T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇEKİRDEK ÜRETEN METOD İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Barış ÖRCAN
(153114016)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. ALİ AKGÜL

ARALIK-2018
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

BARIŞ ÖRCAN tarafından hazırlanan "KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇEKİRDEK ÜRETEN METOT İLE ÇÖZÜMLERİ" adlı tez çalışması 27/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç.Dr. Halis YILMAZ	H. Yılmaz ....
Danışman Doç.Dr. Ali AKGÜL	....
Üye Dr.Öğr.Üyesi Esra KARATAŞ AKGÜL	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Öncelikle, bu tez çalışmamda bilgi ve deneyimleriyle bana destek olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ali AKGÜL'e, teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans eğitimim süresince yardımını, ilgisini, yol göstericiliğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Dr.Öğr.Üyesi Abdülkadir KARAKAŞ ve jüri üyesi saygıdeğer hocam Sayın Doç.Dr. Halis YILMAZ ve Dr.Öğr.Üyesi Esra KARATAŞ AKGÜL’e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Tanıştığım ilk günden bu yana arkadaşlığını ve kardeşliğini esirgemeyen yürüdüğüm bu yolda her türlü bana destek olan kıymetli dostlarım ve meslektaşlarım Sayın Şahin KORHAN ve Hakan GÜLOĞLU’na teşekkür ederim. Son olarak vermiş oldukları her türlü desteklerinden dolayı varlıklarından güç aldığım sevgili aileme ayrıca teşekkürü bir borç bilirim.

Barış ÖRCAN
SİİRT-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltma	**Açıklama**
$\boldsymbol{D^{\alpha}}$	**:** α-mertebeden Türev Operatörü
$\boldsymbol{{}^{C}D^{\alpha}}$	**:** α-mertebeden Caputo Kesirli Türev Operatörü
$\boldsymbol{I^{\alpha}}$	**:** α-mertebeden Riemann-Liouville İntegral Operatörü
β	**:** Beta Fonksiyonu
$\boldsymbol{E_{\alpha}(z)}$	**:** Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
Γ	**:** Gamma Fonksiyonu
$\boldsymbol{\langle f, g\rangle}$	**:** İç Çarpım
$\boldsymbol{E_{\alpha,\beta}(z)}$	**:** İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\boldsymbol{\|f\|}$	**:** Norm
W	**:** Wright Fonksiyonu
V	**:** Vektör Uzayı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇEKİRDEK ÜRETEN METOD İLE ÇÖZÜMLERİ

Barış ÖRCAN

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç.Dr. Ali AKGÜL

2018, 37 Sayfa

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. Bu tezin ilk bölümü tarihsel gelişim ile alakalı bilgilerden oluşmaktadır. İkinci bölümü kesirli hesabın genel kavramlarını vermektedir. Kesirli türevler ve integraller detaylı bir şekilde üçüncü bölümde ele alındı. Dördüncü bölümde yüksek mertebeden kesirli türevler ve integraller verildi. Yeni uygulamalar beşinci bölümde ele alındı. Son bölümde sonuç verildi.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Mertebeden Kesirli Diferansiyel Denklemler, Çekirdek Üreten Hilbert Uzayları, Caputo Türevi, Sınırlı Lineer Operatör

Bu tez 2018-SİÜFEB-012 tarafından desteklenmiştir. Bu nedenle Siirt Üniversitesi BAP birimine teşekkürlerimizi sunarız.

ABSTRACT

MS. THESIS

SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS BY REPRODUCING KERNEL METHOD

Barış ÖRCAN

The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Siirt University
The Degree of Master of Science
In Mathematics

Supervisior : Assoc.Prof.Dr. ALİ AKGÜL

2018, 37 Pages

We divided this thesis into the six sections. The first section of the thesis presents the introduction deals with a historical review. The second section gives the general concepts of fractional differential equations. Fractional derivatives and integrals are explained clearly in the third section. Section 4 gives the higher order fractional derivatives and integrals. New applications are shown in Section 5. Conclusion is given in Section 6.

Keywords: Higher Order Fractional Differential Equations, Reproducing Kernel Hilbert Spaces, Caputo Derivative, Limited Linear Operator

1 GİRİŞ

Fraksiyonel (Kesirli) türev ya da fraksiyonel(kesirli) integral, klasik manada bilinen yüksek mertebeden türev ya da n-katlı integral kavramlarını genelleyen bir kavramdır. Kesirli türev kavramı 1695'te L'Hospital'ın Leibniz'e sorduğu "Tamsayılı mertebeden türevler kesirli türevlere genelleştirilebilir mi?" anlamındaki "$\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi $n = 1/2$ için ne ifade eder?" sorusuyla ortaya çıkmıştır (Leibniz, 1962). Leibniz bu soruya "$d^{1/2}x$ türevi $x\sqrt{dx : x}$ e eşit olacaktır. Bu açık bir paradokstur fakat bir gün faydalı sonuçlar elde edilecektir." cevabını vermiştir. Leibniz bu cevabıyla keyfi mertebeden integral ve türevler teorisinin popülarite kazanmasına ev sahipliği yapmış ve bu süreden sonra Grünwald, Letnikov, Riemann, Liouville, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kober, Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace gibi birçok ünlü matematikçi bu konuda çalışmalar yapmış ve konunun daha da ilerlemesi için büyük katkılar vermişlerdir. Günümüze kadar da bu konu, teorik ve uygulamalı olarak bilimin fizik, matematik, kimya, ekonomi ve mühendislik gibi birçok dalında uygulanmıştır. Konunun çeşitli alanlara uygulanabilme potansiyeli ile son kırk yıldır popülerliği artmıştır (Podlubny, 1999; Kilbas ve ark., 2006; Mathai ve ark., 2010; Er, 2015; Diethelm, 2004; Miller ve ark., 1993; Miller, 1975; Samko ve ark., 1994).

2 KESİRLİ HESABIN ÖZEL FONKSİYONLARI

Fraksiyonel (Kesirli) hesabı iyi anlayabilmek için bazı ön bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sebeple ilk olarak bazı özel fonksiyonları tanıtarak işe başlayacağız. Bunlar öncelikle Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Wright fonksiyonudur (Oldham ve ark., 1974).

2.1 Gamma Fonksiyonu

Euler'in Gamma fonksiyonu (Γ), kesirli diferansiyel hesaplamalarında kullanılan temel bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, faktöriyel fonksiyonunun karmaşık ve tamsayı olmayan reel sayılar için genellenmesi olan bir fonksiyondur (Podlubny, 1999).
Euler'in Gamma fonksiyonu $Re(z) > 0$ olmak üzere, aşağıdaki genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Bu ismi almasının nedeni integralin ikinci tip Euler integrali olmasından kaynaklıdır (Kilbas ve ark., 2006). Ayrıca bu integral kompleks düzlemde $Re(z) > 0$ için yakınsaktır

(Podlubny, 1999).

Faktöriyel fonksiyonun üstel fonksiyon ile ilgili aşağıdaki eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} z! &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{(z+1)-1} \mathrm{d}t \\ &= \Gamma(z+1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Gamma fonksiyonu ile faktöriyel fonksiyonu arasındaki ilişki elde edilir (Baltacı, 2009; Mathai ve ark., 2010).

0!=1 olduğunu ispatlayalım:

Dikkat edilirse (2.2)'den faydalanarak bu kısmı açıklayabiliriz. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} z! &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \mathrm{d}t \quad \text{olduğundan;} \\ 0! &= \int_0^\infty e^{-t} t^0 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty} -e^{-t}|_0^b \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. Ayrıca (2.2)'den faydalanarak $z! = \Gamma(z+1)$ olduğu da gözönünde bulundurularak;

$$\begin{aligned} z! &= \Gamma(z+1) \\ z &= 0 \Longrightarrow 0! = \Gamma(1) = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

sonucuna rahatlıkla ulaşılır (Podlubny, 1999).

2.1.1 Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi;

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.4}$$

olup bu ifade kısmi integrasyonla kolaylıkla ispatlanabilir:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \quad \text{olduğu düşünülerek;}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{z}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} -e^{-t}t^{z}|_0^b + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

şeklinde rahatlıkla ispatlanabilir. Ayrıca buradan şu sonuçlara da varılabilir:
(2.3) yardımıyla $\Gamma(1) = 1$ olduğu sonucu ve z=1,2,3... için;

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
... &\quad ... \quad ... \quad ... \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

olduğu görülür (Podlubny, 1999). Gamma fonksiyonu için önem arz eden bir diğer özellik de; $z = -n, (n = 0, 1, 2, ...)$ noktalarında bu fonksiyonun basit kutup noktalarına sahip olmasıdır (Podlubny, 1999).
$z \in \mathbb{C}$ ve $z \neq 0, -1, -2, ...$ yani $Re(z) > 0$ kabulü altında, Gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi limit ile de gösterilebilir (Podlubny, 1999):

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!.n^z}{z(z+1)...(z+n)}. \tag{2.5}$$

2.2 Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bağıntının kullanılması daha uygundur.

Beta Fonksiyonu;

$$\beta(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\mathrm{d}\tau, \qquad (Re(z) > 0, Re(w) > 0). \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu türünden ifadesi şu şekildedir:

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{2.7}$$

Bu eşitlikten Beta fonksiyonunun simetrik olduğu da söylenebilir:

$$\beta(z,w) = \beta(w,z).$$

Ayrıca, $0 < Re(z) < 1$ ve $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$ olmak üzere;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \beta(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{2.8}$$

eşitlikleri yazılabilir (Podlubny, 1999).

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterelim:

(2.8)'den faydalanarak;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \quad = \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{olup burada} \quad z = \frac{1}{2} \quad \text{alınırsa}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyonu, tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerde oldukça önemli bir role sahiptir. Bu üstel fonksiyonun bir genelleştirmesini, 1903 yılında İsveçli matematikçi Mittag-Leffer yapmış ve kendi adıyla bilinen Mittag-Leffler fonksiyonunu tanımlamıştır. Fakat daha sonra bu fonksiyonun üzerinde birçok bilim insanı çalışmış ve kullanılacak alana göre birçok farklı tipi geliştirilmiştir (Podlubny, 1999; Haubold ve ark., 2011).

Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu;

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad Re(\alpha)>0,\quad z\in C \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlı iken;

İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonunu;

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad Re(\alpha)>0,\quad Re(\beta)>0,\quad z,\alpha,\beta\in C \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999). İlk defa Agarwal tarafından tanımlanması (Podlubny, 1999; Agarwal, 1953; Haubold ve ark., 2011) ve Humbert ile birlikte Laplace dönüşümü kullanılarak çok sayıda özelliğini bulması sebebiyle bu fonksiyon Agarwal fonksiyonu olarak da adlandırılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunda $\beta=1$ seçilmesiyle fonksiyonun bir parametreliye dönüşmesidir.

(2.10)'dan faydalanarak aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla yazılabilir (Podlubny, 1999; Erdélyi ve ark., 1955).

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{k!}=e^{z},\\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{z}-1}{z},\\
E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{(k+2)!}=\frac{1}{z^{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^{z}-1-z}{z^{2}},
\end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse;

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^{z}-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^{k}}{k!}\right\} \tag{2.11}$$

sonucuna ulaşılır (Podlubny, 1999).

Hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumlarıdır (Podlubny, 1999; Erdélyi ve ark., 1955):

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(z)}{z}.$$

2.4 Wright Fonksiyonu

Wright fonksiyonu, lineer kısmi türevli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde önemli rol oynamaktadır. Kesirli difüzyon ve dalga denklemleri örnek olarak gösterilebilir (Er, 2015). Bu fonksiyon, $E_{\alpha,\beta}(z)$ iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkilendirilmek suretiyle Wright tarafından tanımlanmıştır (Erdélyi ve ark., 1955; Humbert ve ark., 1953). Daha sonra Humbert ve Agarwal (Humbert ve ark., 1953), Laplace dönüşümlerini kullanarak bu fonksiyonla ilgili oldukça kullanışlı özellikler geliştirmişlerdir.

Wright Fonksiyonu;

$$W(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır.

İntegral Gösterimi;

$$W(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H\alpha} \tau^{-\beta} e^{\tau+z\tau^{-\alpha}} \mathrm{d}\tau \tag{2.13}$$

şeklinde olup; burada $H\alpha$, Henkel çevresini ifade etmektedir (Podlubny, 1999; Erdélyi ve ark., 1955).

3 KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLER

Bu bölümde diferansiyel ve integral notasyonlarının genelleştirilmiş hali göz önüne alınacaktır. Aşağıda n katlı integral ve n. mertebeden türev dizisini ele alalım:

$$\ldots, \quad \int_a^t \mathrm{d}\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1, \int_a^t f(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1, \quad f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \quad \ldots$$

şeklindeki integral-türev dizisi, genel olarak ${}_aD_t^{\alpha}f(t)$ biçiminde belirtilebilir (Davis,1936). Biz de bu çalışmada, keyfi mertebeden türev için Davis tarafından önerilen ve kullanılan;

$${}_aD_t^{\alpha}f(t)$$

notasyonunu kullanacağız. Bu notasyonda α keyfi reel bir sabit olmak üzere; kesirli diferansiyelin mertebesi olup a ve t indisleri ise kesirli diferansiyelleme notasyonunun limitlerini göstermekte ve kesirli diferansiyelin terminalleri olarak adlandırılmaktadır. Bu terminallerin kesirli türev sembolünde gösterilmeleri oldukça önemli olup, kesirli türevlerin gerçek bir probleme uygulanışı sırasında ortaya çıkabilecek belirsizlik durumlarını engellerler (Ross, 1977; Er, 2015). $\alpha > 0$ iken kesirli türev, $\alpha < 0$ iken kesirli integral söz konusudur (Podlubny, 1999).

Kesirli türev çeşitlerini anlatmadan önce sol ve sağ kesirli türev kavramlarına değinmiş olmamız konunun ileride görüneceği üzere bazı kavramların anlaşılmasını daha kolay hale getirecektir. ${}_aD_t^{\alpha}f(t)$ ifadesi, $a < t$ kabulü altında sabit alt sınır a ile hareketli üst sınır t arasındaki kesirli türevi ifade eder. Fakat kesirli türevleri, hareketli alt sınır t ile sabit üst sınır b arasında da düşünmek mümkündür. Yani; f(t), a ve b nin sonsuz olabilme koşulu altında, $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Alt sınırı $[a, b]$ aralığının sol ucunda olan kesirli türeve, ${}_aD_t^{\alpha}$, sol kesirli türev denir. Üst sınırı $[a, b]$ aralığının sağ ucunda olan kesirli türeve, ${}_tD_b^{\alpha}$, sağ kesirli türev denir. Fiziksel problemlerde, $f(t)$ zaman değişkenli bir süreç fonksiyonunu temsil ediyorsa; sağ türev $f(t)$ sürecinin gelecekteki durumunu, sol türev ise geçmişteki durumunu ifade eder. Fakat dikkatle düşünülürse $f(t)$ sürecinin şimdiki durumunun gelecekteki durumundan bağımsız olduğu sonucuna varılacaktır. Dolayısıyla fiziksel bir problem tanımlanırken, sağ türev doğal olarak ortaya çıksa da bu sebeple genellikle ihmal edilir (Podlubny, 1999; Er, 2015).

3.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri

Sürekli bir $y = f(t)$ fonksiyonunu ele alalım. $f(t)$ fonksiyonunun birinci basamaktan türevi

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınırsa;

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

ve tümevarımla,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh),$$

bulunur. Burada,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

ifadesi Binom sabitleri için genel gösterimdir. Dolayısıyla,

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{3.1}$$

olup burada n bir tamsayı ve p de keyfi bir tamsayı olup $p \leq n$ için;

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

Şimdi de $p < 0$ alalım. Uygun olması açısından;

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)...(p+r-1)}{r!}$$

alırsak;

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

buluruz. (3.1)'de p yerine $-p$ alırsak,

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \tag{3.2}$$

olup burada p pozitif tamsayıdır (Podlubny, 1999).

Burada n'yi sabitler ve $h \to 0$ için limit alırsak $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesinin sıfıra gideceği açıktır. Sıfırdan farklı bir limite gitmesi için $h \to 0$ iken $n \to \infty$ olacağı bir durumu ele almalıyız. Bu sebeple h fonksiyonu a bir reel sabit olmak üzere; $h = \frac{t-a}{n}$ biçiminde yazarsak, bu durumda $f_h^{(-p)}(t)$ limit gösterimi,

$$\lim_{h\to 0, nh=t-a} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{(-p)} f(t)$$

olacaktır. Bazı özel durumlar için bu formülü değerlendirelim:

$p = 1$ için,

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}1\\r\end{bmatrix}f(t-rh)$$

olup burada $t - nh = a$ olduğu göz önüne alınır ve $f(t)$'yi sürekli bir fonksiyon olarak düşünürsek bu durumda,

$$\lim_{h\to 0, nh=t-a} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{(-1)}f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)\mathrm{d}z = \int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

dur (Podlubny, 1999).

$p = 2$ için,

$$\begin{bmatrix}2\\r\end{bmatrix} = \frac{2.3....(2+r-1)}{r!} = r+1$$

olup buradan,

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=0}^{n}(r+1)hf(t-rh) = h\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(t-rh)$$

$$\lim_{h\to 0, nh=t-a} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{(-2)}f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)\mathrm{d}z = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse, keyfi tamsayı mertebeden p katlı integral için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f(t) &= \lim_{h\to 0, nh=t-a} h^p\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}f(t-rh) && (3.3)\\
& && (3.4)\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. && (3.5)
\end{aligned}$$

Sonuç itibariyle, $f(t)$ sürekli fonksiyonu için tamsayı mertebeden keyfi türev ve p katlı integral kavramları için ortak formül;

$${}_aD_t^{p}f(t) = \lim_{h\to 0, nh=t-a} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh)$$

olup, burada eğer $p = n$ alırsak n.mertebeden türev, $p = -n$ alınırsa da n katlı integral elde edilir (Podlubny, 1999).

$[a, b]$ aralığı üzerinde $f'(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyorsa kısmi integrasyonla (3.3)'daki eşitlik şöyle yazılabilir:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)\mathrm{d}\tau. $$

Eğer $f(t)$ fonksiyonu $(m+1)$ kez sürekli türevlere sahipse bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (3.6) $$

Benzer şekilde türev formülü de;

$$ {}_aD_t^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3.7) $$

biçiminde yazılabilir. Burada $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ kez sürekli türevlere sahip ve m tamsayısı da $m > p-1$ koşulunu sağlamaktadır ve burada $(m < p < m+1)$'dir (Podlubny, 1999).

$(t-a)^{\beta}$ nın Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi ise şu şekildedir:

$v \in R$ olmak üzere;

$$ {}_aD_t^{p}(t-a)^{v} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)}(t-a)^{v-p}, $$

$(p < 0, v > -1)$ veya $(0 \leq m \leq p < m+1), v > m)$ şeklindedir (Podlubny, 1999).

3.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan birçok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları ya da belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville türev tanımıdır (Li, 2003).

Kesirli basamaktan geri farkın limiti olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevi integralli bir terim barındırdığı için kullanışlı gibi görünse de aynı zamanda integralli olmayan bir terim barındırdığı için pek kullanışlı değildir (Er, 2015). Bu sebepledir ki;

Riemann-Liouville'den adını alan ve literatürde en çok bilinen kesirli türev şu şekilde tanımlanmıştır:

$$ {}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (m \leq p < m+1) \tag{3.8} $$

(3.7)'de verilen eşitlik (3.8)'daki eşitliğin art arda kısmi integrasyon alınmasıyla tabiki f'nin $m+1$ kez sürekli türeve sahip olması koşuluyla elde edilebilir:
$(m \leq p < m+1)$

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.9} $$

Dikkat edilirse $t \geq 0$ için $m+1$ kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfını ele aldığımızda Grünwald-Letnikov tanımı ile Riemann-Liouville tanımı özdeş olur (Podlubny, 1999).
Şimdi de (3.8)'daki Riemann-Liouville tanımının tam sayı mertebeden türev ve $n-$katlı integral tanımlarının doğal bir sentezi olduğunu göstermeye çalışalım.
Kabul edelim ki, $f(\tau)$ sürekli ve her sonlu (a,t) aralığında integrallenebilir olsun. $f(t)$ fonksiyonu da $\tau = a$ noktasında $r < 1$ basamaktan singülerliğe sahip olsun. Yani;

$$ \lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r f(t) = sabit (\neq 0). $$

Bu durumda,

$$ f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau $$

integrali mevcut ve sonlu bir değere sahiptir. Şöyle ki, $t \to a$ için integralin değeri sıfıra eşittir. Gerçekten $\tau = a + y(t-a)$ dönüşümü yapılır ve $\varepsilon = t - a$ alınırsa;

$$ \begin{aligned} \lim_{t \to a} f^{-1}(t) = \lim_{t \to a} \int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau &= \lim_{t \to a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a))\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a + y\varepsilon) y^{-r} \mathrm{d}y = 0, \quad (r < 1) \end{aligned} $$

elde edilir. İki katlı integrali göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned} f^{(-2)}(t) &= \int_a^t \mathrm{d}\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \int_\tau^t \mathrm{d}\tau_1 \\ &= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t \mathrm{d}\tau_1 \int_a^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3 \\ &= \int_a^t \mathrm{d}\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

olup tümevarımla Cauchy formülü elde edilir:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.10}$$

Şimdi de $n \geq 1$'i sabitleyip $k \geq 0$ şeklinde bir k tamsayısı ele alalım. Açıktır ki bu durumda,

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.11}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $D^{-k}(k \geq 0)$ sembolü k kez tekrarlanan integrasyonu göstermektedir (Podlubny, 1999).

Diğer taraftan $n \geq 1$ olmak üzere $k \geq n$ tamsayıları için $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. basamaktan türevi;

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}D^{k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

olup burada $D^k(k \geq 0)$ sembolü k defa alınan türevi göstermektedir. Burada k ve n tamsayıları yerine reel $p > 0$ alırsak ve $p = k - n$ ile gösterilirse;

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}D^{k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.10)'deki $n-$katlı integral formülünü, n'nin tamsayı olamayan değerlerine göre genişletmek istiyorsak bu durumda formüldeki tamsayı n yerine reel $p > 0$ almamız yeterli olacaktır. Yani;

$$_{a}D_{t}^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{p-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.14}$$

olur. Şimdi de R-L kesirli türev operatörü ve R-L kesirli integral operatörü için bazı teoremler verelim.

3.2.1 Teorem

$t \geq 0$ için $f(t)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\lim_{p\to 0} {_{a}D_{t}^{-p}}f(t) = {_{a}D_{t}^{0}}f(t) = f(t)$$

dir. Yani, mertebe sıfır olursa fonksiyon değişmeden aynen kalır (Podlubny, 1999).

3.2.2 Teorem

Eğer, $t \geq a$ için $f(t)$ sürekli ise, (3.14)'de tanımlanan keyfi reel basamaklı integrasyon,

$$_{a}D_{t}^{-p}({_{a}D_{t}^{-q}}f(t)) = {_{a}D_{t}^{-p-q}}f(t)$$

eşitliğini sağlar. Yani, p ve q yer değiştirebilir. Şöyle ki;

$$_{a}D_{t}^{-p}({_{a}D_{t}^{-q}}f(t)) = {_{a}D_{t}^{-q}}({_{a}D_{t}^{-p}}f(t)) = {_{a}D_{t}^{-p-q}}f(t)$$

olup bu durum, tamsayı basamaktan türevlerin şu özelliği ile benzerdir:

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^{m+n}f(t)}{dt^{m+n}}.$$

Buradan özel olarak; R-L kesirli türev operatörünün, R-L kesirli integral operatörünün soldan ters operatörü olduğu sonucuna varılabilir. Şöyle ki;

$$_{a}D_{t}^{p}({_{a}D_{t}^{-p}}f(t)) = f(t) \quad (p > 0, \quad t > a)$$

şeklindedir.

$(t-a)^{\beta}$'nın R-L kesirli türevi şu şekildedir:

$v \in R$ olmak üzere; $f(t) = (t-a)^{v}$ alalım. Bu durumda;

$$_{a}D_{t}^{-p}((t-a))^{v} = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)}(t-a)^{v-p}$$

dir (Podlubny, 1999).

$f(t) = t^2$, fonksiyonu için mertebeyi $1/2$ alarak Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım.

(3.13)'den faydalanarak; $\alpha = 1/2$ için k'yı $k-1 \leq p < k$ şartını sağlayan bir tamsayı olarak alacağımızdan $k=1$ seçilmesi uygun olacaktır. (3.13)'de bu verdiğimiz bulgular yerleştirilir ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{1/2}(t^2) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{\mathrm{dt}}\int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1}\tau^2 \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{\mathrm{dt}}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^2 \mathrm{d}\tau \qquad (t-\tau = u \Rightarrow \mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}u) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})}\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(-\int_{t-a}^0 (t-u)^2 u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{\mathrm{dt}}\int_0^{t-a} (t-u)^2 u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{\mathrm{dt}}\int_0^{t-a} (t^2 u^{-\frac{1}{2}} - 2tuu^{-\frac{1}{2}} + u^2u^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{\mathrm{dt}}\int_0^{t-a} (t^2 u^{-\frac{1}{2}} - 2tu^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{\mathrm{dt}}\left[2t^2u^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}tu^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^{t-a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{\mathrm{dt}}\left[2t^2(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}t(t-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(4t(t-a)^{\frac{1}{2}} + t^2(t-a)^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} - 2t(t-a)^{\frac{1}{2}} + (t-a)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(t^2(t-a)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} + 2t(t-a)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^2}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} + 2t(t-a)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3t^2-(t-a)^2+6t(t-a)}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3t^2-t^2+2at-a^2+6t^2-6at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{8t^2-4at-a^2}{3\sqrt{\pi}(t-a)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir (Tabatabaei, 2013).

3.3 Caputo Kesirli Türevi

Diferansiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmesi için, diğer yaklaşımlar arasında en kullanışlı olanı Caputo tarafından verilen yaklaşımdır. Biz de genel olarak çalışmalarımızda bu yaklaşımı kullanacağız.

Riemann-Liouville tarafından verilen kesirli türev tanımı, integral ve uygulamalı matematiğin uygulamalarında büyük rol oynamıştır. Fakat bu türevler zaman geçtikçe modern teknolojinin beklentilerini karşılayamaz olmuştur. Çünkü uygulamalı problemler fiziksel olarak yorumlanabilecek $f(a), f'(a), ...$vb. başlangıç koşullarının kullanılabildiği kesirli türevlere ihtiyaç duymaktadır. Riemann-Liouville yaklaşımı Riemann-Liouville kesirli türevlerinin;

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-1}f(t) &= b_1, \\
\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-2}f(t) &= b_2, \\
\ldots \qquad & \ldots \\
\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-n}f(t) &= b_n, \qquad (b_k = sabit, k = 1, 2, ...n)
\end{aligned}
$$

gibi $t = a$ alt sınırındaki limit değerlerini içeren başlangıç koşulları doğurmaktadır. Bu tür başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemleri matematiksel olarak başarıyla çözülse bile, çözümleri pratikte pek de kullanışlı değildir. Çünkü bu tür başlangıç koşulları için bilinen fiziksel bir anlam yoktur (Er, 2015). Dolayısıyla bu kısımda teorik matematikle uygulamalı matematik arasında bir çelişki ortaya çıkmıştır. Bu çelişkinin mutlak bir çözümü Caputo tarafından ilk olarak makalelerinde (Caputo, 1966; Caputo, 1967) ve iki yıl sonra da kitabında (Caputo, 1969) verilmiştir. Daha sonra El-Sayed de bu konuda çalışmış ve bu duruma ilişkin çözümler ortaya koymuştur (El-Sayed, 1988,1992,1993,1994,1995; Uçar, 2012).

f, sonlu (a,t) aralığında sürekli, integre edilebilir, n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in R$ olsun. $\alpha > 0$ ise,

$$ {}_a{}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}\tau, \quad (n-1 < \alpha < n) \tag{3.15} $$

türevi α. mertebeden Caputo kesirli türevini verir (Podlubny, 1999). Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı basamaktan diferansiyel denklemlerinkiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Özel olarak; Caputo kesirli türevinin, $0 < \alpha < 1$ olması durumunda;

$$ {}_a{}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \mathrm{d}\tau, \quad (t > a) $$

şeklinde olur (Podlubny, 1999).

$\alpha = n \in N$ olması durumunda ise, Caputo kesirli türevi;

$$ {}_a{}^cD_t^n f(t) = f^{(n)}(t), $$

ve özel olarak $n = 0$ için,

$$ {}_a{}^cD_t^0 f(t) = f(t) $$

olur (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türevi arasında bazı temel farklılıklar vardır. Riemann-Liouville ile Caputo türevlerinin başlangıç koşulları arasındaki farkı görebilmek adına bu türevlere $a = 0$'da Laplace dönüşümünü uygulayalım. Buna göre, Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü:

$$ \int_0^\infty e^{-pt}({}_0D_t^\alpha f(t))\mathrm{d}t = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k ({}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)) \mid_{t=0}, \qquad (n-1 \leq \alpha < n) $$

olup, buna karşılık Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü ise,

$$ \int_0^\infty e^{-pt}({}_0{}^cD_t^\alpha f(t))\mathrm{d}t = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \qquad (n-1 \leq \alpha < n) $$

şeklindedir. Buradan görülüyor ki; Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü başlangıç koşullarının kullanımına müsaade ediyor ki bu da onların fiziksel olarak yorumlanmasını güçleştiriyor. Tersine Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü ise, fiziksel yorumları bilinen klasik tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımını sağlıyor (Podlubny, 1999; Uçar, 2012).

Bu iki türev arasındaki bir diğer önemli fark da, bir C sabitinin Caputo manada türevi sıfır iken, aynı C sabitinin R-L türevi sıfırdan farklı ve aşağıda belirtildiği gibi hesaplanmaktadır:

$${}_aD_t^\alpha C = \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{şeklinde olup} \quad a = 0 \Rightarrow {}_0D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{olacaktır.}$$

$f(t) = t^2$, fonksiyonu için mertebeyi $1/2$ alarak Caputo kesirli türevini hesaplayalım: (3.15)'dan faydalanarak, n; $n-1 < \alpha < n$ şartını sağlayan bir tamsayı olacağından $n = 1$ olmalıdır. (3.15)'da bu verilenler yerleştirilir ve ($\Gamma(\frac{1}{2} = \sqrt{\pi})$), olduğu göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}
{}_a{}^cD_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} f'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2\tau\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau\mathrm{d}\tau \quad (t-\tau = u \Rightarrow \mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}u) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t-a} u^{-\frac{1}{2}}(t-u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{2(t-a)^{\frac{1}{2}}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \left(2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{2(t-a)^{\frac{1}{2}}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \left(\frac{6t(t-a)^{\frac{1}{2}} - 2(t-a)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \\
&= 2(t-a)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{6t(t-a)^{\frac{1}{2}} - 2(t-a)^{\frac{3}{2}}}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{6t(t-a) - 2(t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \frac{8t^2 - 4at - 4a^2}{3\sqrt{\pi}(t-a)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

elde edilir (Tabatabaei, 2013).

4 YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLER

4.1 Tanım

$f \in H^1(a,b), a < b, \alpha \in [0,1]$, olup daha sonra, yeni fraksiyonel türevin tanımı (sol Caputo türevi) Abdon ve Baleanu anlamında olur (Atangana, 2016; Abdeljawad, 2017).

$$({}_a^{ABC}D^{\alpha}f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \tag{4.1}$$

ve sol Riemann-Liouville anlamında aşağıdaki forma sahiptir:

$$({}_a^{ABR}D^{\alpha}f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx. \tag{4.2}$$

Bununla ilişkili kesirli integral

$$({}_a^{AB}I^{\alpha}f)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}({}_aI^{\alpha}f)(t). \tag{4.3}$$

Burada $B(\alpha) > 0$, $B(0) = B(1) = 1$ bir normalizasyon fonksiyonudur.

$$({}^{ABC}D_b^{\alpha}f)(t) = \frac{-B(\alpha)}{1-\alpha}\int_t^b f'(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(x-t)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \tag{4.4}$$

ve sağ Riemann-Liouville anlamında aşağıdaki forma sahiptir:

$$({}^{ABR}D_b^{\alpha}f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{-d}{dt}\int_t^b f(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(x-t)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx. \tag{4.5}$$

Bununla ilişkili kesirli integral

$$({}^{AB}I_b^{\alpha}f)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}(I_b^{\alpha}f)(t), \tag{4.6}$$

şeklindedir.

$$({}_a^{AB}I^{\alpha}\,{}_a^{ABR}D^{\alpha}f)(t) = f(t)$$

ve

$$({}_a^{ABR}D^{\alpha}\,{}_a^{AB}I^{\alpha}f)(t) = f(t)$$

yazılır.

$$({}^{AB}I_b^{\alpha}\,{}^{ABR}D_b^{\alpha}f)(t) = f(t)$$

ve

$$({}^{ABR}D_b^{\alpha}\,{}^{AB}I_b^{\alpha}f)(t) = f(t)$$

Abdeljawad (2017)'de verilir. Atangana (2016) veya Abdeljawad (2017) ile Riemann-Liouville ve Caputo yeni türevleri arasındaki ilişki:

$$({}_a^{ABC}D^{\alpha}f)(t) = ({}_a^{ABR}D^{\alpha}f)(t) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}f(a)E_{\alpha}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-a)^{\alpha}\right), \tag{4.7}$$

şeklindedir.

4.1.1 Lemma

$0 < \alpha < 1$ için,

$$({}_a^{AB}I^{\alpha}\,{}_a^{ABC}D^{\alpha}f)(x) = f(x) - f(a)$$

ve

$$({}^{AB}I_b^{\alpha}\,{}^{ABC}D_b^{\alpha}f)(x) = f(x) - f(b),$$

olur (Abdeljawad, 2016).

4.2 Tanım

$n < \alpha \leq n+1$ ve $f,\, f^{(n)} \in H^1(a,b)$ olmak üzere; $\beta = \alpha - n$ olsun. O zaman $\beta \in (0,1]$ için

$$({}_a^{ABC}D^{\alpha}f)(t) = ({}_a^{ABC}D^{\beta}f^{(n)})(t), \tag{4.8}$$

olup sol Riemann-Liouville anlamında şu şekildedir:

$$({}_a^{ABR}D^{\alpha}f)(t) = ({}_a^{ABR}D^{\beta}f^{(n)})(t). \tag{4.9}$$

Bununla ilişkili kesirli integralimiz şöyledir:

$$({}_a^{AB}I^{\alpha}f)(t) = ({}_aI^n\,{}_a{}^{AB}I^{\beta}f)(t). \tag{4.10}$$

Eğer

$$({}_aI^0f)(t) = f(t)$$

eşitliğini dikkate alırsak $0 < \alpha \leq 1$ durumu için; $\beta = \alpha$ ve bu sebeple de

$$({}_aI^{\alpha}f)(t) = ({}_aI^{\alpha}f)(t)$$

olur. Ayrıca, $f^{(0)}(t) = f(t)$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ için

$$({}_{a}^{ABR}D^{\alpha} f)(t) = ({}_{a}^{ABR}D^{\alpha} f)(t)$$

ve

$$({}_{a}^{ABC}D^{\alpha} f)(t) = ({}_{a}^{ABC}D^{\alpha} f)(t)$$

olur.

Not: Tanım 4.2'de, eğer $\alpha = n+1$ alırsak o zaman $\beta = 1$ ve bu sebeple $({}_{a}^{ABR}D^{\alpha} f)(t) = ({}_{a}^{ABR}D^{1} f^{(n)})(t) = f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca, $({}_{a}^{AB}I^{1} f)(t) = ({}_{a}I^{1} f)(t)$ belirterek, $\alpha = n+1$ için $({}_{a}^{AB}I^{\alpha} f)(t) = ({}_{a}I^{n+1} f)(t)$ olduğunu görürüz. Ayrıca, $0 < \alpha \leq 1$ için Tanım 4.1'de tanımlanan kavramları yeniden ele alıyoruz. Bu yüzden, yüksek mertebeye kadar olan genelleştirmemiz geçerlidir.

4.3 Tanım

$n < \alpha \leq n+1$ ve f, $f^{(n)} \in H^{1}(a,b)$ olmak üzere; $\beta = \alpha - n$ olsun. O zaman $\beta \in (0,1]$ ve şu şekilde tanımlarız:

$$({}^{ABC}D_{b}^{\alpha} f)(t) = ({}^{ABC}D_{b}^{\beta}(-1)^{n} f^{(n)})(t), \tag{4.11}$$

ve sağ Riemann-Liouville anlamında şu şekildedir:

$$({}^{ABR}D_{b}^{\alpha} f)(t) = ({}^{ABR}D_{b}^{\beta}(-1)^{n} f^{(n)})(t). \tag{4.12}$$

Bununla ilişkili kesirli integralimiz şöyledir:

$$({}^{AB}I_{b}^{\alpha} f)(t) = (I_{b}^{n}{}^{AB}I_{b}^{\beta} f)(t). \tag{4.13}$$

4.3.1 Önerme

$[a,b]$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ üzerinde tanımlanan $u(t)$ için, ve bazı $n \in \mathbb{N}_0$ için şunlara sahibiz:

- $({}_{a}^{ABR}D^{\alpha}\, {}_{a}^{AB}I^{\alpha} u)(t) = u(t)$.
- $({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\, {}_{a}^{ABR}D^{\alpha} u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}$.
- $({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\, {}_{a}^{ABC}D^{\alpha} u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}$.

(Abdeljawad, 2017).

İspat:

- Tanım 4.1 ve Tanım 4.2'den sonraki açıklama ve $\beta = \alpha - n$ olduğu yerde;

$$\begin{aligned}
({}_a^{ABR}D^{\alpha}\ {}_a^{AB}I^{\alpha}u)(t) &= \left({}_a^{ABR}D^{\beta}\frac{d^n}{dt^n}{}_aI^n\ {}_a^{AB}I^{\beta}u\right)(t) \\
&= ({}_a^{ABR}D^{\beta}\ {}_a^{AB}I^{\beta}u)(t) \\
&= u(t)\text{'dır.} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

- Tanım 4.1 ve Tanım 4.2'den sonraki açıklama ile şuna sahibiz:

$$\begin{aligned}
({}_a^{AB}I^{\alpha}\ {}_a^{ABR}D^{\alpha}u)(t) &= ({}_aI^n{}_a^{AB}I^{\beta}{}_a^{ABR}D^{\beta}u^{(n)})(t) \\
&= {}_aI^nu^{(n)}(t) \\
&= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

- Lemma 4.1'de uygulanan $f(t) = u^{(n)}(t)$ ile şunlara sahibiz:

$$\begin{aligned}
({}_a^{AB}I^{\alpha}\ {}_a^{ABC}D^{\alpha}u)(t) &= {}_aI^n{}_aI^{\beta}{}_a^{ABC}D^{\beta}u^{(n)}(t) \\
&= {}_aI^n[u^{(n)}(t) - u^{(n)}(a)] \\
&= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k - u^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!} \\
&= u(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

4.3.2 Önerme

$[a,b]$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ üzerinde tanımlanan $u(t)$ için, ve bazı $n \in \mathbb{N}_0$ için şunlara sahibiz:

- $({}^{ABR}D_b^{\alpha}{}^{AB}I_b^{\alpha}u)(t) = u(t)$.
- $({}^{AB}I_b^{\alpha}{}^{ABR}D_b^{\alpha}u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^ku^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k$.
- $({}^{AB}I_b^{\alpha}{}^{ABC}D_b^{\alpha}u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^ku^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k$.

4.1 Örnek: Başlangıç değer problemini göz önüne alalım:

$$({}_0^{ABC}D^{\alpha}y)(t) = K(t), \quad t \in [0,b], \qquad (4.17)$$

$K(t)$, $[0,b]$ üzerinde süreklidir. α'ya göre iki durum düşünürüz:

- $0 < \alpha \leq 1$ için $y(0) = c$ ve $K(0) = 0$ olduğunu farzedelim. ${}_0^{AB}I^{\alpha}$ uygulayarak ve Önerme 4.1'i kullanarak, şu çözümü elde ederiz:

$$y(t) = c + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}K(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}({}_0I^{\alpha}K(.))(t).$$

  Koşul $K(0) = 0$'ın $y(0) = c$ başlangıç koşulunu doğruladığına dikkat edin. Ayrıca dikkat edilmelidir ki; $\alpha \to 1$ olduğunda sıradan başlangıç değer probleminin çözümünü yeniden ele alırız $y'(t) = K(t), y(0) = c$. $y'(t) = K(t), y(0) = c$.

- $1 < \alpha \leq 2$ için $K(0) = 0,\ y(0) = c_1$ ve $y'(0) = c_2$ olduğunu farz edelim: ${}_0^{AB}I^{\alpha}$ uygulayarak ve Önerme 4.1'i kullanarak ve Tanım 4.2'den $\beta = \alpha - 1$ ile şu çözümü elde ederiz:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + \frac{2-\alpha}{B(\alpha-1)}\int_0^t K(s)ds + \frac{\alpha-1}{B(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(s)ds.$$

$y(t)$ çözümünün $y(0) = c_1$ değerini $K(0) = 0$ kullanmadan doğruladığına dikkat edin. Ancak, $y'(0) = c_2$ değerini $K(0) = 0$ altında doğrular. Ayrıca, $\alpha \to 2$'yi $y''(t) = K(t)$ ikinci mertebeden sıradan başlangıç değer probleminin çözümünü yeniden ele aldığımız unutulmamalıdır.

4.2 Örnek: ABC sınır değer problemini düşünelim:

$$({}_a^{ABC}D^{\alpha}y)(t) + q(t)y(t) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad a < t < b, \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (4.18)$$

$\beta = \alpha - 1$ olduğu zaman ve Önerme 4.1'i ${}_a^{AB}I^{\alpha}$ operatörüne uygulayarak çözüme ulaşırız.

$$y(t) = c_1 + c_2(t-a) - \left({}_a^{AB}I^{\alpha}q(.)y(.)\right)(t).$$

Fakat

$$({}_a^{AB}I^{\alpha}q(.)y(.))(t) = \frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_a^t q(s)y(s)ds + \frac{\beta}{B(\beta)}{}_aI^{\beta+1}q(t)y(t)\text{'dır.}$$

Bu sebeple, çözüm şekli

$$y(t) = c_1 + c_2(t-a) - \frac{2-\alpha}{B(\alpha-1)}\int_a^t q(s)y(s)ds - \frac{\alpha-1}{B(\alpha-1)}{}_aI^{\alpha}q(t)y(t),$$

ya da

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 + c_2(t-a) - \frac{2-\alpha}{B(\alpha-1)}\int_a^t q(s)y(s)ds \\ &- \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)B(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}q(s)y(s)ds \end{aligned}$$

olur. Sınır koşulları $c_1 = 0$ ve

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{2-\alpha}{(b-a)B(\alpha-1)}\int_a^b q(s)y(s)ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{(b-a)\Gamma(\alpha)B(\alpha-1)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}q(s)y(s)ds. \end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{(2-\alpha)(t-a)}{(b-a)B(\alpha-1)}\int_a^b q(s)y(s)ds \\ &- \frac{(\alpha-1)(t-a)}{\Gamma(\alpha)(b-a)B(\alpha-1)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}q(s)y(s)ds \\ &- \frac{2-\alpha}{B(\alpha-1)}\int_a^t q(s)y(s)ds \\ &- \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)B(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}q(s)y(s)ds \end{aligned} \tag{4.19}$$

olur (Abdeljawad, 2017).

5 PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, yüksek mertebeden kesirli diferansiyel denklemlere çekirdek üreten Hilbert uzayı metodunu uyguladık. Kesin sonuçlar elde etmek için bazı kullanışlı üretilen çekirdek fonksiyonları ve sınırlı lineer operatörü kullandık. Uygulamalarda, teorimizin nasıl geçerli olduğunu ve nasıl uygulanabilir olduğunu ispatlamak için bir örnek sunduk. Leibniz geçmişte türevin $\alpha = 1/2$ olma durumunu uyguladı. Liouville da kesirli mertebeden integrator operatörü kavramını vermiş ve bu konu hakkında önemli sayılabilecek çalışmalar yapmıştır. Kesirli diferansiyel denklemler, geçmiş yıllarda bazı reel olayları modellemek için keşfedilmiştir. Bu nedenle, birçok araştırma alanında ve mühendislik uygulamalarında birçok uygulama elde edilmiştir (Alikhanov, 2012; Bhalekar ve ark., 2012; Chen ve ark., 2013; Ezzat ve ark., 2013; Henderson ve ark., 2011; Leung ve ark., 2013; Nerantzaki ve ark., 2012; Stojanovic, 2013; Yan ve ark., 2013). Bununla beraber, bu tür diferansiyel denklemleri çözmek için basit, kolay ve uygulanabilir bir teknik yoktur. Bu nedenle bu denklemleri çözebilmek için literatürde birçok sayısal teknik ele alırız (Butera ve ark., 2014; Galeone ve ark., 2006; Gulsu ve ark., 2013; Jafari ve ark., 2013; Li ve ark., 2011; Mueller ve ark., 2013; Pedas ve ark., 2014; Almeida ve ark., 2016).
Biz bu bölümde, çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile aşağıdaki problemi göz önüne aldık (Akgül ve ark., 2018):

$$\begin{cases} {}_{0}^{C}D_{v}^{\alpha} f(v) + f(v) = N(v), \quad v \in [a,b], \\ f(0) = c, \\ f'(0) = d, \\ f''(0) = e. \end{cases} \tag{5.1}$$

Üretilen çekirdeğin teorisi; nümerik analizde, diferansiyel denklemlerde, olasılık ve istatistikte çok önemli uygulamalara sahiptir. Bazı yazarlar; kesirli diferansiyel denklemleri, süreksizlikle beraber lineer olmayan salınımları, integral denklemleri ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri incelemişlerdir (Cui ve ark., 2009). Li ve diğerleri (Li ve ark., 2015) üretilen çekirdeği kullanarak, lokal olmayan sınır değer problemlerinin lineer bir sınıfını incelemişlerdir. Geng ve diğerleri (Geng ve ark., 2013; 2014) iki sınır katmanına sahip olan tekil pertürbe olmuş problemleri bu metotla çözmüşlerdir. Wu ve diğerleri de (Wu ve ark., 2014), gelişmiş argümantlar ve gecikme problemlerini, lokal olmayan fonksiyonel diferansiyel denklemleri sürekli bir metotla çözmüşlerdir. Li ve diğerleri (Li ve ark., 2013; 2014), lineer sınır değer problemlerini çözmek için; çekirdek üreten metodu kullanmış ve hata tahminini bulmuşlardır. Geng ve diğerleri (Geng ve ark., 2014; 2015), çekirdek üreten metodu tekil pertürbe olmuş gecikmeli başlangıç değer problemlerine ve tekil pertürbe olmuş fark denklemleri için uygulamışlardır. Akgül ve diğerleri (Akgül ve ark., 2013; 2014; 2015; 2017) bu metodu; adi diferansiyel denklemlere, kısmi diferansiyel denklemlere ve fark denklemlerine uygulamışlardır (Akgül ve ark., 2018).

5.1 Kesirli Hesaplamalar

α'nın sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri (Almeida ve ark., 2016);

$$ {}_{a}I_{x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) \mathrm{d}\tau, $$

ve

$$ {}_{x}I_{b}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} (\tau-x)^{\alpha-1} u(\tau) \mathrm{d}\tau. $$

ile verilir.

Sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri (Almeida ve ark., 2016);

$$ {}_aD_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} u(\tau) \mathrm{d}\tau, $$

ve

$$ {}_xD_b^\alpha u(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\tau-x)^{n-\alpha-1} u(\tau) \mathrm{d}\tau. $$

ile verilir.

Sol ve sağ Caputo kesirli türevleri (Almeida ve ark., 2016);

$$ {}_a^CD_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau, $$

ve

$$ {}_x^CD_b^\alpha u(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (\tau-x)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau. $$

şeklinde ifade edilir.

Aşağıdaki ilişkilere sahibiz (Almeida ve ark., 2016);

$$ {}_a^CD_x^\alpha u(x) = {}_aD_x^\alpha u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \tag{5.2} $$

ve

$$ {}_x^CD_b^\alpha u(x) = {}_xD_b^\alpha u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}. \tag{5.3} $$

Böylelikle eğer,

$$ u(a) = u'(a) = ... = u^{(n-1)}(a) = 0 \Longrightarrow {}_a^CD_x^\alpha u(x) = {}_aD_x^\alpha u(x), $$

ve eğer,

$$ u(b) = u'(b) = ... = u^{(n-1)}(b) = 0 \Longrightarrow {}_x^CD_b^\alpha u(x) = {}_xD_b^\alpha u(x). $$

$$ u(x) = (x-a)^{\beta-1} \quad \text{ve} \quad v(x) = (b-x)^{\beta-1}, $$

ise $\beta > n$ ile,

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}u(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, $$

ve

$$ {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}v(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}. $$

elde ederiz.

Eğer $u \in C^n[a,b]$ ise, Caputo kesirli türevi ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}u(x)$ ve ${}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}v(x)$ mevcut $[a,b]$'da süreklidir. Ayrıca, $x = a$'da ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}u(x) = 0$, ve $x = b$'de ${}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}v(x) = 0$'dır.

Eğer $u \in C[a,b]$ ise, o zaman;

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}\,{}_{a}I_{x}^{\alpha}u(x) = {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\,{}_{x}I_{b}^{\alpha}u(x) = u(x), $$

ve eğer $u \in C^n[a,b]$ ise, bu durumda da;

$$ {}_{a}I_{x}^{\alpha}\,{}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}u(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, $$

ve

$$ {}_{x}I_{b}^{\alpha}\,{}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}u(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k u^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k. $$

elde edilir.

5.2 Ana Sonuçlar

Bu alt bölümde çok kullanışlı üretilen çekirdek fonksiyonlar elde ettik. Operatörümüzün sınırlı lineer operatör olduğunu ispatladık. Ana sonuçlarımızı bu bölümde elde ettik.

5.2.1 Tanım

$V_2^1[0,1]$ ile tanımlı uzayı verelim:

$$ V_2^1[0,1] = \{f,\ [0,1] \text{ aralığında mutlak sürekli},\ f' \in L^2[0,1]\}. $$

$V_2^1[0,1]$'de iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$ \langle f,g\rangle_{V_2^1} = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(\nu)g'(\nu)\mathrm{d}\nu, \quad f,g \in V_2^1[0,1] $$

ve

$$ \|f\|_{V_2^1} = \sqrt{\langle f,f\rangle_{V_2^1}}, \quad f \in V_2^1[0,1]. $$

5.2.2 Lemma

$V_2^1[0,1]$ uzayı çekirdek üreten bir Hilbert uzayıdır. Bu çekirdek üreten Hilbert uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu N_z, aşağıdaki şekilde elde edilir: (Akgül ve ark.,2018)

$$N_z(\nu) = \begin{cases} 1+\nu, & 0 \leq \nu \leq z \leq 1, \\ 1+z, & 0 \leq z < \nu \leq 1. \end{cases}$$

5.2.3 Tanım

$V_2^4[0,1]$ ile tanımlı uzayı verelim:

$$V_2^4[0,1] = \{f, f', f'' \text{ ve } f''' \ [0,1] \text{ aralığında mutlak sürekli},$$
$$f^{(4)} \in L^2[0,1],\ f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}.$$

$V_2^4[0,1]$'de iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle f, g\rangle_{V_2^4} = \sum_{i=0}^{3} f^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(4)}(\nu)g^{(4)}(\nu)\mathrm{d}\nu, \quad f, g \in V_2^4[0,1]$$

ve

$$\|f\|_{V_2^4} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{V_2^4}}, \quad f \in V_2^4[0,1].$$

5.2.4 Teorem:

$V_2^4[0,1]$ çekirdek üreten bir Hilbert uzayıdır ve $M_z(v)$'de onun üretilen çekirdek fonksiyonudur. $M_z(v)$ şu şekilde elde edilir (Akgül ve ark.,2018):

$$M_z(v) = \begin{cases} \frac{1}{36}z^3v^3 + \frac{1}{144}z^3v^4 - \frac{1}{240}z^2v^5 + \frac{1}{720}zv^6 - \frac{1}{5040}v^7, & v \leq z, \\ \\ -\frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{720}z^6v - \frac{1}{240}z^5v^2 + \frac{1}{144}v^3z^4 + \frac{1}{36}z^3v^3, & v > z. \end{cases} \tag{5.4}$$

İspat: $f \in V_2^4[0,1]$ ve $0 < v < 1$ ile, denklem (5.4)'den M_z, ile aşağıda verilenleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \langle f, M_z\rangle_{V_2^4} &= \sum_{i=0}^{3} f^{(i)}(0)M_z^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(4)}(v)M_z^{(4)}(v)dv \\ &= f(0)M_z(0) + f'(0)M_z^{'}(0) + f''(0)M_z^{''}(0) + f^{(3)}(0)M_z^{(3)}(0) \\ &+ \int_0^1 f^{(4)}(v)M_z^{(4)}(v)dv. \end{aligned}$$

$f \in V_2^4[0,1]$'den dolayı, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ olur.

Bu yüzden aşağıda verileni elde ederiz:

$$\langle f, M_z \rangle_{V_2^4} = f^{(3)}(0)M_z^{(3)}(0) + \int_0^1 f^{(4)}(v)M_z^{(4)}(v)dv.$$

Daha sonra, kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}
\langle f, M_z \rangle_{V_2^4} &= f^{(3)}(0)M_z^{(3)}(0) + f^{(3)}(1)M_z^{(4)}(1) \\
&- f^{(3)}(0)M_z^{(4)}(0) - f''(1)M_z^{(5)}(1) \\
&+ f''(0)M_z^{(5)}(0) + f'(1)M_z^{(6)}(1) \\
&- f'(0)M_z^{(6)}(0) - \int_0^1 f'(v)M_z^{(7)}(v)dv,
\end{aligned}$$

elde edilir.

$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, kullanılarak

$$\begin{aligned}
\langle f, M_z \rangle_{V_2^4} &= f^{(3)}(0)[M_z^{(3)}(0) - M_z^{(4)}(0)] \\
&+ f^{(3)}(1)M_z^{(4)}(1) - f''(1)M_z^{(5)}(1) \\
&+ f'(1)M_z^{(6)}(1) - f'(0)M_z^{(6)}(0) \\
&- \int_0^1 f'(v)M_z^{(7)}(v)dv,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$M_z^{(3)}(0) = \tfrac{z^3}{6}, \qquad M_z^{(5)}(1) = 0,$$

$$M_z^{(3)}(1) = \tfrac{z^3}{6}, \qquad M_z^{(6)}(1) = 0, \quad M_z^{(4)}(1) = 0,$$

kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\langle f, M_z \rangle_{V_2^4} &= -\int_0^1 f'(v)M_z^{(7)}(v)dv \\
&= -\int_0^z f'(v)M_z^{(7)}(v)dv + \int_z^1 f'(v)M_z^{(7)}(v)dv \\
&= -\int_0^z (-1)f'(v)dv \\
&= f(z) - f(0) = f(z),
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(5.1)'nin çözümünü $V_2^4[0,1]$ çekirdek üreten Hilbert uzayında elde ederiz.

$T : V_2^4[0,1] \to V_2^1[0,1]$ lineer operatörünü şöyle tanımlarız:

$$Tf = {}_0^C D_v^\alpha f(v) + f(v), \quad 0 \le v \le 1, \quad f \in V_2^4[0,1]. \tag{5.5}$$

Bu yüzden model problemimiz

$$\begin{cases} Tf = N(v), \quad v \in [0,1], \\ \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

olarak elde edilir. Burada şartları homojen hale getirmek için dönüşüm kullanılmıştır.

5.2.5 Teorem:

T operatörü, sınırlı lineer bir operatördür (Akgül ve ark., 2018).

İspat: $A > 0$ olmak üzere, $\|Tf\|^2_{V_2^1} \leq A \|f\|^2_{V_2^4}$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\|Tf\|^2_{V_2^1} = \langle Tf, Tf \rangle_{V_2^1} = [Tf(0)]^2 + \int_0^1 [Tf'(v)]^2 \, \mathrm{d}v,$$

olduğu biliniyor.

$$f(z) = \langle f(\cdot), M_z(\cdot) \rangle_{V_2^4},$$

ve

$$Tf(z) = \langle f(\cdot), TM_z(\cdot) \rangle_{V_2^4},$$

eşitliklerini çekirdek üretme özelliğinin bir gereği olarak yazabiliriz. Böylece

$$|Tf(z)| \leq \|f\|_{V_2^4} \|TM_z\|_{V_2^4} = A_1 \|f\|_{V_2^4},$$

elde edilir. $A_1 > 0$ olmak üzere;

$$[(Tf)(0)]^2 \leq A_1^2 \|f\|^2_{V_2^4},$$

bulunur. Bu nedenle

$$(Tf)'(z) = \langle f(\cdot), (TM_z)'(\cdot) \rangle_{V_2^4},$$

olur.

$$|(Tf)'(z)| \leq \|f\|_{V_2^4} \|(TM_z)'\|_{V_2^4} = A_2 \|f\|_{V_2^4},$$

ortaya çıkar. $A_2 > 0$ olmak üzere;

$$[(Tf)'(v)]^2 \leq A_2^2 \|f\|^2_{V_2^4},$$

ve

$$\int_0^1 [(Tf)'(v)]^2 \, \mathrm{d}v \leq A_2^2 \|f\|^2_{V_2^4},$$

bulunur. Bu sebeple de aşağıdaki sonucu başarılı bir şekilde elde ederiz;

$$\|Tf\|^2_{V_2^1} \leq [(Tf)(0)]^2 + \int_0^1 \left([(Tf)'(v)]^2\right) \mathrm{d}v \leq \left(A_1^2 + A_2^2\right) \|f\|^2_{V_2^4} = A \|f\|^2_{V_2^4}$$

Burada $A = A_1^2 + A_2^2 > 0$. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\varphi_i(v) = N_{v_i}(v)$ ve $\psi_i(v) = T^*\varphi_i(v)$ olarak göz önüne alalım. T^* burada T'nin adjoint operatörüdür. $V_2^4[0,1]$ çekirdek üreten Hilbert uzayının ortonormal sistemi $\left\{\widehat{\Psi}_i(v)\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i(v)\}_{i=1}^{\infty}$'nın Gram-Schmidt ortogonilizasyon süreci tarafından elde edilebilir.

$$\widehat{\psi}_i(v) = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(v), \quad (\beta_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots). \tag{5.7}$$

5.2.6 Teorem:

Eğer $f(v)$ fonksiyonu (5.1)'nin tam çözümü ise, şunu elde ederiz;

$$f(v) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} N(v_k)\widehat{\psi}_i(v). \tag{5.8}$$

$\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, $[0,1]$'de yoğundur (Akgül ve ark., 2018).

İspat: Aşağıdaki sonuçları

$$\begin{aligned}
f(v) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f(v), \widehat{\psi}_i(\nu)\right\rangle_{V_2^4} \widehat{\psi}_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle f(v), \psi_k(\nu)\right\rangle_{V_2^4} \widehat{\psi}_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle f(v), T^*\varphi_k(v)\right\rangle_{V_2^4} \widehat{\psi}_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle Tf(v), \varphi_k(v)\right\rangle_{V_2^1} \widehat{\psi}_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} \left\langle N(v), N_{v_k}\right\rangle_{V_2^1} \widehat{\psi}_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} N(v_k)\widehat{\psi}_i(v),
\end{aligned}$$

çekirdek üretme özelliği, tam sistem ve adjoint operatörün özelliklerine dayanarak elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

$f_n(v)$'nin yaklaşık çözümü şöyle elde edilebilir (Akgül ve ark., 2018):

$$f_n(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} N(v_k)\widehat{\Psi}_i(v). \tag{5.9}$$

5.3 Sayısal Örnekler

Bu alt bölümde çekirdek üreten Hilbert uzayı metodunun uygulanabilirliğini ve kesinliğini bir örnekle gösterdik. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım: (Akgül ve ark., 2018)

$$\begin{cases} {}_0^C D_v^{2.5} f(v) + f(v) = \frac{6!}{\Gamma(4.5)} v^{3.5} + v^6, \quad v \in [0,1], \\ f(0) = 0, \\ f'(0) = 0, \\ f''(0) = 0. \end{cases}$$

$f(v) = v^6$ açık çözümdür.

6 SONUÇLAR

Analitik olarak kesirli diferansiyel denklemlerle uğraşmak çok zordur. Bu yüzden, bilinen sayısal teknikler bunları araştırmak için uygulanır. Biz, $(0,1)$ aralığında düşük mertebeli diferansiyel denklemlerde birçok teknik bulduk, fakat yüksek mertebeli kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için çok metod yoktur. Bizim bulduğumuz yeni teknik keyfi mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri araştırmak için uygulanabilir. Çekirdek üreten Hilbert uzayı metodunu yüksek mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri araştırmak için uyguladık. Bu metodu tarif ettik ve bir örneğe de bunu uyguladık.

7 KAYNAKLAR

Abdeljawad, T. and Baleanu, D., 2016. Discrete fractional differences with nonsingular discrete Mittag-Leffler kernels. *Advances in Difference Equations*, 232.

Abdeljawad, T., 2017. A Lyapunov type inequality for fractional operators with nonsingular Mittag-Leffler kernel, *Journal of Inequalities and Applications*, 130.

Abdeljawad, T. and Baleanu, D., 2017. Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 1098-1107.

Agarwal., R.P., 1953. A propos d'unc note de h4, Pierre Humbert, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 236(21), 2031-2032.

Akgül, A. and Inc, M., 2013. The reproducing kernel Hilbert space method for solving Troesch's problem, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 14, 19-27.

Akgül, A. and Inc, M., 2014. Approximate solutions for MHD squeezing fluid flow by a novel method, *Boundary Value Problems*, 2014(18).

Akgül, A., Inc, M., Geng, F., 2015. Reproducing kernel Hilbert space method for solving Bratu's problem, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38(1), 271–287.

Akgül A., Inc, M., Karatas, E., 2015. Reproducing kernel functions for difference equations, *Discrete and Continuous Dynamical System Series S*, 8(6).

Akgül, A., 2017. On the Solution of Higher-Order Difference Equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 40, 6165-6171.

Akgül, A., Orcan, B., Akgül, E.K., 2018. Solving higher-order fractional differential equations by reproducing kernel Hilbert Space method, *Journal of Advanced Physics,* 7(1), 98-102.

Almeida, R., Pooseh, S., Torres, D.F.M., 2013. Numerical approximations of fractional derivatives with applications, *Asian Journal of Control*, 15(3), 698-712.

Almeida, R. and Bastos, N.R.O., 2016. A Numerical Method to Solve Higher-Order Fractional Differential Equations, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13, 1339-1352.

Alikhanov, A.A., 2012. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings, *Applied Mathematics and Computation* 219(8), 3938-3946.

Atangana, A. and Baleanu, D., 2016. New fractional derivative with non-local and nonsingular kernel, *Thermal Science*, 20(2), 757-763.

Baltacı, İ., 2009. Kesirli Diferensiyel Denklemler İçin Monoton Yöntemler, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Ankara, 6-9.

Bhalekar, S., Daftardar-Gejji, V., Baleanu, D., Magin, R., 2012. Generalized fractional order Bloch equation with extended delay, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(4), 15.

B. Ross, 1977. Fractional calculus an historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders, *Mathematics Magazine,* 50(3), 115-122.

Butera, S. and Paola, M.D., 2014. Fractional differential equations solved by using Mellin transform, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* 19(7), 2220-2227.

Caputo, M., 1966. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Annali di Geofisica*, 19(4), 193-393.

Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II. *Geophysical Journal Royal Astronomical Society*, 13(5), 529-539.

Caputo, M., 1969. Elasticita e Dissipazione, *Zanichelli*, Bologna.

Chen, D., Sheng, H., Chen, Y., Xue, D., 2013. Fractional-order variational optical flow model for motion estimation, *Philosophical transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371.

Cui, M. and Lin, Y., 2009. Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space, *Nova Science*, New York, 226.

Diethelm, K., 2004. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Lecture Notes in Mathematics, 2004, *Springer*, Berlin.

El-Sayed, A.M.A., 1988. Fractional Derrivative and Fractional Differential Equations, *Bulletin of the Faculty of Science, Alexandra University*, 28, 18-22.

El-Sayed, A.M.A., 1988. Fractional differential equations, *Kyungpook Mathematical Journal*, 28(2), 119-122.

El-Sayed, A.M.A., 1992. On The Fractional Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 49, 2-3.

El-Sayed, A.M.A., 1993. Linear Differential equations of Fractional Order, *Applied Mathematics and Computation*, 55, 1-12.

El-Sayed, A.M.A., 1994. Multivalued Fractional Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 80, 1-11.

El-Sayed, A.M.A., 1995. Fractional order evolution, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 7, 89-100.

Erdélyi, A. (ed.), 1955. Higher Transcendental Functions, vol.3, *McGraw-Hill*, New York.

Er, N.F., 2015. Kısmi Türevli Kesirli Mertebeden Lineer Schrödinger Denklemlerinin Sayısal Çözümleri, Doktora Tezi, *İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 5-19.

Ezzat, M.A., El-Karamany, A.S., El-Bary, A.A., Fayik, M.A., 2013. Fractional calculus in one-dimensional isotropic thermo-viscoelasticity, *Comptes Rendus Mecanique* 341(7), 553-566.

Galeone, L. and Garrappa, R., 2006. On multistep methods for differential equations of fractional order, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 3, 565-580.

Geng, F.Z. and Qian, S.P., 2013. Reproducing kernel method for singularly perturbed turning point problems having twin boundary layers, *Applied Mathematics Letters*, 998-1004.

Geng, F.Z., Qian, S.P., Li, S., 2014. A numerical method for singularly perturbed turning point problems with an interior layer, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225, 97-105.

Geng, F.Z. and Qian, S.P., 2014. Piecewise reproducing kernel method for singularly perturbed delay initial value problems, *Applied Mathematics Letters*, 37, 67-71.

Geng, F.Z., Qian, S.P., Cui, M.G., 2015. Improved reproducing kernel method for singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior, *Applied Mathematics and Computation*, 252, 58-63.

Gulsu, M., Ozturk, Y., Anapali, A., 2013. Numerical approach for solving fractional Fredholm integro-differential equation, *International Journal Of Computer Mathematics*, 90(7), 1413-1434.

Haubold, H.J., Mathai, A. M., Saxena, R. K., 2011. Mittag-Leffler Functions and Their

Applications, *Journal of Applied Mathematics*, 2011, 51.

H. D. Davis, 1936. The Theory of Linear Operators, Principia Press, 1936, *Bloomington*, Indiana.

Henderson, J. and Ouahab, A., 2011. A Filippov's theorem, some existence results and the compactness of solution sets of impulsive fractional order differential inclusions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 9(3), 453-485.

Humbert, P. and Agarwal, R.P., 1953. Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 77(10), 180-185.

Jafari, H., Khalique, C.M., Ramezani, M., Tajadodi, H., 2013. Numerical solution of fractional differential equations by using fractional B-spline, *Central European Journal of Physics*, 11(10), 1372-1376.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, *Elsevier Science* , 204, Amsterdam.

Leibniz, G.W., 1962. Mathematische Schiften, Georg Olms Verlasbuchhandlung, 6, *Hildesheim*.

Leung, A.Y.T., Yang, H.X., Zhu, P., Guo, Z.J., 2013. Steady state response of fractionally damped nonlinear viscoelastic arches by residue harmonic homotopy, *Computers and Structures*, 121, 10-21.

Li, X., 2003. Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Processes, *PhD Thesis, The University of Western Ontario*, Canada.

Li, C., Chen, A., Ye, J., 2011. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation, *Journal of Computational Physics*, 230(9), 3352-3368.

Li, X.Y. and Wu, B.Y., 2013. Error estimation for the reproducing kernel method to solve linear boundary value problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 243, 10-15.

Li, Z.Y., Wang, Y.L., Tan, F.G., Wan, X.H., Yu, H., Duan, J.S., 2015. Solving a class of linear nonlocal boundary value problems using the reproducing kernel, *Applied Mathematics and Computation*, 265, 1098-1105.

Mathai, A.M., Saxena, R.K., Haubold, H.J., 2010. The H function : Theory and Applications, *Springer*, New York, 1-43.

Miller, K. S., 1975. The Weyl fractional calculus, Fractional Calculus and its Applications, 457, In: Ross B. editor, Lecture Notes in Mathematics, *Springer-Verlag,* New York.

Miller, K. S. and Ross, B., 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley and Sons,* New York.

Mueller, S., Kaestner, M., Brummund, J., Ulbricht, V., 2013. On the numerical handling of fractional viscoelastic material models in a FE analysis, *Computational Mechanics*, 51(6), 999-1012.

Nerantzaki, M.S. and Babouskos, N.G., 2012. Vibrations of in homogeneous anisotropic viscoelastic bodies described with fractional derivative models. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 36(12), 1894-1907.

Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York.

Pedas, A. and Tamme, E., 2014. Numerical solution of nonlinear fractional differential equations by spline collocation methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255(1), 216-230.

Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, 198, *Academic Press*, San Diego, 337.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1994. Fractional İntegrals and Derivatives-Theory and Applications, *Gordon and Breach,* Longhorne Pennsylvania.

Stojanovic, M., 2013. Wave equation driven by fractional generalized stochastic processes, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 10(4), 1813-1831.

Tabatabaei, K., 2013. Fraksiyonel Kısmi Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Doktora Tezi, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Erzurum, 7-11.

Uçar, M.F., 2012. Kesirli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri, Doktora Tezi, *İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 1-14.

Wu, B.Y. and Li, X.Y., 2014. A continuous method for nonlocal functional differential equations with delayed or advanced arguments, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 409, 485-493.

Yan, Z. and Jia, X., 2013. Impulsive problems for fractional partial neutral functional integro-differential inclusions with infinite delay and analytic resolvent operators, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 11(2), 393-428.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Barış ÖRCAN
Doğum Yeri ve Tarihi	17.05.1990 ve Diyarbakır
Telefon	05387351383
E-posta	barisorcan@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**80.Yıl Cumhuriyet Lisesi/Yenişehir/Diyarbakır**	**2007**
Üniversite	:	**Dicle Üniversitesi/Matematik Bölümü**	**2014**
Yüksek Lisans	:	**Siirt Üniversitesi/Matematik Bölümü**	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014	**T.C. Milli Eğitim Bakanlığı**	**Öğretmen**

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Akgül, Esra Karatas; Orcan, Barış; Akgül, Ali. Solving Higher-Order Fractional Differential Equations by Reproducing Kernel Hilbert Space Method, *Journal of Advanced Physics*, Volume 7, Number 1, March 2018, pp. 98-102(5).

Orcan, Barış; Akgül, Esra Karatas; Akgül, Ali, 2018. Reproducing kernel functions for linear tenth-order boundary value problems, *ITM Web of Conferences*, Volume 22, pages 01027.