T.C

SİİRT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY FONKSİYON DÖNÜŞÜM DİZİLERİNİN KUVVETLİ P-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

HAZIRLAYAN
Hakkan GÜLOĞLU

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ

Ocak,2021
SİİRT

T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY FONKSİYON DÖNÜŞÜM DİZİLERİNİN KUVVETLİ P-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hakkan GÜLOĞLU
173114002

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ

OCAK-2021
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Hakkan GÜLOĞLU tarafından hazırlanan "Fuzzy Fonksiyon Dönüşüm Dizilerinin Kuvvetli p-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık" adlı tez çalışması …/…/… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyeleri		**İmza**
Başkan		
Unvanı Adı SOYADI	Prof. Dr. Yavuz ALTIN	
Danışman		
Unvanı Adı SOYADI	Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ	
Üye		
Unvanı Adı SOYADI	Doç. Dr. Üyesi Ramazan KAMA	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ’ a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca bana yardım eden tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim. Hiç bir zaman ümidini benden yitirmeyen ve her zaman en büyük destekçilerim olan annem Çiçek GÜLOĞLU ve babam İrfan GÜLOĞLU' na çok teşekkür ederim. Zor zamanlarımda bana destek olan değerli kardeşim Furkan GÜLOĞLU’ na teşekkür ederim.

Hakkan GÜLOĞLU
SİİRT-2021

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Sembol		Açıklama
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{R^n}$	:	n Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{\omega}$	:	Tüm Dizilerin Uzayı
$\boldsymbol{l_\infty}$	:	Reel Terimli Tüm Sınırlı Dizilerin Uzayı
$\boldsymbol{c}$	:	Reel Terimli Tüm Yakınsak Dizilerin Uzayı
$\boldsymbol{c_0}$	:	Reel Terimli Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
h.h.t	:	Hemen Hemen Her *t* için
L(R)	:	Reel Fuzzy Sayılar Kümesi
$\mathbf{L(R^n)}$	:	n Boyutlu Reel Fuzzy Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{\delta(H^*)}$	:	$\boldsymbol{H^*}$ Kümesinin Doğal Yoğunluğu
$\boldsymbol{\delta_0(H^*)}$	:	Sıfır Doğal Yoğunluklu $\boldsymbol{H^*}$ Kümesi
$\boldsymbol{S}$	:	İstatistiksel Yakınsak Fuzzy Sayı Dizileri Kümesi
$\boldsymbol{S_\mu}$	:	µ Dereceden İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{S_\phi^\mu}$	:	µ Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{S_{\phi,0}^\mu}$	:	µ Dereceden Sıfıra Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{W_p^\mu}$	:	µ Dereceden Kuvvetli *p*-Cesàro Toplanabilir Diziler Uzayı
$\boldsymbol{W_{p,0}^\mu}$	:	µ Dereceden Sıfıra Kuvvetli *p*-Cesàro Toplanabilir Diziler Uzayı
$\boldsymbol{S_\phi^\mu(f)}$	:	*f* ‘e µ Dereceden Lacunary Noktasal İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_\phi^\mu}$	:	µ Dereceden Kuvvetli Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_{\phi,p}^\mu}$	:	µ Dereceden Kuvvetli *p*- Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_\phi(f)}$	:	*f* ‘e Kuvvetli Lacunary İstatiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_\phi^\mu(f)}$	:	*f* ‘e µ Dereceden Kuvvetli Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_{\phi,p}^\mu(f)}$	:	*f* ‘e µ Dereceden Kuvvetli *p*-Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{N_{\phi,p,0}^\mu(f)}$	:	*f* ‘e µ Dereceden “0”a Kuvvetli *p*-Lacunary İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\boldsymbol{St_n}$	:	Noktasal İstatistiksel Yakınsak Diziler Kümesi
$\boldsymbol{uSt_n}$	:	Düzgün İstatistiksel Yakınsak Diziler Kümesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

FUZZY FONKSİYON DÖNÜŞÜM DİZİLERİNİN KUVVETLİ P-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Hakkan GÜLOĞLU

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ

2021,60+vii Sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Bu çalışmanın ilk bölümünde fuzzy sayıların kısa bir tarihçesine değinilmiş ve fuzzy sayı kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için günlük hayattan bazı örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsak, Lacunary dizileri ve lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı ve özellikleri verilmiştir. Aynı zamanda Lacunary istatistiksel yakınsaklık dizileri ile ilgili ileriki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Fuzzy kümeler, fuzzy sayılar, fuzzy sayı dizileri ve yakınsaklık, fuzzy dönüşüm dizilerinin istatistiksel yakınsaklık tanımları ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra Fuzzy sayı dizisinin μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklığı, fuzzy sayı dizisinin μ dereceden kuvvetli lacunary p-istatistiksel yakınsaklığı tanımları tanımladıktan sonra bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tezin orijinal kısmı olan Dördüncü bölümde (f_t) değerli fonksiyon dizisi f fuzzy değerli fonksiyonuna μ dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsaklığı, fuzzy dönüşüm dizilerinin μ dereceden kuvvetli p-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve uzayları tanımlandı. Bu $S_{\phi}^{\mu}(f), N_{\phi}^{\mu}$(f) ve $N_{\phi,p}^{\mu}$(f) uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları ile ilgili sonuçlar elde edilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Fuzzy sayı dizisi, Fuzzy dönüşüm dizisi.

ABSTRACT

MASTER THESIS

STRONG P-LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE OF FUZZY FUNCTION MAPPING SEQUENCES

Hakkan GÜLOĞLU

Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University Department of Mathematics

Supervisior : Assoc. Prof. Dr. Abdulkadir KARAKAŞ

2021, 60+vii Pages

This thesis consists of four chapters.

We mention a short history of fuzzy numbers and some examples from daily life to understand the concept of fuzzy numbers better in the first chapter.

In the second chapter, we give the definitions and properties of natural density, statistical convergence, Lacunary sequences and lacunary statistical convergence. At the same time, we present some basic definitions and theorems on Lacunary statistical convergence sequences to be used in the following chapters.

In the third chapter, we give the definitions and properties of fuzzy sets, fuzzy numbers, fuzzy number sequences and convergence, statistical convergence of fuzzy transformation sequences. Later, after determining the μ order lacunary statistical convergence, definitions of the fuzzy number sequence and the μ order strong lacunary p-statistical convergence of the fuzzy number sequence, we give the relationships between them.

In the fourth chapter, which is the original part of the thesis, we present (f_t) valued function sequence f fuzzy valued function, μ degree lacunary point statistical convergence, μ strong p-lacunary statistical convergence and spaces of fuzzy mappings sequences. We obtain some scope relations between these $S_\phi^\mu(f), N_\phi^\mu$(f) and $N_{\phi,p}^\mu$(f) spaces.

Keywords: Fuzzy number sequence, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Fuzzy number sequence, Fuzzy transformation sequence.

1 GİRİŞ

Zadeh (1965) tarafından ilk defa fuzzy küme kavramı tanımlandı. Zadeh tarafından çalışılan bu makale belirsizlik kavramının ölçülmesinde önemli bir çalışmadır. Zadeh, bu çalışmasında kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme kavramını ve bu kümenin cebirsel özelliklerini incelemiştir.

Fuzzy kümeler, boş olmayan bir X kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Her bir $x \in X$ elemanın $[0,1]$ aralığında değer alan bir $\Omega(x)$ üyelik derecesine karşılık gelmesidir. Burada $\Omega(x) = 0$ üyeliğin olmamasına $0 < \Omega(x) < 1$ kısmi üyeliğe ve $\Omega(x) = 1$ de tam üyeliğe karşılık gelir. Böylece X in bir fuzzy alt kümesi en az bir $\Omega : X \to [0,1]$ fonksiyonu için $Xx[0,1]$ kümesinin boş olmayan bir $\{x, \Omega(x) : x \in X\}$ alt kümesidir.

Fuzzy kümeler günlük hayatımızda önemli bir yer tutar. Örneğin yaklaşık -17^o, hemen hemen saat $22:00$ civarında gibi ölçme parametrelerini birer reel sayıya karşılık getirmeye çalışırız. Bu biçimdeki ifadelerimiz belirsiz, kapalı ve fuzzy ifadelerdir. Bu tür sayılara fuzzy sayı diyerek yeni bir sayılar kümesi elde ederiz. Bu teori, uygulamalı ve teorik pek çok alanda kullanılmaktadır.

Matloka (1986) ilk defa fuzzy sayı dizilerinin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Fuzzy sayı dizilerinin, sınırlı ve yakınsak dizileride Nanda (1989) tarafından çalışılmış ve bu uzayların tam metrik uzaylar olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Nuray ve Savaş (1995) tarafından fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları verildi ve fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık dizilerin uzayının bazı cebirsel özellikleri incelendi. Subrahmanyam (1999) fuzzy sayı dizilerinin toplanabilme ile ilişkisini inceledi. Fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilme tanımı ve istatistiksel yakınsaklık kavramı ile olan ilişkisi de Kwon (2000) tarafından incelendi. Fuzzy sayı dizileri Altin ve ark. (2006), Aytar ve Pehlivan (2007), Altin ve ark. (2014) gibi pek çok yazar tarafından çalışıldı.

Matloka (1987) çalışmasında fuzzy dönüşüm dizilerini tanımlayarak, bu dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramını verdi. Daha sonra Altın ve ark. (2007) fuzzy dönüşüm dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak, bu dizi uzayının cebirsel özelliklerini incelediler. Fuzzy dönüşüm dizileri Srivastava ve ark. (2014), Gong ve ark. (2015), Hazarika (2017), Hung ve ark. (2020) gibi pek çok yazar tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada, fuzzy küme, fuzzy dizileri ve fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı gibi bilinen kavramlar incelenerek, literatürde bilinen fuzzy fonksiyon dizilerinin tanımı ve dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramı kullanılarak, fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden kuvvetli $p-$lacunary istatistiksel yakınsaklık ile fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak $S_{\Phi}^{\mu}(f), N_{\Phi}^{\mu}(f)$ ve $N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları ile ilgili sonuçlar elde edilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, doğal yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık diziler ile ilgili diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

1935 yılında ilk olarak Zygmund (1968) tarafından istatistiksel yakınsaklık verildi. Aynı zamanda bu kavram Steinhaus (1951) tarafından tanıtıldı. Bu tanımdan faydalanarak Fast (1951) kompleks terimli diziler için bu kavramı verdi. İstatistiksel yakınsaklık daha sonra Fridy (1985), Salat (1980), Connor (1988), Tripathy (2001) gibi birçok matematikçi tarafından çalışıldı. İlk olarak istatistiksel yakınsaklık için derece kavramı Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra sayı dizileri için μ dereceden doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilme kavramları Çolak (2010) tarafından verildi. Freedman ve ark. (1978) ve Fridy ve ark. (1993) tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramıve kuvvetli lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı kapsama teoremleri verildi. Noktasal ve Düzgün İstatistiksel yakınsaklık kavramı Duman ve Orhan (2004), Gökhan ve Güngör (2002) tarafından verildi. Daha sonra bu kavram Et ve ark. (2013), Çinar ve ark. (2013) tarafından çalışıldı.

2.1.1 Tanım

$X \neq \varnothing$ küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}^+, (x, y) \to d(x, y)$ fonksiyonu için

$d1)$ $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$

$d2)$ $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d3)$ $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

$d4)$ $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metriktir ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (Kreyszig, 1978).

2.1.2 Tanım

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere; $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X uzayında bir dizi denir ve $(f_n) = (x_t)$ ile gösterilir. (n_t); $\mathbb{N}$ içinde $n_t < n_{t+1}, t = 1, 2, 3...$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} n_t = \infty$ koşullarını sağlayan herhangi bir dizi olmak üzere; $(x_{n_t}), t \in \mathbb{N}$ dizisine (x_t) dizisinin bir alt dizisi denir (Kreyszig, 1978).

2.1.3 Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve (x_t), X te bir dizi olsun.
Bu durumda $\lim\limits_{t\to\infty} d(x_t,x_0)=0$ ise veya başka bir deyişle $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall t>t_\varepsilon$ için $d(x_t,x_0)<\varepsilon$ oluyorsa, (x_t) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$\lim_{t\to\infty} x_t = x_0$$

şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

2.1.4 Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve H^*, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(H^*)=\sup\{d(x,y):x,y\in H^*\}$$

sayısına H^* kümesinin çapı denir. $d(H^*)<\infty$ ise H^* ya X de sınırlı bir küme denir. X içindeki (x_t) dizisinin terimlerinden oluşan küme X de sınırlı ise (x_t) dizisine sınırlı bir dizi adı verilir (Kreyszig, 1978).

2.1.5 Teorem

(x_t), (X,d) bir metrik uzayındaki bir dizi ve $x_0\in X$ olmak üzere $\lim\limits_{t\to\infty} x_t=x_0$ ise
$i)$ x_0 limiti tektir;
$ii)$ (x_t) dizisi sınırlıdır;
$iii)$ (x_t) dizisinin $\forall(x_{t_k})$ alt dizisinin de limiti x_0 dır;
$iv)$ $y_t\to y_0$ $(\forall t\in\mathbb{N}, y_t\in X, y_0\in X)$ ise $d(x_t,y_t)\to d(x_0,y_0)$
dır (Kreyszig, 1978).

2.1.6 Teorem

(X,d) bir metrik uzay ve (x_t) dizisi X uzayının içindeki bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $s,t>t_\varepsilon$ olduğunda $d(x_t,x_s)<\varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir $t_\varepsilon\in\mathbb{N}$ sayısı varsa (x_t) dizisine X de bir Cauchy dizisi adı verilir. Farklı bir gösterim olarak; $\forall\varepsilon>0$ için $\exists t_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall t,s>t_\varepsilon$ için $d(x_t,x_s)<\varepsilon \iff (x_t)$ dizisi X içinde bir Cauchy dizisidir (Kreyszig, 1978).

2.1.7 Tanım

Kompleks terimli tüm $x=(x_t)\,,(t=1,2,3...)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. $\omega, x=(x_t)\,,y=(y_t)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x+y=(x_t+y_t)$$

$$\alpha x = (\alpha x_t)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzayıdır (Goes ve ark., 1970). ω nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir. Şimdi bu çalışmada sık sık kullanacağımız bazı dizi uzaylarını verelim:

$$l_\infty = \left\{ x = (x_t) : \sup_t |x_t| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_t) : \lim_t x_t = U \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_t) : \lim_t x_t = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı (Zygmund ve ark., 1968).

2.1.8 Tanım

$H^* \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir H^* kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu

$$\delta(H^*) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{t \leq n : t \in H^*\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{t \leq n : t \in H^*\}|$ kavramı H^* kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir (Fridy, 1985).
Eğer $\delta(H^*) = 0$ ise H^* kümesine sıfır yoğunluklu küme olarak adlandırılır. Sıfır yoğunluklu kümeyi δ_0 ile göstereceğiz.

2.1.9 Örnek

$H^* = \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$ sonsuz kümesi için $\delta(H^*) = 1/2$ dir.

2.1.10 Tanım

$x = (x_t)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme hariç bütün t ler için sağlıyorsa, (x_t) dizisi hemen hemen her t için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.t$ şeklinde ifade edilir (Fridy, 1985; Šalát, 1980). Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

2.1.11 Tanım

(x_t) kompleks terimli bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{t \leq n : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h.h.t$ için $|x_t - U| < \varepsilon$ olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $St - \lim x = U$ şeklinde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı St ile gösterilir. Buradan $U = 0$ alınırsa $x = (x_t)$ dizisine istatistiksel yakınsak sıfır dizisi denir. St_0 ile istatistiksel yakınsak sıfır dizilerini göstereceğiz (Fridy, 1985; Šalát, 1980).

2.1.12 Teorem

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_t = U$ ise $St - \lim x_t = U$ dir (Fridy, 1985).

Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x_t = \begin{cases} t, & t = m^2 \text{ ise} \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0, & t \neq m^2 \text{ ise} \qquad \text{d d} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmiş $x = (x_t)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{t \leq n : X_t \neq 0\} \leq \sqrt{n}$$

elde edilir.Böylece $St - \lim x = 0$ dır. Fakat $x = (x_t)$ yakınsak değildir. Böylece yukarıda tanımlanan $x = (x_t)$ dizisi istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu halde sınırlıda değildir.

Diğer taraftan, $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ dizisi sınırlıdır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir. Yani ℓ_∞ ve St uzaylar birbirlerini kapsamazlar fakat ortak elemanlar vardır.

2.1.13 Teorem

$St - \lim x = U_1$ ve $St - \lim x = U_2$ ise $U_1 = U_2$ dir. Yani bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir (Fridy, 1985).

2.1.14 Teorem

$St - \lim x = U_1, St - \lim y = U_2$ ve t bir reel sayı olsun. Bu durumda

$i)$ $St - \lim cx_t = cU_1$

$ii)$ $St - \lim(x_t + y_t) = U_1 + U_2$ dir (Fridy, 1985).

Yukarıdaki teoremin ifadesine göre istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı bir lineer uzay olduğu görülür.

2.1.15 Tanım

Bir $x = (x_t)$ kompleks terimli dizisini alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin.Bu durumda $h.h.t$ için $|x_t - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{t \leq n : |x_t - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_t)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

2.1.16 Tanım

Bir $x = (x_t)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy, 1985).

İspat:

Burada, "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir. " teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - \lim x_t = U$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, $h.h.t$ için $|x_t - U| < \frac{\varepsilon}{2}$ dır. Eğer $s, |x_s - U| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_t - x_s| = |x_t - U + U - x_s| \leq |x_t - U| + |x_s - U| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şeklinde olur.

2.1.17 Teorem

Aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ x dizisi istatistiksel yakınsaktır,

$ii)$ x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,

$iii)$ $h.h.t$ için $x_t = y_t$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_t)$ dizisi vardır (Fridy, 1985).

2.1.18 Teorem

Bir $x = (x_t)$ kompleks terimli dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart istatistiksel yakınsak olmasıdır (Fridy, 1985).

2.1.19 Tanım

$x = (x_t)$ kompleks terimli dizi olmak üzere ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (x_t) = U$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa $x = (x_t)$ dizisi Cesàro yakınsaktır denir.

Bu dizilerin kümesi

$$[C,1]=\{x=(x_t):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t-U)=0,\text{en az bir } U \text{ için}\}$$

ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1960).

2.1.20 Tanım

$x=(x_t)$ kompleks terimli dizisi U ye yakınsak ise (x_t) dizisi Cesàro yakınsaktır (Niven ve Zuckerman, 1960).

2.1.21 Tanım

$x=(x_t)$ kompleks terimli bir dizi ve $p\in\mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|x_t-U|^p=0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa $x=(x_t)$ dizisi U sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır denir. Bu dizilerin kümesi

$$[C,1,p]=\{x=(x_t):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_t-U|^p=0,\ \text{en az bir } U \text{ için}\}$$

ile gösterilir (Tabib, 2012).

2.1.22 Tanım

$0<\mu\leq 1$ olsun. Bir $H^*\subseteq\mathbb{N}$ kümesinin μ yoğunluğu,

$$\delta_\mu(H^*)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\mu}|\{t\leq n:t\in H^*\}|\text{(limit sonlu yada sonsuz olabilir)}$$

ile tanımlanır (Çolak, 2010).

Bu durumda $x=(x_t)$ μ ya göre sıfır yoğunluklu küme hariç diğer bütün t lar için $P(t)$ özelliği sağlanıyorsa bu diziye $h.h.t$ (μ) için $P(t)$ özelliği sağlanır denir. $\mathbb{N}$ nin sonlu her alt kümesinin yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_\mu(S^c)=1-\delta_\mu(S)$ eşitliği $0<\mu\leq 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\mu=1$ için sağlanır.

2.1.23 Tanım

$x=(x_t)\in\omega$ ve $0<\mu\leq 1$ verilsin. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\mu}|\{t\leq n:|x_t-U|\geq\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir U sayısı mevcut ise, bu taktirde (x_t) dizisi U ye μ dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. (x_t) dizisi U ye μ dereceden istatistiksel yakınsak olması halinde $S^\mu-$

$\lim(x_t) = U$ şeklinde yazılır. μ dereceden istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesini S^μ ile gösterilir. S_0^μ da μ dereceden 0 a istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterecektir (Çolak, 2010).

Her $\mu \in (0,1]$ için $S_0^\mu \subseteq S^\mu$ olduğu açıktır. Özel olarak μ dereceden istatistiksel yakınsaklık için $\mu = 1$ alındığında istatistiksel yakınsaklık ile örtüşür.
μ dereceden istatistiksel yakınsak diziler lineer uzaydır (Çolak, 2010).

2.1.24 Tanım

$0 < \mu \leq 1$ ve $p \in R^+$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\mu} \sum_{t=1}^{n} |x_t - U|^p = 0,$$

olacak şekilde bir U sayısı var ise, bu taktirde $x = (x_t)$ dizisi μ dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir. μ dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirlik $\mu = 1$ için kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. μ dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir dizilerin uzayını W_p^μ ile gösterilir. Yani,

$$W_p^\mu = \left\{ x = (x_t) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\mu} \sum_{t=1}^{n} |x_t - U|^p = 0, \text{en az bir } U \text{ için} \right\}$$

dir (Çolak, 2010).

2.1.25 Tanım

(f_t), A üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{t \leq n : |f_t(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{her bir } x \in A\}\right|$$

yada $h.h.t$ için $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu varsa $(f_t(x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna noktasal istatistiksel yakınsaktır. $(f_t(x))$ dizisi , $f(x)$ fonksiyonuna noktasal istatistiksel yakınsak ise $St_n - \lim f_t(x) = f(x)$ veya $f_t(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ yazılır (Duman ve Orhan, 2004; Gökhan ve Güngör, 2002).
Bu tanımın diğer bir başka gösterimini aşağıdaki şekilde de gösterebiliriz.
Her bir $\delta > 0$, her $\varepsilon > 0$ ve her $n > N(\varepsilon, \delta, x)$ için

$$\frac{1}{n} \left|\{t \leq n : |f_t(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{her bir } x \in A\}\right| < \delta$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır.

2.1.26 Tanım

(f_t), A üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için ve her $x \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{t \leq n : |f_t(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{her } x \in A\}\right| = 0$$

yani $h.h.t$ ve her $x \in A$ için

$$|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu varsa $(f_t(x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $(f_t(x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak ise $uSt - \lim f_t(x) = f(x)$ veya $f_t(x) \xrightarrow{uSt} f(x)$ olarak yazılır (Duman ve Orhan, 2004).

2.2 Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, lacunary diziler, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $p-$lacunary yakınsaklık kavramları tanımlanarak arasındaki kapsama bağıntıları ve bu kapsama bağıntılarından çıkan sonuçlar verilmiştir.

Lacunary diziler Freedman ve ark. (1978) tarafından incelenmiş ve kuvvetli Cesàro toplanabilme ve kuvvetli lacunary toplanabilme arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir. Fridy ve Orhan (1993) tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş ve istatistiksel yakınsaklıkla olan ilişkileri incelenmiştir. Daha sonra Nuray (1998) fuzzy sayı dizileri için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Son zamanlarda Lacunary istatistiksel yakınsaklık üzerinde Dasand (1983), Şengül ve Et (2014), Bhardwaj (2016) çalışmışlardır.

2.2.1 Tanım

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\Phi = (t_r)$ olsun. Bu durumda $t_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için $h_r = t_r - t_{r-1}$ ise $\Phi = (t_r)$ dizisine lacunary dizisi denir (Freedman ve ark., 1978).

$$\sum_{i=t_{r-1}+1}^{t_r} |x_i| = \sum_{i\in I_r} |x_i|$$

alınacak ve uygunluk için bu toplam kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile ve $\frac{t_r}{t_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilecektir. $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ şeklinde gösterilecektir. Lacunary dizisine örnek olarak $\Phi = (t_r) = (r!)$ ve $\Phi = (t_r) = (2^r)$, $(r > 0)$ olmak üzere dizileri verilebilir (Freedman ve ark., 1978).

2.2.2 Tanım

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_t)$ dizisi U sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir $x = (x_t)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\Phi - \lim x_t = U$ veya $x_t \to U(S_\theta)$ ile gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_\Phi = \left\{ x = (x_t) : \lim \frac{1}{h_r} \left|\{t \in I_r : |x_k - U| \geq \varepsilon\}\right| = 0 \right\}$$

ile gösterilecektir (Fridy ve Orhan, 1993).

2.2.3 Tanım

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $(t_r^*) \in I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olmak üzere x'in $(x_{t_r^*})$ alt dizisi vardır öyleki $\lim\limits_{r\to\infty} x_{t_r^*} = U$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{t \in I_r : \left|x_t - x_{t_r^*}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{1}$$

ise $x = (x_t)$ dizisine $S_\Phi-$Cauchy dizisi denir (Freedman ve ark., 1978).

2.2.4 Tanım

Herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı N_Φ ile gösterilir, yani

$$N_\Phi = \left\{ x = (x_t) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0, \text{en az bir L için} \right\}$$

dır (Freedman ve ark., 1978). N_Φ uzayı $U = 0$ olması durumunda $N_\Phi(0)$ ile gösterilir.

2.2.5 Teorem

$|\sigma_1| \subseteq N_\Phi$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır (Freedman ve ark., 1978).

İspat:

$\Rightarrow \liminf_r q_r > 1$ ise her $r \geq 1$ için $1+\delta \leq q_r$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $x \in |\sigma_1' 0|$ için

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_i| = \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i| - \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i| \\ &= \frac{t_r}{h_r}\left(\frac{1}{t_r}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i|\right) - \frac{t_{r-1}}{h_r}\left(\frac{1}{t_{r-1}}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i|\right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $h_r = t_r - t_{r-1}$ ve $I_r = [t_{r-1}, t_r]$ olduğundan,

$$\frac{t_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \text{ ve } \frac{t_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

elde ederiz. Böylece

$$\frac{1}{t_r}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i| \text{ ve } \frac{1}{t_{r-1}}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i|$$

terimlerinden her ikisi de sıfıra yakınsar ve $x \in N_\Phi'(0)$ elde edilir. Buradan $|\sigma_1| \subseteq N_\Phi$ kapsaması elde edilir.

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi olduğundan $r_j \geq r_{j-1}+2$ olmak üzere

$$\frac{t_{r_j}}{t_{r_j-1}} < 1 + \frac{1}{j} \text{ ve } \frac{t_{r_j-1}}{t_{r_{j-1}}} > j$$

olacak şekilde $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisinin bir (t_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in I_{r_j}, (j = 1, 2, 3, ...) \\ \qquad 0, \text{dd.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde herhangi bir U sayısı için

$$\frac{1}{h_{r_j}}\sum_{I_{r_j}}|x_i - U| = |1-U|, j = 1, 2, 3...$$

ve

$$\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_i - U| = |U|, r \neq r_j$$

olur. Bundan dolayı $x \neq N_\Phi$ fakat x kuvvetli Cesàro yakınsaktır. Bu durumda p yeteri kadar büyük bir tamsayı ise $t_{r_j-1} < p \leq t_{r_{j+1}-1}$ olacak şekilde bir tek j bulabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \leq \frac{t_{r_j-1} + h_{r_j}}{t_{r_j-1}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazabiliriz. $p \to \infty$ iken $j \to \infty$ olur. Böylece $x \in |\sigma_1' 0|$ olur.

2.2.6 Teorem

$N_\Phi \subseteq |\sigma_1|$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Freedman ve ark., 1978).

2.2.7 Teorem

$\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. Bu durumda

$i)$ $x_t \to U(N_\Phi)$ ise $x_t \to U(S_\Phi)$,

$ii)$ $x \in \ell_\infty$ ve $x_t \to U(S_\Phi)$ ise $x_t \to U(N_\Phi)$,

$iii)$ $S_\Phi \cap \ell_\infty = N_\Phi \cap \ell_\infty$

dir (Fridy ve Orhan, 1993).

İspat:

$i)$ $\varepsilon > 0$, $x_t \to U(N_\Phi)$ ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{t \in I_r} |x_t - U| \geq \sum_{t \in I_r, |x_t - U|} |x_t - U| \geq \varepsilon \left| \{ t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon \} \right|$$

yazabiliriz. Buradan $i)$ gerçekleşir.

$i)$' deki kapsama kesindir. Gerçekten, $\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_t)$ dizisi I_r aralığında ilk $\lfloor|\sqrt{h_r}|\rfloor$ tamsayılarında $1, 2, 3, ..., \lfloor|\sqrt{h_r}|\rfloor$, diğer durumlarda 0 olarak tanımlayalım. Bu dizi sınırlı değildir ancak lacunary istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{h_r} \left| \{ t \in I_r : |x_t - 0| \geq \varepsilon \} \right| = \frac{\lfloor|\sqrt{h_r}|\rfloor}{h_r} \to 0, (r \to \infty)$$

dır. Yani (x_t) dizisi sıfıra lacunary istatistiksel yakınsaktır. Diğer yandan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{t \in I_r} |x_t - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{\lfloor|\sqrt{h_r}|\rfloor \left(\lfloor|\sqrt{h_r}|\rfloor + 1 \right)}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0, (r \to \infty)$$

olduğundan $x_t \to 0(N_\Phi)$'dır.

$ii)$ $x_t \to U(S_\Phi)$, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Her $t \in \mathbb{N}$ için $|x_t - U| \leq M$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{t \in I_r} |x_t - U| &= \frac{1}{h_r} \sum_{t \in I_r, |x_t - U| \geq \varepsilon} |x_t - U| + \frac{1}{h_r} \sum_{t \in I_r, |x_t - U| < \varepsilon} |x_t - U| \\ &\leq \frac{M}{h_r} \left| \{ t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon \} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Buradan $x_t - U(N_\Phi)$ elde edilir.

$iii)$, $i)$ ve $ii)$'nin sonucudur.

2.2.8 Teorem

Herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi için $S_\Phi \subseteq S$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

İspat.

$\Rightarrow$ Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H^*$ olacak şekilde bir $H^* > 0$ sayısı vardır. $x_t \to U(S_\Phi)$ ve $N_r = |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}|$ olsun. (1) göz önüne alınırsa her $\varepsilon > 0$ ve $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ diyelim ve $t_{r-1} < n < t_r$ olacak şekilde bir n seçelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\{t \leq n : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| &\leq \frac{1}{t_{r-1}}\left|\{t \leq t_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{1}{t_{r-1}}\{N_1 + N_2 + ... + N_{r_0} + N_{r_0+1} + ... + N_r\} \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \frac{1}{t_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + ... + h_r\frac{N_r}{h_r}\right\} \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \frac{1}{t_{r-1}}\left(\sup_{r>r_0}\frac{N_r}{h_r}\right)\{h_{r_0+1} + ... + h_r\} \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \frac{t_r - t_{r_0}}{t_{r-1}}\varepsilon \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \varepsilon q_r \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \varepsilon H
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $S \subseteq S_\Phi$ elde edilir.

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. Bu taktirde $q_{r_j} > j$ olacak şekilde $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisinin bir (t_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, t_{r_j-1} < i \leq 2t_{r_j-1}, (j = 1, 2, 3, ...) \\ 0, \text{d d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in N_\Phi$ fakat $x \notin |\sigma_1|$'dir. Teorem 2.2.6 dan $x \in S_\Phi$'dır. Fakat $x \notin S$' dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.2.9 Teorem

Herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi için $S \subseteq S_\Phi$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r > 1$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

İspat:

$\Rightarrow$ Kabul edelim ki $\limsup_r q_r > 1$ olsun. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1, \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $\frac{h_r}{t_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ elde edilir. $x_t \to U(S)$ ise $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ve $I_r = [t_{r-1}, t_r]$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_r}\left|\{t \leq t_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| &\geq \frac{1}{t_r}\left|\{t \leq I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\left|\{t \leq I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $S \subseteq S_\Phi$ elde edilir.

$\Leftarrow \liminf_r q_r = 1$ olsun.Teorem 2.2.8 deki yol takip edilirse $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{t_{r_j}}{t_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{t_{r_j-1}}{t_{r_{j-1}}} > j$ olacak şekilde $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisinin bir (t_{r_j}) alt dizisini seçelim ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in I_{r_j}, (j = 1, 2, 3...) \\ \quad 0, \text{d d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. x'in sınırlı olduğu aşikârdır ve $x \in |\sigma_1|$ fakat $x \notin N_\Phi$'dır. Buradan $x \notin S_\Phi$ ve $x \in S$ olduğu görülür. O halde $S \subseteq S_\Phi$ olur. Bu da teoremin ispatıdır.

2.2.10 Teorem

$(x_t) \in S \cap S_\Phi$ ise $S_\Phi - \lim x_t = S - \lim x_t$ dir. Böylece herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi için (x_t) dizisinin $S_\Phi-$limiti tektir (Fridy ve Orhan, 1993).

İspat:

Kabul edelim ki $S - \lim x_t = U, S_\Phi - \lim x_t = U^*$ ve $U \neq U^*$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon < \frac{1}{2}|U - U^*|$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{t \leq n : |x_t - U^*| \geq \varepsilon\}\right| = 1$$

elde ederiz. Bu durumda $\frac{1}{n}\left|\{t \leq n : |x_t - U^*| \geq \varepsilon\}\right|$ istatistiksel limit ifadesinin t_m-inci terimini ele alalım. Bu taktirde $I_r = [t_{r-1}, t_r]$ için,

$$\begin{aligned}\left|\{t \in \cup_{r=1}^m I_r : |x_t - U^*| \geq \varepsilon\}\right| &= \frac{1}{t_m}\sum_{r=1}^m \left|\{t \in I_r : |x_t - U^*| \geq \varepsilon\}\right| \\ &= \left(\sum_{r=1}^m h_r\right)^{-1} \sum_{r=1}^m h_r t_r\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$t_r = \frac{1}{h_r}\left|\{t \in I_r : |x_t - L^*| \geq \varepsilon\}\right| \to 0$$

dır. Çünkü $x_t \to U^*(S_\Phi)$ idi. $\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi olduğundan (1) ifadesi t'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür ve $m \to \infty$ için sıfır olur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{t_m}\left|\{t \in \cup_{r=1}^m I_r : |x_t - U^*| \geq \varepsilon\}\right|$$

dizisi

$$\left\{\frac{1}{n}\left|\{t\leq n : |x_t-U^*|\geq\varepsilon\}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\frac{1}{n}\left|\{t\leq n : |x_t-U^*|\geq\varepsilon\}\right|\to 1$$

ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{N}$ nin bir H^* alt kümesinin μ dereceden $\Phi-$yoğunluğu

$$\delta_\Phi^\mu(H^*)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t\in I_r : t\in H^*\}|$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.11 Tanım

$\Phi=(t_r)$ bir lacunary dizi, $r\to\infty$ için $h_r=t_r-t_{r-1}$, $I_r=(t_{r-1},t_r]$ ve $0<\mu\leq 1$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}\left|\{t\in I_r : |x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

ise $x=(x_t)$ dizisi U sayısına μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir $x=(x_t)$ dizisi μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\Phi^\mu-\lim x_t=U$ veya $x_t\to U(S_\Phi^\mu)$ ile gösterilir. μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_\Phi^\mu=\left\{x=(x_t) : \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}\left|\{t\in I_r : |x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|=0\right\}$$

ile gösterilir (Şengül ve Et, 2014). Ayrıca $\mathbb{N}$ nin bir H^* alt kümesinin μ dereceden $\Phi-$yoğunluğu

$$\delta_\Phi^\mu(H^*)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t\in I_r : t\in H^*\}|$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.12 Lemma

$\Phi=(t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r=(t_{r-1},t_r]$ ve $H^*\subseteq\mathbb{N}$ olsun. $0<\mu\leq\eta\leq 1$ için $\delta_\Phi^\eta(H^*)\leq\delta_\Phi^\mu(H^*)$ dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$0<\mu\leq\eta\leq 1$ ve $h_r^\mu\leq h_r^\eta$ olsun. Aynı zamanda $\frac{1}{h_r^\eta}\leq\frac{1}{h_r^\mu}$ olduğundan ,

$$\frac{1}{h_r^\eta}|\{\{t\in I_r : |x_t-U|\geq\varepsilon\}\,|\leq\frac{1}{h_r^\mu}|\,\{t\in I_r : |x_t-U|\geq\varepsilon\}\,|$$

olur. Buradan $\delta_\Phi^\eta(H^*)\leq\delta_\Phi^\mu(H^*)$ sonucu çıkar.

2.2.13 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. $0 < \mu \leq 1$ olmak üzere μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda lacunary istatistiksel yakınsaktır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

Aşikardır ki $0 < \mu \leq 1$ için ve $h_r^\mu \leq h_r$ olduğundan aynı zamanda $\frac{1}{h_r} \leq \frac{1}{h_r^\mu}$ eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{h_r}|\{t \in I_r : t \in H^*\}| \leq \frac{1}{h_r^\mu}|\{t \in I_r : t \in H^*\}|$$

olur. Diğer taraftan $r \to \infty$ için limit alınırsa $x_t \to U(S_\Phi^\mu)$ den $x_t \to U(S_\Phi)$ yakınsaklğı elde edilir. Ek olarak $0 < \mu \leq 1$ için μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Ancak $\mu > 1$ için iyi tanımlı değildir. Örnek olarak $x = (x_t)$ dizisini

$$x_t = \begin{cases} 1, & t = 2m \text{ ise} \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0, & t \neq 2m \text{ ise} \qquad \text{d d} \end{cases}$$

şeklinde alalım. $\mu > 1$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} |\{t \in I_r : |x_t - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{t_r - t_{r-1}}{2h_r^\mu} = \frac{h_r}{2h_r^\mu} = 0$$

olup $S_\Phi^\mu - \lim x_t = 1$ ve,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} |\{t \in I_r : |x_t| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{t_r - t_{r-1}}{2h_r^\mu} = \frac{h_r}{2h_r^\mu} = 0$$

olup $S_\Phi^\mu - \lim x_t = 0$ dır. Oysa bu sonuçlara göre $x = (x_t)$ dizisi hem 1 e hemde 0 a μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olur aksine bu mümkün değildir.

2.2.14 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $x = (x_t), y = (y_t)$ birer dizi olsun. $0 < \mu \leq 1$ için

$i)$ $S_\Phi^\mu - \lim x_t = x_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_\Phi^\mu - \lim(cx_t) = cx_0$,

$ii)$ $S_\Phi^\mu - \lim x_t = x_0$ ve $S_\Phi^\mu - \lim y_t = y_0$ ise $S_\Phi^\mu - \lim(x_t + y_t) = (x_0 + y_0)$

dır (Şengül ve Et, 2014).

2.2.15 Tanım

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \leq 1$ olsun. Her bir r için $(t_r^*) \in I_r$ olmak üzere x in $(x_{t_r^*})$ alt dizisi vardır öyleki $\lim x_{t_r^*} = U$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\left\{t \in I_r : \left|x_t - x_{t_r^*}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_t)$ dizisine $S_\Phi^\mu-$Cauchy dizisi denir (Şengül ve Et, 2014).

2.2.16 Tanım

Herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \leq 1$ olsun. $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına μ dereceden kuvvetli $p-$lacunary yakınsaktır denir ve μ dereceden kuvvetli $p-$lacunary dizilerin uzayı $N_{\Phi,p}^\mu$ ile gösterilir, yani

$$N_{\Phi,p}^\mu = \left\{x = (x_t) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0, \text{en az bir } U \text{ için}\right\}$$

dır. Bu durumda $\Phi = (2^r)$ alırsak μ dereceden kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi

$$W_p^\mu = \left\{x = (x_t) : \exists L \in, \lim_n \frac{1}{n^\mu} \sum_{t=1}^{n} |x_t - U|^p = 0\right\}$$

elde edilir. $U = 0$ olması durumun da bu uzayı $W_{p,0}^\mu$ ile göstereceğiz. Aynı zamanda $N_{\Phi,p}^\mu$ uzayı $U = 0$ olması durumunda $N_{\Phi,p,0}^\mu$ ile gösterilir (Şengül ve Et, 2014).

2.2.17 Tanım

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. Bu taktirde $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için $x_t \to U(N_{\Phi,p}^\mu)$ ise $x_t \to U(S_\Phi^\mu)$ olup en az bir μ için $N_{\Phi,p}^\mu \subseteq S_\Phi^\eta$ kapsaması kesindir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\varepsilon > 0$ ve $x_t \to U(N_{\Phi,p}^\mu)$ ise

$$\begin{aligned}\sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p &\geq \sum_{t\in I_r, |x_t-U|\geq\varepsilon} |x_t - U|^p + \sum_{t\in I_r, |x_t-U|<\varepsilon} |x_t - U|^p \geq \sum_{t\in I_r, |x_t-U|\geq\varepsilon} |x_t - U|^p \\ &\geq \varepsilon^p \left|\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r^{\mu}}\sum_{t\in I_r}|x_t-U|^p &\geq \frac{1}{h_r^{\mu}}\left|\{t\in I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|\varepsilon^p\\ &\geq \frac{1}{h_r^{\eta}}\left|\{t\in I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|\varepsilon^p\end{aligned}$$

yazılabilir. r ye göre limit alınırsa $x_t\to U(S_\Phi^\mu)$ elde edilir. Böylece $N_{\Phi,p}^\mu\subseteq S_\Phi^\mu$ dır. $\mu=\eta$ ve $p=1$ için kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. $\Phi=(t_r)$ lacunary dizisi verilsin.

$$x_t=\begin{cases}[\sqrt{h_r}],t=1,2,3...,[\sqrt{h_r}]\\ 0,\text{d d}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_t)$ dizisini göz önüne alalım. $\forall\varepsilon>0,\frac{1}{2}<\mu\leq1,r\to\infty$ için

$$\frac{1}{h_r^{\mu}}\left|\{t\in I_r:|x_t-0|\geq\varepsilon\}\right|=\frac{[\sqrt{h_r}}{h_r^{\mu}}\to0$$

elde edilir. Yani $\frac{1}{2}<\mu\leq1$ için $x_t\to0(S_\Phi^\mu)$ dır. Diğer taraftan $0<\mu<1$ ve $p=1$ için

$$\frac{1}{h_r^{\mu}}\sum_{t\in I_r}|x_t-0|^p=\frac{1}{h_r^{\mu}}\sum_{t\in I_r}|x_t|=\frac{[\sqrt{h_r}][\sqrt{h_r}]}{h_r^{\mu}}\to\infty$$

olup $\mu=1$ için

$$\frac{1}{h_r^{\mu}}\sum_{t\in I_r}|x_t|=\frac{[\sqrt{h_r}][\sqrt{h_r}]}{h_r^{\mu}}\to1$$

dir. $0<\alpha\leq1$ için $x_t\nrightarrow0(N_{\Phi,p}^\mu)$ dır. Yani $\frac{1}{2}<\mu\leq1$ için $x\in S_\Phi^\mu-N_{\Phi,p}^\mu$ dir.

2.2.18 Teorem

$\Phi=(t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r=(t_{r-1},t_r]$ ve $0<\mu\leq1$ için $\liminf_r q_r>1$ ise $S^\mu\subseteq S_\Phi^\mu$ dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\liminf_r q_r>1$ olduğunu kabul edelim. Yeterince büyük r için $q_r\geq1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$q_r\geq1+\delta\Rightarrow-\left(\frac{t_{r-1}}{t_r}\right)\geq-\left(\frac{1}{1+\delta}\right)\Rightarrow1-\left(\frac{t_{r-1}}{t_r}\right)\geq1-\left(\frac{1}{1+\delta}\right)$$

olup buradan da $0<\mu\leq1$ için

$$\frac{h_r}{t_r}\geq\frac{\delta}{1+\delta}\Rightarrow\left(\frac{h_r}{t_r}\right)^\mu\geq\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^\mu\Rightarrow\frac{1}{t_r^\mu}\geq\frac{\delta^\mu}{(1+\delta)^\mu}\frac{1}{h_r^\mu}$$

elde edilir. $x_t\to U(S^\mu)$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve yeterince büyük r ler için

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_r^\mu}|\{t &\leq t_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}|\geq\frac{1}{t_r^\mu}|\{t\leq I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}|\\ &\geq \frac{\delta^\mu}{(1+\delta)^\mu}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t\leq I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}|\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_t\to U(S_\Phi^\mu)$ dır.Bu da $S^\mu\subseteq S_\Phi^\mu$ olduğunu gösterir (Şengül ve Et, 2014).

2.2.19 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \leq 1$ için $\limsup_r q_r < \infty$ ise $S_\Phi^\mu \subseteq S$ dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\limsup_r q_r < \infty$ ise her r için $q_r < H^*$ olacak şekilde $H^* > 0$ vardır. $x_t \to U(S_\Phi^\mu)$ ve $\eta_r = |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}|$ olduğunu kabul edelim. $0 < \mu \leq 1$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\mu} |\{t \leq I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ ve $0 < \mu \leq 1$ için $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ için

$$\frac{\eta_r}{h_r^\mu} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $h_r^\mu \leq h_r$ olduğundan $\frac{\eta_r}{h_r} \leq \frac{\eta_r}{h_r^\mu}$ olup $\frac{\eta_r}{h_r} < \varepsilon$ olur.

$M = \max\{\eta_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ ve ne de $t_{r-1} < n \leq t_r$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}|\{t \leq n : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{t_{r-1}}|\{t \leq t_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{t_{r-1}}\{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + ... + \eta_{r_0} + \eta_{r_0+1} + ... + \eta_r\} \\
&\leq \frac{M}{t_{r-1}} r_0 + \frac{1}{t_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{\eta_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + ... + h_r \frac{\eta_r}{h_r} \right\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{t_{r-1}} + \frac{1}{t_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{\eta_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + ... + h_r\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{t_{r-1}} + \varepsilon \frac{t_r - t_{r_0}}{t_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0 M}{t_{r-1}} + \varepsilon q_r \leq \frac{r_0 M}{t_{r-1}} + \varepsilon + \varepsilon H
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_t \to U(S)$ olup $S_\Phi^\mu \subseteq S$ dir.

2.2.20 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \leq 1$ için

$$\lim_{r \to \infty} \inf \frac{h_r^\mu}{t_r} > 0$$

ise $S \subseteq S_\Phi^\mu$ dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{t \leq t_r : |t_k - U| \geq \varepsilon\} \supset \{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_r}|\{t \le t_r : |x_t - U| \ge \varepsilon\}| &\ge \frac{1}{t_r}|\{t \in I_r : |x_t - U| \ge \varepsilon\}| \\ &= \frac{h_r^\mu}{t_r}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t \in I_r : |x_t - U| \ge \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. $r \to \infty$ için limit alınır ve $\lim_r \inf \frac{h_r^\mu}{t_r} > 0$ ifadesi kullanılırsa

$$x_t \to U(S) \Rightarrow x_t \to U(S_\Phi^\mu)$$

olur.

2.2.21 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. $0 < \mu \le 1$ ve $0 < p < \infty$ için $\lim\inf_r q_r > 1$ ise $w_p^\mu \subseteq N_{\Phi,p}^\mu$ dir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\lim\inf_r q_r > 1$ ise her $r \ge 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $0 < \mu \le 1$ ve $x \in w_{p,0}^\mu$ için

$$\begin{aligned} \tau_r^\mu &= \frac{1}{h_r^\mu}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i|^p - \frac{1}{h_r^\mu}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i|^p \\ &= \frac{t_r^\mu}{h_r^\mu}\left(\frac{1}{t_r^\mu}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i|^p\right) - \frac{t_{r-1}^\mu}{h_r^\mu}\left(\frac{1}{t_{r-1}^\mu}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i|^p\right) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $h_r = t_r - t_{r-1}$ eşitliğinden

$$\frac{t_r^\mu}{h_r^\mu} \le \frac{(1+\delta)^\mu}{\delta^\mu} \text{ve} \frac{t_{r-1}^\mu}{h_r^\mu} \le \frac{1}{\delta^\mu}$$

elde edilir. $\frac{1}{t_r^\mu}\sum_{i=1}^{t_r}|x_i|^p$ ve $\frac{1}{t_{r-1}^\mu}\sum_{i=1}^{t_{r-1}}|x_i|^p$ terimlerinin her ikisi de 0 a yakınsar ve τ_r^μ da 0 a yakınsar. $x \in N_{\Phi,p,0}^\mu$ dır. Böylece $w_p^\mu \subseteq N_{\Phi,p}^\mu$ dir.

2.2.22 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. $0 < \mu \le \eta \le 1$ ve p pozitif reel sayısı için $N_{\Phi,p}^\mu \subseteq N_{\Phi,p}^\eta$ dır ve bu kapsama en az bir $\mu < \eta$ için kesindir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \mu \le \eta \le 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\eta}\sum_{t \in I_r}|x_t - U|^p \le \frac{1}{h_r^\mu}\sum_{t \in I_r}|x_t - U|^p$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu da $N^{\mu}_{\Phi,p} \subseteq N^{\eta}_{\Phi,p}$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_t = \begin{cases} 1, t = n^2 \\ 0, \text{d d} \end{cases}, n = 1, 2, 3, ...$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\eta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in N^{\eta}_{\Phi,p}$, $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin N^{\mu}_{\Phi,p}$ dir.

2.2.23 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ için $S^{\mu}_{\Phi} \subseteq S^{\eta}_{\Phi}$ dır ve bu kapsama en az bir $\mu < \eta$ için kesindir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$0 < \mu \leq \eta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h^{\eta}_r} |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h^{\mu}_r} |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliğini yazabiliriz, buradan $S^{\mu}_{\Phi} \subseteq S^{\eta}_{\Phi}$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_t)$ dizisini

$$x_t = \begin{cases} [\sqrt{h_r}] & , t = 1, 2, 3, ..., [\sqrt{h_r}] \\ 0 & , \text{d d} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\eta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S^{\eta}_{\Phi}$, $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin S^{\mu}_{\Phi}$ dır.

2.2.24 Teorem

$\limsup_r \frac{t_r}{t^{\mu}_{r-1}} < \infty$ ise $\mu \in (0, 1]$ için $N_{\Phi,p} \subseteq w^{\mu}_p$ dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$\limsup_r \frac{t_r}{t^{\mu}_{r-1}} < \infty$ ise her $r \geq 1$ için $\frac{t_r}{t^{\mu}_{r-1}} < M$ olacak şekilde bir M vardır. $x \in N^{\mu}_{\Phi,p,0}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $i = 1, 2, 3, ...$ için $\sup_{i \geq R} \tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < T$ olacak şekilde $R > 0$ ve $T > 0$ sayılarını bulabiliriz. $t_{r-1} < k \leq t_r$ ve $r > R$ olmak üzere

$$\frac{1}{k^{\mu}} \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \leq \frac{1}{t^{\mu}_{r-1}} \sum_{i=1}^{t_r} |x_i|^p = \frac{1}{t^{\mu}_{r-1}} \left(\sum_{I_1} |x_i|^p + \sum_{I_2} |x_i|^p + ... + \sum_{I_r} |x_i|^p \right)$$

$$= \frac{t_1}{t^{\mu}_{r-1}} \tau_1 + \frac{t_2 - t_1}{t^{\mu}_{r-1}} \tau_2 + ... + \frac{t_R - t_{R-1}}{t^{\mu}_{r-1}} \tau_R + \frac{t_{R+1} - t_R}{t^{\mu}_{r-1}} \tau_{R+1} + ... + \frac{t_r - t_{r-1}}{t^{\mu}_{r-1}} \tau_r$$

$$\leq (\sup_{i \geq 1} \tau_i) \frac{t_R}{t^{\mu}_{r-1}} + (\sup_{i \geq R} \tau_i) \frac{t_r - t_R}{t^{\mu}_{r-1}} < T \frac{t_R}{t^{\mu}_{r-1}} + \varepsilon M$$

$t_{r-1} \to \infty$ iken $k \to \infty$ olduğundan $\frac{1}{k^{\mu}} \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \to 0$ elde edilir. Böylece $x \in w^{\mu}_{p,0}$ dır.

2.2.25 Teorem

$\mu \in (0,1]$ olsun. $x \in w^{\mu} \cap N_{\Phi}^{\mu}$ ve $\limsup_r \frac{t_r}{t_{r-1}^{\mu}} < \infty$ ise $U_{w_p^{\mu}}(x) = U_{N_{\Phi}^{\mu}}(x)$ dir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$w_p^{\mu} - \lim x_t = U, N_{\Phi,0}^{\mu} - \lim x_t = U^*$ ve $U \neq U^*$ olsun. $\limsup_r \frac{t_r}{t_{r-1}^{\mu}} < \infty$ olduğundan Teorem 2.2.22'den $N_{\Phi,p,0}^{\mu} \subseteq w_{p,0}^{\mu}$ olur.

$(x - U^*) \in N_{\Phi,p,0}^{\mu}$ olduğundan $(x - U^*) \in w_{p,0}^{\mu}$ dır. Bu durumda $p = 1$ için

$$\frac{1}{t^{\mu}} \sum_{i=1}^{t} |x_i - U^*| \to 0$$

dır.

$$\frac{1}{t^{\mu}} \sum_{i=1}^{t} |x_i - U^*| + \frac{1}{t^{\mu}} \sum_{i=1}^{t} |x_i - U| \geq \frac{1}{t^{\mu}} |U - U^*| > 0$$

sol taraftaki her iki terim sıfıra yakınsadığı için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $U = U^*$'dır.

2.2.26 Teorem

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ olmak üzere,

$i)$ Bu durumda $\lim_{r\to\infty} \inf \frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\eta}} > 0$ ise $S_{\Phi'}^{\eta} \subseteq S_{\Phi}^{\mu}$, (2)

$ii)$ Bu durumda $\lim_{r\to\infty} \frac{\ell_r}{h_r^{\nu}} = 1$ ise $S_{\Phi}^{\mu} \subseteq S_{\Phi'}^{\eta}$ (3)

dır (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$i)$ Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve (2) sağlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\{t \in J_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\} \supseteq \{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}$$

ve $I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r], h_r = t_r - t_{r-1}, \ell_r = s_r - s_{r-1}$ için

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}} |\{t \in J_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\eta}} \frac{1}{h_r^{\mu}} |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $r \to \infty$ için limit alınır ve (2) kullanılırsa $S_{\Phi'}^{\eta} \subseteq S_{\Phi}^{\mu}$ olur.

$ii)$ $x = (x_t) \in S_\Phi^\mu$ olsun ve (3) sağlansın. $I_r \subset J_r$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^\eta}\left|\{t \in J_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| &= \frac{1}{\ell_r^\eta}\left|\{s_{r-1} < t \leq t_{r-1} : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\ell_r^\eta}\left|\{t_r < t \leq s_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\ell_r^\eta}\left|\{t_{r-1} < t \leq t_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \frac{t_{r-1} - s_{r-1}}{\ell_r^\eta} + \frac{s_r - k_r}{\ell_r^\eta} + \frac{1}{\ell_r^\eta}\left|\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \frac{\ell_r - h_r^\eta}{h_r^\eta} + \frac{1}{h_r^\eta}\left|\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\nu} - 1\right) + \frac{1}{h_r^\mu}\left|\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{r\to\infty} \frac{\ell_r}{h_r^\eta} = 1$ ve $x = (x_t) \in S_\Phi^\mu$ olduğundan $S_\Phi^\mu \subseteq S_\Phi^\mu \subseteq S_{\Phi'}^\eta$ elde edilir.

Teorem 2.2.26.den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

2.2.27 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi ve $\mu \in (0,1]$ olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (2) eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde

$i)$ $S_{\Phi'}^\mu \subseteq S_\Phi^\mu$

$ii)$ $S_{\Phi'} \subseteq S_\Phi^\mu$

$iii)$ $S_{\Phi'} \subseteq S_\Phi$

dır (Şengül ve Et, 2014).

2.2.28 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi ve $\mu \in (0,1]$ olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (3) eşitliği sağlansın. Bu taktirde

$i)$ $S_\Phi^\mu \subseteq S_{\Phi'}^\mu$

$ii)$ $S_\Phi^\mu \subseteq S_{\Phi'}$

$iii)$ $S_\Phi \subseteq S_{\Phi'}$

dır (Şengül ve Et, 2014).

2.2.29 Teorem

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ olmak üzere,

$i)$ Bu durumda (2) eşitsizliği sağlanırsa $N_{\Phi',p}^\eta \subset N_{\Phi,p}^\mu$,

$ii)$ Bu durumda (3) eşitliği sağlansın ve $x \in \ell_\infty$ olsun. O zaman $N^\mu_{\Phi,p} \subset N^\eta_{\Phi',p}$ olur (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$i)$ $I_r = (t_{r-1}, t_r]$, $J_r = (s_{r-1}, s_r]$ olmak üzere her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. Aynı zamanda (2) eşitsizliği sağlansın.

$$\frac{1}{\ell^\eta_r}\sum_{t\in J_r}|x_t - U|^p > \frac{h^\mu_r}{\ell^\eta_r}\frac{1}{h^\mu_r}\sum_{t\in I_r}|x_t - U|^p$$

olduğundan $N^\eta_{\Phi',p} \subset N^\mu_{\Phi,p}$ elde edilir.

$ii)$ $x = (x_t) \in \ell_\infty \cap N^\mu_{\Phi,p}$ olsun ve (3) eşitliği sağlansın. $x = (x_t) \in \ell_\infty$ olduğundan $|x_t - U| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olduğundan $h_r \leq \ell_r$ dir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell^\eta_r}\sum_{t\in J_r}|x_t - U|^p &= \frac{1}{\ell^\eta_r}\sum_{t\in J_r - I_r}|x_t - U|^p + \frac{1}{\ell^\eta_r}\sum_{t\in I_r}|x_t - U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell^\eta_r}\right)M^p + \frac{1}{\ell^\eta_r}\sum_{t\in I_r}|x_t - U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h^\eta_r}{h^\eta_r}\right)M^p + \frac{1}{h^\eta_r}\sum_{t\in I_r}|x_t - U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h^\eta_r} - 1\right)M^p + \frac{1}{h^\mu_r}\sum_{t\in I_r}|x_t - U|^p
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece $\ell_\infty \cap N^\mu_{\Phi,p} \subset N^\eta_{\Phi',p}$.

2.2.30 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi ve $\mu \in (0,1]$. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (2) eşitsizliği sağlanırsa,

$i)$ $N^\mu_{\Phi',p} \subseteq N^\mu_{\Phi,p}$,

$ii)$ $N_{\Phi',p} \subseteq N^\mu_{\Phi,p}$,

$iii)$ $N_{\Phi',p} \subseteq N_{\Phi,p}$

dir (Şengül ve Et, 2014).

2.2.31 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi' = (s_r)$ iki lacunary dizisi ve $\mu \in (0,1]$. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (3) eşitliği sağlanırsa,

$i)$ $\ell_\infty \cap N^\mu_{\Phi,p} \subset N^\mu_{\Phi',p}$,

$ii)$ $\ell_\infty \cap N^\mu_{\Phi,p} \subset N_{\Phi',p}$,

$iii)$ $\ell_\infty \cap N_{\Phi,p} \subset N_{\Phi',p}$

dir (Şengül ve Et, 2014).

2.2.32 Teorem

$0 < \mu \leq \eta \leq 1, 0 < p < \infty, I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun.

$i)$ Bu durumda (2) eşitsizliği sağlanırsa, bir dizi U ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi',p}-$toplanabilir ise U ye $S^{\mu}_{\Phi}-$istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ Bu durumda (3) eşitliği sağlansın ve $x = (x_t) \in l_\infty$ bir dizi olsun. Bir dizi U ye $S^{\mu}_{\Phi}-$istatistiksel yakınsak ise U ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi',p}-$toplanabilirdir (Şengül ve Et, 2014).

İspat:

$i)$ Her $x = (x_t)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in J_r} |x_t - U|^p &= \sum_{t \in J_r, |x_t - U| \geq \varepsilon} |x_t - U|^p + \sum_{t \in J_r, |x_t - L| < \varepsilon} |x_t - U|^p \\
&\geq \sum_{t \in I_r, |x_t - U| \geq \varepsilon} |x_t - U|^p + \sum_{t \in I_r, |x_t - U| < \varepsilon} |x_t - U|^p \\
&\geq \sum_{t \in I_r, |x_t - U| \geq \varepsilon} |x_t - U|^p
\end{aligned}$$

$$\sum_{t \in J_r} |x_t - U|^p \geq |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t \in J_r} |x_t - U|^p &\geq \frac{1}{\ell_r^\eta} |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \\
&\geq \frac{h_r^\mu}{\ell_r^\eta} \frac{1}{h_r^\mu} |\{t \in I_r : |x_t - U| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p
\end{aligned}$$

(1) eşitsizliği sağlandığı için $x = (x_t)$ dizisi U ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi',p}-$toplanabilir ise U ye $S^{\mu}_{\Phi}-$istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $S^{\mu}_{\Phi} - \lim x_t = U$ ve $x = (x_t) \in \ell_\infty$ olsun. $x \in \ell_\infty$ ise $|x_t - U| \leq M$ olacak şekilde

$M > 0$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in J_r}|x_t-U|^p &= \frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in J_r-I_r}|x_t-U|^p+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in Ir}|x_t-U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r-h_r}{\ell_r^{\eta}}\right)M^p+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in I_r}|x_t-U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r-h_r^{\eta}}{\ell_r^{\eta}}\right)M^p+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in I_r}|x_t-U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}-1\right)M^p+\frac{1}{h_r^{\eta}}\sum_{t\in I_r,|x_t-U|\geq\varepsilon}|x_t-U|^p+\frac{1}{h_r^{\eta}}\sum_{t\in I_r,|x_t-L|<\varepsilon}|x_t-U|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}-1\right)M^p+\frac{M^p}{h_r^{\eta}}\left|\{t\in I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|+\frac{h^r}{h_r^{\eta}}\varepsilon^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}-1\right)M^p+\frac{M^p}{h_r^{\mu}}\left|\{t\in I_r:|x_t-U|\geq\varepsilon\}\right|+\frac{\ell^r}{h_r^{\eta}}\varepsilon^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. (3) eşitliği sağlandığı için $x=(x_t)$ dizisi U ye $S_{\Phi}^{\mu}-$ istatistiksel yakınsak ise U ye kuvvetli $N_{\Phi',p}^{\eta}-$toplanabilirdir.

2.2.33 Sonuç

$\Phi=(t_r)$ ve $\Phi'=(s_r)$ iki lacunary dizisi, $\mu\in(0,1]$ ve her $r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subset J_r$ olsun. (2) eşitsizliği sağlanırsa,

$i)$ $N_{\Phi',p}^{\mu}\subseteq S_{\Phi}^{\mu}$,

$ii)$ $N_{\Phi',p}\subseteq S_{\Phi}^{\mu}$,

$iii)$ $N_{\Phi',p}\subseteq S_{\Phi}$

dır (Şengül ve Et, 2014).

2.2.34 Sonuç

$\Phi=(t_r)$ ve $\Phi'=(s_r)$ iki lacunary dizisi, $\mu\in(0,1]$ ve her $r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subset J_r$ olsun. (3) eşitliği sağlanırsa,

$i)$ $\ell_\infty\cap S_{\Phi}^{\mu}\subseteq N_{\Phi',p}^{\mu}$,

$ii)$ $\ell_\infty\cap S_{\Phi}^{\mu}\subseteq N_{\Phi',p}$,

$iii)$ $\ell_\infty\cap S_{\Phi}\subseteq N_{\Phi',p}$

dir (Şengül ve Et, 2014).

3 FUZZY SAYILAR VE FUZZY SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, fuzzy küme tanımı ve fuzzy küme üzerindeki cebirsel özellikler ile fuzzy sayısı kavramları incelenmiştir. Ayrıca fuzzy dizisi, fuzzy dizilerinin yakınsaklığı ve fuzzy dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler verilmiştir.

3.1 Fuzzy Kümeler

3.1.1 Tanım

X herhangi bir küme ve $A \subset X$ olsun.Böylece

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \to R$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyondan yararlanarak kümesinin herhangi bir elemanının kümesinin eleman olup olmadığını kesin olarak anlamamıza yardımcı olur.

Aşağıda Zadeh (1965) tarafından tanımlanan bazı tanımları verelim.

3.1.2 Tanım

χ, elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A fuzzy kümesi, χ deki herbir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir.

χ deki bir A fuzzy kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \to [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in [0,1], x \notin A$ için $X_A(x)$=0 biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A fuzzy kümesi,

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde ifade ederiz. Burada $X_A(x)$ in değeri A fuzzy kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A fuzzy kümesindeki

x in en yüksek üyelik derecesidir. Bu durumda E kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya $X_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur (Zadeh, 1965).

3.1.3 Tanım

Bir fuzzy kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ mevcut olmasıdır (Zadeh, 1965).

3.1.4 Tanım

A bir fuzzy küme olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. A fuzzy kümesinin $\alpha-$kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $0-$kesim kümesi $clx \in R : X_A(x) > 0$ şeklinde tanımlanır.

Fuzzy kümelerde kullanılan "destek" kavramını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

3.1.5 Tanım

A bir fuzzy küme ve A nin desteği

$$\text{supp}\,(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Zadeh, 1965).

3.1.6 Tanım

R^n n boyutlu öklid uzayı olsun. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0, 1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır. Konveksliğin diğer bir tanımı da aşağıdaki şekilde verilebilir (Zadeh, 1965).

3.1.7 Tanım

Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\mu \in [0, 1]$ ve her $y_1, y_2 \in \chi$ için

$$X_A(\mu y_1 + (1-\mu)y_2) \geq \min\{X_A(y_1), X_A(y_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Zadeh, 1965).

3.2 Fuzzy Sayılar

Bu kısımda aralık kavramı, fuzzy sayı kavramı verilmiş ve bu kavramların cebirsel özellikleri incelenmiştir.

3.2.1 Tanım

a_1 ve b_1 iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in R : a_1 \leq x \leq b_1\}$$

olarak ifade edilen reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

B bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını $\underline{B}$ ve $\overline{B}$ ile göstereceğiz. Yani $B = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$ şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir $[b_1, b_1]$ aralığını a reel sayısına karşılık getireceğiz.

B ve C yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar için tanımlanmış olan "$\leq$" ve "$<$" sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$B \leq C \Leftrightarrow \underline{B} \leq \underline{C} \text{ ve } \overline{B} \leq \overline{C}$$
$$B < C \Leftrightarrow \underline{B} < \underline{C} \text{ ve } \overline{B} < \overline{C}.$$

B ve C aralıkları birer sayı gibi düşünülebileceği için bu aralıkların oluşturduğu kümede toplama işlemi $B = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$ ve $C = \left[\underline{C}, \overline{C}\right]$ olmak üzere

$$\left[\underline{B}, \overline{B}\right] + \left[\underline{C}, \overline{C}\right] = \left[\underline{B} + \underline{C}, \overline{B} + \overline{C}\right]$$

şeklinde ifade edilir. İlaveten iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

B ve C aralıkları arasındaki çıkarma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left[\underline{B}, \overline{B}\right] - \left[\underline{C}, \overline{C}\right] = \left[\underline{B} - \overline{C}, \overline{B} - \underline{C}\right]$$

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlık $\left[\underline{B}, \overline{B}\right]$ aralıkların kümesini D ile gösterelim. Herhangi iki $B, C \in D$ için

$$d(B, C) = \max\left(\left|\underline{B} - \underline{C}\right|, \left|\overline{B} - \overline{C}\right|\right)$$

şeklinde ifade edilen bir d fonksiyonunun D üzerinde bir metrik tanımlar ve (D, d) nin de bir tam metrik uzaydır (Moore, 1979). İlaveten $\leq$ bağıntısı D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

3.2.2 Tanım

Fuzzy sayısı aşağıdaki şartlar sağlayan bir $X : R \to [0, 1]$ fonksiyonudur.

$i)$ X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in R$ mevcuttur,

$ii)$ X fuzzy konvekstir, yani herhangi $x_1, y_1 \in R$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ için

$$X(\mu x_1 + (1 - \mu) y_1) \geq \min\{X(x_1), X(y_1)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

$iii)$ X üst-yarı-süreklidir,

$iv)$ $X^0 = \{x \in R : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır (Chang ve Zadeh, 1972).

Bütün reel fuzzy sayılar kümesini $L(R)$ ile göstereceğiz.

Üçgen üyelik fonksiyonu, $\{a, b, c\}$ olmak üzere üç parametre ile özelleştirilmiştir. Söz konusu üyelik fonksiyonunun denklemi ise,

$$\text{Üçgen}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases} .$$

$L(R)$ kümesinde $\alpha-$kesim kümeleri için bazı aritmetik işlemler bu şekilde tanımlanır.

$X, Z \in L(R)$ fuzzy sayılarının toplamının ve farkıysa

$$(X + Z)(x) = \sup_{x=y+t} \min\{X(y), Z(t)\}$$

ve

$$(X - Z)(x) = \sup_{x=y-t} \min\{X(y), Z(t)\}$$

şeklindedir (Dubois ve Prade, 1980).

Y ve Z gibi iki fuzzy sayının $\alpha-$kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise bu şekilde tanımlanır.

$Y, Z \in L(R)$ ve bunların $\alpha-$kesim kümeleri $\alpha \in [0, 1]$ için $[Y]^\alpha = \left[\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha\right]$ ve $[Z]^\alpha = \left[\underline{Z}^\alpha, \overline{Z}^\alpha\right]$ olsun. Bu takdirde

$$[Y + Z]^\alpha = \left[\underline{Y}^\alpha + \underline{Z}^\alpha, \overline{Y}^\alpha + \overline{Z}^\alpha\right],$$
$$[Y - Z]^\alpha = \left[\underline{Y}^\alpha - \overline{Z}^\alpha, \overline{Y}^\alpha - \underline{Z}^\alpha\right],$$

dir.

Bir Y fuzzy sayısının bir $t \in R$ reel sayısıyla çarpımıda

$$[t \cdot X]^{\alpha} = \begin{cases} \left[t \cdot \underline{X}^{\alpha}, t \cdot \overline{X}^{\alpha}\right], & t \geq 0 \text{ ise} \\ \left[t \cdot \overline{X}^{\alpha}, t \cdot \underline{X}^{\alpha}\right], & \text{d d} \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $[Y \pm Z]^{\alpha} = [Y]^{\alpha} \pm [Z]^{\alpha}$ ve $[t \cdot Y]^{\alpha} = t[Y]^{\alpha}$ yazılabilir.

Bunu aşağıdaki gibi basit cebirsel işlemler yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} [Y]^{\alpha} + [Z]^{\alpha} &= \{x \in R : Y(x) \geq \alpha\} + \{x \in R : Z(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R : Y(x) + Z(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R : (Y + Z)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= [Y + Z]^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [t \cdot Y]^{\alpha} &= \{x \in R : (tY)(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R : tY(x) \geq \alpha\} \\ &= t\{x \in R : Y(x) \geq \alpha\} \\ &= t\,[Y]^{\alpha} \end{aligned}$$

dir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca fuzzy sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir fuzzy sayı olur. Yani $s \in R$ için $\bar{s} \in L(R)$ fuzzy sayısı

$$\bar{s}(x) = \begin{cases} 1, & x = s \text{ ise} \\ 0, & x \neq s \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her s reel sayısı için $\bar{s} = [s, s]$ şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle R reel sayılar kümesi, $L(R)$ fuzzy sayılar kümesine gömülebilir (Kaufmann ve Gupta, 1984).

Fuzzy sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$Y, Z \in L(R)$ için "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı

$$Y \leq Z \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \underline{Y}^{\alpha} \leq \underline{Z}^{\alpha} \text{ ve } \overline{Y}^{\alpha} \leq \overline{Z}^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1984; Diamond ve Kloeden, 1994).

3.2.3 Tanım

$E \subset L(R)$ kümesi verilsin. Her $X \in E$ fuzzy sayısı için $X \leq T$ olacak şekilde bir T fuzzy sayısı varsa E kümesine üstten sınırlıdır ve T fuzzy sayısına da E kümesinin bir üst sınırlı denir. Eğer E kümesinin her μ üst sınırlı için $T \leq \mu$ ise T fuzzy sayısına E kümesinin en küçük üst sınırlı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır (Nanda, 1989).

$L(R)$ üzerinde Y ve Z gibi iki fuzzy sayısı arasındaki uzaklığı aşağıdaki şekilde tanımlarız.

$$\bar{d} : L(R) \times L(R) \to R$$
$$\bar{d}(Y, Z) \ = \ \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(Y^\alpha, Z^\alpha)$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_{H^*} Hausdorff metriğidir ve

$$d_{H^*}(Y^\alpha, Z^\alpha) = \max\left(\left|\underline{Y}^\alpha - \underline{Z}^\alpha\right|, \left|\overline{Y}^\alpha - \overline{Z}^\alpha\right|\right)$$

şeklinde tanımlanır. $\left(L(R), \bar{d}\right)$, bir tam metrik uzaydır (Diamond ve Kloeden, 1994). Bu metrik, R üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(R^n)$, R^n öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini göstersin. Bu takdirde $C(R^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $A, B \in C(R^n)$ için

$$B + C = \{t : t = x + y,\ x \in B \text{ ve } y \in C\}$$

ve her $C \in C(R^n)$ ve her $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x,\ x \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(R^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir. B ve C kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(B, C) = \max\left\{\sup_{b \in B} \inf_{c \in C} \|b - c\|, \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} \|b - c\|\right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile R^n deki alışılmış öklid normu gösterilmektedir. $(C(R^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir. Bir fuzzy sayının tanımı aşgıdaki biçimde genelleştirilebilir.

3.2.4 Tanım

$n-$boyutlu öklid uzayı R^n üzerindeki bir fuzzy sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X: R^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur:

$i)$ X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in R^n$ mevcuttur,

$ii)$ X bulanık konvekstir, yani herhangi $x, y \in R^n$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ için

$$X(\mu x + (1-\mu) y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

$iii)$ X üst-yarı-süreklidir,

$iv)$ $X^0 = \{x \in R^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün fuzzy sayıların kümesi $L(R^n)$ ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için X^α kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımdan, $X^\alpha \in C(R^n)$ olduğu açıktır. $L(R^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Z \in L(R^n)$ ve $t \in R$ olmak üzere

$$[X+Z]^\alpha = X^\alpha + Z^\alpha \text{ ve } [tX]^\alpha = tX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi, her bir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X,Z) = \left(\int_0^1 \delta_\infty (X^\alpha, Z^\alpha)^q \, d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty (X^\alpha, Z^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q \leq s$ için $d_q \leq d_s$ olmak üzere

$$d_\infty (X,Z) = \lim_{q \to \infty} d_q (X,Z)$$

olduğu açıktır. $(C(R^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır (Puri ve Ralescu, 1986).

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır. Aynı zamanda d metriği aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$d(cX, cZ) = |c| \, d(X,Z) \tag{4}$$

$$d(X+Z, Y+Z^*) \leq d(X,Y) + d(Z,Z^*). \tag{5}$$

3.3 Fuzzy Sayı Dizileri ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, Matloka (1986) tarafından verilen fuzzy dizilerinin tanımı ve cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Nuray ve Savaş (1995) tarafından verilen fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramının temel özellikleri ile fuzzy dizilerinin toplanabilme kavramları örneklerle verilmiştir.

3.3.1 Tanım

Fuzzy sayılarının bir $X = (X_t)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(R^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir t pozitif tamsayısına bir $X(t)$ fuzzy sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(t)$ yerine X_t yazacağız.

3.3.2 Tanım

$X_0 \in L(R^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 fuzzy sayısının $\varepsilon-$komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının $\varepsilon-$komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir (Matloka, 1986).

3.3.3 Tanım

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $t > N$ iken $d(X_t, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_t) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dır denir. Bu durumda $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_t$ mevcut değilse (X_t) dizisi ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(\mathcal{F})$ ile göstereceğiz (Matloka, 1986).

3.3.4 Örnek

$$X_t(x) = \begin{cases} \frac{t}{t+2}x + 1, & x \in \left[-\frac{t+2}{t}, 0\right] \text{ ise} \\ -\frac{t}{t+2}x + 1, & x \in (0, \frac{t+2}{t}] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi düşünelim. Bu fuzzy sayı dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0] \text{ ise} \\ -x + 1, & x \in (0, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{d} \end{cases}$$

fuzzy sayısıdır.

3.3.5 Teorem

Yakınsak bir $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir (Matloka, 1986).

3.3.6 Teorem

$X = (X_t)$ ve $Y = (Y_t)$ fuzzy sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

$i)$ $\lim\limits_{t\to\infty}(X_t + Y_t) = X_0 + Y_0$,

$ii)$ $\lim\limits_{t\to\infty}(X_t - Y_t) = X_0 - Y_0$,

$iii)$ $\lim\limits_{t\to\infty}(X_t.Y_t) = X_0.Y_0$,

$iv)$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Bu durumda bütün t lar için $0 \notin$suppY_t ve $0 \notin$suppY_0).

3.3.7 Teorem

Her $\varepsilon > 0$ için $t, m > N$ olduğunda $d(X_t, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcutsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir (Matloka, 1986).

Reel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda fuzzy Cauchy dizisidir.

3.3.8 Tanım

Her $t \in \mathbb{N}$ sayısı için $U \leq X_t \leq V$ olacak şekilde U ve V fuzzy sayıları mevcut ise $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir (Nanda, 1989). Bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(\mathcal{F})$ ile ifade edeceğiz (Matloka, 1986).

3.3.9 Teorem

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi sınırlıdır (Matloka, 1986).

3.3.10 Tanım

Bir $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir (t_n) dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (X_{t_n}) dizisine (X_t) dizisinin bir alt dizisi denir (Matloka, 1986).

3.3.11 Teorem

Yakınsak bir $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $X = (X_t)$ dizisinin limiti ile aynıdır (Matloka, 1986).

3.3.12 Tanım

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{t \leq n : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise yani $h.h.t$ için $d(X_t, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Nuray ve Savaş, 1995). (X_t) dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak ise $S(\mathcal{F}) - \lim X_t = X_0$ veya $X_t \to X_0\,(S(\mathcal{F}))$ yazılır.

İstatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $S(\mathcal{F})$ ile ifade edeceğiz. Eğer $X_0 = \bar{0}$ alınırsa sıfıra istatistiksel yakınsak fuzzy dizilerin cümlesinde $S_0(\mathcal{F})$ ile göstereceğiz.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F})$ kapsaması açıktır. Bu kapsamanın kesin olduğunuda aşağıdaki örnekte görebiliriz.

3.3.13 Örnek

$X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_t(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x - t + 1, & x \in [t-1, t] \text{ ise} \\ -x + t + 1, & x \in (t, t+1] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} t = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0(x), & t \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in [-3, -2] \text{ ise} \\ -x - 1, & x \in (-2, -1] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{t \in \mathbb{N} : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, ...\}$$

olduğundan $\delta(\{t \in \mathbb{N} : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_t)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{t \in \mathbb{N} : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_t) dizisi X_0 a yakınsak değildir.

$S(\mathcal{F})$ ve $\ell_\infty(\mathcal{F})$ uzayları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

3.3.14 Örnek

$$U_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ -x + 2, & x \in (1, 2] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{cases}$$

ve

$$U_2(x) = \begin{cases} x - 4, & x \in [4, 5] \text{ ise} \\ -x + 6, & x \in (5, 6] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_t(x) = \begin{cases} U_1, & t \text{ tek ise} \\ U_2, & t \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X_t) fuzzy sayı dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan dolayı $S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ dir. İlaveten $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F})$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

3.3.15 Örnek

$X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_t(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} \frac{t}{t+2}x + 1, & x \in \left[-\frac{t+2}{t}, 0\right] \text{ ise} \\ -\frac{t}{t+2}x + 1, & x \in (0, \frac{t+2}{t}] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} t = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0(x), & t \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 5, & x \in [5, 6] \text{ ise} \\ -x + 7, & x \in (6, 7] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{cases}$$

olup $X = (X_t)$ dizisi hem sınırlıdır hem de X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

3.3.16 Teorem

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu durumda $h.h.t$ için $X_t = Y_t$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_t)$ dizisi varsa X dizisi istatistiksel yakınsaktır (Mursaleen ve Başarır, 2003).

3.3.17 Tanım

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [d(X_t, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $\omega(F, p)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$\omega(F, p) = \left\{ X = X_t : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [d(X_t, X_0)]^p = 0, \text{ en az bir} X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise $X_t \to X_0(\omega(F, p))$ yazacağız (Kwon, 2000).

3.3.18 Teorem

$0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda bir $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise aynı zamanda X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır (Kwon, 2000).

3.3.19 Teorem

$0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda sınırlı bir $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır (Kwon, 2000).

3.3.20 Örnek

(X_t) fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$X_t(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \left. \begin{array}{cc} \frac{tx}{2}+1, & x \in \left[-\frac{2}{t}, 0\right] \text{ ise} \\ \frac{tx}{2}+1, & x \in (0, \frac{2}{t}] \text{ ise} \\ 0, & \text{d d} \end{array} \right\} & \begin{array}{c} t = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ \bar{0}, & \text{d d} \end{array} \right.$$

Bu dizinin $\alpha-$ seviye kümesi

$$X_t^\alpha = \left\{ \begin{array}{cc} \left[\frac{2\alpha-2}{t}, \frac{2-2\alpha}{t}\right], & t = n^2 \text{ ise} \\ \left[0, 0\right], & \text{d d} \end{array} \right.$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $p = 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} \left[d\left(X_t, X_0\right)\right]^p = 0$ olup (X_t) fuzzy sayı dizisinin $\bar{0}$ fuzzy sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir.

3.3.21 Tanım

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{t \in I_r : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $S_\Phi(F) - \lim X_t = X_0$ yazılır. Fuzzy sayıların bütün lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_\Phi(F)$ ile göstereceğiz (Nuray, 1998).

3.3.22 Tanım

$X = (X_t)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\mu \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\{t \in I_r : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $S_{\Phi}^{\mu}(F) - \lim X_t = X_0$ yazılır (Nuray, 1998). Tüm μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_{\Phi}^{\mu}(F)$ ile göstereceğiz .

Özel olarak $h_r = r$ alırsak μ dereceden fuzzy istatistiksel yakınsak dizileri elde ederiz ve bunu da $S^{\mu}(F)$ ile göstereceğiz.

3.3.23 Tanım

$\mu \in (0,1]$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^{\mu}} \sum_{t\in I_r} [d(X_t, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_t)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına μ dereceden kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir denir. μ dereceden tüm kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir (veya Cesàro toplanabilir) dizilerin kümesi $W_p^{\mu}(F)$ ile göstereceğiz. $h_r = n$ alınırsa μ dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir dizilerin kümesini elde ederiz (Nuray, 1998).

3.4 Fuzzy Dönüşüm Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda Matloka (1987) tarafından verilen fuzzy dönüşüm dizilerinin tanımı verilecek. Ayrıca Altin ve ark. (2007) tarafından verilen fuzzy dönüşüm dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenecek. Fuzzy dönüşüm dizilerinin ideal düzgün ve ideal noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramlarının cebirsel özellikleri Haziraka (2017) tarafından verildi. Fuzzy dönüşüm dizilerinin yakınsaklığı Gong ve ark. (2015) ve Hung (2020) tarafından fuzzy problemleri için incelemişledir.

3.4.1 Tanım

Bir fuzzy dönüşüm dizisi, tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi ve değer kümesi de fuzzy dönüşümler kümesi olan bir fonksiyondur. Bir fuzzy dönüşümler dizisini (f_n) ile göstereceğiz. (f_n) fuzzy dönüşümler dizisinin terimlerinin her birinin tanım kümesindeki bir t sayısına karşılık gelen bir $(f_n(t))$ fuzzy sayı dizisi vardır. Eğer bir T kümesindeki her bir t sayısı için $(f_n(t))$ yakınsak ve $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ ise bu taktirde (f_n) dizisi T üzerindeki f ye noktasal yakınsaktır (Matloka, 1987).

3.4.2 Tanım

(f_n) bir fuzzy sayı değerli fonksiyon dizisi ve f de fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{t \leq n : d(f_n(t), f(t)) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (f_n) dizisi f'e noktasal istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda

$$St_n - \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ veya } f_n(t) \xrightarrow{St_n} f(t)$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi yukarıdaki tanıma denk olan tanımı verelim:

$$\forall x \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists M_t \in \delta_0, \forall n \in N/M_x, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Açıktır ki (f_n) fuzzy sayı değerli fonksiyon dizisinin bir f fuzzy sayı değerli fonksiyon istatistiksel yakınsak olması için her $n \in N/M_x$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $M_x \in \delta_0$ kümesinin mevcut olmasıdır (Altin ve ark., 2007; Gong ve ark., 2015).

3.4.3 Teorem

(f_n) ve (g_n) fuzzy sayı değerli iki fonksiyon dizisi ve $x \in [a,b]$ olsun. Bu durumda $f_n(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ ve $g_n(x) \xrightarrow{St_n} g(x)$ ise o zaman,

$a)$ $(f_n(x) + g_n(x)) \xrightarrow{St_n} (f(x) + g(x))$

$b)$ $cf_n(x) \xrightarrow{St_n} cf(x), c \in R$ dir, (Gong ve ark., 2015).

İspat:

a) $f_n(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ ve $g_n(x) \xrightarrow{St_n} g(x)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve her $n \in N/M_x$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$ ve $d(g_n(x), g(x)) < \varepsilon/2$ olacak şekilde sonlu bir $M_x \in \delta_0$ kümesinin var olmasıdır.

$\forall x \in [a,b]$ için Aynı zamanda Minkowski eşitsizliği ve (5) özelliği ile beraber

$$d(f_n(x) + g_n(x), f(x) + g(x)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(g_n(x), g(x))$$

olur.

Böylece, $\forall x \in [a,b]$ ve her $n \in N/M_x$ için

$$d(f_n(x) + g_n(x), f(x) + g(x)) < \varepsilon$$

elde edilir.

$b)$ Kabul edelim ki $[a, b]$ aralığı üzerinde $f_n(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ olsun.

Böylece her $n \in N/M_x$ ve $\varepsilon > 0$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde $M_x \in \delta_0$ kümesinin mevcut olmasıdır. $c = 0$ için aşikardır.

Şimdi $c \neq 0$ için ispatlayalım. $\forall x \in [a, b]$ için

$$d(cf_n(x), cf(x)) = |c|d(f_n(x), f(x))$$

elde edilir.

Bölece her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N/M_x$ için (4), (5) deki d metriğinin özellikleri ile beraber $d(cf_n(x), cf(x)) < |c|\varepsilon$ olur.

Buradan $cf_n(x) \xrightarrow{St_n} cf(x), c \in R$ için elde edilir.

3.4.4 Teorem

(f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0, \exists M \in \delta_0, \forall n \in N/M, \forall x \in [a, b]$ için

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

ise (f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisi $[a, b]$ üzerinde bir f fuzzy sayı değerli fonksiyona düzgün istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $f_n \xrightarrow{uSt} f$ şeklinde yazılır (Gong ve ark., 2015).

3.4.5 Teorem

Bir (f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisinin bir f fuzzy sayı değerli bir fonksiyona istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart α ya göre $(f_n)_\alpha$ nın f_α'ya düzgün istatistiksel olmasıdır (Gong ve ark., 2015).

İspat:

Her bir $x \in [a, b]$ için $f_n(x_0) \xrightarrow{St_n} f(x_0)$ dır. Her $\varepsilon > 0$ için $n \in N/M_{x_0}$ için $d(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $M_{x_0} \in \delta_0$ vardır. Yani

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left|(f_n(x_0))_\alpha^- - f_\alpha^-(x_0)\right|, \left|(f_n(x_0))_\alpha^+ - f_\alpha^+(x_0)\right| \right\} < \varepsilon$$

dir.

Bu nedenle her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\left|(f_n(x_0))_\alpha^- - f_\alpha^-(x_0)\right| < \varepsilon \text{ ve } \left|(f_n(x_0))_\alpha^+ - f_\alpha^+(x_0)\right| < \varepsilon$$

dir.

Her $\alpha \in [0,1]$ için,

$$[f_n(x_0)]_\alpha = [(f_n(x_0))^-_\alpha, (f_n(x_0))^+_\alpha]$$

$$[f(x_0)]_\alpha = [(f^-_\alpha(x_0)), [(f^+_\alpha(x_0))]$$

olduğundan $[f_n(x_0)]_\alpha$ α ya göre $[f(x_0)]_\alpha$ ya düzgün yakınsaktır.

Tersine herhangi bir $x_0 \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için ve her $n \in N/M'_{x_0}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|(f_n(x_0))^-_\alpha - f^-_\alpha(x_0)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M'_{x_0} \in \delta_0$ mevcuttur. Aynı zamanda

$$\left|(f_n(x_0))^+_\alpha - f^+_\alpha(x_0)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M''_{x_0} \in \delta_0$ mevcuttur. Böylece her $n \in N/M_{x_0}$ için

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|(f_n(x_0))^-_\alpha - f^-_\alpha(x_0)\right|, \left|(f_n(x_0))^+_\alpha - f^+_\alpha(x_0)\right|\right\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $M_{x_0} = M'_{x_0} \cap M''_{x_0} \in \delta_0$ kümesini bulabiliriz.

Buna göre $d(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ dir. Yani $f_n(x_0) \xrightarrow{St_n} f(x_0)$ dir.

3.4.6 Teorem

(f_n) bir fuzzy değerli bir fonksiyon dizisi olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir.

$a)$ (f_n), f'e istatistiksel yakınsaktır.

$b)$ $\forall x \in [a,b]$ için $f_n(x) = g_n(x) + h_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ ve $h_n(x) \xrightarrow{St} \bar{0}$ olacak şekilde (g_n) ve (h_n) fuzzy sayı değerli fonksiyon dizileri vardır.

$c)$ $\delta(T) = 1$ ve $t \to \infty$ iken $d(f_{n_t}(x), f(x)) \to \bar{0}$ olacak şekilde N in bir $T = n_t$ alt dizisi mevcuttur (Gong ve ark., 2015).

İspat.

$(a) \Rightarrow (b)$ dir. $f_n(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ olduğundan verilen $x \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için ve her $n > N$ için

$$\frac{1}{n}\left|\{t \leq n : d(f_{n_t}(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde N mevcuttur ve $\varepsilon = \frac{1}{j}$ olsun. $n \in N_j$ iken

$$\frac{1}{n}\left|\left\{t \leq n : d(f_t(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde azalmayan bir $N_1 < N_2 < N_3 < ...$ dizisi mevcuttur.

Verilen bir $x \in [a, b]$ için $\{g_n(x)\}$ ve $\{h_n(x) + f(x)\}$ ve dizileri aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Bu durumda $0 < n \leq N_1$ ise $h_n(x) + f(x) = f(x)$ ve $g_n(x) = f_n(x)$ dir. Kabul edelim ki $j \geq 1$ ve $N_j < n < N_{j+1}$ olsun. Bu takdirde

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{j} \\ f(x), d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{j} \end{cases}$$

ve

$$h_n(x) + f(x) = \begin{cases} f(x), d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{j} \\ f_n(x), d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{j} \end{cases}$$

dir.

$$f_n(x) + f(x) = g_n(x) + h_n(x) + f(x)$$

olduğunu göstermek zor değildir. Bu nedenle $f_n(x) = g_n(x) + h_n(x)$ dir. Şimdi verilen $x \in [a, b]$ için $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ olsun. $x \in [a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ için olacak şekilde $j \in N$ seçelim. $t > N_j$ için,

Bu durumda $d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{j}$ ise

$$d(g_n(x), f(x)) = d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{j} < \varepsilon,$$

Bu durumda $d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}$ ise

$$d(g_n(x), f(x)) = 0$$

elde edilir.

Buna göre $d(g_n(x), f(x)) < \varepsilon$ olur.

İkinci olarak $h_n(x) \xrightarrow{St_n} 0$ ve $h_n(x) + f(x) \xrightarrow{St_n} f(x)$ olduğunu gösterelim.

N_j nin ve $h_n(x)+f(x)$ in tanımından dolayı eğer $N_j < t < N_{j+1}$ bu taktirde $d(f_t(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}$ iken $d(h_t(x) + f(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}$ olur. Bu durum gösterir ki eğer $N_j < t < N_{j+1}$ ise

$$\left|\left\{t \leq n : d(h_t(x) + f(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| \subset \left|\left\{t \leq n : d(f_t(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right|$$

olur.

Böylece

$$\frac{1}{n}\left|\left\{t \leq n : d(h_t(x)+f(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| \subset \left|\left\{t \leq n : d(f_t(x), f(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| < \frac{1}{j} < \delta$$

ve buradan

$$h_n(x) + f(x) \xrightarrow{St} f(x)$$

bulunur.

Teorem 3.4.5'e göre her $x \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$\left|(h_n(x))_\alpha^- + f_\alpha^-(x) - f_\alpha^-(x)\right| < \varepsilon$$

ve

$$\left|(h_n(x))_\alpha^+ + f_\alpha^+(x) - f_\alpha^+(x)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M \in \delta_0$ vardır. Böylece $|(h_n(x))_\alpha^-| < \varepsilon$ ve $|(h_n(x))_\alpha^+| < \varepsilon$ dir.

Buna göre

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|(h_n(x))_\alpha^- - 0\right|, \left|(h_n(x))_\alpha^+ - 0\right|\right\} < \varepsilon$$

yani $d(h_n(x), 0) < \varepsilon$ dir. Böylece $h_n(x) \xrightarrow{St} \bar{0}$.

$b) \Rightarrow c)$: Verilen bir $x \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \in N/M_x$ olmak üzere

$$\delta\left(\left\{n \in \mathbb{N} : d(\bar{h_n}(x), \bar{0} \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

olacak şekilde $M_x \in \delta_0$ vardır. $n \in K$ için $h_n(x) = 0$ olacak şekilde N'nin bir $T = \{n_t\} \subseteq N/M_x$ alt dizisini tanımlayalım.

Buna nedenle

$$\delta(T) = \delta\left(N - \{n \in \mathbb{N} : d(h_n(x), \bar{0} \geq \varepsilon\}\right) = 1$$

dir.

Her bir $t \in N$ ve $d(g_n(x), f(x)) \to 0$ için $f_{n_t}(x) = g_{n_t}(x)$ olduğundan $d(f_{n_t}(x), f(x)) \to \bar{0}$ elde edilir ki $c)$ sağlanır.

$c) \Rightarrow a)$: Herhangi bir $x \in [a,b]$ için $c)$ kabul edilirse $\varepsilon > 0$ için $m = m(\varepsilon) \in N$, mevcut olacak şekilde $\delta(T) = 1$ yoğunluklu $K = (n_t) \subset \mathbb{N}$ alt dizisi mevcut olur. Böylece $t \geq m$ için

$$d(\bar{f_{n_t}}(x), \bar{f}(x))$$

olur ve

$$\delta\left(\{n \in N : d(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right) \leq \delta(N - \{n_t : t \geq m\})$$

$$1 - \delta(\{n_t : t \geq m\}) = 0,$$

olması, her $\in [a,b]$ için $(f_n(x))$ in $f(x)$ e istatistiksel yakınsak olmasını gerektirir. Buna göre $a)$ sağlanır ve ispat tamamlanır.

3.4.7 Özellik

Eğer $f_n \xrightarrow{St_n} f$ ise $f_n \xrightarrow{St} f$ dir (Gong ve ark., 2015).

3.4.8 Özellik

$f_n \xrightarrow{uSt} f$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{x \in [a,b]} d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{St} 0$$

olmasıdır (Gong ve ark., 2015).

3.4.9 Teorem

Bir $f_n(x)$ fuzzy sayı değerli fonksiyon dizisinin $[a,b]$ üzerinde bir $f(x)$ fuzzy sayı fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart α ve x e göre $(f(x))_\alpha$ ya düzgün istatistiksel yakınsak olmasıdır (Gong ve ark., 2015).

İspat.

$\varepsilon > 0$ olsun ve $f_n \xrightarrow{uSt} f$ verilsin. Herhangi bir $n \in N/M$ ve $x \in [a,b]$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde $M \in \delta_0$ mevcuttur.

Yani

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|(f_n(x))^-_\alpha - f^-_\alpha(x)\right|, \left|(f_n(x))^+_\alpha - f^+_\alpha(x)\right|\right\} < \varepsilon$$

dir. Bu ise herhangi bir $n \in N/M$ ve $x \in [a,b]$ için

$$\left|(f_n(x))^-_\alpha - f^-_\alpha(x)\right| < \varepsilon$$

ve

$$\left|(f_n(x))^+_\alpha - f^+_\alpha(x)\right| < \varepsilon$$

vardır. Buna ilave olarak

$$[f_n(x)]_\alpha = \left[(f_n(x))^-_\alpha, (f_n(x))^+_\alpha\right]$$

ve

$$[f(x)]_\alpha = \left[f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)\right]$$

dir. Böylece, $[f_n(x)]_\alpha$ nin α a ve x e göre $[f(x)]_\alpha$ ya düzgün istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Tersine herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için $[f_n(x)]_\alpha$ nin α a ve x e göre $[f(x)]_\alpha$ ya düzgün istatistiksel yakınsaktır. Buna göre $\varepsilon > 0$ için her $n \in N/M_1$, herhangi $x \in [a,b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|(f_n(x))_\alpha^- - f_\alpha^-(x)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M_1 \in \delta_0$ mevcuttur. Benzer şekilde $\varepsilon > 0$ için her $n \in N/M_2$, herhangi $x \in [a,b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|(f_n(x))_\alpha^+ - f_\alpha^+(x)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M_2 \in \delta_0$ mevcut olduğu görülebilir. $M = M_1 \cup M_2 \in \delta_0$ olsun.

Bu durumda her $n \in N/M$, herhangi $x \in [a,b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|(f_n(x))_\alpha^- - f_\alpha^-(x)\right| < \varepsilon$$

ve

$$\left|(f_n(x))_\alpha^+ - f_\alpha^+(x)\right| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|(f_n(x))_\alpha^- - f_\alpha^-(x)\right|, \left|(f_n(x))_\alpha^+ - f_\alpha^+(x)\right|\right\} < \varepsilon$$

Yani

$$d(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca diğer bölümlerde kullanılmak üzere $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tüm sınırlı fuzzy fonksiyon dizilerinin kümesi $B(F)$ sembölü olarak alınacaktır.

4 FUZZY DÖNÜŞÜM DİZİLERİNİN μ DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde Et ve ark. (2014) tarafından verilen fuzzy dönüşüm dizilerinden faydalanılarak yapılmıştır. μ dereceden noktasal istatistiksel kavramını bazı özellikleri incelenerek, μ dereceden kuvvetli noktasal yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Bu bölümün ilk kısmında fuzzy dönüşüm dizileri için μ dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsaklığın tanımı, bazı özellikleri ve kapsama bağıntıları tanımlanmıştır.

İkinci kısımda fuzzy dönüşüm dizilerinin μ dereceden Kuvvetli $p-$Lacunary yakınsaklığın tanımı, bazı özellikleri ve kapsama bağıntıları tanımlanmıştır.

4.1 Fuzzy Dönüşüm Dizisinin μ Dereceden Lacunary Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı

4.1.1 Tanım

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $\mu \in (0,1]$ olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli bir fonksiyon dizisi olmak üzere, eğer her $x \in [a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^{\mu}} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f_0(x)) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise (f_t) fuzzy değerli fonksiyon dizisi f fuzzy değerli fonksiyonuna μ dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsaktır. Bu durumda $S_{\Phi}^{\mu} - \lim f_t(x) = f(x)$ şeklinde yazılır. μ dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $S_{\Phi}^{\mu}(f)$ ile gösterilecektir.

4.1.2 Teorem

$\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ olsun. $f = (f_t), g = (g_t)$ birer fuzzy değerli fonksiyon dizileri olmak üzere, $\mu \in (0,1]$ ve her $x \in [a,b]$ için

$i)$ $S_{\Phi}^{\mu} - \lim f_t(x) = f_0(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_{\Phi}^{\mu} - \lim cf_t(x) = cf_0(x)$,

$ii)$ $S_{\Phi}^{\mu} - \lim f_t(x) = f_0(x)$ ve $S_{\Phi}^{\mu} - \lim g_t(x) = g_0(x)$ ise $S_{\Phi}^{\mu} - \lim(f_t(x) + g_t(x)) = f_0(x) + g_0(x)$ dır.

İspat:

$i)$ $c = 0$ ise aşikardır. $0 \neq c \in R$ ve $f_t(x) \in S_{\Phi}^{\mu}(f)$ olduğunu kabul edelim. (4) ve (5) deki d metriğinin özellikleri ile her $x \in [a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^{\mu}} \left|\{t \in I_r : d(cf_t(x), cf_0(x)) \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^{\mu}} \left|\left\{t \in I_n : d(f_t(x), f_0(x)) \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

dır. Buradan da $cf_t(x) \in S_{\Phi}^{\mu}(f)$ dir.

$ii)$ Farz edelim ki $f = (f_t), g = (g_t)$ her $x \in [a,b]$ için birer fuzzy değerli fonksiyon dizileri olsun. Aynı zamanda Minkowski eşitsizliği ve (5) özelliği ile beraber ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$d\left((f_t) + (g_t), f_0(x) + g_0(x)\right) \leq d\left(f_t(x), f_0(x)\right) + d\left(g_t(x), g_0(x)\right) \tag{6}$$

eşitsizliğinden,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x) + g_k(x)), f(x) + g(x)) \geq \varepsilon\}\right|$$

buradan

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\left\{t \in I_n : d(f_t(x), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\left\{t \in I_r : d(g_t(x), g(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

dır.

4.1.3 Teorem

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r)$, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi, $\mu \in (0,1]$ ve her $x \in [a,b]$ olsun. $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ için

$i)$ Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \inf \frac{h_r^\mu}{\ell_r^\eta} > 0 \tag{7}$$

ise $S_{\Phi^*}^\eta(f) \subseteq S_\Phi^\mu(f)$,

$ii)$Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ell_r}{h_r^\eta} = 1 \tag{8}$$

ise $S_\Phi^\mu(f) \subseteq S_{\Phi^*}^\eta(f)$ dir.

İspat:

$i)$ Farz edelim ki $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve (7) eşitsizliği sağlansın. Her $x \in [a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\{t \in J_n : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \supseteq \{t \in I_n : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Buradan $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r], h_r = t_r - t_{r-1}$ ve $\ell_r = s_r - s_{r-1}$ olmak üzere

$$\frac{1}{\ell_r^\eta} \left|\{t \in J_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \geq \frac{h_r^\mu}{\ell_r^\eta} \frac{1}{h_r^\mu} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f_0(x)) \geq \varepsilon\}\right|.$$

şeklinde olur. Şimdide $r \to \infty$ için limit alınırsa ve (7) eşitsizliği kullanılırsa $S^{\eta}_{\Phi}(f) \subseteq S^{\mu}_{\Phi}(f)$ elde edilir.

$ii)$ $f = (f_t) \in S^{\mu}_{\Phi}(f)$ olsun. (8) eşitliğini sağlansın. Bu durumda $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ dır. Her $x \in [a,b], \forall r \in \mathbb{N}$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{t \in J_n : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| &= \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{s_{r-1} \leq t \leq t_{r-1} : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{t_r \leq t \leq s_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{t_{r-1} \leq t \leq t_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{t_{r-1} - s_{r-1}}{\ell_r^{\eta}} + \frac{s_r - t_r}{\ell_r^{\eta}} + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\eta}} + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \frac{\ell_r - h_r^{\eta}}{h_r^{\eta}} + \frac{1}{h_r^{\eta}} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}} - 1\right) + \frac{1}{h_r^{\mu}} \left|\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x)) \geq \varepsilon\}\right|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim $r \to \infty$ için limit alınırsa (8) eşitliğinden $\lim_{r\to\infty} \frac{\ell_r}{h_r^{\eta}} = 1$ olduğundan ve ikinci terim $f = (f_t) \in S^{\mu}_{\Phi}(f)$ olduğundan $S^{\mu}_{\Phi}(f) \subseteq S^{\eta}_{\Phi^*}(f)$ dir. Teorem 4.1.3. den aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

4.1.4 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r]$ ve $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (7) eşitsizliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $S^{\mu}_{\Phi^*}(f) \subseteq S^{\mu}_{\Phi}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $S_{\Phi^*}(f) \subseteq S^{\mu}_{\Phi}(f)$,

$iii)$ $S_{\Phi^*}(f) \subseteq S_{\Phi}(f)$

dır.

4.1.5 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r]$ ve $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (8) eşitliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $S_{\Phi}^{\mu}(f) \subseteq S_{\Phi^*}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $S_{\Phi}^{\mu}(f) \subseteq S_{\Phi^*}(f)$,

$iii)$ $S_{\Phi}(f) \subseteq S_{\Phi^*}(f)$

dır.

4.2 Fuzzy Dönüşüm Dizilerinin μ Dereceden Kuvvetli $p-$ Lacunary Yakınsaklığı

4.2.1 Teorem

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r = (t_{r-1}, t_r], J_r = (s_{r-1}, s_r]$ ve $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t) \in B(F), \mu \in (0,1]$ ve her $x \in [a,b]$ olsun. $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için

$i)$ Bu durumda (7) eşitsizliği sağlanırsa $N_{\Phi^*,p}^{\eta}(f) \subset N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Bu durumda (8) eşitliği sağlanırsa ve $f = (f_t) \in B(F)$ ise $N_{\Phi,p}^{\mu}(f) \subset N_{\Phi *,p}^{\eta}(f)$

dır.

İspat:

$i)$ $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olsun ve (7) eşitsizliği sağlansın.

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p \geq \frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\mu}} \frac{1}{h_r^{\mu}} \sum_{t \in I_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$

eşitsizliğinden $\forall r \in \mathbb{N}$ için $N_{\Phi^*,p}^{\eta}(f) \subset N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ kapsaması elde edilir.

$ii)$ $(f_t) \in N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ ve (8) eşitliği sağlansın. $f = (f_t) \in B(F)$ olduğundan $d(f_t(x), f(x)) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Şimdide $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ ve $h_r \leq \ell_r$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p &= \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_n - I_n, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\eta}} \right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r^{\eta}}{h_r^{\eta}} \right) M^p + \frac{1}{h_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}} - 1 \right) M^p + \frac{1}{h_r^{\mu}} \sum_{t \in I_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p
\end{aligned}$$

buradan da $\forall r \in \mathbb{N}$ için $N_{\Phi,p}^{\mu}(f) \subset N_{\Phi^*,p}^{\eta}(f)$ kapsaması elde edilir.

Teorem 4.2.1 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

4.2.2 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (7) eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi,p}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $N_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi,p}(f)$,

$iii)$ $N_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N_{\Phi,p}(f)$

dir.

4.2.3 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (8) eşitliği sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $B(F) \cap N^{\mu}_{\Phi,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $B(F) \cap N^{\mu}_{\Phi,p}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$,

$iii)$ $B(F) \cap N_{\Phi,p}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$

dir.

4.2.4 Teorem

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t) \in B(F), \mu \in (0,1]$ ve her $x \in [a,b]$ olsun. $\mu, \eta \in R$ sayısı olmak üzere $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için

$i)$ (7) eşitsizliği sağlansın. Eğer bir dizi f ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ yakınsak ise bu dizi f ye $S^{\mu}_{\Phi}(f)-$istatistiksel yakınsaktır,

$ii)$ (8) eşitliği sağlansın ve $f = (f_t) \in B(F)$ olsun. Bir dizi f ye $S^{\mu}_{\Phi}(f)-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ yakınsaktır.

İspat:

$i)$ $f = (f_t) \in N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \sum_{t \in J_r, x \in [a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p &= \sum_{t \in J_r, x \in [a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p \\ &+ \sum_{t \in J_r, x \in [a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|\geq\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p + \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|<\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\geq \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|\geq\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\geq |\{t\in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in J_r, x\in[a,b]} (d(f_t(x),f(x)))^p &\geq \frac{1}{\ell_r^\eta} |\{t\in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \\
&\geq \frac{h_r^\mu}{\ell_r^\eta} \frac{1}{h_r^\mu} |\{t\in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. (7) eşitsizliği sağlandığı için $f=(f_t)$ dizisi f ’ye kuvvetli $N_{\Phi^*,p}^\eta(f)-$toplanabilir ise f ye $S_\Phi^\mu(f)-$istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $S_\Phi^\mu(f)-\lim f_t(x) = f(x)$ ve $f=(f_t)\in B(F)$ olsun. Bu taktirde $d(f_t(x), f(x)) \leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon>0$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in J_r, x\in[a,b]} (d(f_t(x),f(x)))^p \quad &= \quad \frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in J_r-I_r, x\in[a,b], |f_t-f|\geq\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\quad +\frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|<\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^\eta}\right) M^p + \frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|<\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\quad \left(\frac{\ell_r - h_r^\eta}{\ell_r^\eta}\right) M^p + \frac{1}{\ell_r^\eta} \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|<\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\eta} - 1\right) M^p + \frac{1}{h_r^\eta} \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|\geq\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\quad +\frac{1}{h_r^\eta} \sum_{t\in I_r, x\in[a,b], |f_t-f|<\varepsilon} (d(f_t(x),f(x)))^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\eta} - 1\right) M^p + \frac{M^p}{h_r^\eta} |\{t\in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p + \frac{h_r}{h_r^\eta}\varepsilon^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\eta} - 1\right) M^p + \frac{M^p}{h_r^\mu} |\{t\in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p + \frac{\ell_r}{h_r^\eta}\varepsilon^p
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. (8) eşitliği ile bir dizi f ye $S_\Phi^\mu(f)-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $N_{\Phi^*,p}^\eta(f)$ yakınsaktır .

Teorem 4.2.4 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

4.2.5 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (7) eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde her $\mu \in (0, 1]$ için,

$i)$ $N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f) \subseteq S^{\mu}_{\Phi}(f)$,

$ii)$ $N_{\Phi^*,p}(f) \subseteq S^{\mu}_{\Phi}(f)$,

$iii)$ $N_{\Phi,p}(f) \subseteq S_{\Phi}(f)$

dir.

4.2.6 Sonuç

$\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (8) eşitliği sağlansın. Bu taktirde her $\mu \in (0, 1]$ için,

$i)$ $B(F) \cap S^{\mu}_{\Phi}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f)$,

$ii)$ $B(F) \cap S^{\mu}_{\Phi}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$,

$iii)$ $B(F) \cap S_{\Phi}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$

dir.

5 SONUÇLAR

Bu tezde, literatürde bilinen fuzzy fonksiyon dizilerinin tanımı ve dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramı kullanılarak, fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden $p-$lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden kuvvetli $p-$lacunary istatistiksel yakınsaklık ile fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak $S_{\Phi}^{\mu}(f), N_{\Phi}^{\mu}(f)$ ve $N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları ile ilgili sonuçlar elde edilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

6 KAYNAKLAR

Altin, Y., Et, M. and Çolak, R., 2006. Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Computers & Mathematics with Applications*, 52 (6-7), 1011-1020.

Altin, Y., Et, M. and Tripathy, B.C., 2007. On pointwise statistical convergence of sequences of fuzzy mappings, *Journal Fuzzy Mathematics,* 15 (2), 425-433.

Aytar, S. and Pehlivan, S., 2007. Statistical cluster and extreme limit points of sequences of fuzzy numbers, *Information Sciences*, 177, 3290–3296.

Bhardwaj, V. K. and Dhawan, S., 2016. Density by moduli and lacunary statistical convergence, *Abstr. Appl. Anal., Art. ID* 9365037, 11 pp.

Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A., 1972. On fuzzy mapping and Control, *Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* 2, 30-34.

Connor, J.S, 1988. The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences, *Analysis,* 8 (1-2), 47-63.

Çinar, M., Karakaş, M., Et, M., 2013. On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions, *Fixed Point Theory and Application,* 2013:33, 11 pp.

Çolak, R., 2010. Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications,* Anamaya Pub., New Delhi, India, 121-138.

Dasand, G., Mishra, S.K., 1983. Banach limits and lacunary strong almost convegence, *J.Orissa Math.Soc.*, 2, 61-70.

Diamond, P. ve Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets, Theory and Applications, *World Scientific*, Singapore.

Dubois, D. and Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems, *Theory and Applications, Academic Press*, New York.

Duman, O. and Orhan, C., 2004. $\mu-$statistically convergent function sequences, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54 (129) no. 2, 413-422.

Et, M., Çınar, M. and Karakaş, M., 2013. On $\lambda-$statistical convergence of order α of sequences of function, *Journal Inequalities and Applications*, 2013:204, 8 pp.

Et, M., 2014. On pointwise $\lambda-$statistical convergence of order $\alpha-$of sequences of fuzzy mappings, *Filomat*, 28 (6), 1271-1279.

Et, M., Tripathy, B.C. and Dutta, A.J., 2014. On pointwise statistical convergence of order $\alpha-$of sequences of fuzzy mappings, *Kuwait Journal of Science*, 41 (3), 17-30.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.

Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978. Some Cesaro-type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37, 508-520.

Fridy, J.A., 1985. On the statistical convergence, *Analysis,* 5, 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math.*, 160 (1), 43-51.

Gadjiev, A.D. and Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 32 (1), 129-138.

Goes, G. and Goes, S., 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.

Gong, Z., Zhang, L. and Zhu, X., 2015. The statistical convergence for sequences of fuzzy$-$number-valued functions, *Information Sciences,* 295, 182-195.

Gökhan, A. and Güngör, M., 2002. On pointwise statistical convergence, *Indian Journal of Pure Applied Mathematics*, 33 (9), 1379-1384.

Hazarika, B., 2017. Pointwise ideal convergence and Uniformly ideal convergence of sequence of fuzzy valued functions, *Journal of İntelligent & Fuzzy Systems*, 32 (3), 2665-2677.

Hung, N. V., Tam, V. M., Tuan, N. H.and O'Regan, D., 2020. Convergence analysis of solution sets for fuzzy optimization problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 369, 112615, 11 pp.

Karakaş, A., Altin, Y. ve Altinok, H., 2014. On generalized statistical convergence of order $\beta-$of sequences of fuzzy numbers, *Journa of Intelligent & Fuzzy Systems,* 26 (4), 1909-1917.

Kaufmann, A. and Gupta, M.M., 1984. Introduction to Fuzzy Arithmetic, *Van Nostrand Reinhohld.*

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley & Sons,* New York.

Kwon, J.S., 2000. On statistical and Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean Journal of Computational &Appllied Mathematics,* 7 (1), 195-203.

Leindler, L., 1965. Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, *(German) Academiae Scientiarum Hungaricae,* 16, 375-387.

Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers, *Busefal*, 28, 28-37.

Matloka, M., 1987. Fuzzy mappings$-$ sequences and series, *Busefal*, 30, 18-25.

Moore, R.E., 1979. Methods and Applications of Interval Analysis, *SIAM Philadelphia.*

Mursaleen, M. and Başarır, M., 2003. On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 34 (9), 1351-1357.

Nanda, S., 1989. On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 33, 123-126.

Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960. An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley & Sons,* New York.

Nuray, F. and Savaş, E., 1995. Statistical convergence of fuzzy numbers, *Mathematica Slovaca*, 45 (3), 269-273.

Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of sequences of Fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, 99, 353-355.

Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986. Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 114, 409-422.

Srivastava, P.D. and Ojha, S., 2014. $\lambda-$Statistical convergence of fuzzy numbers and fuzzy functions of order θ, *Soft Computing*, 18, 1027-1032.

Steinhaus, H., 1951. Surla convergence ordinarie et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.

Subrahmanyam, P.V., 1999. Cesàro summability for fuzzy real numbers, *The Journal of Analysis*, 7, 159-168.

Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca,* 30 (2), 139-150.

Şengül, H. and Et, M., 2014. On lacunary statistical convergence of order α, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 34 (2), 473-482.

Tabib, K.K., 2012. The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, *The University of Texas at El Paso, USA*.

Tripathy, B.C. and Sen, M., 2001. On generalized statistically convergent sequences, *Indian Journal of Pure Applied Mathematics,* 32 (11), 1689-1694.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets, *Inform and Control*, 8, 338-353.

Zygmund, A., 1968. Trigonometric series: Vols. I, *II. Cambridge University Press*, London-New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Hakkan GÜLOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	DİYARBAKIR – 01.01.1992
Telefon	**:**	05070916185
E-posta	**:**	hakanguloglu35@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**SİVEREK A.L,SİVEREK,ŞANLIURFA**	**2010**
Üniversite	:	**DİCLE ÜNİVERSİTESİ**	**2014**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014	**MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI**	**ÖĞRETMEN**