T.C.

SİİRT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇEKİRDEK ÜRETEN HİLBERT UZAYLARINDA ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR VE ÖZELİKLERİ

HAZIRLAYAN

Şahin KORHAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

Aralık, 2020

SİİRT

T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇEKİRDEK ÜRETEN HİLBERT UZAYLARINDA ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR VE ÖZELİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şahin KORHAN
(173114001)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

Aralık-2020
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Şahin KORHAN tarafından hazırlanan "Çekirdek Üreten Hilbert Uzaylarında Üretilen Çekirdek Fonksiyonlar ve Özelikleri" adlı tez çalışması 14/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Unvanı Adı SOYADI	Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Danışman Unvanı Adı SOYADI	Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL
Üye Unvanı Adı SOYADI	Doç. Dr. Ali AKGÜL

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Fevzi HANSU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Siirt üniversitesinde bulunduğum 3 yıllık süre boyunca bana yardımcı olan Doç. Dr. Ali AKGÜL'e canı gönülden teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca bana yardım eden Matematik öğretmeni Barış ÖRCAN'a teşekkür ederim.

Hiç bir zaman ümidini benden yitirmeyen ve her zaman en büyük destekçilerim olan annem Mesude KORHAN ve babam Mehmetşah KORHAN'a çok teşekkür ederim.

Zor zamanlarımda bana destek olan değerli ablam hemşire Nihal KOÇ, değerli eşi türkçe öğretmeni Ahmet KOÇ ve sevgili yeğenim Ayşe Sare KOÇ'a teşekkür ederim.

Tez sürecinde ve öncesinde hayatıma dahil olan değerli eşim Şeyma KORHAN'a desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Şahin KORHAN
SİİRT-2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

ÇEKİRDEK ÜRETEN HİLBERT UZAYLARINDA ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR VE ÖZELİKLERİ

Şahin KORHAN

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

2020,34+vi Sayfa

Bu tez 7 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çekirdek üreten uzayın tarihçesi ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde çekirdek üreten uzayın temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde $W_2^m[a,b]$ çekirdek üreten uzay ve özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş Kuramoto-Sivashinsky denklemi için elde edilen çekirdek fonksiyonları verilmiştir. Altıncı bölümde yeni üretilen çekirdek fonksiyonlar verilmiştir.Yedinci bölümde sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çekirdek üreten uzaylar, Çekirdek üreten metod, Kuramoto-Sivashinsky denklemi**.**

ABSTRACT

MASTER THESIS

REPRODUCING KERNEL FUNCTIONS AND THEIR PROPERTIES IN REPRODUCING KERHEL HILBERT SPACES

Şahin KORHAN

Siirt University Institute of Science and Technology Department of Mathematics

Supervisior : Assoc. Prof. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

2020, 34+vi Pages

This thesis consists of 7 chapters. In the first chapter, information about the history of reproducing kernel space are given. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. In the third chapter, basic properties of the reproducing kernel space are given. In the fourth chapter, basic definitions and theorems of $W_2^m[a,b]$ space are given. In the fifth chapter, the reproducing kernel functions are obtained for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. In the sixth chapter, reproducing kernel functions are given. Results are given in the last chapter.

Keywords: Reproducing kernel spaces, reproducing kernel method, Kuramoto-Sivashinsky equation

1 BÖLÜM

1.1 GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu problemlerin diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğu zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir. Biz ise tezimizde bazı özel çekirdek fonksiyonlarını elde ettik.

Çekirdekleri çoğaltma teorisini 20. yüzyılın başında Zaremba (1908) ilk kez harmonik ve biharmonik fonksiyonlar için sınır değer problemleri üzerine yaptığı çalışmada ele almıştır. Seri çözümü doğru bir şekilde hesaplayan çekirdek üreten Hilbert uzayları çok büyük ilgi görüyor.

Çekirdek üreten uzay özel bir hilbert uzayıdır. Çekirdek üreten uzay teorisinin oluşturulması 1908'lere dayanmaktadır. Yakın zamanlarda birçok diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemleri ve sınır değer problemleri bu metodla incelenmiştir. Diferansiyel denklemin çözüm şartlarının çeşitli tanımlamalarına göre buna karşılık gelen çekirdek üreten uzaylar mantıklı bir şekilde inşa edilir. Bu uzaylar tanımlandıktan sonra bu uzaylarda üretilen çekirdek fonksiyonları kolaylıkla bulunabilir (Akgül, 2014).

Üretilen çekirdek fonksiyonlarla ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Akgül (2014) doktora tezinde çekirdek üreten uzay yönteminin matematiksel temelleri ve bazı uygulamalarını ele almıştır. Aronszajn (1950) üretilen çekirdek fonksinlarının teorisi ile ilgili çok kapsamlı bir çalışma yapmıştır. Abu Arqub ve ark. (2012) lineer olmayan Fredholm–Volterra integro diferansiyel denklemleri çözmek için çekirdek üreten metodu uygulamışlar. Barbieri ve Meo (2012) çekirdek üreten parçacık metodunu ele almışlar. Ayrıca çekirdek üreten Hilbert uzayları istatistikte de kullanılmıştır (Berlinet, 2001, 2004). Chen ve ark. (2008) çekirdek üreten uzaylarda lineer operator denklemler sisteminin tam çözümünü incelediler. Geng ve ark. (2012,2013) sınır değer problemlerini çekirdek üreten metod ile ele aldılar. Jiang ve ark. (2013) Volterra integral denklemlerini çekirdek üreten metod ile ele aldılar. Raheem (2017) yüksek lisans tezinde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini çekirdek üreten metod ve grup koruma metodu ile inceledi. Üretilen çekirdeğin teorisi ve uygulamaları ile ilgili detaylı çalışmalar Saitoh ve ark. (2016) tarafından ele alındı. Shawagfeh ve ark. (2014) ikinci mertebeden sınır değer problemlerinin çözümlerini çekirdek üreten metod ile elde ettiler. Wang ve ark. (2008) kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini çekirdek üreten metodu uygulayarak elde ettiler. Wu ve ark. (2010) tekrarlayan çekirdek üreten metodu ele aldılar. Yao ve ark. (2011) lineer olmayan sine-Gordon denkleminin çözümlerini çekirdek üreten metod ile ele aldılar.

2 BÖLÜM

2.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1.1 Süreklilik

Bir $f : A \longrightarrow R$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki $\forall x \epsilon A$ için
$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
olur (Cui ve Lin, 2009).

2.1.2 Düzgün Süreklilik

$A \subset R, f : A \longrightarrow R$ olsun f A'da düzgün süreklidir.
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ vardır ki $|x - t| < \delta$ olmak üzere $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ olur.

Düzgün süreklilik ile sürekliliğin tanımı benzerdir. Ancak süreklilikte δ sayısı hem ε hem de $x \epsilon A$ noktasına bağlıdır. Fakat düzgün süreklilikte δ sadece ε'a bağlıdır. Dolayısıyla düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir. Fakat tersi doğru değildir (Cui ve Lin, 2009).

2.1.3 İç Çarpım Uzayları

E bir kompleks vektör uzayı olsun. Eğer
$x, y, z \epsilon E, \quad \alpha, \beta \epsilon F(\Re \quad veya \quad C),$
için
a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,(Kompleks eşlenik)
b) $\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, y\rangle$,
c) $\langle x, x\rangle \geq 0,$
d) $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
şartları sağlanırsa
$\langle ., .\rangle : E \times E \longrightarrow C,$
dönüşümü E de bir iç çarpım tanımlar. Bir vektör uzayına iç çarpım ile birlikte iç çarpım uzayı denir (Cui ve Lin, 2009).

2.1.4 Hilbert Uzayları

Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım, $X \times X$'den X'in bir k skaler cisimi içine yapılan bir dönüşümdür; X'in her x ve y vektör çifti, x ve y 'nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle x, y\rangle$ ile gösterilen ve her x,y ve z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşleşmektedir.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \\
&(2) \quad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \\
&(3) \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \\
&(4) \quad \langle x, x\rangle \geq 0 \quad \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.
\end{aligned}
$$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde,

$$\|X\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

ile verilen bir metrik tanımlar. Buna göre iç çarpım uzayları birer normlu uzay olup, Hilbert uzayları ise birer Banach uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

2.1.5 Yakınsaklık

Normal bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer, X uzayı

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x içeriyor ise (X_n) dizisi yakınsaktır denir (Akgül, 2014).

2.1.6 Düzgün Yakınsaklık

Lineer operatörler uzayında lineer sınırlı dizinin norm anlamında yakınsaklığına düzgün yakınsaklık denir (Akgül, 2014).

2.1.7 Adjoint Operatör

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $T : X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Buna göre, X' ve Y', sırasıyla X ve Y'nin dual uzayları olmak üzere, T'nin $T^* : X' \longrightarrow Y'$ adjoint operatörü,

$f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) \quad (g \epsilon Y')$ ile tanımlanır (Akgül, 2014).

3 BÖLÜM

3.1 Üretilen Çekirdeğin Temel Özellikleri

3.1.1 Özellik 1:

Eğer H, çekirdek üreten bir uzay ise bu taktirde H'taki R_y üretilen çekirdeği eşlenik simetrik olur. Yani

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)},$$

eşitliği sağlanır (Cui ve Lin, 2009).

3.1.2 Özellik 2:

Eğer H, çekirdek üreten bir uzay ise bu taktirde H'taki R_y üretilen çekirdek fonksiyonu tektir (Cui ve Lin, 2009).

3.1.3 Özellik 3:

Eğer R_y fonksiyonu, H'ta üretilen bir çekirdek ise bu taktirde herbir $x \in X$ için $R_x(x) \geq 0$ olur. $R_x(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $H = \{0\}$ olmasıdır (Cui ve Lin, 2009).

3.1.4 Özellik 4:

R_y üretilen çekirdeği pozitif tanımlı bir çekirdektir, yani $\xi_i, \xi_j (i, j = 1, ..., n)$ herhangi kompleks sayılar olmak üzere her $x_i \in X$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{x_i}(x_j)\overline{\xi_i}\xi_j \geq 0,$$

eşitsizliği mevcuttur (Cui ve Lin, 2009).

3.1.5 Özellik 5:

H-Hilbert fonksiyon uzayının çekirdek üreten bir uzay olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir sabit $x \in X$ için $I(f) = f(x)$ lineer fonksiyonelinin sınırlı olmasıdır (Cui ve Lin, 2009).

4 BÖLÜM

4.1 $W_2^m[a,b]$ Çekirdek Üreten Uzay ve Onun Üretilen Çekirdek Fonksiyonu

4.1.1 Tanım :

[a,b] aralığı üzerinde bir f fonksiyonu verilsin. $\{(a_k,b_k)_{k=1}^n\}$ cümlesi ikişer ikişer ayrık açık $(a_k,b_k) \subset [a,b]$ aralıkların bir cümlesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta,$$

olduğunda

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

olacak şekilde n'e bağlı olmayan en az bir δ mevcutsa, bu taktirde f fonksiyonuna [a,b] aralığı üzerinde mutlak süreklidir denir (Cui ve Lin, 2009).

4.2 Önerme 1:

Bir f fonksiyonu, [a,b] aralığı üzerinde mutlak sürekli ise aynı zamanda süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

4.3 Önerme 2:

[a,b] aralığı üzerinde verilen bir f fonksiyonu için eğer $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$|f'(x)| \leq M,$$

eşitsizliği mevcutsa bu taktirde f fonksiyonu mutlak sürekli olur (Cui ve Lin, 2009).

4.3.1 Sonuç 1:

Eğer f' fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde sürekli ise bu taktirde f fonksiyonu bu aralıkta üzerinde mutlak sürekli olur (Cui ve Lin, 2009).

4.4 Önerme 3:

Eğer f fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksyon ise bu taktirde

$$\int_a^x f(t)dt,$$

fonksiyonu bu aralık üzerinde mutlak sürekli olur (Cui ve Lin, 2009).

4.5 $W_2^m[a,b]$Fonksiyon Uzayı

$W_2^m[a,b]$ fonksiyon uzayı

$$W_2^m[a,b] = \left\{ f|f^{(m-1)}\text{mutlak sürekli, } f^{(m)} \in L^2[a,b], x \in [a,b] \right\},$$

olarak tanımlanır. $W_2^m[a,b]$ fonksiyon uzayında iç çarpım ve norm herhangi $f, g \in W_2^m[a,b]$ fonksiyonları için, sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx$$

ve

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}},$$

şeklinde tanımlanır (Cui ve Lin, 2009).

4.5.1 Teorem 1:

$W_2^m[a,b]$ fonksiyon uzayı bir Hilbert Uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

4.5.2 Teorem 2:

$W_2^m[a,b]$ fonksiyon uzayı çekirdek üreten bir uzaydır (Cui ve Lin, 2009). $W_2^m[a,b]$ uzayında R_y üretilen çekirdek fonksiyonunun nasıl elde edildiğini inceleyelim. R_y'nin $W_2^m[a,b]$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu olduğunu farz edelim. Bu taktirde herhangi sabit bir $y \in [a,b]$ ve herhangi $f \in W_2^m[a,b]$ için R_y fonksiyonu,

$$\langle f, R_y \rangle_{W_2^m} = f(y),$$

eşitliğini sağlamalıdır. Yukarıdaki eşitliğe çekirdek üretme özelliği adı verilir. Bu özellik bir önceki denklemde kullanılırsa,

$$\langle f, R_y\rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)\frac{d^i R_y(a)}{dx^i} + \int_a^b f^{(m)}(x)\frac{d^m R_y(x)}{dx^m}dx = f(y),$$

bulunur ve kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(m)}(x)\frac{d^m R_y(x)}{dx^m}dx &= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i f^{(m-i-1)}(x)\frac{d^{m+i}R_y(x)}{dx^{m+i}}\Bigg|_{x=a}^{b} \\ &+ (-1)^m\int_a^b f(x)\frac{d^{2m}R_y(x)}{dx^{2m}}dx,\end{aligned}$$

elde edilir. Değişken değiştirilmesiyle

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i f^{(m-i-1)}(x)\frac{d^{m+i}R_y(x)}{dx^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}f^{(i)}(x)\frac{d^{2m-i-1}R_y(x)}{dx^{2m-i-1}},$$

yazılabilir. Bulduğumuz bu iki denklemi $\langle f, R_y\rangle_{W_2^m}$ yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\langle f, R_y\rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)\left[\frac{d^i R_y(a)}{dx^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{d^{2m-i-1}R_y(a)}{dx^{2m-i-1}}\right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}f^{(i)}(b)\frac{d^{2m-i-1}R_y(b)}{dx^{2m-i-1}} \\ &+ (-1)^m\int_a^b f(x)\frac{d^{2m}R_y(x)}{dx^{2m}}dx \\ &= f(y),\end{aligned}$$

bulunur. Bundan dolayı R_y fonksiyonu

$$\begin{cases} (-1)^m f(x)\frac{d^{2m}R_y(x)}{dx^{2m}} = \delta(x-y), \\ \frac{d^i R_y(a)}{dx^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{d^{2m-i-1}R_y(a)}{dx^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{d^{2m-i-1}R_y(b)}{dx^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 1,2,3,...,m-1, \end{cases}$$

genelleştirilmiş diferansiyel denkleminin çözümüdür. Böylece,

$$(-1)^m f(x)\frac{d^{2m}R_y(x)}{dx^{2m}} = 0,$$

denklemi,

$$\lambda^{2m} = 0,$$

karakteristik denklemine ve $2m$ katlı,

$$\lambda = 0,$$

öz değerine sahiptir. $x \neq y$ iken biliyoruz ki R_y fonksiyonu $2m$ mertebeli sabit katsayılı homogen diferansiyel denkleminin,

$$\frac{d^i R_y(a)}{dx^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{d^{2m-i-1}R_y(a)}{dx^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 1,2,3...,m-1,$$

$$\frac{d^{2m-i-1}R_y(b)}{dx^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 1,2,3,...,m-1,$$

sınır şartlarını sağlayan bir çözümüdür. Bu nedenle R_y'nin genel çözümü,

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2m} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum\limits_{i=1}^{2m} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

olur.

$$(-1)^m f(x)\frac{d^{2m}R_y(x)}{dx^{2m}} = \delta(x-y),$$

olduğundan,

$$\frac{d^i R_y(y^-)}{dx^i} = \frac{d^i R_y(y^+)}{dx^i}, \quad i = 0, 1, ..., 2m-2,$$

$$(-1)^m\left(\frac{d^{2m-1}R_y(y^+)}{dx^{2m-1}} - \frac{d^{2m-1}R_y(y^-)}{dx^{2m-1}}\right) = 1,$$

yazılabilir. Yazılan bu denklemlerden $c_i(y)$ ve $d_i(y)(i = 1, 2, ..., 2m)$ katsayıları elde edilir (Cui ve Lin, 2009).

4.5.3 Tanım

$$W_2^m[a,b] = \{\ f(x)|f^{(m-1)}(x)\text{mutlak sürekli}, f^{(m)}(x) \in L^2[a,b], x \in [a,b]\ \}$$

$m = 1$ için

$$W_2^1[a,b] = \{\ f(x)|f(x)\text{mutlak sürekli}, f'(x) \in L^2[a,b], x \in [a,b]\ \}$$

$m = 2$ için

$$W_2^2[a,b] = \{\ f(x)|f(x), f'(x)\text{mutlak sürekli}, f''(x) \in L^2[a,b], x \in [a,b]\ \}$$

$W_2^m[a,b]$'de $m = 2$ için $R_y(x) \in W_2^2$ üretilen çekirdek fonksiyonu $\langle f, R_y(x)\rangle_{W_2^2} = f(y)$ çekirdek üretme özelliğinden,

$$\langle f, R_y(x)\rangle_{W_2^2} = f(a)R_y(a) + f'(a)R_y'(a) + \int_a^b f''(x)R_y''(x)dx = f(y)$$

iki defa kısmi integrasyon uygularsak,

$$
\begin{aligned}
\langle f, R_y(x)\rangle_{W_2^2} &= f(a)R_y(a) + f'(a)R'_y(a) + f'(b)R''_y(b) - f'(a)R''_y(a) \\
&- f(b)R'''_y(b) + f(a)R'''_y(a) + \int\limits_a^b f(x)R_y^{(4)}(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\int\limits_a^b f(x)R_y^{(4)}(x)dx = f(y)
$$

olduğundan,

$$
R_y^{(4)}(x)dx = \delta(x-y)
$$

$$
x \neq y \quad \text{iken} \quad \delta(x-y) = 0,
$$

$$
R_y^{(4)}(x)dx = 0,
$$

karekteristik denklemine ve 4 katlı,

$$
\lambda^4 = 0,
$$

buradan parçalı fonksiyon,

$$
R_y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}
$$

elde edilir.

$$\begin{cases} R_y(a) + R_y'''(a) = 0 \\ R_y(a) - R_y''(a) = 0 \\ R_y''(b) = 0 \\ R_y'''(b) = 0 \\ R_{y^+}(y) = R_{y^-}(y) \\ R'_{y^+}(y) = R'_{y^-}(y) \\ R''_{y^+}(y) = R''_{y^-}(y) \\ R'''_{y^+}(y) - R'''_{y^-}(y) = 1 \end{cases}$$

bu sekiz denklem yardımıyla kat sayılarımızı,

$$\begin{cases} c_1 = 1 - ya - a^2 + \frac{ya^2}{2} - \frac{5a^3}{6} \\ c_2 = a^2 + y + a - ya \\ c_3 = \frac{y}{2} \\ c_4 = -\frac{1}{6} \\ d_1 = 1 - ya - a^2 + \frac{ya^2}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{5a^3}{6} \\ d_2 = a^2 + y + a - ya + \frac{y^2}{2} \\ d_3 = 0 \\ d_4 = 0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bulunan kat sayılar yerine yazılırsa,

$$R_y(x) = \begin{cases} \begin{array}{l} 1 - ya - a^2 + \frac{ya^2}{2} - \frac{5a^3}{6} + a^2x + yx + ax - yax \\ +\frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x \leq y, \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 - ya - a^2 + \frac{ya^2}{2} - \frac{5a^3}{6} \\ +a^2x + yx + ax - yxa + \frac{y^2x}{2} - \frac{y^3}{6}, \quad x > y, \end{array} \end{cases}$$

bulunur. $a = 0$ için

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + yx + \frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x \leq y, \\ \\ 1 + yx + \frac{y^2x}{2} - \frac{y^3}{6}, \quad x > y, \end{cases}$$

elde edilir (Cui ve Lin, 2009).

5 BÖLÜM

5.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİ İÇİN ELDE EDİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR

Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçlar için Akgül ve ark. (2018) çalışmasına bakılabilir. Elde ettiğimiz sonuçlar burada yayınlanmıştır. Aşağıdaki problemi ele alıyoruz:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \qquad (5.1)$$

Burada α , β ve γ sıfırdan farklıdır. Bu denklem, reaksiyon-difüzyon sisteminde plazma kararsızlıkları, alev ön yayılımı ve faz türbülansı bağlamında elde edilmiştir. Aşağıdaki problemin yaklaşık çözümlerini elde etmek için çekirdek fonksiyonlarını elde edelim. Kuramoto-Sivashinsky denklemini ele alalım

$$v_t + vv_x + v_{xx} + v_{xxxx} = 0,$$

başlangıç koşulu

$$v(x,0) = exp(-x^2),$$

ve sınır koşulları

$$v(a,t) = 0, \quad v(b,t) = 0, \quad v_x(a,t) = 0, \quad v_x(b,t) = 0.$$

şeklinde verilsin. $V_2^5[0,1]$ çekirdek üreten uzayı

$$V_2^5[0,1] = \left\{ \begin{array}{ll} v, v', v'', v''', v^{(4)} & \text{mutlak sürekli fonksiyon,} \\ v^{(5)} \in L^2[0,1], & v(a) = v'(a) = v(b) = v'(b) = 0 \end{array} \right\}$$

ile tanımlayalım. İç çarpımından

$$\begin{aligned} \langle v, S_z \rangle_{V_2^5[a,b]} &= v(a)S_z(a) + v'(a)S_z'(a) + v''(a)S_z''(a) + v'''(a)S_z'''(a) \\ &+ v^{(4)}(a)S_z^{(4)}(a) + \int_a^b v^{(5)}(t)S_z^{(5)}(t)d(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. Daha sonra kısmi integrasyonla

$$
\begin{aligned}
\langle v, S_z\rangle_{V_2^5[a,b]} &= v(a)S_z(a)+v'(a)S_z^{'}(a)+v''(a)S_z''(a)+u'''(a)S_z'''(a)\\
&+ v^{(4)}(a)S_z^{(4)}(a)+v^{(4)}(b)S_z^{(5)}(b)-v^{(4)}(a)S_z^{(5)}(a)\\
&- v^{(3)}(b)S_z^{(6)}(b)+v^{(3)}(a)S_z^{(6)}(a)\\
&+ v''(b)S_z^{(7)}(b)-v''(a)S_z^{(7)}(a)-v'(b)S_z^{(8)}(b)\\
&+ v'(a)S_z^{(8)}(a)+v(b)S_z^{(9)}(b)-v(a)S_z^{(9)}(a)\\
&- \int_a^b v(t)S_z^{(10)}(t)d(t).
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Sınır koşullarından

$$
\begin{aligned}
S_z(a) &= 0\\
S_z(b) &= 0\\
S_z^{'}(a) &= 0\\
S_z^{'}(b) &= 0
\end{aligned}
$$

yazılabiir. Bu nedenle,

$$
\begin{aligned}
\langle v, S_z\rangle_{V_2^5[a,b]} &= v''(a)S_z^{''}(a)+v'''(a)S_z'''(a)+v^{(4)}(a)S_z^{(4)}(a)\\
&+ v^{(4)}(b)S_z^{(5)}(b)-v^{(4)}(a)S_z^{(5)}(a)-v^{(3)}(b)S_z^{(6)}(b)+v^{(3)}(a)S_z^{(6)}(a)\\
&+ v''(b)S_z^{(7)}(b)-v''(a)S_z^{(7)}(a)-\int_a^b v(t)S_z^{(10)}(t)d(t).
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aşağıdaki denklemleri göz önünde bulunduralım.

$$
\begin{aligned}
S_z''(a) - S_z^{(7)}(a) &= 0 \\
S_z'''(a) + S_z^{(6)}(a) &= 0 \\
S_z^{(4)}(a) - S_z^{(5)}(a) &= 0 \\
S_z^{(5)}(b) &= 0 \\
S_z^{(6)}(b) &= 0 \\
S_z^{(7)}(b) &= 0
\end{aligned}
$$

Bu nedenle,

$$
\langle v, S_z \rangle_{V_2^5[a,b]} \quad = \quad -\int_a^b v(t) S_z^{(10)}(t) d(t) = v(z).
$$

elde edilir. Böylece,

$$
S_z^{(10)}(t) = -\delta(t-z).
$$

olur. $t \neq z$ olduğu taktirde

$$
S_z^{(10)}(z) = 0.
$$

elde edilir. Daha sonra,

$$
S_z(t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{10} c_i(z) t^{i-1} \quad , \quad t \leq z, \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{10} d_i(z) t^{i-1} \quad , \quad t > z. \end{cases}
$$

Yukarıda, genelleştirilmiş Kuramoto-Sivashinsky denklemini çözmek için çok yararlı bir çekirdek fonksiyonu elde ettik. Üretilen bu çekirdek, çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemini uygulamak için çok yararlıdır.

6 BÖLÜM

6.1 YENİ ÜRETİLEN ÇEKİRDEK FONKSİYONLAR

Bu bölümde çekirdek üreten Sobolev uzayının çok kullanışlı üretilen çekirdek fonksiyonlarını elde ettik. Bu bölümde elde ettiğimiz çalışmaları Akgül ve ark. (2020) makalesinde yayınlattık.

6.1.1 m=1 için:

Aşağıdaki iç çarpıma sahibiz

$$\langle u, R_y \rangle_{S_1^1[0,1]} = \int_0^1 \left(u(x)R_y(x) + u'(x)R'_y(x) \right) dx$$

Buna kısmi integrasyon uygulanılırsa:

$$\begin{aligned} \langle u, R_y \rangle_{S_1^1[0,1]} &= \int_0^1 u(x)R_y(x)dx + u(1)R'_y(1) - u(0)R'_y(0) - \int_0^1 u(x)R''_y(x)dx \\ &= u(1)R'_y(1) - u(0)R'_y(0) - \int_0^1 u(x)(R''_y(x) - R_y(x))dx. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki denklemler elde edilir

$$1) R'_y(0) = 0,$$
$$2) R'_y(1) = 0,$$

Sonrasında

$$R''_y(x) - R_y(x) = -\delta(x - y).$$

bulunur. $x \neq y$ iken

$$R''_y(x) - R_y(x) = 0.$$

elde edilir. Karakteristik denklemden

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \quad \lambda = \mp 1.$$

elde edilir. Böylece

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1e^x + c_2e^{-x}, x \le y, \\ \\ d_1e^x + d_2e^{-x}, x > y. \end{cases}$$

bulunur. Dirac-delta fonksiyonunun özelliğinden

$$3) R_{y^+}(y) = R_{y^-}(y),$$

$$4) R'_{y^+}(y) - R'_{y^-}(y) = -1.$$

yazılabilir. Daha sonra

$$R'_y(x) = \begin{cases} c_1e^x - c_2e^{-x}, \quad x < y \\ \\ d_1e^x - d_2e^{-x}, \quad x > y. \end{cases}$$

$$R'_y(0) = c_1 - c_2 = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2$$

$$R'_y(1) = d_1e - \frac{d_2}{e} = 0 \Longrightarrow d_2 = e^2d_1$$

$$\begin{aligned} &R_{y^+}(y) = R_{y^-}(y) \\ &d_1e^y + d_2e^{-y} = c_1e^y + c_2e^{-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_{y^+}(y) - R'_{y^-}(y) &= -1 \\ d_1e^y - d_2e^{-y} - c_1e^y + c_2e^{-y} &= -1 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemler çözüldükten sonra aşağıdaki katsayılara ulaşılır:

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{e^{1-y} + e^{y-1}}{(e - e^{-1})},$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\frac{e^{1-y} + e^{y-1}}{(e - e^{-1})},$$

$$d_1 = \frac{1}{2}\frac{e^{y-1} + e^{-y-1}}{(e - e^{-1})},$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\frac{e^{1+y} + e^{1-y}}{(e - e^{-1})}.$$

Üretilen çekirdek fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{(e^{1-y}+e^{-1+y})(e^{1+x}+e^{1-x})}{e^2-1}, & x \leq y \\ \\ \frac{1}{2}\frac{(e^{1+y}+e^{1-y})(e^{-1+x}+e^{1-x})}{e^2-1}, & x > y. \end{cases}$$

Daha sade bir ifade

$$a(x) = \frac{1}{2}\frac{(e^{1-y} + e^{-1+y})(e^{1+x} + e^{1-x})}{e^2 - 1},$$

$$b(x) = \frac{1}{2}\frac{(e^{1+y} + e^{1-y})(e^{-1+x} + e^{1-x})}{e^2 - 1}.$$

$$R_y(x) = \begin{cases} a(x) & x \leq y \\ b(x), & x > y. \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\langle u, R_y \rangle_{S_2^1} = \int_0^y u(x)R_y(x)dx + \int_y^1 u(x)R_y(x)dx$$
$$+ \int_0^y u'(x)R'_y(x)dx + \int_y^1 u'(x)R'_y(x)dx.$$

Daha sonra

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^1} &= \int_0^y u(x)a(x)dx + \int_y^1 u(x)b(x)dx + \int_0^y u'(x)a'(x)dx + \int_y^1 u'(x)b'(x)dx \\
&= \int_0^y u(x)\frac{1}{2}\frac{(e^{1-y}+e^{-1+y})}{e^2-1}\left[e^{1+x}+e^{1-x}\right]dx \\
&\quad + \int_y^1 u(x)\frac{1}{2}\frac{(e^{1+y}+e^{1-y})}{e^2-1}\left[e^{-1+x}+e^{1-x}\right]dx \\
&\quad + \int_0^y \frac{u'(x)}{2}\frac{(e^{1-y}+e^{-1+y})}{e^2-1}\left[e^{1+x}-e^{1-x}\right]dx \\
&\quad + \int_y^1 \frac{u'(x)}{2}\frac{(e^{1+y}+e^{1-y})}{e^2-1}\left[e^{-1+x}-e^{1-x}\right]dx.
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^1} &= \frac{e^{1+y}+e^{1-y}}{2(e^2-1)}\Big[\int_y^1 (u(x)(e^{x-1}+e^{1-x}) + u'(x)(e^{1+x}-e^{1-x})dx\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{e^{1-y}+e^{y-1}}{(e^2-1)}\Big[\int_0^y (u(x)(e^{x+1}+e^{1-x}) + u'(x)(e^{1+x}-e^{1-x})dx\Big].
\end{aligned}
$$

bulunur. Kısmi integrasyon uygulanılırsa

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^1} &= \frac{1}{2}\frac{e^{1+y}+e^{1-y}}{2(e^2-1)}\left[\int_y^1 (u(x)(e^{x-1}+e^{1-x})dx\right. \\
&\quad \left. + (e^0-e^0)u(1) - (e^{y-1}-e^{1-y})u(y) - \int_y^1 u(x)(e^{x-1}+e^{1-x})dx\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{(e^{1-y}+e^{-1+y})}{(e^2-1)}\left[\int_0^y (u(x)(e^{x+1}+e^{1-x})dx\right. \\
&\quad \left. + u(y)(e^{1+y}-e^{1-y}) - u(0)(e^1-e^1) - \int_0^y u(x)(e^{x+1}+e^{1-x})dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^1} &= \frac{1}{2}\frac{e^{1+y}+e^{1-y}}{(e^2-1)}u(y)(e^{1-y}-e^{y-1})+\frac{1}{2}\frac{e^{1-y}+e^{y-1}}{(e^2-1)}u(y)(e^{1+y}-e^{1-y}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{u(y)}{(e^2-1)}\big[(e^{1-y}-e^{y-1})(e^{1+y}+e^{1-y})+(e^{1+y}-e^{1-y})(e^{1-y}+e^{y+1})\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^1} &= \frac{1}{2(e^2-1)}u(y)\big[e^2+e^{2-2y}-e^{2y}-1+e^2+e^{2y}-e^{2-2y}-1\big] \\
&= \frac{u(y)}{2(e^2-1)}(2e^2-2) \\
&= u(y).
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu şekilde ispatı sağlanmış olunur.

6.1.2 m=2 için

İç çarpımdan yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^2} &= \int_0^1 \big[u(x)R_y(x)+u'(x)R_y'(x)+u''(x)R_y''(x)\big]dx \\
&= \int_0^1 u(x)R_y(x)dx+\int_0^1 u'(x)R_y'(x)dx+\int_0^1 u''(x)R_y''(x)dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanılırsa

$$
\begin{aligned}
\langle u, R_y\rangle_{S_2^2} = &\int_0^1 u(x)R_y(x)dx+u(1)R_y'(1)-u(0)R_y'(0) \\
&-\int_0^1 u(x)R_y''(x)dx+u'(1)R_y''(1)-u'(0)R_y''(0) \\
&-u(1)R_y'''(1)+u(0)R_y'''(0)+\int_0^1 u(x)R_y^{(4)}(x)dx
\end{aligned}
$$

bulunur. Daha sonra aşağıdaki sonuca ulaşılır

$$\begin{aligned}\langle u,R_y\rangle_{S_2^2} &= u(1)R_y'(1)-u(0)R_y'(0)+u'(1)R_y''(1)-u'(0)R_y''(0)\\ &\quad -u(1)R_y'''(1)+u(0)R_y'''(0)+\int\limits_0^1 u(x)\big[R_y(x)-R_y''(x)+R_y^{(4)}(x)\big]dx.\end{aligned}$$

Eğer

$$\begin{aligned}&1)R_y'(1)-R_y'''(1)=0,\\ &2)-R_y'(0)+R_y''(0)=0,\\ &3)R_y''(1)=0,\\ &4)R_y''(0)=0\end{aligned}$$

olarak ele alınırsa sonuç olarak

$$\langle u,R_y\rangle_{S_2^2}=\int\limits_0^1 u(x)\big[R_y(x)-R_y''(x)+R_y^{(4)}(x)\big]dx.$$

elde edilir. Çekirdeğin üretme özelliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$R_y(x)-R_y''(x)+R_y^{(4)}(x)=\delta(x-y)$$

$x\neq y$, iken

$$R_y(x)-R_y''(x)+R_y^{(4)}(x)=0.$$

olur. Karakteristik denklemden

$$1-\lambda^2+\lambda^4=0.$$

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}I,\\ \lambda_2&=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}I,\\ \lambda_3&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}I,\\ \lambda_4&=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}I.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece üretilen çekirdek fonksiyon

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos(\frac{x}{2}) + c_2 e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin(\frac{x}{2}) \\ +c_3 e^{\frac{-\sqrt{3}x}{2}}\cos(\frac{x}{2}) + c_4 e^{\frac{-\sqrt{3}x}{2}}\sin(\frac{x}{2}), \quad x \le y \\ \\ d_1 e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos(\frac{x}{2}) + d_2 e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin(\frac{x}{2}) \\ +d_3 e^{\frac{-\sqrt{3}x}{2}}\cos(\frac{x}{2}) + d_4 e^{\frac{-\sqrt{3}x}{2}}\sin(\frac{x}{2}), \quad x > y \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Dirac-delta fonksiyonun özelliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\begin{aligned} &5) R_{y^+}(y) = R_{y^-}(y), \\ &6) R'_{y^+}(y) = R'_{y^-}(y), \\ &7) R''_{y^+}(y) = R''_{y^-}(y), \\ &8) R'''_{y^+}(y) - R'''_{y^-}(y) = 1. \end{aligned}$$

Verilen sekiz denklem çözülerek aşağıdaki katsayılar elde edilir,

$$c_1 = -\frac{1}{6}\frac{\left(-4\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} - 8\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(4\sin(\frac{1}{2}y)^2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4\sin(\frac{1}{2}y)^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 4\cos(\frac{1}{2}y)^2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4\cos(\frac{1}{2}y)^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$c_2 = \frac{1}{6}\frac{\left(-4\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} + 8\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 4\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$c_3 = -\frac{1}{6}\frac{\left(4\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} - 4\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 8\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$c_4 = \frac{1}{6}\frac{\left(4\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} + 4\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 8\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$d_1 = -\frac{1}{6}\frac{\left(-4\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} - 8\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$d_2 = \frac{1}{6}\frac{\left(-4\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} + 8\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 4\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$d_3 = -\frac{1}{6}\frac{\left(4\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} - 4\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 8\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$$d_4 = \frac{1}{6}\frac{\left(4\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{3} + 4\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 8\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}y}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\left(\sin(\frac{1}{2}y)^2 + \cos(\frac{1}{2}y)^2\right)\left(4e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)}$$

$x \leq y$ için çekirdek fonksiyon

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\frac{1}{e^{\sqrt{3}}-1}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\Bigg(&\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3} + 2\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}\\
&+2\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3} + \cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}\\
&+\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3} + 2\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}\\
&+2\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3} + \sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}\\
&-3\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x) + 3\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\\
&+3\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x) - 3\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y+1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\Bigg).
\end{aligned}$$

$x > y$ için çekirdek fonksiyon

$$\frac{1}{6}\frac{1}{e^{\sqrt{3}}-1}e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\left(\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}+2\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}\right.$$

$$+2\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}+\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}$$

$$+\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}+2\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}$$

$$+2\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x+y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}+\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)\sqrt{3}$$

$$-3\cos(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)+3\cos(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}x)$$

$$\left.+3\sin(\frac{1}{2}y)e^{\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)-3\sin(\frac{1}{2}y)e^{-\frac{1}{2}(x-y-1)\sqrt{3}}\cos(\frac{1}{2}x)\right).$$

şeklinde elde edilir.

6.1.3 m=3 İçin

İç çarpımdan

$$\begin{aligned}\langle u,B_y\rangle_{S_2^3[0,1]} &= \int_0^1 u(x)B_y(x)dx+\int_0^1 u'(x)B_y'(x)dx\\&+\int_0^1 u''(x)B_y''(x)dx+\int_0^1 u'''(x)B_y'''(x)dx.\end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanılırsa

$$
\begin{aligned}
\langle u, B_y\rangle_{S_2^3[0,1]} &= \int_0^1 u(x)B_y(x)dx + u(1)B_y'(1) - u(0)B_y'(0) - \int_0^1 u(x)B_y''(x)dx \\
&+ u'(1)B_y''(1) - u'(0)B_y''(0) - u(1)B_y'''(1) + u(0)B_y'''(0) \\
&+ \int_0^1 u(x)B_y^{(4)}(x)dx + u''(1)B_y'''(1) - u''(0)B_y'''(0) \\
&- u'(1)B_y^{(4)}(1) + u'(0)B_y^{(4)}(0) + u(1)B_y^{(5)}(1) - u(0)B_y^{(5)}(0) \\
&- \int_0^1 u(x)B_y^{(6)}(x)dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonra

$$
\langle u, B_y\rangle_{S_2^3[0,1]} = \int_0^1 u(x)\big[B_y(x) - B_y''(x) + B_y^{(4)}(x) - B_y^{(6)}(x)\big]dx.
$$

$$
\begin{aligned}
&1) - B_y'(0) + B_y'''(0) - B_y^{(5)}(0) = 0, \\
&2) - B_y''(0) + B_y^{(4)}(0) = 0, \\
&3) B_y'''(0) = 0, \\
&4) B_y'(1) - B_y'''(1) + B_y^{(5)}(1) = 0, \\
&5) B_y''(1) - B_y^{(4)}(1) = 0, \\
&6) B_y''(1) = 0.
\end{aligned}
$$

bulunur. Daha sonra çekirdek üretme özelliğinden

$$
\langle u, B_y\rangle_{S_2^3[0,1]} = \int_0^1 u(x)\big[B_y(x) - B_y''(x) + B_y^{(4)}(x) - B_y^{(6)}(x)\big]dx = u(y)
$$

sonucuna ulaşılır. Dirac-delta fonksiyonun özelliğinden

$$
B_y(x) - B_y''(x) + B_y^{(4)}(x) - B_y^{(6)}(x) = \delta(x-y)
$$

elde edilir. $x \neq y$, iken $\delta(x-y) = 0$ olur.Böylece

$$B_y(x) - B_y''(x) + B_y^{(4)}(x) - B_y^{(6)}(x) = 0.$$

bulunur. Daha sonra

$$1 - \lambda^2 + \lambda^4 - \lambda^6 = 0.$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki sonuca varılır

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1,\\
\lambda_2 &= -1,\\
\lambda_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lambda_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lambda_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lambda_6 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Böylece $B_y(x)$ çekirdek üreten fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$B_y(x) = \begin{cases} c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + c_4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) \\ \\ +c_5e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + c_6e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x), \quad x \le y \\ \\ \\ d_1e^x + d_2e^{-x} + d_3e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + d_4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) \\ \\ +d_5e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + d_6e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x), \quad x > y. \end{cases}$$

Yukarıdaki denklemler çözülürse katsayılar aşağıdaki gibi olur:

$$c_1 = \frac{1}{4}\frac{e^{-y}e + e^{-1}e^y}{e^ye^{-y}(e - e^{-1})},$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\frac{e^{-y}e + e^{-1}e^y}{e^ye^{-y}(e - e^{-1})},$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\frac{\left(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$c_4 = -\frac{1}{4}\frac{\left(\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$c_5 = \frac{1}{4}\frac{\left(\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$c_6 = \frac{1}{4}\frac{\left(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$d_1 = \frac{1}{4}\frac{e^{-1}(e^{-y} + e^{y})}{e^{y}e^{-y}(e - e^{-1})},$$

$$d_2 = \frac{1}{4}\frac{e(e^{-y} + e^{y})}{e^{y}e^{-y}(e - e^{-1})},$$

$$d_3 = \frac{1}{4}\frac{\left(\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$d_4 = \frac{1}{4}\frac{\left(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$d_5 = -\frac{1}{4}\frac{\left(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

$$d_6 = \frac{1}{4}\frac{\left(\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{(\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2 + \cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})^2)\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}y\sqrt{2}}}$$

bulunur. Çekirdek fonksiyonu $B_y(x)$ $x \le y$ için

$$B_y(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{(e^{\sqrt{2}}-1)(e^2-1)}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}$$

$$\Big(e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$+e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1-y+x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{1-y+x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{1-y-x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{1-y-x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$
$$-e^{-1+y+x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{-1+y+x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{-1+y-x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{-1+y-x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\Big).$$

$x > y$ iken $B_y(x)$ aşağıdaki gibidir:

$$B_y(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(e^{\sqrt{2}}-1)(e^2-1)}e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}$$

$$\Big(e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$+e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$-e^{-1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{-1+\frac{1}{2}y\sqrt{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1-\frac{1}{2}y\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$+e^{1+y-x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{1+y-x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{1-y-x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{1-y-x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$
$$+e^{-1+y+x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{-1+y+x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}+e^{-1-y+x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}-e^{-1-y+x+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\Big).$$

7 BÖLÜM

7.1 SONUÇ

Bu tezimizde çekirdek üreten uzay metodunu ele aldık. Üretilen çekirdek fonksiyonların teorisi ile ilgili literatürde mevcut olan çalışmaları inceledik. Çekirdek üreten uzayların nasıl tanımlandıklarını ve bu uzaylarda üretilen çekirdek fonksiyonların nasıl elde edildiğini detaylı bir şekilde inceledik. Literatürde mevcut olmayan bazı yeni üretilen çekirdek fonksiyonlar elde ettik. Elde ettiğimiz yeni üretilen çekirdek fonksiyonlar çekirdek üreten uzay metodunda çalışmalar yapmayı düşünen araştırmacılar için çok faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR

Abu Arqub, O., Al-Smadi, M., Momani, S., 2012. Application of reproducing kernel method for solving nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *Abstract And Applied Analysis*, 10.1155, 836-839.

Akgül, A., Karataş Akgül, E., Korhan S., 2020. New reproducing kernel functions in the reproducing kernel Sobolev spaces, *AIMS Mathematics*,5(1), 482-496.

Akgül, A., Karataş Akgül, E., Korhan S., 2018. Reproducing kernel functions for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, *ITM Web of Conferences*,22, 01028.

Akgül, A., 2014. Çekirdek Üreten Uzay Yönteminin Matematiksel Temelleri Ve Bazı Uygulamaları,(Doktora), *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*,Elazığ, 110-120.

Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Transactions Of The American Mathematical Society*,68, 337-404.

Barbieri, E. and Meo, M., 2012. A fast object-oriented Matlab implementation of the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*,49(5),581-602.

Berlinet, A., 2001. Reproducing Kernel Hilbert Spaces In Probability and Statistics, *Springer Science and Busines Media*,Boston.

Berlinet, A., 2004. Reproducing Kernel Hilbert Spaces In Probability and Statistics, *Springer Science and Busines Media*, New York.

Chen, Z. and Chen Z.J., 2008. The exact solution of system of linear operator equations in reproducing kernel spaces,*Applied Mathematics Letters*, 203(1), 56-61.

Cui, M. and Lin, Y., 2009. Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space, *Nova Science Publishers Inc*, New York.

Geng, F. and Qian, S.P., 2013. Reproducing kernel method for singularly perturbed turning point problems having twin boundary layers, *Applied Mathematics Letters*, 26, 998–1004.

Geng, F. and Cui, M., 2012. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, 25, 818–823.

Jiang, W. and Chen, Z., 2013. Solving a system of linear Volterra integral equations using the new reproducing kernel method, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 10225–10230.

Raheem, S.A., 2017. Solutions Of Nonlinear Differential Equations By Reproducing Kernel Method And Group Preserving Scheme, (Yüksek lisans), *Siirt University Instıtute Of Scıence*, Siirt, 48.

Saitoh, S. and Sawano, Y., 2016., Theory of Reproducing Kernels and Applications, *Developments in Mathematics*.

Shawagfeh, N., Abu Arqub, O., Momani, S., 2014 Analytical solution of nonlinear second-order periodic boundary value problem using reproducing kernel method, *Journal Of Computational Analysis Applications*, 16, 750–762.

Wang, Y. and Chao, L., 2008. Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients, *Applied Mathematics and Mechanics*, (English Ed.), 29(1), 129-137.

Wu, B. and Li, x., 2010. Iterative reproducing kernel method for nonlinear oscillator with discontinuity, *Applied Mathematics Letters*, 25(5), 818-823.

Yao, H., 2011. Reproducing kernel method for the solution of nonlinear sine-Gordon equation using collocation and radial basis function, *Numerical Methods for Partial Differential Equations.*, 27(4), 867-886.

Zaremba, S., 1908. Sur le calcul numerique des fonctions demandees dan le probleme de dirichlet et le probleme hydrodynamique, *Bulletin International l'Academia des Sciences de Cracovie*, 68, 125–195.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Şahin KORHAN
İskenderun 1992
0531 206 3189
Sahin_3192@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Cumhuriyet Anadolu Lisesi**	**2010**
Üniversite	:	**Dicle Üniversitesi**	**2014**
Yüksek Lisans	:	**Siirt Üniversitesi**	**2020**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015	**Meb**	**Öğretmen**

YAYINLAR

Akgül, A., Karataş Akgül, E., Korhan S., 2020. New reproducing kernel functions in the reproducing kernel Sobolev spaces, *Mathematics,* 5(1), 482-496.

Akgül, A., Karataş Akgül, E., Korhan S., 2018. Reproducing kernel functions for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, *ITM Web of Conferences*,22, 01028.