le \eta \le \xi \le b-3, \\ \frac{(\eta-1)(\eta-2)}{2} - \xi(\eta-2) + \frac{\xi^{\underline{2}}}{2}, \quad a \le \xi < \eta \le b-3, \end{cases}$$

yazılabilir. $u \in \varpi$ ve $\eta \in [0, b-2]_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu taktirde Tanım 2.17'ye dayanılarak

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_\eta \rangle_C &= u(a)R_\eta(a) + \Delta u(a)\Delta R_\eta(a) + \Delta^2 u(a)\Delta^2 R_\eta(a) + \sum_{\xi=a}^{b-3} \Delta^3 u(\xi)\Delta^3 R_\eta(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) + \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2}\Delta^2 u(a) \\
&+ \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \left(\frac{(\eta-1)(\eta-2)}{2} - (\eta-2)\xi + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \right) \Delta^3 u(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) + \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2}\Delta^2 u(a) \\
&+ \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta \left(\left(\frac{(\eta-1)(\eta-2)}{2} - (\eta-2)(\xi-1) + \frac{(\xi-1)(\xi-2)}{2} \right) \Delta^2 u(\xi) \right) \\
&- \sum_{\xi=a}^{\eta-1} (\xi - \eta + 1)\Delta^2 u(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) + \frac{(\eta-a)^{\underline{2}}}{2}\Delta^2 u(a) \\
&+ \left(\frac{(\eta-1)(\eta-2)}{2} - (\eta-2)(\eta-1) + \frac{(\eta-1)(\eta-2)}{2} \right) \Delta^2 u(\eta) \\
&- \left(\frac{\eta(\eta-1)}{2} - (\eta-2)(a-1) + \frac{(a-1)(a-2)}{2} \right) \Delta^2 u(a) \\
&- \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta((\xi - \eta)\Delta u(\xi)) + \sum_{\xi=a}^{\eta-1} \Delta u(\xi) \\
&= u(a) + (\eta - a)\Delta u(a) + (a - \eta)\Delta u(a) + u(\eta) - u(a) \\
&= u(\eta),
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

3. BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR

Bu bölümde problemimizin çözümü için gerekli bazı kullanışlı çekirdek üreten uzaylar ve üretilen çekirdek fonksiyonlar ele aldık.

Tanım 3.1. $W_2^1[0,1]$ çekirdek üreten uzay:

$$W_2^1[0,1] = \{u \in AC[0,1] : \; u' \in L^2[0,1]\},$$

şeklinde tanımlanır. Burada AC sürekli fonksiyonlar uzayını belirtmektedir.

$$\langle u, g\rangle_{W_2^1} = \int_0^1 \big(u(\eta)g(\eta) + u'(\eta)g'(\eta)\big)\,\mathrm{d}\eta, \quad u, g \in W_2^1[0,1] \tag{7}$$

ve

$$\|u\|_{W_2^1} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{W_2^1}}, \quad u \in W_2^1[0,1], \tag{8}$$

sırasıyla $W_2^1[0,1]$ çekirdek üreten uzayda iç çarpım ve normdur. Bu çekirdek üreten uzayda $T_\eta(\varsigma)$ üretilen çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir [Hashemi, 2017]:

$$T_\eta(\varsigma) = \frac{1}{2\sinh(1)}\left[\cosh(\eta + \varsigma - 1) + \cosh(|\eta - \varsigma| - 1)\right]. \tag{9}$$

Tanım 3.2. ${}^{o}W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzay

$${}^{o}W_2^3[0,1] = \{u \in AC[0,1] : \; u', u'' \in AC[0,1], \; u^{(3)} \in L^2[0,1], \; u(0) = 0 = u'(0)\}.$$

şeklinde tanımlanır.

$$\langle u, v\rangle_{{}^{o}W_2^3} = \sum_{i=0}^{2} u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(\eta)v^{(3)}(\eta)\mathrm{d}\eta, \quad u, v \in {}^{o}W_2^3[0,1]$$

ve

$$\|u\|_{{}^{o}W_2^3} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{{}^{o}W_2^3}}, \quad u \in {}^{o}W_2^3[0,1],$$

sırasıyla ${}^{o}W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzayda iç çarpım ve normu belirtir.

Teorem 3.3. ${}^{o}W_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzayda üretilen çekirdek fonksiyon r_ς aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$r_\varsigma(\eta)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{5} c_{k+1}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ \sum_{k=0}^{5} d_{k+1}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases} \tag{10}$$

burada katsayılar

$$\begin{aligned}
c_1(\varsigma) &= 0, \quad c_2(\varsigma)=0, \quad c_3(\varsigma)=\frac{1}{4}\varsigma^2, \quad c_4(\varsigma)=\frac{1}{12}\varsigma^2,\\
c_5(\varsigma) &= -\frac{1}{24}\varsigma, \quad c_6(\varsigma)=\frac{1}{120},\\
d_1(\varsigma) &= \frac{1}{120}\varsigma^5, \quad d_2(\varsigma)=-\frac{1}{24}\varsigma^4,\\
d_3(\varsigma) &= \frac{1}{12}\varsigma^3+\frac{1}{4}\varsigma^2\\
d_4(\varsigma) &= 0, \quad d_5(\varsigma)=0, \quad d_6(\varsigma)=0,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $u\in^o W_2^3[0,1]$ ve $0\le\varsigma\le 1$ olsun. r_ς üretilen çekirdek fonksiyonunu (10) ile belirtelim. Bu taktirde

$$r'_\varsigma(\eta)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{4}(k+1)c_{k+1}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ \sum_{k=0}^{4}(k+1)d_{k+1}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases}$$

$$r''_\varsigma(\eta)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{3}(k+1)(k+2)c_{k+2}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ \sum_{k=0}^{3}(k+1)(k+2)d_{k+2}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases}$$

$$r^{(3)}_\varsigma(\eta)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{2}(k+1)(k+2)(k+3)c_{k+3}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ \sum_{k=0}^{2}(k+1)(k+2)(k+3)d_{k+3}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases}$$

$$r_\varsigma^{(4)}(\eta)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{1}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)c_{k+4}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ \sum_{k=0}^{1}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)d_{k+4}(\varsigma)\eta^k, & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases}$$

ve

$$r_\varsigma^{(5)}(\eta)=\begin{cases}120c_5(\varsigma), & 0\le\eta<\varsigma\le 1,\\ \\ 120d_5(\varsigma), & 0\le\varsigma<\eta\le 1,\end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\langle u,r_\varsigma\rangle_{{}^oW_2^3} &= \sum_{i=0}^{2}u^{(i)}(0)r_\varsigma^{(i)}(0)+\int_0^1 u^{(3)}(\eta)r_\varsigma^{(3)}(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&= u'(0)r'_\varsigma(0)+u''(0)r''_\varsigma(0)+u''(1)r_\varsigma^{(3)}(1)-u''(0)r_\varsigma^{(3)}(0)\\
&\quad -u'(1)r_\varsigma^{(4)}(1)+u'(0)r_\varsigma^{(4)}(0)+\int_0^1 u'(\eta)r_\varsigma^{(5)}(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&= c_1(\varsigma)u'(0)+2c_2(\varsigma)u''(0)\\
&\quad +6(d_3(\varsigma)+4d_4(\varsigma)+10d_5(\varsigma))u''(1)-6c_3(\varsigma)u''(0)\\
&\quad -24(d_4(\varsigma)+5d_5(\varsigma))u'(1)+24c_4(\varsigma)u'(0)\\
&\quad +\int_0^\varsigma 120c_5(\varsigma)u'(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_\varsigma^1 120d_5(\varsigma)u'(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&= (c_1(\varsigma)+24c_4(\varsigma))u'(0)+2(c_2(\varsigma)-3c_3(\varsigma))u''(0)\\
&\quad +6(d_3(\varsigma)+4d_4(\varsigma)+10d_5(\varsigma))u''(1)-24(d_4(\varsigma)+5d_5(\varsigma))u'(1)\\
&\quad +120(c_5(\varsigma)-d_5(\varsigma))u(\varsigma)\\
&= u(\varsigma),\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. ÇEKİRDEK ÜRETEN ${}^{o}W_2^3[0,1]$ UZAYINDA ÇÖZÜMLER

(1) denkleminin çözümünü çekirdek üreten ${}^{o}W_2^3[0,1]$ uzayında göz önünde bulunduralım.

$$L:\ {}^{o}W_2^3[0,1] \to W_2^1[0,1]$$

operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlarsak

$$Lv(\eta) = v''(\eta) + \frac{2}{\eta}v'(\eta) \tag{11}$$

model problemimiz (1)–(2) aşağıdaki probleme dönüşür:

$$\begin{cases} Lv = M(\eta, v), \quad \eta \in [0,1], \\ v(0) = 0 = v'(0). \end{cases} \tag{12}$$

Teorem 4.1. (11) ile tanımlanan L operatörü sınırlı lineer bir operatördür.

İspat. $P > 0$ olacak şekilde $\|Lv\|^2_{W_2^1} \leq M\,\|v\|^2_{{}^{o}W_2^3}$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamamız gerekmektedir. Çekirdek üreten uzayı kullanarak

$$\|Lv\|^2_{W_2^1} = \langle Lv, Lv\rangle_{W_2^1} = \int_0^1 \left(Lv(\eta)^2 + Lv'(\eta)^2\right) \mathrm{d}\eta.$$

elde ederiz. Çekirdek üretme özelliğini kullanarak

$$v(\eta) = \left\langle v(\cdot), r_\eta(\cdot)\right\rangle_{{}^{o}W_2^3}$$

elde ederiz. Daha sonra

$$Lv(\eta) = \left\langle v(\cdot), Lr_\eta(\cdot)\right\rangle_{{}^{o}W_2^3},$$

bulunur. Böylece $P_1 > 0$ olacak şekilde

$$|Lv(\eta)| \leq \|v\|_{{}^{o}W_2^3}\left\|Lr_\eta\right\|_{{}^{o}W_2^3} = P_1\,\|v\|_{{}^{o}W_2^3},$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle

$$\int_0^1 \left[(Lv)\,(\eta)\right]^2 \mathrm{d}\eta \leq P_1^2\,\|v\|^2_{{}^{o}W_2^3}.$$

eşitsiliğine ulaşırız.

$$(Lv)'(\eta) = \left\langle v(\cdot), (Lr_\eta)'(\cdot)\right\rangle_{{}^{o}W_2^3},$$

olduğundan dolayı $P_2 > 0$ olacak şekilde

$$\left|(Lv)'(\eta)\right| \leq \|v\|_{{}^oW_2^3} \left\|(Lr_\eta)'\right\|_{{}^oW_2^3} = P_2 \|v\|_{{}^oW_2^3},$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\left[(Lv)'(\tau)\right]^2 \leq P_2^2 \|v\|_{{}^oW_2^3}^2$$

ve

$$\int_0^1 \left[(Lv)'(\eta)\right]^2 \mathrm{d}\eta \leq P_2^2 \|v\|_{{}^oW_2^3}^2,$$

bulunur. Yani $P = P_1^2 + P_2^2 > 0$ pozitif bir sabit olacak şekilde

$$\|Lv\|_{W_2^1}^2 \leq \int_0^1 \left(\left[(Lv)(\eta)\right]^2 + \left[(Lv)'(\eta)\right]^2\right) \mathrm{d}\eta \leq \left(P_1^2 + P_2^2\right) \|v\|_{{}^oW_2^3}^2 = P \|v\|_{{}^oW_2^3}^2,$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

5. ANA SONUÇLAR

$\varphi_i(\eta) = T_{\eta_i}(\eta)$ ve $\psi_i(\eta) = L^*\varphi_i(x)$ olsun. L^* operatörü de L operatörünün eşlenik operatörü olsun. Çekirdek üreten ${}^oW_2^3[0,1]$ uzayının $\left\{\overline{\Psi}_i(\eta)\right\}_{i=1}^{\infty}$ nin ortonormal sistemi $\{\psi_i(\eta)\}_{i=1}^{\infty}$ nin Gram-Schmidt ortogononalleştirme sürecinde elde edilebiilir ve

$$\overline{\psi}_i(\eta) = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(\eta), \quad (\beta_{ii} > 0, \quad i = 1,2,\ldots), \tag{13}$$

yazılabilir.

Theorem 5.1. $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ da yoğun olsun ve $\psi_i(\eta) = L_\varsigma r_\eta(\varsigma)\big|_{\varsigma=\eta_i}$ olsun. Bu takirde $\{\psi_i(\eta)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi ${}^oW_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzayda bir tam sistem olur.

İspat. Çekirdek üretme özelliğinden ve kullanılan operatörün özelliğinden faydalanılarak

$$\psi_i(\eta) = (L^*\varphi_i)(\eta) = \left\langle (L^*\varphi_i)(\varsigma), r_\eta(\varsigma) \right\rangle = \left\langle \varphi_i)(\varsigma), L\varsigma r_\eta(\varsigma) \right\rangle = L_\varsigma r_\eta(\varsigma)\big|_{\varsigma=\eta_i},$$

elde edilir. $\psi_i(\eta) \in {}^oW_2^3[0,1]$ olduğu aşikardır. Her bir sabit $u(\eta) \in {}^oW_2^3[0,1]$ için $\langle u(\eta), \psi_i(\eta)\rangle = 0$, $(i = 1,2,\ldots)$ olsun. Bu taktirde

$$\langle u(\eta), (L^*\varphi_i)(\eta)\rangle = \langle Lu(\cdot), \varphi_i(\cdot)\rangle = (Lu)(\eta_i) = 0,$$

elde edilir. $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ da yoğundur. Bu nedenle L^{-1} ters operatörünün varlığından $(Lu)(\eta) = 0$ ve $u \equiv 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2. Eğer $u(\eta)$ fonksiyonu (12)'in bir çözümü ise bu taktirde $\{(\eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ da yoğun olmak üzere

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} M(\eta_k, u_k)\widehat{\Psi}_i(\eta), \tag{14}$$

elde edilir.

İspat. Tam sistemden ve çözümün tekliğinden

$$\begin{aligned}
u(\eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(\eta), \widehat{\Psi}_i(\eta) \right\rangle_{{}^oW_2^3} \widehat{\Psi}_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle u(\eta), \Psi_k(\eta) \right\rangle_{{}^oW_2^3} \widehat{\Psi}_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle u(\eta), L^* \varphi_k(\eta) \right\rangle_{{}^oW_2^3} \widehat{\Psi}_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle Lu(\eta), \varphi_k(\eta) \right\rangle_{W_2^1} \widehat{\Psi}_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} Lu(\eta_k) \widehat{\Psi}_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} M(\eta_k, u_k) \widehat{\Psi}_i(\eta),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

u_n yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} M(\eta_k, u_k) \widehat{\Psi}_i(\eta). \tag{15}$$

Lemma 5.1. Eğer $\|u_n - u\|_{{}^oW_2^3} \to 0$, $\eta_n \to \eta$, $(n \to \infty)$ ve $M(\eta, u)$ fonksiyonu $\eta \in [0,1]$ için sürekli ise bu taktirde [Cui ve Lin, 2009]

$$M(\eta_n, u_{n-1}(\eta_n)) \to M(\eta, u(\eta)) \quad as\ n \to \infty.$$

olur.

Teorem 5.3. Herhangi bir sabit $u_0(\eta) \in {}^oW_2^3[0,1]$ için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(i)

$$u_n(\eta) = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{\psi}_i(\eta), \tag{16}$$

$$A_i = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} M(\eta_k, u_{k-1}(\eta_k)), \tag{17}$$

(ii) $\|u_n\|_{{}^oW_2^3}$ normu sınırlı;

(iii) $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ aralığında yoğun;

(iv) Herhangi bir $u(\eta) \in^o W_2^3[0,1]$ için $M(\eta,u) \in W_2^1[0,1]$.

Bu taktirde $u_n(\eta)$ yaklaşık çözümü ${}^oW_2^3[0,1]$ çekirdek üreten uzayda tam çözüme yakınsar ve

$$u(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \overline{\psi}_i(\eta),$$

elde edilir.

İspat. İlk olarak $u_n(\eta)$ yaklaşık çözümün yakınsaklığını gösterelim.

$$u_{n+1}(\eta) = u_n(\eta) + A_{n+1}\widehat{\Psi}_{n+1}(x), \tag{18}$$

olarak yazabiliriz. $\{\widehat{\Psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ nin ortonormalliğinden

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 + A_{n+1}^2 = \|u_{n-1}\|^2 + A_n^2 + A_{n+1}^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{n+1} A_i^2 \tag{19}$$

elde edilir. $\|u_n\|_{{}^oW_2^3}$ nin sınırlılığından

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^2 < \infty,$$

bulunur. Yani

$$\{A_i\} \in l^2, \quad (i = 1,2,\ldots)$$

olur. $m > n$ olsun. $(u_m - u_{m-1}) \perp (u_{m-1} - u_{m-2}) \perp \ldots \perp (u_{n+1} - u_n)$ ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|u_m - u_n\|^2_{{}^oW_2^3} &= \|u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \ldots + u_{n+1} - u_n\|^2_{{}^oW_2^3} \\
&\leq \|u_m - u_{m-1}\|^2 + \ldots + \|u_{n+1} - u_n\|^2_{{}^oW_2^3} \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} A_i^2 \to 0, \quad m,n \to \infty,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\perp$ ifadesi ortogonnaliği belirtir. Çekirdek üreten ${}^oW_2^3[0,1]$ uzayının tamlığı göz önünde bulundurularak

$$u_n(\eta) \to u(\eta) \quad n \to \infty \text{ iken},$$

olacak şekilde $u(\eta) \in^o W_2^3[0,1]$ çözümünün varlığından söz edileblir.

Limit durumuna geçilerek

$$u(\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\overline{\psi}_i(\eta),$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(Lu)\left(\eta_j\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left\langle L\overline{\psi}_i(\eta),\varphi_j(\eta)\right\rangle_{W_2^1}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left\langle\overline{\psi}_i(\eta),L^*\varphi_j(\eta)\right\rangle_{{}^oW_2^3}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left\langle\overline{\psi}_i(\eta),\overline{\psi}_j(\eta)\right\rangle_{{}^oW_2^3},\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}(Lu)(\eta_j) &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left\langle\overline{\psi}_i(\eta),\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}\overline{\psi}_j(\eta)\right\rangle_{{}^oW_2^3}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left\langle\overline{\psi}_i(\eta),\overline{\psi}_n(\eta)\right\rangle_{{}^oW_2^3}=A_n.\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $n=1$ alınırsa bu taktirde

$$Lu(\eta_1)=M(\eta_1,u_0(\eta_1)), \tag{20}$$

olarak bulunur.Eğer $n=2$ alınırsa bu taktirde

$$\beta_{21}(Lu)(\eta_1)+\beta_{22}(Lu)(\eta_2)=\beta_{21}M(\eta_1,u_0(\eta_1))+\beta_{22}M(\eta_2,u_1(\eta_2)), \tag{21}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$(Lu)(\eta_2)=M(\eta_2,u_1(\eta_2)),$$

olur. Sonuç olarak tümevarımla basit bir şekilde

$$(Lu)(\eta_j)=M(\eta_j,u_{j-1}(\eta_j)), \tag{22}$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle

$$(Lu)(\varsigma)=M(\varsigma,u(\varsigma)),$$

olur. Yani $u\left(\eta\right)$ fonksiyonu (12)'nin bir çözümü olur ve

$$u(\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\overline{\psi}_i,$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.4. Eğer $u \in {}^{o}W_2^3[0,1]$ ise bu taktirde

$$\|u_n - u\|_{{}^{o}W_2^3} \to 0, \quad n \to \infty.$$

olur. Üstelik $\|u_n - u\|_{{}^{o}W_2^3}$ dizisi n'de monoton azalan bir dizi olur.

İspat. (14) ve (15) ifadelerine dayanılarak

$$\|u_n - u\|_{{}^{o}W_2^3} = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} f(\eta_k, u_k,) \widehat{\Psi}_i \right\|_{{}^{o}W_2^3},$$

elde edilir. Böylece

$$\|u_n - u\|_{{}^{o}W_2^3} \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2_{{}^{o}W_2^3} &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} f(\eta_k, u_k) \widehat{\Psi}_i \right\|^2_{{}^{o}W_2^3} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} M(\eta_k, u_k) \widehat{\Psi}_i \right)^2. \end{aligned}$$

bulunur. Açıkça $\|u_n - u\|_{{}^{o}W_2^3}$ dizisi n'de monoton azalandır.

6. GRUP KORUMA METODU

Bir sistemin iç sistem grubu özellikle (1) denkleminden elde edilen dinamik sistemler grup koruma metodunu kullanmayı sağlar ve lineer olmayan Lane-Emden denkleminin simetri grubuna sahip olmadığımızda bunu verilen dinamik sistemlere gömmek mümkündür. Bir diferansiyel denkleme karşılık gelen bir dinamik sistemi aşağıdaki şekilde göz önünde bulunduralım:

$$\mathbf{y}' = \Psi(\eta, \mathbf{y}), \;\; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \eta \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Daha sonra (23) denklemi için y durum vektörünün yöneliminin bir birim vektörü için bir tanım kullanılarak

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}, \tag{24}$$

elde edilir. Burada $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} > 0$ ifadesi $\mathbf{y}$'nin Euclid normudur. (23) ve (24) ile:

$$\dot{\mathbf{n}} := \frac{\Psi(\eta, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} - \left(\frac{\Psi(\eta, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \cdot \mathbf{n}\right)\mathbf{n}, \tag{25}$$

bulunur. Aynı zamanda (23) ve (24) kullanılarak

$$\frac{d}{d\eta}\|\mathbf{y}\| = \frac{d}{d\eta}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} = \Psi(\eta, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}, \tag{26}$$

yazılabilir. (25) ve (26) denklemlerinden

$$\frac{d}{d\eta}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \|\mathbf{y}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} & \frac{\Psi(\eta,\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \\ \frac{\Psi^T(\eta,\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \|\mathbf{y}\| \end{bmatrix}, \tag{27}$$

bulunur. Açık bir şekilde (27)'de ilk denklem orijinal (23) denklemi ile aynıdır fakat ikinci denklemin eklenmesi bize $\mathbb{R}^{k+1}$ üzerinde bir iç çarpımı tarif eden $\mathbf{Y} := (\mathbf{y}^T, \|\mathbf{y}\|)^T \in \mathcal{M}^{k+1}(\mathbb{R})$:

$$\langle U, V\rangle = U^T \Lambda V = u_1 v_1 + \cdots + u_k v_k - u_{k+1} v_{k+1}, \tag{28}$$

ifadesinin arttırılmış durum değişkenlerinin Minkowski yapısını verir. Burada

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I_k & \mathbf{0}_{k\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times k} & -1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

ve

$$U^T = (u_1, \ldots, u_k, u_{k+1})^T, \;\; V^T = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})^T.$$

olur. Bu $\mathbb{R}^{k+1}$ üzerinde bir Lorentz iç çarpımıdır.

Aslında $\mathcal{M}^{k+1}(\mathbb{R})$ uzayındaki sıfır vektörü

$$\mathcal{H}_{k,1}(0) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k+1} : \mathbf{X} \neq 0,\ \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - t^2 = 0\},$$

kümesinde bulunur. Arttırılmış $\mathbf{Y} := (\mathbf{y}^T, \|\mathbf{y}\|)^T$ değerinin boş bir vektör olduğunu ve Lorentz iç çarpımına dayanarak

$$\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{Y}^T \Lambda \mathbf{Y} = 0, \tag{30}$$

koni şartını sağladığını Minkowskian yapısında incelemek kolaydır.

(27) denklemi soyut formda yazılabilir:

$$\mathbf{Y}' = \Omega \mathbf{Y},\ \ \mathbf{Y} \in \mathcal{H}_{k,1}(0), \tag{31}$$

burada

$$\Omega := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} & \frac{\Psi(\eta,\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \\ \frac{\Psi^T(\eta,\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Tanım 6.1. A bir reel kare matris olsun. Bu taktirde

$$Sk\_Sym_k(\mathcal{M}^k(\mathbb{R})) = \{A : A^T\Lambda + \Lambda A = 0\},$$

uzayı Minkowski yapısında anti simetrik matrislerin bir uzayı olur.

(31) denkleminde $\Omega \in Sk\_Sym_{k+1}(\mathcal{M}^{k+1}(\mathbb{R}))$ olduğunu biliyoruz.

Global lineer grup olarak çok iyi bilinen reel kare matrislerin bir grubu

$$GL_k(\mathbb{R}) = \{G \in M_{k,k} : det(G) \neq 0\},$$

olarak tanımlanır. Üstelik aşağıdaki kapalı alt grubu göz önünde bulundurabiliriz.

$$O(k,1) = \{G \in GL_{k+1}(\mathbb{R}) : G^T \Lambda G = \Lambda\}.$$

$G \in O(k,1)$ ancak ve ancak eğer tüm $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{k+1}$ için $\langle G\mathbf{x}, G\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ olursa geçerli olur. Bu nedenle $O(k,1)$ ifadesi $\mathbb{R}^{k+1}$'nin tüm Lorentz izometrilerinden oluşur. Not edelim ki $G \in O(k,1)$ için $det(G) = \pm 1$ olur.

$O(k,1)$'nin bir diğer kullanışlı alt grubu

$$SO_0(k,1) = \{G \in O(k,1) : det(G) = 1\},$$

şeklinde verilir. Bu uygun bir Orthochronous Lorentz grubu olarak iyi bilinmektedir. Lie grupları ve Lie cebirleri arasındaki bağlantı üstel harita ile belirtilmiştir. Yani eğer $so(k,1)$ ifadesi $SO_0(k,1)$'nin bir Lie cebiri ise bu taktirde

$$exp : so(k,1) \to SO_0(k,1), \tag{33}$$

olur. Üstelik $so(k,1) = Sk\_Sym_{k+1}(\mathcal{M}^{k+1}(\mathbb{R}))$ olduğunu biliyoruz. ([Baker, 2012], Sayfa 82 referansına bakılablir). Bu nedenle (31) denkleminde $\Omega \in so(k,1)$ olur ve (33) üstel haritadan elde edilen karşılık gelen ayrıklaştırılmış $G \in SO_0(k,1)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$G^T \Lambda G = \Lambda, \;\; det(G) = 1. \tag{34}$$

Şimdi istenilen sayısal metodu aşağıdaki formda geliştirmeye hazırız:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = G(n)\mathbf{Y}_n. \tag{35}$$

Burada $\mathbf{Y}_n$ ifadesi ayrık t_n'de $\mathbf{Y}$'nin sayısal değerini yorumlar ve ayrıklaştırılmış grup elamanı $G(n)$ Cayley dönüşümü yardımıyla aşağıdaki şekilde elde dilir:

$$\begin{aligned} G(n) &= [I_k - \Delta\eta\ \Omega(n)]^{-1}[I_k + \Delta\eta\ \Omega(n)] \\ &= \begin{bmatrix} I_k + \frac{2\Delta\eta^2 \Psi_n \Psi_n^T}{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2} & \frac{2\Delta\eta\ \|\mathbf{y}_n\|\Psi_n}{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2} \\ \frac{2\Delta\eta\ \|\mathbf{y}_n\|\Psi_n^T}{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2} & \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 + \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2}{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{36}$$

(36) denklemini (35) denklemine yerleştirerek ve ilk satırı alarak

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + 2\Delta\eta \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 + \Delta\eta\ \Psi_n \cdot \mathbf{y}_n}{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \Delta\eta^2\|\Psi_n\|^2}\Psi_n = \mathbf{y}_n + \sigma_n \Psi_n. \tag{37}$$

elde ederiz.

Şimdi (2) başlangıç koşullarıyla birlikte (1) denklemini çözmek için Grup Koruma Metodu'nu kullanmaya hazırız. (23) denklemine dayanarak:

$$\Psi(\eta, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} y_2(\eta) \\ -\frac{2}{\eta} y_2(\eta) - y_1^3(\eta) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(\eta) \\ y_2(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma(\eta) \\ \varsigma'(\eta) \end{pmatrix}.$$

elde ederiz.

Ele aldığımız örnekte $\Delta\eta = 10^{-7}$ eşitliğini sabitleyerek sonuçları elde ettik. (1) denkleminin yaklaşık çözümlerini Grup Koruma Metodu ve Çekirdek Üreten Metod ile elde edip bunu Tablo 6.1'de sunduk. Elde ettğimiz sonuçlar bu iki metodun sonuçlarının yakın ve güvenilir olduğunu göstermiştir. Sonuçlarmızı elde etmek için Maple ve Mathematica programlarından yararlandık. Çekirdek Üreten Metodu kullanırken

$$\eta_i = \frac{i}{m}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, m,$$

kullandık. Bu metodu etkili olarak kullanmak için 100 nokta seçtik. Bu noktaları arttırarak daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

Tablo 6.1: Çekirdek Üretme Metodu ve Grup Koruma Metodu ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

η	*RKM*	*GPS*
0.1	0.9983360948	0.998335829543602
0.5	0.9598395393	0.959839062543164
1.0	0.8550592570	0.855057541543122
2.0	0.5829639252	0.582850462212463
3.0	0.3592354020	0.359226444051538
4.0	0.2091578370	0.209281565659890
5.0	0.1106289100	0.110819798197543
6.0	0.0435212480	0.043737947433237
7.0	−0.004536310	−0.00431221951973
8.0	−0.040571182	−0.04034773735436
9.0	−0.068517970	−0.06829954400156
10.0	−0.090565560	−0.09035595601487

7. SONUÇ VE TARIŞMA

Tezimizde başlangıç değer problemlerini çözmek için çekirdek üreten metod ile grup koruma metodunu ele aldık. Sayısal hesaplamaların doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için bir örnek ele aldık. η'nın farklı değerleri için çekirdek üreten metod ve grup koruma metodunu kullanarak yaklaşık çözümler elde edttik. Tablo 6.1'de gösterildiği gibi araştırdığımız bu iki metod çok kesin ve güvenilir sonuçlar vermektedir. Ayrıca bu tezimizde çok kullanışlı üretilen çekirdek fonksiyonlar ve geometrik yaklaşımlar elde ettik.

8. KAYNAKLAR

Abbasbandy, S., and Hashemi, M. S. 2011. Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation. Engineering analysis with boundary elements, 35(8), 1003-1009.

Adem, A. R., Khalique, C. M., and Biswas, A. 2011. Solutions of Kadomtsev–Petviashvili equation with power law nonlinearity in 1+ 3 dimensions. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 34(5), 532-543.

Akgül, A., and Hashemi, M. S. 2017. Group preserving scheme and reproducing kernel method for the Poisson–Boltzmann equation for semiconductor devices. Nonlinear Dynamics, 88(4), 2817-2829.

Akgül, A., Hashemi, M. S., and Raheem, S. A. 2017. Constructing two powerful methods to solve the Thomas–Fermi equation. Nonlinear Dynamics, 87(2), 1435-1444.

Akgül, A. 2014. A new method for approximate solutions of fractional order boundary value problems. Neural, parallel & scientific computations, 22(1-2), 223-237.

Aronszajn, N. 1950. Theory of reproducing kernels. Transactions of the American mathematical society, 68(3), 337-404.

Baker, A. 2012. Matrix groups: An introduction to Lie group theory. Springer Science & Business Media.

Biswas, A., and Zerrad, E. 2007. Higher order Gabitov-Turitsyn equation for dispersion-managed solitons in multiple channels. International Journal of Mathematical Analysis, 1(12), 565-582.

Chen, Z., and Chen, Z. J. 2008. The exact solution of system of linear operator equations in reproducing kernel spaces. Applied Mathematics and Computation, 203(1), 56-61.

Cui, M., and Lin, Y. 2009. Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space. Nova Science Publishers, Inc..

Cui, M., and Du, H. 2006. Representation of exact solution for the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations. Applied Mathematics and Computation, 182(2), 1795-1802.

Du, J., and Cui, M. 2010. Solving the forced Duffing equation with integral boundary conditions in the reproducing kernel space. International Journal of Computer Mathematics, 87(9), 2088-2100.

Du, J., and Cui, M. 2010. Constructive proof of existence for a class of fourth-order nonlinear BVPs. Computers & mathematics with applications, 59(2), 903-911.

Ebadi, G., and Biswas, A. 2016. Application of G-expansion method to Kuramoto-Sivashinsky equation. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 32(3), 623-630.

Ebadi, G., and Biswas, A. 2011. The G method and topological soliton solution of the K (m, n) equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(6), 2377-2382.

Geng, F. Z. 2012. A numerical algorithm for nonlinear multi-point boundary value problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 236(7), 1789-1794.

Geng, F., and Cui, M. 2012. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. Applied Mathematics Letters, 25(5), 818-823.

Geng, F., Cui, M., and Zhang, B. 2010. Method for solving nonlinear initial value problems by combining homotopy perturbation and reproducing kernel Hilbert space methods. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11(2), 637-644.

Geng, F., and Cui, M. 2009. New method based on the HPM and RKHSM for solving forced Duffing equations with integral boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(2), 165-172.

Geng, F., and Cui, M. 2007. Solving a nonlinear system of second order boundary value problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 327(2), 1167-1181.

Hashemi, M. S., Akgül, A., Inc, M., Mustafa, I. S., and Baleanu, D. 2017. Solving the Lane–Emden Equation within a Reproducing Kernel Method and Group Preserving Scheme. Mathematics, 5(4), 77.

Hashemi, M. S., and Abbasbandy, S. 2017. A geometric approach for solving Troesch's problem. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 40(1), 97-116.

Hashemi, M. S., Inc, M., Karatas, E., and Akgül, A. 2017. A numerical investigation on burgers equation by mol-gps method. Journal of Advanced Physics, 6(3), 413-417.

Hashemi, M. S., Darvishi, E., and Baleanu, D. 2016. A geometric approach for solving the density-dependent diffusion Nagumo equation. Advances in Difference Equations, 2016(1), 89.

Hashemi, M. S. 2015. Constructing a new geometric numerical integration method to the nonlinear heat transfer equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 22(1-3), 990-1001.

Hashemi, M. S., Baleanu, D., and Parto-Haghighi, M. 2015. A lie group approach to solve the fractional poisson equation.

Hashemi, M. S., Nucci, M. C., and Abbasbandy, S. 2013. Group analysis of the modified generalized Vakhnenko equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(4), 867-877.

Jafari, H., Sooraki, A., Talebi, Y., and Biswas, A. 2012. The first integral method and traveling wave solutions to Davey-Stewartson equation. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 17(2), 182-193.

Jafari, H., Tajadodi, H., and Biswas, A. 2011. Homotopy analysis method for solving a couple of evolution equations and comparison with Adomian's decomposition method. Waves in Random and Complex Media, 21(4), 657-667.

Johnpillai, A. G., Kara, A. H., and Biswas, A. 2013. Symmetry reduction, exact group-invariant solutions and conservation laws of the Benjamin–Bona–Mahoney equation. Applied Mathematics Letters, 26(3), 376-381.

Jiang, W., and Lin, Y. 2011. Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(9), 3639-3645.

Jiang, W., and Cui, M. 2009. Constructive proof for existence of nonlinear two-point boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 215(5), 1937-1948.

Kaur, H., Mittal, R. C., and Mishra, V. 2013. Haar wavelet approximate solutions for the generalized Lane–Emden equations arising in astrophysics. Computer Physics Communications, 184(9), 2169-2177.

Khalique, C. M., and Biswas, A. 2009. A Lie symmetry approach to nonlinear Schrödinger's equation with non-Kerr law nonlinearity. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(12), 4033-4040.

Liu, C. S. 2004. Group preserving scheme for backward heat conduction problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 47(12-13), 2567-2576.

Liu, C. S. 2001. Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes. International Journal of Non-Linear Mechanics, 36(7), 1047-1068.

Li, F. and Cui, M., 2009 "A best approximation for the solution of one-dimensional variable-coecient Burgers' equation," Numerical Methods for Partial Dierential Equations, vol. 25, no. 6, pp. 1353–1365.

Lin, Y., and Cui, M. 2011. A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 34(1), 44-47.

Lu, X. and Cui, M. 2010. "An efficient computational method for linear fth-order two-point boundary value problems," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 5, pp. 1551–1558.

Lu, X. and Cui, M. 2008. "Analytic solutions to a class of nonlinear innite-delay-deferential equations," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 343, no. 2, pp. 724–732.

Milovic, D., and Biswas, A. 2009. Doubly periodic solution for nonlinear Schrödinger's equation with triple power law nonlinearity. International Journal of Nonlinear Science, 7(4), 420-425.

Morris, R. M., Kara, A. H., and Biswas, A. 2016. An analysis of the Zhiber-Shabat equation including Lie point symmetries and conservation laws. Collectanea Mathematica, 67(1), 55-62.

Mohammadi, M., and Mokhtari, R. 2011. Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space. Journal of Computational and

Applied Mathematics, 235(14), 4003-4014.

Nasab, A. K., Kılıçman, A., Atabakan, Z. P., and Leong, W. J. 2015. A numerical approach for solving singular nonlinear lane–emden type equations arising in astrophysics. New Astronomy, 34, 178-186.

Pandey, R. K., and Kumar, N. 2012. Solution of Lane–Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation. New Astronomy, 17(3), 303-308.

Pandey, R. K., Kumar, N., Bhardwaj, A., and Dutta, G. 2012. Solution of Lane–Emden type equations using Legendre operational matrix of differentiation. Applied Mathematics and Computation, 218(14), 7629-7637.

Pasten, E. O. 2014. A PDE approach to numerical fractional diffusion (Doctoral dissertation, University of Maryland, College Park).

Singh, O. P., Pandey, R. K., and Singh, V. K. 2009. An analytic algorithm of Lane–Emden type equations arising in astrophysics using modified homotopy analysis method. Computer Physics Communications, 180(7), 1116-1124.

Surhone, L. M., Tennoe, M. T., and Henssonow, S. F. 2010. Reproducing Kernel Hilbert Space, Betascript Publishing, Berlin, Germany.

Turkyilmazoglu, M. 2013. Effective computation of exact and analytic approximate solutions to singular nonlinear equations of Lane–Emden–Fowler type. Applied Mathematical Modelling, 37(14-15), 7539-7548.

Wang, W., Cui, M., and Han, B. 2008. A new method for solving a class of singular two-point boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 206(2), 721-727.

Wang, Y. L., and Chao, L. 2008. Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients. Applied Mathematics and Mechanics, 29(1), 129-137.

Wu, B. Y., and Li, X. Y. 2011. A new algorithm for a class of linear nonlocal boundary value problems based on the reproducing kernel method. Applied Mathematics Letters, 24(2), 156-159.

Wu, B., and Li, X. 2010. Iterative reproducing kernel method for nonlinear oscillator with discontinuity. Applied Mathematics Letters, 23(10), 1301-1304.

Yao, H., and Cui, M. 2007. A new algorithm for a class of singular boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 186(2), 1183-1191.

Zhou, Y., Lin, Y. and Cui, M. 2007. “An efficient computational method for second order boundary value problems of nonlinear deferential equations,” Applied Mathematics and Computation, vol. 194, no. 2, pp. 354–365.

CURRICULUM VITAE

PERSONEL INFORMATION

Name and Surname: Idrees Sedeeq MUSTAFA
Nationality: Iraq
Date and Place of Birth: 16.04.1980 and Irbil / Al Irbil
Phone: +0964 750 455 8119
E-mail : idrisaland@gmail.com

EDUCATION

Degree	Institution	Year of Graduation
High school:	Amadaiy kurdstan	2000
B.S	University of Salahadin	2004
M.Sc.	University of Siirt	2018

RESEARCH INTERESTS
Differential Equations, Initial Value Problems, Numerical Methods.

FOREIGN LANGUAGE

Kurdi, English