T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ VE FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS

Mehmet Taha
ÜNSAL
(163114014)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Ramazan KAMA

Eylül 2019
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet Taha ÜNSAL tarafından hazırlanan "Bazı Dizi ve Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Çarpımsal Operatörler" adlı tez çalışması 18/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Bilal ALTAY	
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Ramazan KAMA	R. Kama
Üye Doç. Dr. Ali AKGÜL	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her sürecinde , ihtiyacım olduğu her an bilgi birikimini tereddüt etmeden benle paylaşıp yanı sıra her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Ramazan KAMA'ya ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan eşim Esra ve oğlum Yiğit Aras'a teşekkür ederim.

Mehmet Taha ÜNSAL

SİİRT 2019

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

Simge	Açıklama
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{C}$	**:**Kompleks sayılar kümesi,
$\mathbb{N}$	**:**Doğal sayılar kümesi,
c_0	**:**Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı,
c	**:**Yakınsak diziler uzayı,
c_{00}	**:**Sonlu sayıda terimi dışında geriye kalan bütün terimleri sıfır olan dizilerin uzayı,
ℓ_∞	**:**Sınırlı diziler uzayı,
ℓ_p	**:**$1 \leq p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,
ℓ_1	**:**Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,
$B(X,Y)$	**:**X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi,
$B(X)$	**:**X normlu uzayından yine kendi içine tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi,
X^*	**:**X normlu uzayının sürekli duali,
$L(X,Y)$	**:**X üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerin kümesi,
$R(T)$	**:**T operatörünün görüntü uzayı,
$\overline{R(T)}$	**:**$R(T)$ kümesinin kapanışı,
$boyX$	**:**X uzayının boyutu,
CA	**:**A kümesinin tümleyeni,
$S_\epsilon(x)$	**:**X merkezli ve ϵ yarıçaplı açık yuvar ,
$\overline{A}$	**:**A kümesinin kapanışı,

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DİZİ VE FONKSİYON UAYLARI ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL OPERATÖRLER

Mehmet Taha ÜNSAL

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ramazan KAMA

2019, 54+vii sayfa

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun tarihi geçmişi verilmiştir.

İkinci bölümde,temel tanımlar ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, c_0, c ve $\ell_p\,(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayları arasındaki çarpımsal operatörler ele alınıp ve bu operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Ces$\grave{a}$ro dizi uzayındaki sınırlı, kompakt, terslenebilir ve Fredholm çarpımsal operatörlerin karakterizasyonları incelenmiştir.

Beşinci bölümde Orlicz uzayındaki terslenebilir, kompakt ve Fredholm çarpımsal operatörlerin karekterizasyonları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler:Dizi uzayı, Fredholm operatörü, Çarpımsal operatör, Fonksiyon uzayı, Orlicz uzayı, Sınırlı lineer operatör.

ABSTRACT

MS THESIS

MULTIPLICATION OPERATORS ON SOME SEQUENCE AND FUNCTION SPACES

Mehmet Taha ÜNSAL

Siirt University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Ramazan KAMA

2019, 54+vii pages

This study prepared as a graduate thesis covers five chapters.

In the first chapter, the history of the subject is given.

In the second chapter, basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, multiplication operators between the sapaces c_0, c and ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ are considered and some property of these operators are examined.

In the fourth chapter, the characterizations of bounded, compact, invertible and Fredholm multiplication operators in Ces$\grave{a}$ro space were performed.

In the fifth chapter, the characterizations of compact, invertible and Fredholm multiplication operators in Orlicz space were performed.

Keywords: Sequence space, Fredholm operator, Multiplication operator, Function space, Orlicz space, Bounded linear operator.

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analizde operatörlerin önemli bir sınıfı olan çarpımsal operatörler son yıllarda çok geniş bir şekilde çalışılmıştır. Buck (1961) reel değerli sürekli fonksiyonları ele alarak, lineer uzayda bulunan lineer operatörler arasında ortaya çıkan sonuçların çarpımsal operatörlerle bağlantılı olduğunu elde etti. Abrahamse (1978) çarpımsal operatörler sınıfındaki üniter denklik problemini ele aldı. Axler (1982) Bergman uzayı üzerindeki çarpımsal oparatörleri çalışmış ve bu operatörlerin Fredholm olması için gerek ve yeter şartı vermiştir. Singh ve Manhas (1991) vektör değerli sürekli fonksiyonların ağırlıklı uzayları üzerindeki çarpımsal operatörleri ele almıştır. Komal ve Gupta (2001) Orlicz uzayları arasındaki terslenebilir, kompakt, Fredholm çarpımsal operatörlerini incelemiştir. Aynı zamanda Wang dizi uzayları arasındaki çarpımsal operatörlerin iyi tanımlı, kompakt, lineer, sınırlı, zayıf kompakt olması durumları üzerinde çalışmıştır. Arora ve ark. (2006) Lorentz uzayları üzerindeki çarpımsal operatörlerin kapalılığı, kompaktlığı, spektrumları ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Allen ve Flavi (2009) Zhou ve Chen (2004) in Bloch uzayı üzerindeki sınırlı, kompakt, ağırlıklı bileşke operatörleri üzerinde yaptıkları çalışmayı esas alarak Bloch uzayının bir alt uzayı üzerinde benzer operatörlerin çarpımsal operatörlere karşılık gelen sonuçlarını elde etmişlerdir. Sağır ve ark. (2015) Orlicz- Lorentz dizi uzaylarındaki çarpımsal operatörlerin sınırlılığını, kompaktlığını ve kapalılığını karekterize etmişlerdir. Mursaleen ve ark. (2016) Cesàro foksiyon uzayları üzerindeki kompakt, terslenebilir, Fredholm, kapalı aralıklı çarpımsal operatörleri incelemişlerdir. Komal ve ark. (2016) Cesàro dizi uzayları üzerindeki çarpımsal operatörlerin sınırlılığı, kompaktlığı, terslenebilir ve Fredholmluğunu incelemişlerdir. Raj ve ark. (2016) Cesàro-Orlicz dizi uzayları üzerindeki çarpımsal operatörlerin sınırlılığı, kompaktlığı, terslenebilirliği ve Fredholm olması açısından bazı özelliklerini incelemişlerdir. İlkhan ve ark. (2019) ikinci dereceden Cesàro fonksiyon uzaylarındaki çarpımsal operatörlerin sınırlılığını, terslenebilirliğini, kompaktlığını incelemişlerdir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde faydalanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.0.1. *$X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\mathbb{K}$ reel veya karmaşık sayıların bir cismi olmak üzere, her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için*

$$+ : X \times X \to X \qquad \cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

$$(x, y) \to x + y \qquad (\lambda, x) \to \lambda.x$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x + \Theta = x$ *olacak şekilde bir* Θ *vardır*
4. $x + (-x) = \Theta$ *olacak şekilde bir* $(-x)$ *vardır*
5. $x.1 = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

(Maddox, 1970).

Tanım 2.0.2. *Boş olmayan bir X kümesi ve bir*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, (x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer, bu d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(üçgen eşitsizliği)*

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.0.3. $X, \mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.*

$$\| \cdot \| : X \to \mathbb{K}, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü, her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(üçgen eşitsizliği)*

özelliklerini sağlıyorsa, X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine normlu vektör uzayı adı verilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.0.4. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken*

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.0.5. *Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 2.0.6. *$A \subset \mathbb{R}$ olsun. $a \in \mathbb{R}$ noktasının her komşuluğu A nın a dan farklı en az bir noktasını içeriyorsa , yani $\delta > 0$ için $(K_\delta\{a\} - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ ise a noktası A kümesinin yığılma noktası ya da limit noktası adını alır (Şuhubi, 2001).*

Tanım 2.0.7. *(Bolzano-Weierstrass Teoremi) $A \subset \mathbb{R}$ sonsuz sayıda nokta içeren sınırlı bir alt küme olsun. Bu kümenin $\mathbb{R}$ de en az bir yığılma noktası vardır (Kreyszig, 1978).*

Tanım 2.0.8. *$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı ve $a \in \mathbb{R}$ noktası, $n \geq N(\varepsilon)$ için $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, a noktasına bu dizinin limiti denir, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ şeklinde gösterilir (Şuhubi, 2001).*

Tanım 2.0.9. *X ve Y, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı normlu uzaylar olsun. $T : X \to Y$ fonksiyonu; $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için,*

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) \tag{2.2}$$

koşulunu sağlıyorsa, bir lineer dönüşüm ya da bir lineer operatör adını alır. X den Y ye bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.0.10. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. $T : X \to \mathbb{K}$ lineer bir operatör ise, T operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. Yani, bir lineer fonkiyonel reel veya kompleks değerli bir lineer operatördür (Maddox, 1970).*

Tanım 2.0.11. *$T : X \to Y$ lineer operatörü olmak üzere ,*

$$Ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\} \tag{2.3}$$

kümesine T operatörünün sıfir uzayı veya çekirdeği denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.0.12. *X ve Y, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için,*

$$\|Tx\| < M\|x\| \tag{2.4}$$

olacak şekilde sabit bir M sayısı mevcut ise, T operatörüne sınırlı lineer bir operatör denir. X den Y ye bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.0.13. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. $T : X \to K$ sınırlı lineer bir operatör ise, T operatörüne X üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyonel denir (Maddox, 1970).*

Tanım 2.0.14. *X üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi $B(X,K)$ ile gösterilir (Maddox, 1970).*

Tanım 2.0.15. *$T : X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda,*

$$\|T\| = inf\{M > 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\} \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük M sayısına T operatörünün normu denir (Hewitt ve Stromberg, 1965).

Tanım 2.0.16. *X bir vektör uzayı ve $x \in X$ olsun. Her x vektörü için, $Ix = x$ oluyorsa, I dönüşümüne özdeşlik dönüşümü veya birim operatör denir (Hewitt ve Stromberg, 1965).*

Tanım 2.0.17. *X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda,*

$$ST = I = TS \tag{2.6}$$

olacak şekilde $S \in B(X)$ mevcutsa, T ye terslenebilir bir operatör denir ve $S = T^{-1}$ yazılır (Rudin, 1991).

Tanım 2.0.18. *(x_n), X normlu uzayında herhangi bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına zayıf yakınsar denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.0.19. *X normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. Her $f \in X^*$ fonksiyoneli için*

$$\{f(x) : x \in M\} \tag{2.8}$$

sayı kümesi sınırlı ise M kümesine zayıf sınırlı küme denir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.0.20. *X bir normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. M kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart zayıf sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 2.0.21. *$B \subset X$ ve $x \in B$ olsun. $S_\epsilon(x) \subset B$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa x e B nin bir iç noktası denir (Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 2.0.22. *Bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin tüm noktaları iç nokta ise bu küme açık kümedir (Şuhubi, 2001).*

Tanım 2.0.23. *Bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin $\mathbb{R}$ kümesine göre tümleyeni $CA = \mathbb{R} - A$ bir açık küme ise A kümesi kapalı küme adını alır (Şuhubi, 2001).*

Tanım 2.0.24. *Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin tüm yığılma noktalarını kümeye ekleyerek elde ettiğimiz $\overline{A}$ kümesine A alt kümelerinin kapanışı denir (Şuhubi, 2001).*

Tanım 2.0.25. *Herhangi bir topolojik uzayda, bir f kompleks fonksiyonun desteği*

$$supp\, f = \{x : f(x) \neq 0\} \tag{2.9}$$

kümesinin kapanışıdır (Rudin, 1991).

Tanım 2.0.26. *(X, d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M üzerindeki her dizinin limiti M de olan yakınsak bir alt dizisi varsa M kümesine X e dizisel kompakt bir küme denir (Kreyszig, 1978).*

Tanım 2.0.27. *$(X, \|.\|)$ normlu uzayının bir alt kümesi E olsun. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X de kompakt bir küme ise E ye X de bir ön-kompakt küme denir (Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 2.0.28. *X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, T opeartörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine götürüyorsa, T ye kompakt lineer operatör denir. X uzayından Y uzayına olan bütün kompakt lineer operatörlerin kümesi $K(X, Y)$ ile gösterilir (Megginson, 1998).*

Önerme 2.0.29. *X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *T operatörü kompakttır*

(ii) *$T(B_X)$, Y uzayının ön kompakt bir alt kümesidir*

(iii) *B, X uzayının sınırlı bir alt kümesi ise $T(B)$ kümesi Y uzayının total sınırlı bir alt kümesidir*

(iv) *X uzayındaki her sınırlı (x_n) dizisinin (Tx_{n_j}) yakınsak olacak şekilde bir (x_{n_j}) alt dizisi mevcuttur (Megginson, 1998).*

Teorem 2.0.30. *X normlu uzayından Y Banach uzayına tanımlı (T_n) kompakt lineer operatörlerin dizisi bir T operatörüne düzgün yakınsak ise T operatörü kompakttır (Kreyszig,1978).*

Tanım 2.0.31. *X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. boy $T(X) < \infty$ ise T operatörüne sonlu boyutlu operatör ya da sonlu ranklı operatör denir (Kreyszig, 1978).*

Tanım 2.0.32. *X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir zayıf ön kompakt kümesine götürüyorsa, T ye zayıf kompakt lineer operatör denir (Megginson, 1998).*

Önerme 2.0.33. *Herhangi bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına olan her kompakt lineer operatör zayıf kompakttır (Megginson, 1998).*

Tanım 2.0.34. *X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ sınırlı-lineer bir operatör olsun. T operatörü X uzayındaki zayıf yakınsak her diziyi Y uzayında norm yakınsak bir diziye götürüyorsa, T ye tamamen sürekli operatör denir (Megginson, 1998).*

Tanım 2.0.35. *X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü bire bir ve hem T hem de T^{-1} sürekli ise $T : X \to Y$ bir izomorfizm (izomorfizma) olarak adlandırılır (Carothers, 2004).*

Tanım 2.0.36. *X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için, $\|Tx - Ty\|_Y = \|x - y\|_X$ oluyorsa, $T : X \to Y$ bir izometridir denir.*
Eğer, T dönüşümü lineer bir dönüşüm ise, her $x \in X$ için, $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ olması T nin izometri olması için yeterlidir (Carothers, 2004).

Tanım 2.0.37. *X ve Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün grafiği*

$$G(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\} \tag{2.10}$$

$X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T ye kapalı lineer bir operatör denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.0.38. *X, Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(T)$ olmak üzere, $x_n \to x$ ve $Tx_n \to y$ iken, $x \in D(T)$ ve $Tx = y$ olmasıdır (Kreyszig, 1978).*

Tanım 2.0.39. *X, Y metrik uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ bir dönüşüm olsun. $D(T)$ üzerindeki her açık kümenin T altındaki görüntüsü Y de açık ise T ye açık bir dönüşüm denir (Kreyszig, 1978).*

Teorem 2.0.40 (Hahn-Banach Teoremi)**.** *X bir reel vektör uzayı ve $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

(i) Her $x, y \in X$ vektörü için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) Her $x \in X$ vektörü ve $t \geq 0$ sayısı için $p(tx) = tp(x)$

koşullarını sağlasın. Bir $M \subset X$ altuzayı üzerinde tanımlanmış reel değerli bir f lineer fonksiyoneli her $x \in M$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın. f fonksiyonelinin her $x \in X$ için $F(x) \leq p(x)$ eşitsizliği ile her $x \in M$ için $F(x) = f(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir F lineer genişlemesi vardır (Şuhubi, 2001).

Teorem 2.0.41 (Düzgün Sınırlılık Prensibi). *X bir Banach uzayı, Y bir normlu uzay ve $T_n : X \to Y$ sınırlı-lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (T_n) dizisi ve her $x \in X$ için, c_x bir reel sayı olmak üzere,*

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, $(\|T_n\|)$ normlarından oluşan dizi sınırlıdır, yani

$$\|T_n\| \leq c \quad n = 1, 2, \ldots$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.0.42 (Açık Dönüşüm Teoremi, Ters Sınırlılık Teoremi). *X ve Y Banach uzayları olmak üzere, $T : X \to Y$ sınırlı-lineer bir operatör ise T bir açık dönüşümdür. Buradan T bire-bir ve örten bir operatör ise T^{-1} sürekli olur (Kreyszig, 1978).*

Teorem 2.0.43 (Kapalı Grafik Teoremi). *X ve Y Banach uzayları ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ kapalı-lineer bir operatör olsun. Eğer, $D(T)$ kümesi X uzayında kapalı ise T operatörü sınırlıdır (Kreyszig, 1978).*

Tanım 2.0.44. *$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olsun. Buradan,*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \tag{2.11}$$

bağıntısı ancak ve ancak tüm skaler katsayılar sıfır, yani $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ olduğunda sağlanabiliyorsa, S kümesi lineer bağımsız olarak nitelendirilir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.0.45. *X bir vektör uzayı olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ verilsin. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ olmak üzere*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \tag{2.12}$$

şeklindeki bir toplama $x_1, \ldots, x_n$ nin bir lineer kombinasyonu denir.

$$\emptyset \neq M \subset X$$

ise M den alınan sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M nin gereni(Span) denir ve $SpanM$ olarak gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.0.46. *X bir vektör uzayı ve M, X in boş olmayan bir alt kümesi için*

(i) *M lineer bağımsızdır.*

(ii) *$X = SpanM$ ise*

M ye X in bir tabanı veya bir bazı denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.0.47. *$M = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kümesindeki vektörler $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ olarak tanımlandığında M kümesi $\mathbb{R}^n$ nin standart(kanonik) tabanı denir (Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 2.0.48. *X bir vektör uzayı ve X_0 da X in bir alt uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X_0$ olarak tanımlanan $\sim$ bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bir $x \in X$ elemanının bu bağıntıya göre denklik sınıfı x^* ise*

$$x^* = \{x + y : y \in X_0\} = x + X_0 \tag{2.13}$$

dır. X uzayının, $\sim$ bağıntısına göre, bütün denklik sınıflarının kümesini X/X_0 ile gösterelim. $X/X_0 = \{x + X_0 : X \in X\}$ üzerinde $\forall x^*, y^* \in X/X_0$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$x^* + y^* = (x + y)^*$$

$$\alpha x^* = (\alpha x)^*$$

biçiminde tanımlanan işlemler altında, X/X_0 kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzaya X uzayının X_0 alt uzayına göre bölüm uzayı denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.0.49. *X bir vektör uzayı ve M, X in bir alt uzayı olsun. Bu durumda, X/M bölüm alt uzayının boyutuna, X üzerinde M uzayının eş-boyutu denir (Megginson, 1998).*

Tanım 2.0.50. *$A : E \to E$ sınırlı lineer operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter şart*

(i) A nın görüntüsünün kapalı

(ii) $boy(KerA)$ sonlu

(iii) eş-boy (Ran(A)) sonlu olmasıdır (Komal ve Gupta, 2001).

Tanım 2.0.51. *X bir dizi uzayı ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\lambda = (\lambda_n)$ $(\lambda_n \neq 0)$ bir dizi olmak üzere,*

$$M_\lambda x = (\lambda_n x_n) \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlı M_λ operatörüne X üzerinde bir çarpımsal operatör denir (Wang, 2001).

Tanım 2.0.52. *$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathbb{K}$ değerli bütün dizilerin kümesi*

$$w = \{x = (x(k)) : x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, k \to x(k)\} \tag{2.15}$$

ile gösterilir. w kümesi,

$$\begin{array}{cccccc} + : & w \times w & \to & w & \cdot : & \mathbb{K} \times w \to w \\ & ((x(k)), (y(k))) & \to & (x(k) + y(k)) & & (\lambda, (x(k))) \to (\lambda . x(k)) \end{array}$$

ikili işlemleri ile $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. w nın herhangi bir alt vektör uza-

yına bir dizi uzayı denir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \{x=(x(k))\in w : \sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|<\infty\},\\
c &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{k\to\infty} x(k)=l, l\in\mathbb{R}\},\\
c_0 &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{k\to\infty} x(k)=0\},\\
c_{00} &= \{x=(x(k))\in w : \exists n_x\in\mathbb{N}, \forall k\geq n_x \textbf{ için}, x(k)=0\},\\
bs &= \{x=(x(k))\in w : \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n} x(k)\right|<\infty\},\\
cs &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x(k)-l\right)=0, l\in\mathbb{R}\},\\
bv_p &= \{x=(x(k))\in w : \sum_k |x(k)-x(k-1)|^p<\infty, 0<p<\infty\},\\
\ell_p &= \{x=(x(k))\in w : \sum_k |x(k)|^p<\infty, 0<p<\infty\}
\end{aligned}$$

kümeleri birer dizi uzayıdır (Boss, 2000).

Tanım 2.0.53. *λ bir lineer topolojik uzay olsun. Her $i\in\mathbb{N}$ için $p_i(x)=x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i:\lambda\to\mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse, λ uzayına bir $K-$ uzayı denir. Tam lineer metrik bir $K-$ uzayına bir $FK-$ uzayı, normlu $FK-$ uzayına da bir $BK-$ uzayı denir (Başar, 2011).*

Örnek 2.0.54. *ω uzayı*

$$d(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\mid x_k-y_k\mid}{(1+\mid x_k-y_k\mid)} \tag{2.16}$$

metriğe göre bir $FK-$ uzayıdır (Malkowsky ve Rakočvić , 2000).

Örnek 2.0.55. *ℓ_∞, c ve c_0 uzayları*

$$\|x\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}\mid x_k\mid$$

normuna göre, $1 \leq p < \infty$ *için* ℓ_p *uzayı da*

$$\|x\|_p = (\sum_{k=0}^{\infty} \mid x_k \mid^p)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre birer $BK-$ *uzayıdırlar (Malkowsky, 2001).*

Tanım 2.0.56. $\mathbb{N}$ *pozitif tam sayılar kümesi olmak üzere;*

$$Ces(\ell^2(\mathbb{N})) = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_{m=1}^{\infty} \big(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid x_k \mid \big)^2 < \infty\right\} \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlı olan uzaya Cesàro dizi uzayı denir. $Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ *uzayı üzerindeki norm*

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \big(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid x_k \mid \big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

ile verilir ve bu norm altında bir Banach uzayıdır (Komal ve Gupta, 2001).

Tanım 2.0.57. A*, reel sayıların sınırlı ölçülebilir bir alt kümesi ve* $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Her* $r \in \mathbb{R}$ *için*

$$\{x \in A : f(x) > r\}$$

kümesi ölçülebilirse f *fonksiyonuna* A *kümesinde ölçülebilir bir fonksiyon denir (Natanson, 2005).*

Tanım 2.0.58. X *herhangi bir küme ve* $E \subset X$ *olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in E \\ 0 & , \quad x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, E *kümesinin karakteristik fonksiyonu denir (Wheeden ve Zygmund, 1977).*

Tanım 2.0.59. Ω *herhangi bir küme ve* Σ*,* Ω *nın alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi* *olsun. Σ aşağıdaki şartları sağlarsa Ω nın alt kümelerinin bir σ-cebiri olarak adlandırılır:*

(i) $A \in \Sigma$ *ise* $CA \in \Sigma$

(ii) $k = 1, 2, \dots$ *için* $A_k \in \Sigma$ *ise* $\bigcup_k A_k \in \Sigma$ *(Wheeden ve Zygmund, 1977).*

Tanım 2.0.60. *Ω bir küme ve Σ, sayılabilir birleşim altında kapalı olan Ω nın alt kümelerinin bir ailesi (σ-cebiri) olsun. Her bir $A \in \Sigma$ kümesini reel bir sayıya götüren fonksiyona küme fonksiyonu denir (Lifton, 1999).*

Tanım 2.0.61. *Σ üzerinde tanımlı bir μ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, bir ölçüm olarak adlandırılır.*

(i) $A \in \Sigma$ *için* $0 \leq \mu(A) < \infty$ *(yarı pozitif tanımlı)*

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$ *(basit durum)*

(iii) $A \subset B \in \Sigma$ *olmak üzere,* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *(monotonluk)*

(iv) Σ*' nın ikişer ikişer ayrık elemanlarının dizisi* (A_n) *için* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *ise,* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *(sayılabilir toplamsallık) (Lifton, 1999).*

Tanım 2.0.62. *Ω bir küme ve Σ, Ω nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ise (Ω, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay denir (Curbera, 1992).*

Tanım 2.0.63. *Σ, Ω nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ve μ, Σ üzerinde tanımlı bir ölçüm (sayılabilir toplamsal) ise, (Ω, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçüm uzayı denir. $\mu(\Omega) < \infty$, ise (Ω, Σ, μ) uzayına sonlu ölçüm uzayı ve μ ye sonlu bir ölçüm denir (Curbera, 1992).*

Tanım 2.0.64. *μ, bir S $\sigma-$ halkası üzerinde (negatif olmayan sayılabilir toplamsal) bir ölçüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $E \in S$ kümesine μ için bir atom denir.*

(i) $\mu(E) > 0$

(ii) $F \in \sum$ *olmak üzere,* $\mu(F) \cap \mu(E) = 0$ *ya da* $\mu(E - F) = 0$ *(Johnson, 1970).*

Tanım 2.0.65. *Pozitif ölçümlerin her ölçülebilir kümesi bir atom içerirse μ ölçümüne tamamen atomik denir (Johnson, 1970).*

Tanım 2.0.66. *X Banach uzayı, (Ω, Σ, μ) sonlu ölçüm uzayı ve $f : \Omega \to X$ bir fonksiyon olsun. Buradan,*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} \tag{2.19}$$

olacak şekilde, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \sum$ bulunabilirse f fonksiyonuna basit fonksiyon denir (Diestel ve Uhl, 1977).

Tanım 2.0.67. *Bir S özelliği, herhangi bir E kümesinin sıfır ölçümlü bir E_0 alt kümesi dışındaki bütün noktalarda sağlanıyorsa, S özelliği E üzerinde hemen hemen her yerde (hhhy) sağlanır denir (Natanson, 2005).*

Tanım 2.0.68. *X Banach uzayı, (Ω, Σ, μ) sonlu ölçüm uzayı ve $f : \Omega \to X$ bir fonksiyon olsun. Buradan,*

$$\lim_n \|f_n - f\| = 0 \quad \mu - hhhy$$

olacak şekilde basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi mevcutsa f fonksiyonuna μ-ölçülebilir fonksiyon denir (Diestel ve Uhl, 1977).

Tanım 2.0.69. *Aşağıdaki şartları sağlayan, $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, konveks fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.*

(i) $\phi(x) = 0$ *olması için gerek ve yeter şart* $x = 0$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$

Buradan, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve

$$x \geq x_0 \geq 0 \ (x_0 = 0)$$

olmak üzere, bazı $k > 0$ mutlak sabiti için

$$\phi(2x) < k\phi(x)$$

olursa ϕ Young fonksiyonu Δ_2 şartlarını sağlar denir. Ayrıca, bazı $t > 1$ için

$$x \geq x_0 \geq 0(x_0 = 0)$$

olmak üzere,

$$\phi(x) \leq (1/2t)\phi(tx)$$

olursa ϕ Young fonksiyonu ∇_2 şartlarını sağlar denir (Komal ve Gupta, 2001).

Tanım 2.0.70. *(Ω, Σ, μ), σ-sonlu ölçüm uzayı ve $f : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, bazı $\varepsilon > 0$ için*

$$L^{\phi}(\mu) = \left\{ f : \int_X \phi(\varepsilon \mid f \mid) d\mu < \infty \right\} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Orlicz uzayı denir. $L^{\phi}(\mu)$ üzerindeki norm

$$\|f\|_{\phi} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_X \phi(\mid f \mid / \varepsilon) d\mu \leq 1 \right\} \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır ve $L^{\phi}(\mu)$ uzayı $\|.\|_{\phi}$ normuna göre bir Banach uzayı olur.

Diğer taraftan, $1 \leq p < \infty$ için $\phi(x) = x^p$ alınırsa $L^{\phi}(\mu) = L^p(\mu)$, X üzerinde p-integrallenebilir fonksiyonların bir Banach uzayı olur. Aynı zamanda,

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ +\infty & , \quad x > 1 \end{cases}$$

alınırsa, $L^{\phi_0}(\mu) = L_{\infty}(\mu)$, X üzerinde tamamen sınırlı fonksiyonların bir Banach uzayı olur (Rao ve Ren, 1991).

3. DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ ÇARPIMSAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, Wang (2001) in sıfıra yakınsak c_0, yakınsak c, mutlak değerleri toplanabilir ℓ_1 ve mutlak değerlerinin p. kuvveti toplanabilir ℓ_p dizi uzaylarının arasındaki çarpımsal operatörlerin karakterizasyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

3.1. c_0 ve c Dizi Uzayları Arasındaki Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, c_0 ve c dizi uzayları arasındaki çarpımsal operatörlerin karakterizasyonları verilecektir. İlk olarak; c_0 dizi uzayı ile ilgili sonuçlar ile başlanacaktır.

Şimdi, c_0 uzayından c_0 uzayına olan çarpımsal operatörlerin sınırlı olması için gerek ve yeter şart verilecektir.

Teorem 3.1.1. *$T : c_0 \to c_0$ çarpımsal bir operatör olsun. Bu durumda, T operatörünün iyi tanımlı, lineer ve sınırlı olması için gerek yeter şart $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_\infty$ olmasıdır. Aynı zamanda, $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$ olarak elde edilir.*

İspat. $\lambda \notin l_\infty$ olduğunu kabul edelim. Öyle ise $k = 1, 2, \ldots$ için, $|\lambda_{n_k}| > k^2$ olacak şekilde $n_1 < n_2 < \ldots$ vardır. Buradan

$$x = (x_n) = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = n_k \\ 0 & n \neq n_k \end{cases}$$

dizisini alalım. Buradan, $x \in c_0$ ise $Tx \in c_0$ olur. Fakat

$$\|\lambda_{n_k} x_{n_k}\| > k^2 . \frac{1}{k} = k \to \infty$$

olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece $\lambda = (\lambda_n) \in l_\infty$ olur.

Tersine, $\lambda = (\lambda_n) \in l_\infty$ için T operatörünün lineer, sınırlı ve iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Her $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) için,

$$\begin{aligned} T(\alpha x_n + \beta y_n) &= (\lambda_n(\alpha x_n + \beta y_n)) \\ &= (\alpha\lambda_n x_n + \beta\lambda_n y_n) \\ &= \alpha(\lambda_n x_n) + \beta(\lambda_n y_n) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

olduğundan, T operatörü lineerdir.

Şimdi, T operatörünün sınırlı ve $\|T\|= \|\lambda\|_\infty$ olduğunu gösterelim. $x = (x_n) \in c_0$ olsun. $\lambda = (\lambda_n) \in l_\infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|(\lambda_n x_n)\| \\ &= (\sup_{n\geq 1} \mid \lambda_n x_n \mid) \\ &\leq (\sup_{n\geq 1} \mid \lambda_n \mid).(\sup_{n\geq 1} \mid x_n \mid) \\ &= \|\lambda\|_\infty.\|x\| \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\|T\| \leq \|\lambda\|_\infty$ olur. Diğer taraftan, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ dizisini alalım. Öyle ise, her bir $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|Te_n\| &= \|(\lambda_n e_n\| \\ &= |\lambda_n|\|e_n\| \\ &= |\lambda_n| \end{aligned}$$

olacağından,

$$\begin{aligned}\|T\| &\geq \sup_n \|Te_n\| \\ &= \sup_n |\lambda_n| \\ &= \|\lambda\|_\infty\end{aligned}$$

olur. Böylece T operatörü sınırlı ve $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$ olarak elde edilir.

Son olarak, T operatörünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $x = (x_n) \in c_0$ olmak üzere,

$$| \lambda_n x_n | \leq \|\lambda\|_\infty . | x_n | \to 0, \quad n \to \infty$$

olur. Böylece $Tx \in c_0$, yani T operatörü iyi tanımlıdır. □

Sırada, c_0 uzayından c_0 uzayına olan çarpımsal operatörlerin kompaktlığı ile ilgili teorem verilecektir.

Teorem 3.1.2. *$T : c_0 \to c_0$ çarpımsal bir operatör ve $\lambda = (\lambda_n) \in c_{00}$ olsun. Bu durumda, T operatörü kompakttır.*

İspat. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n = (x_k^{(n)}) \in B(c_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ olsun. $\lambda \in c_{00}$ olduğundan dolayı,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, 0, \ldots)$$

ve böylece

$$Tx_n = \left(\lambda_1 x_1^{(n)}, \lambda_2 x_2^{(n)}, \ldots, \lambda_m x_m^{(n)}, 0, 0, \ldots\right)$$

olarak elde edilir. Şimdi her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|\lambda_1 x_1^{(n)}| \leq |\lambda_1| \|x_n\| < \infty$$

olduğundan, Bolzano-Weierstrass teoremi kullanılırsa,

$$\lambda_1 x_1^{(n_k^1)} \to y_1, \quad k \to \infty$$

olacak şekilde $\{\lambda_1 x_1^{(n_k^1)}\}_k \subset \{\lambda_1 x_1^{(n)}\}_n$ yakınsak alt dizisi vardır. Benzer şekilde, her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|\lambda_2 x_2^{(n)}| \leq |\lambda_2| \|x_n\| < \infty$$

olacağından,

$$\lambda_2 x_2^{(n_k^2)} \to y_2, \quad k \to \infty$$

olacak şekilde $\{\lambda_2 x_2^{(n_k^2)}\}_k \subset \{\lambda_2 x_2^{(n)}\}_n$ dizisi yakınsak alt dizisi vardır. Aynı şekilde devam edilirse, her bir $i = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$\lambda_i x_i^{(n_k^m)} \to y_i, k \to \infty$$

olacak şekilde $y_i \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$) dizisini elde ederiz. Öyle ise,

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots) \in c_0$$

ve

$$Tx_{n_k^m} = (\lambda_1 x_1^{(n_k^m)}, \lambda_2 x_2^{(n_k^m)}, \ldots, \lambda_m x_m^{(n_k^m)}, 0, 0, \ldots)$$

olacağından,

$$Tx_{n_k^m} \to y, \quad k \to \infty$$

olacak şekilde $\{Tx_{n_k^m}\}_k \subset \{Tx_n\}_n$ yakınsak alt dizisi elde edilir. Böylece, T operatörü kompakt olur. $\square$

Son olarak, c_0 uzayı üzerindeki çarpımsal operatörlerin aşağıdaki karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 3.1.3. *$T : c_0 \to c_0$ çarpımsal bir operatör ise, aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) T kompakttır

(ii) T *zayıf kompakttır*

(iii) T *tamamen süreklidir*

(iv) $\lambda \in c_0$ *uzayıdır*

İspat. (i)⇒(ii) ve (i)⇒(iii) tanımlardan dolayı açıktır.

(ii)⇒(iv). x_n= $\sum_{k=1}^{n} e_k$ olsun. Öyle ise her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in c_0 \quad \text{ve} \quad \|x_n\| = 1$$

olur. T zayıf kompakt olduğundan, $\{Tx_{n_k}\}_k \subseteq \{Tx_n\}_n$ zayıf yakınsak alt dizisi mevcuttur. Bu durumda, her $f \in c_0^*$ için

$$f(Tx_{n_k}) \to f(y)$$

olacak şekilde $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ dizisi vardır. Şimdi her bir $n \in \mathbb{N}$ için,
$f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) = \alpha_n$ ile

$$f_n : c_0 \to \mathbb{K}$$

olan koordinat fonksiyonellerini tanımlayalım. Buradan her bir $n \in \mathbb{N}$ için ($Tx_{n_k} \to y$ zayıf yakınsak olduğundan)

$$f_n(Tx_{n_k}) \to f_n(y)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f_n(Tx_{n_k}) &= f_n[\lambda_{n_k} x_{n_k}] \\ &= f_n(\sum_{i=1}^{k} \lambda_{n_i} e_{n_i}) \\ &= f_n(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots, \lambda_{n_k}, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

ve yeterince büyük k indisleri için

$$f_n(Tx_{n_k}) = \lambda_n$$

olur. Öyle ise

$$f_n(y) = y_n$$

olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \lambda_n$$

olarak elde edilir. Böylece , $y = (y_n) \in c_0$ olduğundan

$$\lambda = (\lambda_n) \in c_0$$

olur.

(iii)⇒(iv). c_0'ın birim vektör bazı olan (e_n) dizisini göz önüne alalım. Buradan her bir $f = (f_n) \in \ell_1 = c_0^*$ için,

$$|f(e_n)| = |f_n|$$

ve $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n|$ sonlu olduğundan, $|f_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ olur. Bu ise,

$$e_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

zayıf yakınsak olması demektir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|Te_n\| &= \|\lambda_n e_n\| \\ &= |\lambda_n| \|e_n\| \\ &= |\lambda_n| \end{aligned}$$

ve T operatörü tamamen sürekli olduğundan,

$$|\lambda_n| \to 0$$

olur. Yani,

$$\lambda = (\lambda_n) \in c_0$$

olarak elde edilir.

$(v) \Rightarrow (i)$. $\lambda = (\lambda_n) \in c_0$ ve

$$T_k(x) = S_k(Tx),\ T_k : c_0 \to c_0$$

olarak tanımlansın; burada S_k, k. kısmi toplam izdüşümdür. Öyle ise,

$$Tx = \Big(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots\Big)$$

ve

$$T_k x = \Big(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_k x_k, 0, 0, \dots\Big)$$

olarak bulunur. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için T_k sınırlı-lineer bir operatör ve böylece Teorem 3.1.2' den, T_k kompakt olur. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} \|T - T_k\| &= \|(1 - S_k)T\| \\ &= \sup_{k>n} |\lambda_k| \to 0, \quad k \to \infty \end{aligned}$$

olarak elde edileceğinden, T operatörü kompakt olur. □

Şimdi ise, c uzayından c uzayına olan çarpımsal operatörler üzerine bazı sonuçlar verelim.

Teorem 3.1.4. *$T : c \to c$ çarpımsal bir operatör olsun. Bu durumda, T operatörünün iyi tanımlı, lineer ve sınırlı olması için gerek yeter şart $\lambda \in c$ ve $\|T\| = \|\lambda\|$ olmasıdır.*

İspat. $e = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in c$ dizisini alalım. T iyi-tanımlı olduğundan, $Te = \lambda_n \in c$; yani $\lambda \in c$ uzayı olur.

Diğer taraftan, Teorem 3.1.1' in ispatından, T operatörünün lineerliği ve sınırlılığı kolayca elde edilir. Öyle ise, T operatörünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $x = (x_n) \in c$ ve $\lambda = (\lambda_n) \in c$ olsun. Bu durumda,

$$x_n \to y \text{ ve } \lambda_n \to z$$

olacak şekilde $y, z \in \mathbb{K}$ vardır. Buradan

$$Tx = \lambda_n x_n \to zy$$

olacağından $Tx \in c$ olarak elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 3.1.5. *$T : c \to c$ çarpımsal bir operatör ise, aşağıdakiler denktir:*

(i) *T kompakttır*

(ii) *T zayıf kompakttır*

(iii) *T tamamen süreklidir*

(iv) *$\lambda \in c_0$ uzayıdır*

İspat. Teorem 3.1.3' ün ispatına benzerdir. $\square$

3.2. ℓ_1 Dizi Uzayı Arasındaki Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, ℓ_1 uzayından ℓ_1 uzayına olan çarpımsal operatörlerin karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 3.2.1. *$Tx = (\lambda_n x_n)$, ℓ_1 uzayından ℓ_1 uzayına çarpımsal operatör olsun. T operatörünün iyi tanımlı, lineer ve sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_\infty$ olmasıdır. Bu durumda $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$ olur.*

İspat. T operatörü iyi tanımlı, lineer ve sınırlı olsun. Eğer $\lambda = (\lambda_n) \notin \ell_\infty$ ise, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$|\lambda_{n_k}| > k^2$$

olcak şekilde $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ indisleri mevcuttur. Buradan,

$$x = (x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}$$

dizisi alınsın. Öyle ise

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1\end{aligned}$$

olduğundan $x=(x_n)\in\ell_1$ olur. Böylece $Tx\in\ell_1$ olarak elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n x_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{n_k} x_{n_k}| \\ &> \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot 2^k=+\infty\end{aligned}$$

olduğundan, bu bir çelişkidir. Bu durumda, $\lambda=(\lambda_n)\in\ell_\infty$ olmalıdır.

Aksine $\lambda\in\ell_\infty$ için, T operatörünün lineer,sınırlı ve iyi tanımlı olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Her bir $x=(x_n)\in\ell_1$, $y=(y_n)\in\ell_1$ ve $\alpha,\beta,\in\mathbb{K}\ (=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned}T(\alpha x_n+\beta y_n) &= (\lambda_n(\alpha x_n+\beta y_n)) \\ &= (\alpha\lambda_n x_n+\beta\lambda_n y_n) \\ &= \alpha(\lambda_n x_n)+\beta(\lambda_n y_n) \\ &= \alpha T(x)+\beta T(y)\end{aligned}$$

olduğundan, T operatörü lineerdir. Diğer taraftan, $x=(x_n)\in\ell_1$ olsun. $\lambda=(\lambda_n)\in\ell_\infty$ olduğundan

$$\|\lambda\|_\infty=\sup_{n\geq 1}|\ \lambda_n\ |$$

normu sonludur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|_1 &= \|(\lambda_n x_n)\| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\ (\lambda_n x_n)\ | \\
&\leq \sup_{n\geq 1} |\ \lambda_n\ | \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\ x_n\ | \\
&= \|\lambda\|_\infty \cdot \|x\|_1
\end{aligned}
$$

normu sonlu olur. Böylece $Tx \in \ell_1$ olacağından, T operatörü iyi tanımlı olur. Ayrıca,

$$\|T\| \leq \|\lambda\|_\infty$$

olur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\|Te_n\|_1 &= \|\lambda_n e_n\|_1 \\
&= |\ \lambda_n\ |\ \|e_n\| \\
&= |\ \lambda_n\ |
\end{aligned}
$$

olduğundan, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|\lambda\|_\infty - \varepsilon <|\ \lambda_n\ |\leq \|\lambda\|_\infty$$

alınabilir. ε istenildiği kadar küçük alınabilinildiğinden dolayı

$$\|T\| \geq \|\lambda\|_\infty$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$ olur. □

Teorem 3.2.2. *$Tx = (\lambda_n x_n)$ çarpımsal operatörünün ℓ_1 uzayından ℓ_1 uzayına kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in c_0$ olmasıdır.*

İspat. İlk olarak, Teorem 3.1.2'den; $\lambda \in c_{00}$ ise T operatörü kompakttır. Şimdi $\lambda \in c_0$ ve

$$T_k x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_k x_k, 0, 0, \ldots)$$

olarak alınsın. Yukarıdaki sonuçtan T_k operatörü kompakt olur. Ayrıca,

$$\|T - T_k\| = \sup_{n>k} \mid \lambda_n \mid \to 0, \ \ k \to \infty$$

olduğundan dolayı T kompakttır.

Tersine, aksi durum olduğu kabul edilirse $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mid \lambda_{n_k} \mid > \delta > 0$$

olacak şekilde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ mevcuttur. Buradan, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$x_k = e_{n_k}$$

olsun. T operatörü kompakt olduğundan dolayı, $\{Tx_k\}_k$ dizisinin $\{Tx_{k_\ell}\}_\ell$ yakınsak alt dizisi vardır. Bu ise, $\{Tx_{k_\ell}\}_\ell$ dizisinin Cauchy olması demektir; yani $\ell, \ell' \to \infty$ iken

$$\|Tx_{k_\ell} - Tx_{k_{\ell'}}\| \to 0$$

olması demektir. Fakat $\ell \neq \ell'$ için

$$\begin{aligned} \|Tx_{k_\ell} - Tx_{k_{\ell'}}\| &= \|\lambda_{k_\ell} e_{n_{k_\ell}} - \lambda_{k_{\ell'}} e_{n_{k_{\ell'}}}\| \\ &= \mid \lambda_{k_\ell} \mid + \mid \lambda_{k_{\ell'}} \mid \\ &> 2\delta \end{aligned}$$

olduğundan dolayı, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\lambda \in c_0$ 'dır.

$\square$

3.3. ℓ_p Dizi Uzayındaki Çarpımsal Operatörler

Bu kısım da ise, $1 < p < \infty$ olmak üzere, ℓ_p uzayından ℓ_p uzayına tanımlı olan çarpımsal operatörlerin bazı karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 3.3.1. *$T(x_n) = (\lambda_n x_n)$, ℓ_p uzayının çarpımsal operatörü olsun. T operatörünün lineer, sınırlı ve iyi tanımlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_\infty$ olmasıdır. Bu durumda, $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$' dur.*

İspat. T operatörü lineer, sınırlı ve iyi tanımlı fakat, $\lambda = (\lambda_n) \notin \ell_\infty$ olsun. Öyle ise, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$|\lambda_{n_k}| > k > 0$$

olacak şekilde $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ indisleri vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x = (x_n) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}$$

olarak alınsın. Buradan, $1 < p < \infty$ için

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |\ x_n \ |^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \end{aligned}$$

toplamı sonludur. Öyle ise $x \in \ell_p$ ve böylece $Tx \in \ell_p$ olarak elde edilir. Fakat,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_p^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |\ \lambda_k x_k \ | \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ \lambda_k \ |^p}{k^p} \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \end{aligned}$$

olduğundan dolayı, bu bir çelişkidir. Böylece $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_\infty$ olur.

Şimdi, $\lambda \in \ell_\infty$ için T operatörünün lineer, sınırlı ve iyi tanımlı olduğu gösterilecektir.

Her bir $x = (x_n) \in \ell_p$, $y = (y_n) \in \ell_p$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned} T(\alpha x_n + \beta y_n) &= (\lambda_n(\alpha x_n + \beta y_n)) \\ &= (\alpha \lambda_n x_n + \beta \lambda_n y_n) \\ &= \alpha(\lambda_n x_n) + \beta(\lambda_n y_n) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

olduğundan, T operatörü lineerdir.

Şimdi, $x = (x_n) \in \ell_p$ olsun. Bu durumda,

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p$$

normu sonludur. Öyle ise

$$\begin{aligned} \|Tx\|_p^p &= \|(\lambda_n x_n)\|_p^p \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \mid \lambda_n \mid^p \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p \\ &= \|\lambda\|_\infty^p \|x\|_p^p \end{aligned}$$

normu sonlu olur. Böylece $Tx \in \ell_p$; yani T operatörü iyi tanımlı olur.

Ayrıca, buradan $\|T\|_p \leq \|\lambda\|_\infty$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|\lambda\|_\infty - \varepsilon < \mid \lambda_n \mid \leq \|\lambda\|_\infty$$

olarak alınsın. Öyle ise

$$\begin{aligned} \|T\|_p &\geq \|Te_n\|_p \\ &= \mid \lambda_n \mid \\ &> \|\lambda\|_\infty - \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Yeterince küçük ε' lar için

$$\|T\|_p \geq \|\lambda\|_\infty$$

olacağından, $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$ olarak elde edilir. □

Son olarak, ℓ_p uzayındaki çarpımsal operatörlerin kompaktlığı ile ilgili sonucu verelim.

Teorem 3.3.2. *$Tx = (\lambda_n x_n)$ çarpımsal operatörünün ℓ_p uzayından ℓ_p uzayına kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in c_0$ olmasıdır.*

İspat. Öncelikle Bolzano-Weierstrass teoreminden $\lambda \in c_{00}$ ise T operatörü kompakttır. Şimdi, $\lambda \in c_0$ ve

$$T_k x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_k x_k, 0, 0, \ldots)$$

olsun. Yukarıdaki sonuçtan T_k operatörü kompakt olur. Diğer taraftan,

$$\|T - T_k\| = \sup_{n<k} \mid \lambda_n \mid \to 0, \;\; k \to \infty$$

olduğundan, T kompakttır.

Tersine, T operatörü kompakt olsun. Öyle ise, kompakt operatörler tamamen sürekli ve

$$e_n \to 0, \;\; n \to \infty$$

zayıf yakınsak olduğundan,

$$\begin{aligned} \mid \lambda_n \mid &= \|\lambda_n e_n\| \\ &= \|Te_n\| \to 0, \;\; n \to \infty \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\lambda \in c_0$ olur. □

4. CESÀRO DİZİ UZAYINDAKİ ÇARPIMSAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, Komal ve Gupta (2001) nın Cesàro dizi uzaylarındaki sınırlı, kompakt, terslenebilir ve Fredholm çarpımsal operatörlerin karakterizasyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

4.1. Cesàro Dizi Uzayındaki Sınırlı Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, $Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ uzayları arasındaki çarpımsal operatörlerin sınırlı ve izometri olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.1.1. $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *bir dönüşüm olsun. Bu durumda,* $M_\Theta : Ces(\ell^2(\mathbb{N}) \to Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ *çarpımsal operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart* Θ *nın sınırlı fonksiyon olmasıdır.*

İspat. Θ sınırlı bir dönüşüm olsun. Öyle ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $| \Theta_n | \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Bu durumda, $x \in Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|M_\Theta x\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} | (\Theta x)_k | \right)^2 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} | \Theta_k || x_k | \right)^2 \\
&\leq M^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} | x_k | \right)^2 \\
&= M^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, her $x \in Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ için

$$\|M_\Theta x\| \leq M\|x\|$$

olduğundan M_Θ sınırlı operatör olur.

Aksine M_Θ sınırlı operatör olsun. Bu durumda Θ nın sınırlı fonksiyon olduğu gösterilecektir. Θ sınırlı fonksiyon olmasın. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $| \Theta_{p_n} | > n$ olacak şekilde $p_n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan,

$$\|e^{p_n}\| = \left(\sum_{m=p_n}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\widehat{e^{p_n}} = \frac{e^{p_n}}{\|e^{p_n}\|}$$

olarak alınırsa,

$$\widehat{e^{p_n}} = 1$$

olur. Fakat,

$$\begin{aligned} \|M_\Theta \widehat{e^{p_n}}\| &= \frac{\|M_\Theta e^{p_n}\|}{\|e^{p_n}\|} \\ &= \frac{\left(\sum_{m=p_n}^{\infty} \frac{|\Theta p_n|^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\|e^{p_n}\|} \\ &= \mid \Theta p_n \mid \; > n \end{aligned}$$

olduğunan, bu durum M_Θ nın sınırlı olması ile çelişir. Sonuç olarak, Θ sınırlı bir fonksiyon olmalıdır. □

Örnek 4.1.2. *Her $n \in \mathbb{N}$ için,*

$$\Theta(n) = \frac{e^{in}}{n}$$

ile $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda, her $x \in Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ için

$$\begin{aligned} \|M_\Theta x\| &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \mid x_k \mid \right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

olacağından, M_Θ sınırlı bir operatör olur.

Teorem 4.1.3. *M_Θ çarpımsal operatörünün izometri olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $\mid \Theta n \mid = 1$ olmasıdır.*

İspat. $\mid \Theta n \mid = 1$ ise, M_Θ operatörünün izometri olacağı açıktır. Tersine, M_Θ operatörü izometri olsun. Bu durumda, bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ indisleri için $\mid \Theta n_0 \mid > 1$ ise

$$\|M_\Theta e^{n_0}\| > \|e^{n_0}\|$$

ve $\mid \Theta n_0 \mid < 1$ ise

$$\|M_\Theta e^{n_0}\| < \|e^{n_0}\|$$

olur. Bu durum M_Θ çarpımsal operatörünün izometri olduğu varsayımıyla çelişir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\mid \Theta n \mid = 1$' dir. $\square$

4.2. Cesàro Dizi Uzayındaki Kompakt Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, $Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ uzayları arasındaki çarpmsal operatörlerin kompaktlık ve kapalılığı ile ilgili teoremler verilecektir. İlk olarak, M_Θ çarpımsal operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şartı verelim.

Teorem 4.2.1. *$M_\Theta \in B(Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ olsun. M_Θ çarpımsal operatörünün kompakt operatör olması için gerek ve yeter şart $\Theta(n) \to 0(n \to \infty)$ olmasıdır.*

İspat. İlk olarak, M_Θ nın kompakt operatör olduğu kabul edilsin. $\Theta(n) \to 0(n \to \infty)$ olduğu gösterilecektir. $\Theta(n) \nrightarrow 0$ ise,

$$N_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} :\mid \Theta_n \mid \geq \varepsilon\}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır ve bu küme sonsuz elemanlıdır. $p_1, p_2 \dots p_n$ leri N_ε kümesinden seçelim ve

$$e^{\widehat{p_n}} = \frac{e^{p_n}}{\|e^{p_n}\|}$$

olsun. O halde $\{e^{\widehat{p_n}} : p_n \in N_\varepsilon\}$, $Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ uzayında sonsuz sınırlı bir kümesidir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|M_\Theta e^{\widehat{p_n}} - M_\Theta e^{\widehat{p_s}}\| &= \|\Theta e^{\widehat{p_n}} - \Theta e^{\widehat{p_s}}\| \\ &\geq \varepsilon \|e^{\widehat{p_n}} - e^{\widehat{p_s}}\| \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\{M_\Theta e^{\widehat{p_n}} : p_n \in N_\varepsilon\}$ yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu durum M_Θ operatörünün kompakt olmasıyla çelişir. Böylece $\Theta(n) \to 0(n \to \infty)$ olur.

Aksine $\Theta(n) \to 0(n \to \infty)$ olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için

$$N_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} :\mid \Theta(n) \mid \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu bir kümesidir. Öyle ise, her bir $\varepsilon > 0$ için $Ces(\ell^2(\mathbb{N}_\varepsilon))$ uzayı sonlu boyutludur. Bu yüzden, $M_\Theta \mid_{Ces(\ell^2(\mathbb{N}_\varepsilon))}$ operatörü kompakttır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Theta_n(m) = \begin{cases} \Theta(m), & \forall m \in N_{\frac{1}{n}} \\ 0, & \forall m \notin N_{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

ile $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dönüşümü tanımlansın.

Açıkça, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $Ces(\ell^2(\mathbb{N}_{\frac{1}{n}}))$ sonlu boyutlu olduğundan, M_{Θ_n} kompakt bir operatördür. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(M_{\Theta_n} - M_\Theta\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_n(k)x_k - \Theta(k)x_k \mid \right)^2 \\ &= \sum_{m \in N_{\frac{1}{n}}}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_n(k)x_k - \Theta(k)x_k \mid \right)^2 \\ &+ \sum_{m \in N'_{\frac{1}{n}}}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_n(k)x_k - \Theta(k)x_k \mid \right)^2 \\ &= \sum_{m \in N'_{\frac{1}{n}}}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta(k)x_k \mid \right)^2 \\ &< \frac{1}{n^2} \sum_{m \in N'_{\frac{1}{n}}}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid x_k \mid \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \|x\|^2 \end{aligned}$$

olacağından,

$$\|(M_{\Theta_n} - M_{\Theta)}(x)\| \leq \frac{1}{n}\|x\|$$

elde edilir. Böylece,

$$\|(M_{\Theta_n} - M_\Theta)\| \leq \frac{1}{n}$$

olur. Yani, M_Θ kompakt operatörlerinin bir limiti olduğunda, M_Θ kompakt bir operatördür. □

Şimdi ise, M_Θ çarpımsal operatörünün kapalılık şartı verilecektir.

Teorem 4.2.2. *$M_\Theta \in B(Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$ olsun. M_Θ operatörünün kapalı görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart Θ nın $N \backslash ker\Theta = S$ üzerinde sıfırdan uzak sınırlı olmasıdır.*

İspat. Θ nın S üzerinde 0 dan uzak sınırlı olduğunu kabul edelim. Öyle ise, her $n \in S$ için $\mid \Theta_n \mid \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. $RanM_\Theta$ nın kapalı olduğu gösterilecektir. y, $ranM_\Theta$ nın bir limit noktası olsun. Bu durumda, $y^{(n)} \to y$ olacak şekilde $ranM_\Theta$ nın üzerinde bir $\{y^{(n)}\}$ dizisi vardır. Buradan,

$$x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$$

$Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ uzayı üzerinde bir dizi olmak üzere,

$$y^{(n)} = M_\Theta x^{(n)}$$

yazılabilir. Öyle ise, $\{M_\Theta x^{(n)}\}$ bir Cauchy dizisi olduğu açıktır. Bu durumda,

$$x_k^{(\widetilde{n})} = \begin{cases} x_k^{(n)}, & k \in S \\ 0 \quad , & k \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlannırsa,

$$\begin{aligned}
\|M_\Theta x^{(n)} - M_\Theta x^{(m)}\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_k x_k^{(n)} - \Theta_k x_k^{(m)} \mid \right)^2 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_k \mid \mid x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \mid \right)^2 (k \in S) \\
&\geq \varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mid x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \mid}{m} \right)^2 (k \in S) \\
&= \varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mid x_k^{\widetilde{(n)}} - x_k^{\widetilde{(m)}} \mid}{m} \right)^2 \\
&= \varepsilon^2 \|x^{\widetilde{(n)}} - x^{\widetilde{(m)}}\|^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu eşitsizlikten; $\{x^{(\widetilde{n})}\}$, $Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ üzerinde Cauchy dizisi olur. Öyle ise, $Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ tam uzay olduğundan $x^{(\widetilde{n})} \to x(n \to \infty)$ olacak şekilde $x \in Ces(\ell^2(\mathbb{N})$

vardır. Buradan, M_Θ operatörünün sürekliliği göz önüne alındığında

$$M_\Theta x^{\widetilde{(n)}} \to M_\Theta x$$

olur. Fakat

$$M_\Theta x^{(n)} = M_\Theta x^{\widetilde{(n)}} \to y$$

olacağından, limitin tekliği göz önüne alınırsa $M_\Theta x = y$ olur. Böylece, $y \in ranM_\Theta$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, M_Θ kapalı bir görüntüye sahip olur.

Tersine, M_Θ kapalı bir görüntüye sahip olsun. O halde, $(kerM_\Theta)^\perp = Ces(\ell^2(\mathbb{N} \setminus ker\Theta))$ üzerinde sıfırdan uzak sınırlıdır. Yani, her $x \in Ces(\ell^2(\mathbb{N} \setminus ker\Theta))$ için

$$\|M_\Theta x\| \geq \varepsilon \|x\| \tag{4.1}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Buradan,

$$E = \{k \in \mathbb{N} \mid ker\Theta :\mid \Theta_k \mid < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

olsun. Öyle ise, $E \neq \emptyset$ ve $n_0 \in E$ için

$$\begin{aligned}
\|M_\Theta e^{n_0}\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mid \Theta_k e^{n_0}(k) \mid \right)^2 \\
&= \sum_{m=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \mid \Theta_{n_0} \mid \right)^2 \\
&< \varepsilon^2 \sum_{m=n_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\
&= \varepsilon^2 \|e^{n_0}\|^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda, $\|M_\Theta e^{n_0}\| < \varepsilon \|e^{n_0}\|$ olacağından bu ifade (4.1) ile çelişir. Böylece, $E = \emptyset$ ve her $k \in \mathbb{N} \setminus ker\Theta$ için $\mid \Theta_k \mid \geq \varepsilon$ olur. Sonuç olarak teorem ispatlanmış olur. $\square$

4.3. Cesàro Dizi Uzayındaki Terslenebilir ve Fredholm Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, $Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ uzayları arasındaki çarpımsal operatörlerin terslenebilir ve Fredholm olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.3.1. $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *bir dönüşüm olsun. Bu durumda,* $M_\Theta : Ces(\ell^2(\mathbb{N}) \to Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ *çarpımsal operatörünün terslenebilir olması için gerek ve yeter şart her bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $m < \Theta_n < M$ *olacak şekilde* $m > 0$ *ve* $M > 0$ *sayılarının olmasıdır.*

İspat. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $m < \Theta_n < M$ olduğu kabul edilsin ve

$$\beta_n = \frac{1}{\Theta_n}$$

ile $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dönüşümü tanımlansın. O halde, Teorem 4.1.1 açısından M_Θ ve M_β sınırlı lineer operatörlerdir. Aynı zamanda,

$$M_\Theta.M_\beta = M_\beta.M_\Theta = I$$

olduğundan, M_β operatörü M_Θ operatörünün tersidir.

Tersine, M_Θ terslenebilir bir operatör olsun. O halde,

$$ranM_\Theta = Ces(\ell^2(\mathbb{N}))$$

olur. Bundan dolayı, $ranM_\Theta$ kapalı olur. Öyle ise, Teorem 4.2.2 den her $n \in \mathbb{N} \setminus ker\Theta$ için

$$\mid \Theta_n \mid \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Buradan $ker\Theta = \emptyset$ olduğu gösterilecektir. Eğer bu sağlanmazsa, bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ indisleri için $\Theta_{n_0} = 0$ ve böylece $e^{n_0} \in kerM_\Theta$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $n \in \mathbb{N}$ için $\mid \Theta_n \mid \geq \varepsilon$ olur. M_Θ sınırlı bir operatör olduğundan dolayı, Teorem 4.1.1 den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mid \Theta_n \mid \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varepsilon \leq \mid \Theta_n \mid \leq M$$

olarak elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.2. $M_\Theta : Ces(\ell^2(\mathbb{N}) \to Ces(\ell^2(\mathbb{N})$ *sınırlı bir operatör olsun.* M_Θ *nın Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter şart*

(i) $ker\Theta$*,* $\mathbb{N}$ *ın sonlu bir alt kümesidir.*

(ii) Her $n \in \mathbb{N} \setminus ker\Theta$ *için,* $\mid \Theta_n \mid \geq \varepsilon$ *dur.*

İspat. M_Θ, Fredholm operatörü olsun. Buradan, $ker\Theta$; $\mathbb{N}$ nın sonsuz bir alt kümesi ise her $n \in ker\Theta$ için

$$e^n \in kerM_\Theta$$

olur. Fakat, (e^n) dizileri lineer bağımsız olduğundan, $kerM_\Theta$ sonsuz boyutlu olur ve böylece bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $ker\Theta$, $\mathbb{N}$ nın sonlu alt kümesi olmalıdır. (ii) şartı Teorem 4.2.2 den açıkça görülür.

Şimdi, (i) ve (ii) şartları sağlanırsa M_Θ nın Fredholm operatörü olduğu gösterilecektir. Teorem 4.2.2 gereğince, (ii) şartı M_Θ nın kapalı görüntüye sahip olduğunu gösterir. (i) şartı ise $kerM_\Theta$ ve $kerM_\Theta^*$ kümlerinin sonlu boyutlu olduğunu gösterir. Böylece, M_Θ bir Fredholm operatörü olur. $\square$

5. ORLİCZ UZAYINDAKİ ÇARPIMSAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, Komal ve Gupta (2001) nın Orlicz uzayındaki terslenebilir, kompakt ve fredholm çarpımsal operatörlerin karekterizasyonları ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Bu bölümdeki sonuçları vermeden önce, Young fonksiyonunun Δ_2 ve ∇_2 şartlarını sağladığını; aynı zamanda,

$$\{x \in x :\mid u(x) \mid \geq \varepsilon\}$$

ile $N(u, \varepsilon)$ kümesinin tanımlandığını hatırlatalım.

5.1. Orlicz Uzayındaki Sınırlı ve Terslenebilir Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, Orlicz uzayındaki çarpımsal operatörlerin sınırlı ve terslenebilir olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Bu kısıma, Orlicz uzayındaki çarpımsal operatörlerin sınırlılığını veren teorem ile başlayalım.

Teorem 5.1.1. *$M_u \in B(L^\phi(\mu))$ olması için gerek ve yeter şart $u \in L_\infty(\mu)$ olmasıdır. Aynı zamanda, $\|M_u\|_\phi = \|u\|_\infty$ olur.*

İspat. $u \in L_\infty(\mu)$ olsun. Bu durumda,

$$\int_x \phi\bigg(\frac{M_u f}{\|u\|_\infty \|f\|_\phi}\bigg) d\mu \leq \int_x \phi\bigg(\frac{f}{\|f\|_\phi}\bigg) d\mu \leq 1$$

olur. Böylece bazı $f \in L^\phi(\mu)$ için,

$$\|M_u f\|_\phi \leq \|u\|_\infty \|f\|_\infty \tag{5.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine, M_u' nın sınırlı bir operatör olduğu kabul edilsin. u nın tamamen sınırlı olduğu gösterilecektir. Her $n \in \mathbb{N}$ için u tamamen sınırlı fonksiyon değilse,

$$E_n = \{x \in X :\mid u(x) \mid > n\}$$

kümesi pozitif bir ölçüme sahiptir. Buradan, her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\|M_u \chi E_n\|_\phi = \frac{n}{\phi^{-1}(1/\mu(E_n))} = n\|\chi E_n\|_\phi$$

olduğundan,

$$\|M_u\|_\phi \geq n$$

olur. Bu ise, M_u operatörünün sınırlılığı ile çelişir. Bu yüzden, u tamamen sınırlı olmalıdır. Şimdi, $\|M_u\|_\phi = \|u\|_\infty$ olduğu gösterilecektir. Açıkça (5.1) den

$$\|M_u\|_\phi \leq \|u\|_\infty$$

olur. Bu eşitsizliğin tersini kanıtlamak için, $\delta > 0$ olsun. Öyle ise,

$$E = \{x \in X :| u(x) |\geq \|u\|_\infty - \delta\}$$

kümesi pozitif bir ölçüme sahiptir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_x \phi\Big(\mid \frac{\|u\|_\infty - \delta}{\|M_u \chi E\|_\phi} \chi E \mid \Big) d\mu \;&\leq\; \int_x \phi\Big(\frac{\mid u\chi E \mid}{\|M_u \chi E\|_\phi}\Big) d\mu \\
&=\; \int_x \phi\Big(\frac{\mid M_u \chi E \mid}{\|M_u \chi E\|_\phi}\Big) d\mu \\
&\leq\; 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$\|\chi E\|_\phi \leq \frac{\|M_u \chi E\|_\phi}{\|u\|_\infty - \delta}$$

olacağından

$$\|M_u\|_\phi \geq \|u\|_\infty - \delta$$

olarak elde edilir. Bu eşitsizlik, her $\delta > 0$ için doğru olduğundan

$$\|M_u\|_\phi \geq \|u\|_\infty$$

olur. Sonuş olarak,

$$\|M_u\|_\phi = \|u\|_\infty$$

olarak elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.2. *(X, S, μ), $\sigma-$sonlu bir ölçüm uzayı olsun. Bu durumda, $L^\phi(\mu)$ üzerindeki bütün çarpımsal operatörlerin kümesi, $B(L^\phi(\mu))$ nün maksimal bir Abelian alt cebiridir.*

İspat. $m = \{M_u : u \in L^\phi(\mu)\}$ olsun. m kümesinin $B(L^\phi(\mu))$ nün bir alt cebiri olduğu kolayca görülür. m nin maksimal Abelian olduğu ispatlamak yeterlidir. Başka bir değişle; A, m kümesinin her elemanı ile değişmeliyse, $A \in m$ olduğu gösterilecektir.

$e : X \to \mathbb{C}$ birim fonksiyon olsun. $v = Ae$ ve $E \in S$ alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A\chi E &= AM\chi Ee \\ &= M\chi EAe \\ &= \chi Ev \\ &= v\chi E \\ &= M_v\chi E \end{aligned}$$

olur. Şimdi de, $v \in L^\infty(\mu)$ olduğu gösterilecektir. Buradan, $k = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere, her k için

$$F = \{x :| v(x) |> k\} \tag{5.2}$$

kümesinin pozitif bir ölçüme sahip olduğu kabul edilsin. O halde,

$$\begin{aligned}\int_x \phi\Big(\frac{k\chi F}{\|A\chi F\|_\phi}\Big)d\mu &\leq \int_x \phi\Big(\frac{v\chi F}{\|A\chi F\|_\phi}\Big)d\mu \\ &= \int_x \phi\Big(\frac{M_v\chi F}{\|M_v\chi F\|_\phi}\Big)d\mu \\ &\leq 1\end{aligned}$$

olacağından

$$\|\chi_F\|_\phi \leq \frac{1}{k}\|A\chi_F\|_\phi$$

ya da

$$\|A\chi_F\|_\phi \geq k\|\chi_F\|_\phi$$

ifadeleri elde edilir. Böylece A nın sınırlı operatör olmadığı görülür. Dolayısıyla, $v \in L^\infty(\mu)$ olur. Şimdi, A ve M_v basit fonksiyonlar üzerinde aynı olur. Öyle ise, basit fonksiyonlar $L^\phi(\mu)$ üzerinde yoğun olduğundan $A = M_v$ olarak elde edilir. Böylece m kümesi $B(L^\phi(\mu))$ nün maksimal Abelian alt cebiridir. □

Teorem 5.1.3. *$M_u \in m$ olmak üzere, M_u çarpımsal operatörünün $L^\phi(\mu)$ üzerinde terslenebilir olması için gerek ve yeter şart u nun $L^\infty(\mu)$ üzerinde terslenebilir olmasıdır.*

İspat. u terslenebilir ise $M_u^{-1} = M_{u^{-1}}$ olacağından, M_u operatörü terslenebilir olur.

Tersine, M_u terslenebilir operatör olsun ve onun tersi olarak A alınsın. Bu durumda, A, m nin her bir elemanı ile değişmeli olacağından, bazı $v \in L_\infty(\mu)$ için

$$A = M_v$$

olur. Buradan, v nin u nın tersi olduğu açıkça görülür. □

Teorem 5.1.4. *$M_u : L^\phi(\mu) \to L^\phi(\mu)$ olan bir lineer dönüşüm daima sınırlıdır.*

İspat. $\{f_n\}$, $L^\phi(\mu)$ üzerinde f ye yakınsayan bir dizi ve $\{M_u f_n\}$, $g \in L^\phi(\mu)$ ye yakınsak olsun. O halde,

$$\|f_n - f\|_\phi \to 0 \tag{5.3}$$

ve

$$\|M_u f_n - g\|_\phi \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olur. Böylece, her $n > n_0$ için

$$\|f_n - f\|_\phi \leq 1 ve \|M_u f_n - g\|_\phi \leq 1$$

olacak şekilde pozitif n_0 sayısı seçilebilir. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{\|f_n - f\|_\phi} \int_X (\phi(\mid f_n - f \mid)) d\mu \leq \int_X \left(\frac{\mid f_n(x) - f(x) \mid}{\|f_n - f\|_\phi} \right) d\mu \leq 1$$

olur. Buradan,

$$\int_X \phi(\mid f_n - f \mid) d\mu \leq \|f_n - f\|_\phi$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_X \phi(u f_n - g) d\mu \leq \|u f_n - g\|_\phi \tag{5.4}$$

olur. (5.3) den,

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = f^{'}(x) \ hhhy$$

olacak şekilde $\{f_n\}$ dizisinin bir $\{f_n^{'}\}$ alt dizisi bulunabilir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} u(x) f_n^{'}(x) = u(x) f^{'}(x) \ hhhy \tag{5.5}$$

olur. Benzer şekilde, (5.4) den

$$\lim_{n\to\infty} u(x)f_n''(x) = g(x) \ hhhy \tag{5.6}$$

olacak şekilde $\{f_n'\}$ dizisinin bir $\{f_n''\}$ alt dizisi elde edilebilir. Böylece, (5.5) ve (5.6) deki ifadelerden,

$$uf = g$$

olduğu elde edilir.

Bu durum, M_u operatörünün grafiğinin kapalı olduğunu gösterir. Öyle ise, Kapalı Grafik Teoreminden M_u operatörü sürekli olur. □

5.2. Orlicz Uzayındaki Kompakt Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, M_u çarpımsal operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli olan şart verilecektir.

Teorem 5.2.1. *$M_u \in B(L^\phi(\mu))$ olsun. Bu durumda, M_u operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart her bir $\varepsilon > 0$ için, $L^\phi(N(u,\varepsilon))$ uzayının sonlu boyutlu olmalıdır.*

İspat. M_u operatörü kompakt ise, $L^\phi(\mu)$ uzayının değişmez alt uzayı olan $L^\phi(N(u,\varepsilon))$ uzayına kısıtlanışı da kompakttır; burada

$$L^\phi(N(u,\varepsilon)) = \{f \in L^\phi(\mu) : \forall x \notin N(u,\varepsilon) \text{ için } f(x) = 0\}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca, $M_u \mid_{L^\phi(N(u,\varepsilon))}$ operatörü $L^\phi(N(u,\varepsilon))$ uzayı tarafından içerilen kapalı bir görüntüye sahiptir. Fakat, $M_u \mid_{L^\phi(N(u,\varepsilon))}$ operatörü terslenebilir olduğundan, $L^\phi(N(u,\varepsilon))$ uzayı sonlu boyutlu olur.

Tersine, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $L^\phi(N(u,1/n))$ uzayı sonlu boyutlu olsun. Herhangi bir $w \in L^\infty(\mu)$ ve $w(X,1/n) = \{x \in X :\mid w(x) \mid > 1/n\}$ olmak üzere,

$$w_n(x) = \begin{cases} w(x) & x \in w(X,1/n) \\ 0 & x \notin w(X,1/n) \end{cases}$$

olarak tanımlanan $w_n : X \to \mathbb{C}$ bir dönüşüm olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_X \phi\Big(\frac{n \mid (M_{w_n} - M_w)f \mid}{\|f\|_\phi}\Big)d\mu &= \int_{w(X,1/n)'} \phi\Big(\frac{n \mid wf \mid}{\|f\|_\phi}\Big)d\mu \\
&\leq \int_{w(X,1/n)'} \phi\Big(\frac{\mid f \mid}{\|f\|_\phi}\Big)d\mu \\
&\leq \int_X \phi\Big(\frac{\mid f \mid}{\|f\|_\phi}\Big)d\mu \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|(M_{w_n} - M_w)f\|_\phi \leq \frac{1}{n}\|f\|_\phi$$

olur. Bu ise, $M_{w_n} \to M_w$ olması demektir. Bu durumda, M_{w_n} sonlu ranklı bir operatör olduğundan, M_w kompakt bir operatör olur. □

Sonuç 5.2.2. *(X, S, μ) atomik olmayan bir ölçüm uzayı ise, $L^\phi(\mu)$ den $L^\phi(\mu)$ içine olan tek çarpımsal kompakt operatör sıfır operatörüdür.*

Sonuç 5.2.3. *Her $\varepsilon > 0$ için, $N(u, \varepsilon)$ sadece sonlu tane atom içerirse M_u kompakt operatör olur.*

5.3. Orlicz Uzayındaki Fredholm Çarpımsal Operatörler

Bu kısımda, ilk olarak Orlicz uzayındaki çarpımsal operatörlerin görüntüsünün kapalı olması için gerekli olan koşulların belirlendiği teorem verilecek, daha sonra bu teorem Fredholm çarpımsal operatörleri karekterize etmek için kullanılacaktır.

Teorem 5.3.1. *$M_u \in B(L^\phi(\mu))$ olmak üzere, M_u operatörünün kapalı görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart μ hemen hemen bütün $x \in s = supp\ u$ için, $\mid u(x) \mid \geq \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının mevcut olmasıdır.*

İspat. Hemen hemen her $x \in s$ için, $\mid u(x) \mid \geq \delta$ ise $f \in L^\phi(s)$ olmak üzere,

$$\|M_{u/s}f\|_\phi \geq \delta\|f\|_\phi$$

olur. $KerM_u = L^\phi(X/s)$ olduğundan, M_u kapalı görüntüye sahip olur.

Tersine, M_u kapalı görüntüye sahip olsun. Bu durumda, her $h \in L^{\phi}(s)$ için

$$\|M_u h\| \geq \delta \|h\|$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buradan, $C = \delta/2$ ve $E = \{x \in s : |u(x)| < C$ olarak alınsın. $\mu(E) > 0$ ise, $\chi_F \in L^{\phi}(s)$ olacak şekilde $F \subseteq E$ ölçülebilir kümesi bulunabilir. Öyle ise,

$$\|\chi_F\|_{\phi} = \frac{1}{\phi^{-1}(1/\mu(F))}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|M_u \chi_F\|_{\phi} &= \inf\{\varepsilon > 0 : \int_s \phi(| u\chi_F | /\varepsilon) d\mu \leq 1\} \\
&< \inf\{\varepsilon > 0 : \int_s \phi(| C\chi_F | /\varepsilon) d\mu \leq 1\} \\
&= \|C\chi_F\|_{\phi} \\
&= C\|\chi_F\|_{\phi}
\end{aligned}$$

olacağından, bu bir çelişkidir. Böylece $\mu(E) = 0$ olur. Başka bir deyişle, μ hemen hemen bütün $x \in s$ için $| u(x) | \geq C$ dir. □

Teorem 5.3.2. *$M_u \in m$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) M_u terslenebilir operatördür.

(ii) M_u Fredholm operatörüdür.

(iii) $Ran(M_u)$ kapalıdır ve eş$-boy Ran(M_u) < \infty$ dur.

(iv) $\delta > 0$ için, $| u | \geq 0$.

İspat. $(iv) \Rightarrow (i)$ ve $(ii) \Rightarrow (iii)$ açıktır. $(iii) \Rightarrow (iv)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, M_u kapalı görüntüye sahip ve eş-boy$Ran(M_u) < \infty$ olduğu kabul edilsin. Buradan, M_u operatörünün örten olduğu gösterilecektir. Eğer örten değilse, $g \in L^{\phi} \setminus Ran(M_u)$ seçilsin.

$Ran(M_u)$ kapalı olduğundan, her $g \in L^{\phi}(\mu)$ için

$$\int gg^* d\mu = 1$$

ve

$$\int M_u(gg^*) d\mu = 0$$

olacak şekilde

$$g^* \in L^{\psi}(\mu)$$

fonksiyonu bulunabilir. Birinci denklikten,

$$\int Re(gg^*) d\mu = 1$$

yazılabilir. Böylece, bazı $\delta > 0$ için

$$E_\delta = \{x \in X : Re(gg^*)(x) \geq \delta\}$$

kümesi pozitif bir ölçüme sahip olmalıdır. μ atomik olmadığından, $0 < \mu(E_n) < \mu(E_\delta)$ ve bazı $m \neq n$ ler için $E_n \cap E_m = \phi$ olacak şekilde E_δ nın alt kümelerinin bir $\{E_n\}$ dizisi seçilebilir. Buradan, $g_n^* = \chi_{E_n} g^*$ olarak alınsın. Bu durumda, $0 \neq g_n^* \in L^{\psi}(\mu)$ olur. Şimdi, herhangi bir $f \in L^{\psi}(\mu)$ için

$$\int (M_u f) g_n^* d\mu = \int M_u f \chi_{E_n} g^* d\mu = 0$$

olacağından, $g_n^* \in KerM_u^*$ olur. Bu yüzden, $\{g_n\}$ dizisi $KerM_u^*$ kümesinin lineer bağımsız bir alt kümesi şeklindedir. Bu durum ise, $KerM_u^*$ =eş-boy$(RanM_u) < \infty$ olması ile çelişir. Böylece M_u örten olur. Her bir $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$H_n = \left\{ x \in X : \frac{\|u\|_\infty}{(n+1)^2} \leq | u(x) | \leq \frac{\|u\|_\infty}{n^2} \right\}$$

ve

$$H = \{n : \mu(H_n) > 0\}$$

olsun. Aynı zamanda,

$$f(x) = \begin{cases} u(x)\phi^{-1}(1/\mu(H_n)) & , \ x \in H_n \text{ ve } n \in H \\ 0 & , \ \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_X \phi\Big(\frac{| f(x) |}{\|u\|_\infty}\Big)d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{H_n}\phi\Big(\frac{| u(x) |}{\|u\|_\infty}\phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(H_n)}\Big)\Big)d\mu\Big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{H_n}\phi\Big(\frac{1}{n^2}\phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(H_n)}\Big)\Big)d\mu \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{\mu(H_n)}\int_{H_n}d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $f \in L^{\phi}(\mu)$ olur. Buradan, $g \in L^{\phi}(\mu)$ için $M_u g = f$ ise

$$\begin{aligned}
\int \phi(g)d\mu &= \int_{X\setminus N(u)}\phi\Big(\Big|\frac{f(x)}{u(x)}\Big|\Big)d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{H_n\cap X\setminus N(u)}\phi\Big(\Big(\frac{| u(x) |}{| u(x) |}\Big)\phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(H_n)}\Big)\Big)d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur. Bu ise, H kümesinin sonlu olması gerektiğini gösterir. Bu yüzden, $n \geq n_0$ iken $\mu(H_{n_0}) = 0$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tam sayısı vardır. Böylece,

$$\mu\Big(\Big\{x \in X :| u(x) |\leq \frac{\|u\|_\infty}{n_0^2}\Big\}\Big) = \mu(\cap_{n=n_0}^{\infty}(H_n \cap N(u)) = 0$$

olur. Bu durumda,

$$| u(x) | \geq \frac{\|u\|_\infty}{n_0^2}\delta$$

olarak elde edileceğinden (4) ifadesi elde edilir. $\square$

6 KAYNAKLAR

Abrahamse, M. B., 1978. Multiplication operators, In Hilbert space operators, *Springer*, Berlin, Heidelberg, 17-36.

Allen, R. F., Robert F., Flavia C., 2009. Multiplication operators on the Bloch space of bounded homogeneous domains, *Computational Methods and Function Theory* 9.2 , 679-693.

Arora, S. C., Datt, G., Verma, S., 2006. Multiplication operators on Lorentz spaces, *Indian Journal of Mathematics*, 48(3), 317-329.

Axler, S., 1982. Multiplication operators on Bergman spaces, *Journal Reine Angewandte Mathematics*, 336, 26-44.

Başar, F., 2011. Summability Theory and Its Applications, *Bentham Science Publishers*, İstanbul, 409

Boss, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, *Oxford University Press*, Oxford, 600.

Boss, J. and Peter C., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, *Clarendon Press*, Oxford, 600.

Buck, R. C., 1961. Multiplication operators, *Pacific Journal of Mathematics*, 11(1), 95-103.

Carothers, N. L., 2004. A Short Course on Banach Space Theory, *Cambridge Universty Press*, Cambridge, 184.

Curbera, G. P., 1992.The Space of Integrable Functions with Respect to a Vector Measure, The degree of Doctor in Mathematics, *Universidad de Sevilla*, Sevilla, September, 122.

Diestel, J., and Uhl, J. J. 1983. Progress in vector measures, In Measure Theory and its Applications, *Springer*, Berlin, Heidelberg. —1977–83, 144-192.

Hewitt, E., 1965. Stromberg, K. Real and Abstract Analysis, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, 478.

İlkhan, M., Demiriz S., Kara E. E., 2019. Multiplication operators on Cesàro second order function spaces, *Positivity Journal of Mathematics* 1-10.

John, B. and Conway, 1985. A course in functional analysis, second edition, *Springer-Verlag*, New York, 399.

Johnson, R.A., 1970. Atomic and nonatomic measures, *Proceedings American Mathematical Society*, 25(3), 650-655.

Komal, B. S. and Gupta, S., 2001. Multiplication operators between Orlicz spaces, Integral equations and operator theory, *Springer*, 41(3), 324-330.

Komal, B. S. and Pathania R. S., 1996. Compact multiplication operators on a space of operators, *Journal Bullet Allahabad Mathematical Society*, 10–11, 73–77.

Komal, B. S. and Raj K., 2008. Multiplication operators induced by operator valued maps, *International Journal of Contemporary Mathematical*, 3, 667–673.

Komal, B. S., Pandoh S., Raj K. 2016. Multiplication operators on Cesàro sequence spaces, *Journal Demonstratio Mathematica* 49.4, 430-436.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *Wiley*, New York, 704.

Lifton, J. H., 1999. Measure Theory and Lebesgue Integration, *Swarthmore College Mathematics Senior Conference*, 22.

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge, 256.

Megginson, and Robert E., 1998. An Introduction to Banach Space Theory, *Springer-Verlag*, New York, 599.

Mursaleen, M., Aghajani, A., Raj, 2016. K. Multiplication operators on Cesàro function spaces *Filomat*, 30(5), 1175-1184.

Musayev, B. and Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, *Balcı Yayınları*, Kütahya, 470.

Natanson, I. P., 1983. Reel Analiz, çev. Abdullah Yıldız ve Kevser Köklü, *Yıldız Teknik Üniversitesi*, İstanbul, 431.

Rao, M.M. and Ren Z.D., 1991. Theory of Orlicz Spaces, *Marcel Dekker*, New York, 146.

Rudin, W., 1991. Functional Analysis, Second Edition,*McGraw-Hill*, New York, 424.

Sagir, B., Oğur O., Duyar, C., 2015. Multiplication operators on Orlicz-Lorentz sequence spaces. *Journal of Mathematical and Computational Science* 5.3, 265-272.

Singh, R. K. and Kumar A., 1977. Multiplication operators with closed range, *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 16, 247–252.

Singh, R. K. and Manhas, J. S., 1991. Multiplication operators on weighted spaces of vector-valued continuous functions, *Journal of the Australian Mathematical Society* 50(1), 98-107.

Şuhubi, E. S., 2001. Fonksiyonel Analiz, *İtü Vakfi Yayınları*, Ankara, 636.

Takagi, H., 1993. Fredholm Weighted Composition Operators,*Integral Equations and Operator Theory* 16, 267-276.

Wang, W. H., 2001. Compact Operators of Sequence Spaces and Related Problems, Master Thesis, *National Sun Yat-Sen University*, Taiwan, 19.

Wheeden, R. L. and Zygmund A. 1977. Measure and Integral, *Marcel Dekker*, New York, 288.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı	: Mehmet Taha ÜNSAL
Doğum Yeri ve Yılı	: DİYARBAKIR / 1988
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: tahaunsal@hotmail.com

EĞİTİM

Lisans	: Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2009-2013)

İŞ DENEYİMLERİ

(2013 - Halen)	: Milli Eğitim Bakanlığı - Öğretmen