T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ SÜREKSİZ NOKTAYA SAHİP SINIR KOŞULU ÖZPAREMETREYE BAĞLI GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK İFADELERİ

Halil İbrahim KURT

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Azad BAYRAMOV

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE 2014

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ SÜREKSİZ NOKTAYA SAHİP SINIR KOŞULU ÖZPAREMETREYE BAĞLI GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK İFADELERİ

Bu çalışma, 06 / 05 / 2014 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda **oy birliği** ile **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı, Soyadı	İmzası
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. Azad BAYRAMOV	
Jüri Üyesi	:	Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	
Jüri Üyesi	:	Yrd. Doç. Dr. Ercan ATASOY	

Prof. Dr. Fatih YILMAZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca gerek tez konusunun belirlenmesinde gerekse çalışmanın bu hale getirilmesinde yardımını ve desteğini benden esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Azad BAYRAMOV'a, teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını ve desteklerini benden esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hüseyin KHALİLOV'a, sayın Doç. Dr. Ruşen YILMAZ'a ve sayın Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme çok teşekkür ederim.

Halil İbrahim KURT
Rize 2014

ÖZET

İki Süreksiz Noktaya Sahip Sınır Koşulu Özparemetreye Bağlı Geç Kalan Argümentli Sınır-Değer Probleminin Özdeğer Ve Özfonksiyonlarının Asimptotik İfadeleri

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde çalışılacak sınır değer probleminin tarihi gelişimine yer verilmiştir, ikinci bölümde konunun teorisine bahsedilmiştir, üçüncü bölümde kullanılan yöntemlere yer verilmiştir, dördüncü ve son bölümde ise elde edilen asimptotik ifadelere yer verilmiştir.

Bu araştırmanın amacı geç kalan argümentli iki süreksiz noktaya sahip sınır koşulu özparametreye bağlı sınır-değer probleminin özdeğerlereni ve özfonksiyonları bulup asimptotik formülleri elde etmektir.

Anahtar kelimeler: Geç kalan argüment, sürekli olmayan sınır-değer problemi, özparametre, geçiş koşulları, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadeleri

ABSTRACT

Asymptotıc Expressıons Of Eıgenvalues And Eıgenfunctıons Of A Dıscontınuous Two-Point Boundary-Value Problem Wıth Retarded Argument Which Contains Eigenparameter Boundary Conditions

This thesis consists of five sections. In the first section, Boundary-Value problem and its historical devolopment are explained. In the second section, theory of the subject are mentioned. In the third section, the methods used are explained. In the fourth and last sections, obtained asymptotic expressıons are mentioned.

The aim of this study is to find asymptotic expressions of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous two-point boundary-value problem with retarded argument which contains eigenparameter boundary conditions.

Keywords: Retarded argument, eigenparameter, transmission conditions, discontinuous boundary- value problems, asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions

İÇİNDEKİLER **Sayfa No:**

SİMGELER ve KISALTMALAR

O	: Büyük O notasyonu, hata terimi
$O(1)$	: Sınırlı bir fonksiyon
y'	: y fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
y''	: y fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
Δ	: Geç kalan argüment
$q(h \pm 0)$	: q fonksiyonunun h noktasında ki sağdan(soldan) limiti
$\omega(x, \lambda)$	: λ parametresine bağlı sınır-değer probleminin bir çözümü
$W(u, v)$	: u ve v fonksiyonlarının Wronskian determinantı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geç kalan argümentli diferansiyel denklemler Euler probleminin çözümüyle ortaya çıkmıştır. Matematiksel fizikteki çoğu konu sınır-değer problemlerine bağlıdır ve bir çok problemi geç kalan argümentli diferansiyel denklemlere indirgenerek çözülür. Günümüzde sürekli sınır-değer problemlerinin genel teori ve yöntemleri gelişmiş olmasına rağmen, süreksizlik durumunda benzer problemlerin genel karakterleri hakkında çok az şey bilinmektedir. Ayrıca, geç kalan argümentli diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemler teorisinin güncel konularından biridir.

Geç kalan argümentli sınır-değer problemleri Kamenskii (1954), Norkin (1958), Nersesjan (1961), Jablonski ve Twardowska (1987), Bayramoğlu vd. (2002), Akdoğan vd. (2005), Demidenko ve Matveeva (2005), Demidenko ve Likhoshvai (2005) ve Bayramov vd. (2007) çalışmalarında yer almış ve bunların çeşitli fiziksel uygulamaları Norkin (1972) çalışmasında yer almıştır.

Son yıllarda geç kalan argümentli sınır-değer problemlerinin çözümünde önemli ölçüde gelişme kaydedilmiştir. Sınır koşulunda spektral parametre bulunan ikinci mertebeden adi diferansiyel operatörler için sınır-değer problemi Norkin (1958 ve 1972), Bellman ve Cook (1963), Tikhonov (1972), Fulton (1977) ve Kerimov ve Mamedov (1999) tarafından çalışılmıştır.

İkinci mertebeden geç kalan argümentli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville tipli sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik özellikleri ise Bayramoğlu vd. (2002), Demidenko ve Likhoshvai (2005), Bayramov vd. (2007) tarafından çalışılmıştır.

Sınır koşulunda spektral parametre bulunan Sturm-Liouville tipli geç kalan argümentli diferansiyel denklem için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik formülleri Bayramoğlu vd. (2002) tarafından, geç kalan argümentli sürekli olmayan sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri Bayramov vd. (2007) tarafından ve geç kalan argümentli sürekli olmayan sınır-değer probleminin özparametreye bağlı sınır şartlarında özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri Akgün vd. (2012) tarafından elde edilmiştir.

Ayrıca, sınır şartları özparametreye bağlı sınır-değer problemlerinin çözümüne Shkalikov (1983), Titeux vd. (1997), Voitevich, (1997), Yakubov, (2000) çok önemli katkılar yapmışlardır.

Bu çalışmada sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunan iki geçiş koşuluna bağlı geç kalan argümentli iki süreksiz noktaya sahip sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri bulunacaktır.

1.2. Temel Başlangıç-Değer Problemi

İkinci mertebeden geç kalan argümentli diferensiyel denklemler

$$F\big(t, x(t), \dots, x^{(m_0)}(t), x\big(t-\Delta_1(t)\big), \dots, x^{(m_1)}\big(t-\Delta_1(t)\big), \dots, x\big(t-\Delta_n(t)\big), \dots$$
$$\dots, x^{(m_n)}\big(t-\Delta_n(t)\big)\Big) = 0 \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada $i = 1,2,\dots,n$ için $\Delta_i(t) \geq 0$ sürekli ve $\max_{0\leq i\leq n} m_i = 2$ olarak verilir. $x^{(m_i)}\big(t-\Delta_i(t)\big)$ ile $x(z)$ fonksiyonunun $z = t-\Delta_i(t)$ noktasındaki türevi kastedilmektedir. A verilen başlangıç noktası olsun. Her $\Delta_i(t)$ sapması A noktasını içeren bir $E_A^{(i)}$ başlangıç kümesi tanımlar ve $t \geq A$ için $t-\Delta_i(t) < A$ dır. $E_A = \bigcup_{i=1}^{n} E_A^{(i)}$ ve $\mu = \max_{0\leq i\leq n} m_i$ olsun. E_A üzerinde μ-kere türevlenebilen bir $\Phi(t)$ başlangıç fonksiyonu tayin edelim.

$x_A^{(j)} = \Phi^{(j)}(A)$, $j = 0,1,\dots,\mu$ olsun. $\mu = 0$ ise ek olarak $x_A^{(1)}$ sayısını tayin edelim. Eğer A, E_A noktasının izole edilmiş bir noktası ise $x_A^{(0)}$ ve $x_A^{(1)}$ keyfi olarak seçilir.

(1.1) denklemi için başlangıç değer problemi $[A,B), B \leq +\infty$ aralığında

$$x(A) = x_A^{(0)}, x'(A) = x_A^{(1)}, x^{(j)}\big(t-\Delta_i(t)\big) \equiv \Phi^{(j)}\big(t-\Delta_i(t)\big),\ t-\Delta_i(t) < A \ ise \tag{1.2}$$

koşullarını sağlayan $x(t)$ çözümünü bulma problemidir.

Geç kalan argümentli diferansiyel denklemlerin doğal bir sınıflandırılması G. A. Kamenskii tarafindan yapılmıştır. (1.1) denklemi $x^{(m_0)}(t)$ için çözülürse

$$x^{(m_0)}(t) = f\big((t, x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x\big(t-\Delta_1(t)\big), \dots, x^{(m_1)}\big(t-\Delta_1(t)\big), \dots,$$
$$\dots, x\big(t-\Delta_n(t)\big), \dots, x^{(m_n)}\big(t-\Delta_n(t)\big)\big) \tag{1.3}$$

elde edilir.

1.3. İleri, Nötral ve Geç Kalan Argümentli Denklemler

Tanım 1.1. (1.3) ifadesinde $\lambda = m_0 - \mu$ dönüşümü yapılsın. Bu taktirde,

i) $\lambda < 0$ için ileri tipli denklemler,

ii) $\lambda = 0$ için nötral tipli denklemler,

iii) $\lambda > 0$ için geç kalan argümentli denklemler,

olarak adlandırılır.

(1.3) denkleminde λ>0 ve f fonksiyonu t'nin dışındaki tüm argümentlere göre lineerse ikinci mertebeden geç kalan argümentli diferansiyel denklem elde ederiz.

$$x''(t) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(t)x\big(t - \Delta_i(t)\big) + b_i(t)x'\big(t - \Delta_i(t)\big)\Big) + c(t) \qquad (1.4)$$

(1.4) denkleminde $x(t) = y_1(t)$ ve $x'(t) = y_2(t)$ olsun. (1.4) denklemini birinci mertebeden

$$y_1{}'(t) = y_2(t)$$

$$y_2{}'(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y_1\big(t - \Delta_i(t)\big) + b_i(t)y_2\big(t - \Delta_i(t)\big) + c(t)$$

sistemi ile yer değiştirelim. Uygunluk için daha genel

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ji}^k(t)y_j\big(t - \Delta_i(t)\big) + c_k(t), \quad k = 1,2 \qquad (1.5)$$

sistemini göz önüne alalım. (1.5) sistemi dağıtılmış gecikmelerle birlikte

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty} y_j(t - s)dr_j^k(t,s) + c_k(t), k = 1,2,\dots,m \qquad (1.6)$$

sisteminin özel bir biçimidir. Burada integral Stieltjes anlamında alınmıştır.

$r_j^k(t,s)$ üzerinde bazı kısıtlamalara gidilerek (1.6) sisteminin başlangıç–değer probleminin çözümleri için varlık ve teklik teoremleri oluşturulur. Dahası bu çözümler başlangıç verilerine sürekli olarak bağlıdır. Amacımıza uygun olarak bu teoremleri (1.5) denkleminin

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2} a_{j0}^k(t)y_j(t) + a_{j1}^k(t)y_j\big(t - \Delta_i(t)\big) + c_k(t)\,, \qquad k = 1,2 \qquad (1.7)$$

formuna uygun olarak yazmak yeterlidir.

(1.7) eşitliğinin $[A, B),\ B \leq +\infty$ aralığında tanımlı

$$y_k(A) = y_A^{(k)} = \Phi_k(A),\ \ y_k\big(t-\Delta(t)\big) \equiv \Phi_k\big(t-\Delta(t)\big),\ \ t-\Delta(t) < A \qquad (1.8)$$

koşullarını sağlayan $y_1(t),\ y_2(t)$ çözümlerini araştıracağız. Burada $k = 1,2$ ve $\Phi_k(t)$, E_A üzerinde tanımlı başlangıç fonksiyonu olsun. $a_{j1}^k(t) \equiv 0$ ($j = 1$ veya 2) ise, $y_A^j(t)$ ($j = 1$ veya 2) sayısı keyfi olarak atanır; eğer A noktası E_A da izole edilmiş bir nokta ise $y_A^1,\ y_A^2$ sayılarının her ikisi de keyfi olarak atanır.

(1.7) sistemi ile birlikte

$$y_k(t) = y_A^k + \int_A^t \left[\sum_{j=1}^{2}\Big(a_{j0}^k(\tau)y_j(\tau) + a_{j1}^k(\tau)\Big)y_j\big(\tau-\Delta_i(\tau)\big)\right]d\tau + \int_A^t c_k(\tau)$$

$$k = 1,2; \qquad A \le t \le B \qquad (1.9)$$

integral denklemler sistemini göz önüne alalım. (1.8)'e eşdeğer olarak da

$$y_j\big(t-\Delta(t)\big) = \Phi_j\big(t-\Delta(t)\big),\ \ t-\Delta(t) < A \qquad j = 1,2 \qquad (1.10)$$

koşulunu göz önüne alalım.

Bundan böyle $a_{j0}^k(t), a_{j0}^k(t), c_k(t)$ $(j,k = 1,2)$ ve $\Delta(t) > 0$ ın $[A,B)$ üzerinde ve $\Phi_k(t)$ $(k = 1,2)$ başlangıç fonksiyonlarının E_A üzerinde sürekli olduklarını varsayacağız.

Lemma 1.1. (1.7) sisteminin (1.8) koşullarını sağlayan bir çözümü, (1.9) integral denklemler sisteminin (1.10) koşulunu sağlayan sürekli bir çözümüdür. Tersine (1.9) sisteminin (1.10) koşulunu sağlayan sürekli bir çözümü (1.7) sisteminin (1.8) koşullarını sağlayan bir çözümüdür.

Teorem 1.1. $\Phi = \max_{0\le i\le n} sup_{\mathrm{E}_A}|\Phi_k(t)| < \infty$ olsun. O halde (1.7) sisteminin $[A,B)$ aralığında **(**1.8) başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözümü vardır.

1.4. Geç Kalan Argümentli Sturm-Liouville Sınır-Değer Problemi

Tanım 1.2. $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olsun. $x \to \infty$ iken $f(x) = O(g(x))$ şeklindedir ancak ve ancak her $x \ge x_0$ için,

$$|f(x)| \le M|g(x)|$$

olacak şekilde reel bir x_0 sayısı ve pozitif bir M sayısı vardır.

Tanım 1.3. λ bir reel parametre ve α ve β keyfi reel sayılar, $\Phi(t)$ E_0 başlangıç kümesi üzerinde $\Phi(0) = 1$ olan sürekli başlangıç fonksiyonu, $M(t)$ ve $\Delta(t) \geqq 0$ fonksiyonları $[0, \pi]$ kümesi üzerinde sürekli olsun. Sınır şartları aşağıdaki gibi olan

$$x''(t) + \lambda x(t) + M(t)x\big(t - \Delta(t)\big) = 0$$

$$x(0)\cos\alpha + x'(0)\sin\alpha = 0$$

$$x(0)\cos\beta + x'(0)\sin\beta = 0$$

$$x\big(t - \Delta(t)\big) \equiv x(0)\Phi\big(t - \Delta(t)\big), \quad t - \Delta(t) < 0 \text{ ise}$$

sınır-değer problemine ikinci mertebeden geç kalan argümentli Sturm-Liouville problemi denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada öncelikle (3.1) - (3.7) probleminin çözümü integral denklemler cinsinden yazılmıştır. Daha sonra özdeğerlerinin sayısı ve yapısı belirlenerek özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Teoremlerin ispatlanmasında Rolle teoremi, kısmi integrasyon ve iterasyon tekniği kullanılmıştır.

Teorem 2.1 (Rolle Teoremi). $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

Teorem 2.2 (Kısmi İntegrasyon). $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında diferansiyellenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Teorem 2.3 (İterasyon). Çekirdek olarak adlandırılan $K(t,s)$ ve $f(t)$ fonksiyonları bilinen, $y(t)$ bilinmeyen fonksiyon, λ ise herhangi bir sayısal parametre olmak üzere

$$y(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, y(s)ds + f(t)\,, \qquad t \in [a,b] \tag{2.1}$$

lineer Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Burada $K(t,s)$ fonksiyonu $G = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : a \le t \le b\,, a \le s \le b\}$ üzerinde, $f(t)$ ise $[a,b]$ üzerinde süreklidir. O halde (2.1) denkleminin $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir $y^*(t)$ çözümü vardır ve her başlangıç $y_0(t) \in C[a,b]$ fonksiyonu için terimleri

$$y_n(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, y_{n-1}(s)ds + f(t), \quad n = 1,2,\dots$$

şeklinde tanımlanan y_n dizisi y^* fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.

3. BULGULAR

3.1. Başlangıç Problemine Giriş

λ bir reel parametre ve $\alpha, \beta, \delta, \gamma \neq 0$ keyfi reel sayılar olmak üzere, $q(x)$ reel değerli bir fonksiyon, $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ kümesi üzerinde sürekli ve

$$q(h_1 \pm 0) = \lim_{x \to h_1 \pm 0} q(x), \; q(h_2 \pm 0) = \lim_{x \to h_2 \pm 0} q(x).$$

$\Delta(x) \geq 0$ reel değerli fonksiyon ve $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ kümesi üzerinde sürekli,

$$\Delta(h_1 \pm 0) = \lim_{x \to h_1 \pm 0} \Delta(x), \; \Delta(h_2 \pm 0) = \lim_{x \to h_2 \pm 0} \Delta(x).$$

ve $x \in [0, h_1)$ ise $x - \Delta(x) \geq 0$; $x \in (h_1, h_2)$ ise $h_1 \leq x - \Delta(x) \leq h_2$; $x \in (h_2, \pi]$ ise $x - \Delta(x) \geq h_2$ olsun.

$$u''(x) + \lambda u(x) + q(x)u\big(x - \Delta(x)\big) = 0 \qquad (3.1)$$

$[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ kümesi üzerinde

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \qquad (3.2)$$

$$\sqrt{\lambda}\, u(0)\cos\beta + u'(0)\sin\beta = 0 \qquad (3.3)$$

sınır şartları

$$u(h_1 - 0) - \delta u(h_1 + 0) = 0 \qquad (3.4)$$

$$u'(h_1 - 0) - \delta u'(h_1 + 0) = 0 \qquad (3.5)$$

ve

$$u(h_2 - 0) - \gamma u(h_2 + 0) = 0 \qquad (3.6)$$

$$u'(h_2 - 0) - \gamma u'(h_1 + 0) = 0 \qquad (3.7)$$

geçiş şartları ile (3.1) denkleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını araştıralım.

$\omega_1(x,\lambda)$, $[0,h_1]$ aralığında

$$\omega_1(0,\lambda) = \sin\alpha \quad , \quad \omega_1'(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.8}$$

başlangıç şartlarını sağlayan (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. (3.8) başlangıç şartları $[0,h_1]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin tek bir çözümünü tanımlar. Çözümü tamamladıktan sonra $[h_1,h_2]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin çözümünü

$$\omega_2(h_1,\lambda) = \frac{1}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda),\ \ \omega_2'(h_1,\lambda) = \frac{1}{\delta}\omega_1'(h_1,\lambda) \tag{3.9}$$

başlangıç şartları ve $\omega_1(x,\lambda)$ çözümü ile tanımlayacağız. (3.9) başlangıç şartları $[h_1,h_2]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin tek bir çözümü olarak tanımlanır.

Şimdi $[h_2,\pi]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin çözümü

$$\omega_3(h_2,\lambda) = \frac{1}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda),\ \ \omega_3'(h_2,\lambda) = \frac{1}{\gamma}\omega_2'(h_2,\lambda) \tag{3.10}$$

başlangıç şartları ve $\omega_2(x,\lambda)$ çözümü ile tanımlayacağız.(3.10) başlangıç şartları $[h_2,\pi]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin tek bir çözümü olarak tanımlanır.

Sonuç olarak $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ kümesi üzerinde $\omega(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\omega(x,\lambda) = \begin{cases} \omega_1(x,\lambda) & , \ x\in[0,h_1) \\ \omega_2(x,\lambda) & , \ x\in(h_1,h_2) \\ \omega_3(x,\lambda) & , \ x\in(h_2,\pi] \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve $\omega(x,\lambda)$ fonksiyonu $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2\pi]$ kümesi üzerinde (3.1) denkleminin hem (3.4) hem de (3.5) geçiş şartlarını ve sınır şartlarından birini (yani (3.2) şartını) sağlayan ve (3.1) denkleminin hem (3.6) hem de (3.7) geçiş şartlarını ve sınır şartlarından birini (yani (3.2) şartını) sağlayan herhangi bir çözümüdür.

Lemma 3.1. $\omega(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin bir çözümü ve $\lambda > 0$ olsun. O halde aşağıdaki denklemler doğrudur.

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{1}{s}\int_{0}^{x} q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.11)$$

$$\omega_2(x,\lambda) = \frac{1}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\cos s(x-h_1) + \frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{s\delta}\sin s(x-h_1)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_1}^{x} q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.12)$$

$$\omega_3(x,\lambda) = \frac{1}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda)\cos s(x-h_2) + \frac{\omega_2{}'(h_2,\lambda)}{s\gamma}\sin s(x-h_2)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.13)$$

$(s=\sqrt{\lambda}\ , \qquad \lambda>0\ )$

İspat. Bu ispatı yapmak için (3.11) integralinde $q(\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)$ yerine $-s^2\,\omega_1(\tau,\lambda)-\omega_1''(\tau,\lambda)$ yazılırsa

$$\sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx - \frac{1}{s}\int_{0}^{x} q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$= s\sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx - \frac{1}{s}\int_{0}^{x}\sin s(x-\tau)\,[-s^2\,\omega_1(\tau,\lambda)-\omega_1{}''(\tau,\lambda)]d\tau$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx + s\int_{0}^{x}\sin s(x-\tau)\ \omega_1(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{s}\int_{0}^{x}\sin s(x-\tau)\,\omega_1{}''(\tau,\lambda)d\tau \qquad (3.14)$$

elde edilir. Şimdi $\int_{0}^{x}\sin s(x-\tau)\omega_1(\tau,\lambda)d\tau$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_{0}^{x}\sin s(x-\tau)\ \omega_1(\tau,\lambda)d\tau = \frac{1}{s}\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau,\lambda)$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x \cos s(x-\tau)\ \omega_1{}'(\tau,\lambda)\,d\tau \qquad (3.15)$$

bulunur. Tekrardan $\int_0^x \cos s(x-\tau)\omega_1{}'(\tau,\lambda)\,d\tau$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^x \cos s(x-\tau)\ \omega_1{}'(\tau,\lambda)\,d\tau = -\frac{1}{s}\sin s(x-\tau)\ \omega_1{}'(\tau,\lambda)$$

$$+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\ \omega_1{}''(\tau,\lambda)d\tau$$

bulunur. Son integral (3.15) de yerine yazlırsa

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)\ \omega_1(\tau,\lambda)d\tau = \frac{1}{s}\cos s(x-\tau)\ \omega_1(\tau,\lambda) + \frac{1}{s^2}\sin s(x-\tau)\ \omega_1{}'(\tau,\lambda)$$

$$-\frac{1}{s^2}\int_0^x \sin s(x-\tau)\ \omega_1{}''(\tau,\lambda)\,d\tau \qquad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) ifadesini (3.14) de yerine yazılır ve (3.8) başlangıç şartları kullanılırsa

$$\sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx + \left[\cos s(x-\tau)\ \omega_1(\tau,\lambda) + \frac{1}{s}\sin s(x-\tau)\ \omega_1{}'(\tau,\lambda)\right]\Big|_0^x$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\ \omega_1{}''(\tau,\lambda)d\tau + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\ \omega_1{}''(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx + \omega_1(x,\lambda) - \sin\alpha\cos sx - \frac{1}{s}\sin sx\,(-\cos\alpha)$$

$$= \omega_1(x,\lambda)$$

elde edilir.

Benzer yöntemle $\omega_2(x,\lambda)$ ve $\omega_3(x,\lambda)$ ispat edilir.

Teorem 3.1. (3.1) - (3.7) problemi sadece basit özdeğerlere sahiptir.

İspat. $\tilde{\lambda}$, (3.1) - (3.7) probleminin bir özdeğeri olsun ve bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonları aşağıdaki gibi alalım.

$$\tilde{u}(x,\tilde{\lambda}) = \begin{cases} \tilde{u}_1(x,\tilde{\lambda}) & ,x \in [0,h_1) \\ \tilde{u}_2(x,\tilde{\lambda}) & ,x \in (h_1,h_2) \\ \tilde{u}_3(x,\tilde{\lambda}) & ,x \in (h_2,\pi] \end{cases}$$

Bu halde (3.2) ve (3.8)'den determinant

$$W[\tilde{u}_1(0,\tilde{\lambda}),\omega_1(0,\tilde{\lambda})] = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1(0,\tilde{\lambda}) & \omega_1(0,\tilde{\lambda}) \\ \tilde{u}_1{}'(0,\tilde{\lambda}) & \omega_1{}'(0,\tilde{\lambda}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1(0,\tilde{\lambda}) & \sin\alpha \\ \tilde{u}_1{}'(0,\tilde{\lambda}) & -cos\ \alpha \end{vmatrix}$$

$$= \tilde{u}_1(0,\tilde{\lambda})\cos\alpha + \tilde{u}_1'(0,\tilde{\lambda})\sin\alpha$$

$$= 0$$

olduğundan $\tilde{u}_1(x,\tilde{\lambda})$ ve $\omega_1(x,\tilde{\lambda})$ fonksiyonları $[0,h_1]$ aralığında lineer bağımlıdır. (Norkin, 1972)

Şimdi $\tilde{u}_2(x,\tilde{\lambda})$ ve $\omega_2(x,\tilde{\lambda})$ fonksiyonlarının $[h_1,h_2]$ aralığında lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

Bazı $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ değerleri için

$$\tilde{u}_1(x,\tilde{\lambda}) = k_1\omega_1(x,\tilde{\lambda}) \text{ ve } \tilde{u}_2(x,\tilde{\lambda}) = k_2\omega_2(x,\tilde{\lambda}) \tag{3.17}$$

şeklindedir. Eğer $k_1 = k_2$ olduğunu gösterirsek $\tilde{u}_2(x,\tilde{\lambda})$ ve $\omega_2(x,\tilde{\lambda})$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Farz edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun. (3.4), (3.9) ve (3.17) eşitliklerinden,

$$\tilde{u}(h_1-0,\tilde{\lambda}) - \delta\tilde{u}(h_1+0,\tilde{\lambda}) = \tilde{u}_1(h_1,\tilde{\lambda}) - \delta\tilde{u}_2(h_1,\tilde{\lambda})$$

$$= k_1\omega_1(h_1,\tilde{\lambda}) - \delta k_2\omega_2(h_1,\tilde{\lambda})$$

$$= k_1\delta\omega_2(h_1,\tilde{\lambda}) - \delta k_2\omega_2(h_1,\tilde{\lambda})$$

$$= \delta(k_1-k_2)\omega_2(h_1,\tilde{\lambda}) = 0$$

bulunur. $\delta(k_1-k_2) \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\omega_2(h_1, \tilde{\lambda}) = 0 \tag{3.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) = 0$ olduğunu gösterelim.

Bazı $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ değerleri için

$$\tilde{u}_1{}'(x, \tilde{\lambda}) = k_1 \omega_1{}'(x, \tilde{\lambda}) \text{ ve } \tilde{u}_2{}'(x, \tilde{\lambda}) = k_2 \omega_2{}'(x, \tilde{\lambda}) \tag{3.19}$$

şeklindedir. Eğer $k_1 = k_2$ olduğunu gösterirsek $\tilde{u}_2(x, \tilde{\lambda})$ ve $\omega_2(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Farz edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun. (3.5), (3.9) ve (3.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(h_1 - 0, \tilde{\lambda}) - \delta \tilde{u}'(h_1 + 0, \tilde{\lambda}) &= \tilde{u}_1{}'(h_1, \tilde{\lambda}) - \delta \tilde{u}_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) \\
&= k_1 \omega_1{}'(h_1, \tilde{\lambda}) - \delta k_2 \omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) \\
&= k_1 \delta \omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) - \delta k_2 \omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) \\
&= \delta(k_1 - k_2) \omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. $\delta(k_1 - k_2) \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\omega_2{}'(h_1, \tilde{\lambda}) = 0 \tag{3.20}$$

elde edilir.

Şimdi $\tilde{u}_3(x, \tilde{\lambda})$ ve $\omega_3(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonlarının $[h_2, \pi]$ aralığında lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

Bazı $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ değerleri için

$$\tilde{u}_2(x, \tilde{\lambda}) = k_1 \omega_2(x, \tilde{\lambda}) \text{ ve } \tilde{u}_3(x, \tilde{\lambda}) = k_2 \omega_3(x, \tilde{\lambda}) \tag{3.21}$$

şeklindedir. Eğer $k_1 = k_2$ olduğunu gösterirsek $\tilde{u}_3(x, \tilde{\lambda})$ ve $\omega_3(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Farz edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun. (3.6), (3.10) ve (3.21) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(h_2 - 0, \tilde{\lambda}) - \gamma \tilde{u}(h_2 + 0, \tilde{\lambda}) &= \tilde{u}_2(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma \tilde{u}_3(h_2, \tilde{\lambda}) \\
&= k_1 \omega_2(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma k_2 \omega_3(h_2, \tilde{\lambda}) \\
&= k_1 \gamma \omega_3(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma k_2 \omega_3(h_2, \tilde{\lambda})
\end{aligned}$$

$$= \gamma(k_1 - k_2)\omega_3(h_2, \tilde{\lambda}) = 0$$

bulunur. $\gamma(k_1 - k_2) \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\omega_3(h_2, \tilde{\lambda}) = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda}) = 0$ olduğunu gösterelim.

Bazı $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ değerleri için

$$\tilde{u}_2{}'(x, \tilde{\lambda}) = k_1\omega_2{}'(x, \tilde{\lambda}) \text{ ve } \tilde{u}_3{}'(x, \tilde{\lambda}) = k_2\omega_3{}'(x, \tilde{\lambda}) \tag{3.23}$$

şeklindedir. Eğer $k_1 = k_2$ olduğunu gösterirsek $\tilde{u}_3(x, \tilde{\lambda})$ ve $\omega_3(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Farz edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun. (3.7), (3.10) ve (3.23) eşitliklerinden,

$$\tilde{u}'(h_2 - 0, \tilde{\lambda}) - \gamma\tilde{u}'(h_2 + 0, \tilde{\lambda}) = \tilde{u}_2{}'(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma\tilde{u}_3{}'(h_2, \tilde{\lambda})$$

$$= k_1\omega_2{}'(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma k_2\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda})$$

$$= k_1\gamma\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda}) - \gamma k_2\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda})$$

$$= \gamma(k_1 - k_2)\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda}) = 0$$

bulunur. $\gamma(k_1 - k_2) \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\omega_3{}'(h_2, \tilde{\lambda}) = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir.

$\omega_2(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonu $[h_1, h_2]$ kümesi üzerinde (3.18) ve (3.20) başlangıç şartlarını sağlar ve (3.1) denkleminin bir çözümüdür. Bu da gösterir ki $[h_1, h_2]$ kümesi üzerinde

$$\omega_2(x, \tilde{\lambda}) = 0$$

elde edilir.

$\omega_3(x, \tilde{\lambda})$ fonksiyonu $[h_2, \pi]$ kümesi üzerinde (3.22) ve (3.24) başlangıç şartlarını sağlar ve (3.1) denkleminin bir çözümüdür. Bu da gösterir ki $[h_2, \pi]$ kümesi üzerinde

$$\omega_3(x,\tilde{\lambda}) = 0$$

elde edilir.

(3.9), (3.18) ve (3.20) eşitliklerini kullanarak

$$\omega_1(h_1,\tilde{\lambda}) = \omega_1{}'(h_1,\tilde{\lambda}) = 0$$

bulabiliriz. Buradan $[0,h_1]$ kümesi üzerinde

$$\omega_1(x,\tilde{\lambda}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $[0,h_1) \cup (h_1,h_2) \cup (h_2,\pi]$ kümesi üzerinde

$$\omega(x,\tilde{\lambda}) = 0$$

elde edilir. Bu (3.8) ile çelişir. Böylece ispat biter.

3.2. Varlık Teoremi

Bu bölümde tanımlanan $\omega(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.4) ve (3.5) geçiş şartlarını ve (3.2) sınır şartlarını sağlayan (3.1) denkleminin bir aşikar olmayan çözümüdür.

(3.3) de $\omega(x,\lambda)$ yerine yazılırsa

$$F(\lambda) \equiv \sqrt{\lambda}\,\omega(\pi,\lambda)\cos\beta + \omega'(\pi,\lambda)\sin\beta = 0 \tag{3.25}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Teorem (3.1) ile (3.1) - (3.7) sınır-değer probleminin özdeğerlerinin kümesi, (3.25) denkleminin reel köklerinin kümesi ile çakışır.

Lemma 3.2.

$$q_1 = \int_0^{h_1} |q(\tau)|d\tau \ , \qquad q_2 = \int_{h_1}^{h_2} |q(\tau)|d\tau \ , \qquad q_3 = \int_{h_2}^{\pi} |q(\tau)|d\tau$$

olmak üzere,

(1) $\lambda \geq 4{q_1}^2$ olsun. Bu halde (3.1) denkleminin $\omega(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|\omega_1(x,\lambda)| \leq \frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \quad , \quad x \in [0,h_1] \tag{3.26}$$

(2) $\lambda \geq max\{4{q_1}^2, 4{q_2}^2\}$ olsun. Bu halde (3.12) denkleminin $\omega_2(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|\omega_2(x,\lambda)| \leq \frac{4}{|\delta| q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \quad , \quad x \in [h_1,h_2] \tag{3.27}$$

(3) $\lambda \geq max\{4{q_1}^2, 4{q_2}^2, 4{q_3}^2\}$ olsun. Bu halde (3.13) denkleminin $\omega_3(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|\omega_3(x,\lambda)| \leq \frac{16}{|\delta||\gamma| q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \quad , \quad x \in [h_2,\pi] \tag{3.28}$$

İspat. $B_{1\lambda} = max_{[0,h_1]}|\omega_1(x,\lambda)|$ olsun.

$$A = \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$A^2 = sin^2\alpha\, cos^2 sx + \frac{cos^2\alpha}{s^2} sin^2 sx - \frac{1}{s}\sin\alpha\cos\alpha\sin 2sx$$

$$A^2 \leq sin^2\alpha\, cos^2 sx + \frac{cos^2\alpha}{s^2} sin^2 sx$$

$$A^2 \leq sin^2\alpha + \frac{cos^2\alpha}{s^2}$$

$$A \leq \sqrt{sin^2\alpha + \frac{cos^2\alpha}{s^2}}$$

elde edilir.

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx - \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau$$

$\forall\lambda > 0$ ve $s \geq 2q_1$için,

$$|\omega_1(x,\lambda)| = \left|\sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx - \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau\right|$$

$$B_{1\lambda} \leq \left|\sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx\right| + \left|\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right|$$

$$B_{1\lambda} \leq \sqrt{sin^2\alpha + \frac{cos^2\alpha}{s^2}} + \frac{1}{s}\int_0^x |q(\tau)||\sin s(x-\tau)|\,|\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$B_{1\lambda} \leq \sqrt{sin^2\alpha + \frac{cos^2\alpha}{s^2}} + \frac{1}{s}q_1B_{1\lambda}$$

$$B_{1\lambda}(s-q_1) \leq \sqrt{s^2sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$B_{1\lambda} \leq \frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

elde edilir. Şimdi (3.11) de x'e göre türev alınırsa

$$\omega_1{}'(x,\lambda) = -s\sin\alpha\sin sx - \cos\alpha\cos sx$$

$$-\int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.29)$$

bulunur. (3.26) ve (3.29)'den, $s \geq 2q_1$ için

$$|\omega_1{}'(x,\lambda)| = \left|s\sin\alpha\sin sx + \cos\alpha\cos sx + \int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right|$$

$$|\omega_1{}'(x,\lambda)| \leq \sqrt{s^2sin^2\alpha + cos^2\alpha} + B_{1\lambda}q_1$$

$$|\omega_1{}'(x,\lambda)| \leq \sqrt{s^2sin^2\alpha + cos^2\alpha} + q_1\frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$|\omega_1{}'(x,\lambda)| \leq \sqrt{s^2sin^2\alpha + cos^2\alpha} + \sqrt{4{q_1}^2sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$|\omega_1{}'(x,\lambda)| \leq \frac{s}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$\frac{|\omega_1{}'(x,\lambda)|}{s} \leq \frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \tag{3.30}$$

elde edilir.

$B_{2\lambda} = max_{[h_1,h_2]}|\omega_2(x,\lambda)|$ olsun. Bu halde (3.12), (3.26) ve (3.30)'dan, $s \geq 2q_1$ için

$$|\omega_2(x,\lambda)| = \left|\frac{1}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\cos s(x-h_1) + \frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{s\delta}\sin s(x-h_1)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{s}\int_{h_1}^{x} q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right|$$

$$|\omega_2(x,\lambda)| \leq \frac{1}{|\delta|}|\omega_1(h_1,\lambda)\cos s(x-h_1)| + \frac{1}{|\delta|}\left|\frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{s}\sin s(x-h_1)\right|$$

$$+\frac{1}{s}\int_{h_1}^{x}|q(\tau)||\sin s(x-\tau)|\,|\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$B_{2\lambda} \leq \frac{1}{|\delta|}|\omega_1(h_1,\lambda)| + \frac{1}{|\delta|.s}|\omega_1{}'(h_1,\lambda)| + \frac{1}{s}q_2 B_{2\lambda}$$

$$B_{2\lambda} \leq \frac{1}{|\delta|}\frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} + \frac{1}{|\delta|}\frac{1}{q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} + \frac{1}{s}q_1 B_{2\lambda}$$

$$B_{2\lambda} \leq \frac{2}{|\delta|q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} + \frac{1}{s}q_2 B_{2\lambda}$$

$$B_{2\lambda} \leq \frac{4}{|\delta|q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \tag{3.31}$$

elde edilir.

(3.12)'de x'e göre türev alınırsa

$$\omega_2{}'(x,\lambda) = \frac{-s}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\sin s(x-h_1) + \frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{\delta}\cos s(x-h_1)$$

$$-\int_{h_1}^{x} q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.26) ve (3.29)'dan, $s \geq 2q_1$ için

$$|\omega_2{}'(x,\lambda)| = \left| \frac{-s}{\delta} \omega_1(h_1,\lambda) \sin s(x-h_1) + \frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{\delta} \cos s(x-h_1) \right.$$

$$\left. - \int_{h_1}^{x} q(\tau) \cos s(x-\tau)\, \omega_2(\tau - \Delta(\tau),\lambda) d\tau \right|$$

$$|\omega_2{}'(x,\lambda)| \leq \frac{s}{|\delta|} |\omega_1(h_1,\lambda)| + \frac{1}{|\delta|} |\omega_1{}'(h_1,\lambda)|$$

$$+ \int_{h_1}^{x} |q(\tau)| |\cos s(x-\tau)|\, |\omega_2(\tau - \Delta(\tau),\lambda)| d\tau$$

$$|\omega_2{}'(x,\lambda)| \leq \frac{s}{|\delta|} \frac{1}{q_1} \sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} + \frac{1}{|\delta|} \frac{s}{q_1} \sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$+ \frac{4}{|\delta|} \sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$|\omega_2{}'(x,\lambda)| \leq \frac{2s + 4q_1}{|\delta|.\, q_1} \sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

$$|\omega_2{}'(x,\lambda)| \leq \frac{4s}{|\delta|.\, q_1} \sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \tag{3.33}$$

elde edilir.

$B_{3\lambda} = max_{[h_2,\pi]} |\omega_3(x,\lambda)|$ olsun. Bu halde (3.13), (3.27) ve (3.33)' den, $s \geq 2q_1$ için

$$\omega_3(x,\lambda) = \frac{1}{\gamma} \omega_2(h_2,\lambda) \cos s(x-h_2) + \frac{\omega_2{}'(h_2,\lambda)}{s\gamma} \sin s(x-h_2)$$

$$-\frac{1}{s} \int_{h_2}^{x} q(\tau) \sin s(x-\tau)\, \omega_3(\tau - \Delta(\tau),\lambda) d\tau$$

$$|\omega_3(x,\lambda)| \leq \frac{1}{|\gamma|} |\omega_2(h_2,\lambda)| |\cos s(x-h_2)| + \frac{|\omega_2{}'(h_1,\lambda)|}{s|\gamma|} |\sin s(x-h_2)|$$

$$+\frac{1}{s}\int_{h_2}^{x}|q(\tau)||\sin s(x-\tau)|\,|\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$B_{3\lambda}\le\frac{1}{|\gamma|}|\omega_2(h_2,\lambda)|+\frac{1}{|\gamma|s}|\omega_2{}'(h_2,\lambda)|+\frac{1}{s}q_1B_{3\lambda}$$

$$B_{3\lambda}\le\frac{1}{|\gamma|}\frac{4}{|\delta|q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}+\frac{1}{|\gamma|}\frac{4}{|\delta|q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}+\frac{1}{s}q_1B_{3\lambda}$$

$$B_{3\lambda}\le\frac{8}{|\delta|.|\gamma|.q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}+\frac{1}{s}q_3B_{3\lambda}$$

$$B_{3\lambda}\le\frac{16}{|\delta|.|\gamma|.q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}\qquad(3.34)$$

elde edilir.

(3.13)'de x'e göre türev alınırsa,

$$|\omega_3{}'(x,\lambda)|=\left|\frac{-s}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda)\sin s(x-h_2)+\frac{\omega_2{}'(h_2,\lambda)}{\gamma}\cos s(x-h_2)\right.$$

$$\left.-\int_{h_2}^{x}q(\tau)cos\,s(x-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right|$$

$$|\omega_3{}'(x,\lambda)|\le\frac{s}{|\gamma|}|\omega_2(h_2,\lambda)|+\frac{1}{|\gamma|}|\omega_2{}'(h_2,\lambda)|$$

$$+\int_{h_2}^{x}|q(\tau)||cos\,s(x-\tau)|\,|\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$|\omega_3{}'(x,\lambda)|\le\frac{s}{|\gamma|}\frac{4}{|\delta|q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}+\frac{1}{|\gamma|}\frac{4s}{|\delta|q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}$$

$$+\frac{16}{|\gamma||\delta|}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}$$

$$|\omega_3{}'(x,\lambda)|\le\frac{8s+16q_1}{|\gamma|.|\delta|.q_1}\sqrt{4q_1{}^2sin^2\alpha+cos^2\alpha}$$

$$B_{3\lambda} \leq \frac{16s}{|\gamma|.|\delta|.q_1}\sqrt{4{q_1}^2 sin^2\alpha + cos^2\alpha} \tag{3.35}$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.2. (3.1) - (3.7) probleminin pozitif özdeğerlerinin kümesi sonsuzdur.

İspat. (3.13)'de x'e göre türev alınırsa

$$\omega_3{}'(x,\lambda) = \frac{-s}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda)\sin s(x-h_2) + \frac{1}{\gamma}\omega_2{}'(h_2,\lambda)\cos s(x-h_2)$$

$$-\int_{h_2}^{x} q(\tau)cos\ s(x-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

elde edelir.

$$\omega_3(\pi,\lambda) = \frac{1}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda)\cos s(\pi-h_2) + \frac{1}{s\gamma}\omega_2{}'(h_2,\lambda)\sin s(\pi-h_2)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \tag{3.36}$$

$$\omega_3{}'(\pi,\lambda) = \frac{-s}{\gamma}\omega_2(h_2,\lambda)\sin s(\pi-h_2) + \frac{1}{\gamma}\omega_2{}'(h_2,\lambda)\cos s(\pi-h_2)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \tag{3.37}$$

$$\omega_2(h_2,\lambda) = \frac{1}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\cos s(h_2-h_1) + \frac{1}{s\delta}\omega_1{}'(h_1,\lambda)\sin s(h_2-h_1)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\sin s(h_2-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \tag{3.38}$$

$$\omega_2{}'(h_2,\lambda) = \frac{-s}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\sin s(h_2-h_1) + \frac{1}{\delta}\omega_1{}'(h_1,\lambda)\cos s(h_2-h_1)$$

$$-\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\cos s(h_2-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.39)$$

$$\omega_1(h_1,\lambda)=\sin\alpha\cos sh_1-\frac{\cos\alpha}{s}\sin sh_1$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^{h_1} q(\tau)\sin s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.40)$$

$$\omega_1{}'(h_1,\lambda)=-s\sin\alpha\sin sh_1-\cos\alpha\cos sh_1$$

$$-\int_0^{h_1} q(\tau)\cos s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (3.41)$$

şeklindedir. (3.25), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) ve (3.41)'den

$$\sqrt{\lambda}\,\omega_3(\pi,\lambda)\cos\beta+\omega_3{}'(\pi,\lambda)\sin\beta=0$$

$$s\left\{\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\delta}\left(\sin\alpha\cos sh_1-\frac{\cos\alpha}{s}\sin sh_1-\frac{1}{s}\int_0^{h_1} q(\tau)\sin s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right)\right.\right.$$

$$\times\cos s(h_2-h_1)$$

$$+\frac{1}{s\delta}\left(-s\sin\alpha\sin sh_1-\cos\alpha\cos sh_1-\int_0^{h_1} q(\tau)\cos s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right)$$

$$\left.\times\sin s(h_2-h_1)-\frac{1}{s}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\sin s(h_2-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right]\cos s(\pi-h_2)$$

$$+\frac{1}{s\gamma}\left[\frac{-s}{\delta}\left(\sin\alpha\cos sh_1-\frac{\cos\alpha}{s}\sin sh_1-\frac{1}{s}\int_0^{h_1} q(\tau)\sin s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right)\right.$$

$$\times\sin s(h_2-h_1)$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(-s\sin\alpha\sin sh_1-\cos\alpha\cos sh_1-\int_0^{h_1} q(\tau)\cos s(h_1-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right)$$

$$\times \cos s(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} q(\tau) \cos s(h_2 - \tau)\, \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg] \sin s(\pi - h_2)$$

$$- \frac{1}{s} \int_{h_2}^{\pi} q(\tau) \sin s(\pi - \tau)\, \omega_3(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg\} \cos \beta$$

$$+ \Bigg\{ \frac{-s}{\gamma} \Bigg[\frac{1}{\delta} \Bigg(\sin \alpha \cos sh_1 - \frac{\cos \alpha}{s} \sin sh_1 - \frac{1}{s} \int_{0}^{h_1} q(\tau) \sin s(h_1 - \tau)\, \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg)$$

$$\times \cos s(h_2 - h_1)$$

$$+ \frac{1}{s\delta} \Bigg(-s \sin \alpha \sin sh_1 - \cos \alpha \cos sh_1 - \int_{0}^{h_1} q(\tau) \cos s(h_1 - \tau)\, \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg)$$

$$\times \sin s(h_2 - h_1) - \frac{1}{s} \int_{h_1}^{h_2} q(\tau) \sin s(h_2 - \tau)\, \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg] \sin s(\pi - h_2)$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \Bigg[\frac{-s}{\delta} \Bigg(\sin \alpha \cos sh_1 - \frac{\cos \alpha}{s} \sin sh_1 - \frac{1}{s} \int_{0}^{h_1} q(\tau) \sin s(h_1 - \tau)\, \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg)$$

$$\times \sin s(h_2 - h_1)$$

$$+ \frac{1}{\delta} \Bigg(-s \sin \alpha \sin sh_1 - \cos \alpha \cos sh_1 - \int_{0}^{h_1} q(\tau) \cos s(h_1 - \tau)\, \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg)$$

$$\times \cos s(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} q(\tau) \cos s(h_2 - \tau)\, \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg] \cos s(\pi - h_2)$$

$$- \int_{h_2}^{\pi} q(\tau) \cos s(\pi - \tau)\, \omega_3(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \Bigg\} \sin \beta = 0 \qquad (3.42)$$

elde edilir.

$$\left\{-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\sin s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\sin s(h_2-h_1)+\sin sh_1\cos s(h_2-h_1)\right]\right.$$

$$+\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\cos s(h_2-h_1)-\sin sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\cos s(h_2-h_1)-\sin sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\cos s(\pi-h_2)\left[\sin sh_1\cos s(h_2-h_1)+\cos sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\int_0^{h_1}q(\tau)[\sin s(h_1-\tau)\cos s(h_2-h_1)+\cos s(h_1-\tau)\sin s(h_2-h_1)]$$

$$\times\cos s(\pi-h_2)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)]d\tau$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\int_0^{h_1}q(\tau)[\cos s(h_1-\tau)\cos s(h_2-h_1)-\sin s(h_1-\tau)\sin s(h_2-h_1)]$$

$$\times\sin s(\pi-h_2)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)]d\tau$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2}q(\tau)[\sin s(h_2-\tau)\cos s(\pi-h_2)+\cos s(h_2-\tau)\,.\sin s(\pi-h_2)]$$

$$\left.\times\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau-\int_{h_2}^{\pi}q(\tau)\sin s(\pi-h_2)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}\cos\beta$$

$$+\left\{-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\sin s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\cos s(h_2-h_1)-\sin sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]\right.$$

$$-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\sin s(h_2-h_1)+\sin sh_1\cos s(h_2-h_1)\right]$$

$$+\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin s(\pi-h_2)\left[\sin sh_1\cos s(h_2-h_1)+\cos sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\cos s(\pi-h_2)\left[\cos sh_1\cos s(h_2-h_1)-\sin sh_1\sin s(h_2-h_1)\right]$$

$$+\frac{1}{\delta\gamma}\int_{0}^{h_1} q(\tau)[\sin s(h_1-\tau)\cos s(h_2-h_1)+\cos s(h_1-\tau)\sin s(h_2-h_1)]$$

$$\times \sin s(\pi-h_2)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\int_{0}^{h_1} q(\tau)[\cos s(h_1-\tau)\cos s(h_2-h_1)-\sin s(h_1-\tau)\sin s(h_2-h_1)]$$

$$\times \cos s(\pi-h_2)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)[\cos s(h_2-\tau)\cos s(\pi-h_2)-\sin s(h_2-\tau)\sin s(\pi-h_2)]$$

$$\left.\times\, \omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau-\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\cos s(\pi-h_2)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}\sin\beta=0$$

buradan,

$$\left\{-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\,[\cos sh_2\cos s(\pi-h_2)-\sin sh_2\, sin\ s(\pi-h_2)]\right.$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\,[\sin s(\pi-h_2)\cos sh_2+\cos s(\pi-h_2)\sin sh_2]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\int_{0}^{h_1} q(\tau)[\sin s(h_2-\tau)\cos s(\pi-h_2)+\cos s(h_2-\tau)\sin s(\pi-h_2)]$$

$$\times\, \omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$\left.-\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}\cos\beta$$

$$+\left\{-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\,[\sin s(\pi-h_2)\cos sh_2+\cos s(\pi-h_2)\sin sh_2]\right.$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\sin\alpha\,[\cos sh_2\cos s(\pi-h_2)-\sin sh_2\; sin\; s(\pi-h_2)]$$

$$-\frac{1}{\delta\gamma}\int_0^{h_1} q(\tau)[\cos s(h_2-\tau)\cos s(\pi-h_2)-\sin s(h_2-\tau)\; sin\; s(\pi-h_2)]$$

$$\times\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau$$

$$\left.\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}\sin\beta=0$$

buradan,

$$\left\{\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos s\pi-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin s\pi-\frac{1}{\delta\gamma}\int_0^{h_1} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau\right.$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau$$

$$\left.-\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\,\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}\cos\beta$$

$$+\left\{-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\; sins\pi-\frac{1}{\delta\gamma}cos\alpha\; coss\pi-\frac{1}{\delta\gamma}\int_0^{h_1} q(\tau)coss(\pi-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau\right.$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)coss(\pi-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau$$

$$\left.-\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)coss(\pi-\tau)\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}sin\beta=0 \qquad (3.43)$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos s\pi\cos\beta-\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\sin s\pi\sin\beta+O(1)=0$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos\ (s\pi+\beta)+O(1)=0$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

1.Durum: $\sin\alpha\neq 0$

2.Durum: $\sin\alpha=0$

Biz sadece 1. Durumu inceleyeceğiz.

λ yeteri kadar büyük olsun. (3.26), (3.27) ve (3.28)'den (3.43) denklemini

$$s\cos\ (s\pi+\beta)+O(1)=0 \tag{3.44}$$

şeklinde yazarız. Açıkçası yeteri kadar büyük s için (3.44) denkleminin köklerinin kümesi sonsuzdur. Diğer durumda benzer şekilde düşünülebilir. Böylece ispat biter.

3.3. Özfonksiyonların Asimptotik Temsili

Şimdi özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik özelliklerini araştırmaya başlayalım. Sadece 1. Durumu düşünelim. Aşağıda s'nin yeteri kadar büyük olduğunu kabul edeceğiz.

(3.11) ve (3.26)'dan $[0,h_1]$ kümesi üzerinde

$$\omega_1(x,\lambda)=O(1) \tag{3.45}$$

bulunur. (3.12) ve (3.27)'den $[h_1,h_2]$ kümesi üzerinde

$$\omega_2(x,\lambda)=O(1) \tag{3.46}$$

bulunur. (3.13) ve (3.28)'den $[h_2,\pi]$ kümesi üzerinde

$$\omega_3(x,\lambda)=O(1) \tag{3.47}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$0\le x\le h_1,\ |\lambda|<\infty \quad \text{için} \quad {\omega_{1s}}'(x,\lambda),$$
$$h_1\le x\le h_2,\ |\lambda|<\infty \quad \text{için} \quad {\omega_{2s}}'(x,\lambda),$$
$$h_2\le x\le \pi,\ |\lambda|<\infty \quad \text{için} \quad {\omega_{3s}}'(x,\lambda),$$

türevleri var ve süreklidir. (Norkin, 1972)

Lemma 3.3. 1. Durumda

$$x \in [0, h_1] \text{ ise } \omega_{1s}'(x,\lambda) = O(1) \tag{3.48}$$

$$x \in [h_1, h_2] \text{ ise } \omega_{2s}'(x,\lambda) = O(1) \tag{3.49}$$

$$x \in [h_2, \pi] \text{ ise } \omega_{3s}'(x,\lambda) = O(1) \tag{3.50}$$

bulunur.

İspat. s'ye göre (3.11)'ün türevi alınır ve (3.45) kullanılırsa

$$\omega_{1s}'(x,\lambda) = -x\sin\alpha\sin sx + \frac{1}{s^2}\cos\alpha\sin sx - \frac{x}{s}\cos\alpha\cos sx$$

$$+\frac{1}{s^2}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_{1s}'(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)(x-\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau$$

$$\omega_{1s}'(x,\lambda) = -\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_{1s}'(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau + K(x,\lambda) \tag{3.51}$$

$$(|K(x,\lambda)| \le K_0)$$

elde edilir.

$C_{1\lambda} = max_{[0,h_1]}|\omega_{1s}'(x,\lambda)|$ olsun. $C_{1\lambda}$ nın varlığı $x \in [0,h_1]$ için türevin sürekliliği sonucunu çıkarır. (3.51)'den

$$C_{1\lambda} \le \frac{1}{s}q_1C_{1\lambda} + K_0$$

bulunur. Dolayısıyla $s \ge 2q_1$ için $C_{1\lambda} \le 2K_0$ ve (3.51) asimptotik formülünün geçerli olduğu ortaya çıkar.

$$|K(x,\lambda)| \le \left|\left(-x\sin\alpha + \frac{1}{s^2}\cos\alpha\right)\sin sx - \frac{x}{s}\cos\alpha\cos sx\right|$$

$$+\frac{1}{s^2}\int_0^x |q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x |q(\tau)(x-\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)|d\tau$$

$$|K(x,\lambda)| \le \sqrt{\left(-x\sin\alpha+\frac{1}{s^2}\cos\alpha\right)^2+\left(-\frac{x}{s}\cos\alpha\right)^2}+\frac{1}{s^2}q_1B_{1\lambda}+\frac{1}{s}q_1|x-\tau|B_{1\lambda}$$

$$|K(x,\lambda)| \le K_0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.49) ve (3.50) formülleri gösterilir.

n doğal sayı olsun. Eğer $\left|n-\frac{\beta}{\pi}-\sqrt{\lambda}\right|<\frac{1}{4}$ ise λ sayısının $\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)^2$sayısının civarında bulunacağını göstereceğiz.

Teorem 3.3. n doğal sayı olsun. Yeteri kadar büyük her n için 1. Durumda $\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)^2$ civarında (3.1) - (3.7) probleminin tam olarak bir özdeğeri vardır.

İspat. (3.44) denkleminde $O(1)$ ile gösterilen ifadeyi düşünelim. Eğer (3.45), (3.46) ve (3.47) formüllerini değerlendirmeye katarsak s'ye göre türev ile yeteri kadar büyük s için bu ifadenin türevinin sınırlı olduğu gösterilebilir. (3.44) denkleminin kökleri yeteri kadar büyük s için tam sayıya yakın olduğu açıktır. Biz yeteri kadar büyük n için (3.44) denkleminin sadece bir kökü her n'nin yakınında olduğunu göstereceğiz.

$$F(s)=s\cos(s\pi+\beta)+O(1)$$

fonksiyonunu düşünelim. s'ye göre türev alınırsa

$$F'(s)=\cos(s\pi+\beta)-s\pi\sin(s\pi+\beta)+O(1)$$

dir. Burada $F'(s)$ türevi yeteri kadar büyük n için, n'ye yakın s için sıfır olamaz. Böylece Rolle teoremiyle ispat biter.

(3.44) denklemi (3.1) - (3.7) probleminin özdeğerleri için asimptotik formülleri bize veremez. Şimdi (3.44) denklemini düşünelim.

$$s\cos\ (s\pi+\beta)+O(1)=0$$

Şimdi $s=\mu-\frac{\beta}{\pi}$ dönüşümü yapılırsa

$$\left(\mu-\frac{\beta}{\pi}\right)cos\left[\pi\left(\mu-\frac{\beta}{\pi}\right)+\beta\right]+O(1)=0$$

$$\mu \cos \mu\pi + O(1) = 0 \tag{3.52}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz.

n yeteri kadar büyük olsun. Aşağıda n^2 civarında (3.1) - (3.7) probleminin özdeğerlerini $\lambda_n = {\mu_n}^2$ ile ifade edeceğiz. $\mu_n = n + \delta_n$ alalım. O halde (3.52)'den $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ bulunur. Buradan $\mu_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$ dir. $\mu_n = s_n + \frac{\beta}{\pi}$ yerine yazılırsa

$$s_n = n - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.53) formülü (3.1) - (3.7) probleminin özfonksiyonları için asimptotik ifadeleri elde etmemizi mümkün kılar.

(3.11), (3.29) ve (3.45)'den

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.54}$$

$$\omega_1'(x,\lambda) = -s \sin\alpha \sin sx + O(1) \tag{3.55}$$

elde edilir.

(3.12), (3.46), (3.54) ve (3.55)'den

$$\omega_2(x,\lambda) = \frac{1}{\delta}\sin\alpha \cos sh_1 \cos s(x-h_1) - \frac{1}{\delta}\sin\alpha \sin sh_1 \sin s(x-h_1) + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{\delta}\sin\alpha \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.56}$$

elde edilir.

(3.32), (3.33), (3.54) ve (3.55)'den

$$\omega_2'(x,\lambda) = -\frac{s}{\delta}\sin\alpha \cos sh_1 \sin s(x-h_1) - \frac{s}{\delta}\sin\alpha \sin sh_1 \cos s(x-h_1) + O(1)$$

$$= -\frac{s}{\delta}\sin\alpha \sin sx + O(1) \tag{3.57}$$

elde edilir.

(3.13), (3.47), (3.56) ve (3.57)'den

$$\omega_3(x,\lambda) = \frac{1}{\gamma\delta}\sin\alpha \cos sh_2 \cos s(x-h_2) - \frac{1}{\gamma\delta}\sin\alpha \sin sh_2 \sin s(x-h_2) + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma\delta}\sin\alpha \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.58}$$

elde edilir.

(3.35), (3.36), (3.56) ve (3.57)'den

$$\omega_3'(x,\lambda) = -\frac{s}{\gamma\delta}\sin\alpha\cos sh_2\sin s(x-h_2) - \frac{s}{\gamma\delta}\sin\alpha\sin sh_2\cos s(x-h_2) + O(1)$$

$$= \frac{-s}{\gamma\delta}\sin\alpha\sin sx + O(1) \tag{3.59}$$

elde edilir.

(3.53) formülünü (3.54), (3.56) ve (3.58) de yerine yazılırsa

$$u_{1n}(x) = \omega_1(x,\lambda_n) = \sin\alpha\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_{2n}(x) = \omega_2(x,\lambda_n) = \frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_{3n}(x) = \omega_3(x,\lambda_n) = \frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece $u_n(x)$ özfonksiyonlarının asimptotik temsili

$$u_n(x) = \begin{cases} \sin\alpha\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in[0,h_1) \\ \frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2) \\ \frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_2,\pi] \end{cases}$$

şeklinde verilebilir.

3.4. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller

Bazı ilave şartlar altında daha kesin asimptotik formüller elde edebiliriz. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

a) $q'(x)$ ve $\Delta''(x)$ türevleri vardır ve $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralığında sınırlıdır ve $q'(h_1\pm 0) = \lim\limits_{x\to h_1\pm 0} q'(x)$, $q'(h_2\pm 0) = \lim\limits_{x\to h_2\pm 0} q'(x)$ ve $\Delta''(h_1\pm 0) = \lim\limits_{x\to h_1\pm 0}\Delta''(x)$, $\Delta''(h_2\pm 0) = \lim\limits_{x\to h_2\pm 0}\Delta''(x)$ sırasıyla sonlu limite sahiptir.

b) $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralığında $\Delta'(x)\leq 1$, $\Delta(0)=0$ ve $\lim\limits_{x\to h_1+0}\Delta(x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to h_2+0}\Delta(x)=0$.

"b" durumunu kullanarak

$$x\in[0,h_1),\ x-\Delta(x)\geq 0 \tag{3.60}$$

$$x\in(h_1,h_2),\ h_1\leq x-\Delta(x)\leq h_2 \tag{3.61}$$

$$x\in(h_2,\pi],\ x-\Delta(x)\geq h_2 \tag{3.62}$$

oldukları kolayca gösterilir.

(3.54), (3.56), (3.58), (3.60), (3.61) ve (3.62) ile $[0,h_1),(h_1,h_2)$ ve $(h_2,\pi]$ aralıkları üzerinde sırasıyla,

$$\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)=\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.63}$$

$$\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)=\frac{1}{\delta}\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.64}$$

$$\omega_3(\tau-\Delta(\tau),\lambda)=\frac{1}{\gamma\delta}\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.65}$$

yeniden ifade edilebilir.

Bu ifadeler (3.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{s\sin\alpha\cos s\pi}{\delta\gamma}-\frac{\cos\alpha\sin s\pi}{\delta\gamma}\right)\cos\beta+\left(-\frac{s\sin\alpha\sin s\pi}{\delta\gamma}-\frac{\cos\alpha\cos s\pi}{\delta\gamma}\right)\sin\beta$$

$$-\frac{\cos\beta}{\delta\gamma}\int_0^{h_1}q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\left[\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$-\frac{\cos\beta}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2}q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\left[\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$-\cos\beta\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\left[\frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$-\frac{\sin\beta}{\delta\gamma}\int_{0}^{h_1} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\left[\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$-\frac{\sin\beta}{\gamma}\int_{h_1}^{h_2} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\left[\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$-\sin\beta\int_{h_2}^{\pi} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\left[\frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\sin\alpha\cos s\big(\tau-\Delta(\tau)\big)+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau=0$$

$$\frac{s\sin\alpha}{\delta\gamma}(\cos s\pi\cos\beta-\sin s\pi\sin\beta)-\frac{\cos\alpha}{\delta\gamma}(\sin s\pi\cos\beta+\cos s\pi\sin\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\gamma\delta}\int_{0}^{\pi} q(\tau)\sin s(\pi-\tau)\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\gamma\delta}\int_{0}^{\pi} q(\tau)\cos s(\pi-\tau)\cos s\big(\tau-\Delta(\tau)\big)\,d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\gamma\delta}\int_{0}^{\pi} q(\tau)\,[\sin s\pi\cos s\tau-\cos s\pi\sin s\tau]\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\gamma\delta}\int_{0}^{\pi} q(\tau)\,[\cos s\pi\cos s\tau+\sin s\pi\sin s\tau]\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\gamma\delta}\sin s\pi\int_{0}^{\pi} q(\tau)\cos s\tau\cos s\big(\tau-\Delta(\tau)\big)\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\gamma\delta}\cos s\pi\int_0^{\pi} q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\gamma\delta}\cos s\pi\int_0^{\pi} q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\gamma\delta}\sin s\pi\int_0^{\pi} q(\tau)\sin s\tau\cos s\big(\tau-\Delta(\tau)\big)\,d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\int_0^{\pi} q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\int_0^{\pi} q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\int_0^{\pi} q(\tau)\frac{1}{2}[\cos s\Delta(\tau)+\cos s(2\tau-\Delta(\tau))]d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\int_0^{\pi} q(\tau)\frac{1}{2}[\sin s\Delta(\tau)+\sin s(2\tau-\Delta(\tau))]d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)=0 \qquad (3.66)$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{cases} A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x} q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau \\ B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x} q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau \end{cases} \qquad (3.67)$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonlar $0\le x\le\pi$, $0<s<\infty$ için sınırlı olduğu açıktır.

(a) ve (b) şartları altında

$$\begin{cases} \int_0^x q(\tau)\cos s\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)\,d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right) \\ \int_0^x q(\tau)\sin s\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)\,d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right) \end{cases} \tag{3.68}$$

olduğu açıktır. (Norkin, 1972).

(3.66), (3.67) ve (3.68) kullanılarak

$$\frac{s}{\delta\gamma}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\frac{1}{\delta\gamma}\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau\right]$$

$$+\frac{\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)}{\gamma\delta}\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau\right]$$

$$+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\mathrm{s}\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)-\cos\alpha\sin(s\pi+\beta)-\sin\alpha\sin(s\pi+\beta)\,B\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)$$

$$+\sin\alpha\cos(s\pi+\beta)\,A\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\mathrm{s}\cot(s\pi+\beta)-\cot\alpha-B\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)+\cot(s\pi+\beta)\,A\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$\mathrm{s}\cot(s\pi+\beta)=\cot\alpha+B\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\cot(s\pi+\beta)=\frac{1}{s}\big[\cot\alpha+B\big(\pi,s,\Delta(\tau)\big)\big]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

elde edilir. Şimdi $s_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\delta_n$ yazılırsa

$$\cot\left[\pi\left(n-\frac{\beta}{\pi}+\delta_n\right)+\beta\right]=\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cot(n\pi+\pi\delta_n)=\frac{\pi}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cot\pi\delta_n=\frac{\pi}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\pi\delta_n=\frac{\pi}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\delta_n=\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$s_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.69}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem ispat edilmiş oldu.

Teorem 3.4. Eğer (a) ve (b) şartları sağlanırsa (3.1) - (3.7) probleminin $\lambda_n=s_n^2$ pozitif özdeğerleri $n\to\infty$ için (3.69) asimptotik gösterimine sahiptir.

Şimdi özfonksiyonlar için daha kesin bir asimptotik formül elde edilebilir. (3.11), (3.63), (3.67) ve (3.68)'den

$$\omega_1(x,\lambda)=\sin\alpha\cos sx-\frac{\cos\alpha}{s}\sin sx-\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$=\sin\alpha\cos sx-\frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\left[\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\int_0^x q(\tau)\,[\sin sx\cos s\tau - \cos sx\,\sin s\tau]\cos s(\tau - \Delta(\tau))\,d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\int_0^x q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau - \Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\int_0^x q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau - \Delta(\tau))\,d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\int_0^x q(\tau)\frac{1}{2}[\cos s\Delta(\tau) + \cos s(2\tau - \Delta(\tau))]d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\int_0^x q(\tau)\frac{1}{2}[\sin s\Delta(\tau) + \sin s(2\tau - \Delta(\tau))]d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s(2\tau - \Delta(\tau))\,d\tau\right]$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s(2\tau - \Delta(\tau))\,d\tau\right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \frac{\cos\alpha}{s}\sin sx - \frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\,B\big(x, s, \Delta(\tau)\big)$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\,A\big(x, s, \Delta(\tau)\big) + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

bulunur. Böylece,

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha\cos sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\left[\cot\alpha+B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$+O\left(\tfrac{1}{s^2}\right) \tag{3.70}$$

elde edilir.

Şimdi s yerine s_n yazar ve (3.69) kullanılırsa

$$u_{1n}(x)=\omega_1(x,\lambda_n)=$$

$$=\sin\alpha\cos\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}A\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\times\sin\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$\left.-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\Bigg\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\sin\alpha\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\sin\alpha\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)$$

$$-\frac{\sin\alpha}{n-\frac{\beta}{\pi}}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{n-\frac{\beta}{\pi}}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Böylece,

$$u_{1n}(x)=\omega_1(x,\lambda_n)=\sin\alpha\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1+\frac{\pi}{n\pi-\beta}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\sin\alpha\frac{1}{n\pi-\beta}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left\{\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]x\right.$$

$$\left.+\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\pi\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.71}$$

bulunur.

Şimdi (3.29), (3.63), (3.67) ve (3.68)'den

$$\omega_1{}'(x,\lambda)=-s\sin\alpha\sin sx-\cos\alpha\cos sx$$

$$-\int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$\frac{\omega_1{}'(x,\lambda)}{s}=-s\sin\alpha\sin sx-\frac{\cos\alpha}{s}\cos sx$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\left[\sin\alpha\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$=-s\sin\alpha\sin sx-\frac{\cos\alpha}{s}\cos sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\int_0^x q(\tau)\left[\cos sx\cos s\tau+\sin sx\sin s\tau\right]\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=-s\sin\alpha\sin sx-\frac{\cos\alpha}{s}\cos sx-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\int_0^x q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\int_0^x q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=-\sin\alpha\sin sx-\frac{\cos\alpha}{s}\cos sx$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=-\sin\alpha\sin sx-\frac{\cos\alpha}{s}\cos sx-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\,B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sx\,A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

olup

$$\frac{\omega_1{}'(x,\lambda)}{s}=-\sin\alpha\sin sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sx\left[\cot\alpha+B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\tag{3.72}$$

elde edilir.

(3.12), (3.64), (3.67), (3.68), (3.70) ve (3.72)'den

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{1}{\delta}\left\{\sin\alpha\cos sh_1\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sh_1\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}\cos s(x-h_1)$$

$$+\frac{1}{\delta}\left\{-\sin\alpha\sin sh_1\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sh_1\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}\sin s(x-h_1)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_1}^x q(\tau)[\sin sx\cos s\tau-\cos sx\sin s\tau]\left[\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}[\cos sh_1\cos s(x-h_1)-\sin sh_1\sin s(x-h_1)]\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}[\sin sh_1\cos s(x-h_1)+\cos sh_1\sin s(x-h_1)]\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\int_{h_1}^x q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\int_{h_1}^x q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\,\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\,\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\,\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\,\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos sx+\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\left[A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cot\alpha\sin sx-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\left[B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

olup

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\left[\cot\alpha+B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\qquad(3.73)$$

elde edilir.

Şimdi s yerine s_n yazar ve (3.69) kullanılırsa

$u_{2n}(x)=\omega_2(x,\lambda_n)=$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}A\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\times \sin\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$\left.-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$\left.+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olup

$$u_{2n}(x)=\omega_2(x,\lambda_n)=\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1+\frac{\pi}{n\pi-\beta}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta}\frac{1}{n\pi-\beta}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left\{\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]x\right.$$

$$\left.+\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\pi\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad(3.74)$$

elde edilir.

Şimdi (3.32), (3.64) ve (3.67)'den

$$\omega_2{}'(x,\lambda)=\frac{-s}{\delta}\omega_1(h_1,\lambda)\sin s(x-h_1)+\frac{\omega_1{}'(h_1,\lambda)}{\delta}\cos s(x-h_1)$$

$$-\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau$$

$$\frac{\omega_2{}'(x,\lambda)}{s}=-\frac{1}{\delta}\left\{\sin\alpha\cos sh_1\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{s}\sin sh_1\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}\sin s(x-h_1)$$

$$+\frac{1}{\delta}\left\{-\sin\alpha\sin sh_1\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s}\cos sh_1\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\Bigg\}\cos s(x-h_1)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_1}^{x}q(\tau)[\cos sx\cos s\tau+\sin sx\sin s\tau]\left[\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\delta}[\cos sh_1\sin s(x-h_1)+\sin sh_1\cos s(x-h_1)]\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}[\cos sh_1\cos s(x-h_1)-\sin sh_1\sin s(x-h_1)]\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\left[\cot\alpha+B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin sx-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sx\left[A\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cot\alpha\cos sx-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\left[B\big(h_1,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_1}^{x}q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

olup

$$\frac{\omega_2{}'(x,\lambda)}{s}=-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sx\left[\cot\alpha+B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$
$$+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\qquad(3.75)$$

elde edilir.

(3.57), (3.65), (3.67), (3.68), (3.73) ve (3.75)'den

$$\omega_3(x,\lambda) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\sin\alpha}{\delta}\cos sh_2\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\sin sh_2\left[\cot\alpha+B\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}\cos s(x-h_2)$$

$$+\frac{1}{\delta}\left\{-\frac{\sin\alpha}{\delta}\sin sh_2\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{s\delta}\cos sh_2\left[\cot\alpha+B\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}\sin s(x-h_2)$$

$$-\frac{1}{s}\int_{h_2}^{x} q(\tau)[\sin sx\cos s\tau-\cos sx\sin s\tau]\left[\frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\cos s(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}[\cos sh_2\cos s(x-h_2)-\sin sh_2\sin s(x-h_2)]\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\gamma\delta}[\sin sh_2\cos s(x-h_2)+\cos sh_2\sin s(x-h_2)]\left[\cot\alpha+B\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\gamma\delta}\sin sx\int_{h_2}^{x} q(\tau)\cos s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s\gamma\delta}\cos sx\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s\tau\cos s(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\gamma\delta}\cos sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s\gamma\delta}\sin sx\left[\cot\alpha+B\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\sin sx\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau-\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\sin sx\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\cos s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\cos sx\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\,d\tau+\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\cos sx\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s(2\tau-\Delta(\tau))\,d\tau$$

$$+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos sx+\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\cos sx\left[A\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x} q(\tau)\sin s\Delta(\tau)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\cot\alpha\sin sx-\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\sin sx\left[B\big(h_2,s,\Delta(\tau)\big)+\frac{1}{2}\int_{h_2}^{x}q(\tau)\cos s\Delta(\tau)\,d\tau\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

olup

$$\omega_3(x,\lambda)=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos sx\left[1+\frac{1}{s}A\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]-\frac{\sin\alpha}{s\delta\gamma}\sin sx\left[\cot\alpha+B\big(x,s,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$+O\left(\frac{1}{s^2}\right) \tag{3.76}$$

elde edilir.

Şimdi s yerine s_n yazar ve (3.69) kullanılırsa

$$u_{3n}(x)=\omega_3(x,\lambda_n)=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}A\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\times\sin\left\{n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}x$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\big(x,s_n,\Delta(\tau)\big)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$\left.-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\cos\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right.$$

$$\left.+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\sin\left[\frac{1}{n\pi-\beta}\left(\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x\right\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x-\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x+\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1+\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{x}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}A\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[\cot\alpha+B\left(x,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n-\frac{\beta}{\pi}}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\frac{1}{n\pi-\beta}\left[\cot\alpha+B\left(\pi,n-\frac{\beta}{\pi},\Delta(\tau)\right)\right]$$

$$\times\left[\cot\alpha + B\left(x, n-\frac{\beta}{\pi}, \Delta(\tau)\right)\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_{3n}(x) = \omega_3(x, \lambda_n) = \frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left[1 + \frac{\pi}{n\pi-\beta}A\left(x, n-\frac{\beta}{\pi}, \Delta(\tau)\right)\right]$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\frac{1}{n\pi-\beta}\sin\left(n-\frac{\beta}{\pi}\right)x\left\{\left[\cot\alpha + B\left(\pi, n-\frac{\beta}{\pi}, \Delta(\tau)\right)\right]x\right.$$

$$\left.+\left[\cot\alpha + B\left(x, n-\frac{\beta}{\pi}, \Delta(\tau)\right)\right]\pi\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.77)$$

elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Teorem 4.1. Eğer (a) ve (b) şartları sağlanırsa (3.1) - (3.7) probleminin $u_n(x)$ özfonksiyonları $n \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir.

$$u_n(x) = \begin{cases} u_{1n}(x) & , \quad x \in [0, h_1) \\ u_{2n}(x) & , \quad x \in (h_1, h_2) \\ u_{3n}(x) & , \quad x \in (h_2, \pi] \end{cases}$$

Burada $u_{1n}(x)$,$u_{2n}(x)$ ve $u_{3n}(x)$ sırasıyla (3.71), (3.74) ve (3.77) formülleri ile tanımlıdır.

5. ÖNERİLER

Bu çalışma ile iki süreksiz noktaya sahip sınır koşulu öz parametreye bağlı geç kalan argümentli sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri bulunmuştur. Dolayısıyla bundan sonra n tane süreksiz noktaya sahip öz parametreye bağlı olmayan geç kalan argümentli sınır-değer probleminin özdeğer ve öz fonksiyonları bulunup genelleme yapılabilir. Daha sonra n tane süreksiz noktaya sahip öz parametreye bağlı geç kalan argümentli sınır-değer probleminin özdeğer ve öz fonksiyonları için genelleme yapılabilir.

Ayrıca sınır koşulunda genel özparametre (spektral) fonksiyonuna bağlı süreksiz noktaya sahip olan veya sürekli olan geç kalan argümentli sınır-değer problemleri için genel asimptotik formüller elde edilebilir. Dahası süreksiz noktaların sayısı n tane kabul edilip spektral fonksiyonuna bağlı geç kalan argümentli sınır değer probleminin genel asimptotik formülleri elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

Akdoğan, Z., Demirci, M. and Muhtarov, O.S., 2005. Discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary and transmissions conditions. Acta Appl Math.. 86, 329-344.

Akgün, F.A., Bayramov, A., Bayramoğlu, M., 2013. Discontinuous Boundary Value Problems with Retarded Argument and Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions. Mediterranean Journal of Mathematics, 10, 277-288, 10.1007/s00009-012-0175-7.

Bayramoglu, M., Ozden, K.K. and Baykal, O., 2002. On the spectral properties of the regular Sturm-Liouville problem with the lag argument for which its boundary conditions depends on the spectral parameter, Turkish J. Math. V. 26, N:4, 421-431.

Bayramov, A., Ozturk, S.U. and Kizilbudak C.S., 2007. Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument, Appl. Math. Comput. 191, 592-600.

Bellman, R. and Cook K.L., 1963. Differential-Difference Equations. New York Academic Press, London, USA.

Binding, P.A., Browne, P.J. and Watson, B. A., 2002. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II, J. Comput. Appl. Math. 148, 147-169.

Demidenko, G.V. and Matveeva, I.I., 2005. Asymptotic properties of solutions of delay differential equations, Vestnik NGU.Ser.: Matematika, Mekhanika, Informatika 5. iss. 3, 20-28.

Demidenko, G.V. and Likhoshvai, V.A., 2005. On Differential Equations with Retarded Argument, Siberian Math. J. vol.6, n.3. 417-430.

Fulton, C.T., 1977. Two-Point boundary value problems with eigenparameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A77, 293-308.

Jablonski, M. and Twardowska, K., 1987. On boundary value problems for differential equations with a retarded argument, Universitatis Iagellonicae. Acta Math. iss. 26, 29-36.

Kamenskii, G.A., 1954. On the asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations of the second order with retarded argument, Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ.1954. iss. 165, 195204.

Kerimov, N.B., Mamedov, K., 1999. On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions. Sib Math. Zh., 2: 325-335.

Nersesjan, A.B., 1961. Expansion in eigenfunctions of some non-selfadjoint boundary problems, Siberian Math. J. 2, 428-453.

Norkin, S.B., 1958. On a boundary problem of Sturm-Liouville type for a second order differential equation with a retarded argument, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. No: 6. 203-214.

Norkin, S.B., 1972. Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument, vol. 31 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, USA.

Shkalikov, A.A., 1983. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Trudy Sem. Petrovsk. 9, 190-229.

Şen, E., 2010. Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunan Geç Kalan Argümentli Sürekli Olmayan Sınır-Değer Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Asimptotik İfadeleri. Yüksek Lisans Tezi. Namık Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tekirdağ, Türkiye, 27 sayfa.

Şen, E., Seo, J.J. and Araci, S., 2013. Asymptotic Behaviour of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Sturm-Liouville Problem with Retarded Argument, Journal Applied Mathematics, Volume 2013, Article ID 306917.

Tikhonov A.N. and Samarski A.A., 1972. Uraveniya mathematicheskoi fiziki, Moscow, USSR.

Titeux, I. and Yakubov, Y., 1997. Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences. 7(7), 10351050.

Voitevich, N.N., Katsenelbaum, B.Z. and Sivov, A.N., 1997. Generalized Method of Eigen-Vibration in the Theory of Diffraction, Nauka. Moscow. (Russian).

Yakubov, S. and Yakubov, Y., 2000. Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman and Hall/CRC. Boca Raton,FL

ÖZGEÇMİŞ

Halil İbrahim KURT, 5 Ağustos 1987 tarihinde Trabzon'da doğmuştur. 2004 yılında Affan Kitapçıoğlu Lisesini bitirdikten sonra aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamış, 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi'ne yatay geçiş yapmış ve lisans eğitimini 2008 yılında tamamlamıştır. 2008 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamış ve bitirmiştir. 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda ikinci yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2011 yılının Şubat ayından beri Artvin Çoruh Üniversitesi Artvin Meslek Yüksekokulu'nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.