T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL ve KONVEKS FONKSİYONLAR

ANIL DEMİRBAŞ

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. KADİR KUTLU
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. BAHADIR ÖZGÜR GÜLER
YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2015

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL ve KONVEKS FONKSİYONLAR

Doç. Dr. Kadir KUTLU danışmanlığında, Anıl DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 30/04/2015 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç.Dr. Kadir KUTLU	K. Kut
Üye	: Doç.Dr. Bahadır Özgür GÜLER	BÖGüler
Üye	: Yrd.Doç.Dr. İshak CUMHUR	

Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Çalışmanın süreklilik ve büyük bir azim gerektirdiğini bana bu tez çalışmamda idrak ettiren, büyük bir sabır ve destekle derin bilgisini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Kadir KUTLU' ya ve her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen aileme saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Anıl DEMİRBAŞ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan Kompleks Mertebeden Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 30/04/2015

Anıl DEMİRBAŞ

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir*

ÖZET

KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL ve KONVEKS FONKSİYONLAR

Anıl DEMİRBAŞ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Kadir KUTLU

Bu çalışma esas olarak, geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutan yalınkat fonksiyonlar sınıfı ve onun alt sınıflarını inceleme temeline kurulmuştur. Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde analitik ve yalınkat olan fonksiyonların S sınıfı oluşturularak bu sınıfa ait olan fonksiyonların çeşitli katsayı özellikleri, "distortion" ve "growth" teoremleri, P sınıfı ve bazı özelikleri verildi. Ayrıca yıldızıl ve konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar yardımıyla tanımlan yalınkat fonksiyonların tanımları ve bazı teoremlere yer verildi. İkinci bölümde $S_b^*(M)$ ve $C_b(M)$ fonksiyonlar sınıfları tanımlandı ve bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, iki sınıf arasındaki fonksiyonel bağıntılar, $S_b^*(M)$ nin yıldızıllık yarıçapı ve $C_b(M)$ nin konvekslik yarıçapı verildi. Her iki sınıfa ait ekstremel yani D_r yi yıldızıl (veya konveks) bir bölgeye dönüştüren "en geniş" fonksiyonlar verildi.

2015, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yalınkat fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı, kompleks mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı, (Janowski) fonksiyon sınıfı.

ABSTRACT

STARLİKE AND CONVEX FUNCTİONS OF COMPLEX ORDER

Anıl DEMİRBAŞ

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Master Thesis
Supervisor: Doç. Dr. Kadir KUTLU

This work is based on the study of the class of univalent functions and its subclass which plays a important role in geometrical functions theory. This thesis consists of two parts. In the first part, constructing the class S of functions which are analytic and univalent in the open unit disk $\mathbb{D}$, some properties of coefficients, distortion and growth theorems of this class, the class P and its some properties are given. Moreover the class of starlike and convex functions and the univalent functions defined by those functions are defined and their some properties are given. In the second part, the classes of $S_b^*(M)$ and $C_b(M)$ are defined and their coefficient inequalities, extremal functions and the radius of starlikeness and convexity are given.

2015, 55 pages

Keywords: Univalent functions, class of starlike and convex function, class of starlike and convex function of complex order, class of Janowski functions.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı daire
$\mathbb{D}$	Birim daire
S	Normalize yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{D}^*$	Birim dairenin dışı
$\sum$	$\mathbb{D}^*$ bölgesinde tanımlı analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\sum_0$	$\sum$ sınıfındaki $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$A(\mathbb{D})$	Birim dairede analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{Re} f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathrm{Im} f$	f fonksiyonunun sanal kısmı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
K	Konveks fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$S^*(1-b)$	$(1-b)$. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$C(b)$	b. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$S_b^*(M)$	b. mertebeden Yıldızıl Janowski fonksiyonlar sınıfı
$C_b(M)$	b. mertebeden Konveks Janowski fonksiyonlar sınıfı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların incelenmesinde temel amaç; ortaya atılan fonksiyon sınıfının Taylor açılımındaki a_n katsayısına ait modülün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini, yıldızıllık ve konvekslik yarıçaplarını vermek ve Koebe bölgelerini ifade etmektir. Sunulan bu tezdeki amaç birim diskte analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartıyla normalleştirilmiş fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının ve onun bazı alt sınıflarının birtakım önemli özelliklerini incelemek ve kompleks mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfının bir alt (Janowski[1]) sınıfları ile ilgili katsayı eşitsizlikleri, distortion ve rotasyon teoremleri ile konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları üzerine araştırma yapmaktır.

1.2. Literatür Özeti

Geometrik fonksiyonlar teorisindeki en güzel konulardan biri de yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu konunun temeli Koebe`nin 1907 de yayımladığı makalesi (Koebe 1907) olup, bunu 1914 de Gronwall`ın alan teoreminin ispatı (Gronwall, 1914) ve 1916 da Bieberbach`ın normalleştirilmiş yalınkat fonksiyonların ikinci derecede katsayıları için sonucu ve onun özellikleri izlemiştir (Bieberbach, 1916). Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has alt kümesini birim diske konform olarak tasvir eden bir dönüşüm varlığı Rieman dönüşüm teoremi olarak bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylıklar sağlar. Yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartıyla normalleştirilmiş fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır. 1907 de Koebe, S sınıfına ait fonksiyonlar altında $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve $\mathbb{D}$ birim diskinin $f \in S$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(\mathbb{D})$ orjine uzaklığının $\frac{1}{4}$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır. 1916 da Bieberbach tarafından ileri sürülen

[1]Bu tür fonksiyon sınıfları ilk defa W. Janowski tarafından incelendiğinden bu ismi vermeyi uygun gördük (Janowski, W. 1970).

$z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $f \in S$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir (normalize) Taylor açılımına sahipse $n = 2,3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ önermesi uzun yıllar matematikçileri meşgul eden bir problem olmuş ve nihayetinde 1985 yılına kadar ispatlanamayan bu sonuç de Branges tarafından ispatlanmıştır (de Branges, 1985). Bieberbach teoremin en önemli sonuçlarından birisi de S sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucunu kullanarak Koebe tarafından verilen ve distortion teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir. Bieberbach tahmini de Branges tarafından ispatlanmasına kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler S sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağlantılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden bazıları yıldızıl, konveks, konvekse yakın, α-konveks fonksiyon sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir.

1.3. Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 1.3.1. Bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde *yalınkat fonksiyon* denir.

Örneğin; $g(z) = \frac{z}{2}$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü birer yalınkat fonksiyondur. Oysa $f(z) = 0$ ve $f(z) = z^2$ fonksiyonları yalınkat değildir. Bu çalışmada, en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı düzlemsel bir D bölgesi yerine Riemann Dönüşüm Teoremi gereği, ona konform olarak denk olan $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık birim dairesi alınacak. $\mathbb{D}$ birim disk ve g(z) fonksiyonu da $\mathbb{D}$ de analitik ise

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad (1)$$

biçiminde Taylor açılımına sahip bir g analitik yalınkat fonksiyonu için,

$$\frac{g(z) - b_0}{b_1} = f(z), \; \frac{b_n}{b_1} = a_n, \; n = 2,3, \dots$$

yazılırsa,

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

fonksiyonu da $\mathbb{D}$ de analitik ve yalınkat olur.

Tanım 1.3.2. (1.2) formundaki bir fonksiyona *normalize edilmiş fonksiyon* denir.

Tanım 1.3.3. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon $\mathbb{D}$ diskinde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Bu tür fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

Örnek 1.3.4. $\mathrm{k(z)} = \frac{\mathrm{z}}{(1-\mathrm{z})^2}$ $(z \in \mathbb{D})$

fonksiyonu S deki en önemli fonksiyonlardan bir tanesidir. Buna Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ birim diskini kompleks düzlemde negatif reel eksen üzerindeki $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ aralığı çıkarılmış bölgeye bire bir dönüştürür.

$$w(z) = \frac{1+z}{1-z}\,,\ \mathrm{g}(z) = w^2(z)\,,\ f(z) = \frac{1}{4}(\mathrm{g(z)} - 1)$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. $w(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesini $u > 0$ yarı düzleme dönüştürdüğü görülebilir.

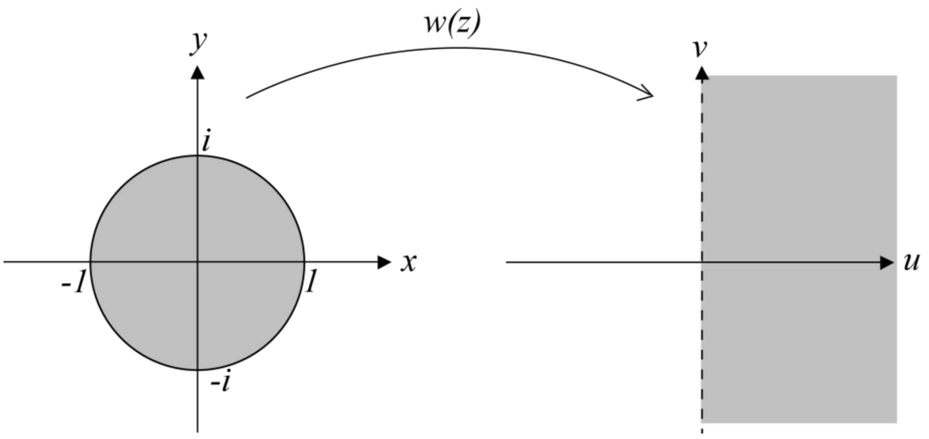
Gerçekten $z = x + iy$ denilirse;

$$w(x+iy) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy}$$

$$= \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)} = \frac{-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2+1}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-2\mathrm{x}+1} + i\frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-2\mathrm{x}+1} = u(x,y) + iv(x,y) \text{ olup}$$

$$u(x,y) = \frac{-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2+1}{(1-\mathrm{x})^2+\mathrm{y}^2}\,,\ v(x,y) = \frac{2\mathrm{y}}{(1-\mathrm{x})^2+\mathrm{y}^2} \text{ elde edilir.}$$

$|z| < 1$ ya da $x^2 + y^2 < 1$ olduğundan $u(x, y) > 0$ olmak zorundadır. Bunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Şekil 1. $w(z)$ fonksiyonunun D bölgesini $u > 0$ düzlemine dönüştürmesi

Görüldüğü gibi xy-düzleminde z'ler birim diskte değiştikçe w-düzleminde u'lar pozitif olmak zorunda yani $\mathrm{Re}w > 0$ olmak zorunda. $\mathrm{g}(z)$ fonksiyonu ise sağ yarı düzlemi tüm düzleme dönüştürür. $f(z)$ düzenlenirse,

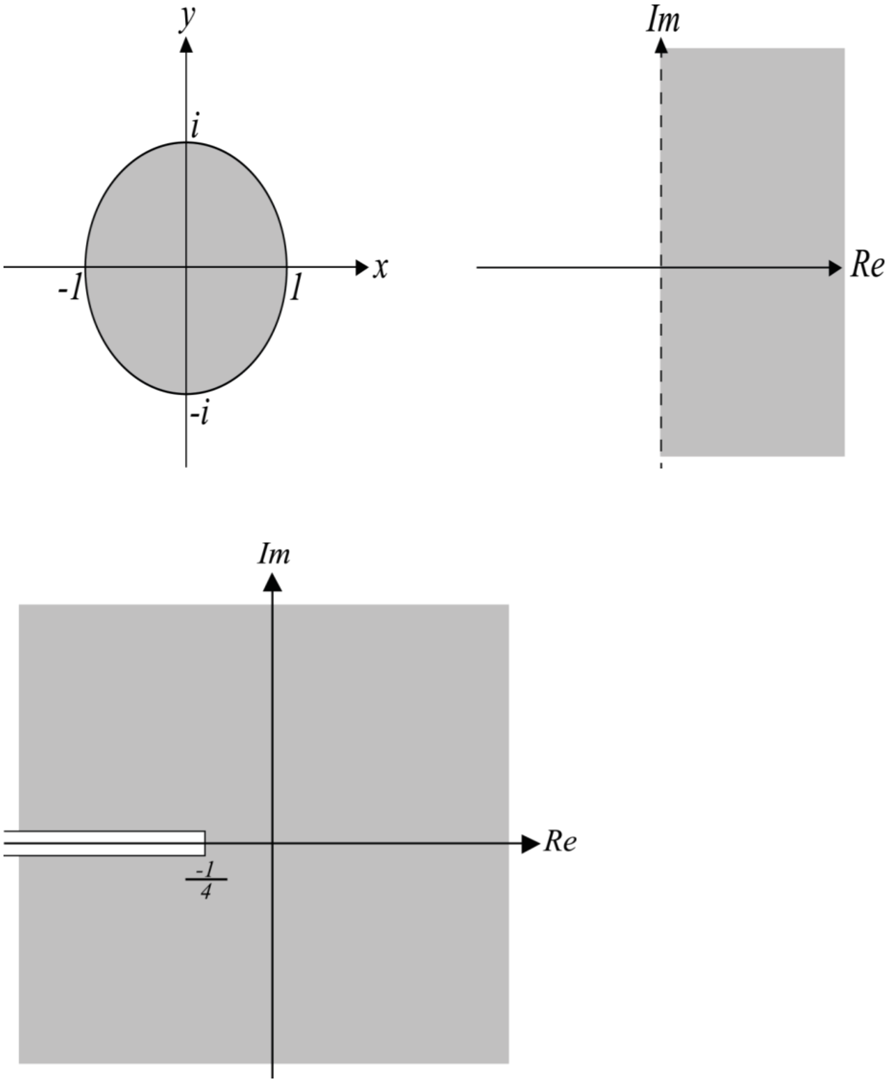
$$f(z) = \frac{1}{4}(\mathrm{g(z)} - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{w}^2(\mathrm{z}) - 1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{\mathrm{z}}{(1-\mathrm{z})^2}$$

bulunur. Bu ise Koebe fonksiyonudur.



Şekil 2. Koebe fonksiyonunun görüntüsü

Tanım 1.3.5. S sınıfındaki $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

açılımına sahiptir. Bieberbach, $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olduğunu ifade etmiştir. Bu eşitsizlik *Bieberbach tahmini* olarak adlandırırır.

Teorem 1.3.6. $f \in S$ olsun. Bu durumda

$$\overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a_n}\, z^n$$

$$e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta}\, z^n;\ \theta \in \mathbb{R},$$

$$r^{-1} f(rz) = z + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n\,, 0 < r < 1,$$

$$\sqrt[k]{f(z^k)} = \left(z^k + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{k_n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$= z + \tfrac{a_2}{z} z^{k+1} + \tfrac{1}{2k^2}(2ka_3 - (k-1)a_2^2) z^{2k+1},\ k = 2,3, \ldots$$

fonksiyonları da S sınıfına aittir.

Teorem 1.3.7. S sınıfı aşağıdaki dönüşümler altında korunur.

I. Disk Otomorfizmi: $f \in S$ ise, $\mathrm{g}(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)},\ |z_0| < 1,$

II. Bölge Dönüşümü: $f \in S$ ise $\varphi : f(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve $f(\mathbb{D})$ de yalınkat ise $\mathrm{g}(z) = \frac{(\varphi \circ f)(z) - \varphi(0)}{\varphi'(0)}$,

III. İhmal Değer Dönüşümü: $f \in S$ ve $f(z) \neq \gamma$ ise $\mathrm{g}(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\gamma}}$ fonksiyonları S sınıfındadır.

Teorem 1.3.8. $f: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D})$ konform bir dönüşüm ve $f(0) = 0$ ve $f'(0) > 0$ olacak şekilde bir konform dönüşüm olsun. Ayrıca $z \in \mathbb{D}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ ve
$a_1 > 0$ olmak üzere f fonksiyonun

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{4}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(\mathbb{D})$ nin alanı $A\big(f(\mathbb{D})\big)$ ile gösterilirse,

$$A\big(f(\mathbb{D})\big) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{5}$$

İspat: $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ve yalınkat olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Bu ise

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

Denklemlerinin sağlanması demektir. Diğer taraftan analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7}$$

eşitlikleri ile verilebilir. (7) eşitsizliklerinin kullanılması ile

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{8}$$

eşitliği bulunur.
Diğer taraftan $Alan\, f(\mathbb{D})$ ifadesi

$$A\big(f(\mathbb{D})\big) = \iint_{f(\mathbb{D})} du\, dv \tag{9}$$

ile verilir.

Ayrıca çok katlı integrallerdeki ki değişken dönüşümü göz önüne alınarak Cauchy-Riemann denklemlerinin kullanılması ile

$$u = u(x,y), v = v(x,y) \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

eşitsizliğini buluruz. Dolayısıyla (9) eşitsizliği

$$A\big(f(\mathbb{D})\big) = \iint\limits_{f(\mathbb{D})} du\, dv = \iint\limits_{\mathbb{D}} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx\, dy = \iint\limits_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

bulunur.

$A\big(f(\mathbb{D})\big) = \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dx\, dy$ şeklinde idi. Buradan kutupsal koordinatlara geçersek;

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \le r \le 1$

$z = re^{i\theta},\ dx\, dy = r\, dr\, d\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

olur.

Ayrıca; $|f'(z)|^2 = f'(z)\overline{f'(z)}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$kullanarak

$$A\big(f(\mathbb{D})\big) = \iint\limits_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|f'\big(re^{i\theta}\big)\right|^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f'\big(re^{i\theta}\big)\overline{f'(re^{i\theta})}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m\overline{a_m} r^{m-1} e^{-i(m-1)\theta}\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2(n-1)} r \, dr \, d\theta = \int_0^1 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-1} \, dr$$

$$= 2\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} n^2 |a_n|^2 r^{2n} \right) \Big|_0^1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

bazen birim daire yerine birim dairenin dışını almak kullanışlı olabilir. O halde aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1.3.9. $\mathbb{D}^* = \{w: 1 < |w| < \infty\}$ bölgesi üzerinde

$$\mathrm{g}(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \cdots = w + b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{w_n} \tag{10}$$

biçiminde tanımlı yalınkat fonksiyonların sınıfını $\sum$ ile, bu sınıfa ait olup $w_0 = 0$ değeri almayan fonksiyonların sınıfını ise $\sum_0$ ile gösterelim. Buna göre $\sum_0 \subset \sum$ ve $\sum$ sınıfına ait her bir fonksiyonunun $\mathbb{D}^*$ bölgesinin kompakt ve bağlantılı bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürdüğü açıktır.

Ayrıca, S sınıfı ile $\sum_0$ sınıfı arasında yakın bir ilişki mevcuttur. Gerçekten, $f \in S$ ise

$$\mathrm{g}(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = z - a_2 + \frac{(a_2{}^2 - a_3)}{z} + \cdots \tag{11}$$

fonksiyonu $\sum_0$ sınıfına aittir.

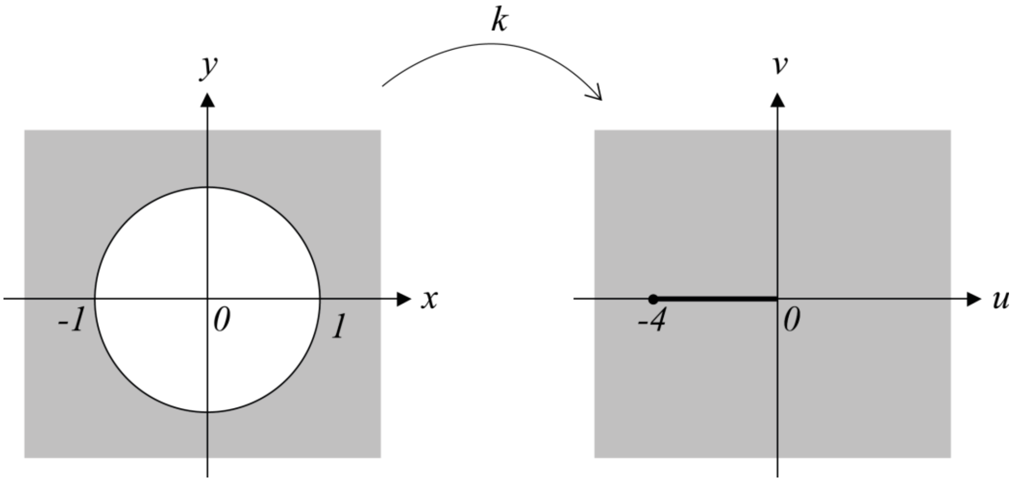
Tersine, $\mathrm{g} \in \sum_0$ ise

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{g}\left(\frac{1}{z}\right)} = z - c_0 z^2 + (c_0{}^2 - c_1) z^3 + \cdots \tag{12}$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. Eğer $k(z) \in S$ Koebe fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$\mathrm{g}(z) = \frac{1}{k\left(\frac{1}{z}\right)} = z - 2 + \frac{1}{z} \tag{13}$$

olup, g fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesini $\mathbb{C} - [-4,0]$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür (Şekil 3).



Şekil 3. $k(\mathbb{D}^*)$ görüntü bölgesi

Teorem 1.3.10. $\varphi \in \sum$ fonksiyonu (10) bağıntısıyla verilmiş ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \tag{14}$$

dır.

Sonuç 1.3.11. $\varphi \in \sum$ fonksiyonu (10) tipinde verilmiş olsun. Bu taktirde $|b_1| \leq 1$ dir.

Eşitlik, $\varphi(\xi) = \xi + b_0 + e^{i\theta}\xi^{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$, fonksiyonu için geçerlidir.

Üstelik, $|\xi| > 1$ için $\varphi(0) \neq 0$ ise, $|b_0| \leq 2$ dir.

Eşitlik, $\varphi(\xi) = \xi + 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}\xi^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, fonksiyonu içinde geçerlidir.

Teorem 1.3.12. $f \in S$ fonksiyonu $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde verilmiş ise, $|a_2| \leq 2$ dir.

Eşitlik; $f(z) = k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat $f \in S$ ise, $|\xi| > 1$ için $\varphi(\xi) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\xi}\right)} \in \sum$ dir. Üstelik, $|\xi| > 1$ için $\varphi(\xi) \neq 0$ dır.

φ fonksiyonunun Laurent açılımını kullanarak

$$\varphi(\xi) = \xi - a_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{\xi^k} = \xi - a_2 + \frac{c_2}{\xi^2} + \cdots \tag{15}$$

biçiminde olup Sonuç 1.3.11. den $|a_2| \leq 2$ elde edilir.

Teorem 1.3.13. $f \in S$ fonksiyonu $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde verilmiş ise, $\forall n \geq 2$ için, $|a_n| \leq n$ dir.

Eşitlik, $f(z) = k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ biçimindeki Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir (de Branges, 1985).

Teorem 1.3.14. $f(\mathrm{z}) \in \mathrm{S}$ olsun. $|\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3| \leq 1$ dir (Bieberbach, 1916).

İspat $\mathrm{g}(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = z - a_2 + \frac{(a_2{}^2 - a_3)}{z} + \cdots \in \sum$ olduğundan $|b_1| = |\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3| \leq 1$ dir.

Teorem 1.3.15. (Koebe ¼ Teoremi) $f \in S$ ise $f(\mathbb{D}) \supset D_{1/4}$ dür. Bu sonuç

$f(z) = k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ Koebe fonksiyonu için kesindir.

Üstelik, $\bigcap_{f \in S} f(\mathbb{D}) = D_{1/4}$ dür.

Önerme 1.3.16 $f \in \mathrm{S}$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{16}$$

dır.

Teorem 1.3.17. (Distortion) $f \in \mathrm{S}$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{17}$$

dır.

İspat $w \in \mathbb{C}$ için $w \leq r$ ise $-r \leq \mathrm{Re}w \leq r$, $-r \leq \mathrm{Im}w \leq r$ ve Önerme 1.3.16. dan

$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$ olduğundan

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \mathrm{Re}\ \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{18}$$

olur.

$z = \psi e^{i\theta}$, $\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \log f'(z)$ alalım. $\frac{\partial u(z)}{\partial \psi} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\psi}$, $\frac{du}{dz} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$, $\frac{dz}{d\psi} = e^{i\theta}$ ise;

$$\psi \frac{d}{d\psi} \log f'(z) = \psi \frac{f''(z)}{f'(z)} e^{i\theta} = z \frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{19}$$

$$\psi \frac{d}{d\psi} \log f'(z) = \psi \frac{d}{d\psi} \left(\log|f'(z)| + i arg f'(z) \right) = z \frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{20}$$

$$\psi \frac{d}{d\psi} \log|f'(z)| = \mathrm{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{21}$$

$$\psi \frac{d}{d\psi} \log f'(z) = \mathrm{Im} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{22}$$

bulunur. (21) i (18) de yerine ψ alarak yazarsak;

$$\frac{2\psi^2 - 4\psi}{1-\psi^2} \leq \psi \frac{d}{d\psi} \log|f'(z)| \leq \frac{2\psi^2 + 4\psi}{1-\psi^2} \tag{23}$$

$$\frac{2\psi - 4}{1-\psi^2} \leq \frac{d}{d\psi} \log|f'(z)| \leq \frac{2\psi + 4}{1-\psi^2} \tag{24}$$

Burada ψ üzerinden $(0, r)$ aralığında integralini alırsak;

$$\int_0^r \frac{2\psi - 4}{1-\psi^2} d\psi \leq \log|f'(z)| \leq \int_0^r \frac{2\psi + 4}{1-\psi^2} d\psi \tag{25}$$

elde edilir. Buradan;

$$\int_0^r \frac{2\psi - 4}{1-\psi^2} d\psi = \int_0^r \frac{2\psi}{1-\psi^2} d\psi - \int_0^r \frac{4}{1-\psi^2} d\psi = -\log(1-r^2) - \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$$
$$= \log \frac{1-r}{(1+r)^3}$$

$$\int_0^r \frac{2\psi + 4}{1-\psi^2} d\psi = \int_0^r \frac{2\psi}{1-\psi^2} d\psi + \int_0^r \frac{4}{1-\psi^2} d\psi = -\log(1-r^2) + \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$$
$$= \log \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

elde edilen sonuçlar (25) de yerine yazılırsa

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{26}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{27}$$

elde edilir.

Sonuç 1.3.18. $f \in$ S ise, her $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2r^2+4}{1-r^2},$$

$$|f''(z)| \leq \frac{2(2+r)}{(1-r)^4},$$

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \text{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

dır. Her üç bağıntı da $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Teorem 1.3.19. (Growth) $f \in$ S ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{28}$$

dır.

İspat $z = x \in (0,1)$ alabiliriz. Dolayısıyla; $f(x) = \int_0^x f'(u)\,du$ yazılabilir.

Teorem 1.3.17. gereği

$$|f(z)| \leq \int_0^x f'(u)\,du \leq \int_0^x \frac{1+u}{(1-u)^3}\,du \tag{29}$$

elde edilir. Burada,

$$\int_0^x \frac{1+u}{(1-u)^3} du = -\int_0^x \frac{du}{(1-u)^2} + 2\int_0^x \frac{du}{(1-u)^3} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$|f(z)| \leq \frac{x}{(1-x)^2} \quad (30)$$

elde edilir.

Alt sınır için bakalım. $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ ise Koebe'den dolayı;

$$(1-|z|)^2 > 0 \Rightarrow 1 - 2|z| + |z|^2 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2|z| + |z|^2 > 4|z|$$

$$\Rightarrow (1+|z|)^2 > 4|z|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \quad (31)$$

bulunur.

$|f(z)| < \frac{1}{4}$ ise $z \in \mathbb{D}, f(z) = w \in \left[\frac{1}{4}, 0\right]$ Teorem 1.3.15. göre $\mathrm{dist}\big(0, \partial f(\mathbb{D})\big) \geq \frac{1}{4}$ $[0, w]$ aralığı tamamen $f(\mathbb{D})$ dedir. Yani $\mathbb{D}$ nin f altındaki görüntüsü içindedir.

$\gamma, \mathbb{D}$ de 0'ı z'ye bağlayan c eğrisi olsun. $\gamma: [0, w] \to \mathbb{D}$ sürekli fonksiyon $\gamma(t) = f(t)$ $0 \leq t \leq w$ şeklinde tanımlayalım.

$$f(z) = w = \int_0^w f'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt = \int_0^w \left|f'\big(\gamma(t)\big)\right| |\gamma'(t)|\, dt = \int_\gamma |f'(\xi)||d\xi|$$

Teorem 1.3.17. göre,

$|f(z)| = \int_\gamma |f'(\xi)||d\xi| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-u}{(1+u)^3} du = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$ elde edilir.

Burada $f'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ negatif olmayan değer olarak alındı.

Teorem 1.3.20. $f \in S$ ve $z \in \mathbb{D}$ ise

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{32}$$

dir.

İspat $f \in S$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. $T_\xi(z) = \frac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z}$ konform dönüşümü $\mathbb{D}$ yi $\mathbb{D}$ ye dönüştürür.

$$F_\xi(z) = \frac{f\left(T_\xi(z)\right) - f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}$$

disk otomorfizması S dedir. Sonuç 1.3.18. den z yerine $-\xi$ alırsak $|-\xi| = |\xi|$ olur. Buradan;

$$\frac{|\xi|}{(1+|\xi|)^2} \leq \left|F_\xi(-\xi)\right| \leq \frac{|\xi|}{(1-|\xi|)^2} \tag{33}$$

$F_\xi(-\xi) = \frac{f\left(T_\xi(-\xi)\right)-f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}$, $T_\xi(-\xi) = \frac{-\xi+\xi}{1+\bar{\xi}(-\xi)} = 0$

$F_\xi(-\xi) = \frac{f(0)-f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}$, $f \in S$ olduğundan $f(0) = 0$ dır.

$F_\xi(-\xi) = \frac{-f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}$, (33) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\frac{|\xi|}{(1+|\xi|)^2} \leq \left|\frac{f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}\right| \leq \frac{|\xi|}{(1-|\xi|)^2} \tag{34}$$

(30) de ξ yerine z yazarsak;

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \left|\frac{f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}\right| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{35}$$

elde edilir. (31) de her iki tarafı $\frac{1-|z|^2}{|z|}$ çarparsak;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{f(z)}{|z|f'(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{36}$$

olur. Buradan ;

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{37}$$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \tag{38}$$

elde edilir. (37) ve (38) den

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{39}$$

elde edilir.

1.4. Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar

Tanım 1.4.1. $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış analitik ve
$P(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ Taylor açılımına sahip,
$P(0) = 1$, Re $P(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen $P(z)$ fonksiyonlarından oluşan kümeye *Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı* denir. Bu ayrıca *Carathedory Sınıfı* olarak da adlandırılır.

Teorem 1.4.2. $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskini $Re\, w > 0$ sağ yarım düzlemi üzerine resmeder. Bu $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ (Möbius) fonksiyonu P sınıfında merkezi rol oynar.

Teorem 1.4.3. $f, f_1, f_2 \in P$ ise aşağıdaki fonksiyonlarda P ye aittir.

I. $g(z) = f\left(e^{i\alpha} z\right)$, α reel,

II. $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$, $-1 \leq t \leq 1$,

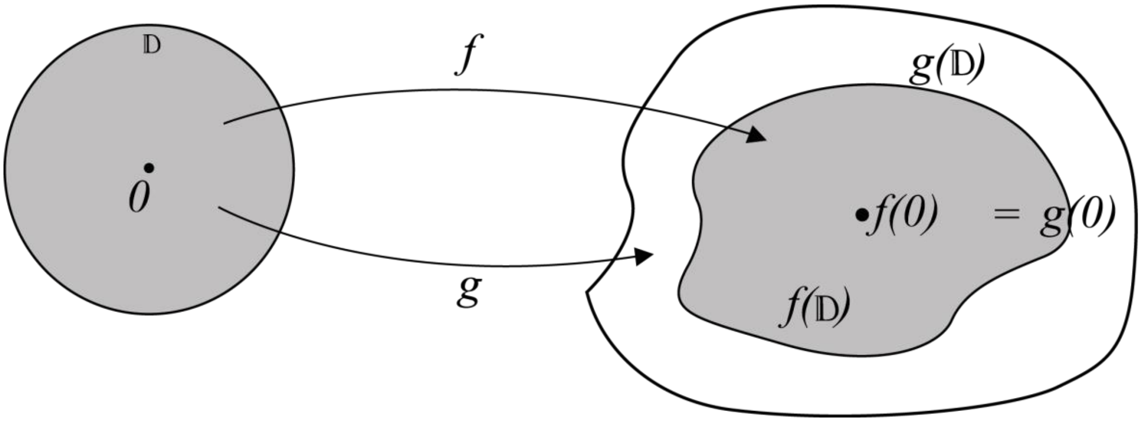
III. $g(z) = \frac{1}{f(z)}$,

IV. $g(z) = [f(z)]^{r_1} [f(z)]^{r_2}$, $r_1, r_2 > 0, r_1 + r_2 \leq 1$,

V. $g(z)=\frac{1}{a}\left[f\left(\frac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)-ib\right],\ f(\lambda)=a+ib, |\lambda|<1,$

VI. $g(z)=\frac{f(z)+ib}{1+ibf(z)}, b\in\mathbb{R}$

Tanım 1.4.4. $f, g\in A(\mathbb{D})$ olsun. Her $z\in U$ için, $f(z)=g\big(w(z)\big)$ eşitsizliğini sağlayan $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ özelliğinde $w\in A(\mathbb{D})$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *sabordine* denir ve bu durum $f\prec$ g biçiminde gösterilir (Şekil 4).



Şekil 4. f≺g Sabordinasyon prensibi

Teorem 1.4.5. $f\in A(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdir de, $\mathbb{D}$ de $\mathrm{Re}f(z)\geq 0$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t)+i\mathrm{Im}\,f(0) \tag{40}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}\,f(0)$ özelliğinde azalmayan μ fonksiyonu vardır.

Sonuç 1.4.6. $f\in A(\mathbb{D})$ ve $f(0)=1$ olsun. Bu takdirde $f\in P$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{D}$ de

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-ti}}{1-ze^{-ti}}d\mu(t) \tag{41}$$

olacak biçimde ve $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

Teorem 1.4.7. $f \in P$ ise, $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{42}$$

dır. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P\left(e^{i\theta}z\right)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat $f \in P$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) \prec P(z)$ ve $f(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$ olacak şekilde Schwarz önermesinin şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır.

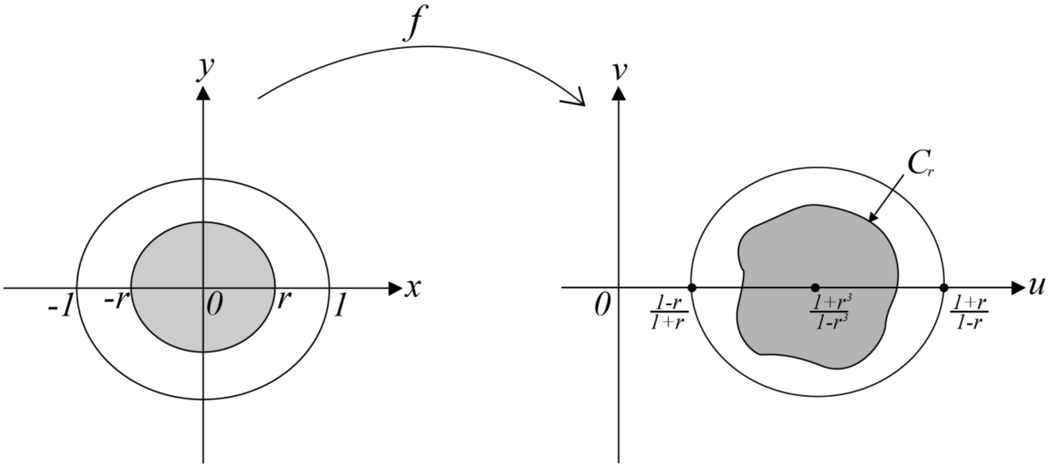
$$|f(z)| = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right| \leq \frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{1+r}{1-r}$$

elde edilir. Teorem 1.4.3. den bu son eşitlik $\frac{1}{f} \in P$ fonksiyonu için de geçerli olduğundan, $\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)|$ bulunur. Böylece (42) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Açıklama 1.4.8. (42) eşitsizliğinin her tarafından $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ çıkarılırsa,
$f \in P$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için

$$\left|f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \tag{43}$$

bulunur. Bu $f(z)$ değerler kümesinin merkezi $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ ve yarıçapı $\frac{2r}{1-r^2}$ olan kapalı daire içinde bulunması anlamına gelir.



Şekil 5. C_r ve ∂D_r nin görüntüsü

1.5. Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.5.1. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in A$ noktasını, her bir $w \in A$ noktasına birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_0 + tw \in A$ ise, A kümesine w_0 noktasına göre *yıldızıl küme* denir.

Eğer bütün $w_1, w_2 \in A$ noktalarını birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_1 + tw_2 \in A$ ise, A kümesine *konveks küme* denir. Başka bir deyişle, konveks küme, her bir noktasına göre yıldızıl olan kümedir.

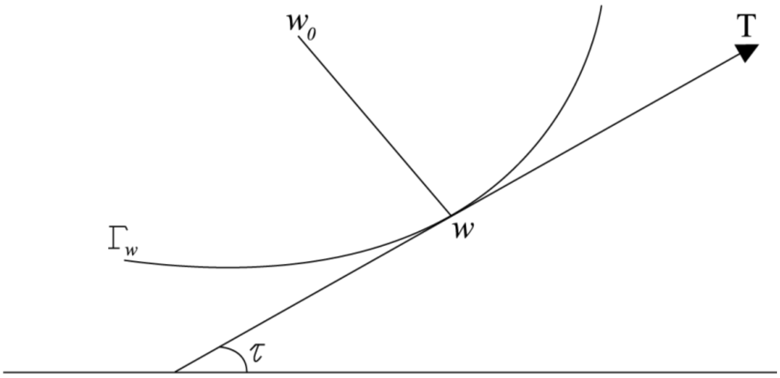
Tanım 1.5.2. $z_0 \in D_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq 1\}$ ve $f \in A(D_r)$ olsun. Eğer f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise, f fonksiyonuna D_r üzerinde z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Orjine göre yıldızıl olan fonksiyonlara kısaca yıldızıl fonksiyon adı verilir. Ayrıca f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi konveks ise f fonksiyonuna D_r üzerinde konveks fonksiyon denir.

D_r dairesinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, $S^*(D_r)$ ve $K(D_r)$ ile gösterilir. Özel olarak, $\mathbb{D}$ de $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahip yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla S^* ve K ile gösterilir.

Tanım 1.5.3. $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altında $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ nin görüntüsünü göz önüne alalım. $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ bir çember, bir doğru parçası veya bir başka eğri olabilir. Kabul edelim ki $a \leq t \leq b$ olmak üzere $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ şeklinde parametrik denklem ile verilen bir düzgün eğri olsun. Yalnız $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$, $a \leq t \leq b$ dir. Burada $x(t)$ ve $y(t)$ reel değerli fonksiyonlardır. $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ yönlü bir eğridir ve yönü artan t yönündedir. $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altında $\Gamma_{\boldsymbol{z}}$ nin görüntüsü Γ_w olsun ve $w_0 \notin \Gamma_w$ olarak alınsın (Şekil 6). Eğer $\arg(w - w_0)$ fonksiyonu t nin azalmayan bir fonksiyonu ise, yani;

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) \geq 0,\ t \in [a,b] \tag{44}$$

oluyorsa Γ_w eğrisine w_0 noktasına göre yıldızıldır denir.



Şekil 6. Eğri Üzerinde Yıldızıllık

(44) eşitsizliği şu şekilde yazabilir. Yani (44) eşitsizliğinin sol tarafı,

$$\frac{d}{dt}\arg(w-w_0)=\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\ln(w-w_0)=\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dt}\ln(w-w_0)\right\}$$
$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dz}\ln(w-w_0)\frac{dz}{dt}\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\frac{dz}{dt}\right\}$$

şeklinde yazabilir. Böylece $\Gamma_z\colon z=z(t)$ eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsünün w_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}z'(t)\right\}\geq 0,\ t\in[a,b] \tag{45}$$

olmasıdır.

Eğer Γ_w yayının teğetinin argümanı t nin azalmayan bir fonksiyonu ise Γ_w yayına konvekstir denir. Γ_z nin teğetinin yönü $\arg z'(t)$ dir ve dönüşüm bu teğet vektörünü bir $\arg f'(z)$ açısı boyunca döndürür. Böylece Γ_w eğrisinin bir konveks eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d}{dt}\{arg(z'(t)f'(t))\}\geq 0, t\in[a,b] \tag{46}$$

olmasıdır. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ifade

$$\frac{d}{dt}\{\arg(z'(t)f'(t))\}=\frac{d}{dt}\operatorname{Im}[\ln z'(t)+\ln f'(t)]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{d}{dt}(\ln z'(t) + \ln f'(t))\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{Z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)} z'(t)\right]$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $\forall z \in \Gamma_z$ için $f'(z) \neq 0$ olmak üzere Γ_z eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsünün konveks eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Im}\left[\frac{Z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)} z'(t)\right] \geq 0, t \in [a, b] \tag{47}$$

olmasıdır.

Sonuç 1.5.4. Tanım 1.5.3. den Γ_z eğrisini $C_r: |z| = R$ çemberi olarak seçelim. Bu durumda $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere $z = Re^{it}$ olarak alınırsa $z'(t) = iRe^{it}$ ve $z''(t) = -Re^{it} = -z$ olacağından,

$$\operatorname{Im}\left[\frac{izf'(z)}{f(z)-w_0}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-w_0}\right] \geq 0 \tag{48}$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{-z}{iz} + \frac{f''(z)}{f'(z)} iz\right] = \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0 \tag{49}$$

elde edilir.

Teorem 1.5.5. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonunun ($w_0 = 0$'a göre) yıldızıl olması için gerek ve yeter şart, her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0 \tag{50}$$

olmasıdır.

Teorem 1.5.6. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart, $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0 \tag{51}$$

olmasıdır.

Teorem 1.5.7. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart, $z, \xi \in \mathbb{D}$ için

$$\text{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi}\right] \geq 0 \tag{52}$$

olmasıdır.

Sonuç 1.5.8. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart, $|\xi| < |z| < 1$ için

$$\text{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\xi)}\right] > 0 \tag{53}$$

olmasıdır (Suffridge, 1970).

Teorem 1.5.9. f, $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $f'(z) \neq 0$ ve $\mathrm{g(z)} = \mathrm{z}f'(z)$ olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart, $\mathrm{g} \in S^*$ olmasıdır (Alexander, 1915-16).

Teorem 1.5.10. $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $\mathbb{D}$ yi konveks bölgeye dönüştüren bütün normalize fonksiyonlar sınıfını K ile $\mathbb{D}$ yi yıldızıl bölgeye dönüştüren normalize yalınkat fonksiyonlar sınıfını da S^* ile göstereceğiz.

$$f(z) \in K \iff F(z) = zf'(z) \in S^*$$
$$F(z) \in S^* \iff f(z) = \int_0^z \frac{F(\xi)}{\xi} d\xi \in K$$

Teorem 1.5.11. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ S^* sınıfında ise $\forall n$ için $|a_n| \leq n$ dir. Bu eşitsizlik kesindir ve Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu için eşitlik vardır (Nevanlinna, 1920).

İspat: $f(z) \in S^*$ olsun. $\text{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$ olduğundan $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ reel kısmı pozitif olan fonksiyonlar sınıfı P ye aittir. Bu sınıfa ait fonksiyon açılımında;

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{K=1}^{\infty} b_k z^k = \mathrm{g}(z) \tag{54}$$

şeklindedir.

$g(z) \in P$ ise $|b_k| \leq 2$, $k = 1,2,\ldots$ için

$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $f'(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^{k-1}$, $zf'(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k$

eşitlikleri (1.54) de yerine yazılırsa;

$$zf'(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k = \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\right)\left(1 + \sum_{K=1}^{\infty} b_k z^k\right)$$

$$\Rightarrow z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \cdots = (z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots)(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$
$$\Rightarrow z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \cdots = z + (a_2 + b_1)z^2 + (a_3 + a_2 b_1 + b_2)z^3$$

$$\Rightarrow n a_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}$$

elde edilir. $k = 2$ için $2a_2 = a_2 + b_1 \Rightarrow a_2 = b_1 \Rightarrow |a_2| \leq 2, |b_1| \leq 2$ doğrudur. k için doğru olsun. $|a_k| \leq k$ olsun.

$$|(n-1)a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}||b_k| + |b_{n-1}| \leq 2\sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}| + 2$$

$$= 2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-k} |a_{n-k}|\right) = 2(1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_2|) \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} k = 2\frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n(n-1) \Rightarrow |(n-1)a_n| \leq (n-1)n$$

bulunur. $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ dir.

Teorem 1.5.12. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise, $n = 2,3,\ldots$ için $|a_n| \leq 1$ dir.

Eşitlik, $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)}$ fonksiyonu için geçerlidir (Löwner, 1923).

Teorem 1.5.13. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1-|a_2|^2}{3} \tag{55}$$

dır

Sonuç 1.5.14. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{3} \tag{56}$$

dır. Eşitlik, $|\lambda| = 1$ olması durumunda,

$$f(z) = \frac{1}{2\lambda} \log\left[\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\right] \tag{57}$$

fonksiyonu için geçerlidir (Nehari, 1976).

Teorem 1.5.15. $f(z) \in S^*$ ise;

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{58}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{59}$$

ve $k \geq 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!(1+|z|)}{(1+|z|)^{k+2}} \tag{60}$$

eşitsizlikleri kesin olarak sağlanır ve Koebe fonksiyonu için eşitlik vardır.

Teorem 1.5.16. $f(z) \in K$ ise

$$\frac{|Z|}{1+|Z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|} \tag{61}$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \tag{62}$$

ve $k \geq 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{(1+|z|)^{k+1}} \tag{63}$$

eşitsizlikleri kesindir ve eşitlik $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.6. α Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.6.1. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olmak üzere, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha \tag{64}$$

ise, *f* fonksiyonuna α mertebeli yıldızıl fonksiyon,

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \tag{65}$$

ise, *f* fonksiyonuna α mertebeli konveks fonksiyon denir.

$z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde normalize edilmiş α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı sırasıyla $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 1.6.2. f, $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{g(z)} = \mathrm{z}f'(z)$ olsun. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart, $S^*(\alpha)$ olmasıdır.

Teorem 1.6.3. $f \in K$ ise $f \in S^*\left(\frac{1}{2}\right)$ dir. Sonuç kesin olup $\frac{1}{2}$ sabiti büyütülemez (Suffridge, 1970).

İspat $f \in K$ olduğundan Teorem 1.5.7. gereği , $z, \xi \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi}\right] \geq 0$$

dır. Bu eşitsizlikte $\xi = 0$ alınırsa, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \frac{1}{2}$$

bulunur. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Eşitlik, $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

Sonuç 1.6.4. $f \in K$ ise $z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \frac{1}{2}$ dir. Sonuç kesin olup, sabit büyütülemez.

İspat $f \in K$ olduğundan (52) bağıntısı sağlanır. $z, \xi \in \mathbb{D}$ için

$$f(z,\xi) = \frac{zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{\xi}{z-\xi}$$

diyelim. (52) bağıntısından $z, \xi \in \mathbb{D}$ için $f(z,\xi) \geq \frac{1}{2}$ eşitsizliği elde edilir.

$\xi \in \mathbb{D}$ sabit tutulup $f(z,\xi)$, z değişkenine göre kuvvet serisi açılırsa,

$$f(z,\xi) = 1 + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{f(\xi)}\right)z + \cdots$$

elde edilir. Bu iki bağıntıyı eşitlersek $\varphi(z) = 2f(z,\xi) - 1 \in P$ olur.

Teorem 1.3.12. gereği, $\left|\frac{1}{\xi} - \frac{1}{f(\xi)}\right| \leq 1$ eşitsizliği elde edilir. Her iki taraf ξ ile çarpılırsa,

$$\left|1 - \frac{\xi}{f(\xi)}\right| \leq |\xi| < 1$$

bulunur. Buradan Re $\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \frac{1}{2}$ elde edilir. Eşitlik $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu için sağlanır.

Teorem 1.6.5. $\alpha \in [0, 1)$ ve

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{2\alpha-1+\sqrt{(2\alpha-1)^2+8}}{4} \tag{66}$$

olmak üzere $f \in K(\alpha)$ ise $f \in S^*(\beta)$ dır (Jack, 1971).

Teorem 1.6.6. $\alpha \in [0, 1)$ olsun.

I. $z \in \mathbb{D}$ ve $g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ olmak üzere, $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır. Burada kuvvet fonksiyonunun dalı $z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} |_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

II. $z \in \mathbb{D}$ ve $h(z) = z[f'(z)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ olmak üzere, $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $h \in S^*$ olmasıdır. Kuvvet fonksiyonunun dalı $[f'(z)]^{\frac{1}{1-\alpha}} |_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

Teorem 1.6.7. $\alpha \in [0, 1)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere $f \in K(\alpha)$ ise

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{67}$$

dır. Eğer $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \leq |f(z)| \leq \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{68}$$

ve $\alpha = \frac{1}{2}$ ise

$$\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -\log(1-r) \tag{69}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikler kesin olup, eşitlik hali

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ -\log(1-z), & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{70}$$

fonksiyonu için sağlanır (Robertson, 1936).

Teorem 1.6.8. $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere $f \in S^*(\alpha)$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{71}$$

dır. Sınırlar kesin olup, eşitlik $k^*(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.α mertebeli konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter şartı ifade eden aşağıdaki teorem, (Brown, 1989) tarafından elde edilmiştir. Bu sonuç $|\xi| < 1$ için $\mathbb{D}$ de konveks bir fonksiyonunun her $|z-\xi| < r < 1-|\xi|$ dairesini konveks bir bölge üzerine dönüştürdüğünü gösterir.

Teorem 1.6.9. $\alpha \in [0,1)$ ve $f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $|\xi| < 1$ ve $|z-\xi| < 1-|\xi|$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(z-\xi)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \tag{72}$$

olmasıdır (Brown, 1989).

İspat İlk olarak, $|\xi| < 1$ ve $|z-\xi| < 1-|\xi|$ için

$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(z-\xi)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitsizlikte $\xi = 0$ alınırsa $f \in K(\alpha)$

olduğu görülür.

Tersine, $f \in K(\alpha)$ ise $|\xi| = r < 1$ özelliğinde belli bir ξ noktası için

$$A = 1 + \left(\frac{z-\xi}{1-\alpha}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

olsun. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi dikkate alınarak,$|z-\xi| = p < 1-r$ için $\operatorname{Re} A > 0$ olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için $|z-\xi| = p$ özelliğinde olsun. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi dikkate alınarak, $|z-\xi| = p < 1-r$ için $\operatorname{Re} A > 0$ olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için $|z-\xi| = p$ özelliğinde bir $z \in \mathbb{D}$ noktası seçelim. $f \in K(\alpha)$ olduğundan, $p \in P$ için

$$A = \frac{(z-\xi)(P(z)-1)}{z} + 1 \tag{73}$$

olarak yazılabilir. P sınıfının ekstrem noktaları, $\theta \in \mathbb{R}$ için, $P_\theta(z) = \frac{(1+e^{i\theta}z)}{(1-e^{i\theta}z)}$ fonksiyonları olduğu biliniyor. (73) eşitsizliğinin sağ tarafı P üzerinde bir afin dönüşüm olduğundan, $\min_{p\in P} \operatorname{Re} A$ değerini P sınıfının bir ekstrem noktasından alır. $\xi = re^{i\theta}$ ve $z = \xi + pe^{i\theta}$ için, gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\operatorname{Re} A \geq \min_{0\leq\theta\leq 2\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{(z-\xi)(P_\theta(z)-1)+1}{z}\right]$$

$$= \min_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|1-e^{i\theta}z\right|^{-2}\left[-P^2+1-2r\cos(\theta+\varphi)+r^2\right]$$

$$\geq \min_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|1-e^{i\theta}z\right|^{-2}\left[(1-r)^2-P^2\right]$$ bulunur.

Teorem 1.6.10. $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

I. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*(\alpha)$ ise, $n = 2,3, \dots$ için

$|a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)$

Eşitlik, $k^*(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

II. $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in K(\alpha)$ ise, $n = 2,3, \dots$ için

$|b_n| \leq \frac{1}{(n)!}\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)$ dır. Eşitlik, (70) bağıntısında verilen fonksiyonlar için geçerlidir (Robertson, 1936).

Teorem 1.6.11. $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart, $z \in \mathbb{D}$ için

$$f(z) = z\exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(1-ze^{-i\theta}\right)d\mu(\theta)\right] \tag{74}$$

olacak biçimde $\mu(2\pi)-\mu(0) = 2\pi$ özelliğinde, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Sonuç 1.6.12. $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \int_0^z z \exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1 - ze^{-i\theta}\right) d\mu(\theta)\right] \tag{75}$$

olacak biçimde $\mu(2\pi) - \mu(0) = 2\pi$ özelliğinde, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır**.**

Teorem 1.6.13. $z \in \mathbb{D}$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun.

$$\text{Eğer } \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha \tag{76}$$

ise $f \in S^*(\alpha)$ dır.

İspat (76) bağıntısından

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| \leq 1$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\left|zf'^{(z)} - f(z)\right| - (1-\alpha)|f(z)| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n\right| - (1-\alpha)\left|z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^n - (1-\alpha)\left(|z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\right)$$

$$\leq |z|\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| - (1-\alpha)\right) \leq 0$$

olur. Burada,

$$\left|1 - \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq 1-\alpha \text{ veya } \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \alpha$$

elde edilir.

Teorem 1.6.14. $z \in \mathbb{D}$, $0 < \alpha < 1$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun.

Eğer $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ (77)

ise $f \in K(\alpha)$ dır.

İspat (77) bağıntısından

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \leq 1$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$|z^2 f''(z) - z f'(z)| - (1-\alpha)|z f'(z)| = \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n z^n \right| - (1-\alpha) \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n \right|$$

$$\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| |z|^n - (1-\alpha) \left(|z| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |z|^n \right)$$

$$\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| |z|^{n-1} - |z|(1-\alpha) + (1-\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |z|^n$$

$$\leq |z| \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| - (1-\alpha) \right) \leq 0$$

olur. Burada,

$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right] \geq \alpha$ veya $\left|1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1-\alpha$

elde edilir.

1.7. Kompleks Mertebeden Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.7.1. $b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{D}$ dairesinde $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} \geq 0 \tag{78}$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonuna $(1-b)$ mertebeden yıldızıl fonksiyon denir (Nasr ve Aouf, 1985).
Böyle fonksiyonların sınıfı $S^*(1-b)$ ile gösterilir. $b = 1$ için $S^*(0) = S^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $b = 1 - \alpha$ için $S^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.
Önerme 1.7.2. $f \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = b[p(z) - 1] + 1 \tag{79}$$

olacak biçiminde bir $p \in P$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.
Teorem 1.7.3. $f \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z) = z \exp\left\{\int_0^{2\pi} -2b \log\left(1 - ze^{-it}\right) d\mu(t)\right\} \tag{80}$$

olacak biçimde

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1, \int_0^{2\pi} \frac{(1+ze^{-it})}{(1-ze^{-it})} d\mu(t) = p(z) \in P \tag{81}$$

gerçekleyen azalmayan bir $\mu(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır.
Sonuç 1.7.4. $f \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart, $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z\left[\frac{\mathrm{g}(z)}{z}\right]^b$ olacak şekilde bir $\mathrm{g} \in S^*$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Teorem 1.7.5. Re$b > 0$ olmak üzere $n = 2, 3, \ldots$ için, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*(1-b)$ ise

$$|a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{m=0}^{n-2} |2b + m| \tag{82}$$

dır. Eşitlik,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2b}} = \left\{ z + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{m=0}^{n-2} \left(\frac{2b+m}{m+1} \right) z^n \right\}$$

fonksiyonu için sağlanır.

Tanım 1.7.6. $b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{D}$ dairesinde $\mathrm{g}'(\mathrm{z}) \neq 0$ ve

$$\mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{b} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0 \tag{83}$$

şartını sağlayan f analitik fonksiyonuna b mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $C(b)$ ile gösterilir (Nasr ve Aouf, 1987).

Teorem 1.7.7. $f(z) \in C(b)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S^*(1-b)$ olmasıdır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Tanım 1.7.1 de verilen $S^*(1-b)$ ve Tanım 1.7.6. da verilen $C(b)$ (kompleks mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar) sınıfının bir alt sınıfı olan kompleks mertebeden Janowski fonksiyonlar sınıfı için bazı katsayı eşitsizlikleri, yarıçap problemleri ve bahsi geçen sınıflar arasındaki ilişkileri veriyoruz. Burada yapılan çalışmalar esas olarak (Nasr ve Aouf, 1985-87) ve (Janowski, W. 1970) de yapılanların daha genel şeklidir. Bu çalışmada $S_b^*(M)$ ile gösterdiğimiz $\left|1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)-M\right| < M,\ M \geq 1$ şartını sağlayan ve normalize fonksiyonlardan oluşan fonksiyonlar sınıfı ile $C_b(M)$ ile gösterdiğimiz $\left|1+\frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)}-M\right| < M,\ M \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan ve normalize fonksiyonlardan oluşan fonksiyonlar sınıfına ait katsayı eşitsizlikleri, iki sınıf arasındaki fonksiyonel bağıntılar, $S_b^*(M)$ nin yıldızıllık yarıçapı ve $C_b(M)$ nin konvekslik yarıçapı verildi. Her iki sınıfa ait ekstremel yani birim daireyi yıldızıl (veya konveks) bir bölgeye dönüştüren "en geniş" fonksiyonlar verildi. Elde edilen tüm bulgular M nin ve b nin uygun değerleri için önceki çalışmalarla uyumlu olduğu görülür.

3. BULGULAR

3.1. Kompleks Mertebeden Konveks ve Yıldızıl Fonksiyonların Bir Alt Sınıfı

$\mathbb{D} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ açık birim diskte analitik, $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere $SC(b, \lambda, M)$ ile

$$\left|1 + \frac{1}{b}\left(\frac{z\left(\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)\right)'}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right) - M\right| < M \tag{84}$$

$(M \geq 1,\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ b \in \mathbb{C} - \{0\},\ f(z) \in S\ )$ şartını sağlayan S nin bir alt sınıfını gösterelim. Burada
$\lambda = 0$ ise

$$\left|1 + \frac{1}{b}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} - 1\right) - M\right| < M \tag{85}$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına kompleks mertebeden yıldızıl Janowski fonksiyonlar sınıfı diyeceğiz ve bu sınıfı $SC(b, 0, M) = S_b^*(M)$ ile göstereceğiz. Burada $b = 1,\ M \to \infty$ ise yıldızıl fonksiyon sınıfı (Duren ve Goodman, 1983) elde edilir.

$b = 1$ ise yıldızıl Janowski fonksiyon sınıfı (Janowski, 1970) elde edilir.
$M \to \infty$ ise kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon sınıfı (Nasr ve Aouf, 1985) elde edilir.
$\lambda = 1$ ise

$$\left|1 + \frac{1}{b}\frac{z f''(z)}{f'(z)} - M\right| < M \tag{86}$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına kompleks mertebeden konveks Janowski fonksiyonlar sınıfı diyeceğiz ve bu sınıfı $SC(b, 1, M) = C_b(M)$ ile göstereceğiz. Burada $b = 1,\ M \to \infty$ ise konveks fonksiyon sınıfı (Duren ve Goodman, 1983) elde edilir.

Tanım 3.1.1. $|p(z)-M|<M$, $M\geq 1$ şartını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyon sınıfını $P(M)$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.2. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad z\in\mathbb{D}$

$$\left|1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)-M\right|<M, M\geq 1 \text{ ise} \tag{87}$$

$f(z)\in S_b^*(M)$ denir.

Tanım 3.1.3. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad z\in\mathbb{D}$

$$\left|1+\frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)}-M\right|<M, M\geq 1 \text{ ise} \tag{88}$$

$f(z)\in C_b(M)$ denir.

Yukarıdaki her iki tanımda da $b=1$ ise $S_b^*(M)=S^*(M)$ ve $C_b(M)=C(M)$ alınır (Janowski, 1970).

Önerme 3.1.4. $f(z)\in C_b(M)$ olması için gerek ve yeter şart $f(z)=ze^{b\int_0^z\frac{p(\xi)-1}{\xi}d\xi}$ olacak şekilde bir $p(z)\in P(M)$ olmasıdır.

İspat $f(z)\in C_b(M)$ ise $p(z)=1+\frac{1}{b}(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1)$ olmak üzere

$\frac{b(p(z)-1)}{z}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}$ elde edilir. 0 dan z ye karşılıklı integral alınırsa istenen sonuç bulunur.

Önerme 3.1.5. $f(z)\in C_b(M)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z)\in S_b^*(M)$ olmasıdır.

İspat $1+\frac{1}{b}\frac{f''(z)}{f'(z)}=1+\frac{1}{b}\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}-1\right)\Leftrightarrow z\frac{g'(z)}{g(z)}=1+\frac{f''(z)}{f'(z)}\Leftrightarrow g(z)=zf'(z)$.

Önerme 3.1.6. $f(z)\in S_b^*(M)$ olası için gerek ve yeter şart $f(z)=z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^b$ olacak şekilde bir $g(z)\in S^*(M)$ olmasıdır.

İspat $1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)=\ z\frac{g'(z)}{g(z)}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)=b\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}-1\right)\Leftrightarrow \log\frac{f(\xi)}{\xi}\,\Big|_0^z= b\log\frac{g(\xi)}{\xi}\,\Big|_0^z$$

$$\Leftrightarrow f(z)=z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^b$$

Önerme 3.1.7. $f(z) \in C_b(M) \Leftrightarrow \left(g'(z)\right)^b = f'(z)$ olacak şekilde $g(z) \in C(M)$bulunmasıdır.

İspat $1 + \frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} \Leftrightarrow \frac{f''(z)}{f'(z)} = b\frac{g''(z)}{g'(z)} \Leftrightarrow f'(z) = \left(g'(z)\right)^b$ olur.

Önerme 3.1.8. $f(z) \in S_b^*(M)$ olması için gerek ve yeter şart $f(z) = z\left(g'(z)\right)^b$ olacak şekilde bir $g(z) \in C(M)$ olmasıdır.

İspat $1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) = 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}$

$\Leftrightarrow b\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow b\ln g'(z) = \ln\frac{f(z)}{z} \Leftrightarrow f(z) = z\left(g'(z)\right)^b$

Tanım 3.1.9. $\mathbb{D} = \{z: z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ birim dairede analitik ve $z \in \mathbb{D}$ için $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ şartını sağlayan $\omega(z)$ fonksiyonların sınıfını Ω ile gösteriyoruz.

Eğer $p \in P(M)$ ise $p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-m\omega(z)}$ dir (Janowski, 1970).

Önerme 3.1.10. $\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \Omega$ ve μ herhangi bir kompleks sayı olmak üzere

$|c_2 - \mu c_1^2| \leq \max\{1, |\mu|\}$ dir (Keogh ve Merkes, 1969). (89)

Teorem 3.1.11. $f(z) \in S_b^*(M)$ ve μ herhangi kompleks sayı ise

$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{(m+1)|b|}{2}\max\{1, |\, b(m+1)(2\mu - 1) - m|\},\ m = 1 - \frac{1}{M}$ (90)

dir.

İspat $1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) = \frac{1+\omega(z)}{1-m\omega(z)},\ \omega(z) \in \Omega,\ m = 1 - \frac{1}{M}$

$\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) = \frac{(m+1)\omega(z)}{1-m\omega(z)}$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 = \frac{b(m+1)\omega(z)}{1 - m\omega(z)} \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(b(m+1) - m)\omega(z) + 1}{1 - m\omega(z)}$$

$$zf'(z) - f(z) = \omega(z)[(b(m+1) - m)f(z) + mzf'(z)]$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b(m+1) + (k-1)m)z^k \quad (a_1 = 1)$$

burada $\omega = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ dir. Yukardaki ifadede katsayı eşitlemesi yapılırsa

$$a_2 = b(m+1)c_1$$
$$2a_3 = b(m+1)c_2 + m + b(m+1)(b(m+1)+m)c_1^2$$

elde edilir. Buradan $|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|b|(m+1)}{2}|c_2 - (b(m+1)(2\mu-1) - m)c_1^2|$ bulunur. Önerme 3.1.10. ten istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.1.12. $f(z) \in S_b^*(M)$ ise

$$|a_2| \leq (m+1)|b| \tag{91}$$

$$|a_3| \leq \frac{m+1}{2}|b| \max\{1, |m + (m+1)b|\} \text{ dir.} \tag{92}$$

İspat Teorem 3.1.11. den $\mu = 0$ alarak elde edilir.

Teorem 3.1.13. $f(z) \in C_b(M)$ ve herhangi bir kompleks μ sayısı için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{(m+1)}{6}|b| \max\left\{1, \left|b(m+1)\left(\frac{3}{2}\mu - 1\right) - m\right|\right\} \text{ dir.} \tag{93}$$

İspat $1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{1+\omega(z)}{1-m\omega(z)},\ \omega(z) \in \Omega,$

$$\big(1 - m\omega(z)\big)zf''(z) = b(m+1)\omega(z)f'(z)$$

$$zf''(z) = \omega(z)[b(m+1)f'(z) + mzf''(z)]$$

$f'(z),\ f''(z)$ yerine yazılıp düzenlenirse

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{\infty} k(b(m+1) + (k-1)m)a_k z^k, (a_1 = 1)$$

$$2a_2 z^2 + 6a_3 z^3 + \cdots = (c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)(b(m+1)z + 2(b(m+1)+m)a_2 z^2 + \ldots)$$

katsayı eşitlemeleri yapılırsa;

$2a_2 = b(m+1)c_1$

$6a_3 = b(m+1)(b(m+1)+m)c_1^2 + c_2)$ elde edilir. Buradan istenen sonuç bulunur.

Önerme 3.1.14. $f(z) \in C_b(M)$

$$|a_2| \leq \frac{m+1}{2}|b| \tag{94}$$

$$|a_3| \leq \frac{m+1}{6}|b|\max\{1, |b(m+1)+m|\} \text{ dir.} \tag{95}$$

İspat Teorem 3.1.13. den elde edilir.

Teorem 3.1.15. Eğer $f(z) \in S_b^*(M)$ ise

$$|a_{\boldsymbol{n}}| \leq \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}|b(m+1)+(k-1)m| = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k} \text{ dir.} \tag{96}$$

İspat $f(z) \in S_b^*(M)$ olduğundan $1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) = \frac{1+\omega(z)}{1-m\omega(z)},\ \omega(z) \in \Omega,$

$$\Rightarrow zf'(z) - f(z) = \omega(z)[(b(m+1)-m)f(z) + mzf'(z)]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b(m+1)+(k-1)m)z^k \quad (a_1 = 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b(m+1)+(k-1)m)z^k$$

Burada $k \geq n+1$ için $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k$ serisi $\mathbb{D}$ de yakınsak bir seridir ve b_k $(k \geq n+1)$ lar eşitliğin her iki yanındaki serilerin katsayılarının toplamından oluşmaktadır .$z = re^{it}$ ve $|\omega(z)| < 1$ olduğunu göz önüne alıp, $[0,2\pi]$ aralığında integral alarak

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2|a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k r^k e^{itk}\right|^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b(m+1)+(k-1)m)r^k e^{itk}\right|^2 dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} |b(m+1)+(k-1)m|^2 |a_k|^2 r^{2k}$$

$r \to 1^-$ alarak $\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2|a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}|b(m+1)+(k-1)m|^2|a_k|^2$ bulunur.

$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k$ $\mathbb{D}$ de analitik olduğundan $[0,2\pi]$ aralığındaki integrali sıfırdır. Buradan sol tarafta n. terimi yalnız bırakırsak

$$(n-1)^2|a_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(k-1)^2]|a_k|^2$$

veya

$|a_n|^2 \leq \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(k-1)^2]|a_k|^2$ elde edilir.

Şimdi tümevarımla ispatımızı tamamlayalım.

$|a_2| \leq |b(m+1)|$ ve $|a_3| \leq \frac{1}{2}\,|b(m+1)|\,|b(m+1)+m|$ doğru olur.

$j = 2, 3, \dots, n-1$ için $|a_j| \leq \prod_{k=1}^{j-1}\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}$ olsun.
$j = n-1$ için $|a_{n-1}|^2 \leq \prod_{k=1}^{n-2}\left[\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}\right]^2$ dir.

Tümevarım hipotezinden a_n için

$|a_n|^2 \leq \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-2}[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(k-1)^2]\,|a_k|^2+$
$\frac{1}{(n-1)^2}[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(n-1)^2]|a_{n-1}|^2$

$$\leq \prod_{k=1}^{n-2}\left[\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}\right]^2 +$$

$$\frac{1}{(n-1)^2}\left[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(n-1)^2\right]\prod_{k=1}^{n-2}\left[\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}\right]^2$$

$= \prod_{k=1}^{n-2}\left[\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}\right]^2 \frac{|b(m+1)+(k-1)m|^2}{(n-1)^2} = \prod_{k=1}^{n-1}\left[\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k}\right]^2$ elde edilir.

Bu da ispatı tamamlar. Buradaki ispat metodunda Clunie'den yararlanılmıştır (Clunie, 1959).

Teorem 3.1.16. $f(z) \in C_b(M)$ ise

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{|b(m+1)+(k-1)m|}{k} \text{ dir.} \tag{97}$$

dır.

İspat Teorem 3.1.13. den $zf''(z) = \omega(z)[b(m+1)f'(z) + mzf''(z)]$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{\infty} k(b(m+1)+(k-1)m)a_k z^k\,, (a_1 = 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k = \omega(z)\sum_{k=1}^{n-1} k(b(m+1)+(k-1)m)a_k z^k$$

$z = re^{it}$ ve $|\omega(z)| < 1$ olduğunu göz önüne alıp, $[0,2\pi]$ aralığında integral alarak

$$\sum_{k=2}^{n} k^2(k-1)^2|a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^2|b(m+1)+(k-1)m|^2|a_k|^2$$

$\Rightarrow |a_n|^2 \leq \frac{1}{n^2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\left[|b(m+1)+(k-1)m|^2-(k-1)^2\right]|a_k|^2$ elde edilir.

Bir önceki teoreme benzer şekilde tümevarım ile ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.17. $f_*(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{(1-mz)^{\frac{m+1}{m}b}}, & m \neq 0 \\ ze^{-bz}, & m = 0 \end{cases}$ şeklinde verilen fonksiyon

$S_b^*(M)$ sınıfına aittir. Bu fonksiyona $S_b^*(M)$ sınıfının ekstremel fonksiyonu denir.

İspat Önerme 3.1.6. dan $f \in S_b^*(M)$ için gerek ve yeter şartın $f(z) = z(\frac{g(z)}{z})^b$ olacak şekilde bir g $\in S^*(M)$ olmasıydı. $S^*(M)$ sınıfına ait ekstremel fonksiyonun

$g_*(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{(1-mz)^{\frac{m+1}{m}}}, & m \neq 0 \\ ze^{-z}, & m = 0 \end{cases}$ olduğu da göz önüne alınırsa (Janowski, 1970) istenen

sonuç elde edilir.

Önerme 3.1.18. $g'_*(z) = \begin{cases} (1-mz)^{-\frac{m+1}{m}b}, & m \neq 0 \\ e^{bz}, & m = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $C_b(M)$ sınıfındandır ve bu sınıfa ait ekstremel fonksiyondur.

İspat Önerme 3.1.5. ten elde edilir.

Teorem 3.1.19. $S_b^*(M)$ sınıfının yıldızıllık yarıçapı

$$R_s = \frac{2}{(m+1)|b| + \sqrt{(m+1)^2|b|^2 - 4m\big((m+1)\mathrm{Re}\, b - m\big)}}, m = 1 - \frac{1}{M}, M > 1 \qquad (98)$$

dir.

İspat $p(z) \in P(M)$ ise $\left|p(z) - \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2}\right| \leq \frac{(m+1)r}{1-m^2r^2}, |z| = r$ (Miller, Mocanu ve Reade, 1976)

eşitsizliğinde $p(z) = 1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)$ alıp düzenlersek

$\left|\frac{Zf'(z)}{f(z)} - \frac{(m(m-1)b-m^2)r^2+1}{1-m^2r^2}\right| \leq \frac{(m+1)|b|r}{1-m^2r^2}$ elde edilir. Buradan

Re $\frac{Zf'(z)}{f(z)} \geq \frac{(m(m+1)\mathrm{Re}b-m^2)r^2-(m+1)|b|r+1}{1-m^2r^2}$ bulunur. $0 \leq r < 1$ için payda pozitiftir.

pay kısmının $0 \leq r < 1$ şartını sağlayan kökü

$\frac{2}{(m+1)|b|+\sqrt{(m+1)^2|b|^2-4m\big((m+1)\text{Re } b-m\big)}}$ dir. Böylece

$|z| = r < R_s = \frac{2}{(m+1)|b|+\sqrt{(m+1)^2|b|^2-4m\big((m+1)\text{Re } b-m\big)}}$ için Re $\frac{Zf'(z)}{f(z)} > 0$ eşitsizliği

doğrudur.

Burada $m = 1$ alırsak (Nasr ve Aouf, 1985) de elde edilen yıldızıllık yarıçapı ile uygun olduğu görülür.

Teorem 3.1.20. $C_b(M)$ sınıfının konvekslik yarıçapı, $M > 1$ için

$$R_c = \frac{2}{(m+1)|b|+\sqrt{(m+1)^2|b|^2-4m\big((m+1)Reb-m\big)}} \tag{99}$$

dir.

İspat $f \in C_b(M)$ ise $\left|1 + \frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2}\right| \leq \frac{(m+1)r}{1-m^2r^2}$ yazılabilir. Buradan

$$\text{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \geq \frac{(1+mr^2)\text{Re } b - |b|(m+1) - (1-m^2r^2)\text{Re } b}{1-m^2r^2}$$

$\Rightarrow$ Re $\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{(m(1+m)\text{Re } b - m^2)r^2 - |b|(m+1) + 1}{1-m^2r^2}$ elde edilir.

Buradan Teorem 3.1.18. benzer şekilde istenen sonuç elde edilir.

Burada görüldüğü gibi $S_b^*(M)$ nin yıldızıllık yarıçapı ile $C_b(M)$ nin konvekslik yarıçapı aynıdır. Eğer $m = 0$ yani $M = 1$ ise her iki durumda da yarıçap $\frac{1}{|b|}$ dir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Burada $S_b^*(M)$ ve $C_b(M)$ fonksiyon sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleri, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları, ekstrenel fonksiyonlar, bu iki fonksiyon sınıfı fonksiyon sınıfı ve daha önceki incelenen fonksiyon sınıfları arasındaki bazı bağıntılar verildi.

5. ÖNERİLER

$SC(b,\lambda,M)$ ile $\mathbb{D}=\{z\colon z\in\mathbb{C}, |z|<1\}$ açık birim diskte analitik ve

$$\left|1+\frac{1}{b}\left(\frac{z\big(\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)\big)'}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)-M\right|<M$$

$(M\geq 1,\ 0\leq\lambda\leq 1,\ b\in\mathbb{C}-\{0\},\ f(z)\in S\,)$ şartını sağlayan $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ fonksiyonlar sınıfını göstermiştik. Bu çalışmada yalnızca $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ halini yani $S_b^*(M)$ ve $C_b(M)$ fonksiyon sınıflarını inceledik. Burada $SC(b,\lambda,M)$ fonksiyon sınıfı genel olarak da incelenebilir. Ancak bu bir yüksek lisans çalışması düzeyi üzerinde olacaktır.

KAYNAKLAR

Alexander, J.W., 1915-1916. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. Annalys of Mathematics, 17, 12-22.

Aouf, M.K., 1988. On the coefficients of some classes of starlike and convex functions of complex order. Journal of Natural Sciences and Mathematics, 28, 107-120.

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsberichte der Precıssischen Akedemie der Wissenschaften, 35, 940- 955.

Brown, J.E,. 1989. Images of discs under convex and starlike functions. Mathematics Zeitschfift, 202, 457-462.

Carathêodory, C., 1907. Über den Variabilitetesbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die Gegebene Werte Nicht Annehmen. Annals of Mathematics, 64, 95-115.

Clunie, J., 1959. On meromorphic schlicht functions. Journal of London Mathematics society, 215-216.

de Branges, L., 1985. A proof of the Bieberbach conjucture. Acta Mathematica, 1, 137-152.

Dinghas, A., 1959. Über einige Monotoniesatze in der Theorie der schlichten Funktionen. Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi Oslo I,85-295.

Duren, P.L., 1983. Univalent Functions, Springer-Verlag, ISBN: 0-387-90795-5, 379.

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions I, Marıner Publıshıng Company, ISBN 0-936166-10-X, 246.

Gronwall, T.H., 1914. Some remarks on conformal representation. Annalys of Mathematics, 16, 72-76.

Hummel, J.A., 1957. The coefficient regions of starlike functions. Pacific Journal of Mathematics, 7, 1381-1389.

Janowski, W., 1970. Extremel problems for a family of functions with positive real part and for some related families. Annales Polonici Mathematici, XXIII, 159-177.

Jack, I.S., 1971. Functions starlike and convex of order α. Journal London Mathematics Society, 3, 469-474.

Keogh, F.R., and Merkes, E.P., 1969. A cofficient nequality for certain classes ofanalytic functions. Procedings American Mathematical Society, 20, 8-12.

Löwner, C., 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. Annalys of Mathematics, 89, 103-121.

Miller, S., Mocanu, P., and Reade, M., 1976. On generalized convexity in conformal mappings II. Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees, 21, 219-225.

Mocanu, P.T., 1969. Une propriete de convexite generalisee dans la theorie dee la representation conforme. Mathematical (Cluj), 11 (34), 127-133.

Nasr, M.A., and Aouf, M.K., 1985. Starlike functions of complex order. Journal ofNatural Science and Mathematics ,25, 1, 1-12.

Nasr, M.A., and Aouf, M.K., 1987. Convex functions of complex order. Bulletin of the Faculty of Science University of Mansoure, 9, 556-581.

Nasr, M., 1977. On Bazilevic functions and generalized convexity. Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees, 22, 1279-1281.

Nevanlinna, R., 1920. Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Översikt Finska Vetenskaps Societetens för Handlingar, 62A, 1-14.

Nehari, Z., 1976. A property of convex conformal maps. Journal Analyse Mathematics, 30, 390-393.

Robertson, M.S., 1936. A remark on the odd schlict functions. Bulletin of the American Mathematical Society, 42, 366-370.

Robertson, M.S., 1936. On the theory of univalent functions. Annalys of Mathematics, 37, 374-408.

Suffridge, T.J., 1970. Some remarks on convex maps of the unit disc. Duke Mathematical Journal, 37, 775-777.

Suffridge, T.J., 1970. The principle of subordination applied to functions of several Variables Pacific Journal Mathematics, 33, 241-248.

Trimble, S.Y., 1975. A coefficient inequality for convex univalent functions. Procee dings American Mathematics Society, 48, 266-267.

ÖZGEÇMİŞ

Anıl DEMİRBAŞ, 11/08/1989 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretimini 2000 yılında Trabzon ilinde Prof. İhsan KOZ İlköğretim Okulunda, Ortaöğretimini 2003 yılında Trabzon ilinde Cudibey Ortaokulunda, Lise öğretimini 2006 yılında Trabzon ilinde Yunus Emre Lisesi'nde tamamladı. 2007 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne yatay geçiş yaptı ve 2011 yılında eğitimini tamamladı. 2013 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde başladığı yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir.