T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİRLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL TRANSFORM ve ADOMİAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

İLHAMİ ŞAHİN

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. AHMET GÖKDOĞAN
YRD. DOÇ. DR. MEHMET ÜNLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2015

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİRLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL TRANSFORM ve ADOMİAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR danışmanlığında, İlhami ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 02/06/2015 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Ünvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	
Üye	: Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ	

Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını ve desteklerini benden esirgemeyen sayın Doç. Dr. Ruşen YILMAZ'a, sayın Doç. Dr. Kadir KUTLU'ya, sayın Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN'a ve sayın Yrd. Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU'na teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Eğim ve öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme çok teşekkür ederim.

İlhami ŞAHİN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Birleştirilmiş Diferansiyel Transform ve Adomian Yöntemiyle Çözümü başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 02/06/2015

İlhami ŞAHİN

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİRLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL TRANSFORM ve ADOMİAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

İlhami ŞAHİN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin fizikte, mühendislikte vb. birçok yerde karşılaşılan örnekleri vardır. Bu problemlerin modelleri, yapısı itibari ile analitik çözümleri genelde kolay bulunamayan denklemleri ifade eder. Bu çalışmada bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini, geliştirilmiş olan bir yöntemle ele alacağız. Daha önce literatür de verilen Diferansiyel Transform ve Adomian Yöntemini tek bir model denklem üzerinde ortak kullanarak bu tip denklemlerin yaklaşık çözümleriyle, analitik çözüm arasında kıyaslama yapılacaktır.

2015, 71 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Transform Yöntemi, Modifiye Diferansiyel Transform Yöntemi, Padé Yaklaşımı, Adomian Polinomları, Birleştirilmiş Diferansiyel Transform ve Adomian Yöntemi.

ABSTRACT

THE SOLUTION OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS BY COMBINED DIFFERENTIAL TRANSFORMATION AND ADOMIAN METHOD

İlhami ŞAHİN

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR

There are some special applications of nonlinear differential transform method in physics, engineering, mathematics, etc. These models show us that these equations can not be solved simply and analytical solutions can not be founded easily. In this study, we will investigate solutions of some nonlinear differential equations and we will develop a new method. We will compare with analytic and numerical solutions of these model equations given at the literature about differential transform and Adomian method.

2015, 71 pages

Keywords: Differential Transform Method, Modified Differential Transform Method, Padé Approximation, Adomian polynomials, Combined Differential Transformation and Adomian Method.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

A_k	Adomian polinomları
$\mathcal{D}_T$	Diferansiyel Transform Operatörü
$\mathcal{D}_T^{-1}$	Ters Diferansiyel Transform Operatörü
DTY	Diferansiyel Transform Yöntemi
$F(k)$	k. Adomian polinomu
L	Laplace Dönüşüm Operatörü
L^{-1}	Ters Laplace Dönüşüm Operatörü
MDTY	Modifiye Diferansiyel Transform Yöntemi
O	Hata terimi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik problemlerinde karşımıza çıkan, analitik çözümleri olmayan veya çözümleri oldukça zor ve zaman alıcı olan diferansiyel denklemlerin çözümleri için, algoritmaya dayalı ve çabuk sonuca götüren nümerik yöntemlerin önemi gittikçe artmakta ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinde tercih edilmektedir. Son yıllarda daha çok tercih edilen yöntemlerin başında diferansiyel transform yöntemi, modifiye diferansiyel transform yöntemi ve Adomian yöntemi gelmektedir. Yapmış olduğumuz bu tez çalışmasında diferansiyel transform yöntemi ile Adomian yönteminin aynı diferansiyel denklem üzerinde kullanıldığı yeni bir yöntemden bahsedilmiştir.

Bu çalışmada diferansiyel transform yöntemi, modifiye diferansiyel transform yöntemi ilgili tanımlar, teoremler ve Adomian polinomları ifade edilmiştir. Ayrıca her bir yöntem için uygulamalar yapılarak söz konusu yeni yönteme temel oluşturulmuştur.

1.2. Literatür Özeti

Diferansiyel transform yöntemini ilk olarak Zhou (1986), lineer veya lineer olmayan, adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanmıştır. Zhou, bu çalışmasında elektrik ve elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmüştür.

Chen ve Ho (1996), diferansiyel transform yöntemini Strum-Lioville problemine uygulamışlardır. Bu yöntem sayesinde bazı basit matematiksel işlemlerle öz değer ve öz vektör kolayca hesaplanmıştır.

Chen ve Ho (1999), lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm formları elde ederek bu metodu geliştirmiştir.

Ayaz (2003), kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin iki boyutlu diferansiyel transform yardımı ile çözümlerini bulmuştur. Lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri; bu çalışmada ilave edilen teoremler ışığında çözülmüşlerdir.

Ayaz (2004), üç boyutlu diferansiyel transform kuramı ve kuramla ilgili temel teoremler verilmiştir. Bu çalışmada verilen yeni teoremler yardımıyla bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri çözülmüş ve elde edilen sonuçlar; bir diğer nümerik çözüm metodu olan Adomian metodundan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Ayaz (2004), son olarak lineer cebirsel diferansiyel denklemin nümerik çözümlerini diferansiyel transform yöntemi yardımıyla yapmıştır. Bu çalışmasında; iki farklı örneği yöntem yardımı ile çözüp, elde ettiği sonuçların analitik sonuçlara çok yakın sonuçlar olduğunu göstermiştir.

Abdel ve Hassan (2004), yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin diferansiyel transform metodu ile çözümüne ve uygulamalarına yer verilmiştir. Bulunan çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Arıkoğlu ve Özkol (2005), integro diferansiyel denklemlerin çözümü için diferansiyel transform yöntemi genişletilmiş ve yeni teoremler tanıtılıp ispatlanmıştır.

Kurnaz ve Oturanç (2005), adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için diferansiyel transform yöntemi bir genellemesi verilmiştir.

Ertürk ve Momani (2008), lineer olmayan oskülatörlerin çözümünde diferansiyel transform yöntemi kullanmışlardır. Böylece çözümün periyodik davranışını elde etmedeki zorluğu diferansiyel transform yöntemi ile kolayca çözebilmişlerdir.

Kangalgil ve Ayaz (2009), KdV ve mKdV için Solitary dalga denklemlerini çözümünde diferansiyel transform yöntemini kullanmışlardır. Çalışmayı yaparken iki boyutlu diferansiyel transform yönteminden faydalanmışlar ve yöntemin işlerliğini nümerik örneklerle göstermişlerdir.

Keskin ve Oturanç (2009), indirgenmiş diferansiyel transform yöntemini tanımlamışlar ve iki değişkenli diferansiyel denklemleri bir değişkenli diferansiyel denklemlere indirgeyerek çözüme ulaşmışlardır.

Özkan ve Cansu (2010), karışık lineer olmayan sınır koşulları olan dalga denklemlerinin çözümünü diferansiyel transform yöntemi ile bulmuşlardır. Böylece lineer olmayan sınır koşullarının problemin çözümünde kullanılmasındaki zorluk ortadan kalkmıştır.

Zareamoghaddam (2011), bir boyutlu homojen olmayan parabolik tipten denklemleri diferansiyel transform yöntemiyle çözmüştür.

Adomian ayrışım yöntemi ise ilk olarak 1980' li yılların başında Amerikalı bilim adamı George Adomian tarafından tasarlanmış daha sonra Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilmiştir. Yöntem, Taylor seri açılımına dayanan ve probleme doğrudan uygulanarak çözümlerin seri formunda elde edilmesini sağlayan bir yöntemdir. Bu yöntem lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlere kolayca uygulanabilir. Ancak lineer olmayan denklemlerde Adomian polinomları olgusu ortaya çıkar. Bu polinomlar denklemde bulunan lineer olmayan terimi ayrıştırarak çözüme ulaşılmasını sağlar. Adomian yöntemi pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Ayrıca literatürde yöntemin yakınsaklığı ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması mevcuttur.

Bellomo ve Sarafyan (1987), Adomian yöntemi ile Picard ardışık yaklaşım yöntemi kıyaslamışlar ve Picard yönteminde Adomian yöntemine oranla karmaşıklığın daha hızlı arttığını ve hesaplamaların zor hatta bazı durumlarda imkansız olduğunu görmüşlerdir.

Adomian ve Rach (1992), iterasyon sonucu elde edilen ilk iki terimde bulunan eşit fakat zıt işaretli terimleri " noise terms " olarak tanımlamışlar ve problemin çözümünün bazı durumlarda bu terimler sayesinde yalnız iki iterasyonla elde edilebildiğini göstermişlerdir.

Deeba ve Khuri (1996), lineer ve lineer olmayan Klein-Gordon denklemini ayrıştırma metodu ile çözmüşlerdir.

Wazwaz (1998), lineer ve lineer olmayan denklemlerde Taylor seri ve Adomian yöntemi kullanmış ve Adomian yönteminin daha kolay uygulandığını ve birkaç iterasyonla güvenilir sonuçlar elde edildiğini göstermiştir.

Wazwaz (2000), herhangi bir formüle gerek kalmadan cebirsel işlemler, trigonometrik özdeşlikler ve Taylor seri açılımından yararlanarak lineer olmayan terimler için Adomian polinomlarını hesaplamıştır.

Wazwaz (2002), Adomian yöntemi kullanarak pek çok fiziksel olayı modelleyen lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünü vermiştir.

Abdelwahid (2003), yüksek mertebeden Adomian polinomlarını da kolayca hesaplayabilmek için matematiksel bir model geliştirmiştir.

El-Sayed (2003), Klein-Gordon denklemini Adomian yöntemi ile çözmüş ve yöntemin diğer yöntemlere göre daha az hesaplama ile daha etkili sonuçlar elde ettiğini göstermiştir.

Babolian vd. (2004), Adomian yöntemini lineer olmayan denklem sistemlerine uygulamışlardır.

İnç ve Cherruault (2005), KdV denklemine uygulamışlar ve geleneksel yöntemlere oranla çok daha az hesaplama ile çözümlere çok daha hızlı yaklaşıldığı göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında tanımlanan birleştirilmiş diferansiyel dönüşüm ve Adomian yöntemi, Hooman ve Hossein (2013), tarafından yapılan çalışma göz önünde bulundurularak, yöntem ek problemlerle desteklenmeye çalışılmıştır.

1.3. Tanımlar

Tanım 1.1. Bir denklemde; belirli bir değişkene göre türev varsa, bu değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi bulunan değişkene de *bağımlı değişken* adı verilir.
Tanım 1.2. Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren denkleme *diferansiyel denklem* denir.
Tanım 1.3. Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine *diferansiyel denklemin mertebesi*; en yüksek mertebeli türevin derecesine de *diferansiyel denklemin derecesi* denir.
Tanım 1.4. Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir. Genel olarak y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere bir adi diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklem n. *mertebeden adi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci mertebeden türevidir. (1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse

$$y^{(n)} = g\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

elde edilir. Bu ise (2) in açık formda yazılmış şeklidir.
Tanım 1.5. y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere n. mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklem

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{3}$$

şeklinde ifade edilebilen bir denklemdir. Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden türevler 1. dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya türevler çarpım halinde yer almıyorlarsa bu şekildeki denklemlere *lineer (doğrusal)*; aksi halde *lineer olmayan (nonlinear)* diferansiyel denklemler denir.

Tanım 1.6. y bağımlı, x bağımsız değişkenli n. mertebeden

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \tag{4}$$

diferansiyel denklemindeki y bağımlı değişken ve türevlerinin $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayılarının hepsi reel sabitlerden oluşuyorsa denkleme *sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem*; $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayılarının en az bir tanesi bağımsız değişken olan x'e bağlı ise denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* adı verilir.

Tanım 1.7. Bazen diferansiyel denklemler yardımcı şartlarla birlikte verilir. Eğer bu şartlar değişkenin bir tek değeri kullanılarak verilmiş ise probleme *başlangıç değer problemi*, yardımcı şartlar değişkenin birden fazla değeri kullanılarak verilmiş ise probleme *sınır değer problemi* denir.

Tanım 1.8. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ noktasında her mertebeden türevi varsa,

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots \tag{5}$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ 'deki *Taylor serisi* denir. Eğer $c=0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun *Maclauren serisi* adı verilir.

Tanım 1.9. x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots \tag{6}$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu ifade de $c=0$ olursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{7}$$

elde edilir.

1.4. Padé Yaklaşımı

Padé yaklaşımı sürekli kesirler teorisi ile ilişkilidir. Herhangi bir fonksiyonun istenilen şekilde bir rasyonel fonksiyon haline getirilmesine fonksiyonun Padé yaklaşımı denmektedir. Padé yaklaşımı; yakınsak olmayan Taylor serilerindeki kısmi toplamlar serisine göre daha iyi sonuç vermekte ve yakınsaklık aralığını genişleterek daha geniş aralıklarda çözümlerin daha az hatayla elde edilmesini sağlamaktadır (Pozzi, 1994). Genel olarak bilgisayar hesaplamalarında Padé yaklaşımından yararlanılır.

Tanım 1.10. f foksiyonu;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \qquad (c_0 \neq 0\,) \tag{8}$$

kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} \tag{9}$$

Şeklinde polinomların oranıdır. Payın derecesi m, paydanın derecesi n dir. (9) de $m+1$ tane payın katsayısı ve $n+1$ tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (9)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (9)'nin payının $m+1$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının n tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$, (8)'deki kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir (Baker and Grave-Morris 1996).

(8)' deki $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{m+n}$; $m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımı

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} + O(x^{m+n+1}) \tag{10}$$

şeklinde yazılır. (10) eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapılırsa,

$$(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)(c_0 + c_1 x + \cdots) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) + O(x^{m+n+1}) \qquad (11)$$

elde edilir. (11) eşitliğindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ lerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \cdots + b_1 c_m + b_0 c_{m+1} = 0 \\
&b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \cdots + b_1 c_{m+1} + b_0 c_{m+2} = 0 \\
&\vdots \\
&b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \cdots + b_1 c_{m+n-1} + b_0 c_{m+n} = 0
\end{aligned} \qquad (12)$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (12) denklem sistemi n tane lineer denklemden oluşur. Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (10) denkleminden payın katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, x^3, \dots, x^m$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&a_0 = c_0 \\
&a_1 = c_1 + b_1 c_0 \\
&a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\vdots \\
&a_m = c_m + c_{m-1} b_1 + \cdots + c_0 b_m
\end{aligned} \qquad (14)$$

olarak bulunur. Böylece (13) ve (14) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir.

Padé yaklaşımının hesaplanmasında görülecektir ki, Padé denklemleri katsayılar hesaplanmadan (15) ve (16) de ki

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{m} c_i x^i & x\sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^m \\ c_{m+1} & c_{\ m} & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_n \end{vmatrix} \tag{16}$$

denklemleriyle de elde edilebilir. Bu denklemler yardımıyla x^{m+n} inci dereceden $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen $[m/n]$ Padé yaklaşımını oluşturur. Yani verilen $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürülerek, bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur. Bir $f(x)$ fonksiyonu için Padé yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomları olan

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

polinomlarını bulmayı içerir. Kısaca,

$$[m/n]_f(x) = \frac{p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i} \tag{17}$$

olur.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

için

$$F_k(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} c_i x^i, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

yazılabilir.

Teorem 1.1. Eğer bir f fonksiyonu için (m,n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x)=\frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad \text{ve} \quad \mathbb{D}_{m,n}=\begin{pmatrix} c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

olarak ifade ediliyor ve $\mathbb{D}=\det\mathbb{D}_{m,n}\neq 0$ ise;

$$p_0(x) \ =\frac{1}{\mathbb{D}}\begin{vmatrix} F_m(x) & xF_{m-1}(x) & \cdots & x^n F_{m-n}(x) \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & \mathbb{D}_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}$$

ve

$$q_0(x)=\frac{1}{\mathbb{D}}\begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^m \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & \mathbb{D}_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}$$

olur.

Determinant algoritması birçok toplama ve çarpma işlemlerini ihtiva ettiğinden m ve n'nin küçük değerlerini hesaplamada daha kullanılışlıdır. Bu algoritma, yalnızca kapalı formdaki formüllerin açılmasında ve bulunmasında yardımcı olur.

1.5. Padé Tablosu

Genel anlamda bir $f(x)$ fonksiyonunun Padé yaklaşımını

$$[m/n]=[m/n]_f=[m/n](x)=[m/n]_f(x)=r_{m,n}$$

şeklinde değişik formlarda ifade edebiliriz.

Yaklaşımlara ait tablo sistematik olarak Henri Eugène Padé tarafından verildiği için hem yaklaşıma, hem de tabloya Padé'nin ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 1. Padé $[m/n]$ yaklaşım tablosu.

$n\backslash m$	0	1	2	$\cdots$
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	$\cdots$
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	$\cdots$
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Yukarıdaki Tablo 1. formatına uygun e^x 'in Padé yaklaşımına ait Padé tabloları aşağıdaki gibidir.

Tablo 2. e^x 'in Padé yaklaşım tablosu.

$m\backslash n$	0	1	2	$\cdots$
0	1	$\dfrac{1}{1-x}$	$\dfrac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	$\cdots$
1	$1+x$	$\dfrac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	$\cdots$
2	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$\dfrac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\dfrac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	$\cdots$
3	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	$\dfrac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	$\vdots$	$\cdots$
4	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Yukarıda Tablo 2. de de görüldüğü gibi, Padé tablosunda birinci sütun f fonksiyonuna ait serinin kısmi toplamlarını verir. İlk satır ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun kısmi toplamlarının terslerini içerir.

1.6. Laplace Dönüşümü

Matematikte; integral dönüşümlerde sıkça kullanılan Laplace dönüşümü; fizikte, mühendislikte ve olasılık teorisinde geniş uygulama alanına sahiptir.

Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılmaktadır. Laplace dönüşümünün en önemli özelliği fonksiyonu cebirsel hale getirmesi ve elde edilen fonksiyonun davranışı hakkında bilgi edinilmesini sağlamasıdır (Davies, 2002).

Tanım 1.11. x' in pozitif değerleri için tanımlanmış bir $f(x)$ fonksiyonu olsun. Buna göre;

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx \tag{18}$$

integrali yakınsak ise $F(s)$ veya $L\,\{f(x)\}$ şeklinde gösterilen

$$F(s) = L\,\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx \tag{19}$$

fonksiyona $f(x)$'in *Laplace dönüşümü* denir (Manzhirov, 1998).

1.7. Ters Laplace Dönüşümü

Verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün s parametresine bağlı bir $F(s)$ fonksiyonu tanımladığı ve (19) şeklinde verildiği bilinmektedir. Buna göre; $F(s)$ dönüşüm fonksiyonu şeklinde verilen bir fonksiyonun orijinal $f(x)$ fonksiyonunun bulunması işlemine ters Laplace dönüşümü adı verilir ve sembolik olarak $f(x) = L^{-1}\,\{F(s)\}$ ile gösterilir. Buradaki L^{-1} sembolüne Ters laplace dönüşüm operatörü adı verilir (Manzhirov, 1998).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1 Diferansiyel Transform Yöntemi

Bu bölümde bir boyutlu diferansiyel transform yöntemiyle ilgili temel tanımlar, teoremler ve uygulama örneklere yer verilerek, asıl ifade etmek istediğimiz yönteme temel oluşturulmaktadır.

Tanım 2.1. Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonun diferansiyel transform fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere $u(x)$ in diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{20}$$

olarak tanımlanır (Chen, 1996).

Tanım 2.2. $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferansiyel transform fonksiyonu,

$$\mathcal{D}_T^{-1}\{U(k)\} = u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x-x_0)^k \tag{21}$$

biçiminde tanımlanır (Chen, 1996).

(20) ve (21) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (22) eşitliği elde edilir.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} (x-x_0)^k \tag{22}$$

Uygulamada (21) denklemi,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} U(k)(x-x_0)^k \tag{23}$$

şeklinde alınabilir. (21) denkleminde

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} U(k)(x-x_0)^k$$

ihmal edilecek kadar küçüktür.

(20) ve (21) denklemleri kullanılarak temel matematiksel işlemler yardımıyla bir boyutlu diferansiyel transformu için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 2.1. Bir boyutlu uzayda tanımlı iki fonksiyonun toplamının veya farkının diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{u(x) \pm v(x)\} = \mathcal{D}_T\{u(x)\} \pm \mathcal{D}_T\{v(x)\} = U(k) \pm V(k)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_T\{v(x)\} = V(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k v(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

olduğu transformun tanımından bilinmektedir.

$$\mathcal{D}_T\{u(x) \pm v(x)\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}[u(x) \pm v(x)]\right]_{x=x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}}_{\mathcal{D}_T\{u(x)\}} \pm \underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k v(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}}_{\mathcal{D}_T\{v(x)\}}$$

$$= \underbrace{\mathcal{D}_T\{u(x)\}}_{U(k)} \pm \underbrace{\mathcal{D}_T\{v(x)\}}_{V(k)}$$

olup

$$\mathcal{D}_T\{u(x) \pm v(x)\} = U(k) \pm V(k)$$

elde edilir.

Teorem 2.2. Bir boyutlu uzayda tanımlı bir fonksiyonun $c \in \mathbb{R}$ sabit sayı ile çarpımının diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{cu(x)\} = c\mathcal{D}_T\{u(x)\} = cU(k)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

olduğu transformu tanımından bilinmektedir.

$$\mathcal{D}_T\{cu(x)\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k[cu(x)]}{dx^k}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!}\left[c\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

$$= c\underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}}_{\mathcal{D}_T\{u(x)\}} = c\mathcal{D}_T\{u(x)\} = cU(k)$$

elde edilir.

Teorem 2.3. Bir boyutlu uzayda tanımlı $u(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ kuvvet fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{x^m\} = U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Öncelikle

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}$$

ifadesinin eşitini araştıralım.

Burada karşımıza 3 durum çıkmaktadır.

1. Durum: $k < m$ ise

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^{m-k}]_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{D}_T\{x^m\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

2. Durum: $k = m$ ise

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)x^{m-m}]_{x=0} = m!$$

$$\mathcal{D}_T\{x^m\} = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \frac{m!}{m!} = 1$$

3. Durum: $k > m$ ise

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)0]_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{D}_T\{x^m\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

Bu 3 durum göz önüne alınarak,

$$\mathcal{D}_T\{x^m\} = U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 2.4. Bir boyutlu uzayda tanımlı bir fonksiyonun birinci mertebeden türevinin diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\left\{\frac{du(x)}{dx}\right\} = (k+1)U(k+1)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

olduğu transformun tanımından bilinmektedir.

$$\mathcal{D}_T\left\{\frac{du(x)}{dx}\right\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}u(x)}{dx^{k+1}}\right]_{x=x_0}$$

$$= (k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}u(x)}{dx^{k+1}}\right]_{x=x_0}}_{U(k+1)}$$

$$= (k+1)U(k+1)$$

elde edilir.

Teorem 2.5. Bir boyutlu uzayda tanımlı bir fonksiyonun $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n. mertebeden türevinin diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\left\{\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right\} = (k+1)(k+2)\dots(k+n)U(k+n) = \frac{(k+n)!}{k!}U(k+n)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

olduğu transformun tanımından bilinmektedir.

$$\mathcal{D}_T\left\{\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right\} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right)\right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+n} u(x)}{dx^{k+n}}\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{(k+n)}{k!}\underbrace{\frac{1}{(k+n)!}\left[\frac{d^{k+n} u(x)}{dx^{k+n}}\right]_{x=x_0}}_{U(k+n)}$$

$$= (k+1)(k+2)\dots(k+n)U(k+n)$$

elde edilir.

Teorem 2.6. Bir boyutlu uzayda tanımlı iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel transformu, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T\{u(x)v(x)\} = \sum_{r=0}^{k} U(r)V(k-r)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.7. Bir boyutlu uzayda tanımlı üç fonksiyonun çarpımının diferansiyel transformu, $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T\{u(x)v(x)w(x)\} = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)W(k-r-t)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.8. Bir boyutlu uzayda tanımlı $u(x)$ fonksiyonunun, $v(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi ile çarpımının diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\left\{u(x)\frac{dv(x)}{dx}\right\}=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)U(r)V(k-r+1)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.9. Bir boyutlu uzayda tanımlı $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevlerinin çarpımının diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\left\{\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}\right\}=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.10. Bir boyutlu uzayda tanımlı $u(x)=a^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ üstel fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{a^{\lambda x}\}=U(k)=\frac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.11. Bir boyutlu uzayda tanımlı $u(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ üstel fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{e^{\lambda x}\}=U(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.12. Bir boyutlu uzayda tanımlı $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $u(x)=\sin(ax+b)$ fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{\sin(ax+b)\}=U(k)=\frac{a^k}{k!}\sin(\frac{\pi}{2}k+b)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.13. Bir boyutlu uzayda tanımlı $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(x) = \cos(ax + b)$ fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{\cos(ax + b)\} = U(k) = \frac{a^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k + b)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.14. Bir boyutlu uzayda tanımlı $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(x) = \sinh(\lambda x)$ fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{\sinh(\lambda x)\} = U(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise} \\ 0 \;, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.15. Bir boyutlu uzayda tanımlı $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(x) = \cosh(\lambda x)$ fonksiyonun diferansiyel transformu,

$$\mathcal{D}_T\{\cosh(\lambda x)\} = U(k) = \begin{cases} 0 \;, & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.1. $u' - u = 0,\; u(0) = 1$ (24)

diferansiyel denkleminin çözümünü diferansiyel transform yöntemi ile bulalım.

Diferansiyel denklemin analitik çözümünün $u(x) = e^x$ olduğu bilinmektedir. Öncelikle diferansiyel denklemin her iki tarafına diferansiyel transform yöntemi uygulanır ve transformun lineer olduğu dikkate alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u' - u\} = \mathcal{D}_T\{0\} \;\Rightarrow\; \mathcal{D}_T\{u'\} - \mathcal{D}_T\{u\} = \mathcal{D}_T\{0\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k)$$

ve

$$\mathcal{D}_T\{u'(x)\} = (k+1)U(k+1)$$

olduğundan diferansiyel denklemin diferansiyel transform yardımıyla transformu,

$$(k+1)U(k+1) - U(k) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlendiğinde,

$$U(k+1) = \frac{1}{k+1}U(k), \quad k = 0,1,2, \dots \tag{25}$$

(25) tekrarlama bağıntısı elde edilir. Başlangıç koşuluna diferansiyel transform uygulandığında,

$$U(0) = \frac{1}{0!}[u(x)]_{x=0} = u(0) = 1 \;\Rightarrow\; U(0) = 1$$

değeri bulunur. Bu değer (25) tekrarlama bağıntısında kullanıldığında,

$k = 0$ için $U(1) = \frac{1}{1}U(0) = 1$

$k = 1$ için $U(2) = \frac{1}{2}U(1) = \frac{1}{2}$

$k = 2$ için $U(3) = \frac{1}{3}U(2) = \frac{1}{6}$

$k = 3$ için $U(4) = \frac{1}{4}U(3) = \frac{1}{24}$

$k = 4$ için $U(5) = \frac{1}{5}U(4) = \frac{1}{120}$

$\vdots$

$U(k)$ değerleri elde edilir ve bu şekilde devam edildiğinde

$$U(k) = \frac{1}{k!} \tag{26}$$

bulunur. $U(k)$ değerine ters diferansiyel transform uygulandığında,

$$u(x) = \mathcal{D}_T^{-1}\{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \tag{27}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \tag{28}$$

elde edilir. Buda analitik çözümle aynı olduğu görülür.

Örnek 2.2. $2u'' + 3u' + u = x^2,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 1$ (29)

diferansiyel denkleminin çözümünü diferansiyel transform yöntemi ile bulalım.

Öncelikle diferansiyel denklemin her iki tarafına diferansiyel transform yöntemi uygulanır ve transformun lineer olduğu dikkate alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{2u'' + 3u' + u\} = \mathcal{D}_T\{x^2\} \ \Rightarrow\ 2\mathcal{D}_T\{u''\} + 3\mathcal{D}_T\{u'\} + \mathcal{D}_T\{u\} = \mathcal{D}_T\{x^2\}$$

elde edilir. Buna göre,

$\mathcal{D}_T\{u(x)\} = U(k)$,

$\mathcal{D}_T\{u'(x)\} = (k + 1)U(k + 1)$,

$\mathcal{D}_T\{u''(x)\} = (k + 1)(k + 2)U(k + 2)$

ve

$$\mathcal{D}_T\{x^2\} = \delta(k-2) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

olduğundan diferansiyel denklemin, diferansiyel transform yardımıyla transformu,

$$2(k+1)(k+2)U(k+2) + 3(k+1)U(k+1) + U(k) = \delta(k-2)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlendiğinde,

$$U(k+2) = \frac{\delta(k-2)}{2(k+1)(k+2)} - \frac{3}{2(k+2)}U(k+1) - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}U(k) \qquad (30)$$

(30) tekrarlama bağıntısı elde edilir. Başlangıç koşullarına diferansiyel transform uygulandığında,

$$U(0) = \frac{1}{0!}[u(x)]_{x=0} = u(0) = 1 \ \Rightarrow \ U(0) = 1$$

$$U(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{du(x)}{dx}\right]_{x=0} = u'(0) = 1 \ \Rightarrow \ U(1) = 1$$

değerleri bulunur. Bu değer (30) tekrarlama bağıntısında kullanıldığında,

$$k = 0 \text{ için } U(2) = -\frac{3}{4}U(1) - \frac{1}{4}U(0) = -1$$

$$k = 1 \text{ için } U(3) = -\frac{3}{6}U(2) - \frac{1}{12}U(1) = 0.4167$$

$$k = 2 \text{ için } U(4) = \frac{1}{24} - \frac{3}{8}U(3) - \frac{1}{24}U(2) = -0.0729$$

$$k = 3 \text{ için } U(5) = -\frac{3}{10}U(4) - \frac{1}{40}U(3) = 0.0115$$

$\vdots$

$U(k)$ değerleri elde edilir. Böylece diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü ters diferansiyel transform ile

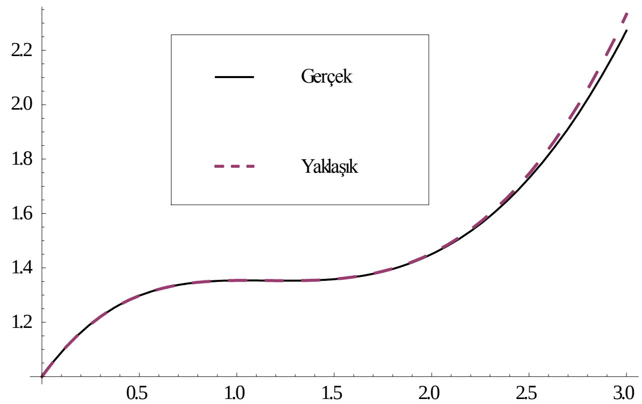
$$u(x) = \mathcal{D}_T^{-1}\{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \tag{31}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} U(k)x^k = 1 + x - x^2 + 0.4167x^3 - 0.0729x^4 + 0.0115x^5 + \cdots \tag{32}$$

olarak elde edilir.

$$u(x) = -e^{-x} - 12e^{\frac{-x}{2}} + x^2 - 6x + 14 \tag{33}$$

denklemin gerçek çözümü olmak üzere; gerçek ve yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 1. (29) denkleminin gerçek çözümü ve diferansiyel transform yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 2.3. $u' = 1 + u^2,\ u(0) = 0$ (34)

diferansiyel denkleminin çözümünü diferansiyel transform yöntemi ile bulalım.

Diferansiyel denklemin analitik çözümünün $u(x) = \tan(x)$ olduğu bilinmektedir. Öncelikle diferansiyel denklemin her iki tarafına diferansiyel transform yöntemi uygulanır ve transformun lineer olduğu dikkate alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u'\} = \mathcal{D}_T\{1 + u^2\} \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{D}_T\{u'\} = \mathcal{D}_T\{1\} + \mathcal{D}_T\{u^2\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T\{u'(x)\} = (k+1)U(k+1)\ ,$$

$$\mathcal{D}_T\{u^2\} = \mathcal{D}_T\{u.u\} = \sum_{r=0}^{k} U(r)\, U(k-r)$$

ve

$$\mathcal{D}_T\{1\} = \mathcal{D}_T\{x^0\} = \delta(k)$$

olduğundan diferansiyel denklemin diferansiyel transform yardımıyla transformu,

$$(k+1)U(k+1) = \delta(k) + \sum_{r=0}^{k} U(r)\, U(k-r)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlendiğinde,

$$U(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[\delta(k) + \sum_{r=0}^{k} U(r)\, U(k-r)\right], \quad k = 0,1,2,\dots \qquad (35)$$

(35) tekrarlama bağıntısı elde edilir. Başlangıç koşuluna diferansiyel transform uygulandığında,

$$U(0) = \frac{1}{0!}[u(x)]_{x=0} = u(0) = 0 \;\Rightarrow\; U(0) = 0$$

değeri bulunur. Bu değer (35) tekrarlama bağıntısında kullanıldığında,

$$k = 0 \text{ için } U(1) = \frac{1}{0+1}\left[\delta(0) + \sum_{r=0}^{0} U(r)\, U(0-r)\right] = \delta(0) + U(0)U(0) = 1$$

$$k = 1 \text{ için } U(2) = \frac{1}{1+1}\left[\delta(1) + \sum_{r=0}^{1} U(r)\,U(1-r)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\big(U(0)U(1) + U(1)U(0)\big) = 0$$

$$k = 2 \text{ için } U(3) = \frac{1}{2+1}\left[\delta(2) + \sum_{r=0}^{2} U(r)\,U(2-r)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\big(U(0)U(2) + U(1)U(1) + U(2)U(0)\big) = \frac{1}{3}$$

$$k = 3 \text{ için } U(4) = \frac{1}{3+1}\left[\delta(3) + \sum_{r=0}^{3} U(r)\,U(3-r)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\big(U(0)U(3) + U(1)U(2) + U(2)U(3) + U(3)U(0)\big) = 0$$

$$k = 4 \text{ için } U(5) = \frac{1}{4+1}\left[\delta(4) + \sum_{r=0}^{4} U(r)\,U(4-r)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(U(0)U(4) + U(1)U(3) + U(2)U(2) + U(3)U(1) +$$
$$U(4)U(0)) = \frac{2}{15}$$

⋮

$U(k)$ değerleri elde edilir. Böylece diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü ters diferansiyel transform ile

$$u(x) = \mathcal{D}_T^{-1}\{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \tag{36}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \tag{37}$$

elde edilir. Buda $u(x) = \tan(x)$ analitik çözümle aynı olduğu görülür.

2.2. Modifiye Diferansiyel Transform Yöntemi

Bu yöntem; diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde etkin bir yöntem olan DTY yöntemi, Padé yaklaşımı ve Laplace dönüşümünün birlikte uygulanması sürecini içeren ve diferansiyel denklemlerin yakınsaklık aralığını genişletilmesine imkan tanıyan yöntem olarak ifade edilir.

Bilindiği gibi diferansiyel denklemlerin DTY ile elde edilen nümerik çözümleri; fonksiyonların Taylor seri açılımında karşılaştığımız kesme hatalarına benzer hatalar içermektedirler. Elde edilen çözümlerin yakınsaklık aralığının sınırlı olması ise yöntemin en çok eleştirilen kısmıdır. Başka bir değişle, çözümün arandığı noktanın civarından uzaklaşıldığında gittikçe artan hatalar söz konusudur. Modifiye diferansiyel transform yöntemi ise yukarıdaki eksiklikleri ortadan kaldırmaktadır.

Bir diferansiyel denkleme uygulanan modifiye dönüşüm algoritması şu şekilde verilir.

Adım 1: DTY ile yaklaşık çözüm elde edilir.
Adım 2: Hesaplanan bu çözüme Laplace dönüşümü uygulanır.
Adım 3: $s = 1/t$ alınır.
Adım 4: Hesaplanan ifadenin $[m/n]$ Padé yaklaşımı bulunur.
Adım 5: $[m/n]$ Padé yaklaşımında $t = 1/s$ alınır.
Adım 6: Hesaplanan ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır.
Adım 7: Çok geniş bir aralıkta çözümü temsil eden periyodik bir modifiye çözüm elde edilir.

Bu adımlar ile elde edilen çözümler ile klasik DTY ile elde edilen çözümler karşılaştırıldığında ise; MDTY ile bulunan çözümlerin bazen problemlerin analitik çözümleri ile aynı, bazen ise analitik çözüme klasik DTY den daha iyi yaklaştığı görülmektedir.

Örnek 2.4. $u'' + 2u' + 3u = \sin(x)\,,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 1$ (38)

diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü modifiye diferansiyel transform yöntemi ile bulalım.

Denklem (38)'de her iki tarafının diferansiyel transformu alınırsa aşağıdaki (40) tekrarlama bağıntıları elde edilir:

$$(k+1)(k+2)U(k+2) + 2(k+1)U(k+1) + 3U(k) = \frac{1^k}{k!}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \tag{39}$$

$$U(k+2) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{k!\,(k+1)(k+2)} - \frac{2}{(k+2)}U(k+1) - \frac{3}{(k+1)(k+2)}U(k) \tag{40}$$

Başlangıç şartlarını (20) de kullanırsak $x = 0$'da $U(0) = 1,\ U(1) = 1$ olduğu kolayca görülür. $k = 0,1,2,3,\ldots$ ve $U(0) = 1,\ U(1) = 1$ değerleri (33)'de kullanılırsa

$$u(x) = 1 + x - \frac{5x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \frac{23x^5}{120} + \frac{49x^6}{720} - \frac{x^7}{180} + O(x^8) \tag{41}$$

seri çözümü elde edilir.

Modifiye diferansiyel transform yöntemi için (41) eşitliğinde Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L[u(x)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s^3} + \frac{8}{s^4} - \frac{1}{s^5} - \frac{23}{s^6} + \frac{49}{s^7} - \frac{28}{s^8} \tag{42}$$

sadeleştirmek için $s = 1/t$ alınırsa,

$$L[u(x)] = t + t^2 - 5t^3 + 8t^4 - t^5 - 23t^6 + 49t^7 - 28t^8 \tag{43}$$

Bu durumda $[4/4]$ Padé yaklaşımı,

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{t + 3t^2 + t^3 + 4t^4}{1 + 2t + 4t^2 + 2t^3 + 3t^4} \tag{44}$$

şeklindedir. $t = 1/s$ alarak s'ye göre $[4/4]$ Padé yaklaşımı,

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{4 + s + 3s^2 + s^3}{3 + 2s + 4s^2 + 2s^3 + s^4} \tag{45}$$

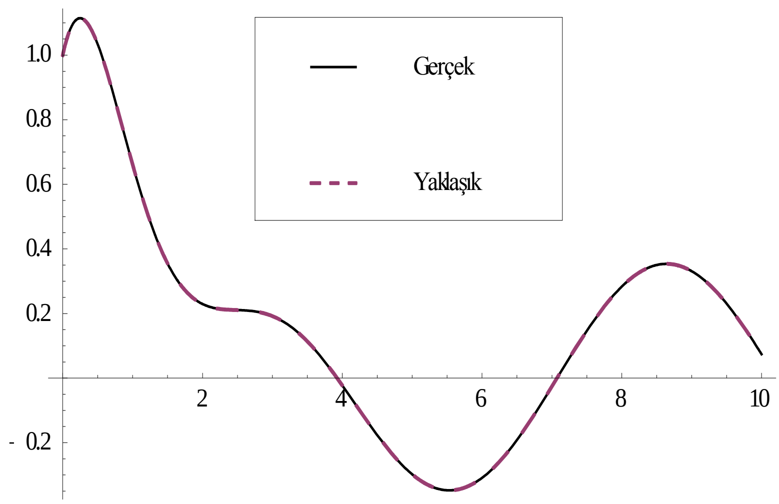
halini alır. $[4/4]$ Padé yaklaşımının bu haline ters Laplace dönüşümü uygulayarak,

$$u(x) = -\frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x) + e^{-x}(\frac{5}{4}\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x))$$

modifiye edilmiş yaklaşık çözüm elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} u(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(&-5\cos(\sqrt{2}x) + e^x\cos(x)\cos\left(\sqrt{2}x\right)^2 - e^x\cos\left(\sqrt{2}x\right)^2\sin(x) \\ &- 4\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + e^x\cos(x)\sin\left(\sqrt{2}x\right)^2 \\ &- e^x\sin(x)\sin\left(\sqrt{2}x\right)^2) \end{aligned} \tag{46}$$

denklemin gerçek çözümü olmak üzere; gerçek ve modifiye edilmiş yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 2. (38) denkleminin gerçek çözümü ve modifiye diferansiyel transform yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

2.3. Adomian Polinomları

Adomian polinomlarının algoritması; lineer olmayan operatörlere, üstel fonksiyonlara, trigonometrik fonksiyonlara, logaritmik fonksiyonlara ve bileşke fonksiyonlara uygulanarak hesaplamaların daha kolay elde edilmesini sağlar. Bu polinomları elde etmek için birçok yöntem olmasına rağmen burada programlanması kolay olan Adomian tarafından geliştirilen Taylor seri açılımı yöntemi ele alınmıştır.

2.3.1 Taylor Seri Yöntemi

Adomian ayrıştırma metodunun genel algoritması Taylor serisi yardımıyla oluşturulmuştur. Lineer olmayan $f(u)$ terimi u_0'da Taylor serisine açılırsa,

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2!}f''(u_0)(u - u_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(u_0)(u - u_0)^3 + \cdots \tag{47}$$

serisi elde edilir. Burada,

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{ve} \quad u - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eşitlikleri (47) denkleminde yerine yazılırsa

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots) + \frac{1}{2!}f''(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^2 + \frac{1}{3!}f'''(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^3 + \cdots \tag{48}$$

olarak bulunur.

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^2 = {u_1}^2 + 2u_1u_2 + {u_2}^2 + 2u_1u_3 + {u_3}^2 + 2u_2u_3 + 2u_1u_4 + \cdots$$

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^3 = {u_1}^3 + 3{u_1}^2u_2 + 3u_1{u_2}^2 + {u_2}^3 + 6u_1u_2u_3 + 3u_1{u_3}^2 + \cdots$$

şeklinde alınarak (48) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)u_1 + f'(u_0)u_2 + f'(u_0)u_3 + \frac{1}{2!}f''(u_0){u_1}^2 + \frac{1}{2!}f''(u_0){u_2}^2$$
$$+ \frac{1}{3!}f'''(u_0){u_1}^3 + \frac{1}{3!}f'''(u_0){u_2}^3 + \frac{1}{3!}f'''(u_0)3{u_1}^2u_3 + \cdots \qquad (49)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde, A_0 polinomu indis toplamı 0 olan terimlerden, A_1 polinomu indis toplamı 1 olan terimlerden, A_2 polinomu ise indis toplamı 2 olan terimlerden oluşur. Benzer şekilde A_n polinomu da indis toplamı n olan terimler ile ifade edilir. Bu algoritma gruplandırılırsa,

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!}{u_1}^2 f''(u_0)$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!}{u_1}^3 f'''(u_0)$$

$$A_4 = u_4 f'(u_0) + \left(\frac{1}{2!}{u_2}^2 + u_1 u_3\right) f''(u_0) + \left(\frac{1}{2!}{u_1}^2 u_2\right) f'''(u_0) + \left(\frac{1}{4!}{u_1}^4\right) f^{(4)}(u_0)$$
$$\vdots$$

şeklinde Adomian polinomları elde edilebilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

fonksiyonunun çözüm serisi,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$$

ve lineer olmayan

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$$

terimi parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ noktasında $f(u)$ fonksiyonu analitik olmak şartıyla Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \tag{50}$$

formülünden elde edilebilir (Wazwaz, 2002).

Örnek 2.5. $f(u) = u^2$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = ((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2)|_{\lambda=0} = {u_0}^2$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2)|_{\lambda=0} = 2u_0 u_1$$

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2)|_{\lambda=0} \\ &= 2u_0 u_2 + {u_1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} &= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2)|_{\lambda=0} \\ &= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2 \end{aligned}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2)|_{\lambda=0}$$
$$= 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + {u_2}^2$$

⋮

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.6. $f(u) = e^u$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \left(e^{(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)}\right)\Big|_{\lambda=0} = e^{u_0}$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left(e^{(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)}\right)\Big|_{\lambda=0} = u_1 e^{u_0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(e^{(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)}\right)\Big|_{\lambda=0} = \left(u_2 + \frac{1}{2!}{u_1}^2\right) e^{u_0}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left(e^{(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)}\right)\Big|_{\lambda=0}$$
$$= \left(u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}{u_1}^3\right) e^{u_0}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}\left(e^{(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots)}\right)\Big|_{\lambda=0}$$
$$= \left(u_4 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}{u_2}^2 + \frac{1}{2!}{u_1}^2u_2 + \frac{1}{4!}{u_1}^4\right) e^{u_0}$$

⋮

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.7. $f(u) = \cos u$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)|_{\lambda=0} = \cos u_0$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(\cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0} = -u_1 \sin u_0$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(\cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= -u_2 \sin u_0 - \frac{1}{2!} {u_1}^2 \cos u_0$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(\cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_3 \sin u_0 - u_1 u_2 \cos u_0 + \frac{1}{3!} {u_1}^3 \sin u_0$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(\cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= -u_4 \sin u_0 - \left(\frac{1}{2!} {u_2}^2 + u_1 u_3\right) \cos u_0 - \frac{1}{2!} {u_1}^2 u_2 \sin u_0 + \frac{1}{4!} {u_1}^4 \cos u_0$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.8. $f(u) = \sin u$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)|_{\lambda=0} = \sin u_0$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(\sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0} = u_1 \cos u_0$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(\sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} {u_1}^2 \sin u_0$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(\sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!} {u_1}^3 \cos u_0$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(\sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= -u_4 \cos u_0 - \left(\frac{1}{2!} {u_2}^2 + u_1 u_3\right) \sin u_0 - \frac{1}{2!} {u_1}^2 u_2 \cos u_0 + \frac{1}{4!} {u_1}^4 \sin u_0$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.9. $f(u) = \cosh u$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \cosh(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)|_{\lambda=0} = \cosh u_0$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(\cosh(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0} = u_1 \sinh u_0$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(\cosh(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_2 \sinh u_0 + \frac{1}{2!} {u_1}^2 \cosh u_0$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(\cosh(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_3 \sinh u_0 + u_1 u_2 \cosh u_0 + \frac{1}{3!} {u_1}^3 \sinh u_0$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(\cosh(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= u_4 \sinh u_0 + \left(\frac{1}{2!} {u_2}^2 + u_1 u_3\right) \cosh u_0 + \frac{1}{2!} {u_1}^2 u_2 \sinh u_0 + \frac{1}{4!} {u_1}^4 \cosh u_0$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.10. $f(u) = \ln u, \quad u > 0$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

olmak üzere

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \ln(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)|_{\lambda=0} = \ln u_0$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(\ln(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0} = \frac{u_1}{u_0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(\ln(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{u_2}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{{u_1}^2}{{u_0}^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(\ln(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{u_3}{u_0} - \frac{u_1 u_2}{{u_0}^2} + \frac{1}{3}\frac{{u_1}^3}{{u_0}^3}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(\ln(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{u_4}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{{u_2}^2}{{u_0}^2} - \frac{u_1 u_3}{{u_0}^2} + \frac{{u_1}^2 u_2}{{u_0}^3} + \frac{1}{4}\frac{{u_1}^4}{{u_0}^4}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

2.4. Birleştirilmiş Diferansiyel Transform ve Adomian Yöntemi

Daha önce DTY ve Adomian yöntemleri üzerinde durulmuştu. Şimdi ise her iki yöntemi de bir arada kullanan geliştirilmiş bir yöntem sunulacaktır. Bu yöntemde özellikle lineer olmayan terimlerin Adomian hesaplamaları ele alınarak belli bir amaç doğrultusunda kendi diferansiyel denklem problemimize uyarlanacaktır.

Teorem: Herhangi bir $f(u)$ analitik fonksiyonu,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

gibi yakınsak bir seri ile verildiğinde $f(u)$'nun uygun bir hesaplanışı, A_n'ler $f(u)$ fonksiyonunun ayrıştırılmış Adomian polinomları olmak üzere,

$$f(u) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(c_0, c_1, \dots, c_n)x^n$$

olup

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(u_0, u_1, \dots, u_n)x^n$$

dir (Adomian, 1991).

Aşağıdaki lemma önerilen yöntemin temelini oluşturur.

Lemma: $U(k) = \mathcal{D}_T\{u(x)\}$ ve $U(k)$'nın ters diferansiyel transformu $u(x) = \mathcal{D}_T{}^{-1}\{U(k)\}$ şeklinde olsun. A_n'ler de N lineer olmayan operatörüne göre Adomian polinomlarını göstersin. Buradan,

$$\mathcal{D}_T\{N(u)\} = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$$

yazılabilir.

İspat: Yukarıdaki teorem ile (20) ve (21) denklemlerini kullanırsak

$$N(u) = N\left(\sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(U(0), U(1), \dots, U(n))\, x^n$$

sonucunu çıkarabiliriz. Burada her iki tarafa diferansiyel transform uygularsak,

$$\mathcal{D}_T\{N(u)\} = \mathcal{D}_T\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(U(0), U(1), \dots, U(n))\, x^n\right\}$$

ve $A_n(U(0), U(1), \dots, U(n))$'lerin x'den bağımsız olduğunu göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_T\{N(u)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\big(U(0), U(1), \dots, U(n)\big)\, \mathcal{D}_T\{x^n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\big(U(0), U(1), \dots, U(n)\big)\, \delta(k-n)\end{aligned}$$

yazmak mümkündür. $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ olduğu düşünülerek, bu ifade de $k = n$ olması durumu dikkate alındığında,

$$\mathcal{D}_T\{N(u)\} = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$$

olduğu görülür.

Lemma bize herhangi bir lineer olmayan ifadenin diferansiyel transformunun hesaplanması için basit ve kullanışlı bir yol sunar.

Yukarıda bahsedilen yöntem yardımıyla lineer olmayan ifadelerin diferansiyel transformunu hesaplayalım. Burada $F(k)$, k. Adomian polinomu olarak alınıp, $F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere $k = 0$ için $F(0)$, 0. Adomian polinomu olan A_0'ı ifade etmektedir.

Örnek 2.12. $f(u) = u^2$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{u^2\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = U(0)^2$$

$$F(1) = 2U(0)U(1)$$

$$F(2) = U(1)^2 + 2U(0)U(2)$$

$$F(3) = 2U(1)U(2) + U(0)U(2)$$

$$F(4) = U(2)^2 + 2U(1)U(3) + 2U(0)U(4)$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.13. $f(u) = u^2 + u^3$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{u^2 + u^3\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = U(0)^2(1 + U(0))$$

$$F(1) = U(0)U(1)(2 + 3U(0))$$

$$F(2) = (1 + 3U(0))U(1)^2 + U(0)U(2)(2 + 3U(0))$$

$$F(3) = U(1)^3 + 2U(1)(U(2) + 3U(0)U(2)) + U(0)U(3)(2 + 3U(0))$$

$$\begin{aligned} F(4) = {} & 3U(1)^2U(2) + \big(1 + 3U(0)\big)U(2)^2 + 2U(1)\big(U(3) + 3U(0)U(3)\big) \\ & + U(0)U(4)(2 + 3U(0)) \end{aligned}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.14. $f(u)=\sqrt{u}$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\sqrt{u}\}=F(k)=A_k(U(0),U(1),\dots,U(k))$ olmak üzere,

$$F(0)=\sqrt{U(0)}$$

$$F(1)=\frac{U(1)}{2\sqrt{U(0)}}$$

$$F(2)=\frac{-U(1)^2+4U(0)U(2)}{8U(0)^{3/2}}$$

$$F(3)=\frac{U(1)^3-4U(0)U(1)U(2)+8U(0)^2U(3)}{16U(0)^{5/2}}$$

$$F(4)=-\frac{5U(1)^4-24U(0)U(1)^2U(2)+32U(0)^2U(1)U(3)}{128U(0)^{7/2}}+\frac{16U(0)^2(U(2)^2-4U(0)U(4))}{128U(0)^{7/2}}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.15. $f(u)=\sqrt[3]{u}$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\sqrt[3]{u}\}=F(k)=A_k(U(0),U(1),\dots,U(k))$ olmak üzere,

$$F(0)=U(0)^{1/3}$$

$$F(1)=\frac{U(1)}{3U(0)^{2/3}}$$

$$F(2)=\frac{-U(1)^2+3U(0)U(2)}{9U(0)^{5/3}}$$

$$F(3) = \frac{5U(1)^3 - 18U(0)U(1)U(2) + 27U(0)^2U(3)}{81U(0)^{8/3}}$$

$$F(4) = -\frac{10U(1)^4 - 45U(0)U(1)^2U(2) + 54U(0)^2U(1)U(3)}{243U(0)^{11/3}}$$
$$+\frac{27U(0)^2(U(2)^2 - 3U(0)U(4))}{243U(0)^{11/3}}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.16. $f(u) = e^u$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{e^u\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = e^{U(0)}$$

$$F(1) = U(1)e^{U(0)}$$

$$F(2) = \frac{1}{2}(U(1)^2 + 2U(2))e^{U(0)}$$

$$F(3) = \frac{1}{6}(U(1)^3 + 6U(1)U(2) + 6U(3))e^{U(0)}$$

$$F(4) = \frac{1}{24}(U(1)^4 + 12U(1)^2U(2) + 24U(1)U(3) + 12(U(2)^2 + 2U(4)))e^{U(0)}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.17. $f(u) = e^{u^2}$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{e^{u^2}\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = e^{U(0)^2}$$

$F(1) = 2U(0)U(1)e^{U(0)^2}$

$F(2) = ((1 + 2U(0)^2)U(1)^2 + 2U(0)U(2))e^{U(0)^2}$

$$F(3) = \frac{2}{3}(2U(0)^3U(1)^3 + 3U(1)U(2) + 6U(0)^2U(1)U(2) + 3U(0)(U(1)^3 \\ +U(3)))e^{U(0)^2}$$

$$F(4) = \frac{1}{6}\Big(\big(3 + 4U(0)^2(3 + U(0)^2)\big)U(1)^4 + 12U(0)(3 + 2U(0)^2)U(1)^2U(2) \\ + 12U(1)\big(U(3) + 2U(0)^2U(3)\big) \\ + 6\big((1 + 2U(0)^2)U(2)^2 + 2U(0)U(4)\big)\Big)\, e^{U(0)^2}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.18. $f(u) = \sin(u)$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\sin(u)\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$F(0) = \sin[U(0)]$

$F(1) = U(1)\cos[U(0)]$

$$F(2) = \frac{1}{2}(2U(2)\cos[U(0)] - U(1)^2\sin[U(0)])$$

$$F(3) = \frac{1}{6}(-(U(1)^3 - 6U(3))\cos[U(0)] - 6U(1)U(2)\sin[U(0)])$$

$$F(4) = \frac{1}{24}(-12(U(1)^2U(2) - 2U(4))\cos[U(0)] + (U(1)^4 - 12U(2)^2 \\ - 24U(1)U(3))\sin[U(0)])$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.19. $f(u) = \sin(u^2)$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\sin(u^2)\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = \sin[U(0)^2]$$

$$F(1) = 2U(0)U(1)\cos[U(0)^2]$$

$$F(2) = \frac{1}{2}(2(U(1)^2 + 2U(0)U(2))\cos[U(0)^2] - 4U(0)^2U(1)^2\sin[U(0)^2])$$

$$F(3) = -\frac{2}{3}((2U(0)^3U(1)^3 - 3U(1)U(2) - 3U(0)U(3))\cos[U(0)^2] \\ + 3U(0)U(1)(U(1)^2 + 2U(0)U(2))sin[U(0)^2])$$

$$F(4) = \frac{1}{6}\big(6(-2U(0)^2U(1)^4 - 4U(0)^3U(1)^2U(2) + U(2)^2 + 2U(1)U(3) \\ + 2U(0)U(4))\cos[U(0)^2] \\ + \big((-3 + 4U(0)^4)U(1)^4 - 36U(2)U(1)^2U(2) - 12U(0)^2U(2)^2 \\ - 24U(0)^2U(1)U(3)\big)\sin[U(0)^2]\big)$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.20. $f(u) = \sin(\sqrt{u}\,)$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\sin(\sqrt{u}\,)\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \dots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = \sin[\sqrt{U(0)}]$$

$$F(1) = \frac{U(1)\cos[\sqrt{U(0)}]}{2\sqrt{U(0)}}$$

$$F(2)=\frac{-(U(1)^2-4U(0)U(2))\cos[\sqrt{U(0)}]-\sqrt{U(0)}U(1)^2\sin[\sqrt{U(0)}]}{8U(0)^{3/2}}$$

$$F(3)=\frac{1}{48U(0)^{5/2}}((-(-3+U(0))U(1)^3-12U(0)U(1)U(2)$$
$$+24U(0)^2U(3))\cos[\sqrt{U(0)}]+3\sqrt{U(0)}U(1)(U(1)^2$$
$$-4U(0)U(2))\sin[\sqrt{U(0)}])$$

$$F(4)=\frac{1}{384U(0)^{7/2}}(3((-5+2U(0))U(1)^4-8(-3+U(0))U(0)U(1)^2U(2)$$
$$-32U(0)^2U(1)U(3)+16U(0)^2(-U(2)^2+4U(0)U(4)))\cos[\sqrt{U(0)}]$$
$$+\sqrt{U(0)}((-15+U(0))U(1)^4+72U(0)U(1)^2U(2)-48U(0)^2U(2)^2$$
$$-96U(0)^2U(1)U(3))\sin[\sqrt{U(0)}])$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.21. $f(u)=\cos(u)$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\cos(u)\}=F(k)=A_k(U(0),U(1),\dots,U(k))$ olmak üzere,

$$F(0)=\cos[U(0)]$$

$$F(1)=-U(1)\sin[U(0)]$$

$$F(2)=\frac{1}{2}(-U(1)^2\cos[U(0)]-2U(2)\sin[U(0)])$$

$$F(3)=\frac{1}{6}(-6U(1)U(2)\cos[U(0)]+(U(1)^3-6U(3))\sin[U(0)])$$

$$F(4)=\frac{1}{24}((U(1)^4-12U(2)^2-24U(1)U(3))\cos[U(0)]+12(U(1)^2U(2)$$
$$-2U(4))\sin[U(0)])$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.22. $f(u) = \ln(u), \quad u > 0$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\ln(u)\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \ldots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = \ln[U(0)]$$

$$F(1) = \frac{U(1)}{U(0)}$$

$$F(2) = -\frac{U(1)^2 - 2U(0)U(2)}{2U(0)^2}$$

$$F(3) = \frac{U(1)^3 - 3U(0)U(1)U(2) + 3U(0)^2U(3)}{3U(0)^3}$$

$$F(4) = -\frac{U(1)^4 - 4U(0)U(1)^2U(2) + 4U(0)^2U(1)U(3)}{4U(0)^4} + \frac{2U(0)^2(U(2)^2 - 2U(0)U(4))}{4U(0)^4}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.23. $f(u) = \ln(u^2), \quad u^2 > 0$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$\mathcal{D}_T\{\ln(u^2)\} = F(k) = A_k(U(0), U(1), \ldots, U(k))$ olmak üzere,

$$F(0) = \ln[U(0)^2]$$

$$F(1) = \frac{2U(1)}{U(0)}$$

$$F(2) = \frac{-2U(1)^2 + 4U(0)U(2)}{2U(0)^2}$$

$$F(3)=\frac{2(U(1)^3-3U(0)U(1)U(2)+3U(0)^2U(3))}{3U(0)^3}$$

$$F(4)=-\frac{U(1)^4-4U(0)U(1)^2U(2)+4U(0)^2U(1)U(3)}{2U(0)^4}$$
$$+\frac{2U(0)^2(U(2)^2-2U(0)U(4))}{2U(0)^4}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır.

3. BULGULAR

Aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemler birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemiyle yaklaşık çözümleri elde edip, gerçek çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.1. $u' = u - 2u^2, \quad u(0) = 1\,,$ (51)

lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile bulalım.

(51) diferansiyel denkleminde her iki tarafın x'e göre diferansiyel transformu alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u'\} = \mathcal{D}_T\{u - 2u^2\} \tag{52}$$

$$(k+1)U(k+1) = \mathcal{D}_T\{u - 2u^2\} = F(k); \quad k \geq 0 \tag{53}$$

$$U(k+1) = \frac{F(k)}{k+1}, \quad k \geq 0 \tag{54}$$

elde edilir. $u - 2u^2$ terimin Adomian polinomları bilindiğinden

$$F(0) = U(0) - 2U(0)^2$$

$$F(1) = U(1) - 4U(0)U(1)$$

$$F(2) = \frac{1}{2}(-4U(1)^2 + (2 - 8U(0))U(2))$$

$$F(3) = -4U(1)U(2) + U(3) - 4U(0)U(3)$$

$$F(4) = -2U(2)^2 - 4U(1)U(3) - (-1 + 4U(0))U(4)$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır. (54) tekrarlama bağıntısından

$$U(0) = 1$$

$$F(0) = -1$$

$$U(1) = \frac{F(0)}{0+1} = -1$$

$$F(1) = 3$$

$$U(2) = \frac{F(1)}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$F(2) = -\frac{13}{2}$$

$$U(3) = \frac{F(2)}{2+1} = -\frac{13}{6}$$

$$F(3) = \frac{25}{2}$$

$$U(4) = \frac{F(3)}{3+1} = \frac{25}{8}$$

$$F(4) = -\frac{541}{24}$$

$$U(5) = \frac{F(4)}{4+1} = -\frac{541}{120}$$

$\vdots$

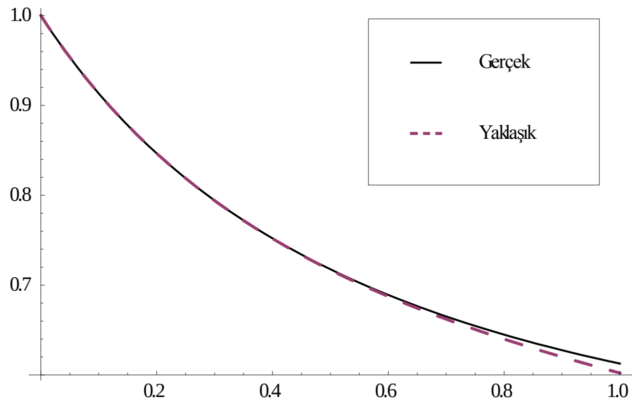
$U(k)$ değerleri bulunur. Böylece,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{13x^3}{6} + \frac{25x^4}{8} - \frac{541x^5}{120} + \cdots \quad (55)$$

denklemin yaklaşık çözümü elde edilir.

$$u(x) = \frac{e^x}{-1 + 2e^x} \tag{56}$$

(56) denklemi (51) denkleminin analitik çözümü olmak üzere, analitik ve yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 3. (51) denkleminin gerçek çözümü ve birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 3.2. $u'' = 2u + 4u\ln u\,, \quad u(0) = 1,\; u'(0) = 0$ (57)
lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile bulalım.

(57) diferansiyel denkleminde her iki tarafın x'e göre diferansiyel transformu alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u''\} = \mathcal{D}_T\{2u + 4u\ln u\} \tag{58}$$

$$(k+2)(k+1)U(k+2) = \mathcal{D}_T\{2u + 4u\ln u\} = F(k);\;\; k \geq 0 \tag{59}$$

$$U(k+2) = \frac{F(k)}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 0 \tag{60}$$

elde edilir. $2u + 4u\ln u$ terimin Adomian polinomları bilindiğinden

$$F(0) = 2U(0)(1 + 2\ln[U(0)])$$

$$F(1) = 2U(1)(3 + 2\ln[U(0)])$$

$$F(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4U(1)^2}{U(0)} + 12U(2) + 8U(2)\ln[U(0)]\right)$$

$$F(3) = \frac{2}{3}\left(-\frac{U(1)^3 - 6U(0)U(1)U(2)}{U(0)^2} + 9U(3) + 6U(3)\ln[U(0)]\right)$$

$$F(4) = \frac{U(1)^4 - 6U(0)U(1)^2U(2) + 12U(0)^2U(1)U(3)}{3U(0)^3} + \frac{6U(0)^2(U(2)^2 + 3U(0)U(4)) + 12U(0)^3U(4)\ln[U(0)]}{3U(0)^3}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır. (60) tekrarlama bağıntısından

$$U(0) = 1$$

$$U(1) = 0$$

$$F(0) = 2$$

$$U(2) = \frac{F(0)}{(0+2)(0+1)} = 1$$

$$F(1) = 0$$

$$U(3) = \frac{F(1)}{(1+2)(1+1)} = 0$$

$$F(2) = 6$$

$$U(4) = \frac{F(2)}{(2+2)(2+1)} = \frac{1}{2}$$

$F(3) = 0$

$$U(5) = \frac{F(3)}{(3+2)(3+1)} = 0$$

$F(4) = 5$

$$U(6) = \frac{F(4)}{(4+2)(4+1)} = \frac{1}{6}$$

$\vdots$

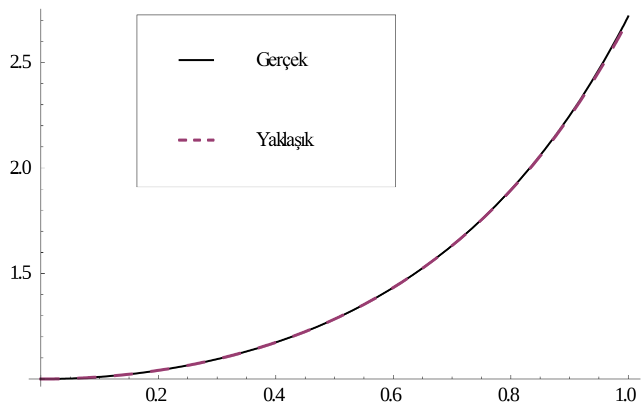
$U(k)$ değerleri bulunur. Böylece,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \cdots \quad (61)$$

denklemin yaklaşık çözümü elde edilir.

$$u(x) = e^{x^2} \quad (62)$$

(62) denklemi (57) denkleminin analitik çözümü olmak üzere, analitik ve yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 4. (57) denkleminin gerçek çözümü ve birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 3.3. $u' = \cos^2 u\,, \quad u(0) = 0$ (63)

lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile bulalım.

(63) diferansiyel denkleminde her iki tarafın x'e göre diferansiyel transformu alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u'\} = \mathcal{D}_T\{\cos^2 u\} \tag{64}$$

$$(k+1)U(k+1) = \mathcal{D}_T\{\cos^2 u\} = F(k); \;\; k \geq 0 \tag{65}$$

$$U(k+1) = \frac{F(k)}{(k+1)}, \quad k \geq 0 \tag{66}$$

elde edilir. $\cos^2 u$ terimin Adomian polinomları bilindiğinden

$$F(0) = \cos[U[0]]^2$$

$$F(1) = -2U(1)\cos[U(0)]\sin[U(0)]$$

$$F(2) = -U(1)^2\cos[2U(0)] - U(2)\sin[2U(0)]$$

$$F(3) = \frac{1}{6}(-12U(1)U(2)\cos[2U(0)] + 2(2U(1)^3 - 3U(3))\sin[2U(0)])$$

$$F(4) = \frac{1}{3}((U(1)^4 - 3U(2)^2 - 6U(1)U(3))\cos[2U(0)] + 3(2U(1)^2U(2) - U(4))\sin[2U(0)])$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır. (66) tekrarlama bağıntısından

$$U(0) = 1$$

$$F(0) = 1$$

$$U(1) = \frac{F(0)}{0+1} = 1$$

$F(1)$ =0

$$U(2) = \frac{F(1)}{1+1} = 0$$

$$F(2) = -1$$

$$U(3) = \frac{F(2)}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$$F(3) = 0$$

$$U(4) = \frac{F(3)}{3+1} = 0$$

$$F(4) = 1$$

$$U(5) = \frac{F(4)}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$\vdots$

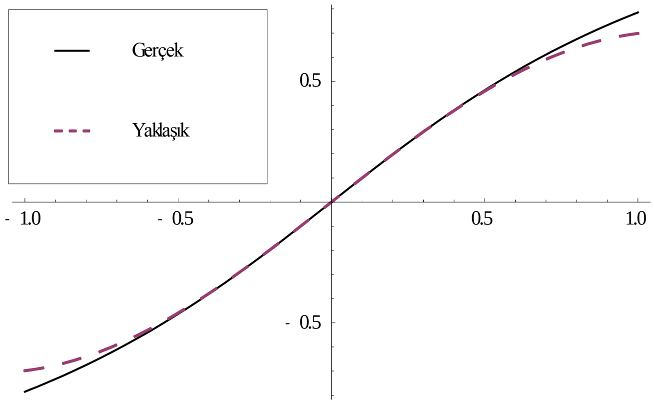
$U(k)$ değerleri bulunur. Böylece,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{67}$$

denklemin yaklaşık çözümü elde edilir.

$$u(x) = \arctan(x) \tag{68}$$

(68) denklemi (63) denkleminin analitik çözümü olmak üzere, analitik ve yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 5. (63) denkleminin gerçek çözümü ve birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 3.4. $u' = \sqrt[3]{u}, \quad u(0) = 1$ (69)

lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile bulalım.

(69) diferansiyel denkleminde her iki tarafın x'e göre diferansiyel transformu alınırsa

$$\mathcal{D}_T\{u'\} = \mathcal{D}_T\{\sqrt[3]{u}\} \tag{70}$$

$$(k+1)U(k+1) = \mathcal{D}_T\{\sqrt[3]{u}\} = F(k); \;\; k \geq 0 \tag{71}$$

$$U(k+1) = \frac{F(k)}{(k+1)}, \quad k \geq 0 \tag{72}$$

elde edilir. $\sqrt[3]{u}$ terimin Adomian polinomları bilindiğinden

$$F(0) = U(0)^{1/3}$$

$$F(1) = \frac{U(1)}{3U(0)^{2/3}}$$

$$F(2) = \frac{-U(1)^2 + 3U(0)U(2)}{9U(0)^{5/3}}$$

$$F(3)=\frac{5U(1)^3-18U(0)U(1)U(2)+27U(0)^2U(3)}{81U(0)^{8/3}}$$

$$F(4)=-\frac{10U(1)^4-45U(0)U(1)^2U(2)+54U(0)^2U(1)U(3)}{243U(0)^{11/3}}$$
$$-\frac{27U(0)^2(U(2)^2-3U(0)U(4))}{243U(0)^{11/3}}$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır. (72) tekrarlama bağıntısından

$$U(0)=1$$

$$F(0)=1$$

$$U(1)=\frac{F(0)}{0+1}=1$$

$$F(1)=\frac{1}{3}$$

$$U(2)=\frac{F(1)}{1+1}=\frac{1}{6}$$

$$F(2)=\frac{-1}{18}$$

$$U(3)=\frac{F(2)}{2+1}=-\frac{1}{54}$$

$$F(3)=\frac{1}{54}$$

$$U(4)=\frac{F(3)}{3+1}=\frac{1}{216}$$

$$F(4) = \frac{-5}{648}$$

$$U(5) = \frac{F(4)}{4+1} = -\frac{1}{648}$$

$\vdots$

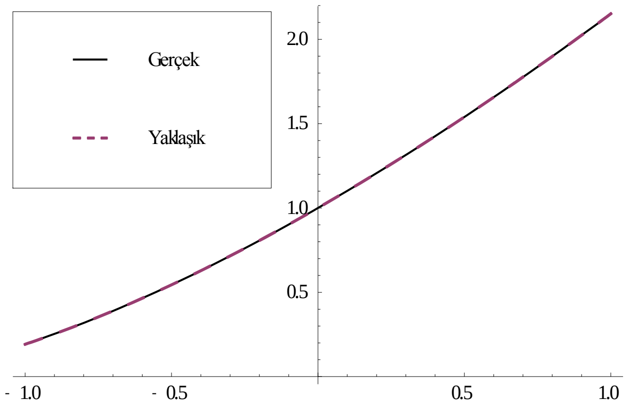
$U(k)$ değerleri bulunur. Böylece,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = 1 + x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{54} + \frac{x^4}{216} - \frac{x^5}{648} + \cdots \tag{73}$$

denklemin yaklaşık çözümü elde edilir.

$$u(x) = \frac{1}{9}(3\sqrt{9+6x} + 2x\sqrt{9+6x}) \tag{74}$$

(74) denklemi (69) denkleminin analitik çözümü olmak üzere, analitik ve yaklaşık çözüm aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 6. (69) denkleminin gerçek çözümü ve birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada Diferansiyel transform yöntemi, Modifiye diferansiyel transform yöntemi, Padé yaklaşımı, Taylor serisi, Laplace dönüşümü, Adomian polinomları ve yeni bir yöntem olan birleştirilmiş diferansiyel transform ve Adomian yöntemi hakkında temel tanımlar, teoremler ve uygulama örnekler verilerek konular ayrıntılı bir şekilde açıklanmaya çalışıldı.

Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri, geliştirilmiş olan bir yöntemle ele alındı. Daha önce literatür de verilen Diferansiyel transform ve Adomian ayrışım yöntemi tek bir model denklem üzerinde ortak kullanarak, söz konusu denklemlerin yaklaşık çözümü ile analitik çözümü arasında kıyaslama yapıldı. Sonuç olarak geliştirilen yöntemle elde edilen çözümün gerçek çözüme çok yakın olduğu grafik yardımıyla görüldü.

5. ÖNERİLER

Geliştirilmiş olan bu yöntem iki boyutlu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Abdel I.H., Hassan H., 2004. Differential transformation technique for solving higher order initial value problems. Applied Mathematics and Computation, 154, 299-311.

Abdelwahid, F., 2003. A mathematical model of Adomian polynomials. Applied Mathematics and Computation, 141, 447-453.

Adomian, G., 1984. Convergent series solution of nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 11, 225-230.

Adomian, G., Rach, R., 1991. Transformation of series. Applied Mathematics Letters, 4, 69-71.

Adomian, G., Rach, R., 1992. Noise terms in decomposition series. Applied Mathematics and Computation, 24 (11), 61-64.

Akyol, H., 2012. Adomian Ayrıştırma (Decomposıtıon) Metodu ile Modelleme Örnekleri. Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, 106 s., 16.

Arıkoglu, A., Özkol, İ., 2005. Solution of boundary value problems for ıntegro differential equations by using differantial transform method. Applied Mathematics and Computation, 168 (2), 1145-1158.

Arikoglu, A., Özkol, İ., 2006. Solution of difference equations by using differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 174, 1216-1228.

Ayaz, F., 2003. On the two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 143, 361-374.

Ayaz F., 2004. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 147 (2), 547-567.

Ayaz, F., 2004. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. Applied Mathematics and Computation, 152, 649-657.

Baker, G.A., Graves-Morris, P., 1996. Padé Approximants, Cambridge University Press, Cambridge. ISBN: 0-521-45007-1, 1.

Babolian, E., ve Ark., 2004. Solution of system of nonlinear equations by Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation, 150, 847- 854.

Bellomo, N., Sarafyan, D., 1987. On Adomian's decomposition method and some comparisons with Picard's iterative scheme, Journal of Mathematical and Physical Sciences, 123, 389-400.

Cansu, Ü., Özkan, O., 2010. Differential transform solution of some linear wave equations with mixed nonlinear boundary conditions and its blow up. Applied Mathematics and Computation, 4 (10), 467 - 475.

Cansu, Ü., 2010. İntegro Diferansiyel Denklemlerin Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Metoduyla Çözümü. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 74 s., 8-12-14.

Chen, C.K., Ho, S.H., 1996. Application of differantial transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation, 79, 173-188.

Chen, C.K., Ho, S.H., 1999. Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 106, 171-179.

Cherruault, Y., ve Ark., 2002. On the solution of the non-linear Korteweg-de Vries equation by the decomposition method. Kybernetes, 31 (5), 766-772**.**

Davies, B.J., 2002. Integral transforms and their applications (3rd ed.), Berlin, New York, Springer-Verlag, ISBN: 0-387-95314-4, 978.

Deeba, E., Khuri, S.A., 1996. A decomposition method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation. Journal of Computational Physics, 124, 442-448.

El-Sayed, S.M., 2003. The decomposition method for solving studying the Klein-Gordon equation. Chaos Solitons and Fractals, 18, 1025-1030.

Ertürk, V., Momani, S., 2008. Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 55 (4), 833-842.

Eser, H., 2008. Gaz Dinamik Denklemlerine Yeni Bir Yaklaşım: Diferansiyel Transform Metodunun Bir Uygulaması. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 46 s.

Fatoorehchi, H., Abolghasemi, H., 2013. Improving the differential transform method: A novel technique to obtain the differential transforms of nonlinearities by the Adomian polynomials. Applied Mathematics Modelling, 37, 6008-6017.

Güngör, Y., 2013. Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşümler Yardımıyla Çözümü. Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, 115 s., 5.

İnç, M., Cherruault, Y., 2005. A reliable approach to the Korteweg-de Vries equation. Kybernetes, 34, 951-959.

Kangalgil, F., Ayaz F., 2009. Solitary wave solutions of KdV and mKdv equations by differential transform method. Chaos, Solitons and Fractals, 41 (1), 464-472.

Keskin, Y., 2005. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 68 s.

Keskin, Y., Oturanç, G., 2009. Reduced differential transform method for partial differential equations. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 6 (10), 741-749.

Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005. The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 82, 709-719.

Manzhirov, A.V., Polyanin, A.D., 1998. Handbook of integral equations, London, ISBN: 1-584-88507-6, 245.

Piyade, M., 2012. Lineer Olmayan Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Türkiye, 64 s., 22.

Pozzi, A., 1994. Applıcatıons of Padé approxımatıon theory ın fluıd dynamıcs, Napoli Üniversitesi, Napoli, ISBN: 9-810-21414-6, 14.

Servi, S., 2008. Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümlerine Üzerine Farklı Yaklaşımlar. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 66 s., 6.

Wazwaz, A.M., 1998. A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions. Applied Mathematics and Computation, 97, 37-44.

Wazwaz, A.M., 2000. A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators. Applied Mathematics and Computation, 111, 53-69.

Wazwaz, A.M., 2002. Partial Differential Equations, A.A. Balkema Publishers, Tokyo, ISBN: 9-058-09369-7, 459.

Zareamoghaddam, H., 2011. Differential transform method for solving one dimensional non-homogeneous parabolic problems. Middle-East Journal of Scientific Research, 8 (2), 541-543.

Zhou, J.K., 1986. Differential transformation and its applications for electrical circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

İlhami ŞAHİN, 02/10/1989 tarihinde İspir'de doğdu. İlköğretimini 2003 yılında Erzurum/İspir'de İspir Yatılı İlköğretim Bölge Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2006 yılında Erzurum/Olur'da Olur Lisesi'nde tamamladı. 10/09/2008 tarihinde başladığı lisans eğitimini 30/05/2012 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde 3. lük derecesi ile tamamladı. 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde başladığı yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. Özel Rize Pegem Akademi KPSS kursunda matematik öğretmeni olarak 2012 yılı itibariyle görev yapmakta olup Halk Eğitim Kurumunda da usta öğretici olarak 2014 yılı itibariyle görev yapmaktadır.