T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DARBOUX DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM

TANSU DİLİ

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. MEHMET ÜNLÜ
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. NİLÜFER TOPSAKAL
YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE – 2017

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DARBOUX DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ danışmanlığında, Tansu DİLİ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21/07/2017 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç. Dr. Nilüfer TOPSAKAL	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemler için Darboux dönüşümlere genel bir yaklaşım incelenmiştir. Darboux dönüşüm, bir diferansiyel denkleme benzer bir diferansiyel denklemin çözümünden istifade ederek, bu diferansiyel denklem için bir çözüm üreten matematiksel bir yöntemdir.

Yüksek lisans eğitimim süresince tüm bilgisini ve deneyimini benimle paylaşan, sabırla destek olan ve yönlendiren tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ'ye, lisans ve lisansüstü ders aşamasında yardımlarından ötürü Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki sayın hocalarıma, sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aileme ve hep yanımda olan sevgili arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Tansu DİLİ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Darboux Dönüşümleri İçin Genel Bir Yaklaşım" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 27/07/2017

Tansu DİLİ

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

DARBOUX DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM

TANSU DİLİ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ

Darboux dönüşüm, bir diferansiyel denkleme benzer bir diferansiyel denklemin çözümü biliniyorsa, bu diferansiyel denklem için bir çözüm üreten matematiksel bir yöntemdir. İntegral operatörü sonlu rank perturbasyonu tarafından değiştirildiği zaman, çözümdeki değişimi perturbasyona uğramamış terimler cinsinden açık bir şekilde hesaplanmaktadır. Bu metod, çekirdeği ve homojen olmayan terimi çakışık olan bir lineer integral denkleminin çözümünü kullanmaktadır. Elde edilen sonuçlar, lineer olmayan Schrödinger denkleminin kesin çözümünü elde etmek için kullanılmaktadır.

2017, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Darboux dönüşümü, Marchenko denklemi, Gel’fand-Levitan denklemi, Schrödinger denklemi.

ABSTRACT

A GENERALIZED APPROACH TO DARBOUX TRANSFORMATION

TANSU DİLİ

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet ÜNLÜ

A Darboux transformation is a mathematical procedure to produce a solution of a differential equation when the solution of a related differential equation is known. When a integral operator is perturbed by a finite-rank perturbation, we explicitly evaluate the change in the solution in terms of the unperturbed quantities. This method uses the solution to a linear integral equation where the kernel and nonhomogeneous terms coincide. We apply our result to obtain exact solution to the nonlinear Schrödinger equation.

2017, 44 pages

Keywords: Darboux transformation, Marchenko equaiton, Gel'fand-Levitan equation, Schrödinger equation.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER DİZİNİ	VI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Literatür Özeti	2
1.3. Tanımlar	3
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	10
2.1. (Sol) Marchenko İntegral Denklemi	10
2.2. Çözücü Çekirdeğin Oluşturulması	13
2.3. Potansiyel Seviyede Darboux Dönüşümü	23
2.4. Dalga Fonksiyonu Seviyede Darboux Dönüşümü	29
2.5. Sabit Matris Üçlüsü ile Darboux Dönüşümü	31
3. BULGULAR ve TARTIŞMA	36
4. SONUÇLAR	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathcal{H}_p^{M\times N}$	$M \times N$ Ölçülebilir Fonksiyonların Matris Değerli Kompleks Banach Uzayı
$\mathbb{C}^{M\times N}$	Kompleks Değerli Uzay
L^p	Fonksiyon Uzayı
$\|.\|$	Matris Normu
†	Matris Adjoint
‡	Matris Adjoint ve Simetrik
I	Birim Matris
$\mathcal{L}$	Lineer Diferansiyel Operatör
λ	Spektral Parametre
$u(x)$	Potansiyel
$\psi(x)$	Dalga Fonksiyonu

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezde, $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ spektral problemi ele alınmaktadır. Buradaki $\mathcal{L}$, bazı uygun fonksiyon uzayları üzerinde uygulanabilen lineer diferansiyel operatör ve λ ise spektral parametredir. $\mathcal{L}$ operatörünün spektrumu sıfırdan farklı ψ çözümünün var olduğu tüm λ değerlerinden meydana gelir. Ayrıca $\mathcal{L}$ operatörü genellikle bir katsayı olarak potansiyel diye adlandırılan bir $u(x)$ fonksiyonu içerir.

$\mathcal{L}$ operatörünün spektrumu genellikle ayrık ve sürekli şeklinde iki kısımdan oluşmaktadır. $\mathcal{L}$ operatörünün $\tilde{\mathcal{L}}$ operatörüne perturbasyonunda, $\mathcal{L}$ ve $\tilde{\mathcal{L}}$ nin sürekli spektrumları çakışık iken, ayrık spektrumları sonlu sayıda özdeğerle birbirinden ayrılmaktadır. $\mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ dönüşümü altında, potansiyel, $u(x) \to \tilde{u}(x)$ şeklinde ve dalga fonksiyonu ise $\psi(\lambda, x) \to \tilde{\psi}(\lambda, x)$ şeklinde değişmektedir.

Perturbasyondan sonra, $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ spektral problemi, perturbasyona uğramış $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$ problemine dönüşmektedir.

Darboux dönüşümü iki kısımdan oluşmaktadır; birinci kısım potansiyel seviye ve ikinci kısım dalga fonksiyon seviyesidir. Bu dönüşüm, perturbasyona uğramış potansiyel ve dalga fonksiyonlarını perturbasyona uğramamış değerler cinsinden sağlamaktadır. Potansiyel seviyede Darboux dönüşümü, perturbasyona uğramış potansiyel $\tilde{u}(x)$ in, perturbasyona uğramamış potansiyel $u(x)$ ve perturbasyondaki ayrık λ-özdeğerlerinde hesaplanan değerler cinsinden belirlenmesinden meydana gelmektedir. Dalga fonksiyonu seviyedeki Darboux dönüşümü ise perturbasyona uğramış $\tilde{\psi}(\lambda, x)$ in perturbasyona uğramamış dalga fonksiyonu $\psi(\lambda, x)$ ve perturbasyondaki ayrık λ-özdeğerlerinde hesaplanan değerler cinsinden belirlenmesinden ibarettir.

Bu tezde, diferansiyel denklemler için çeşitli spektral problemler için Darboux dönüşümler türeten bir yöntem elde edilmektedir. Bu yöntem, Marchenko integral denklemleri veya Gel'fand-Levitan integral denklemi olarak adlandırılan temel integral denklemleri yardımıyla yapılmaktadır.

Bu yaklaşım, herhangi bir dalga fonksiyonu için bir Darboux dönüşümü elde edilmesine olanak tanımaktadır. Oysaki diğer yaklaşımlarda Darboux dönüşümü yalnızca bazı özel dalga fonksiyonu için verilmektedir. Yöntem, belirli diferansiyel denklemlere özgü değildir ve büyük bir diferansiyel denklem sınıfına uygulanabilen bir yaklaşımdır.

(Sol) Marchenko integral denklemi, dalga fonksiyonu $\psi(\lambda, x)$ nin, $x = \infty$ daki bazı özel asimptotik şartlar sayesinde belirlendiği zaman kullanılmaktadır. Bundan dolayı, 2. kısımda verilen işlemler, $x = \infty$ daki asimptotik şartlar sayesinde tanımlanan dalga fonksiyonu için dalga fonksiyonu seviyesindeki Darboux dönüşümü elde etmeye uygundur.

Benzer şekilde, (Sağ) Marchenko integral denklemi, dalga fonksiyonu $\psi(\lambda, x)$ nin, $x = -\infty$ daki bazı özel asimptotik şartlar sayesinde belirlendiği zaman kullanılmaktadır. Bundan dolayı, $x = -\infty$ daki asimptotik şartlar sayesinde tanımlanan dalga fonksiyonu için dalga fonksiyonu seviyesindeki Darboux dönüşümü elde etmeye uygundur.

Son olarak, hala dalga fonksiyonları için, bu dalga fonksiyonları x-ekseni üzerindeki belirli bir noktadaki bazı başlangıç değerlerini kullanarak belirlenmektedir. Probleme herhangi bir kısıtlama getirmeksizin, x-ekseni üzerindeki bu nokta $x = 0$ olarak seçilebilmektedir.

Gelfand-Levitan denklemi, dalga fonksiyonu $\psi(\lambda, x)$ nin, $x = 0$ daki bazı başlangıç şartları aracılığıyla belirlendiği zaman kullanılmaktadır. Bundan dolayı, Gelfand-Levitan denklemi için yapılacak işlemler, $x = 0$ daki başlangıç koşulları aracılığıyla tanımlanan dalga fonksiyonları için dalga fonksiyonu seviyedeki Darboux dönüşümü elde etmeye uygundur.

1.2. Literatür Özeti

Darboux dönüşümünün arkasındaki temel fikir, 1875 de Fransız bir matematikçi Th'eodore Florentin Moutard'ın [11] çalışmasından kaynaklanmaktadır. 1882 den sonra, Jean Gaston Darboux [6] yazısında bu dönüşümü, günümüzde Schrödinger denklemi olarak bilinen ikinci dereceden diferansiyel denklemin bir önermesi olarak sunmuştur. 1889 da, Darboux bir kitap [7] yayınladı ve dönüşüm bu kitapta da gösterilmiştir. 1955 de, M.M.Crum [5] sonlu bir aralıkta diferansiyel denklemler için benzer dönüşüm bulmuştur. 1957 de, M.G Kerin [9] bu fikirleri büyüttü ve yarı doğru üzerinde Schrödinger denklemi için benzer dönüşüm elde etmiştir. 1979 da, V. B. Matveev [10] dönüşümleri integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uyarlamıştır.

1.3. Tanımlar

Tanım 1.1. λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $\varphi(x)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x dt\, K(x,t)\varphi(t) \tag{1.3.1}$$

denklemi, ikinci çeşit Volterra lineer integral denklemi olarak adlandırılır.

$K(x,t)$ fonksiyonuna Volterra denkleminin çekirdeği denir. $f(x) \equiv 0$ ise (1) denklemi

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x dt\, K(x,t)\varphi(t) \tag{1.3.2}$$

formunu alır ve ikinci çeşit homojen Volterra denklemi olarak adlandırılır.

$\varphi(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^x dt\, K(x,t)\varphi(t) = f(x) \tag{1.3.3}$$

denklemi birinci çeşit Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. İntegralin alt limiti olan a değeri, genelliği bozmadan sıfır olarak alınacaktır.

(1.3.1), (1.3.2) ve (1.3.3) integral denkleminin bir çözümü, denklemde yazıldığında, denklemi sağlayan bir $\varphi(x)$ fonksiyonudur.

Örnek 1.1. $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ fonksiyonunun $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x dt\, \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)$ integral denklemin bir çözümü olduğunu gösterelim:

Verilen integral denkleminin sağ tarafında $\varphi(t)$ yerine $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ koyup gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x dt\ \frac{1}{1+x^2}\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Big|_{t=0}^{t=x}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x)$$

bulunur.

Buna göre $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ fonksiyonu verilen integral denklemin bir çözümü olmaktadır.

Volterra İntegral Denkleminin Çözücü Çekirdeği, İntegral Denklemlerin Çözücü Çekirdek Yardımıyla Çözülmesi

$0\le x\le a,\ 0\le t\le x$ için $K(x,t)$ ve $0\le x\le a$ için $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere ikinci çeşit Volterra integral denklemi

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x dt\ K(x,t)\varphi(t) \tag{1.3.4}$$

ile verilsin. İntegral denkleminin λ ya göre yazılmış

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots+\lambda^n\varphi_n(x)+\cdots \tag{1.3.5}$$

formunda bir kuvvet serisi cinsinden çözümü araştırılacaktır. Bu seri (1.3.4) de yerine konulursa

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots+\lambda^n\varphi_n(x)+\cdots$$

$$=f(x)+\lambda\int_0^x dt\ K(x,t)[\varphi_0(t)+\lambda\varphi_1(t)+\lambda^2\varphi_2(t)+\cdots+\lambda^n\varphi_n(t)+\cdots] \tag{1.3.6}$$

bulunmaktadır. (1.3.6) nın her iki yanında yer alan aynı kuvvetteki λ ların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x dt\, K(x,t)\varphi_0(t) = \int_0^x dt\, K(x,t) f(t),$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x dt\, K(x,t)\varphi_1(t) = \int_0^x K(x,t) \int_0^t dt_1 dt\, K(t,t_1) f(t_1) \qquad (1.3.7)$$

…………………………………..

elde edilir.

(1.3.7) ile verilen bağıntılar, $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarının ardışık olarak bulunabilmesine olanak sağlayan bir yöntemin ortaya çıkmasına olanak vermektedir.

(1.3.5) ile ifade edilen serinin, $f(x)$ ve $K(x,t)$ nin yukarda sözünü ettiğimiz özellikleri gerçekleşmesi durumunda her λ ve $[0, a]$ aralığında bulunan her x için λ ve x e göre düzgün yakınsak olduğu ve toplamının (1.3.4) ün bir tek çözümü olduğu gösterilebilir.

(1.3.7) den hareketle şu sonuçları elde edebiliriz:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x dt\, K(x,t) f(t) \qquad (1.3.8)$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^x dt\, K(x,t) \left[\int_0^t dt_1\, K(t,t_1) f(t_1) \right]$$

$$= \int_0^t dt_1\, f(t_1) \int_{t_1}^x dt\, K(x,t) K(t,t_1)$$

$$= \int_0^x dt_1\, K_2(x,t_1) f(t_1) \qquad (1.3.9)$$

Burada

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^{x} dt\, K(x, t) K(t, t_1) \tag{1.3.10}$$

dir. Bu yolu izleyerek

$$\varphi_n(x) = \int_{0}^{x} dt\, K_n(x, t) \quad (n = 1,2, \dots) \tag{1.3.11}$$

olduğu gösterilebilir. $K_n(x, t)$ fonksiyonları, ardışık çekirdekler olarak isimlendirilir. Bunların aşağıdaki tekrarlama bağıntıları yardımıyla belirlenebileceği de bu aşamada gösterilebilir:

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_{t}^{x} dz\, K(x, z) K_n(z, t) \quad (n = 1,2, \dots) \tag{1.3.12}$$

(1.3.11) ve (1.3.12) u kullanarak (1.3.5) eşitliğini

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_{0}^{x} dt\, K_v(x, t) f(t) \tag{1.3.13}$$

formunda yazabiliriz.

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x, t) \tag{1.3.14}$$

ile tanımlanan $R(x, t; \lambda)$ fonksiyonu (1.3.4) integral denkleminin çözücü çekirdeği olarak anlandırılır. $K(x, t)$ nin sürekli olması durumunda (1.3.14) serisi mutlak düzgün yakınsaktır.

Gerek ardışık çekirdekler ve gerekse çözücü çekirdek, integral denkleminin alt limitine bağlı değildir.

$R(x, t; \lambda)$ çözücü çekirdeği aşağıdaki fonksiyonel denklemi sağlar:

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x ds\, K(x,s)R(s,t;\lambda) \tag{1.3.15}$$

Çözücü çekirdeğin yardımıyla (1.3.4) integral denkleminin çözümü

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x dt\, f(t)R(x,t;\lambda) \tag{1.3.16}$$

formunda yazılabilir.

Örnek 1.2. $K(x,t) \equiv 1$ olmak üzere Volterra integral denkleminin çözücü çekirdeğini bulalım:

$K_1(x,t) = K(x,t) = 1\, dir.$ (1.3.12) formülünü kullanalım:

$$K_2(x,t) = \int_t^x dz\, K(x,z)K_1(z,t) = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x dz\, 1.(z-t) = \frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x,t) = \int_t^x dz\, 1.\frac{(z-t)^2}{2} = \frac{(x-t)^3}{3!},$$

……………………………

$$K_n(x,t) = \int_t^x dz\, 1K_{n-1}(z,t) = \int_t^x dz\, 1\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Dolayısıyla, çözücü çekirdeğin tanımı gereği

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}$$

yazılabilir.

Tanım 1.2. Bir vektör uzayından başka bir vektör uzayına tanımlanan dönüşüme operatör denir. Operatör, fonksiyonun daha özel bir halidir. Bir fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlanan ve her fonksiyonu kendi türevlerinin bir doğrusal bileşimine gönderen operatöre ise diferansiyel operatör denir.

Tanım 1.3. Bir A matrisi, $m \times n$ boyutunda dikdörtgen elemanlardan oluşur ve m satır ve n sütun sayısı olmak üzere

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Bazı örnek matrisler aşağıdadır:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3-2i \\ 4+5i & 6-7i \end{pmatrix}$$

Tanım 1.4. Bir matrisin transpozu satırların sütun, sütunların satır haline getirilmesiyle elde edilen matristir. $A = (a_{ij})$ nın transpozu $A^T = (a_{ji})$ dir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Örnek 1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Tanım 1.5. $A = (a_{ij})$ nın eşleniği $\overline{A} = \overline{(a_{ij})}$ dir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Örnek 1.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 3+4i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i \\ 3-4i & 4 \end{pmatrix}$

Tanım 1.6. Bir A matrisinin transpozunun eşleniği A matrisinin adjointidir. A nın adjointi $\overline{A^T}$ dır ve A^* ile gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Örnek 1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 3+4i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3-4i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}$

Tanım 1.7. $A^* = A$ ise A matrisi self-adjointtir.

Örnek 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A^*$

şartı sağlandığında A matrisi self-adjointtir.

Tanım 1.8. A bir $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. Eğer λ bir skaler ve x vektörü de sıfır olmayan, $x \neq 0$, bir sütun vektörü olmak üzere, $Ax = \lambda x$ eşitliği sağlanıyorsa x vektörü, A matrisinin özvektörü, λ skaleri de A matrisinin özdeğeridir. Aynı zamanda x, λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Bir skaler olan λ, $n \times n$ boyutlu A matrisi için $Ax = \lambda x$ denkleminde x'in sonsuz çözümü olduğu durumda bir özdeğer tanımlar.

Tanım 1.9. Spektrum, dalga enerjisinin çeşitli frekanslarda ki bireysel (tekil) dalgalar üzerindeki dağılımını ifade eden bir fonksiyondur.

Tanım 1.10. Çözümü bilinen benzer bir problemle karşılaştırarak başka bir problemi çözme metoduna perturbasyon denir.

Tanım 1.11. Madde parçacıklarının bir potansiyel enerjiye tabi olduğu veya sahip olduğu yerdeki sisteme bağıl hal (bound state) denir.

Tanım 1.12. Değer kümesi sonlu boyutlu Banach uzayları arasında sınırlı bir lineer operatöre sonlu-rank (finite-rank) denir.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. (Sol) Marchenko İntegral Denklemi

Bu bölümde, (sol) Marchenko integral denklemi aracılığıyla Darboux dönüşümü için genel bir yaklaşım geliştirilmektedir. İlk olarak gerekli bazı temel sonuçları verilecek ve ardından (sol) Marchenko integral denkleminin $r(x; y, z)$ çözen çekirdeğini incelenecektir. Teorem (2.1.2) de, $r(x; y, z)$ nin, (sol) Marchenko integral denkleminin çözümü olan $\alpha(x, y)$ cinsinden açıkca yazılabileceğini ispat edilecektir. Ardından, potansiyel seviyede ve dalga fonksiyonu seviyede Darboux dönüşümü için formülleri verilecektir.

$$\alpha(x,y) + \beta(x,y) + \int_x^\infty dz\, \alpha(x,z)\, \omega(z,y) = 0, \quad y > x \tag{2.1.1}$$

integral denklemini ele alalım. Burada $\alpha(x, y)$ bilinmeyen terim, $\beta(x, y)$ homojen olmayan terim ve $\omega(z, y)$ de integral çekirdeğidir. Varsayalım ki, (2.1.1) de verilen eşitlik, $\mathcal{H}_2^{N\times N}$ de çözülebilir olsun, yani, $\beta(x, y)$ ve $\omega(z, y)$ bize verildiğinde tek bir $\alpha(x, y)$ elde ederiz. Burada, $\mathcal{H}_p^{M\times N}$, $M \times N$ matris değerli ölçülebilir $F: (x, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^{M\times N}$ fonksiyonunun kompleks Banach uzayıdır. Öyle ki, $\|F(.)\|$ matris normu $1 \le p \le +\infty$ için $L^p(x, +\infty)$ uzayına aittir. $\omega(z, y)$ çekirdeğinin $x \in \mathcal{R}$ parametresine bağlı olmadığını ve

$$\sup_{y>x} \int_x^\infty dz\, (\|\omega(z,y)\| + \|\omega(y,z)\|) < +\infty \tag{2.1.2}$$

ifadesini sağladığına dikkat edelim. Buradaki $\|.\|$ ifadesi herhangi bir matris normunu simgelenir. (2.1.1) i operatör formunda

$$\alpha + \beta + \alpha\Omega = 0 \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazalım. Burada Ω operatörü sağdan etki eder. Her sabit $x \in R$ için, $(I + \Omega)$ operatörü $\mathcal{H}_1^{N\times N}$ ve $\mathcal{H}_2^{N\times N}$ üzerinde terslenebilir olduğunu kabul edelim. Burada I, birim operatörü simgeler. İlgili çözücü operatörü belirtmek için $(I + R)$ yi

$$I + R = (I + \Omega)^{-1}, \quad R := (I + \Omega)^{-1} - I \tag{2.1.4}$$

şeklinde tanımlanır. α için (2.1.3) ü çözersek

$$\alpha = -\beta(I+\Omega)^{-1} \tag{2.1.5}$$

bulunur. (2.1.5) de (2.1.4) ü yerine yazılırsa,

$$\alpha = -\beta(I+R) \tag{2.1.6}$$

veya açıkça

$$\alpha(x,y) = -\beta(x,y) - \int_x^\infty dz\, \beta(x,z) r(x;z,y) \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Burada $r(x;z,y)$, R çözücü operatörünün integral çekirdeğidir. (2.1.1) denklemini

$$\alpha + \omega + \alpha\Omega = 0 \tag{2.1.8}$$

yazalım. Burada homojen olmayan terim ve integral çekirdeği birbiri ile ilişkilidir. O halde (2.1.8) açık

$$\alpha(x,y) + \omega(x,y) + \int_x^\infty dz\, \alpha(x,z)\omega(z,y) = 0\,, \quad y > x \tag{2.1.9}$$

şeklinde yazılabilir. Genellikle bu denkleme (sol) Marchenko integral denklemi denir. (Sol) Marchenko integral denkleminin $\mathcal{H}_2^{N\times N}$ de tekil bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim, yani, $\omega(x,y)$ verildiğinde, (2.1.9) un bir çözümü olarak tek bir $\alpha(x,y)$ olduğunu varsayalım. (2.1.7) de ki $r(x;z,y)$ çözücü çekirdeğini $\alpha(x,y)$ cinsinden oluşturalım. $\alpha(x,y)$ benzersiz bir şekilde belirlendiğinden, $r(x;z,y)$ yi de elde edelim. (2.1.4) yardımıyla (2.1.8) i çözülürse

$$\alpha = -\omega(I+R) \tag{2.1.10}$$

olur. $\mathcal{H}_1^{N\times N}$ de (2.1.9) un tekil çözülebilirliği ve (2.1.2) deki koşul

$$\sup_{y>x} \int_x^\infty dz\, (\|\alpha(z,y)\| + \|\alpha(y,z)\|) < +\infty \tag{2.1.11}$$

belirtir. (2.1.8) i, (2.1.3) deki integral operatörü Ω, $N \times N$ matris değerli ve J-selfadjoint olduğu durumda göz önüne alınmaktadır. Başka bir deyişle,

$$\Omega = \mathrm{J}\Omega^{\ddagger}\mathrm{J}, \qquad \omega(y,z) = J[\omega(z,y)]^{\ddagger}J \tag{2.1.12}$$

Burada, tek dagger işareti matris adjointi (karmaşık eşlenik ve matris transpozu) ve çift dagger işareti ise hem matris adjointi hem de operatörün çekirdeğindeki elemanların yer değişmesini ifade eder, yani, herhangi bir T operatörünün $T(x,y)$ çekirdeği için

$$T^{\ddagger}(x,y) \coloneqq T^{\dagger}(y,x) \tag{2.1.13}$$

dir. Herhangi iki A ve B integral operatörü için

$$(AB)^{\ddagger}(y,z) = (AB)^{\dagger}(z,y) = \left[\int ds\, A(z,s)B(s,y)\right]^{\dagger}$$

veya eşit olarak

$$(AB)^{\ddagger}(y,z) = \int ds\, B^{\dagger}(s,y)A^{\dagger}(z,s) \tag{2.1.14}$$

olur. (2.1.13) de verilen özelliği kullanarak, (2.1.14) ü tekrar yazarsak

$$(AB)^{\ddagger}(y,z) = \int ds\, B^{\ddagger}(y,s)A^{\ddagger}(s,z) \tag{2.1.15}$$

olur. Buradan

$$(AB)^{\ddagger}(y,z) = (B^{\ddagger}A^{\ddagger})(y,z) \tag{2.1.16}$$

bulunur. Burada, J bir $N \times N$ selfadjoint involüsyondur. Şöyle ki,

$$J = J^{\dagger} = J^{-1}. \tag{2.1.17}$$

Örneğin, J

$$J \coloneqq \begin{bmatrix} I_j & 0 \\ 0 & -I_{N-j} \end{bmatrix},$$

formunda olabilir. Burada I_j, bazı $1 \le j \le N$ için $j \times j$ birim matrisidir.

$\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$ ile bağlantılı, (2.1.8) de verilen temel integral denklemine sahibiz

$\tilde{L}\tilde{\Psi} = \lambda\tilde{\Psi}$ perturbasyon problemi ile bağlantılı

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\omega} + \tilde{\alpha}\tilde{\Omega} = 0 \tag{2.1.18}$$

integral denklemini yazabiliriz. Bu denklem

$$\tilde{\alpha}(x,y) + \tilde{\omega}(x,y) + \int_x^\infty dz\,\tilde{\alpha}(x,z)\tilde{\omega}(z,y) = 0\,, \quad x < y \tag{2.1.19}$$

şeklinde açıkça da yazılabilir. $\tilde{\Omega}$ ve Ω birbirinden sonlu rank operatörü için FG ile ayrılır. Şöyle ki,

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \mathrm{FG}, \qquad \tilde{\omega}(x,y) = \omega(x,y) + f(x)g(y) \tag{2.1.20}$$

dir. Ayrıca, genel olarak F ve G yer değiştirilemez ve dolayısıyla genel olarak $fg \neq gf$ dir.

2.2. Çözücü Çekirdeğin Oluşturulması

Bu bölümde, (2.1.7) de görünen $r(x;y,z)$ çözücü çekirdeğini analiz edilecek ve ardından $r(x;y,z)$ yi, (2.1.9) deki $\alpha(x,y)$ çözümü cinsinden açıkça ifade edilebilir olduğu gösterilecektir.

Önerme 2.1. Farzedelim ki (2.1.3), $H_2^{N\times N}$ de tekil çözüme sahip olsun ve Ω, (2.1.12) yi sağlasın. Bu durumda, (2.1.4) te verilen R operatörü ve (2.1.7) deki ilgili $r(x;y,z)$ çekirdeği

$$R = JR^{\ddagger}J, \qquad r(x;y,z) = J[r(x;z,y)]^{\dagger}J, \tag{2.2.1}$$

sağlar. Burada J, (2.1.17) de görünen involüsyon matrisidir.

İspat. (2.1.4) den biliyoruz ki $(I + R) = (I + \Omega)^{-1}$ dir ve böylelikle

$$(I + \Omega)(I + R) = I = (I + R)(I + \Omega) \tag{2.2.2}$$

olur. O halde

$$R + \Omega + R\Omega = 0, \tag{2.2.3}$$

ve

$$R + \Omega + \Omega R = 0 \tag{2.2.4}$$

elde edilir. (2.1.17) de tanımlanan çift dagger dönüşümü (2.2.3) te uygulayarak, yani adjointini alarak ve argümanları değiştirerek ve ardından her iki tarafa da J uygularsak,

$$JR^{\ddagger}J + J\Omega^{\ddagger}J + (J\Omega^{\ddagger}J)(JR^{\ddagger}J) = 0 \tag{2.2.5}$$

elde edilir. (2.1.12) yi kullanarak

$$JR^{\ddagger}J + \Omega + \Omega((JR^{\ddagger}J) = 0 \tag{2.2.6}$$

bulunur. (2.1.3), $H_2^{N\times N}$ de tek çözümlü olduğu varsayıldığından, (2.2.4) ve (2.2.6) yı karşılaştırarak $R = (JR^{\ddagger}J)$ olduğu elde edilir.

$R = JR^{\ddagger}J$ ifadesinin $r(x; y, z) = J[r(x; z, y)]^{\dagger}J$ anlamına geldiği açık olsa da, daha anlaşılır olması için, aynı sonucu $y < z$ ve $z < y$ durumları için direk $r(x; y, z)$ ile çalışarak ispatlayalım. İlk olarak $y < z$ için (2.1.4) ü

$$r(x; y, z) + \omega(y, z) + \int_x^{\infty} ds\, \omega(y, s) r(x; s, z) = 0, \qquad y < z \tag{2.2.7}$$

şeklinde açıkça yazalım. (2.2.7) nin adjointini alarak ve elde edilen denklemi soldan ve sağdan J ile çarparak,

$$J[r(x; y, z)]^{\dagger}J + J[\omega(y, z)]^{\dagger}J + \int_x^{\infty} ds\, J[\omega(y, s) r(x; s, z)]^{\dagger}J = 0, \qquad y < z, \tag{2.2.8}$$

veya eşit bir biçimde

$$J[r(x; y, z)]^{\dagger}J + J[\omega(y, z)]^{\dagger}J + \int_x^{\infty} ds\, J[r(x; s, z)]^{\dagger}JJ[\omega(y, s)]^{\dagger}J = 0, y < z \tag{2.2.9}$$

elde edilir. (2.2.9) da (2.1.12) yi kullanarak

$$J[r(x; y, z)]^{\dagger}J + \omega(z, y) + \int_x^{\infty} ds\, J[r(x; s, z)]^{\dagger}J\omega(s, y) = 0, \qquad y < z \tag{2.2.10}$$

bulunur. (2.2.10) da y ve z değişkenlerini yer değiştirerek

$$J[r(x;z,y)]^{\dagger}J + \omega(y,z) + \int_{x}^{\infty} ds\, J[r(x;s,y)]^{\dagger}J\omega(s,z) = 0, \qquad z < y \tag{2.2.11}$$

ifadesi elde edilir. (2.2.7) ve (2.2.11) i karşılaştırarak ve (2.2.7) için çözümün tekliğini kullanarak, $r(x;y,z) = J[r(x;z,y)]^{\dagger}J$ ifadesi görülür ve

$$r(x;y,z) + \omega(y,z) + \int_{x}^{\infty} ds\, r(x;y,s)\omega(s,z) = 0, \qquad z < y \tag{2.2.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $z < y$ için (2.2.4) ü dikkate alarak,

$$r(x;y,z) + \omega(y,z) + \int_{x}^{\infty} ds\, r(x;y,s)\omega(s,z) = 0, \qquad y < z \tag{2.2.13}$$

bulunur. Böylece, $y < z$ ve z< y için $r(x;y,z) = J[r(x;z,y)]^{\dagger}J$ olduğunu gösterilmiş olup ispat tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki önemli teoremin ispatında $x < y < z$ durumu [2] de verilmiştir. Burada, her iki durum yani $x < z < y$ durumu da ispatlayalım.

Teorem 2.1. Farzedelim ki (2.1.3), $H_2^{N\times N}$ de tekil çözüme sahip olsun ve Ω, (2.1.12) yi sağlasın. Bu durumda, (2.1.7) de görünen $r(x;y,z)$ çözücü çekirdeği (2.1.9) daki $\alpha(x,y)$ cinsinden açıkça ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$r(x;y,z) = \begin{cases} \alpha(y,z) + \displaystyle\int_{x}^{y} ds\, \mathrm{J}[\alpha(s,y)]^{\dagger}J\alpha(s,z), & x < y < z, \\ J[\alpha(z,y)]^{\dagger}J + \displaystyle\int_{x}^{z} ds\, J[\alpha(s,y)]^{\dagger}J\, \alpha(s,z), & x < z < y. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Burada J, (2.1.12) daki involüsyon matrisidir.

İspat. (2.1.3) ün $H_2^{N\times N}$ de tekil çözümü olduğu varsayıldığından, (2.1.8) de tekil çözüme sahiptir ve böylece (2.2.3) deki R de tekil çözüme sahiptir. Böylelikle, (2.2.14) de tanımlı ifadelerin (2.2.3) ü sağladığını göstermek kanıt için yeterlidir. Yani, (2.2.14) deki ifadeler integral denklemini sağlar. Şöyle ki,

$$r(x;y,z)+\omega(y,z)+\int_x^\infty ds\, r(x;y,s)\omega(s,z)=0\,,\qquad x<\min\{y,z\}. \tag{2.2.15}$$

Her iki $y<z$ ve $z<y$ durumunun ispatı verilecektir.

Durum 1: $x<y<z$

(2.2.15) de görünen integral için $\int_x^\infty=\int_x^y+\int_y^\infty$ özelliğini kullanalım. Öyleyse, (2.2.15) in sol tarafı aşağıdaki gibi olur.

$$r(x;y,z)+\omega(y,z)+\int_x^y ds\, r(x;y,s)w(s,z)+\int_y^\infty ds\, r(x;y,s)\omega(s,z)\;=0. \tag{2.2.16}$$

(2.2.16) daki, $\int_x^y$ integralinde (2.2.14) ün ikinci satırını ve $\int_y^\infty$ integralinde ise (2.2.14) ün ilk satırını kullanırsak, (2.2.15) eşitliğinin sol tarafı,

$$\begin{aligned}\alpha(y,z)&+\int_x^y ds\,\mathrm{J}[\alpha(s,y)]^\dagger \mathrm{J}\alpha(s,z)+\omega(y,z)\\&+\int_x^y ds\left[\mathrm{J}[\alpha(s,y)]^\dagger\mathrm{J}+\int_x^s dt\mathrm{J}[\alpha(t,y)]^\dagger\mathrm{J}\alpha(t,s)\right]\omega(s,z)\\&+\int_y^\infty ds\left[\alpha(y,s)+\int_x^y dt\mathrm{J}[\alpha(t,y)]^\dagger\,\mathrm{J}\alpha(t,s)\right]\omega(s,z)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dağılım işleminden sonra, (2.2.15) in sol tarafı

$$\begin{aligned}\alpha(y,z)&+\int_x^y ds\,\mathrm{J}[\alpha(s,y)]^\dagger\,\mathrm{J}\alpha(s,z)+\omega(y,z)\\&+\int_x^y ds\,\mathrm{J}[\alpha(s,y)]^\dagger\mathrm{J}\omega(s,z)+\int_x^y ds\int_x^s dt\,\mathrm{J}[\alpha(t,y)]^\dagger\,\mathrm{J}\alpha(t,s)\omega(s,z)\\&+\int_y^\infty ds\,\alpha(y,s)\omega(s,z)+\int_y^\infty ds\int_x^y dt\,\mathrm{J}[\alpha(t,y)]^\dagger\mathrm{J}\alpha(t,s)\omega(s,z)\end{aligned}$$

haline gelir. Şimdi a_1, a_2 ve a_3 ü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$a_1 \coloneqq \alpha(y,z) + \omega(y,z) + \int_y^\infty ds\, \alpha(y,s)\omega(s,z),$$

$$a_2 \coloneqq \int_x^y dt\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,z) + \int_x^y dt\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\omega(t,z),$$

$$a_3 \coloneqq \int_x^y ds \int_x^s dt\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,s)\omega(s,z) + \int_y^\infty ds \int_x^y dt\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,s)\omega(s,z).$$

(2.1.9) da verilen (sol) Marchenko integral denkleminden $a_1 = 0$ olur. a_3 deki iki katlı integralin sınırları sırasıyla $\int_x^y dt \int_t^y ds$ ve $\int_x^y dt \int_y^\infty ds$ olarak değiştirilebilir. Bu durumda

$$a_3 = \int_x^y dt \int_t^y ds\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,s)\omega(s,z) + \int_x^y dt \int_y^\infty ds\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,s)\omega(s,z)$$

olur. $\int_t^y + \int_y^\infty = \int_t^\infty$ özelliğini kullanarak, a_3 ifadesi

$$a_3 = \int_x^y dt \int_t^\infty ds\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J\alpha(t,s)\omega(s,z)$$

yazılabilir. Böylece,

$$a_2 + a_3 = \int_x^y dt\, J[\alpha(t,y)]^\dagger J \left[\alpha(t,z) + \omega(t,z) + \int_t^\infty ds\, \alpha(t,s)\omega(s,z)\right] \qquad (2.2.17)$$

elde edilir. $z > t$ olduğundan, (2.1.9) nedeniyle (2.2.17) nin parantez içerisindeki ifade 0 (sıfır) olur. Böylelikle, $a_2 + a_3 = 0$ ve buradan $x < y < z$ durumu için $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ olur.

Durum 2: $x < z < y$

Amacımız, $x < z < y$ durumunda (2.2.14) te verilen ifadenin (2.2.15) i sağladığını göstermektir. $x < z < y$ durumunda direkt bir kanıt, $x < y < z$ de yapıldığı gibi mümkün olduğu görünmemektedir. Bu nedenle aşağıdaki şekilde ilerlenecektir.

Herhangi bir kompakt operatör sonlu-rank operatörler dizisiyle yaklaştırılabilir olduğundan, $\xi_n(y)\eta_n(z)$ dizisini (2.2.15) de $\omega(y,z)$ ye yaklaştırılacaktır. Bu, açıkça (2.2.15) i çözmek için bize izin verecek ve daha sonra bir çözüm elde edilecektir. Bu çözümü $r_n(x;y,z)$ olarak aranacaktır. Yaklaşımdan sonra, $\omega(y,z)$, $\xi_n(y)\eta_n(z)$ ile değiştirildiğinde (2.2.18) de verilen (sol) Marchenko integral denklemi için çözümü $\alpha(y,z)$ de $\alpha_n(y,z)$ ile değiştirildiğinde (2.2.14) elde edilecektir.

(sol) Marchenko integral denklemini dikkate alalım

$$\alpha(y,z) + \omega(y,z) + \int_y^\infty \mathrm{ds}\, \alpha(y,s)\omega(s,z) = 0, \qquad \mathrm{z} > y, \tag{2.2.18}$$

(2.2.18) denklemi, (2.1.9) daki x ve y yi sırasıyla y ve z ile değiştirilerek elde edilmiştir. Varsayalım ki

$$\omega(y,z) = \xi(y)\eta(z), \tag{2.2.19}$$

yani, (2.2.14) deki integral çekirdeğin ayrılabilir olduğunu varsayalım. Önce (2.2.14) deki $\alpha(y,z)$ yi, ξ ve η çekirdek kısımları cinsinden hesaplayalım. (2.2.18) deki $\alpha(y,z)$ yi çekersek,

$$\alpha(y,z) = -\omega(y,z) - \int_y^\infty \mathrm{ds}\, \alpha(y,s)\omega(s,z) \tag{2.2.20}$$

olur. (2.2.20) de (2.2.19) u yerine koyduğumuzda

$$\alpha(y,z) = -\xi(y)\eta(z) - \int_y^\infty \mathrm{ds}\, \alpha(y,s)\xi(s)\eta(z), \tag{2.2.21}$$

veya eşit bir biçimde

$$\alpha(y,z) = -\left[\xi(y) + \int_y^\infty \mathrm{ds}\, \alpha(y,s)\xi(s)\right]\eta(z). \tag{2.2.22}$$

$\tau(y)$ yu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\tau(y) \coloneqq \xi(y) + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \alpha(y,s)\xi(s). \tag{2.2.23}$$

O halde

$$\alpha(y,z) = -\tau(y)\eta(z) \tag{2.2.24}$$

olur. (2.2.23) de integrant da görünen $\alpha(y,z)$ yi (2.2.24) ile değiştirerek,

$$\tau(y) = \xi(y) - \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \tau(y)\eta(s)\xi(s), \tag{2.2.25}$$

elde edilir. Buradan,

$$\tau(y)\left[I + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \eta(s)\xi(s)\right] = \xi(y) \tag{2.2.26}$$

olur. Buradaki I birim matristir. $\tau(y)$ yalnız bırakılırsa

$$\tau(y) = \xi(y)\left[I + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \eta(s)\xi(s)\right]^{-1} \tag{2.2.27}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\alpha(y,z) = -\xi(y)\left[I + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \eta(s)\xi(s)\right]^{-1} \eta(z) \tag{2.2.28}$$

bulunur.

$$\Upsilon(y) \coloneqq I + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \eta(s)\xi(s) \tag{2.2.29}$$

şeklinde tanımlayalım. (2.2.28) de (2.2.29) u yerine yazılırsa, böylelikle

$$\alpha(y,z) = -\xi(y)\Upsilon(y)^{-1}\eta(z) \tag{2.2.30}$$

elde edilmiş olur. Şimdi, $J[\alpha(z,y)]^{\dagger}J$ yi ξ ve η cinsinden hesaplayalım. Bunun için, (2.2.18) i dikkate alalım. (2.2.18) in adjointi alınarak ve ardından her iki taraftan J ile çarparak,

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J + J[\omega(y,z)]^{\dagger}J + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\, \mathrm{J}\,[\alpha(y,s)\omega(s,z)]^{\dagger}\mathrm{J} = 0 \tag{2.2.31}$$

veya eşit olarak

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J + J[\omega(y,z)]^{\dagger}J + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\; J[\omega(s,z)]^{\dagger}JJ[\alpha(y,s)]^{\dagger}J = 0 \tag{2.2.32}$$

elde edilir. (2.2.32) de (2.1.12) yi kullanırsak

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J + \omega(z,y) + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\; \omega(z,s)J[\alpha(y,s)]^{\dagger}J = 0 \tag{2.2.33}$$

olur. (2.2.33) de (2.2.19) u yerine yazarak

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J + \xi(z)\eta(y) + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\; \xi(z)\eta(s)J[\alpha(y,s)]^{\dagger}J = 0 \tag{2.2.34}$$

bulunur. Şimdi

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J = \xi(z)K(y) \tag{2.2.35}$$

olarak alalım. (2.2.34) de (2.2.35) i yerine koyarak ve sonra (2.2.34) ün her iki tarafındaki $\xi(z)$ ler sadeleştirilirse,

$$K(y) + \eta(y) + \int_{y}^{\infty} \mathrm{ds}\; \eta(s)\xi(s)K(y) = 0 \tag{2.2.36}$$

bulunur. $K(y)$ için (2.2.36) çözülürse,

$$K(y) = -\left[I + \int_{y}^{\infty} ds\, \eta(s)\xi(s)\right]^{-1} \eta(y) \tag{2.2.37}$$

elde edilir. (2.2.37) de (2.2.29) kullanılırsa

$$K(y) = -\Upsilon(y)^{-1}\eta(y) \tag{2.2.38}$$

olur. Ardından (2.2.35) de (2.2.38) i yerine koyarak

$$J[\alpha(y,z)]^{\dagger}J = -\xi(z)\Upsilon(y)^{-1}\eta(y) \tag{2.2.39}$$

bulunmuş olur. Sonuç olarak, (2.2.39) daki y ve z yi yer değiştirilirse,

$$J[\alpha(z,y)]^{\dagger}J = -\xi(y)\Upsilon(z)^{-1}\eta(z) \tag{2.2.40}$$

bulunur. Şimdi,

$$r(x;y,z) + \omega(y,z) + \int_x^{\infty} ds\, r(x;y,s)\omega(s,z) = 0 \tag{2.2.41}$$

integral denklemini çözelim.

$$r(y,z) \coloneqq H(y)\eta(z), \tag{2.2.42}$$

şeklinde alalım. (2.2.41) de (2.2.42) ve (2.2.19) u yerine koyarak ve sonra (2.2.41) in her iki tarafındaki $\eta(z)$ ler sadeleştirilirse,

$$H(y) + \xi(y) + \int_x^{\infty} ds\, H(y)\,\eta(s)\xi(s) = 0$$

ve $H(y)$ ortak parantezine alınırsa,

$$H(y)\left[I + \int_x^{\infty} ds\,\eta(s)\xi(s)\right] = -\xi(y) \tag{2.2.43}$$

olur. $H(y)$ yi çekersek,

$$H(y) = -\xi(y)\left[I + \int_x^{\infty} ds\,\eta(s)\xi(s)\right]^{-1} \tag{2.2.44}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$r(x;y,z) = -\xi(y)\left[I + \int_x^\infty ds\, \eta(s)\xi(s)\right]^{-1} \eta(z) \qquad (2.2.45)$$

elde edilir. (2.2.29) dan, (2.2.45) de ki parantez içindeki matrisin $\Upsilon(x)$ e eşit olduğu görülür. Böylelikle, (2.2.45) ten

$$r(x;y,z) = -\xi(y)\Upsilon(x)^{-1}\eta(z) \qquad (2.2.46)$$

yazılabilir. Ardından, $x < y < z$ için, (2.2.30) ve (2.2.40) ın yardımıyla hesaplnır.

$$\alpha(y,z) + \int_x^y ds\, J[\alpha(s,y)]^\dagger J\alpha(s,z) =$$

$$= \xi(y)\Upsilon(y)^{-1}\eta(z) + \int_x^y ds\, \xi(y)\Upsilon(s)^{-1}\eta(s)\, \xi(s)\Upsilon(s)^{-1}\eta(z)$$

$$= -\xi(y)\left[\Upsilon(y)^{-1} - \int_x^y ds\, \Upsilon(s)^{-1}\eta(s)\, \xi(s)\Upsilon(s)^{-1}\right]\eta(z)$$

$$= -\xi(y)\left[\Upsilon(y)^{-1} - \int_x^y ds\left(\frac{d}{ds}\left[I + \int_s^\infty dt \eta(t)\xi(t)\right]^{-1}\right)\right]\eta(z)$$

$$= -\xi(y)\left[\Upsilon(y)^{-1} - \int_x^y d\Upsilon(s)^{-1}\right]\eta(z)$$

$$= -\xi(y)\{\Upsilon(y)^{-1} - [\Upsilon(y)^{-1} - \Upsilon(x)^{-1}]\}\eta(z)$$

$$= -\xi(y)\Upsilon(x)^{-1}\eta(z) \qquad (2.2.47)$$

elde edilir ki bu ifade (2.2.46) dan görüleceği üzere $r(x;y,z)$ ye eşittir. Benzer şekilde, $x < z < y$ için de hesaplanırsa,

$$J[\alpha(z,y)]^\dagger J + \int_x^z ds\, J[\alpha(s,y)]^\dagger J\alpha(s,z) =$$

$$= \xi(y)\Upsilon(z)^{-1}\eta(z) + \int_x^z ds\, \xi(y)\Upsilon(s)^{-1}\eta(s)\, \xi(s)\Upsilon(s)^{-1}\eta(z)$$

$$= -\,\xi(y)\left[\Upsilon(z)^{-1} - \int_x^z ds\, \Upsilon(s)^{-1}\eta(s)\,\xi(s)\Upsilon(s)^{-1}\right]\eta(z)$$

$$= -\,\xi(y)\left[\Upsilon(z)^{-1} - \int_x^z ds\left(\frac{d}{ds}\left[I + \int_s^\infty dt\eta(t)\xi(t)\right]^{-1}\right)\right]\eta(z)$$

$$= -\,\xi(y)\{\Upsilon(z)^{-1} - [\Upsilon(z)^{-1} - \,\Upsilon(x)^{-1}]\}\eta(z)$$

$$= -\,\xi(y)\Upsilon(x)^{-1}\eta(z)$$

bulunur ki bu da (2.2.46) dan $r(x; y, z)$ ye eşittir. Böylece

$$r(x; y, z) = \begin{cases} \alpha(y, z) + \displaystyle\int_x^y ds\, J[\alpha(s, y)]^\dagger J\alpha(s, z), & x < y < z, \\ J[\alpha(z, y)]^\dagger J + \displaystyle\int_x^z ds\, J[\alpha(s, y)]^\dagger J\, \alpha(s, z), & x < z < y. \end{cases} \qquad (2.2.48)$$

eşitliğini göstermiş olduk ki burada ξ ve η çekirdek kısımları cinsinden $\alpha(y, z)$ ve $[\alpha(z, y)]^\dagger$ yi elde edilmiş oldu.

Tüm bu durumlarda, $\int_x^\infty ds\, \eta(s)\xi(s)$ integrali kesin yakınsaktır. ■

2.3. Potansiyel Seviyede Darboux Dönüşümü

Şimdi, (2.1.19) daki $\tilde{\alpha}(x, y)$ çözümünü sırasıyla (2.1.9) ve (2.1.20) deki $\alpha(x, y)$, $f(x)$ ve $g(y)$ cinsinden açık bir şekilde ifade edilecektir. Daha sonra, potansiyel seviyede Darboux dönümüşü için bir formül elde edilecektir.

$n(x)$ ve $q(y)$ ara değerleri tanımlayalım, şöyle ki

$$n(x) \coloneqq f(x) + \int_x^\infty dz\, \alpha(x, z)f(z), \quad q(y) \coloneqq g(y) + \int_y^\infty dz\, g(z)J[\alpha(y, z)]^\dagger J \qquad (2.3.1)$$

olsun. Burada J, (2.1.12) de görünen involüsyon matrisidir.

Teorem 2.2. (2.1.18) deki perturbasyona uğramış $\tilde{\Omega}$ ve (2.1.8) deki Ω operatörlerini dikkate alalım. F, G, f ve g (2.1.20) deki değişkenler olmak üzere, eğer $\tilde{\Omega} - \Omega$, (2.1.20) de verilen FG sonlu-rank perturbasyonu ise o halde, $\tilde{\alpha} + \tilde{\omega} + \tilde{\alpha}\Omega = 0$ denklemi ayrılabilir çekirdeğe sahip bir integral denklemi dönüştürülebilir ve böylece $\tilde{\alpha}$, lineer cebirsel metotlarla açık bir şekilde elde edilebilir.

İspat. (2.1.18) de (2.1.20) yi yerine koyarsak;

$$\omega + fg + \check{\alpha}(I + \Omega + FG) = 0, \tag{2.3.2}$$

düzenleme yapılırsa,

$$\tilde{\alpha}(I + \Omega + FG) = -\omega - fg \tag{2.3.3}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $(I + R)$ ile sağdan çarpılırsa,

$$\tilde{\alpha}[(I + \Omega)(I + R) + FG(I + R)] = -\omega(I + R) - fg(I + R) \tag{2.3.4}$$

olur. (2.1.4) nedeniyle

$$(I + \Omega)(I + R) = I \tag{2.3.5}$$

dir. Ayrıca, (2.1.10) dan (2.3.4) ün sağdan ilk teriminin α ya eşit olduğu görülür. Dolayısıyla, $\alpha = -\omega(I + R)$ yi kullanarak ve (2.3.5) yardımıyla, (2.3.4)

$$\tilde{\alpha}[I + FG(I + R)] = \alpha - fg(I + R) \tag{2.3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, $\tilde{G}$ operatörünü

$$\tilde{G} \coloneqq G(I + R), \qquad \tilde{g}(x, y) \coloneqq g(y) + \int_x^\infty dz\, g(z) r(x; z, y) \tag{2.3.7}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $r(x; y, z)$, (2.2.14) deki çekirdektir. $f(y)\tilde{g}(x, y)$, $F\tilde{G}$ nin çekirdeği olduğu için (2.3.6) yı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tilde{\alpha}(I + F\tilde{G}\,) = \alpha - f\tilde{g}. \tag{2.3.8}$$

Şimdi, $\tilde{\alpha}$ için (2.3.6) yı çözelim (formunda bir çözüme sahip olmak istiyoruz)

$$\tilde{\alpha}(x, y\,) = \alpha(x, y) - p(x)\tilde{g}(x, y) \tag{2.3.9}$$

buradaki $p(x)$ fonksiyonunu bulalım. (2.3.8) de (2.3.9) u yazılırsa,

$$\alpha + p\tilde{g} + p\tilde{g}F\tilde{G} + \alpha F\tilde{G} = \alpha - f\tilde{g} \tag{2.3.10}$$

bulunur. (2.3.10) un her iki tarafındaki α yı yok edip, ortak paranteze alırsak

$$(\alpha F + p + p\tilde{g}F + f)\tilde{G} = 0 \tag{2.3.11}$$

olur. $\tilde{G} \neq 0$ olduğundan

$$p(I + \tilde{g}F) = -(f + \alpha F) \tag{2.3.12}$$

olur.

$$p = -(f + \alpha F)(I + \tilde{g}F)^{-1}$$

veya açık bir şekilde yazılırsa,

$$p(x) = -\left[f(x) + \int_x^\infty dz\, \alpha(x,z)f(z)\right]\left[I + \int_x^\infty ds\, \tilde{g}(x,s)f(s)\right]^{-1}$$

bulunur. (2.3.1) yardımıyla

$$p(x) = -n(x)\left[I + \int_x^\infty ds\, \tilde{g}(x,s)f(s)\right]^{-1} \tag{2.3.13}$$

elde edilir. Son olarak, (2.3.9) da (2.3.13) yerine yazılırsa,

$$\tilde{\alpha}(x,y) = \alpha(x,y) - n(x)\left[I + \int_x^\infty ds\, \tilde{g}(x,s)f(s)\right]^{-1} \tilde{g}(x,y). \tag{2.3.14}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi de, (2.3.7) de tanımlamış olduğumuz $\tilde{g}(x,y)$ yi, sırasıyla (2.1.8) ve (2.1.20) deki $\alpha(x,y)$ ve $g(y)$ cinsinden açık bir şekilde ifade edilebileceğini gösterelim.

Önerme 2.2. (2.3.7) de tanımlanan $\tilde{g}(x,y)$ ifadesi, (2.1.20) deki $f(x)$ ve $g(y)$ terimleri ve (2.1.8) deki $\alpha(x,y)$ çözümü cinsinden açıkça ifade edilebilir, şöyle ki:

$$\tilde{g}(x,y) = q(y) + \int_x^y ds\, q(s)\alpha(s,y) \tag{2.3.15}$$

dir. Buradaki q(y), (2.3.1) de tanımlanan ifadedir.

İspat. (2.3.7) yi dikkate alalım. (2.3.7) de $\int_x^\infty = \int_x^y + \int_y^\infty$ özelliğini kullanarak, (2.3.7) deki ikinci denklemi

$$\tilde{g}(x,y) = g(y) + \int_x^y ds\, g(s) r(x;s,y) + \int_y^\infty ds\, g(s) r(x;s,y) \tag{2.3.16}$$

yazılır. (2.3.16) nın $\int_x^y$ integralinde (2.2.14) ün ilk satırını ve $\int_y^\infty$ integralinde (2.2.14) ün ikinci satırını yerine koyarsak

$$\tilde{g}(x,y) = g(y) + \int_x^y ds\, g(s) \left[\alpha(s,y) + \int_x^s dt\, J[\alpha(t,s)]^\dagger J\alpha(t,y)\right]$$
$$+ \int_y^\infty ds\, g(s) \left[J[\alpha(y,s)]^\dagger J + \int_x^y dt\, J[\alpha(t,s)]^\dagger J\alpha(t,y)\right].$$

elde edilir. Parantez içindeki ifadeleri dağıtırsak

$$\tilde{g}(x,y) = g(y) + \int_y^\infty ds\, g(s) J[\alpha(y,s)]^\dagger J + \int_x^y ds\, g(s)\alpha(s,y)$$
$$+ \left(\int_x^y ds \int_x^s dt + \int_y^\infty ds \int_x^y dt\right) g(s) J[\alpha(t,s)]^\dagger J\alpha(t,y) \tag{2.3.17}$$

bulunur. (2.3.17) deki iki katlı integralin sınırları sırasıyla $\int_x^y dt \int_t^y ds$ ve $\int_x^y dt \int_y^\infty ds$ olarak değiştirilebilir. $\int_t^y + \int_y^\infty = \int_t^\infty$ olduğundan

$$\tilde{g}(x,y) = g(y) + \int_y^\infty ds\, g(s) J[\alpha(y,s)]^\dagger J$$
$$+ \int_x^y ds\, g(s)\alpha(s,y) + \int_x^y dt \int_t^\infty ds\;\; g(s) J[\alpha(t,s)]^\dagger J\alpha(t,y).$$

bulunur. (2.3.1) nedeniyle $g(y)+\int_y^\infty ds\, g(s)J[\alpha(y,s)]^\dagger J$ ifadesini $q(y)$ ile değiştirilebilir. Böylece

$$\tilde{g}(x,y)=q(y)+\int_x^y ds\, g(s)\alpha(s,y)+\int_x^y dt\int_t^\infty ds\ g(s)J[\alpha(t,s)]^\dagger J\alpha(t,y) \qquad (2.3.18)$$

olur. Eğer, (2.3.18) iki katlı integralinde s ve t integral değişkenlerinin yerini değiştirilirse

$$\tilde{g}(x,y)=q(y)+\int_x^y ds\, g(s)\alpha(s,y)+\int_x^y ds\int_s^\infty dt\ g(t)J[\alpha(s,t)]^\dagger J\alpha(s,y) \qquad (2.3.19)$$

veya

$$\tilde{g}(x,y)=q(y)+\int_x^y ds\left[g(s)+\int_s^\infty dt\ g(t)J[\alpha(s,t)]^\dagger J\right]\alpha(s,y) \qquad (2.3.20)$$

olur. (2.2.1) nedeniyle $g(s)+\int_s^\infty dt\, g(t)J[\alpha(s,t)]^\dagger J$ ifadesi $q(s)$ ile değiştirilebilir. Böylece

$$\tilde{g}(x,y)=q(y)+\int_x^y ds\, q(s)\,\alpha(s,y)$$

bulunur ki, ispat tamamlanmış olur. ■

$\tilde{g}(x,x)=q(x)$ olduğuna dikkat edelim. $\Gamma(x)$ matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Gamma(x)\coloneqq I+\int_x^\infty ds\, \tilde{g}(x,s)f(s). \qquad (2.3.21)$$

Önerme 2.3. (2.3.21) de tanımlanan $\Gamma(x)$ ifadesi, (2.1.20) deki $f(x)$ ve $g(y)$ terimleri ve (2.1.8) deki $\alpha(x,y)$ çözümü cinsinden açıkça

$$\Gamma(x)=I+\int_x^\infty ds\, q(s)n(s) \qquad (2.3.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki, $n(x)$ ve $q(x)$ ifadeleri daha önce (2.3.1) de tanımlanmıştır.

İspat. (2.3.21) de (2.3.15) i yerine koyarsak

$$\Gamma(x) = I + \int_x^\infty ds \left[q(s) + \int_x^s dt\, q(t)\alpha(t,s) \right] f(s)$$

veya

$$\Gamma(x) = I + \int_x^\infty ds\, q(s)f(s) + \int_x^\infty ds \int_x^s dt\, q(t)\alpha(t,s)f(s) \tag{2.3.23}$$

bulunur. (2.3.23) deki iki katlı integralin sınırları $\int_x^\infty dt \int_t^\infty ds$ olarak değiştirir ve iki katlı integralde s ve t nin yerlerini değiştirsek

$$\Gamma(x) = I + \int_x^\infty ds\, q(s)f(s) + \int_x^\infty ds \int_s^\infty dt\, q(s)\alpha(s,t)f(t) \tag{2.3.24}$$

veya eşit bir biçimde

$$\Gamma(x) = I + \int_x^\infty ds\, q(s) \left[f(s) + \int_s^\infty dt\, \alpha(s,t)f(t) \right] \tag{2.3.25}$$

olur. (2.3.1) nedeniyle $f(s) + \int_s^\infty dt\alpha(s,t)f(t)$ ifadesini $n(s)$ ile değiştirirsek

$$\Gamma(x) = I + \int_x^\infty ds\, q(s)n(s) \tag{2.3.26}$$

bulunur. Böylelikle, ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi, potansiyel seviyede Darboux dönüşümünün formülünü tanımlayan teorem verelim.

Teorem 2.3. α ve $\tilde{\alpha}$, sırasıyla (2.1.8) ve (2.1.18) integral denklemlerinin çözümleri olsun. Ayrıca, $n(x)$, $\Gamma(x)$ ve $\tilde{g}(x,y)$ sırasıyla (2.3.1), (2.3.22) ve (2.3.15) de verilen ifadeler olsun. O halde, $\tilde{\alpha}(x,y) - \alpha(x,y)$ ifadesi $\alpha(x,y)$, $f(x)$ ve $g(y)$ cinsinden

$$\tilde{\alpha}(x,y) - \alpha(x,y) = -n(x)\Gamma(x)^{-1}\tilde{g}(x,y) \tag{2.3.27}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, potansiyel seviyede Darboux dönüşümü

$$\tilde{\alpha}(x,x) - \alpha(x,x) = -n(x)\Gamma(x)^{-1}q(x) \tag{2.3.28}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. (2.3.14) de (2.3.21) i yerine koyarsak (2.3.27) yi elde ederiz. (2.3.27) de $\tilde{g}(x,x) = q(x)$ eşitliğini kullanarak da (2.3.28) i elde ederiz. ■

2.4. Dalga Fonksiyonu Seviyede Darboux Dönüşümü

(2.1.9) daki $N \times N$ matris değerli $\alpha(x,y)$ ifadesinin Fourier dönüşümü $\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$ problemindeki $\Psi(\lambda,x)$ dalga fonksiyonu ile bağlantılıdır. Bu ilişki

$$\Psi(\lambda,x) \coloneqq e^{-i\lambda Jx} + \int_x^\infty dy\, \alpha(x,y)e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.1}$$

şeklindedir. Buradaki J, (2.1.12) deki involüsyon matrisidir. (2.4.1) üzerinde ters Fourier dönüşümü kullanarak

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\left[\Psi(\lambda,x) - e^{-i\lambda Jx}\right]e^{i\lambda Jy} \tag{2.4.2}$$

elde edilir. (2.4.1) ve (2.4.2) ye benzer şekilde

$$\tilde{\Psi}(\lambda,x) \coloneqq e^{-i\lambda Jx} + \int_x^\infty dy\, \tilde{\alpha}(x,y)e^{-i\lambda Jy}, \tag{2.4.3}$$

$$\tilde{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\left[\tilde{\Psi}(\lambda,x) - e^{-i\lambda Jx}\right]e^{i\lambda Jy} \tag{2.4.4}$$

yazılabilir. Şimdi $\gamma(\lambda,x)$ ifadesini aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\gamma(\lambda,x) \coloneqq \int_x^\infty dy\, \tilde{g}(x,y)e^{-i\lambda Jy}. \tag{2.4.5}$$

(2.4.5) de (2.3.15) i kullanırsak

$$\gamma(\lambda,x)=\int_x^\infty dy\left[q(y)+\int_x^y ds\, q(s)\alpha(s,y)\right]e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.6}$$

veya

$$\gamma(\lambda,x)=\int_x^\infty ds\, q(s)e^{-i\lambda Js}+\int_x^\infty dy\int_x^y ds\, q(s)\alpha(s,y)e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.7}$$

bulunur. (2.4.7) deki iki katlı integralin sırası $\int_x^\infty ds \int_s^\infty dy$ olarak değiştirirsek

$$\gamma(\lambda,x)=\int_x^\infty ds\, q(s)e^{-i\lambda Js}+\int_x^\infty ds\int_s^\infty dy\, q(s)\alpha(s,y)e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.8}$$

veya

$$\gamma(\lambda,x)=\int_x^\infty ds\, q(s)\left[e^{-i\lambda Js}+\int_s^\infty dy\, \alpha(s,y)e^{-i\lambda Jy}\right] \tag{2.4.9}$$

bulunur. (2.4.9) da (2.4.1) i kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\gamma(\lambda,x)=\int_x^\infty ds\, q(s)\Psi(\lambda,s). \tag{2.4.10}$$

Bir sonraki teorem, dalga fonksiyonu seviyede Darboux dönüşümünün formülünü tanımlar.

Teorem 2.4. α ve $\tilde{\alpha}$ sırasıyla (2.1.8) ve (2.1.18) integral denklemlerinin çözümleri olsun. Ayrıca $n(x)$, $\Gamma(x)$ ve $\gamma(\lambda,x)$ ler sırasıyla (2.3.1), (2.3.22) ve (2.4.10) de verilen ifadeler olsun. O halde $\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)$ ifadesi $\alpha(x,y)$, $f(x)$ ve $g(y)$ cinsinden

$$\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)=-n(x)\Gamma^{-1}(x)\gamma(\lambda,x) \tag{2.4.11}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. (2.4.1) den (2.4.3) ü çıkararak

$$\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)=\int_{x}^{\infty}dy[\tilde{\alpha}(x,y)-\alpha(x,y)]e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.12}$$

ifadesini elde edilir. (2.4.12) de (2.4.27) yi yerine koyarsak

$$\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)=\int_{x}^{\infty}dy[-n(x)\Gamma(x)^{-1}\tilde{g}(x,y)]e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.13}$$

olur. (2.4.13) ü düzenlersek

$$\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)=-n(x)\Gamma(x)^{-1}\int_{x}^{\infty}dy\,\tilde{g}(x,y)e^{-i\lambda Jy} \tag{2.4.14}$$

bulunur. (2.4.14) de (2.4.5) i kullanırsak dalga fonksiyonu seviyede Darboux dönüşümünü

$$\widetilde{\Psi}(\lambda,x)-\Psi(\lambda,x)=-n(x)\Gamma^{-1}(x)\gamma(\lambda,x) \tag{2.4.15}$$

şeklinde elde ederiz. Böylelikle, ispat tamamlanmış olur. ■

2.5. Sabit Matris Üçlüsü ile Darboux Dönüşümü

Bu bölümde, Teorem (2.3.4) ve Teorem (2.4.1) de verilen sonuçların, Darboux dönüşümlerini türetmek için birleşik bir yaklaşım sağladığını gösterilecektir.

Mevcut spektruma n_j katlı bir λ_j ayrık özdeğeri eklediğimizi farzedelim. O halde, λ_j ye bağlı normalleştirici sayı olarak adlandırılan $c_j, \ldots$ j tane parametre vardır. Sonuç olarak, spektruma eklenen her bir ayrık λ_j özdeğeri için $\tilde{u}(x)$ potansiyelinin bir n_j-parametre ailesi olacaktır. Buradaki normalleştirici sayıları parametre gibi davranır (hareket eder). Birkaç $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ayrık özdeğerlerinin tek bir seferde eklenmesi durumunda, özdeğerleri λ_j e bağlı bir A kare matris kullanmak uygundur. Ayrıca matris elemanlı normalleştirici sayıları c_{js} bağlı bir C matrisi kullanmak uygundur.

(2.1.20) deki $f(y)$ ve $g(y)$ matrisleri aşağıdaki formda yazılabilir

$$f(x)=\begin{bmatrix}0 & B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\\ Ce^{-Ax} & 0\end{bmatrix}, \qquad g(y)=\begin{bmatrix}e^{-Ay}B & 0\\ 0 & -e^{-A^{\dagger}y}C^{\dagger}\end{bmatrix}. \tag{2.5.1}$$

Burada, $f(x)g(y)$ çarpımının iyi tanımlanması için; A, tüm özdeğerleri pozitif reel kısımlara sahip sabit bir kare matris, B ve C ise uygun boyutlarda sabit matrislerdir. Bu çarpım

$$f(x)g(y) = \begin{bmatrix} 0 & -B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}(x+y)}C^{\dagger} \\ Ce^{-A(x+y)}B & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.2}$$

şeklinde verilir.

(2.5.1) de verilen $f(x)$ ve $g(y)$ için, (2.3.15) de verilen $\tilde{g}(x,y)$ yi ve (2.3.1) de verilen $n(x)$ ve $q(x)$ ifadelerinin, A nın özdeğerlerinde hesaplanan dalga fonksiyonu $\Psi(\lambda, x)$ cinsinden açık şekilde hesaplayalım. (2.4.2) deki $\alpha(x,y)$ nin matris adjointi alırsak

$$J[\alpha(x,y)]^{\dagger}J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{-i\lambda Jy}\left[J[\Psi(\lambda,x)]^{\dagger}J - e^{i\lambda Jx}\right] \tag{2.5.3}$$

elde edilir. (2.3.1) in ilk formülünde (2.4.2) yi yerine koyarsak

$$n(x) = f(x) + \int_{x}^{\infty} dy\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda[\Psi(\lambda,x) - e^{-i\lambda Jx}]e^{i\lambda Jy}\, f(y) \tag{2.5.4}$$

veya eşit şekilde

$$n(x) = f(x) + \int_{x}^{\infty} dy \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x)e^{i\lambda Jy} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\; e^{i\lambda J(y-x)}\right] f(y) \tag{2.5.5}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds\;\, e^{\pm ias} = \delta(a) \tag{2.5.6}$$

Dirac delta fonksiyonunu (2.5.5) de kullanarak

$$n(x) = f(x) + \int_{x}^{\infty} dy \left[\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x)e^{i\lambda Jy}\right] - \delta(x-y)\right] f(y) \tag{2.5.7}$$

veya eşit biçimde

$$n(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi}\int_x^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x) e^{i\lambda J y} f(y) - \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(x-y) f(y) \tag{2.5.8}$$

bulunur. (2.5.8) de (2.5.6) kulanarak

$$n(x) = f(x) + \left[\frac{1}{2\pi}\int_x^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x) e^{i\lambda J y} f(y)\right] - f(x) \tag{2.5.9}$$

elde edilir. Bu ifadeyi sadeleştirilirse,

$$n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x) \int_x^{\infty} dy\, e^{i\lambda J y} f(y) \tag{2.5.10}$$

olur. (2.5.1) de verilen $f(x)$ değerini (2.5.10) da kullanırsak

$$n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \Psi(\lambda,x) e^{i\lambda J x}\, \mathcal{N}(\lambda,x) \tag{2.5.11}$$

bulunur ki buradaki $\mathcal{N}(\lambda,x)$

$$\mathcal{N}(\lambda,x) := \begin{bmatrix} 0 & -B^{\dagger}(\lambda I + iA^{\dagger})^{-1} e^{-A^{\dagger}x} \\ C(\lambda I - iA)^{-1} e^{-Ax} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

dir. Benzer şekilde, (2.3.1) in ikinci formülünde (2.5.3) ü kullanarak $q(x)$ i

$$q(x) = g(x) + \int_x^{\infty} dy\, g(x) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{-i\lambda J y}[J[\Psi(\lambda,x)]^{\dagger} J - e^{i\lambda J x}]\right] \tag{2.5.13}$$

veya

$$q(x) = g(x) + \int_x^{\infty} dy\, g(x) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{-i\lambda J y} J[\Psi(\lambda,x)]^{\dagger} J - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\; e^{i\lambda J(x-y)}\right] \tag{2.5.14}$$

şeklinde hesaplanır. (2.5.14) de (2.5.6) yı kullanarak ve (2.5.5)-(2.5.10) da olduğu gibi işlemleri yapılırsa,

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{x}^{\infty} dy\; g(y) e^{-i\lambda J y} J [\Psi(\lambda, x)]^{\dagger} J \tag{2.5.15}$$

elde edilir. (2.5.15) de, (2.5.1) de verilen $g(y)$ ifadesini kullanarak

$$q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\; \Theta(\lambda, x) e^{-i\lambda J x} J [\Psi(\lambda, x)]^{\dagger} J \tag{2.5.16}$$

bulunur. Buradaki $\Theta(\lambda, x)$ ifadesi

$$\Theta(\lambda, x) \coloneqq \begin{bmatrix} e^{-Ax(\lambda I - iA)^{-1}} B & 0 \\ 0 & -e^{-A^{\dagger} x} (\lambda I + i A^{\dagger})^{-1} C^{\dagger} \end{bmatrix} \tag{2.5.17}$$

şeklinde tanımlandı. $\tilde{g}(x, y)$ yi, $\Psi(\lambda, x)$ dalga fonksiyonu cinsinden hesaplamak (2.3.15), (2.4.1), (2.5.6) ve (2.5.16) da (2.4.2) yi kullanırsak

$$\tilde{g}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{x}^{\infty} dz\; q(z)\, \Psi(\mu, z) e^{i\mu J y} \tag{2.5.18}$$

bulunur. (2.5.18) de (2.5.16) kullanırsak

$$\tilde{g}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{x}^{\infty} dz\; \mathrm{E}(\lambda, \mu, z)\, e^{i\mu J y} \tag{2.5.19}$$

olur. Burada da $\mathrm{E}(\lambda, \mu, z)$ ifadesi

$$\mathrm{E}(\lambda, \mu, z) \coloneqq \frac{1}{4\pi^2 i} \Theta(\lambda, x) e^{-i\lambda J x} J [\Psi(\lambda, x)]^{\dagger} J \Psi(\mu, x) \tag{2.5.20}$$

şeklinde tanımlandı. (2.5.20) yardımıyla ve sırasıyla (2.5.11) ve (2.5.16) da verilen $n(x)$ ve $q(x)$ ifadelerini kullanarak (2.3.22) de verilen $\Gamma(x)$ i

$$\Gamma(x) = I - i \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{x}^{\infty} dy\; \mathrm{E}(\lambda, \mu, y)\, e^{i\mu J y} \mathcal{N}(\mu, y) \tag{2.5.21}$$

şeklinde hesaplanır. Son olarak, (2.4.10) da (2.5.16) yı yerine koyarak ve (2.5.20) yi kullanarak

$$\gamma(\lambda, x) = 2\pi \int_{x}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \mathrm{E}(\lambda, \lambda, s) \qquad (2.5.22)$$

elde edilir.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde,

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(k,x)+\omega(y,z)+\int_y^\infty ds\,\alpha(y,s)\omega(s,z)=0, \qquad x\in(-\infty,+\infty) \qquad (3.0.1)$$

Schrödinger denklemini ele alalım. Burada k^2, λ spektral parametresiyle ilgilidir. Şöyleki, $\lambda \coloneqq k^2$ dir. (3.0.1) için karşılık gelen (sol) Marchenko integral denklemi

$$\alpha(y,z)+\omega(y,z)+\int_y^\infty ds\,\alpha(y,s)\omega(s,z)=0, \qquad y<z \qquad (3.0.2)$$

şeklinde verilir. Burada $\alpha(x,y)$, $\psi(k,x)$ ile bağlantılıdır. Şöyle ki,

$$\alpha(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\left[\psi(k,x)-e^{ikx}\right]e^{-iky} \qquad (3.0.3)$$

dir. (3.0.3) ün (2.4.2) ye benzediğine dikkat edelim, yalnız (3.0.3) deki λ yerine k ve J yerine -1 kullanılır. Uygun koşullar altında potansiyel $u(x)$ üzerinde, $y>z$ için $\alpha(y,z)$ sıfır olur. Örneğin, $u(x)$ gerçek değerliyse ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(1+|x|)|u(x)|<+\infty \qquad (3.0.4)$$

ise, bu durumda y>z için $\alpha(y,z)=0$ dır. Önce (3.0.2) yi çözerek $\alpha(y,z)$ elde edilecek ve sonra (2.5.15) de ki $r(x;y,z)$ nin $\alpha(y,z)$ cinsinden açık bir şekilde yazılabileceği gösterilecektir.

Örnek 3.1. (Çözücü Çekirdeğin Hesaplanması)

$$\omega(y,z)=c_1{}^2e^{-k_1(y+z)} \qquad (3.1.1)$$

olduğunu kabul edelim. Burada c_1 ve k_1 bazı pozitif sabitlerdir. (3.0.2) de (3.1.1) i yerine koyarsak $\alpha(y,z)$ ifadesinin

$$\alpha(y,z)\coloneqq h(y)e^{-k_1z}, \qquad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabileceği düşünülebilir. Buradaki $h(y)$, bulunması gereken bir ifadedir. (3.0.2) de (3.1.1) ve (3.1.2) yi yerlerine koyarsak,

$$h(y)e^{-k_1 z} + {c_1}^2 e^{-k_1(y+z)} + \int_y^\infty ds\, h(y)e^{-k_1 s}{c_1}^2 e^{-k_1(s+z)} = 0$$

ve $e^{-k_1 z}$ ler sadeleştirilirse

$$h(y) + {c_1}^2 e^{-k_1 y} + \int_y^\infty ds\, h(y)e^{-2k_1 s}{c_1}^2 = 0 \tag{3.1.3}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $h(y)$

$$h(y) = \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y}}{1 + \frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 y}} \tag{3.1.4}$$

şeklinde bulunur. (3.1.2) de (3.1.4) ü yerine koyarsak;

$$\alpha(y,z) = \begin{cases} \dfrac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}}{1 + \frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 y}}, & y < z \\ 0, & z < y \end{cases} \tag{3.1.5}$$

olur. Şimdi $r(x;y,z)$ yi elde etmek için (2.2.15) i çözelim. (2.2.15) de (3.1.1) i yerine koyarsak

$$r(x;y,z) + {c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z} + \int_x^\infty ds\, r(x;y,s){c_1}^2 e^{-k_1 s} e^{-k_1 z} = 0 \tag{3.1.6}$$

bulunur. $r(x;y,z)$ ifadesini

$$r(x;y,z) \coloneqq p(x;y)e^{-k_1 z} \tag{3.1.7}$$

şeklinde yazalım. (3.1.6) da (3.1.7) yi yerine koyarsak

$$p(x;y)e^{-k_1 z} + {c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z} + \int_x^\infty ds\, p(x;y)e^{-k_1 s}{c_1}^2 e^{-k_1 s} e^{-k_1 z} = 0$$

ve $e^{-k_1 z}$ ler sadeleştirilirse

$$p(x;y) + {c_1}^2 e^{-k_1 y} + p(x;y)\int_x^\infty ds\, e^{-k_1 s} {c_1}^2 e^{-k_1 s} = 0 \tag{3.1.8}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $p(x;y)$

$$p(x;y) = \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y}}{1 + \frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \tag{3.1.9}$$

olarak bulunur. Son olarak, (3.1.7) de (3.1.9) u kullanırsak

$$r(x;y,z) \coloneqq \frac{{c_1}^2 e^{-k_1 y}}{1 + \frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} e^{-k_1 z} \tag{3.1.10}$$

bulunur. (3.1.10) da verilen $r(x;y,z)$ ifadesinin $x < y < z$ ve $x < z < y$ aralıklarında (2.2.15) için bir çözüm olduğuna dikkat edelim.

Şimdi ise,

$$r(x;y,z) + \omega(y,z) + \int_x^\infty ds\, \omega(y,s) r(x;s,z) = 0 \tag{3.1.11}$$

integral denklemini çözelim. Burada (2.2.15) teki $\omega(y,s)$ ve $r(x;s,z)$ nin yerleri değişmiştir. (3.1.11) de (3.1.1) i yerine koyarsak

$$r(x;y,z) + {c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z} + \int_x^\infty ds\, {c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 s} r(x;s,z) = 0 \tag{3.1.12}$$

elde ederiz. $r(x;y,z)$ ifadesini

$$r(x;y,z) \coloneqq e^{-k_1 y} m(x;z) \tag{3.1.13}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.1.12) de (3.1.13) ü yerine koyup $e^{-k_1 y}$ yi her iki taraftan da yok edersek,

$$m(x;z) + {c_1}^2 e^{-k_1 z} + \left[\int_x^\infty ds\, {c_1}^2 e^{-2k_1 s}\right] m(z) = 0 \tag{3.1.14}$$

elde edilir. (3.1.14) ün çözümünden

$$m(x;z) = \frac{-c_1{}^2 e^{-k_1 z}}{1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \tag{3.1.15}$$

bulunur. Son olarak (3.1.13) de (3.1.15) i yerine koyarsak

$$r(x;y,z) \coloneqq e^{-k_1 y} \frac{-c_1{}^2 e^{-k_1 z}}{1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \tag{3.1.16}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse (3.1.16) da verilen ifade hem $x < y < z$ hem de $x < z < y$ içindir. Ayrıca (3.1.10) ve (3.1.16) denklemlerinden, (3.1.6) ve (3.1.12) ye ait çözümlerin aynı $r(x;\ y, z)$ ile verildiği sonucuna varılır.

(2.2.15) in ve (3.1.10) un çözümü direk olarak elde edildi. Şimdi, (2.2.14) deki ifadenin sırasıyla (3.1.10) ve (3.1.16) da verilen çözümleri sağladığını gösterelim.

(3.1.5) de görüldüğü gibi, $\alpha(y, z)$ reel değerli ve skalerdir. Bu yüzden

$$\alpha(y,z)^{\dagger} = \alpha(y,z) \tag{3.1.17}$$

yazılabilir. Böylece (2.2.14) ün birinci satırındaki integral ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

(2.2.14) ün birinci satırındaki integral ifadesi buradaki (3.1.5) kullanılarak hesaplanır. (3.1.17) nin yardımıyla ve sonra (3.1.5) i kullanarak,

$$\int_x^y \mathrm{ds}\ \mathrm{J}\alpha(\mathrm{s},\mathrm{y})^{\dagger}\mathrm{J}\alpha(\mathrm{s},\mathrm{z}) = \int_x^y \mathrm{ds}\ \alpha(\mathrm{s},\mathrm{y})\alpha(\mathrm{s},\mathrm{z})$$

$$= \int_x^y \mathrm{ds} \left[\frac{c_1{}^4 e^{-k_1 s} e^{-k_1 y}}{1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 s}}\right]\left[\frac{e^{-k_1 s} e^{-k_1 z}}{1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 s}}\right] = c_1{}^4 \left[\int_x^y \mathrm{ds} \frac{e^{-2k_1 s}}{\left(1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 s}\right)^2}\right] e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}$$

$$= c_1{}^4 \left[\frac{1}{c_1{}^2} \frac{1}{1 + \frac{c_1{}^2}{2k_1} e^{-2k_1 s}} \Big|_x^y e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}\right]$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\int_x^y ds\, J\alpha(s,y)^\dagger J\alpha(s,z) = {c_1}^2 \left[\frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 y}} - \frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \right] e^{-k_1 y} e^{-k_1 z} \quad (3.1.18)$$

bulunur. Şimdi, (2.2.14) ün ilk satırında (3.1.5) ve (3.1.18) i kullanırsak, $z > y$ olması durumunda $r(x; y, z)$ yi

$$r(y,z) = \alpha(y,z) + \int_x^y ds\, J[\alpha(s,y)]^\dagger J\alpha(s,z)$$

$$= \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 y}} + {c_1}^2 \left[\frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 y}} - \frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \right] e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}$$

$$= \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}},$$

şeklinde bulunur. Bulunan $r(y, z)$ ifadesi (3.1.10) ve (3.1.16) ile uyum sağlar. Benzer şekilde, (2.2.14) ikinci satırında (3.1.5) ve (3.1.18) i kullanırsak

$$r(y,z) = J\alpha(z,y)^\dagger J + \int_x^z ds\, J[\alpha(s,y)]^\dagger J\alpha(s,z)$$

$$= \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 z} e^{-k_1 y}}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 z}} + {c_1}^2 \left[\frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 s}} \Big|_x^z e^{-k_1 y} e^{-k_1 z} \right]$$

$$= \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 z} e^{-k_1 y}}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 z}} + {c_1}^2 \left[\frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 z}} - \frac{1}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}} \right] e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}$$

$$= \frac{-{c_1}^2 e^{-k_1 y} e^{-k_1 z}}{1+\frac{{c_1}^2}{2k_1} e^{-2k_1 x}}$$

bulunan $r(y, z)$ ifadesi (3.1.10) ve (3.1.16) ile uyum sağlar.

Böylelikle, bu örnekte (2.2.14) te verilen $r(x; y, z)$ ifadesini $R + \Omega + R\Omega = 0$ ve $R + \Omega + \Omega R = 0$ nin bir çözümü olduğunu doğrulamış olduk.

Bu örnekte, (3.1.1) de verilen $\omega(y, z)$, ek olarak simetri özelliğini tamamlar. Şöyle ki,

$$\omega(y, z) = \omega(z, y) \tag{3.1.19}$$

dir. Bu ifade

$$r(x; y, z) = r(x; z, y) \tag{3.1.20}$$

sonucunu doğurur.

4. SONUÇLAR

Bu tezde, bazı uygun fonksiyon uzayları üzerinde uygulanabilen ve $\mathcal{L}$ ile ifade edilen lineer diferansiyel operatörler için Darboux dönüşümlerini göz önünde bulunduruluyor. $\mathcal{L}$ operatörünün spektrumu genellikle iki kısımdan oluşur: ayrık spektrum ve sürekli spektrum. Darboux dönüşümü, sürekli spektrumda değişiklik yapmadan $\mathcal{L}$ spektrumuna sonlu sayıda ayrık özdeğer eklendiğinde veya çıkarıldığında özfonksiyonların nasıl değiştiğini belirler.

Darboux dönüşümü iki kısımdan oluşur; Birinci kısım potansiyel seviye ve ikinci kısım dalga fonksiyon seviyesidir. Bu dönüşüm, perturbasyona uğramamış potansiyel ve dalga fonksiyonlarını perturbasyona uğramamış değerler cinsinden sağlar. Potansiyel seviyede Darboux dönüşümü, perturbasyona uğramış potansiyel $\tilde{u}(x)$ in, perturbasyona uğramamış potansiyel $u(x)$ ve perturbasyondaki ayrık λ-özdeğerlerinde hesaplanan değerler cinsinden belirlenmesinden meydana gelir. Dalga seviyedeki Darboux dönüşümü ise perturbasyona uğramış $\widetilde{\psi}(\lambda, x)$ in perturbasyona uğramamış dalga fonksiyonu $\psi(\lambda, x)$ ve perturbasyondaki ayrık λ-özdeğerlerinde hesaplanan değerler cinsinden belirlenmesinden oluşur.

Bu tezde, diferansiyel denklemler için çeşitli spektral problemler için Darboux dönüşümler türeten bir yöntem elde edilmektedir. Bu, Marchenko integral denklemleri veya Gel'fand-Levitan integral denklemi denilen temel integral denklemleri yardımıyla yapılmaktadır.

Bu yaklaşım, herhangi bir dalga fonksiyonu için bir Darboux dönüşümü elde edilmesine olanak tanır, oysaki diğer yaklaşımlarda Darboux dönüşümü yalnızca bazı özel dalga fonksiyonu için verilir. Metodumuz belirli diferansiyel denklemlere özgü değildir. Bu, büyük bir diferansiyel denklem sınıfına uygulanabilen bir yaklaşımdır.

KAYNAKLAR

[1] **Ablowitz, M. and Segur, H., 1981.** Solitons and the inverse scattering transform, SIAM, Philadelphia.

[2] **Aktosun, T. and van der Mee, C., 2009.** A unified approach to Darboux transformations, Inverse Problems 25, 105003.

[3] **Aktosun, T. and van der Mee C., 1989.** Darboux Transformation for the NLS Equation.

[4] **Chadan, K. and Sabatier, P.C., 1989.** Inverse problems in quantum scattering theory, 2nd ed., Springer, New York.

[5] **Crum, M.M., 1955.** Associated Sturm-Liouville systems, Quart J. Math. Oxford (Ser.2) 8, 121-127.

[6] **Darboux, G., 1882.** Sur une proposition relative aux équations linéaires, Comptes Rendus Acad. Sci. 94, 1456-1459.

[7] **Darboux, G., 1889.** Leçons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul innitesimal, Vol. **2**, Gauthier-Villars, Paris.

[8] **Deift, P. and Trubowitz, E., 1979.** Inverse scattering on the line, Commun. Pure Appl. Math. 32, 121–251.

[9] **Krein, M.G., 1957.** On a continual analogue of a Christo_el formula from the theory of orthogonal polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 113, 970-973.

[10]**Matveev, V.B., 1979.** Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters, Lett. Math. Phys. 3,213-216.

[11]**Newton, R.G., 1983.** The Marchenko and Gel'fand-Levitan methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions, In: J. B. Bednar, R. Redner, E.Robinson, and A. Weglein (eds.), Conference on inverse scattering: theory and application, SIAM, Philadelphia, pp. 1-74.

[12]**Krasnov, M., Kiselev, A., Makeronko, G., 1976.** İntegral Denklemler.

ÖZGEÇMİŞ

Tansu DİLİ, 30/09/1993 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretimini 1999 yılında Rize ilinde Çaykur İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2007 yılında Rize ilinde Hasan Kemal Yardımcı İMKB Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde tamamladı. 09/09/2011 tarihinde başladığı lisans eğitimini 26/06/2015 tarihinde Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. Hazar Çaysan Ortaokulu'nda öğretmen olarak 2015 yılı itibariyle görev yapmıştır.