T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE α. DERECEDEN λ $-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS

Özlem KOYUN
(153114010)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

EYLÜL-2018
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Özlem KOYUN tarafından hazırlanan " Matris Dönüşümleri ve α. Dereceden λ −İstatistiksel Yakınsaklık " adlı tez çalışması 10/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Mikail ET	
Danışman Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL	
Üye Prof. Dr. Mahmut IŞIK	
Üye Doç. Dr. Ali AKGÜL	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Özlem KOYUN
SİİRT-2018

İÇİNDEKİLER

İçindekiler

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltma	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayıların kümesi
$\boldsymbol{U^+}$	: $u_n > 0$ olmak üzere $u = (u_n)$ dizilerinin kümesi
w	: Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
$\boldsymbol{c_0}$	: Sıfıra yakınsak dizi uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	: Banach uzayından Banach uzayına tanımlı sınırlı lineer operatör
S	: İstatistiksel yakınsak olan dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\lambda}$	: Sonsuza giden pozitif sayıların kesin artan bir dizisi
$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$	: E den F ye tanımlı $A = (a_{nm})$ bütün matris dönüşümlerinin kümesi
BK	: Banach Coordinatewise
$\overline{\boldsymbol{N_q}}$	: Ağırlıklı ortalamaların matrisi
$\boldsymbol{l_\infty}$	: Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
$\boldsymbol{e_k}$	: k. terimi 1 ve diğer terimleri sıfır olan dizi
$\boldsymbol{S_0}$	: Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\boldsymbol{S_\lambda}(\boldsymbol{A})$	: λ, A −istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\boldsymbol{S^\alpha}(\boldsymbol{A})$	: α. dereceden A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\boldsymbol{W_P}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{A})$	: α. dereceden kuvvetli (λ, A)- toplanabilir dizilerin uzayı
$\boldsymbol{S^\alpha}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{A})$	: α. dereceden lacunary (λ, A)-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE α. DERECEDEN λ −İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Özlem KOYUN

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

Yıl 2018, 32 Sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, konunun tarihi geçmişi verilmiştir. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, dizilerin bazı sınıfları arasında matris dönüşümleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bir dizinin λ, $\overline{N_q}$ −istatistiksel yakınsaklığı incelenmiş ve A nın $C(\mu)$ operatörü ve Cesáro operatörü olması durumunda elde edilen sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde, $0 < \alpha \leq 1$ için α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli (λ, A) −toplanabilirlik gibi yeni kavramlar tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Matris dönüşümleri, λ-istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden kuvvetli (λ, A) −toplanabilirlik.

ABSTRACT

MS THESIS

MATRIX TRANSFORMATIONS AND λ −STATISTICAL CONVERGENCE OF ORDER α

Özlem KOYUN

The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science
In Mathematics

Supervisior : Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

Year 2018, 32 Pages

This study is composed of five parts. In the first chapter, the history of the subject is given. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. In the third chapter, matrix transformations between some classes of sequences are examined. In the fourth chapter, $\lambda, \overline{N_q} -$ statistical convergence of a sequence is examined and obtained results in cases of when *A* is the operator $C(\mu)$ and the Cesáro operator are given. In the fifth chapter, new conceptes are defined as (λ, A) −statistical convergence order α and strong (λ, A) −summability of order α for $0 < \alpha \leq 1$ and the relationships between these concepts has been examined.

Keywords: Statistical convergence, Matrix transformations, λ −statistical convergence, (λ, A) −statistical convergence of order α, Strong (λ, A) −summability of order α.

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi ilk kez Zygmund (1979) kendi monografisinin Varşova'da basılan ilk baskısında verildi. Daha sonra İstatistiksel yakınsaklık kavramını Fast (1951), Buck (1953) ve Schoenberg (1959) gibi araştırmacılar tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlamış ve Connor (1988), Fridy (1985) ve Salat (1980) tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda istatistiksel yakınsaklık Kolk (1991), Çolak ve Altın (2013), Et (2014), Et ve ark. (2013), Işık (2004), Işık ve Et (2015), Fridy ve Orhan (1993), Fridy (1993), Fridy ve Orhan (1997), Savaş (2013), Şengül ve Et (2014) ve daha birçok araştırmacı tarafından çalışıldı. Derece dahil edilerek, bir dizinin $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verildi. Daha sonra bir dizinin $\alpha.$ dereceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliği Çolak (2010) tarafından tanımlandı ve $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklık ile birlikte çalışıldı. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan λ-istatistiksel yakınsaklık Çolak (2011), $\alpha.$ dereceden λ-istatistiksel yakınsaklık Çolak ve Bektaş (2011) tarafından çalışıldı.

Bu çalışmada $l_\infty(p)$ dizi uzayının Köthe-Toeplitz duali verilip X ve Y iki dizi cümlesi için matris sınıfları tanımlanmış, bazı matris sınıflarıyla ilgili sonuçlar verilmiştir. $\lambda_1 = 1$ ve her n için $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olmak üzere $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ aralığında tanımlı ve λ, sonsuza giden pozitif sayıların kesin artan bir dizisi, A da sonsuz bir matris olmak üzere bir dizinin λ, $\overline{N_q}$ −istatistiksel yakınsaklığı için gerekli şartlar verilmiştir. $A, C(\mu)$ operatör ve Cesáro operatör olması durumunda çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ için $\alpha.$dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha.$dereceden kuvvetli (λ, A) −toplanabilirlik tanımlanmış ve bu uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

X $\neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya komplex sayıların bir cismi olmak üzere

$+: X \times X \to X$

$\cdot : K \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir θ vardır,

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x)$ vardır,

L5) $1. x = x$,

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (Maddox, 1970).

Tanım 2.2.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$

$x \to \|x\|$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in K$,

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir. Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa $(X, \|.\|)$ ikilisine reel normlu uzay denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to$

x şeklinde yazılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall\, m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5.

$(X, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.6.

$(X, \|.\|)$ normlu uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer Fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.1}$$

normu ile normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.7.

Reel veya karmaşık terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere, w

$$x + y = (x_k + y_k)$$
$$\alpha x = (\alpha x_k) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir (Goes ve Goes, 1970).

Tanım 2.8.

Keyfi dizilerin bir cümlesi X olsun. Sırasıyla adi ve mutlak Köthe-Toeplitz dualleri

$$X^+ = \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k \; yakınsak, her\; x \in X\; için \right\} \tag{2.3}$$

ve

$$X^{|+|} = \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \;\; her\ x \in X\ için \right\} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır (Malkowsky, 1989).

Tanım 2.9.

(T, τ) lineer topolojiye sahip bir uzay olsun. Her bir $i \geq 1$ için $P_i(x) = (x_i)$ olarak tanımlanan $P_i: T \to \mathcal{F}$ dönüşümleri sürekli ise T dizi uzayına K −uzayı denir. T bir K −uzayı ve $x \in T$ için

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to x \quad (\tau\ topolojisine\ göre\ ) \tag{2.5}$$

ise $x \in T$, AK özelliğine sahiptir denir. Eğer her bir $x \in T$, AK özelliğine sahip ise T dizi uzayına AK −uzayı denir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Tanım 2.10.

X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve $\tau_k: X \to \mathbb{C}$, $\tau_k(x) = x_k$, $(k = 1,2,3, \ldots)$ dönüşümleri sürekli ise X e bir BK (Banach Coordinatewise)−uzayı denir (Goes ve Goes,1970).

Tanım 2.11.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin A alt cümlesinin doğal yoğunluğu, $|\{k \leq n: k \in A\}|$ ifadesi n den büyük olmayan $A \subseteq \mathbb{N}$ cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_{n} \tfrac{1}{n} |\{k \leq \ n : \ k \in \ A\}| \tag{2.6}$$

ile tanımlanır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve $A^c = \mathbb{N} - A$ olmak üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır (Fridy, 1993).

Bir cümlenin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir. (a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{a_n} \tag{2.7}$$

dir (Niven ve ark., 1991).

$x = (x_k)$, doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğine sağlayacak şekilde olan bir dizi ise, x_k *"hemen hemen her* k*"* için P özelliğini sağlar deriz, ve bunu kısaca *"h.h.k"* şeklinde yazarız.

Tanım 2.12.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani *h.h.k* için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum da $S - \lim x_k = L$ yazılır. Eğer $L = 0$ ise yani, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisidir denir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerinin cümlesi S_0 ile gösterilir (Fridy, 1985).

Bilinen anlamda yakınsak olan diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 2.13.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve *h.h.k* için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

Tanım 2.14.

A, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

i) Her $x, y \in A$ için $xy \in A$

ii) Her $x, y, z \in A$ için $(xy)z = x(yz)$ (Birleşme özelliği)

iii) Her $x, y, z \in A$ için $x(y + z) = xy + xz$ (Dağılma özelliği)

iv) Her $x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in F$ için $\alpha\beta(xy) = (\alpha x)(\beta y)$

özellikleri sağlanıyorsa A ya cebir denir. Eğer A cebiri bir Banach uzayı ve

$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ şartını sağlıyorsa A ya Banach cebiri veya B −cebiri denir (Yosida, 1980).

3. DİZİLERİN BAZI SINIFLARI ARASINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $l_\infty(p)$ dizi uzayının Köthe-Toeplitz duali verilip X ve Y iki dizi cümlesi için matris sınıfları tanımlanmıştır. Bazı matris sınıflarıyla ilgili sonuçlar verilmiştir.

X ve Y dizilerin cümlesi olsun. Her bir $x = (x_k) \in X$ ve $Ax = (A_n x) \in Y$ için

$A_n x = \sum_k a_{nk} x_k$ olmak üzere kompleks sayıların $A = (a_{nk})$ matris sınıflarını (X, Y) ile gösterelim. $\sum N^{-1/p_k} < \infty$ şartını sağlayan $N = N(p) > 1$ sayısı vardır ve bu $p = (p_k)$ ların cümlesini Q ile gösterelim.

$|z| < 1$ olmak üzere $\sum A_n z^n$ serisi z karmaşık sayısına yakınsasın. s kümesi, $\sum A_n z^n$ serisi z karmaşık sayısına yakınsayacak şekilde olan tüm $A = (A_n)$ karmaşık dizilerin uzayını göstersin (Tripathy, 1995).

Bu çalışma boyunca w, l_∞, c_0, S_0 sırasıyla bütün dizi uzaylarını, sınırlı dizi uzayını, sıfıra yakınsak dizi uzayını ve istatistiksel sıfır dizilerinin uzayını göstermektedir. e_k, k. terimi 1 ve diğer terimleri sıfır olan diziyi göstermektedir.

$p = (p_k)$ kesin pozitif sayıların bir dizisi için

$$l_\infty(p) = \left\{(x_k) \in w : \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty\right\}$$

dizi uzayının Köthe-Toeplitz duali

$$M_\infty(p) = \bigcap_{N>1} \left\{(x_k) \in w : \sum_k |x_k| N^{1/p_k} < \infty\right\}$$

dur.

Lemma 3.1.

$S \cap l_\infty$, l_∞ un kapalı lineer alt uzayıdır (Salat,1980).

Lemma 3.2.

$sup_{n,k}|a_{nk}| < \infty$ olsun. $\sum_k a_{nk}$, n ye göre düzgün yakınsak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$x_n = \sum_k a_{nk}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_k = S - \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}$ limiti mevcut ise $S - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ vardır ve bu limit $\sum a_k$ ya eşittir (Tripathy, 1995).

İspat.

Açıktır ki $k \in \mathbb{N}$ için $x = \{x_n\}$, $a^{(k)} = \{a_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$, l_∞ un elemanıdır ve supremum normuna göre $\sum_{k=1}^{m} a^{(k)} \to x$ olup Lemma 3.1 den $x \in S$ dir. $\left\{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m}} a^{(\mathrm{k})}\right\}_{\mathrm{m}\in\mathbb{N}}$ dizisi $S \cap l_\infty$ da Cauchy dizisi olduğundan ve her bir $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{m} a^{(k)}$ toplamı, $\sum_{k=1}^{m} a_k$ toplamına istatistiksel yakınsak olduğundan Salat (1980) ın Teorem 2.1 de kullandığı ispat metodu kullanılarak $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_k a_k$ limitinin varlığı gösterilebilir, buradan $S - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum_k a_k$ dır. Bu lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.3.

Her k için $p_k > 0$ olsun. Bu durumda $A \in (M_\infty(p), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul $B > 1$ bir tam sayı olmak üzere

$$D = \sup_{n,k} |a_{nk}|\, B^{-1/p_k} < \infty \qquad (3.1)$$

olmasıdır (Pehlivan, 1991).

Lemma 3.4.

$p = (p_k) \in$ Q olsun. $A \in (M_\infty(p), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$C = \sup_{n,k} |a_{nk}|^{p_k} < \infty \qquad (3.2)$$

olmasıdır (Pehlivan, 1991).

Lemma 3.5.

$A \in (s, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul $0 < r < 1$ olacak şekilde r sayısı ve t sayısı vardır öyle ki $n, k = 1,2. ..$ için

$$|a_{nk}| \le t r^k \qquad (3.3)$$

dır (Tonne, 1972).

Teorem 3.6.

Her k için $p_k > 0$ olsun. $A \in (M_\infty(p), S \cap l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1) denkleminin ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k = S - \lim_{n\to\infty} a_{nk} \qquad (3.4)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Tripathy, 1995).

İspat.

$(M_\infty(p), S \cap l_\infty) \subset (M_\infty(p), l_\infty)$ olduğundan Lemma 3.3 ten (3.1) denkleminin gerekliliği sağlanır. (e_k) dizisini düşünürsek (3.4) denkleminin gerekliliği de sağlanır. Yeterlilik için Lemma 3.1 ve (3.4) denkleminden $m \to \infty$ için $\sum_{k\geq m} a_{nk}x_k \to 0$ yakınsaklığının n ye göre düzgün olduğunu göstermek yeterlidir.

$x = (x_k) \in M_\infty(p)$ olduğundan $m \to \infty$ için

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_{nk}\, x_k\right| \leq \sup_{n,k}|a_{nk}|\, B^{-1/p_k} \sum_{k\geq m}|x_k|\, B^{1/p_k} \to 0, n \text{ ye göre düzgündür.}$$

Lemma 3.2 den teorem ispatlanır.

Sonuç 3.7.

$A \in (M_\infty(p), S_0 \cap l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $a_k = 0$ ile (3.1) ve (3.4) denklemlerinin sağlanmasıdır (Tripathy, 1995).

Şimdi Lemma 3.4 ve Teorem 3.6 dan elde edilen aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.8.

$p = (p_k) \in$ Q olsun. $A \in (M_\infty(p), S \cap l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.2) ve (3.4) denklemlerinin sağlanmasıdır (Tripathy, 1995).

Teorem 3.9.

$A \in (s, S \cap l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.3) ve (3.4) denklemlerinin sağlanmasıdır (Tripathy, 1995).

İspat.

$(s, S \cap l_\infty) \subset (s, l_\infty)$ olduğundan Lemma 3.5 ten (3.3) denkleminin gerekliliği sağlanır. (e_k) dizisini düşünürsek (3.4) denkleminin gerekliliği de sağlanır. Yeterlilik için Lemma 3.1 den ve (3.4) denkleminden $m \to \infty$ için $\sum_{k=m}^{\infty} a_{nk}x_k \to 0$ yakınsaklığının n ye göre düzgün olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (x_k) \in s$ ve $0 < r < 1$ için $\sum x_k\, tr^k = t\sum x_k\, r^k$ yakınsaktır.

Bu da $\sum_{k=m}^{\infty} a_{nk}x_k \to 0$ ın n ye göre düzgün, (3.3) denkleminden $\sum a_{nk}x_k$ nın mutlak yakınsak olması demektir.

Sonuç 3.10.

$A \in (s, S_0 \cap l_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul $a_k = 0$ şartı ile (3.3) ve (3.4) denklemlerinin sağlanmasıdır (Tripathy, 1995).

4. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir dizinin λ, $\overline{N_q}$ −istatistiksel yakınsaklığı için şartlar verilmiştir. $A, C(\mu)$ operatörü ve Cesáro operatörü olması durumunda çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Her n için $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olmak üzere $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ aralığında tanımlı ve sonsuza giden pozitif sayıların kesin artan bir dizisi λ olsun, A da sonsuz bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$ ise (x_k) dizisi L ye λ, A −istatistiksel yakınsaktır. $(\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ Banach cebiri kullanılarak λ dizisinin A^{-1} −istatistiksel yakınsak olması için yeterli şartlar elde edilecektir (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

$A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ sonsuz matrisi verilsin. $n \geq 1$ ve $X = (x_n)_{n\geq 1}$ dizisi için

$$A_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \tag{4.1}$$

şeklinde A_n operatörlerini tanımlayalım. Böylece $B = (b_n)_{n\geq 1}$ kolon matrisi ve X bilinmeyen olmak üzere

$$A_n(X) = b_n, \quad n = 1,2, \dots, \tag{4.2}$$

sonsuz lineer sistemi çalışmalarımızda bize yol gösterecektir.

(4.2) sistemi $AX = \left(A_n(X)\right)_{n\geq 1}$ olmak üzere $AX = B$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda A yı bir dizi uzayından başka bir dizi uzayına tanımlı bir operatör olarak düşünebiliriz.

E ve F, w nin alt kümeleri olmak üzere E den F ye tanımlı $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ matris dönüşümlerinin cümlesini (E, F) ile göstereceğiz.

Her $X \in E$ için $P_n X = x_n$ in her bir iz düşümü sürekli ise kompleks dizilerin E Banach uzayı $\|\ \|_E$ normu ile bir BK uzayıdır. Her $B = (b_n)_{n\geq 1} \in E$ için

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e_m, (e_n = (0, \dots, 1, \dots))$$

yani

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{\infty} b_m e_m \right\|_E \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

oluyorsa BK uzayı E, AK özelliğine sahiptir denir. Verilen $F \subset w$ dizi uzayı ve bir A matrisi için $F(A)$ kümesini $F(A) = \{X \in s : AX \in F\}$ olarak tanımlayalım.

Her n için $\lambda_n \neq 0$ ile verilen bir λ dizisi için $C(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ operatörlerini sırasıyla aşağıdaki matrisler ile temsil edeceğiz.

$$c_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n}, & m \le n \; ise \\ 0\,, & aksi \; durumda \end{cases}$$

$$c'_{nm} = \begin{cases} \lambda_n\,, & m = n \quad ise \\ -\lambda_{n-1}\,, & m = n-1 \; ve \; n \ge 2 \;\; ise \\ 0, & aksi \; durumda \end{cases}$$

$e = (1, 1, \dots)$ gösterimini kullanarak $\Delta = \Delta(e)$ ve $\sum = C(e)$ şeklinde ifade edebiliriz.

4.1. Banach Cebiri $(\boldsymbol{\omega_0}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\omega_0}(\boldsymbol{\lambda}))$

Her n için $u_n > 0$ olmak üzere tüm u dizilerinin kümesini U^+ ile gösterelim. $\lambda \in U^+$ için $\omega_0(\lambda)$ ve $\omega_\infty(\lambda)$ kümeleri,

$$\omega_0(\lambda) \; = \{X = (x_n)_{n\ge1} \in s : C(\lambda)\,|X| \in c_0\,\}$$

yani

$$\omega_0(\lambda) = \left\{X = (x_n)_{n\ge1} \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0\right\}$$

ve

$$\omega_\infty(\lambda) = \{X = (x_n)_{n\ge1} \in s : C(\lambda)\,|X| \in \; l_\infty\,\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Her n için $\lambda_n = n$ olduğu zaman $\omega_0(\lambda) = \omega_0$ ve $\omega_\infty(\lambda) = \omega_\infty$ dır. Hatırlatalım ki dizilerin Banach uzayı $E, \mathcal{L}: E \to E$ sınırlı lineer operatörlerin $B(E)$ cümlesi ile ilişkilendirilebilir. Aynı zamanda $B(E)\; uzayı \; \|\mathcal{L}\| = \sup_{X\neq0}(\|\mathcal{L}(X)\|_E / \|X\|_E)$ normu ile Banach cebiridir. Özel olarak E $=\omega_0(\lambda)$ alırsak

$$\|X\|_{\omega_\infty(\lambda)} = \; \|C(\lambda)\,|X|\|_{\,l_\infty}$$

$$= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) \tag{4.1.1}$$

elde ederiz (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

Lemma 4.1.1.

λ, sonsuza giden reel sayıların kesin artan bir dizisi olsun.

$B(\omega_0(\lambda)) = (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ ve $\|A\|_{(\omega_0(\lambda),\omega_0(\lambda))} = \sup_{X\neq 0}\left(\frac{\|AX\|_{\omega_\infty(\lambda)}}{\|X\|_{\omega_\infty(\lambda)}}\right)$ dır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

İspat.

Malkowsky (1995) tarafından λ sonsuza yakınsayan reel sayıların kesin artan bir dizisi ise $\omega_0(\lambda)$ ve $\omega_\infty(\lambda)$, BK-uzayları olduğu ve $\omega_0(\lambda)$, (4.1.1) de tanımlanan $\|X\|_{\omega_\infty(\lambda)}$ normuna göre AK özelliğine sahip olduğu kanıtlandı.

$\omega_0(\lambda)$ Banach uzayı olduğundan bütün sınırlı $\mathcal{L}: \omega_0(\lambda) \to \omega_0(\lambda)$ operatörlerin $B\big(\omega_0(\lambda)\big)$ kümesi $\|\mathcal{L}\|_{(\omega_0(\lambda),\omega_0(\lambda))} = \sup_{X\neq 0}\left(\frac{\|\mathcal{L}(X)\|_{\omega_\infty(\lambda)}}{\|X\|_{\omega_\infty(\lambda)}}\right)$ normu ile Banach cebiridir.

Ayrıca BK uzayları arasındaki bir matris dönüşümü süreklidir. Bu $(\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda)) \subset B(\omega_0(\lambda))$ olması demektir. E ve F, BK uzayları ve E, AK özelliğine sahip ise $(E, F) \subset B(E, F)$ dir. $\omega_0(\lambda)$, AK özelliğine sahip bir BK uzayı olup $B(\omega_0(\lambda)) \subset (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ dır. Böylece $B(\omega_0(\lambda)) = (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ olur.

Bundan sonra vereceğimiz sonuçlarda $\lambda \in U^+$ dizisinin sonsuza giden kesin artan bir dizi olduğunu varsayacağız.

4.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Sonsuz Matrisin Tersi

4.2.1. λ, A^{-1} −İstatistiksel Yakınsama

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilmiş ve λ, A −istatistiksel yakınsaklık ve $(\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ Banach cebirinde A nın tersini kullanılarak λ, A^{-1} −istatistiksel yakınsak bir diziye sahip olmak için gerekli şartlar elde edilmiştir. Bu şartlar $\lambda, \overline{N_q}$ ve $\lambda, C(\mu)$ − istatistiksel yakınsaklığa uygulanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Steinhaus (1951) tarafından verilmiştir. Fast (1951), Fridy (1985), Fridy ve Orhan (1993), Fridy ve Orhan (1993) ve Fridy ve Orhan (1997) gibi birçok yazar tarafından da çalışılmıştır. $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ dizisini $n = 1,2,\ldots$ için

$$\lambda_1 = 1 \text{ ve } \lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1 \qquad (4.2.1.1)$$

şartlarını sağlayan bir dizi olarak alacağız. $n = 1,2,\ldots$ için $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve $X = (x_n)_{n\geq 1}$ olmak üzere λ dizisi için genelleştirilmiş Vallee-Poussin ortalaması

$t_n(X) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} x_k$ şeklinde tanımlanır.

λ, (4.2.1.1) i sağlasın $L \in \mathbb{C}$ ve $A \in (E, F)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için $I_\varepsilon(A) = \{k \in I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}$ diyelim. (burada $k \geq 1$ için $[AX]_k = A_k(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{km}x_m$ serisinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz).

Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |I_\varepsilon(A)| = 0$ ise $X = (x_n)_{n\geq 1}$ dizisi L ye λ, A −istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $x_k \to L(S_\lambda(A))$ olarak gösterilir. Her n için $\lambda_n = n$ ise $x_k \to L(S(A))$ olur ve $A = I$ için $x_k \to L(S(I))$ olur ki bu da $x_k \to L(S)$ anlamına gelir. Aşağıda $e \in s(A)$ olduğunu kabul edeceğiz ve $LAe = (l_n)_{n\geq 1}$ alacağız.

Her $n \geq 1$ için $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ serisi yakınsak ve $L \in \mathbb{C}$ için $l_n = L\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ dır.

Her n için $\delta_{nn} = 1$ ve $m \neq n$ ise $\delta_{nm} = 0$ olması durumunda diagonal matris $(\alpha_n\delta_{nm})_{n,m\geq 1}$ için $D_\alpha, \alpha \in U^+$ yazarız. w nin E alt kümesi için $D_\alpha E = \left\{X = (x_n)_{n\geq 1} \in s : \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)_{n\geq 1} \in E\right\}$ kümesini tanımlayalım. Buna göre $D_\alpha\omega_0(\lambda) = \left\{X \in s : \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\alpha_k}\right) < \infty\right\}$ yazabiliriz (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

Teorem 4.2.1.1.

$\lambda \in U^+$ olsun ve λ, (4.2.1.1.) şartını sağlasın. $D_\alpha A \in (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ ve

$$\|I - D_\alpha A\|_{(\omega_0(\lambda),\omega_0(\lambda))} < 1 \qquad (4.2.1.2)$$

olacak şekilde $\alpha \in U^+$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

(i) A nın tersi var ve $A^{-1} \in \left(D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda)\right)$,

(ii) $A^{-1}(Ae) = e$ ise verilen $L \in \mathbb{C}$ ve her X için $x_k \to L(S_\lambda(A^{-1}))$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l_k|\, \alpha_k = 0$$

dır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

İspat.

(i) $\omega_0(\lambda)$, AK özelliğine sahip BK uzayı olduğundan $B(\omega_0(\lambda)) = (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ olur. $D_\alpha A \in (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ ve (4.2.1.2) koşullarından $(D_\alpha A)^{-1} = A^{-1} D_{1/\alpha} \in (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ ve

$$A^{-1} \in \left(D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda)\right) \qquad (4.2.1.3)$$

elde edilir.

(ii) Her $X \in LAe + D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda)$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |[A^{-1}X]_k - L| = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$A^{-1}(Ae) = e$ olduğundan

$$A^{-1}(X - ALe) = A^{-1}X - A^{-1}(ALe) = A^{-1}X - Le \qquad (4.2.1.4)$$

elde edilir. Böylece $C(\lambda)|A^{-1}X - Le| = C(\lambda)|A^{-1}(X - ALe)|$ dir. Her $X \in LAe + D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda)$ için $Y = X - LAe \in D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda)$ elde edilir ve (4.2.1.3) den $A^{-1}Y \in \omega_0(\lambda)$ dır. Yani her $X \in LAe + D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda)$ için $C(\lambda)|A^{-1}(X - ALe)| \in c_0$ dır. (4.2.1.4) kullanılarak ve $I_n \subset [1, n]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
[C(\lambda)|A^{-1}(X - ALe)|]_n &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |[A^{-1}(X - ALe)]_k| \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |[A^{-1}X]_k - L| \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_\varepsilon(A^{-1})} |[A^{-1}X]_k - L| \\
&\geq \frac{\varepsilon}{\lambda_n} |I_\varepsilon(A^{-1})|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece her $X \in LAe + D_{1/\alpha}\omega_0(\lambda)$ için

$\lim_{n\to\infty} \left(1/\lambda_n\right) \sum_{k=1}^{n} |x_k - l_k|\alpha_k = 0$ olup $x_k \to L(S_\lambda(A))$ olur.

4.2.2. Ağırlıklı Ortalamanın Matrise ve C(μ) Matrisine Uygulanması

Bu bölümde önceki sonuçlar kullanılmıştır. $q \in U^+$ için $\overline{N_q}$ ağırlıklı ortalamaların matrisi ve $m \leq n$ için $[\overline{N_q}]_{nm} = q_m/Q_n$ olmak üzere $Q_n = \sum_{m=1}^{n} q_m$ ve aksi halde $[\overline{N_q}]_{nm} = 0$ olması durumunda $x_k \to L\left(S_\lambda\left(\overline{N_q}\right)\right)$ yi elde etmek için bazı şartlar verilmiştir. $A, C(\mu)$ operatörü ve Cesáro operatörü olması durumunda benzer problemler araştırılmıştır.

4.2.2.1. λ, $\overline{N_q}$ −İstatistiksel Yakınsaklık

$\Phi \subset s$ alt vektör uzayı verilsin. $L \in \mathbb{C}$ ve $Y \in \Phi$ için $X = Le + Y$ şeklindeki bütün dizilerin cümlesini $L + \Phi$ ile göstereceğiz.

Sonuç 4.2.2.1.1.

λ, (4.2.1.1) şartını sağlasın. Farz edelim ki

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} < 1 \qquad (4.2.2.1.1)$$

olsun.

Bu taktirde $X \in L + D_{Q/q}\,\omega_0(\lambda)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{k \in I_n : \left|\overline{N_q} x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$ dır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

İspat.

A basit bir kolon matrisi olmak üzere Teorem 4.2.1.1 i uygulayacağız. İlk olarak $N' = \overline{N}_q^{\ -1} = \left(D_{1/Q} \sum D_q\right)^{-1} = D_{1/q} \Delta D_Q$ alalım. N'_{nm}, $m = n$ için $N'_{nn} = \frac{Q_n}{q_n}$, $N'_{n,n-1} = -\frac{Q_{n-1}}{q_n}$ ve $m \neq n$ için $N'_{nm} = 0$ olarak tanımlansın.

Şimdi $j \geq 1$ tam sayıları için $N'^{(j)} = \begin{pmatrix} [N^{(j)}]^{-1} & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ olsun. Burada j, N' nün ilk satırlarının ve kolonlarının elemanları olup $N^{(j)}$ sonlu matristir. $N^{(j)}$ üçgensel olduğundan bu matrisin tersi vardır.

$$a_{nm} = \begin{cases} 1\,, & m = n \leq j \quad için \\ \dfrac{Q_n}{q_n}\,, & m = n \geq j+1\ için \\ -\dfrac{Q_{n-1}}{q_n}\,, & m = n-1\ ve\ n \geq j+1\ için \\ 0\,, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

için $N'^{(j)}N' = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ olur. Verilen $X \in \omega_0(\lambda)$ için $\rho_n = \frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ ve $M = I - D_{(1/a_{nn})_n} N'^{(j)} N'$ alınarak tüm $n \leq j$ için $M_n(X) = 0$ ve $n \geq j+1$ için $M_n(X) = \rho_n x_{n-1}$ elde edilir.

Şimdi $K_j = \sup_{n\geq j+1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)\sup_{k\geq j+1}\rho_{k-1}$ diyelim ve gösterelim ki (4.2.2.1.1) sağlanıyorken yeterince büyük j için $K_j < 1$ dir. Bunun için $\varepsilon > 0$ olsun ve (4.2.2.1.1) den $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\rho_n = l < 1$ olur.

Bu durumda $\sup_{n\geq j_1}\rho_n < l+\varepsilon$ olacak şekilde j_1 tam sayısı vardır. Kolay bir şekilde gösterilebilir ki λ, (4.2.1.1) i sağladığından ve sonsuza giden pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi olduğundan $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = 1$ dir. $\sup_{n\geq j_2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) < 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir j_2 tam sayısı da vardır. $l<1$ olduğundan yeterince küçük ε alınarak $j = sup(j_1, j_2)$ için

$K_j \leq (l+\varepsilon)(1+\varepsilon) = l+\varepsilon(l+1+\varepsilon) < 1$ olur. Böylece

$$\sigma_j = \sup_{n\geq j+1}\left[\left(\sup_{j\leq k\leq n}\rho_k\right)\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \leq K_j < 1 \qquad (4.2.2.1.2)$$

olup

$$\begin{aligned}\|MX\|_{\omega_\infty(\lambda)} &= \sup_{n\geq j+1}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=j+1}^{n}\rho_{k-1}|x_{k-1}|\right)\\ &\leq \sigma_j \sup_{n\geq j}\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}\sum_{k=j}^{n-1}|x_k|\right)\\ &\leq K_j\|X\|_{\omega_\infty(\lambda)}\end{aligned}$$

olur ve (4.2.2.1.2) kullanılarak $\|M\|_{(\omega_0(\lambda),\omega_0(\lambda))} \leq K_j < 1$ elde edilir. $n\to\infty$ için $\frac{Q_{n-1}}{Q_n} = 1 - \frac{q_n}{Q_n} = O(1)$ olduğundan $D_{(1/a_{nn})_n}N'^{(j)}N' \in (\omega_0(\lambda), \omega_0(\lambda))$ olduğu sonucunu çıkarırız.

$n \geq j+1$ için $l_n = L$, $n\leq j$ için $l_n = 0$ ve $N'^{(j)}N'\left(\left(N'^{(j)}N'\right)^{-1}e\right) = e$ alalım. Buradan $X \in L + D_{(a_{nn})_n}\omega_0(\lambda)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k - l_k|}{a_{kk}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{j}|x_k| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=j+1}^{n}|x_k - L|\frac{q_k}{Q_k} = 0$$

olur.

$D_{(a_{nn})_n}\omega_0(\lambda) = D_{Q/q}\omega_0(\lambda)$ ve Teorem 4.2.1.1 den $A = N'^{(j)}N'$ ve $\alpha = \left({}^{1}/{a_{nn}}\right)_{n\geq 1}$ dir.

Buradan $x_k \to L\left(S_\lambda\left(\overline{N_q}\left(N'^{(j)}\right)^{-1}\right)\right)$ olduğu kolayca görülür. Son olarak her $n \geq j+1$ için $\left[\left(N'^{(j)}\right)^{-1}X\right]_n = x_n$ olduğundan $x_k \to L\left(S_\lambda\left(\overline{N_q}\right)\right)$ elde edilir.

Her n için $\lambda_n = n$ dizisi (4.2.1.1) i sağlar ve üstten sınırlıdır.

Örnek 4.2.2.1.2.

$\lambda = (n)_{n\geq 1}$ ve $q = (2^n)_{n\geq 1}$ ise $Q_n = 2^{n+1} - 2$ olur. Her k için $1 \leq Q_k/q_k = 2 - 1/2^{k-1} \leq 2$ olduğundan her X için

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \frac{|x_k|}{Q_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

olup, buradan $D_{Q/q}\,\omega_0 = \omega_0$ dır.

Böylece her $X \in L + \omega_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{1}{2^k - 1}\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}x_i - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olur. Özel olarak verilen $\alpha > 0$ ve her i için $x_i = L + 1/i^\alpha$ dır. Buradan $n \to \infty$ için $u_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha} \to 0$ elde edilir. Aşikardır ki $n \to \infty$ için $u_n(1) \to 0$ ve $\alpha \neq 1$ için

$$u_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{n}\left(1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)\right]$$

dir.

Bu bize her bir $\alpha > 0$ için $u_n(\alpha) = o(1)(n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Buradan da $X \in L + \omega_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{1}{2^k - 1}\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{i^\alpha} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

elde edilir.

4.2.3. λ, C(μ) −İstatistiksel Yakınsaklık Uygulamaları

$\rho_n = \mu_{n-1}/\mu_n$ olmak üzere N' ile $\Delta(\mu) = \Delta D_\mu$ yer değiştirerek ve Sonuç 4.2.2.1.1 in ispatındaki yol izlenerek aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz.

Sonuç 4.2.3.1.

$\mu, \lambda \epsilon U^+$ve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)} \tag{4.2.3.1}$$

olduğunu varsayalım. $D_{1/\mu}\Delta(\mu)$, $\omega_0(\lambda)$ dan kendisine birebir-örten dönüşüm ve $\omega_0(\lambda)\left(D_{1/\mu}\Delta(\mu)\right) = \omega_0(\lambda)$ dır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

Aşağıdaki sonuçlarda $C(\mu)x_k = [\mathrm{C}(\mu)\mathrm{X}]_k$ ve $\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_{n-1}/x_n) < 1$ olacak şekilde $X \in U^+$ dizilerinin kümesi Γ yı kullanacağız.

Önerme 4.2.3.2.

λ, (4.2.1.1) deki şartları sağlasın ve $\mu \in \Gamma$ olsun. Verilen $L \in \mathbb{C}$ ve her bir X için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{\mu_k} - L\left(1 - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}\right) \right| = 0 \tag{4.2.3.2}$$

ise $x_k \to L\left(S_\lambda\left(C(\mu)\right)\right)$ olur. Yani her $\varepsilon > 0$ için

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |C(\mu)x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$ dır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

İspat.

Her X için $C(\mu)X - Le \in \omega_0(\lambda)$ olduğunu göstermeliyiz. Kolay bir şekilde görebiliriz ki $C(\mu)X - Le = C(\mu)(X - L\Delta(\mu)e)$ dir.

$C(\mu) = D_{1/\mu}\Sigma$ olduğundan $C(\mu)X - Le \in \omega_0(\lambda)$ olup ancak ve ancak

$\Sigma(X - L\Delta(\mu)e) \in D_\mu \omega_0(\lambda)$ dır.

$\mu \in \Gamma$ ve λ artan olduğundan $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right) < 1 \leq \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)}$ olur ve (4.2.3.1) denkleminin sağlandığı aşikardır. Sonuç 4.2.3.1 den $D_{1/\mu}\Delta D_\mu$ operatörü $\omega_0(\lambda)$ dan kendisine birebir ve örtendir. Böylece $\Sigma = \Delta^{-1} \in \left(D_\mu\omega_0(\lambda), D_\mu\omega_0(\lambda)\right)$ dır.

Her X için $X - L\Delta(\mu)e \in D_\mu\omega_0(\lambda)$ sonucu çıkar ve $\sum(X - L\Delta(\mu)e) \in D_\mu\omega_0(\lambda)$ elde edilir. Her $n \geq 1$ ve $\mu_0 = 0$ için $L[\Delta(\mu)e]_n = L(\mu_n - \mu_{n-1})$ olur.

Lemma 4.2.3.3.

$A \in (l_1, \omega_0)$ olması için gerek ve yeter koşul her $k \geq 1$ için $\sup_{m,k}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}|a_{nk}|\right) < \infty$ ve $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}a_{nk}\right) = 0$ olmasıdır (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

Önerme 4.2.3.4.

$\mu \in U^+$ ve farz edelim ki

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\mu_n}\right) = 0 \tag{4.2.3.3}$$

olsun.

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - L(\mu_n - \mu_{n-1})| < \infty$ olmak üzere her X için $x_k \to L\left(S\big(C(\mu)\big)\right)$ dür (de Malafosse ve Rakocevic, 2007).

İspat.

$x_k \to L\left(S\big(C(\mu)\big)\right)$ ile demek istenilen şey $C_1 = C((n)_{n\geq 1})$ olduğundan

$$C_1|C(\mu)X - Le| \in c_0 \tag{4.2.3.4}$$

dır. Bu $C(\mu)X - Le \in \omega_0$ demektir.

$C(\mu)X - Le = C(\mu)(X - L\Delta(\mu)e)$ olduğundan (4.2.3.4.) ten $C(\mu)(X - L\Delta(\mu)e) \in \omega_0$ a denk olduğu sonucu elde edilir. Lemma 4.2.3.3 ve (4.2.3.3) ten $C(\mu) \in (l_1, \omega_0)$ elde edilir. Böylece her X için $X - L\Delta(\mu)e = \big(x_n - L(\mu_n - \mu_{n-1})\big)_{n\geq 1} \in l_1$ olup $C(\mu)(X - L\Delta(\mu)e) \in \omega_0$ elde edilir.

Bu yolla gösterilebilir ki verilen $\chi > 0$ için $x_k \to L\left(S\big(C((n^\chi)_{n\geq 1})\big)\right)$ elde edilir, yani her X için $\sum_n|x_n - L(n^\chi - (n-1)^\chi)| < \infty$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n\text{: } \left|\frac{1}{k^\chi}\sum_{i=1}^{k}x_i - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$ olur.

5. α. DERECEDEN (λ, A) −İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE α. DERECEDEN KUVVETLİ (λ, A) −TOPLANABİLİRLİK

Bu bölümde $0 < \alpha \leq 1$ için α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli (λ, A) −toplanabilirlik gibi yeni kavramlar tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 5.1.

$\lambda \epsilon \Lambda$, $A \in (E, F)$ ve $\alpha \epsilon (0,1]$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve ${\lambda_n}^{\alpha}, \lambda_n$ nin α kuvveti yani $\lambda^{\alpha} = ({\lambda_n}^{\alpha}) = ({\lambda_1}^{\alpha}, {\lambda_2}^{\alpha}, {\lambda_3}^{\alpha}, \dots, {\lambda_n}^{\alpha}, \dots)$ olmak üzere

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \epsilon I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (x_k)$ dizisi L ye α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklığı $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L\big(S^{\alpha}(\lambda, A)\big)$ ile ve α. dereceden tüm (λ, A) −istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini $S^{\alpha}(\lambda, A)$ ile gösterelim. $(\lambda_n) = (n)$ alınırsa $S^{\alpha}(\lambda, A)$ uzayı $S^{\alpha}(A)$ uzayına denk olur. $(\lambda_n) = (n)$ ve $A = I$ ise $S^{\alpha}(\lambda, A)$ uzayı S uzayına denk olur.

α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, ancak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu görmek için $X = (x_k)$ dizisini, $n = 1,2,3, \dots$ için

$$x_k = \begin{cases} 5, & k = 3n \\ 0, & k \neq 3n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve $A = I$ alalım. $\varepsilon > 0$ ve $\alpha > 1$ için

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \epsilon I_n : |[AX]_k - 5| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{3{\lambda_n}^{\alpha}} = 0$$

olduğundan $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = 5$ ve

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \epsilon I_n : |[AX]_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2[\lambda_n] + 1}{3{\lambda_n}^{\alpha}} = 0$$

olduğundan $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = 0$ dır. Böylece $X = (x_k)$ dizisi hem 5 e hem de 0 a α. dereceden (λ, A) −istatistiksel yakınsaktır. Yani $S^{\alpha}(\lambda, A) - lim x_k = 5$ ve $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = 0$ olup bu mümkün değildir.

Teeorem 5.2.

$S^{\alpha}(\lambda, A)$ −yakınsak herhangi bir dizinin $S^{\alpha}(\lambda, A)$ −limiti tektir.

İspat.

Kabul edelim ki (x_k) dizisinin L_1 ve L_2 gibi iki tane $S^{\alpha}(\lambda, A)$ −limiti var ve $L_1 \neq L_2$ olsun. L_1, (x_k) dizisinin $S^{\alpha}(\lambda, A)$ −limiti ise

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k\epsilon I_n : |[AX]_k - L_1| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ve L_2, (x_k) dizisinin $S^{\alpha}(\lambda, A)$ −limiti ise

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k\epsilon I_n : |[AX]_k - L_2| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur.

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - L_2 + [AX]_k - [AX]_k| \leq |[AX]_k - L_1| + |[AX]_k - L_2|$$

olduğundan $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k\epsilon I_n : |L_1 - L_2| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k\epsilon I_n : |[AX]_k - L_1| \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k\epsilon I_n : |[AX]_k - L_2| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Sağ taraftaki iki ifade sıfıra gittiğinden sol taraftaki ifade de sıfıra gider. Bu da ancak $L_1 = L_2$ olması ile mümkündür.

Tanım 5.3.

$\alpha \in (0,1]$, $0 < p < \infty$ ve $A \in (E, F)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p = 0$$

ise (x_k) dizisi L ye $\alpha.$dereceden kuvvetli $(V, \lambda, A)-$ yakınsaktır denir. (x_k) dizisi L ye α. dereceden kuvvetli (V, λ, A) −yakınsak ise bu yakınsaklığı ${W_P}^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L\left({W_p}^{\alpha}(\lambda, A)\right)$ şeklinde gösteririz. L ye $\alpha.$dereceden kuvvetli $(V, \lambda, A) -$ yakınsak dizilerin cümlesini ${W_P}^{\alpha}(\lambda, A)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.4.

$\alpha \in (0,1]$ olsun. ${W_P}^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ olup bu kapsama kesindir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L\left({W_P}^{\alpha}(\lambda, A)\right)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p \geq \varepsilon^p |\{k \in I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olup

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \in I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha} \varepsilon^p} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

dir. Sağ tarafın $n \to \infty$ için limiti sıfır olduğundan sol tarafın limiti de sıfırdır.

Böylece $x_k \to L\big(S^{\alpha}(\lambda, A)\big)$ olur. ${W_P}^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ kapsamasının kesinliğini $\lambda = (n)$ ve $A = I$ alarak gösterelim. $X = (x_k)$ dizisini de

$$x_k = \begin{cases} 2, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m = 1,2, \ldots$$

şeklinde tanımlayalım. Her $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \in I_n : |[AX]_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^{\alpha}} = 0$$

olup $x_k \to 0\big(S^{\alpha}(\lambda, A)\big)$ dır. $p = 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |[AX]_k| \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \to \infty$$

ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |[AX]_k| \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \to 2$$

olup $x_k \nrightarrow 0\big({W_P}^{\alpha}(\lambda, A)\big)$ elde edilir.

Teorem 5.5.

$0 < \alpha \leq 1$ ve $X = (x_k)$, $Y = (y_k)$ reel sayıların dizileri olsun. $S^{\alpha}(\lambda, A)$ uzayı lineer uzaydır.

İspat.

İlk olarak $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ olduğunda $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim cx_k = cx_0$ olduğunu gösterelim. $c = 0$ ise bu durum aşikardır. $c \neq 0$ olsun.

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \in I_n : |[A(cx)]_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_n : |[AX]_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

yazabiliriz. Bu da $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim cx_k = cx_0$ demektir.

Şimdi de

$S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim x_k=x_0$ ve $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim y_k=y_0$ olması durumunda

$S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim(x_k+y_k)=x_0+y_0$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k\in I_n:|([AX]_k+[AY]_k)-(x_0+y_0)|\geq\varepsilon\}|$$

$$\leq\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_n:|[AX]_k-x_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_n:|[AY]_k-y_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

yazabiliriz. Bu ise $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim(x_k+y_k)=x_0+y_0$ demektir. Böylece $S^{\alpha}(\lambda,A)$ lineer uzaydır.

Teorem 5.6.

$0<\alpha\leq\beta\leq1$ için $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim x_k=L$ ise $S^{\beta}(\lambda,A)-\lim x_k=L$ olup bu durum en az bir $\alpha<\beta$ için kesindir.

İspat.

$0<\alpha\leq\beta\leq1$ ve $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\beta}}|\{k\in I_n:\ |[AX]_k-L|\geq\varepsilon\}|\leq\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k\in I_n:\ |[AX]_k-L|\geq\varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Böylece $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim x_k=L$ ise $S^{\beta}(\lambda,A)-\lim x_k=L$ elde edilir. Yani $S^{\alpha}(\lambda,A)\subseteq S^{\beta}(\lambda,A)$ dir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $A=I$ alalım ve $X=(x_k)$ dizisini

$$x_k=\begin{cases}1 & , \quad k=n^2\\ 0 & , \quad diğer\ durumda\end{cases}\quad ,n=1,2,3,\ldots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\beta\in(\frac{1}{2},1]$ için $X\in S^{\beta}(\lambda,A)$, fakat $\alpha\in(0,\frac{1}{2}]$ için $X\notin S^{\alpha}(\lambda,A)$ dır.

Teorem 5.7.

$S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim x_k=x_0$, $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim y_k=y_0$ olsun. $|[AX]_k|=|A_k(X)|=|\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}x_m|<M$, $(M>0)$ ise $S^{\alpha}(\lambda,A)-\lim x_ky_k=x_0y_0$ dır.

İspat.

Her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k \in I_n: |([AX]_k[AY]_k) - (x_0y_0)| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k \in I_n: |([AX]_k[AY]_k) - (x_0y_0) + [AX]_k y_0 - [AX]_k y_0| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k \in I_n: |[AX]_k([AY]_k - y_0) + y_0([AX]_k - x_0)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|k \in I_n: |[AX]_k([AY]_k - y_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right| + \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_n: |y_0([AX]_k - x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_n: |([AY]_k - y_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2|[AX]_k|} > \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right|$$

$$+ \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_n: |([AX]_k - x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2|y_0|}\right\}\right|$$

dır. Bu bize $S^{\alpha}(\lambda, A) - \lim x_k y_k = x_0 y_0$ olduğunu verir.

Teorem 5.8.

$0 < \alpha \leq 1$ olsun. $S(A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{{\lambda_n}^{\alpha}}{n} > 0 \tag{5.1}$$

olmasıdır.

İspat.

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{{\lambda_n}^{\alpha}}{n} > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n: |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n: |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n: |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n}|\{k \in I_n: |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{{\lambda_n}^{\alpha}}{n}\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{k \in I_n: |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Böylece $S(A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ olur.

Tersine $S(A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n{}^{\alpha}}{n} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{\lambda_{n(j)}{}^{\alpha}}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $\big(n(j)\big)_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi bulabiliriz. $A = I$ ve

$X = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in I_{n(j)} \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}, j = 1,2, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $X \in S(A)$ fakat $X \notin S(\lambda, A)$ dır. Teorem 5.6 dan $S^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq S(\lambda, A)$ olduğundan $X \notin S^{\alpha}(\lambda, A)$ elde edilir. Böylece (5.1) sağlanır.

Teorem 5.9.

$0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif reel sayısı için $W_P{}^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq W_P{}^{\beta}(\lambda, A)$ olup bu kapsama en az bir $\alpha < \beta$ için kesindir.

İspat.

$0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n{}^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p \leq \frac{1}{\lambda_n{}^{\alpha}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

yazılabilir. Böylece $W_P{}^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq W_P{}^{\beta}(\lambda, A)$ elde edilir. Kapsamanın bazı α ve β lar için kesin olduğunu göstermek için $X = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad diğer\ durumda \end{cases} \quad , n = 1,2,3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $X \in W_P{}^{\beta}(\lambda, A)$ fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için

$X \notin W_P{}^{\alpha}(\lambda, A)$ dır.

Teorem 5.10.

$\lambda, \mu \in \wedge$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. α ve β sayıları, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde

$(\boldsymbol{i})\ \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^{\alpha}}{\mu_n^{\beta}} > 0$ (5.2)

ise $S^{\beta}(\mu, A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$,

$(\boldsymbol{ii})\ \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} = 1$ (5.3)

ise $S^{\alpha}(\lambda, A) \subseteq S^{\beta}(\mu, A)$ dır.

İspat.

$(\boldsymbol{i})$ Her $n \in \mathbb{N}$ için (5.2) sağlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n] \subset J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olup, $\varepsilon > 0$ için

$\{k \in J_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}$

yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{1}{\mu_n^{\beta}} |\{k \in J_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n^{\alpha}}{\mu_n^{\beta}} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. (5.2) kullanılırsa $S^{\beta}(\mu, A) \subseteq S^{\alpha}(\lambda, A)$ olur.

$(\boldsymbol{ii})$ $X = (x_k) \in S^{\alpha}(\lambda, A)$ olsun ve (5.3) sağlansın. Bu durumda

$$\lim \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}} |\{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır. $I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^{\beta}} |\{k \in J_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\mu_n^{\beta}} |\{n - \mu_n + 1 < k \leq\ n - \lambda_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^{\beta}} + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - \frac{\lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}}\right) + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - 1\right) + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n :\ |[AX]_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} = 1$ ve $X = (x_k) \in S^\alpha(\lambda, A)$ olduğundan $S^\alpha(\lambda, A) \subseteq S^\beta(\mu, A)$ dır.

Teorem 5.10. dan aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.11.

$\lambda, \mu \in \Lambda$, $\alpha \in (0,1]$ olsun ve (5.2) sağlansın. Bu durumda

$(\boldsymbol{i})$ $S^\alpha(\mu, A) \subseteq S^\alpha(\lambda, A)$,
$(\boldsymbol{ii})$ $S(\mu, A) \subseteq S^\alpha(\lambda, A)$,
$(\boldsymbol{iii})$ $S(\mu, A) \subseteq S(\lambda, A)$.

Sonuç 5.12.

$\lambda, \mu \in \Lambda$, $\alpha \in (0,1]$ olsun ve (5.3) sağlansın. Bu durumda

$(\boldsymbol{i})$ $S^\alpha(\lambda, A) \subseteq S^\alpha(\mu, A)$,
$(\boldsymbol{ii})$ $S^\alpha(\lambda, A) \subseteq S(\mu, A)$,
$(\boldsymbol{iii})$ $S(\lambda, A) \subseteq S(\mu, A)$.

Teorem 5.13.

$\lambda, \mu \in \Lambda$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde

$(\boldsymbol{i})$ (5.2) sağlanırsa ${W_P}^\beta(\mu, A) \subset {W_P}^\alpha(\lambda, A)$,
$(\boldsymbol{ii})$ (5.3) sağlansın ve $sup_k|A_k(x)| < \infty$ olsun. Bu durumda,

${W_P}^\alpha(\lambda, A) \subset {W_P}^\beta(\mu, A)$ dır.

İspat.

$(\boldsymbol{i})$ Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset J_n$ olsun ve (5.2) sağlansın.

$$\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k\in J_n} |[AX]_k - L|^p > \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

olduğundan ${W_P}^\beta(\mu, A) \subset {W_P}^\alpha(\lambda, A)$ elde edilir.

$(\boldsymbol{ii})$ (5.3) sağlansın. $sup_k|A_k(x)| < \infty$ olduğundan $|[AX]_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $X = (x_k) \in W_P{}^{\alpha}(\lambda, A)$ olduğundan,

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p = 0$ dır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan

$$\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{k\in J_n} |[AX]_k - L|^p = \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{k\in J_n - I_n} |[AX]_k - L|^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

$$\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^{\beta}}\right) M^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

$$\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}}\right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

$$\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - 1\right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \sum_{k\in I_n} |[AX]_k - L|^p$$

olur. Böylece $W_P{}^{\alpha}(\lambda, A) \subset W_P{}^{\beta}(\mu, A)$ dır.

Sonuç 5.14.

$\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.2) sağlanırsa,

$(\boldsymbol{i})$ $W_P{}^{\alpha}(\mu, A) \subset W_P{}^{\alpha}(\lambda, A)$,
$(\boldsymbol{ii})$ $W_P(\mu, A) \subset W_P{}^{\alpha}(\lambda, A)$,
$(\boldsymbol{iii})$ $W_P(\mu, A) \subset W_P(\lambda, A)$.

Sonuç 5.15.

$\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi ve

$sup_k|A_k(x)| < \infty$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.3) sağlanırsa,

$(\boldsymbol{i})$ $W_P{}^{\alpha}(\lambda, A) \subset W_P{}^{\alpha}(\mu, A)$,

$(\boldsymbol{ii})\ W_P{}^{\alpha}(\lambda, A)\ \subset W_P(\mu, A)$,

$(\boldsymbol{iii})\ W_P(\lambda, A)\ \subset W_P(\mu, A)$.

6. KAYNAKLAR

Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density, *American Journal of Mathematics* 75, 335–346.

Connor J.S., 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis,* 8, 47–63.

Çolak, R., 2010. Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications, Anamaya Pub,* 2010: 121–129. *New Delhi, India*

Çolak, R., 2011. On $\leftthreetimes -$Statistical Convergence, *Conference on Summability and Aplications,* Commerce University, May 12-13, Istanbul, Turkey.

Çolak, R., Bektaş, Ç.A., 2011. On $\leftthreetimes -$Statistical Convergence of Order α, *Acta Mathematica Scientia,* 31(3), 953–959.

Çolak, R., Altın, Y., 2013. Statistical convergence of double sequences of order $\tilde{\alpha}$, *Journal of Functional Spaces and Applications*, Art. ID 682823, 5 pp.

de Malafosse, B., 2003. On some BK spaces, *Int. Journal Mathematical Sciences* no. 28, 1783–1801.

de Malafosse, B., Rakočević, V., 2007. Matrix transformation and statistical convergence, *Linear Algebra Appl.* 420, no. 2-3, 377–387.

Et, M., Altınok, H., Altın, Y., 2013. On generalized statistical convergence of order α of difference sequences, *Journal Functional Spaces Applications,* 2013, Art. ID 370271, 7 pp.

Et, M., 2014. On pointwise $\lambda -$statistical convergence of order α of sequences of fuzzy mappings, *Filomat* 28, no. 6, 1271–1279.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Colloqium Mathematicum*, 2, 241–244.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, *Analysis* 5, no. 4, 301–313.

Fridy, J.A., Orhan, C., 1993. Statistical limit points, *Procedings of American Mathematical Society.* 118 no. 4, 1187–1192.

Fridy, J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, *Pacific Journal of Mathematics* 160, no. 1, 43–51.

Fridy, J.A., Orhan, C., 1997. Statistical core theorems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 208, no. 2, 520–527.

Gadjiev, A.D., Orhan, C., 2002. Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence, *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 32(1), 129–138.

Goes, G., Goes, S., 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, *Mathematische Zeitschrift,* 118, 93–102.

Işık, M., 2004. On statistical convergence of generalized difference sequences, *Soochow Journal of Mathematics.* 30, no. 2, 197–205.

Işık, M., Et, M., 2015. Almost $\lambda_r -$statistical and strongly almost $\lambda_r -$convergence of order β of sequences of fuzzy numbers, *Journal of Function Spaces*, Art. ID 451050, 6 pp.

Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981. Sequence spaces and series, *Markel Dekker, Inc., New York and Basel*.

Kolk, E., 1991. The statistical convergence in Banach spaces, *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 928, 41–52.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley&Sons*, New York.

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge, Second Edition.

Malkowsky, E., 1989. A bsolute and Ordinary Köthe-Toeplitz Duals of Some Sets of Sequences and Matrix Transformations, *Publication De L'institut Mathematique, Nouvelle Serie Tome*, 46(60), pp. 97–103.

Malkowsky, E., 1995. The continuous duals of the spaces $c_0(\Lambda)$ and $c(\Lambda)$ for exponentially bounded sequences Λ, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 61, no. 1-4, 241–250.

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991. An introduction to the theory of numbers, Fifth edition. *John Wiley & Sons, Inc., New York.*

Pehlivan, S., 1991. A class of matrix transformation, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 83 no. 1, 75–77.

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, 30 no. 2, 139–150.

Savaş, E., 2013. Double almost lacunary statistical convergence of order α, *Advances in Difference Equations*, 2013:254, 10 pp.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly*, 66, 361–375.

Steinhaus, H., 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73–74.

Şengül, H., Et, M., 2014. On lacunary statistical convergence of order α. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, 34, no. 2, 473–482.

Tonne, P.C., 1972. Matrix transformations on the power-series convergent on the unit disc, *Journal of London Mathematical Society. (2)* 4, 667–670.

Tripathy, B.C., 1995. Matrix Transformation Between Some Classes of Sequences, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 206, 448–450.*

Yosida, K., 1980. Functional Analysis, *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, Newyork, Sixth Edition.

Zygmund, A., 1979. Trigonometric Series, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı	: ÖZLEM KOYUN
Doğum Yeri ve Yılı	: DİYARBAKIR / 1989
Yabancı Dili	: İngilizce
Telefon	: 05392636563
Eposta	: sele1170@hotmail.com

EĞİTİM

Lisans	: Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2007-2011)
Pedagojik Formasyon	: Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi (2011-2012)

İŞ DENEYİMLERİ

(2013-halen)	: Milli Eğitim Bakanlığı - Öğretmen