T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜRDEŞ OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN DEVİRLİ (PERİYODİK) SINIR KOŞULLU KARIŞIK PROBLEMİN FOURIER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

REYHAN VAHAPOĞLU

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. HÜSEYİN HALİLOV

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2014

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜRDEŞ OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN DEVİRLİ (PERİYODİK) SINIR KOŞULLU KARIŞIK PROBLEMİN FOURIER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV danışmanlığında, Reyhan VAHAPOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 25/12/2014 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	:	Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV	
Üye	:	Doç. Dr. Azad BAYRAMOV	
Üye	:	Doç. Dr. Recep KESER	

Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Üniversitede kendisinden aldığım ilk dersten itibaren kendisine hayran olduğum ve hem ders anlatımı hem de kişiliği olarak örnek aldığım, verdiği kaliteli matematik öğretiminin yanında öğrencilerine matematiği sevdiren, onurlu bir insan olmayı öğütleyen, öğrencilerini hem eğiten hem de öğreten sayın Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV'a yüksek lisans eğitimim boyunca hiçbir açıdan desteğini esirgemediği için çok teşekkür ederim.

Ayrıca hiçbir sorumu cevapsız bırakmayıp, yardımlarını benden hiçbir zaman esirgemeyen yüksek lisans arkadaşım, aynı zamanda ikinci hocam olan Tamer KÖZLEME'ye, bölüm hocalarıma ve maddi, manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme teşekkürlerimi sunarım.

Reyhan VAHAPOĞLU

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan Türdeş Olmayan Hiperbolik Denklem için Devirli (Periyodik) Sınır Koşullu Karışık Problemin Fourier Yöntemi ile İncelenmesi başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 25/12/2014

Reyhan VAHAPOĞLU

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

Türdeş Olmayan Hiperbolik Denklem İçin Devirli (Periyodik) Sınır Koşullu Karışık Problemin Fourier Yöntemi İle İncelenmesi

Reyhan VAHAPOĞLU

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV

Bu tez çalışması iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez yazımında ihtiyacımız olan bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde bir boyutlu hiperbolik denklem için $D = \{0 \le t < T < \infty, 0 \le x \le \pi\}$ bölgesinde,

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(t,x) \qquad (0 < t < \infty, 0 < x < \infty) \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} U(0,x) &= \varphi(x) \\ U_t(0,x) &= \psi(x) \end{aligned} \qquad (0 \le x \le \pi) \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} U(t,0) &= U(t,\pi) \\ U_x(t,0) &= U_x(t,\pi) \end{aligned} \qquad (t \ge 0) \tag{0.3}$$

devirli sınır koşullu karışık problemin çözümünün varlığı ve tekliği Fourier, başka bir deyişle değişkenlere ayırma yöntemi ile incelenmiştir. Bunun için problemin çözümü değişken katsayılı Fourier serisi şeklinde aranmış ve sözü edilen değişken katsayılar başlangıç verilerin yardımı ile belirlenmiştir. Burada, $U(t,x)$ aranan fonksiyon, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ ise belli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlar, yani başlangıç verilerdir.

2014, 49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklem, Devirli Sınır Koşulları, Başlangıç Koşulları, Karışık Problem, Fourier Yöntemi, Kaynak Fonksiyon

ABSTRACT

Analysis of the Mixed Problem with Periodical Boundary Conditions for Nonhomogeneous Hyperbolic Equation with Fourier Method

Reyhan VAHAPOĞLU

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV

The thesis consists of two parts. The first part includes the information used in the thesis. In the second part, the uniqueness and the existence of the solution of the mixed problem for one-dimensional hyperbolic equation

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(t,x) \qquad (0 < t < \infty, 0 < x < \infty) \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} U(0,x) &= \varphi(x) \\ U_t(0,x) &= \psi(x) \end{aligned} \qquad (0 \le x \le \pi) \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} U(t,0) &= U(t,\pi) \\ U_x(t,0) &= U_x(t,\pi) \end{aligned} \qquad (t \ge 0) \tag{0.3}$$

in $D = \{0 \le t < T < \infty, 0 \le x \le \pi\}$ has been examined with Fourier, in other words separation of variables method. Hence, the solution of the problem has been searched as a Fourier series with variable coefficients and the mentioned variable coefficients have been determined by the help of the initial data. Here $U(t,x)$ is an unknown function, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ are known functions with specific properties, i.e. the initial data.

2014, 49 pages

Keywords: Hyperbolic Equation, Periodical Boundary Conditions, Initial conditions, Mixed Problem, Fourier Method, Source Function

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

(f,φ)	: İki fonksiyonun skaler çarpımı
$\|f(x)\|$	: f fonksiyonun normu
Δ	: Denklemin diskiriminantı
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^1[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında birinci türevi sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^2[0,\pi]$	: $[0,\pi]$ aralığında ikinci türevi sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^3[0,\pi]$	: $[0,\pi]$ aralığında üçüncü türevi sürekli fonksiyonlar kümesi
$U_0^T(t)$	: Türdeş kısmın çözümü
$U_{ck}^T(t)$	: Türdeş kısmın çözümü
$U_{sk}^T(t)$	: Türdeş kısmın çözümü
$G_0(t,\xi-x)$	: Kaynak fonksiyon
$G(t,\xi-x)$	: Kaynak fonksiyon
$G(t-\tau,\xi-x)$	: Kaynak fonksiyon
○	: Çözüm burada başlıyor
$\varnothing$	: Çözüm burada bitiyor

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Klasik ve çağdaş teknolojinin çok sayıda problemi, özellikle salınım hareketleri içeren süreçler, matematiksel olarak salınım denklemi diye adlandırılan ikinci mertebeden gerek adi gerekse de kısmi türevli (hiperbolik) denklemler için çeşitli başlangıç, sınır değer ve karışık problemlerin incelenmesini gerektirir. Sözü edilen alanda çok fazla sayıda matematiksel incelemeler yapılmış ve yapılmaktadır. Geleneksel olarak bu tür problemlerin incelenmesinde sınır koşulları ya sabitlenmiş ya da değişken şekillerde ele alınır. Ayrıca söz konusu problemler uygulamalı olduğundan elde edilen sonuçlar çeşitli teknolojik süreçlerin incelenmesine ve yapılmasına uygulanmış ve uygulanmaktadır. Teknolojinin son gelişmesi devirli sınır koşullarını (yani inceleme aralığının uçlarında aranan fonksiyonun ve onun gerekli türevlerinin eşit olması koşulları) içeren problemlerin de incelenmesini gerektirmektedir. Bu yönde son yıllarda bir takım araştırmalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar çeşitli dergilerde yayınlanmış ve yayınlanmaktadır. Dikkatinize sunulan tezde, ilk defa gerek adi gerekse de kısmi (hiperbolik) denklemler için devirli sınır koşulu içeren problemler incelenmiştir ve belli sonuçlara varılmıştır.

1.2. Fonksiyon Serileri

Tanım 1.1. Terimleri, herhangi değişkene (x) bağlı fonksiyonlardan oluşan seri, *fonksiyon serisi* olarak adlandırılır ve

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \quad \text{veya} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır (Halilov vd., 2009).

Serinin $f_n(x)$ $(n=\overline{1,\infty})$ terimlerinin, herhangi D bölgesinde tanımlı ve belli özelliklere sahip fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Açıktır ki, x yerine belli bir $x_0 \epsilon\, D$ yazdığımızda, fonksiyon serisi, $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_0)$ olmak üzere sayı serisine dönüşür. Bu sayı serisi yakınsaksa, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisine x_0 *noktasında yakınsak seri*, x_0 noktasına ise *yakınsaklık noktası* denir.

Fonksiyon serisi, herhangi $X \subseteq D$ kümesinin tüm x noktalarında yakınsaksa, ona X *kümesinde yakınsak seri* denir.

Fonksiyon serisi, tüm $x \in X$ noktalarında yakınsak, $x \notin X$ noktalarında ise ıraksaksa, X kümesine, *fonksiyon serisinin yakınsaklık kümesi* denir.

Fonksiyon serisinin yakınsaklığı, onun kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığı ile de tanımlanabilir. (1.1) serisinin n. kısmi toplamını

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

şeklinde gösterelim. $\{S_n(x)\}$ fonksiyon dizisine (1.1) serisinin *kısmi toplamlar dizisi* denir (Halilov vd., 2009).

Tanım 1.2. Herhangi X kümesinde, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin $\{S_n(x)\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa, o zaman, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine X *kümesinde yakınsak seri* denir (Halilov vd., 2009).

Örnek 1.1. Aşağıdaki serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots \quad \text{, yani, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

○ $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ olduğunu dikkate alıp, x'in alabileceği değerler için aşağıdaki durumları tek tek inceleyelim:

a) $-\infty < x \leq 0$.

$x < 0$ durumunda, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-x} = \infty;$ $x = 0$ durumunda ise, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$ yani serinin yakınsaklığı için gerek koşul sağlanmadığından, ele alınan seri ıraksaktır;

Geride kalan durumları integral ölçütünün yardımıyla inceleyelim. $\mathrm{g}(t) = \frac{1}{t^x}$ alırsak, $[1, \infty)$ aralığında integral ölçütü teoreminin şartlarını sağladığını görürüz.

b) $0 < x < 1$ için,

$$\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x} \lim_{A\to\infty} t^{1-x} \Big|_1^A = \infty$$

olduğundan, seri ıraksaktır $(1 - x > 0)$;

c) $x = 1$ için ele alınan seri, harmonik seriye dönüşür ve ıraksaktır;

d) $x > 1$ için,

$$\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x} \lim_{A\to\infty} t^{1-x} \Big|_1^A =$$
$$\frac{1}{1-x}\left(\lim_{A\to\infty} A^{1-x} - 1\right) = \frac{1}{x-1}$$

olduğundan seri yakınsaktır$(1 - x < 0)$.

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisi, $x \in (-\infty, 1]$ için *ıraksak*, $x \in (1, \infty)$ için ise *yakınsaktır*. ∅

Terimleri herhangi X kümesinde tanımlı

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (1.2)$$

serisini ele alalım. Sözü edilen serinin kısmi toplamlar dizisi $\{S_n(x)\}$ olsun.

Tanım 1.3. Kısmi toplamlar dizisi herhangi kümede düzgün yakınsak olan fonksiyon serisine, sözü edilen kümede *düzgün yakınsak seri* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Tanım 1.4. Herhangi X kümesinde, (1.2) fonksiyon serisinin terimleri için

$$|f_n(x)| \leq a_n \ \ (n = \overline{1, \infty})$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde, pozitif terimli yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sayı serisi varsa, o zaman, (1.2) serisine X kümesinde *sınırlanan seri*, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine de onun *sınırlayanı* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.1. (Weierstrass ölçütü) Herhangi kümede sınırlanan seri, sözü edilen kümede mutlak ve düzgün yakınsaktır (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.2. Terimleri, herhangi X kümesinde sürekli fonksiyonlardan oluşan (1.2) serisi, bu kümede düzgün yakınsaksa, o zaman onun

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1.3}$$

toplamı da X kümesinde sürekli fonksiyondur (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.3. Terimleri herhangi $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi, bu aralıkta $s(x)$'e düzgün yakınsıyorsa, o zaman,

$$\int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt = \int_a^x f_1(t)dt + \int_a^x f_2(t)dt + \cdots + \int_a^x f_n(t)dt + \cdots$$

eşitliği doğrudur, yani *düzgün yakınsak seri, yakınsaklık aralığında terim terim integrallenebilirdir* (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.4. Terimleri, $[a,b]$ aralığında sürekli türeve sahip (1.2) serisi ve onun terimlerinin türevlerinden oluşan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

serisi düzgün yakınsaksa, o zaman, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi sözü edilen aralıkta terim terim türetilebilirdir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

1.3. Ortogonal Fonksiyonlar

Tanım 1.5. $f(x)$ ve $\varphi(x)$, $[a,b]$ $(a < b)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar olduğunda, $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ integraline, sözü edilen fonksiyonların *skaler çarpımı* denir ve (f,φ) ile gösterilir:

$$(f,\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$(f,f)^{1/2}$'e $f(x)$ fonksiyonun *normu* denir ve $\|f(x)\|$ ile gösterilir:

$$\|f(x)\|=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

(Halilov vd. , 2009).

Tanım 1.6. $f(x)$ ve $\varphi(x)$, $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar olsun.

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$$

olduğunda $f(x)$ ve $\varphi(x)$'e $[a,b]$ aralığında *ortogonal fonksiyonlar* denir (Halilov vd. , 2009).

Şimdi $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlardan oluşan,

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x),\dots \tag{1.4}$$

fonksiyonlar sistemini ele alalım. Bu fonksiyonlar sistemi $[a,b]$ aralığında

$$(\varphi_k,\varphi_n)=\begin{cases}0, & k\neq n\\ \|\varphi_k\|^2, & k=n\end{cases}$$

eşitliklerini sağladığında ona, sözü edilen aralıkta *ortogonal fonksiyonlar sistemi* denir. Burada,

$$(\varphi_k,\varphi_n)=\begin{cases}0, & k\neq n\\ 1, & k=n\end{cases}$$

olduğunda, (1.4) sistemine sözü edilen aralıkta *ortonormal fonksiyonlar sistemi* denir (Halilov vd. , 2009).

Örnek 1.2. $[0, \pi]$ aralığında

$$1, \sin 2x , \cos 2x , \sin 4x , \cos 4x , \dots , \sin 2kx , \cos 2kx , \dots$$

fonksiyonlar sisteminin ortogonal olduğunu gösteriniz.

○ $[0, \pi]$ aralığında,

$$(1, \sin 2kx) = \int_0^{\pi} \sin 2kx\, dx = -\frac{1}{2k} cos2kx|_0^{\pi} = 0 \text{ ,}$$

$$(1, \cos 2kx) = \int_0^{\pi} \cos 2kx\, dx = \frac{1}{2k} sin2kx|_0^{\pi} = 0 \text{ , } (k = \overline{1, \infty})$$

yani, 1 fonksiyonu, $\sin 2kx$ ve $\cos 2kx$ fonksiyonlarına ortogonaldır.

$k \neq n$ durumunda,

$$(\sin 2kx , \cos 2nx) = \int_0^{\pi} \sin 2kx \cos 2nx\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin 2(k+n)x + \sin 2(k-n)x]dx = 0 \text{;}$$

$$(\sin 2nx , \sin 2kx) = \int_0^{\pi} \sin 2nx \sin 2kx\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos 2(k-n)x - \cos 2(k+n)x]dx = 0$$

ve

$$(\cos 2nx , \cos 2kx) = \int_0^{\pi} \cos 2nx \cos 2kx\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos 2(k+n)x + \cos 2(k-n)x]dx = 0,$$

öylece de,

$$(1,1) = \int_0^{\pi} 1^2 dx = \pi,$$

$$(\cos 2kx, \cos 2kx) = \int_0^{\pi} \cos^2 2kx dx = \frac{\pi}{2}$$

ve

$$(\sin 2kx\,, \sin 2kx) = \int_0^{\pi} \sin^2 2kx dx = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan verilen sistem $[0, \pi]$ aralığında ortogonaldir. $\varnothing$

1.4. Fourier Serisi

Tanım 1.7. 2π devirli $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.5}$$

şeklinde trigonometrik seriye açılmış ve a_0,a_n,b_n katsayıları da $\forall\, n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \end{aligned} \tag{1.6}$$

eşitlikleri ile belirlenmişse, o zaman (1.5) serisine $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier serisi*, (1.6) eşitlikleri ile belirlenen a_0,a_n,b_n'lere de onun *Fourier katsayıları* denir (Halilov vd., 2009; Altın, 2011; Duffy, 1998; Enrique vd., 1996).

2π devirli (periyotlu) bir $f(x)$ fonksiyonunun yakınsak Fourier serisine açılabilmesi için *Dirichlet teoremi* denilen, aşağıdaki teorem doğrudur. Söz konusu teoremin koşulları, *Dirichlet koşulları* olarak adlandırılır. Teoremi vermeden önce, yeni bir kavram verelim.

Tanım 1.8. $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonu, bu aralığın sonlu sayıda iç noktası hariç diğer tüm noktalarda sürekli türeve sahip olup, sözü edilen iç noktalarda sağ ve sol türeve sahip ise, o zaman $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında *parçalı türetilebilir* veya *parçalı pürüzsüz fonksiyon* denir (Halilov vd., 2009).

Teorem 1.5. *(Dirichlet)* 2π devirli $f(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı pürüzsüz ise, onun Fourier serisi aralığın her noktasında yakınsaktır ve toplamı da:

1. Fonksiyonun süreklilik noktalarında kendisine;
2. İç süreksizlik noktalarında bu noktalardaki sağ ve sol limitlerin ortalama değerine, yani

   $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 'ye;

3. $-\pi$ ve π uç noktalarında ise, sırasıyla bu noktalardaki sağ ve sol limitlerin ortalama değerine, yani

   $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ 'ye

   eşittir (Altın, 2011).

Teorem 1.6. $[a, b]$ aralığında verilen parçalı pürüzsüz $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine açılımı

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a} \right) \tag{1.7}$$

şeklindedir. Burada, $f(x)$'in Fourier katsayıları

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \quad (n = \overline{1, \infty}) \end{aligned} \tag{1.8}$$

eşitlikleri ile verilir.

$b - a = 2L$ alındığı takdirde (1.7) açılımı

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1.9}$$

halini, (1.8) formülleri de,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (1.10)$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (n = \overline{1,\infty})$$

halini alır (Halilov vd., 2009; Altın, 2011; Duffy, 1998; Enrique vd., 1996).

1.5. İkinci Mertebeden Doğrusal Diferansiyel Denklemler

Tanım 1.9. x, bağımsız değişken ve $y = y(x)$ de aranan fonksiyon olduğunda,

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x) \qquad (a_0(x) \neq 0) \qquad (1.11)$$

şeklindeki denkleme, *ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem* denir. Burada, $a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x)$ katsayıları ve $g(x)$ sağ taraf olmak üzere, herhangi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı ve gerekli özelliklere sahip, bilinen fonksiyonlardır. (1.11) denkleminde her iki tarafı $a_0(x)$' e bölerek $\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = p(x)$, $\frac{a_2(x)}{a_0(x)} = q(x)$ ve $\frac{g(x)}{a_o(x)} = f(x)$ kabul edersek, ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1.12)$$

şekline dönüştürmüş oluruz (Halilov, 2011).

Tanım 1.10. (1.12) denkleminde $f(x) \equiv 0$ alındığında, elde edilen,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1.13)$$

denklemine, *ikinci mertebeden doğrusal türdeş diferansiyel denklem* veya (1.12) *doğrusal denkleminin türdeş (homojen) kısmı* denir (Halilov, 2011).

Uyarı 1.1. Bazı özel durumlar hariç (1.13) denkleminin ve aynı zamanda (1.12) denkleminin genel bir çözüm yönteminin olmadığı ispatlanmıştır. Buna rağmen, belli koşullar dâhilinde söz konusu denklemin çözümü vardır. Var olan bu çözümlerin ileride faydalanacağımız bazı özelliklerini hatırlayalım.

Tanım 1.11. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ herhangi (a, b) aralığında tanımlı fonksiyonlar, λ_1 ve λ_2'de keyfi gerçel sabitler olduğunda,

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \tag{1.14}$$

toplamına, söz konusu fonksiyonların *doğrusal bağıntısı* denir (Halilov, 2011).

Tanım 1.12. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları için,

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad (\forall x \in (a, b)) \tag{1.15}$$

eşitliği sağlanacak şekilde, en azından biri sıfırdan farklı olan λ_i sayıları ($\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, i = 1,2$) var olduğunda, sözü edilen fonksiyonlara (a, b) aralığında *doğrusal bağımlı fonksiyonlar* denir. (1.15) eşitliği yalnız $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olduğunda sağlanırsa, o zaman $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarına (a, b) aralığında *doğrusal bağımsız fonksiyonlar* denir (Halilov, 2011). Bu tanımdan görülüyor ki, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları doğrusal bağımlı ise, o zaman

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = sabit$$

eşitliği ve tersi doğrudur. Örneğin, $\frac{sinx}{cosx} = tanx \neq C$ olduğundan $sinx$ ve $cosx$ fonksiyonları ortak tanım bölgesinde doğrusal bağımsız; $\frac{sinx}{3sinx} = \frac{1}{3}$ $(= C)$ olduğunda $sinx$ ve $3sinx$ fonksiyonları doğrusal bağımlıdırlar. (1.13) denkleminin çözümü için aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 1.7. İkinci mertebeden doğrusal türdeş denklemin doğrusal bağımsız iki tane çözümü vardır.

Teorem 1.7'de adı geçen çözümleri $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ ile gösterelim ($x \in (a, b)$). Bu $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerine, denklemin *temel çözümler sistemi* denir (Halilov, 2011).

Teorem 1.8. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları (a, b) aralığında (1.13) denkleminin doğrusal bağımsız çözümleri ise, keyfi C_1 ve C_2 sabitleri için

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{1.16}$$

fonksiyonu sözü edilen denklemin genel çözümüdür (Halilov, 2011).

Teorem 1.9. Türdeş olmayan (1.12) doğrusal denkleminin genel çözümü ($y(x)$), ona karşılık gelen (1.13) türdeş denkleminin genel çözümü ($y_T(x)$) ile kendisinin herhangi bir özel çözümünün($\tilde{y}(x)$) toplamına eşittir, yani,

$$y(x) = y_T(x) + \tilde{y}(x) \tag{1.17}$$

eşitliği doğrudur (Halilov, 2011).

Şimdi, ileride kullanacağımızdan dolayı Uyarı 1.1'de adı geçen ve sıkça rastlanan özel durumlardan bir tanesini yani katsayılarının sabit olduğu durumu ayrıntılı olarak açıklayalım.

Tanım 1.13. (1.12) denkleminde p ve q katsayıları sabitler olduğunda, ona *sabit katsayılı doğrusal (türdeş olmayan) diferansiyel denklem* denir ve

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (p, q \text{ sabit}) \tag{1.12-a}$$

şeklinde yazılır. Sözü edilen denklemin türdeş kısmının,

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1.13-a}$$

şeklinde olacağı açıktır (Halilov, 2011).

Şimdi, sabit katsayılı (1.13-a) denkleminin temel çözümler sistemini bulma yöntemini açıklayalım. Denklemin şeklinden görüldüğü gibi, aranan $y(x)$ ve onun ikinci mertebeye kadar türevleri doğrusal bağımlıdır. Kendisi ve türevleri doğrusal bağımlı sistem oluşturan tek fonksiyon e^{kx} olduğundan, (1.13-a) denkleminin özel çözümünü

$$y = e^{kx} \tag{1.18}$$

şeklinde aramak gerekir (burada $k,$ belirlenmesi gereken sabit sayıdır). O zaman,

$y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$

olur. y ve onun türevlerini ifadelerini (1.13-a) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{1.19}$$

denklemini elde ederiz ($e^{kx} \neq 0$ olduğundan) (Halilov, 2011; Agarwal and O'Regan,2009).

Tanım 1.14. (1.19) denklemine (1.13-a) denkleminin *karakteristik denklemi* denir (Halilov, 2011).

Bu denklemin kökleri için aşağıdaki durumlar olabilir.

1. **Durum: $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$ (farklı gerçel kökler, yani $\Delta = \boldsymbol{p^2 - 4q} > 0$)**

Bu durumda (1.13-a) denkleminin aranan temel çözümler sistemi,

$y_1(x) = e^{k_1 x}$ ve $y_2(x) = e^{k_2 x}$,

genel çözümü ise,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

olur.

2. **Durum: $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k}$ (çakışık kökler, yani $\Delta = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k = -p/2}$)**

Köklerin çakışık olduğu durumda temel çözümler sistemi,

$y_1(x) = e^{kx}$ ve $y_2(x) = xe^{kx}$,

genel çözüm ise,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$$

olarak bulunur.

3. Durum: $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$ (karmaşık kökler, yani $\Delta < 0,\ \alpha = -\frac{p}{2},\ \boldsymbol{\beta = \sqrt{4q - p^2}/2}$**)**

Bu durumda,

$e^{(\alpha \pm i\beta)x}$, yani $e^{\alpha x}(cos\beta x \pm isin\beta x)$

karmaşık çözümlerinin gerçel ve sanal kısımlarını oluşturan

$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ve $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

fonksiyonları da (1.13-a) denkleminin özel (bağımsız) çözümleridir. Bu yüzden ele alınan durumda (1.13-a) denkleminin genel çözümü,

$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

olur (Halilov, 2011; Agarwal and O'Regan,2009).

Uyarı 1.2. Türdeş (1.13) denkleminin genel çözümü belli olduğunda, $f(x)$ gerekli özelliklere sahip keyfi fonksiyon olduğunda, türdeş olmayan (1.12) denkleminin genel çözümünü, *sabitlerin değiştirilmesi* denilen ve aşağıda açıklayacağımız yöntemle bulmak her zaman mümkündür.

1.6. Sabitlerin Değiştirilmesi Yöntemi

İkinci mertebeden türdeş olmayan doğrusal diferansiyel (1.12) denklemini ele alıp, sabitlerin değiştirilmesi yöntemi denen ve yapısı aşağıda açıklanan yöntemi uygulayalım.

Önce (1.13) türdeş denklemini yazıp bunun temel çözümler sisteminin $y_1(x),\ y_2(x)$ olduğunu düşünürsek, genel çözümü (1.16) şeklinde olur. Şimdi, C_1 ve C_2 sabitlerinin x'e bağlı olduğunu düşünüp ($C_1(x)$ ve $C_2(x)$), bunları

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{1.20}$$

fonksiyonu (1.12) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için önce y' ve y'''yü (1.20) eşitliğinden aşağıdaki kuralla bulalım:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{1.21}$$

Burada,

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{1.22}$$

kabul edelim ((1.20) eşitliği, (1.12) denkleminde göz önüne alındığında, $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ bilinmeyenlerini belirlemek için bir tane eşitlik elde edilir. Ancak iki bilinmeyeni belirlemek için ikinci bir koşul daha gerekir. Bu yüzden ikinci koşul olarak (1.22) eşitliği kabul edilir). O zaman (1.21) eşitliği

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{1.23}$$

şeklini alır. Her iki tarafın yeniden türevi alınırsa,

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \tag{1.24}$$

bulunur.

(1.20), (1.23) ve (1.24) ifadelerini (1.12) denkleminde yerlerine yazıp, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$'in (1.13) denkleminin çözümleri olduğunu göz önüne alırsak,

$$C_1(x)[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2(x)[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] +$$
$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

ve sonuçta

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{1.25}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ bilinmeyenlerini belirlemek için, (1.22) ve (1.25) denklemlerinden oluşan

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin temel determinantı $W(x) \neq 0$ olduğundan, tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \ , \quad C_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$$

eşitlikleriyle belirlenir. Son eşitliklerde her bir denklem için iki tarafın da integralini alırsak,

$$C_1(x) = C_1^0 - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} dx \ , C_2(x) = C_2^0 + \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)} dx$$

olur. Bulunan $C_1(x)$ ve $C_2(x)$'in ifadelerini (1.20) eşitliğinde yerlerine yazıp (1.12) denkleminin genel çözümünü,

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)} dx \tag{1.26}$$

olarak buluruz (Halilov, 2011).

1.7. Kısmı Türevli Diferansiyel Denklemler

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli doğrusal denklemin en genel şekli

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + f\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0 \tag{1.27}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $A(x,y), B(x,y)$ ve $C(x,y)$ herhangi D bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır.

$$\Delta(x,y) = [B(x,y)]^2 - A(x,y)C(x,y) \tag{1.28}$$

kabul edelim. $\Delta(x,y)$'nin işaretine bağlı olarak, (1.27) denklemi aşağıdaki şekilde sınıflandırılmaktadır (Koca, 2008).

Tanım 1.15. (1.27) denklemine,

1) $\Delta(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda *hiperbolik*;

2) $\Delta(x,y) = 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda *parabolik*;

3) $\Delta(x,y) < 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda *eliptik*

tipi denklem denir (Közleme, 2014).

İspatlanabilir ki, gerekli koşullar dâhilinde, belli yerine koymanın yardımı ile (1.27) denklemi,

$\Delta(x,y) > 0$ (*hiperbolik tipi)* durumunda $u_{xx} - u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$

veya $u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$,

$\Delta(x,y) < 0$ (*eliptik tipi)* durumunda $u_{xx} + u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$,

$\Delta(x,y) = 0$ (*parabolik tipi)* durumunda $u_{xx} - u_y = F(x,y,u,u_x)$

olmak üzere basit şekle dönüştürülür.

Katsayılarının tanım bölgesindeki değerlerine bağlı olarak, değişken katsayılı ikinci mertebeden kısmi türevli doğrusal diferansiyel denklem, sözü edilen tanım bölgesinin belli bir kısmında eliptik, bir kısmında parabolik, başka bir kısmında ise, hiperbolik tipi denklem olabilir. O halde, sözü edilen bölgeler, sırasıyla denklemin *eliptiklik*, *paraboliklik* ve *hiperboliklik* bölgeleri olarak adlandırılır. Örneğin,

$$U_{xx} + yU_{yy} = f\left(x,y,u,u_x,u_y\right)$$

denklemi, $y > 0$ (üst yarı düzlem) için *eliptik*, $y = 0$ (apsisler ekseni) için *parabolik*, $y < 0$ (alt yarı düzlem) içinse *hiperbolik* denklemdir.

Bilindiği gibi, gerek adi, gerekse de kısmi türevli diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu nedenle, herhangi bir teknik veya fizik süreci ifade eden diferansiyel denklemin tek çözümünün olmasını sağlamak için, ona ek koşulların ilave edilmesi gerekir. Bu koşulların bazılarını açıklayalım. Konumuz hiperbolik denklemlere bağlı olduğundan, söyleneni hiperbolik denklem için yapalım:

Tanım 1.16. $0 \leq t < T < \infty$ ve $0 \leq x \leq l$ olduğunda, $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F$ denkleminin (burada t zaman, x ise uzunluktur),

$u(t,0) = \mu_1(t), u(t,l) = \mu_2(t)$ (sınır),

$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)$ (başlangıç) koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, söz konusu denklem için *karışık problem* denir (Koca, 2008).

Tanım 1.17. $t > 0, -\infty < x < \infty$ olduğunda, $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F$ denkleminin

$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)$ (başlangıç veya Cauchy)

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, söz konusu denklem için *başlangıç değer* veya *Cauchy problemi* denir (Koca, 2008).

Tanım 1.18. $t > 0,\ 0 \leq x \leq l$ olduğunda, $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F$ denkleminin

$$u(t,0) = \mu_1(t),\ u(t,l) = \mu_2(t)$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, söz konusu denklem için *sınır değer problemi* denir (Koca, 2008).

1.8. Parametreye Bağlı İntegraller

Tanım 1.19. $T \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olmak üzere, $f: [a,b] \times T \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her sabit $t \in T$ için $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx \tag{1.29}$$

şeklinde tanımlı $F: T \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *parametreye bağlı integral* adı verilir (Musayev,2006).

Şimdi bu integralin sürekli, diferansiyellenebilir ve integrallenebilir olduğunu gösteren aşağıdaki teoremleri verelim:

Teorem 1.10. $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}$, $y = f(x,t)$ fonksiyonu E üzerinde sürekli ise, (1.29) ile verilen F fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir (Musayev,2006).

Teorem 1.11. $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}$, $y = f(x,t)$ fonksiyonu ve bu fonksiyon üzerinde $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ kısmi türevi E üzerinde sürekli olsun. Eğer $\alpha: [c,d] \to \mathbb{R}, \beta: [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[c,d]$ üzerinde sürekli türevlenebilir ve $\alpha([c,d]) \subset [a,b], \beta([c,d]) \subset [a,b]$ ise

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx \tag{1.30}$$

ile tanımlı $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $\forall t \in [c,d]$ için

$$F'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t'(x,t)dx \tag{1.31}$$

eşitliği doğrudur (Musayev,2006).

Özel, $\alpha(t) = a, \beta(t) = b\ \ (t \in [c,d])$ durumunda, (1.31) eşitliği

$$F'(t) = \int_c^d f_t'(x,t)dx$$

şeklini alır.

Teorem 1.12. $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2: \quad a \le x \le b\,, c \le t \le d\}$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}$, $y = f(x,t)$ fonksiyonu E üzerinde sürekli ise, (1.29) ile verilen $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx$$

eşitliği doğrudur (Musayev,2006).

1.9. Sınır Değer Problemleri

$[a,b]$ aralığında, (1.12) denkleminin,

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha_1 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \alpha_2 \end{cases} \tag{1.33}$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $p(x), q(x)$ ve $f(x)$, $[a, b]$ aralığında gereken özelliklere sahip, belli fonksiyonlar $a_1,\ a_2\ \ ({a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0)$, $b_1, b_2\ ({b_1}^2 + {b_2}^2 \neq 0)$, α_1, α_2, belli gerçel sabitler, $y(x)$ ise aranan fonksiyondur.

Tanım 1.20. (1.33) koşullarına ikinci mertebeden diferansiyel denklem için *sınır koşulları*; (1.12) denkleminin, (1.33) sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına ise sözü edilen denklem için *sınır değer problemi* denir (Halilov, 2011).

(1.33) sınır koşulları, özel $a_2 = b_2 = 0$ durumunda, *birinci sınır koşulları* diye adlandırılan,

$$y(a) = \alpha_1/a_1\ ,\ \ y(b) = \alpha_2/b_1 \qquad \text{veya} \qquad y(a) = \beta_1, y(b) = \beta_2 \tag{1.34}$$

koşullarına; $a_1 = b_1 = 0$ durumunda ise, *ikinci sınır koşulları* diye adlandırılan,

$$y'(a) = \alpha_1/a_1\ ,\ \ y'(b) = \alpha_2/b_1 \qquad \text{veya} \qquad y'(a) = \gamma_1, y'(b) = \gamma_2 \tag{1.35}$$

koşullarına dönüşür. Bunlardan yola çıkarak, genel (1.33) sınır koşullarına *üçüncü sınır koşulları* da denir.

Açıklamanın sadeliği için, aşağıdaki incelemeleri (1.12)-(1.34) problemi için yapalım. Elde edilen sonuçlar (1.12)-(1.33) ve (1.12)-(1.35) problemleri, dolayısıyla da yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlere ait benzer sınır değer problemleri için de geçerlidir.

Bilindiği gibi (1.12) denkleminin genel çözümü (1.17) yani

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x) \tag{1.36}$$

şeklindedir (Burada $\tilde{y}(x)$ ele alınan denklemin bir özel çözümü, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ ise, uygun (1.12) denkleminin türdeş kısmının doğrusal bağımsız çözümleridir).

(1.36) eşitliğindeki C_1 ve C_2 sabitlerini belirlemek için, (1.34) sınır koşullarını kullanalım:

$$\begin{cases} C_1 y_1(a) +\ C_2 y_2(a) = \beta_1 -\ \tilde{y}(a) \\ C_2 y_1(b) +\ C_2 y_2(b) = \beta_2 -\ \tilde{y}(b) \end{cases} \tag{1.37}$$

Elde edilen doğrusal cebirsel denklem sisteminin çözümü için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 - \tilde{y}(a) & y_2(a) \\ \beta_2 - \tilde{y}(b) & y_2(b) \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(a) & \beta_1 - \tilde{y}(a) \\ y_1(b) & \beta_2 - \tilde{y}(b) \end{vmatrix} \tag{1.38}$$

determinantlarına bağlı olarak, aşağıdaki iki durum söz konusudur:

1. Esas Durum ($\Delta \neq \mathbf{0}$) Bu durumda, Cramer kuralına göre (1.37) sisteminin,

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad\qquad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

olmak üzere tek çözümü vardır. O halde, (1.12)-(1.34) sınır değer probleminin de, (1.36) biçiminde olmak üzere tek çözümü vardır.

2. Tekil Durum ($\Delta = \mathbf{0}$) Bu durumda da, $f(x)$ ($\tilde{y}(x)$ özel çözümü $f(x)$'e bağlı olduğundan) ve β_1, β_2'ye bağlı olarak,
${\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 \neq 0$ ve ${\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 = 0$ olmak üzere iki ihtimal vardır.

a) ${\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 \neq 0$ olduğunda, (1.37) sisteminin, yani aynı zamanda (1.12),(1.30) sınır değer probleminin çözümü yoktur.

b) ${\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 = 0$, yani $\mathbf{\Delta_1} = \mathbf{\Delta_2} = 0$ olduğunda ise, (1.37) sisteminin, demek ki, aynı zamanda (1.12),(1.34) sınır değer probleminin sonsuz sayıda çözümü vardır (Halilov, 2011).

Örnek 1.3. Aşağıdaki sınır değer problemlerinin çözümünün varlığını inceleyiniz ve varsa bulunuz.

1. $y'' + y = x,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$

2. $y'' + 2y' + y = 1,\ y(0) = y(1) = 0.$

○ Önce, sıra ile verilen denklemlerin, türdeş kısımlarının temel çözümler sistemi ve genel çözümü bulunur. Sonra da kendilerinin bir özel çözümü bulunup, genel çözümleri yazılır. Daha sonra ise, yukarıda açıklanan kurala dayanarak, ele alınan sınır değer probleminin çözümünün varlığı incelenir, varsa bulunur.

1. $y'' + y = 0 \ \rightarrow \ k^2 + 1 = 0 \ \rightarrow \ k_{1,2} = \pm i$

olduğundan, türdeş kısmın temel çözümler sistemi $y_1(x) = cosx, y_2(x) = sinx,$ genel çözümü de

$y_T(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$

olur.

Denklemin sağ tarafının şeklinden ve karakteristik denklemlerin köklerinin durumundan, onun bir özel çözümünün

$\tilde{y}(x) = Ax + B$

şeklinde olacağı açıktır. Bunu denklemde yazarsak, $A = 1,\ B = 0$, dolaysıyla da, $\tilde{y}(x) = x$ olarak bulunur. Böylece, verilen denklemin genel çözümü,

$y(x) = C_1 cosx + C_2 sinx + x$

şeklinde bulunmuş olur. Şimdi, sınır koşullarına dayanarak, (1.38) formüllerini kullanırsak,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) & y_2(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 - \tilde{y}(0) & y_2(0) \\ 1 - \tilde{y}(\pi) & y_2(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \pi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(0) & 0 - \tilde{y}(0) \\ y_1(\pi) & 1 - \tilde{y}(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 - \pi \end{vmatrix} = 1 - \pi \neq 0$$

olarak bulunur. Bu ise, $\Delta = 0$, $\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 \neq 0$ olmak üzere tekil durumdur ve ele alınan sınır değer probleminin çözümü yoktur.

2. Birinci örnekteki süreci kullanalım:

$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -1$ (çakışık kökler).

$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x} \Rightarrow y_T(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Yukarıdaki örneğe benzer olarak, denklemin sağ tarafının şeklinden ve karakteristik denklemlerin köklerinin durumundan, onun bir özel çözümünün $\tilde{y}(x) = Ax + B$ şeklinde olacağı açıktır. Bunu denklemde yazarsak, $A = 0,\ B = 1$, dolaysıyla da, $\tilde{y}(x) = 1$ olarak bulunur. Böylece, verilen denklemin genel çözümü,

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 1$

olur. Sınır koşullarını kullanırsak,

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 0, \\ C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1} + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1 - e$$

ve sınır değer probleminin var olan tek çözümü ($\Delta = 1 \neq 0$ olduğundan),

$y(x) = -e^{-x} + (1 - e) x e^{-x} + 1$

olarak bulunur. ∅

1.10. Özdeğer Problemleri

Matematiğin çeşitli alanlarında, aynı zamanda Fizik ve Teknik uygulamalarında (özellikle maddesel sistemlerin salınım hareketinin, telin enine salınım hareketinin, esnek çubuğun boyuna salınım hareketinin vb.)

$$(p(x)y')' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \; (a < x < b) \tag{1.39}$$

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

biçiminde sınır değer problemlerine sıkça rastlanmaktadır. Burada $p(x), q(x)$ ve $r(x)$, $[a, b]$ aralığında $(a < b)$ gereken özelliklere sahip belli gerçel fonksiyonlar, λ gerçel parametre, a_1, a_2 $({a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0)$, b_1, b_2 $({b_1}^2 + {b_2}^2 \neq 0)$ belli gerçel sayılar, $y(x)$ ise aranan fonksiyondur ($y(x) \equiv 0$ fonksiyonun, (1.39)-(1.40) problemini sağladığı açıktır) (Çiftçi, 2007; Duffy, 1998).

Tanım 1.21. (1.39)-(1.40) problemine sıfırdan farklı çözüm sağlayan λ sayılarına sözü edilen problemin *özdeğerleri*, bunlara uygun çözümlere ise *özfonksiyonları* denir. Bu durumda, (1.39)-(1.40) problemine *özdeğer* veya *Sturm-Liouville problemi* de denir (Halilov, 2011). Özdeğer problemleri için aşağıdaki teorem doğrudur:

Teorem 1.11. $p(x) \in C^1[a,b], r(x) \in C[a,b]$ pozitif, $q(x) \in C[a,b]$ gerçel fonksiyonlar ve ${a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0,\ {b_1}^2 + {b_1}^2 \neq 0$ ise, o zaman $[a,b]$ aralığında (1.39)-(1.40) probleminin gerçel λ_n özdeğerleri ve onlara karşılık gelen $\varphi_n(x)$ özfonksiyonları vardır ve bunlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a) Özdeğerler negatif değildir ve

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \qquad \lim \lambda_n \to \infty$$

koşullarını sağlar.

b) Farklı özdeğerlere farklı özfonksiyonlar karşılık gelir, yani $\lambda_n \neq \lambda_k$ için

$\varphi_n(x) \neq \varphi_k(x)$ olur $(n, k = \overline{1,\infty}, n \neq k)$.

c) $\varphi_n(x)$ özfonksiyonlar sistemi $(n = \overline{1,\infty})$, $[a,b]$ aralığında $r(x)$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturur, yani,

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \neq 0, & n = k \end{cases}$$

eşitliği doğrudur.

d) $\varphi_n(x)$ özfonksiyonun, $[a,b]$ aralığında $n-1$ sayıda sıfırı vardır (Halilov, 2011; Duffy,1998; Enrique vd, 1996).

Örnek 1.4.

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{1.41}$$

denklemi için,

a) $X(0) = X(\pi) = 0;$ (1.42)

b) $X(0) = X(\pi)\ , X'(0) = X'(\pi)$ (1.43)

sınır koşulları dahilinde özdeğer ve öz fonksiyonlarının varlığını ve bulunmasını inceleyelim.

○ Ele alınan sabit katsayılı türdeş denklemin karakteristik denkleminin

$$k^2 + \lambda = 0$$

olduğunu dikkate alıp, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için (1.41), (1.42) ve (1.41), (1.43) problemlerini, sırasıyla inceleyelim;

a) 1) $\lambda < 0$ durumu.

Bu durumda, $-\lambda > 0$ olduğundan, karakteristik denklemin $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ olmak üzere iki gerçel kökü vardır. Bu yüzden de, ele alınan denklemin temel çözümler sistemi

$X_1(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ ve $X_2(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}$, genel çözümü de,

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

olur. Burada (1.42) sınır koşulları dikkate alıp C_1 ve C_2 sabitlerini bulalım;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

elde edilen türdeş doğrusal sistem için

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, onun sadece $C_1 = C_2 = 0$ olmak üzere sıfır çözümü var. Demek ki, $\boldsymbol{\lambda} < 0$ durumunda ele alınan problemin $X(x) \equiv 0$ (açık) çözümü vardır, yani özfonksiyonları ve aynı zamanda özdeğerleri yoktur;

2) $\lambda = 0$ durumu.

Bu durumda, denklemin temel çözümler sistemi $X_1(x) = 1$ ve $X_2(x) = x$, genel çözümü de,

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

olacağı açıktır. Sınır koşulları dikkate alındığında, yine $C_1 = C_2 = 0$ olarak bulunur ve $X(x) \equiv 0$ olur. Demek ki, $\lambda = 0$ durumunda da, ele alınan problemin özfonksiyonları, yani aynı zamanda özdeğerleri yoktur;

3) $\lambda > 0$ $(-\lambda < 0)$ durumu.

Bu durumda, karakteristik denklemin kökleri $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$, denklemin temel çözümler sistemi $X_1(x) = cos\sqrt{\lambda}x$ ve $X_2(x) = sin\sqrt{\lambda}x$, genel çözümü de,

$$X(x) = C_1 cos\sqrt{\lambda}x + C_2 sin\sqrt{\lambda}x$$

olur. Burada sınır koşullarını göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 cos\sqrt{\lambda}\pi + C_2 sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan $C_1 = 0$ ve $C_2 sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ elde edilir. Son eşitlikte $C_2 = 0$ olamaz (aksi taktirde yine $X(x) \equiv 0$ açık çözümü elde edilir). Bu yüzden,

$$sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

olması gerekir ($C_2 \neq 0$). Son eşitlikten özdeğerler,

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \ (n \in N) \rightarrow \lambda_n = n^2 \ (n = \overline{1,\infty})$$

olarak bulunur. Demek ki, $\lambda > 0$ durumunda, ele alınan problemin $\lambda_n = n^2$ $(n = \overline{1,\infty})$ olmak üzere sonsuz sayıda özdeğerleri vardır. Bunlara karşılık özfonksiyonları $\varphi_n(x)$ ile gösterirsek,

$$\varphi_n(x) = sinnx \quad (n = \overline{1,\infty})$$

olacağı açıktır ($C_2 = 1$ kabul ettik. Ele alınan problem türdeş olduğundan bunun önemi yoktur.)

Böylece, $\lambda > 0$ durumunda, ele alınan özdeğer probleminin

$$\lambda_n = n^2,\ \varphi_n(x) = sinnx\ (n = \overline{1,\infty})$$

olmak üzere sonsuz sayıda özdeğerleri ve özfonksiyonları vardır;

b) (1.43) koşulları, *devirli sınır koşulları* olarak adlandırılır. Yukarıdakine benzer olarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) $\lambda < 0$ durumu.

Bu durumda, sınır koşullarına dayanarak elde edilen,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \\ C_1 - C_2 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \end{cases}$$

türdeş denklem sistemi için $\Delta \neq 0$ olduğundan, onun tek (sıfır) çözümü vardır ($C_1 = C_2 = 0$). Bu yüzden de, $X(x) \equiv 0$ olur. Yani $\lambda < 0$ durumunda özdeğerleri yoktur.

2) $\lambda = 0$ durumu.

Bu durumda $k_{1,2} = 0$ 'dır. Ele alınan denklemin genel çözümü;

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

olur. Sınır koşulları dikkate alırsak,

$$\begin{cases} C_1 = C_1 + C_2\pi \\ \quad C_2 = C_2 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. $C_2 = 0$ olduğu açıktır. Denklemin çözümü $X(x) = C_1$ olur. Yani sabit bir sayıya eşittir. Basitlik olsun diye biz bu sayıyı $C_1 = 1$ olarak alıyoruz. Demek ki, $\lambda = 0$ öz değerine karşılık öz fonksiyon $X(x) = 1$ 'dir.

3) $\lambda > 0$ durumu

Bu durumda kökler $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ olarak bulunur. Denklemin genel çözümü;

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

olur. Sınır koşulları dikkate alırsak,

$$\begin{cases} C_1 = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \\ C_2 = -C_1\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\cos\sqrt{\lambda}x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\pi\right) - C_2\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ C_1\sin\sqrt{\lambda}\pi + C_2\left(1-\cos\sqrt{\lambda\pi}\right) = 0 \end{cases}$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin olması için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\cos\sqrt{\lambda}\pi & -\sin\sqrt{\lambda}\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}\pi & 1-\cos\sqrt{\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0$$

olması gerekir. Buradan,

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 1 \quad \text{yani} \quad \sqrt{\lambda}\pi = 2n\pi$$

ve sonuçta

$$\lambda_n = (2n)^2 \quad (n = \overline{1,\infty})$$

öz değerleri elde edilir. Bu öz değerlere karşılık gelen fonksiyonlar;

$$\cos 2x, \sin 2x, \cos 4x, \sin 4x, \dots, \cos 2nx, \sin 2nx, \dots$$

olacağı açıktır.
Böylece problemimizin öz değerleri,

$$0, 2^2, 4^2, 6^2, \dots, (2k)^2, \dots \tag{1.44}$$

ve bunlara karşılık öz fonksiyonları ise;

$$1, \cos 2x, \sin 2x, \cos 4x, \sin 4x, \dots, \cos 2nx, \sin 2nx, \dots \tag{1.45}$$

olarak bulunur. ∅

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Gerek matematiğin, gerek akustiğin, gerekse de teknolojinin çok sayıda problemi bizi salınım denklemi diye adlandırılan bir boyutlu hiperbolik denklem için çeşitli problemlerin incelenmesine götürmektedir.

Bu çalışmada, türdeş olmayan

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(t,x) \tag{2.1}$$

bir boyutlu hiperbolik denklemi için (0.2) başlangıç ve (0.3) devirli sınır koşullu karışık problemin çözümü, değişken katsayılı Fourier serisi olarak adlandırılan,

$$U(t,x) = \frac{1}{2}U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ck}(t)\cos 2kx + U_{sk}(t)\sin 2kx$$

serisi şeklinde aranarak, $U_0(t)$, $U_{ck}(t), U_{sk}(t)$ bilinmeyenlerini belirlemek için elde edilen sonsuz sayıda sabit katsayılı denklem için başlangıç değer problemi sabitlerin değiştirilmesi yöntemi ile çözülmüş ve bulunan çözümler yerlerine yazılarak, $U(t,x)$ fonksiyonu bulunmuş, daha sonra ise bu fonksiyonun ele alınan problemin çözümü olması için başlangıç verilerinin sağlaması gereken koşullar belirlenmiştir. Bunun yanı sıra, ele alınan problemin çözümünün kaynak fonksiyonu ile ifadesi ve bir somut örnek verilmiştir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Devirli Sınır Koşullu Hiperbolik Denklem İçin Karışık Problemin Çözümü

Bu kısımda, $D = \{0 < t < \infty, 0 < x < \pi\}$ bölgesinde,

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(t,x) \qquad (0 < t < T < \infty,\ 0 < x < \pi) \tag{3.1}$$

$$\begin{matrix} U(0,x) = \varphi(x) \\ U_t(0,x) = \psi(x) \end{matrix} \quad (0 \le x \le \pi) \tag{3.2}$$

$$\begin{matrix} U(t,0) = U(t,\pi) \\ U_x(t,0) = U_x(t,\pi) \end{matrix} \quad (t \ge 0) \tag{3.3}$$

olmak üzere, *hiperbolik denklem için devirli sınır koşullu karışık problem* diye adlandıracağımız problemin çözümünün varlığı ve tekliğinin incelenmesini ele alacağız. Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[0,\pi]$ aralığında, $f(t,x)$, D bölgesinde tanımlı ve gereken özelliklere sahip, bilinen fonksiyonlar, $U(t,x)$ ise aranan fonksiyondur. Bu amaçla, *Fourier yöntemi* diye adlandırılan ve aşağıda açıklanan yöntemi kullanacağız.

Ele alınan problemin çözümünü, (1.41), (1.43) öz değer probleminin öz fonksiyonları olan (1.45) ortogonal fonksiyonlar sistemi üzere, değişken katsayılı

$$U(t,x) = \tfrac{1}{2} U_0(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} U_{ck}(t) \cos 2kx + U_{sk}(t) \sin 2kx \tag{3.4}$$

Fourier serisi şeklinde arayalım. Burada $U_0(t), U_{ck}(t)$ ve $U_{sk}(t)$ $(k = \overline{1,\infty})$ belirlenmesi gereken bilinmeyen katsayılardır.
(3.4) eşitliğinden biçimsel olarak elde edilen, sırasıyla t ve x ‘e göre,

$$U_{tt} = \frac{1}{2} U_0''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ck}''(t) \cos 2kx + U_{sk}''(t) \sin 2kx$$

$$U_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} [(2k)^2 U_{ck}(t) \cos 2kx + (2k)^2 U_{sk}(t) \sin 2kx]$$

kısmi türevlerini (3.1)’de yerlerine yazalım:

$$\frac{1}{2}U_0''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[U_{ck}''(t)\cos 2kx+U_{sk}''(t)\sin 2kx]+a^2\sum_{k=1}^{\infty}[(2k)^2U_{ck}(t)\cos 2kx+(2k)^2U_{sk}(t)\sin 2kx]=f(t,x) \qquad (3.5)$$

Elde edilen (3.5) eşitliğinin her iki tarafını sırası ile 1, $\cos 2nx$, $\sin 2nx$ ile çarpıp, $[0,\pi]$ aralığı üzere x'e göre integralini alalım. Bu süreçte, Örnek 1.4'deki

$$\frac{1}{2}, \cos 2x , \sin 2x , \cos 4x , \sin 4x , \dots , \cos 2kx , \sin 2kx , \dots \qquad (3.6)$$

sisteminin ortogonalliğini göz önünde bulundurursak,

$$\begin{aligned}
&U_0''(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)d\xi\\
&U_{ck}''(t)+a^2(2k)^2U_{ck}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)\cos 2k\xi\, d\xi \qquad (3.7)\\
&U_{sk}''(t)+a^2(2k)^2U_{sk}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)\sin 2k\xi\, d\xi \qquad (k=\overline{1,\infty})
\end{aligned}$$

olmak üzere, ikinci mertebeden sabit katsayılı türdeş olmayan sonsuz diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

Burada,

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)d\xi=f_0(t)\\
&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)\cos 2k\xi\, d\xi=f_{ck}(t) \qquad (3.8)\\
&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,\xi)\sin 2k\xi\, d\xi=f_{sk}(t) \qquad (k=\overline{1,\infty})
\end{aligned}$$

olarak işaretleyeceğimiz integrallerin,$[0,\pi]$ aralığında $f(t,x)$ fonksiyonun t parametresine bağlı Fourier katsayıları olduğu açıktır. Bunları dikkate alırsak, (3.7) sistemi,

$$\begin{aligned}
&U_0''(t)=f_0(t)\\
&U_{ck}''(t)+a^2(2k)^2U_{ck}(t)=f_{ck}(t) \qquad (3.9)\\
&U_{sk}''(t)+a^2(2k)^2U_{sk}(t)=f_{sk}(t)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi (3.2) başlangıç koşullarını (3.4) eşitliğinde dikkate alalım:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}U_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ck}(0)\cos 2kx + U_{sk}(0)\sin 2kx$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}U_0'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ck}'(0)\cos 2kx + U_{sk}'(0)\sin 2kx$$

Eşitliklerin her iki tarafını sırasıyla 1,cos $2nx$,sin $2nx$ ile çarpıp, $[0,\pi]$ aralığı üzere x'e göre integrallerini alıp, (3.6) fonksiyonlar sisteminin sözü edilen aralıkta ortogonalliğini göz önünde bulundurursak, elde edilen,

$$U_0(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi)d\xi$$
$$U_{ck}(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi)\cos 2k\xi d\xi$$
$$U_{sk}(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi)\sin 2k\xi d\xi$$

ve

$$U_0'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\xi)d\xi$$
$$U_{ck}'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\xi)\cos 2k\xi d\xi$$
$$U_{sk}'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\xi)\sin 2k\xi d\xi$$

ifadelerinin, sırasıyla $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının Fourier katsayıları olduğu görüyoruz. Yani bunları,

$$\begin{array}{lcl} U_0(0) = \varphi_0 & & U_0'(0) = \psi_0 \\ U_{ck}(0) = \varphi_{ck} & , & U_{ck}'(0) = \psi_{ck} \\ U_{sk}(0) = \varphi_{sk} & & U_{sk}'(0) = \psi_{sk} \end{array} \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi, sonsuz sayıda türdeş olmayan denklem ve başlangıç koşulları içeren (3.9)-(3.10) problemini çözelim. Bunun için sonsuz sistemin türdeş olmayan her üç denklemine, sırasıyla sabitlerin değiştirilmesi yöntemini uygulayıp, $U_0(t)$, $U_{sk}(t)$ ve $U_{ck}(t)$'yi bulalım ($k = \overline{1,\infty}$):

İlk olarak

$$U_0''(t) = f_0(t) \tag{3.11}$$
$$U_0(0) = \varphi_0 , U_0'(0) = \psi_0 \tag{3.12}$$

problemini ele alıp, önce denklemin,

$$U_0''(t) = 0$$

türdeş kısmının genel çözümünü,

$$U_0^T(t) = C_1 + C_2 t$$

olarak yazıp, C_1 ve C_2 sabitlerini t'nin bir fonksiyonu, yani $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ olarak kabul edelim ve bunları,

$$U_0(t) = C_1(t) + C_2(t)t \tag{3.13}$$

fonksiyonunu (3.11) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için, kurala göre,

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)t = 0, \\ \quad C_2'(t) = f_0(t) \end{cases}$$

sistemini yazıp buradan $C_1(t)$ ve $C_2(t)$'yi bulalım:

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)t = 0, \\ \quad C_2'(t) = f_0(t) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} C_1'(t) = -tf_0(t), \\ \quad C_2'(t) = f_0(t) \end{cases} \rightarrow$$

$$C_1(t) = C_1^0 - \int_0^t \tau f(\tau)d\tau, \quad C_2(t) = C_2^0 + \int_0^t f(\tau)d\,\tau.$$

Şimdi, $C_1(t)$ ve $C_2(t)$'nin bulduğumuz ifadelerini (3.13) eşitliğinde yerlerine yazıp, gerekli yerine koymaları yaparsak, (3.11) denkleminin genel çözümünü,

$$U_0(t) = C_1^0 + C_2^0 t + \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{3.14}$$

şeklinde elde ederiz. Genel çözümdeki C_1^0 ve C_2^0 sabitlerini bulmak için, (3.12) başlangıç koşullarını dikkate alalım:

$$U_0(0) = C_1^0 \quad \rightarrow \quad C_1^0 = \varphi_0,$$
$$U_0'(0) = C_2^0 \quad \rightarrow \quad C_2^0 = \psi_0,$$

Bunları (3.13)'de yerlerine yazarsak, (3.11), (3.12) probleminin çözümünü,

$$U_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) f_0(\tau) d\tau \tag{3.15}$$

olarak buluruz.

İkinci olarak

$$U_{ck}''(t) + a^2(2k)^2 U_{ck}(t) = f_{ck}(t) \tag{3.16}$$
$$U_{ck}(0) = \varphi_{ck} \ , \ U_{ck}'(0) = \psi_{ck} \ , \ (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.17}$$

problemini ele alalım. Problemdeki denklem, sabit katsayılı doğrusal denklem olduğundan, onun türdeş kısmının genel çözümünün,

$$U_{ck}^T(t) = C_{1ck} \cos 2akt + C_{2ck} \sin 2akt$$

şeklinde olacağı açıktır. Buradaki C_{1ck} ve C_{2ck} sabitlerini t'nin bir fonksiyonu olarak kabul edip, bunları elde edilen,

$$U_{ck}(t) = C_{1ck}(t) \cos 2akt + C_{2ck}(t) \sin 2akt \tag{3.18}$$

fonksiyonunun (3.16) denklemini sağlayacağı şekilde seçelim. Tekrar sabitlerin değiştirilmesi yöntemini uygulayalım. Bunun için önce,

$$\begin{cases} C'_{1ck}(t)\cos 2akt + C'_{2ck}(t)\sin 2akt = 0 \\ C'_{1ck}(t)\sin 2akt - C'_{2ck}(t)\cos 2akt = -\dfrac{1}{2ak}f_{ck}(t) \end{cases} \quad (k = \overline{1,\infty})$$

denklem sistemini yazıp, çözelim,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2akt & \sin 2akt \\ \sin 2akt & -\cos 2akt \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2akt \\ -\dfrac{1}{2ak}f_{ck}(t) & -\cos 2akt \end{vmatrix} = \frac{1}{2ak}f_{ck}(t)\sin 2akt,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2akt & 0 \\ \sin 2akt & -\dfrac{1}{2ak}f_{ck}(t) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2ak}f_{ck}(t)\cos 2akt$$

olduğunu dikkate alıp, Cramer kuralını uygularsak,

$$C'_{1ck}(t) = -\frac{1}{2ak}f_{ck}(t)\sin 2akt \ , C'_{2ck}(t) = \frac{1}{2ak}f_{ck}(t)\cos 2akt \quad \left(k = \overline{1,\infty}\right)$$

buradan integralleme yolu ile

$$C_{1ck}(t) = C^0_{1ck} - \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin 2ak\tau \, d\tau$$

$$C_{2ck}(t) = C^0_{2ck} + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{ck}(\tau)\cos 2ak\tau \, d\tau \quad (k = \overline{1,\infty})$$

elde ederiz. Bunları (3.18) ifadesinde yerlerine yazıp, gerekli yerine koymaları yaparsak,

$$U_{ck}(t) = C^0_{1ck}\cos 2akt + C^0_{2ck}\sin 2akt + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin 2ak(t-\tau)d\tau$$

eşitliğini elde ederiz. C^0_{1ck} ve C^0_{2ck} sabitlerini bulmak için (3.17) başlangıç koşullarını dikkate alırsak,

$$U_0(0) = C_{1ck}^0 \quad \Rightarrow \quad C_{1ck}^0 = \varphi_{ck}$$
$$U_0'(0) = C_{2ck}^0 \quad \Rightarrow \quad C_{2ck}^0 = \frac{1}{2ak}\psi_{ck} \quad (k = \overline{1,\infty})$$

olur. Bunları (3.18) ifadesinde yerlerine yazarsak, (3.16), (3.17) probleminin çözümü,

$$U_{ck}(t) = \varphi_{ck}\cos 2akt + \frac{1}{2ak}\psi_{ck}\sin 2akt + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin 2ak(t-\tau)d\tau \tag{3.19}$$
$(k = \overline{1,\infty})$

olarak bulunur.

Benzer yolla üçüncü denklem için,

$$U_{sk}''(t) + a^2(2k)^2 U_{sk}(t) = f_{sk}(t) \tag{3.20}$$
$$U_{sk}(0) = \varphi_{sk} \;,\; U_{sk}'(0) = \psi_{sk} \;,\; (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.21}$$

probleminin çözümünü,

$$U_{sk}(t) = \varphi_{sk}\cos 2akt + \frac{1}{2ak}\psi_{sk}\sin 2akt + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{sk}(\tau)\sin 2ak(t-\tau)d\tau \tag{3.22}$$

şeklinde bulunur.

Böylece, sonsuz sayıda sabit katsayılı ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem içeren (3.9)-(3.10) probleminin çözümü için (3.15), (3.19) ve (3.22) formüllerini elde etmiş oluruz. Bunları (3.4) eşitliğinde yerlerine yazarsak, biçimsel olarak, (3.1)-(3.3) probleminin çözümünü,

$$U(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\psi_0 t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_{ck}\cos 2akt + \frac{1}{2ak}\psi_{ck}\sin 2akt + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin 2ak(t-\tau)d\tau\right]\cos 2kx\right.$$
$$\left.+\left[\varphi_{sk}\cos 2akt + \frac{1}{2ak}\psi_{sk}\sin 2akt + \frac{1}{2ak}\int_0^t f_{sk}(\tau)\sin 2ak(t-\tau)d\tau\right]\sin 2kx\right\} \tag{3.23}$$

şeklinde buluruz.

Bulunan çözüm formülünü φ, ψ ve f fonksiyonlarının Fourier katsayılarına göre

$U(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(\varphi_{ck}\cos 2kx + \varphi_{sk}\sin 2kx)\cos 2akt] +$

$\frac{1}{2}\psi_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}[(\psi_{ck}\cos 2kx + \psi_{sk}\sin 2kx)\sin 2akt] + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau +$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}\left[\int_0^t (f_{ck}(\tau)\cos 2kx + f_{sk}(\tau)\sin 2kx)\sin 2ak(t-\tau)d\tau\right]$ (3.24)

şeklinde gruplayıp, sözü edilen katsayıların ifadelerini yerlerine yazdıktan sonra, gerekli yer değiştirmeler yaparsak,

$$U(t,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\cos 2k\xi cos2kx + \sin 2k\xi \sin 2kx)\cos 2akt\right]d\xi +$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\xi)\left[\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}(\cos 2k\xi cos2kx + \sin 2k\xi \sin 2kx)\sin 2akt\right]d\xi +$$

$$\frac{2}{\pi}\iint_{0\,0}^{t\,\pi} f(\tau,\xi)\left[\frac{t-\tau}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}(\cos 2k\xi cos2kx + \sin 2k\xi \sin 2kx)\sin 2ak(t-\tau)\right]d\xi d\tau$$

veya

$$U(t,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k(\xi - x)cos2akt\right]d\xi +$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\xi)\left[\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}\cos 2k(\xi - x)\sin 2akt\right]d\xi +$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi} f(\tau,\xi)\left[\frac{t-\tau}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}\cos 2k(\xi - x)sin2ak(t-\tau)\right]d\xi d\tau \qquad (3.25)$$

olmak üzere (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün daha basit şeklini elde ederiz. Burada,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k(\xi - x)cos2akt = G_0(t,\xi - x),$$

$$\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}\cos 2k(\xi - x)\sin 2akt = G(t,\xi - x),$$

$$\frac{t-\tau}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ak}\cos 2k(\xi-x)\sin 2ak(t-\tau)=G(t-\tau,\xi-x)$$

işaretlemelerini kabul edersek, ele alınan (3.1)-(3.3) probleminin aranan çözümünü

$$U(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}G_0(t,\xi-x)\varphi(\xi)d\xi+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}G(t,\xi-x)\psi(\xi)d\xi+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi G(t-\tau,\xi-x)f(\tau,\xi)d\xi d\tau \qquad (3.26)$$

şeklinde de yazılabilir.

(3.1)-(3.3) probleminin biçimsel olarak bulunmuş çözümünün (gerek (3.23), gerek (3.25), gerekse de (3.26) şeklinin), belli koşullar dahilinde problemin tüm koşullarını sağladığı denenmiştir.

Kaynak fonksiyonu diye adlandırılan $G_0(t,\xi-x), G(t,\xi-x), G(t-\tau,\xi-x)$ fonksiyonlarının ifade ettikleri serilerin düzgün yakınsak olmadıkları, bu yüzden de terim terim diferansiyellenemezliği açıktır. Bu serilerin sözü edilen özelliklere sahip olması için, başlangıç verilerinin bazı koşulları sağlaması gerekmektedir. Fonksiyonun düzgün yakınsak Fourier serisine açılabilirlik koşuluna dayanarak, aşağıdaki teoremin doğruluğu söylenebilir.

Teorem 3.1. $\varphi(x)\in C^3[0,\pi]$, $\psi(x)\in C^2[0,\pi]$ ve $\forall t\in[0,T]$ için $f(t,x)\in C^2[0,\pi]$ olup, $\varphi(0)=\varphi(\pi)$, $\varphi'(0)=\varphi'(\pi)$, $\psi(0)=\psi(\pi)$, $f(t,0)=f(t,\pi)$ uyum koşulları sağlandığında, (3.1)-(3.3) probleminin tek çözümü var ve (3.25) formülü ile ifade edilir.

Böylece, belli koşullar dâhilinde (3.1)-(3.3) probleminin çözüm formülü, (3.23) veya , (3.25) veya (3.26) formülü olmak üzere genel şekilde bulunmuş olur. Bu ise teoremin koşullarını sağlayan istenen $f(t,x),\varphi(x),\psi(x)$ fonksiyonları için (3.1)-(3.3) probleminin çözümü doğrudan yazılabilir demektir. Somut örnek çözümünde çözüm serisinin, istenen kesinliğe bağlı olarak n. kısmi toplamı, söz konusu problemin yaklaşık çözümü olarak alınabilir ve yapılan hata değerlendirilebilir. Bu bizim konumuz dışında olmak üzere ayrı bir inceleme konusudur.

Örnek 1.4. . $D = \{0 \le t < T < \infty, 0 \le x \le \pi\}$ bölgesinde,

$$U_{tt} - U_{xx} = tx(\pi - x)$$

$$\left.\begin{array}{l} U(0,x) = \sin 2x \\ U_t(0,x) = \sin x \end{array}\right. \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} U(t,0) = U(t,\pi) \\ U_x(t,0) = U_x(t,\pi) \end{array}\right. \qquad t \ge 0$$

problemini çözünüz.

○ Önce, verilen denklemin başlangıç verilerinin, yani $f(t,x) = tx(\pi - x)$, $\varphi(x) = \sin 2kx$ ve $\psi(x) = \sin x$ fonksiyonlarının, $[0,\pi]$ aralığında (3.6) ortogonal fonksiyonlar sistemi üzere Fourier katsayılarını bulalım (Söz konusu başlangıç verilerin Teorem 3.1'in tüm koşullarını sağladığı açıktır):

$$f_0 = \frac{2}{\pi} t \int_0^\pi (x\pi - x^2)\, dx = \frac{2}{\pi} t \left[\pi \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^\pi\right)\right] = \frac{\pi^2}{3} t;$$

$$f_{ck} = \frac{2}{\pi} t \int_0^\pi (x\pi - x^2) \cos 2kx\, dx = \frac{2}{\pi} t \left(\pi \int_0^\pi x \cos 2kx\, dx - \int_0^\pi x^2 \cos 2kx\, dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} t \left(\frac{\pi x}{2k} \sin 2kx|_0^\pi - \frac{\pi}{2k} \int_0^\pi \sin 2kx\, dx - \frac{x^2}{2k} \sin 2kx|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi x \sin 2kx\, dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} t \left[\frac{\pi}{(2k)^2} \cos 2kx|_0^\pi + \frac{1}{k}\left(-\frac{x}{2k} \cos 2kx|_0^\pi + \frac{1}{2k} \int_0^\pi \cos 2kx\, dx\right)\right] = -\frac{t}{k^2};$$

$$f_{sk} = \frac{2}{\pi} t \int_0^\pi (x\pi - x^2) \sin 2kx\, dx = \frac{2}{\pi} t \left(\pi \int_0^\pi x \sin 2kx\, dx - \int_0^\pi x^2 \sin 2kxdx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} t \left(-\frac{\pi x}{2k} \cos 2kx|_0^\pi - \frac{\pi}{2k} \int_0^\pi \cos 2kx\, dx + \frac{x^2}{2k} \cos 2kx|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi x \cos 2kx\, dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} t \left[-\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{k}\left(-\frac{x}{2k} \sin 2kx|_0^\pi + \frac{1}{2k} \int_0^\pi \sin 2kx\, dx\right)\right] = 0;$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin 2x\, dx = -\frac{2}{2\pi} cos2x|_0^{\pi} = 0;$$

$$\varphi_{ck} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 2kx\, dx = 0$$

$$\varphi_{sk} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \sin 2kx\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ 1, & k = 1 \end{cases};$$

$$\psi_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\frac{2}{\pi}\cos x|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} ;$$

$$\psi_{ck} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos 2kx\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin(1+2k)\, x + \sin(1-2k)\, x]\, dx =$$

$$-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k)^2-1};$$

$$\psi_{sk} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \sin 2kx\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(1-2k)\, x - \cos(1+2k)\, x]\, dx = 0.$$

Bulduğumuz katsayıları (3.24) eşitliğinde yerlerine yazarsak, aranan çözümün seri şeklini elde ederiz.

$$U(t,x) = sin2xcos2t + \frac{2}{\pi}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left[\left(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k)^2-1}cos\, 2kx\right)sin\, 2kt\right] +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}(t-\tau)\frac{\pi^2}{3}\tau d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left[\int\limits_0^{t}\left(-\frac{\tau}{k^2}cos\, 2kx\right)sin\, 2k(t-\tau)d\tau\right]$$

$$U(t,x) = sin2xcos2t + \frac{2}{\pi}t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\, 2kx\, sin\, 2kt}{k[(2k)^2-1]} + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3}\int\limits_0^{t}(t-\tau)\tau\, d\tau$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\, 2kx}{2k^3}\int\limits_0^{t}\tau\, sin\, 2k(t-\tau)d\tau$$

$$U(t,x) = sin2xcos2t + \frac{2}{\pi}t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\, 2kx\, sin\, 2kt}{k[(2k)^2-1]} + \frac{\pi^2}{6}\left(t\int\limits_0^{t}\tau\, d\tau - \int\limits_0^{t}\tau^2 d\tau\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,2kx}{2k^3}\left(sin\,2kt\int_0^t \tau\,cos\,2k\tau\,d\tau - cos\,2kt\int_0^t sin\,2k\tau\,d\tau\right)$$

$$U(t,x) = sin2xcos2t + \frac{2}{\pi}t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,2kx\,sin\,2kt}{k[(2k)^2-1]} + \frac{\pi^2}{6}\left(t\frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^t - \frac{\tau^3}{2}\bigg|_0^t\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,2kx}{2k^3}\left[sin\,2kt\left(\frac{\tau}{2k}sin\,2k\tau|_0^t - \frac{1}{2k}\int_0^t sin\,2k\tau\,d\tau\right)\right.$$

$$\left.-\,cos\,2kt\left(-\frac{\tau}{2k}cos\,2k\tau|_0^t + \frac{1}{2k}\int_0^t cos\,2k\tau\,d\tau\right)\right]$$

$$U(t,x) = sin2xcos2t + \frac{2}{\pi}t + \frac{\pi^2t^3}{36} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,2kx\,sin\,2kt}{k[(2k)^2-1]}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{2k^3}\left(\frac{t}{2k} - \frac{\sin 2kt}{(2k)^2}\right)$$

Bulunan çözüm serisinin ele alınan bölgede düzgün yakınsaklığı açıktır.∅

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada türdeş olmayan hiperbolik denklem için devirli sınır koşullu karışık problemin Fourier yöntemi ile incelenmesi ele alınmış ve problemin çözümünün varlığı ve tekliği ile bağlı başlangıç verilerini sağlaması gereken koşulları belirlemenin yanı sıra, çözümün seri şekli bulunmuş ve somut örnekle açıklanmıştır.

Ele alınan problemin çözümü seri şeklinde bulunduğu ve serinin somut olarak toplamının her zaman bulunması imkânsız olduğundan, bu serinin toplamı yerine yaklaşık olarak onun n. kısmi toplamı alınabilir. Bu durumda istenen kesinliğe bağlı olarak yapılan hatanın değerlendirilmesi gerekir. Bu ise ayrı bir inceleme konusudur.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., O'Regan, D., 2009. Ordinary and Partial Differential Equations , Springer Science and Business Media, ISBN: 978-0-387-79145-6, 409 s.

Altın, A., 2011. Fourier Analizi. Gazi Kitabevi, ISBN: 978-605-5543-73-0, 124 s.

Çiftçi, İ., 2007. Değişken Katsayılı Fourier Serileriyle Parabolik Denklemler için Devir Sınır Koşullu Karışık Problemin Analizi. Doktora Tezi. Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, Türkiye, 101 s.

Duffy D., 1998. Advanced Engineering Mathematics. CRC Press, ISBN:0-8493-7854-0, 627 s.

Enrique, A., Gonzalez and Velasco, 1996. Fourier Analysis and Boundary Value Problems. Elsevier Science & Technology Books, ISBN: 0122896408,543 s.

Halilov, H. ve Hacısalihoğlu, H., 2009. Yüksek Matematik Klavuzu. Eflatun Yayınevi, 1. Basım, ISBN: 978-605-4160-03-7, 569 s.

Halilov, H., 2011. Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları. Literatür Yayınları, 3. Basım, ISBN: 978-975-8431-98-4, 350 s.

Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M., 2009. Yüksek Matematik 2, Çok Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, 3. Basım, ISBN:975-8431-09-9, 502 s.

Koca, K., 2008. Kısmi Türevli Denklemler. Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, 3. Basım, ISBN:978-975-6859-25-4, 232 s.

Közleme, T., 2014. Bir Sınıf Parabolik Denklem için Karışık Problemin Fourier Yöntemi ile Çözümü. Yüksek Lisans Tezi. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize, Türkiye, 44 s.

Musayev, B., Koca, K., ve Mustafayev, N., 2006. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz- IV.Seçkin Yayıncılık, 1. Basım, ISBN:975 02 0269 4, 470 s.

Tikhonov, N.A., Samarskii, A.A, 1967. Partial Differential Equation of Mathematical Physics, Holden Day,621 s.

ÖZGEÇMİŞ

Reyhan VAHAPOĞLU, 22/01/1991 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretimini 2004 yılında Of ilçesi Of Merkez İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2008 yılında Of ilçesinde Of Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında başladığı lisans eğitimini 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2013 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde başladığı yüksek lisans ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Trabzon Meslek Yüksekokulunda başladığı Bilgisayar Teknolojileri önlisans öğrenimini halen devam ettirmektedir.