T.C
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK SINIR ŞARTLI YARI LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN FOURIER YÖNTEMİ

FATMA TATLI ADAL

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. KADİR KUTLU
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. BAHADIR ÖZGÜR GÜLER
YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2017

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK SINIR ŞARTLI YARI LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN FOURIER YÖNTEMİ

Doç. Dr. Kadir KUTLU danışmanlığında **Fatma TATLI ADAL** tarafından hazırlanan bu çalışma Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafında 24/04/2017 tarihinde MATEMATİK Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	:	Doç. Dr. Kadir KUTLU	K.Kut
Üye	:	Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER	BÖGüler
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	İ.Cumhur

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Fizikte ve mühendislikte titreşim ve dalga hareketi ihtiva eden pek çok problem diferansiyel denklem halinde özellikle de kısmi türev içeren denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tür problemlerin belli şartlar altında varsa çözümünün veya en azından çözülebilir olup olmadığı fiziksel muhakemeyle ispatı yeterli değildir. Bunun yanında elbette matematiksel olarak da kanıtlanması gerekir.

İncelenen problemde aranan fonksiyonun ve türevlerinin tanımlandığı aralığın uç değerlerinin birbirine eşit olması periyodik sınır şartı olarak adlandırılır. Bu çalışmada periyodik sınır şartlı ve tabii başlangıç şartları da verilen yarı lineer hiperbolik denklemli başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini incelenmektedir.

Yüksek lisans çalışmam süresince bana değerli zamanını ayıran, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Kadir KUTLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan ve desteklerini hissettiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Fatma TATLI ADAL

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Periyodik Sınır Şartlı Yarı Lineer Hiperbolik Denklemler için Fourier Yöntemi” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 15/01/2017

Fatma TATLI ADAL

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

PERİYODİK SINIR ŞARTLI YARI LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN FOURIER YÖNTEMİ

Fatma TATLI ADAL

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Kadir KUTLU

Bu çalışmanın ana konusu yarı lineer hiperbolik denklemli başlangıç ve periyodik sınır değer (karışık) probleminin $D \coloneqq \{(x,t)|\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < t < T < \infty\}$ bölgesinde çözümünün varlığı ve tekliğini göstermektir. Problem aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,u); \quad (0 < t < T;\ 0 < x < 2\pi;\ -\infty < u < \infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x); \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t); \ \ (0 \le t \le T)$$

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[0,2\pi]$ aralığında, $f(x,t,u)$, $D \times (-\infty,\infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x,t)$ ise aranan (çözüm) fonksiyondur. Çözümde ileride açıklayacağımız Fourier yönteminden yararlanıyoruz. Çözümün varlığının ve tekliğinin ispatında ise klasik yöntem olan art arda yaklaşımlar metodundan faydalanıyoruz.

2017, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fourier Yöntemi, Periyodik Koşullar, Yarı Lineer Hiperbolik Denklemler, Test Fonksiyonu, Dirichlet Şartları.

ABSTRACT

FOURIER METHOD FOR SEMI LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH PERIODIC CONDITION

Fatma TATLI ADAL

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kadir KUTLU

The main topic of this work is to show the existence and uniqueness of the solution of the semi-lineer hyperbolic equation with the initial and periodic boundary value (mixed) problem in the domain $D \coloneqq \{(x,t)|\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < t < T < \infty\}$. The problem is as follows:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,u); \quad (0 < t < T;\ 0 < x < 2\pi;\ -\infty < u < \infty)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x); \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$
$$u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t); \ \ (0 \le t \le T)$$

Here $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are the known function which are defined on the interval $[0,2\pi]$ and $f(x,t,u)$ is the known function which is defined on the domain $D\times(-\infty,\infty)$. These functions satisfy the necessary conditions. $u(x,t)$ is the desired solution function. For the solution, we use the Fourier method which we will explain later. For the proof of the existence and uniqueness of the solution, we use the classical method of successive approximations.

2017, 50 pages

Keyword: Fourier Method, Periodic Conditions. Semi Linear Hyperbolic Equations. Test Function, Dirichlet Conditions

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{B}$	Banach Uzayı
$\|f(x)\|$	f Fonksiyonunun Normu
$\langle f,g\rangle$	İki Fonksiyonun İç Çarpımı
$u(x,t)$	Çözüm Fonksiyonu
$v(x,t)$	Test Fonksiyonu
$U_0^T(t)$	Denklemin Homojen Çözümü
$G(t,\xi-x)$	Kaynak Fonksiyon
$G(t-\tau,\xi-x)$	Kaynak Fonksiyon
Δ	Diskriminant

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Düzgün Yakınsak Fonksiyon Serileri

Tanım 1.1.1. Bir $E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin kısmi toplamlar dizisi E üzerinde düzgün yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisinin oluşturduğu fonksiyon serisi *E de düzgün yakınsaktır* denir.

Şu hâlde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisinin düzgün yakınsak olmasıdır. Yani $\forall x \in E$ değeri için ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısına $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $|f(x) - s_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının $x \in E$ noktasına bağlı olmaksızın karşılık getirilebilmesidir. Burada $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ dir.

Bir başka ifadeyle serinin düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart $\forall x \in E$ değeri için ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısına $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının karşılık getirilebilmesidir (Saban, 1981).

Örnek 1.1.1. $E = (-1,1)$ aralığında $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$\forall x \in E$ için seri noktasal yakınsar ve toplamının $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ olduğunu biliyoruz.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = x^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

olur. Eğer bir $x_0 = 2^{-\frac{1}{N+1}} \in E$ alırsak

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x_0^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x_0} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Buna göre verilen fonksiyon serisi E de düzgün yakınsak değildir.

Teorem 1.1.1. $\{f_n\}$, E kümesinde tanımlı bir reel fonksiyon dizisi ve $\{M_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. $\forall x \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq M_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi E'de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Örnek 1.1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ serisini göz önüne alalım. $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ dir ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan Teorem 1.1.1. gereği verilen seri mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Uyarı 1.1.1. Teorem 1.1.1.'e düzgün yakınsak seriler için *Weierstrass majorant kriteri* denir.

Teorem 1.1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi $E = [a, b]$ aralığında düzgün yakınsak ve bu aralıkta $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\int_a^x f_n(t)\, dt\,, \qquad x \in [a, b]$$

mevcutsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, dt\,, \qquad x \in [a, b]$$

dir.

Teorem 1.1.2 düzgün yakınsaklık halinde serinin terim terime integre edilebileceğini söyler.

Teorem 1.1.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için E'de tanımlı $\{f_n\}$ ve $\{g_n\}$ iki fonksiyon dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n g_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\ \ p, q > 0$$

dir. Bu eşitsizliğe *Hölder eşitsizliği* denir (Saban, 1981).

1.2. Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyon Aileleri

$C([a, b])$ ile $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış ve bu aralıkta sürekli reel değerli fonksiyonların kümesini gösterelim.

$f, g \in C([a, b])$ olmak üzere,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ifadesi $C([a,b]) \times C([a,b])$ kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine bir dönüşümdür. Bu dönüşümün pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğu gösterilebilir (Saban, 1981). Dolayısıyla $C([a,b])$ iç çarpımı haiz bir vektör uzayıdır. Bu iç çarpıma karşılık gelen norm ise

$$\langle f, f \rangle^{1/2} := \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2}$$

dir. $\|f\|_2$ ile de gösterilen bu norma reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayındaki L_2 normu denir.

Teorem 1.2.1. f ve $g \in C([a,b])$ olsun. Bu durumda

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

dir. Bu eşitsizliğe *Cauchy eşitsizliği* denir.

İç çarpım $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ şeklinde tanımlandığında Cauchy eşitsizliğini

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

Teorem 1.2.2. (*Grönwall eşitsizliği*) Negatif olmayan f, g ve $h \in C([a,b])$ fonksiyonları

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x g(t)h(t)dt, \qquad x \in [a,b]$$

integral eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x h(s)ds}dt, \qquad x \in [a,b]$$

dir.

Tanım 1.2.1. $C([a,b])$ uzayında $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ için $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ olacak şekilde mevcut $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon ailesine $[a,b]$ aralığında *ortogonal (dik) fonksiyon ailesi* denir.

Örnek 1.2.1.

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

şeklinde tanımlanan $\{\Phi_n(x)\}$ polinom dizisine *Legendre polinomları* denir. $n = 0,1,2 \ldots$ için

$$\Phi_0(x) = 1, \qquad \Phi_1(x) = x, \qquad \Phi_2(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots$$

elde edilir. Φ_n fonksiyonları $\mathbb{R}$'de sürekli fonksiyonlardır. $[-1,1]$ aralığında ortogonal olduğunu gösterelim.

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\, dx = 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Şimdi $n = 0,1,2, \ldots$ için

$$g(x) = (x^2-1)^n$$

alalım. Türev almak suretiyle

$$(x^2-1)g' - 2nxg = 0$$

elde edilir. Buradan tekrar türev alarak

$$(x^2-1)g'' - 2(n-1)xg' - 2ng = 0$$

elde edilir ve tümevarımla

$$(x^2-1)g^{(k+2)} - 2(n-k-1)xg^{(k+1)} - 2[n + (n-1) + \cdots + (n-k)]g^{(k)} = 0$$

elde edilir.

Son eşitlikte $k = n$ için

$$(x^2-1)g^{(n+2)} - 2xg^{(n+1)} - 2n(n+1)g^{(n)} = 0$$

olur. Bu arada

$$g^{(n)} = \frac{d^n g}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] = 2^n \cdot n! \cdot \Phi_n(x)$$

olmasından

$$g^{(n+1)} = 2^n \cdot n! \cdot \Phi_n{}'(x), \quad g^{(n+2)} = 2^n \cdot n! \cdot \Phi_n{}''(x)$$

elde edilir, yani her $n = 0,1,2, \ldots$ için Legendre polinomları

$$(1-x^2)\Phi_n{}''(x) - 2x\Phi_n{}'(x) + n(n-1)\Phi_n(x) = 0$$

bağıntısını sağlar. Böylece her $n, m = 0,1,2, \ldots$ için

$$\Phi_m[(1-x^2)\Phi_n{}''(x) - 2x\Phi_n{}'(x) + n(n-1)\Phi_n(x)] = 0 \tag{1.1}$$

$$\Phi_n[(1-x^2)\Phi_m{}''(x) - 2x\Phi_m{}'(x) + n(n-1)\Phi_m(x)] = 0 \tag{1.2}$$

elde edilir.

$$\mathcal{M}(x) = \Phi_n'(x)\Phi_m(x) - \Phi_n(\mathrm{x})\Phi_m'(x)$$

alırsak,

$$\mathcal{M}'(x) = \Phi_n''(x)\Phi_m(x) - \Phi_n(\mathrm{x})\Phi_m''(x)$$

bağıntısı yardımıyla (1.1) ve (1.2) eşitliklerinin farkı

$$(1-x^2)\mathcal{M}'(x) - 2x\mathcal{M}(x) = [m(m+1) - n(n+1)]\Phi_m(x)\Phi_n(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\mathcal{M}(x)] = [m(m+1) - n(n+1)]\Phi_m(x)\Phi_n(x)]$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafı $[-1,1]$ aralığında integre edersek

$$(1-x^2)\mathcal{M}(x)|_{-1}^{1} = [m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1}\Phi_m(x)\Phi_n(x)dx$$

$$0 = [m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1}\Phi_m(x)\Phi_n(x)dx$$

olur.

Bu halde $m \neq n$ için

$\int_{-1}^{1} \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = 0,\ m,n = 0,1,2,\ldots$

elde edilir. O halde

$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = 0$

olmak zorundadır. O halde Legendre polinomlarından oluşan $\{\Phi_n(x)\}$ ailesi $[-1,1]$ aralığında tanımlı ortogonal bir fonksiyon ailesidir (Saban, 1981).

Tanım 1.2.2. $C([a,b])$ uzayında $\forall n,m \in \mathbb{N}$ için $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm}$ olacak şekilde mevcut $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon ailesine $[a,b]$ aralığında *ortonormal fonksiyon ailesi* denir. Burada

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

dir.

Örnek 1.2.2.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n(x) = \cos nx$

$n = 0$ için $\varphi_0(x) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_{-n}(x) = \sin nx$

şeklinde tanımlanan $\{\varphi_p(x)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ fonksiyon ailesi $[0,2\pi]$ aralığında ele alınsın.

$m \neq 0$ için $\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi, \quad m = 0$ için $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi,$

$m \neq 0$ için $\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi$

olduğundan

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \alpha_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha_{-n}(x) = \frac{\varphi_{-n}(x)}{\sqrt{\pi}}$

almak suretiyle tanımlanan $\{\alpha_p(x)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ fonksiyonu $C([a,b])$ uzayında ortonormal bir fonksiyon ailesidir.

1.3. Fourier Katsayıları ve Fourier Serisi

Tanım 1.3.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|\varphi_n\| \neq 0,\ \varphi_n$ ve $f \in C([a,b])$ olsun. Bu durumda

$$c_n := \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$$

sayısına f fonksiyonunun φ_n fonksiyonuna göre *Fourier katsayısı* denir.

Örnek 1.3.1. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\{\Phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ Legendre polinomlarına karşılık gelen Fourier katsayılarını hesaplayalım.

$$c_0 = \frac{\langle f, \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0, \Phi_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\Phi_0(x)dx}{\int_{-1}^{1} \Phi_0(x)\Phi_0(x)dx} = \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} = 0,$$

$$c_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}{\int_{-1}^{1} x^2\, dx} = 1, \qquad c_2 = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3 - x)\, dx}{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9x^4 - 6x^2 + 1)dx} = 0, \qquad c_3 = 0, \ldots$$

bulunur. $f(x)$ fonksiyonunun $\Phi_1(x)$'e eşit olduğu göz önüne alınırsa

$c_0 = 0,\ c_1 = 1$ ve $\forall n = 2,3, \ldots$ için $c_n = 0$ elde edileceği Legendre polinomlarının ortogonalliğinin açık bir sonucudur.

Tanım 1.3.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ için φ_n ve $f \in C([a,b])$ ve ayrıca $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir ortonormal fonksiyon ailesi olsun.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

c_n katsayılarının f fonksiyonunun φ_n fonksiyonlarına göre Fourier katsayıları olduğunu ifade eder.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

serisine f fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal fonksiyon ailesine göre Fourier serisi denir.

Teorem 1.3.1. $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C([a,b]$ uzayında bir ortonormal fonksiyon ailesi, f aynı uzayda bir fonksiyon ve c_n, f'in φ_n'e göre Fourier katsayısı olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \leq \|f\|^2$$

dir. Bu eşitsizliğe *Bessel eşitsizliği* denir.

$[-\pi,\pi]$ aralığında tanımlı ve parçalı sürekli reel değerli fonksiyonlardan oluşan $\mathcal{F}([-\pi,\pi])$uzayını ele alalım. Bu uzayda ortogonal fonksiyon ailesi olarak

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\psi_n(x) = \cos nx,\ n = 0$ için $\psi_0(x) = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\psi_{-n}(x) = \sin nx$

almak suretiyle $\{\psi_p(x)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ortogonal fonksiyon ailesi alalım. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$$

ifadesi yukarıda açıklanan $\{\psi_p(x)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ortogonal fonksiyon ailesi olduğuna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$$

serisine f *fonksiyonunun trigonometrik Fourier serisi* veya kısaca f *fonksiyonunun Fourier serisi* denir.

$f \in \mathcal{F}([-\pi,\pi])$ olmak üzere f fonksiyonunun

$$c_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\psi_p(x)dx, \qquad p \in \mathbb{Z}$$

şeklinde tanımlanan Fourier katsayıları

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad c_n = a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$c_{-n} = b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n \in \mathbb{N}$$

şeklini alır. Bu durumda f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.3}$$

olur.

Fourier serileriyle ilgili esas problem aşağıdaki iki sorunun cevabıyla ilgilidir:

1. (1.3) bağıntısı ile verilen seri hangi şartlarda yakınsaktır?
2. Hangi şartlarda bu seri $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar?

Bu soruların cevabını aşağıdaki teorem vermektedir.

Teorem 1.3.1. $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli bir f fonksiyonunun Fourier serisi yakınsak ve

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

olmasıdır.

Uyarı 1.3.1. Trigonometrik Fourier serisi söz konusu olduğunda Bessel eşitsizliği

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

halini alır.

Genel olarak, f fonksiyonunun sağlaması gereken şartlara *Dirichlet şartları* denir. Bu şartların sağlanması halinde esas problemin çözülebilirliğini gösteren teoremlere de *Fourier teoremi* denir.

Teorem 1.3.2. f fonksiyonu 2π periyotlu, ℝ'de parçalı sürekli ve birinci türevi de ℝ'de parçalı sürekli olan bir periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Fourier serisi yakınsak ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

sayısına eşittir. Burada + ve − işareti sağ ve sol limitleri göstermektedir.

Uyarı 1.3.2. a) f fonksiyonunun sürekli olduğu x noktalarında Fourier serisi yakınsak ve toplamı $f(x)$'tir.

b) f fonksiyonunun süreksiz olduğu x noktalarında Fourier serisi yine yakınsak ve toplamı

$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$'ye eşittir.

c) f fonksiyonu $-\pi$'de süreksiz ise periyodiklikten dolayı π'de de süreksizdir. Teorem 1.3.2.'den dolayı f fonksiyonunun Fourier serisi $-\pi$ veya π noktalarında yakınsak ve

$$\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$$

sayısına eşittir (Saban, 1981).

Örnek 1.3.2. $f(x)=x+x^2$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında Fourier serisi ile çakışacağı açıktır. Fourier serisinin katsayıları

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx=\frac{\pi^2}{3}, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}$$

bulunur. O halde

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos nx-\frac{n}{2}\sin nx\right)$$

elde edilir. $x=\pm\pi$ için Uyarı 1.3.1. c) den Fourier toplamı

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{(-\pi+\pi^2)+(\pi+\pi^2)}{2}=\pi^2$$

dir. Bu durumda

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1.4. Art Arda Yaklaşımlar Metodu

Tanım 1.4.1. XY düzleminde konveks bir D bölgesinde herhangi iki (x, y_1) ve (x, y_2) nokta çifti alalım. D'de tanımlı ve sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonu için

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C|y_2 - y_1|$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir $C \geq 0$ sayısı varsa $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde y'ye göre *Lipschitz şartı*nı gerçekler denir. Şimdi

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.4}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $f(x, y)$ fonksiyonu xy düzleminde bir D bölgesinde tanımlı olsun. Bu problemin D bölgesinde çözümünün varlığı göstermek için çeşitli metotlar vardır. Bu yöntemlerden art arda yaklaşımlar yöntemi aynı zamanda çözümün kendisini de vermektedir. y_0 dan başlayarak

$$y_k(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{k-1}(t)\big)dt, \quad k = 1,2, \dots \tag{1.5}$$

ile $\{y_k(x)\}$ fonksiyon dizisini tanımlayalım.

$k = 1$ için

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq b$$

olur. Şimdi $k = n$ için $f(x, y_n(x))$ tanımlı ve sürekli ve $|y_n(x) - y_0| \leq b$ şartını sağladığını farz edelim. $k + 1$için

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n)|dt \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq b$$

dir. Kısaca $E: |x - x_0| \leq \rho,\ |y - y_0| \leq \sigma$ dersek $\big(x, y_{k+1}(x)\big) \in E \subseteq D,\ k = 1,2, \dots$ olur. Sonuç olarak $\{y_k(x)\}$ dizisi $|x - x_0| \leq \rho$ için tanımlı $|y_k(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini gerçekler.

Şimdi $\{y_k(x)\}$ dizisinin yakınsaklığını gösterelim. Bunun için

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x) - y_{n-1}(x)] \tag{1.6}$$

serisini göz önüne alıp bu serinin $|x - x_0| \leq \rho$ için düzgün yakınsadığını ve limitinin sürekli olduğunu gösterelim. (1.5) ifadesinden

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \leq M|x - x_0|$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))]\, dt\right| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^2}{2!\, C} \leq \frac{M(C\rho)^2}{2!\, C}$$

elde edilir. $k = n$ için

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^n}{n!\, C} \leq \frac{M(C\rho)^n}{n!\, C}$$

doğru olsun. $n + 1$ için

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))]\, dt\right| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^{n+1}}{(n + 1)!\, C}$$

$$\leq \frac{M(C\rho)^{n+1}}{(n + 1)!\, C}$$

elde edilir.

Böylece (1.6) serisinin majorantı genel terimi $\frac{M}{C}\frac{(C\rho)^{n+1}}{(n+1)!}$ olan seridir. Teorem 1.1.1.'e göre (1.6) serisi $|x - x_0| \leq \rho$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır Yani $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ düzgün olarak mevcuttur. $f(x, y)$, D üzerinde düzgün sürekli olduğundan $|x - x_0| \leq \rho$ için $\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$ dir. Böylece (1.5) ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0(x) + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt$$

$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$ dir. Bu durumda,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt \tag{1.7}$$

elde edilir. Sağdaki integralde f fonksiyonu t'nin sürekli fonksiyonudur. O halde x'e göre türetilebilirdir ve türevi ise,

$$\frac{dy}{dx} = f\big(x, y(x)\big)$$

dir, Yani (1.7) ile verilen $y(x)$ fonksiyonu (1.4) probleminin çözümüdür.

Çözümün tekliğini gösterelim. $|x - x_0| \leq \rho$ için (1.4) probleminin $\bar{y}(x_0) = y_0$ olan bir başka $\bar{y}(x)$ çözümü olsun. O halde

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \bar{y}(t)\big)dt$$

olur. Yukardaki işlemlere benzer şekilde $|x - x_0| \leq \rho$ için

$$|y_n(x) - \bar{y}(x)| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^n}{n!\,C} \leq \frac{M(C\rho)^n}{n!\,C}$$

elde edilir. Buradan $n \to \infty$ alırsak $|y(x) - \bar{y}(x)| \leq 0$ ve bu durumda $y(x) = \bar{y}(x)$ bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş olduk.

Teorem 1.4.1. Reel değerli $f(x, y)$ fonksiyonu $D = \{(x, y)\big||x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ bölgesinde sürekli olup y'ye göre Lipschitz şartını gerçeklesin. Ayrıca D'de $f(x, y)$ sınırlı olsun yani $|f(x, y)| \leq M$. $\rho = \frac{b}{M}$ olmak üzere (1.4) başlangıç değer probleminin $|x - x_0| \leq \rho$ için çözümü var ve tektir (Tuncer, 1969).

Uyarı 1.4.1. Teorem 1.4.1.'e *art arda yaklaşımlar veya Picard-Lindelöf teoremi* denir.

Uyarı 1.4.2. $\bar{y}(x) = y(x)$ olduğundan $|x - x_0| \leq \rho$ için

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^n}{n!\,C}$$

eşitsizliği $y(x)$ yerine $y_n(x)$ alındığında aradaki hatayı gösterir.

Örnek 1.4.1. $y' = \frac{2y}{x}$ denklemini $y(1) = 1$ başlangıç şartı altında art arda yaklaşımlar yöntemiyle çözelim.

$D: |x-1| \leq a,\ \ |y-1| \leq b$ dikdörtgen bölgesini göz önüne alalım.

$$|f(x, y_2) - f(x - y_1)| = \left|\frac{2}{x}(y_2 - y_1)\right| \leq \left|\frac{2}{1-a}(y_2 - y_1)\right|$$

olur. Buradan $C = \frac{2}{1-a}$ olup Lipschitz şartı gerçeklenir. (1.5) ifadesinden

$k = 1, 2, \dots, n-1$ için

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x \frac{2 \cdot 1}{t} dt = 1 + \log x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x \frac{2}{t}(1 + \log t) dt = 1 + 2\log x + 2\log^2 x$$

$$y_{n-1}(x) = 1 + 2\log x + \frac{2^2}{2!}\log^2 x + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\log^{n-1} x$$

doğru olsun. n. adımda

$$y_n(x) = 1 + \int_1^x \frac{2}{t}\left(1 + 2\log t + \frac{2^2}{2!}\log^2 t + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\log^{n-1} t\right) dt$$

$\log t = u$ değişken dönüşümü uygularsak;

$$y_n(x) = 1 + 2\int_1^{\log x}\left(1 + 2\mathrm{u} + \frac{2^2}{2!}\mathrm{u}^2 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}u^{n-1}\right) du$$

$$y_n(x) = 1 + 2\log x + \frac{2^2}{2!}\log^2 x + \cdots + \frac{2^n}{n!}\log^n x = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} log^{kx}$$

elde edilir. Buradan $n \to \infty$ alınırsa $y_n(x) \to y(x) = e^{2\log x} = x^2$.

1.5. İkinci Mertebeden Yarı Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin *mertebesi* denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır. Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerine göre denklem birinci dereceden ise denkleme *lineer* kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Eğer denklem lineer değilse denkleme *lineer olmayan* kısmi türevli diferansiyel denklem diyoruz.

Kısmı türevli diferansiyel denklemler adi türevli denklemlerden farklı olarak daha ileri sınıflandırmaya sahiptir; kısmi türevli bir diferansiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer ise, denkleme *yarı lineer* denklem denir (Çağlayan ve Çelebi., 2010). Bu durumda denklemdeki daha düşük mertebeden türevlerin ve bağımlı değişkenlerin bulunuş şeklinin bir önemi yoktur. Yarı lineer bir kısmı türevli diferansiyel denklem genel olarak

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (1.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A, B ve C x ve y'ye göre iki defa sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)$$

olmak üzere (1.8) denklemi

a) $\Delta > 0$ ise hiperbolik,
b) $\Delta = 0$ ise parabolik,
c) $\Delta < 0$ ise eliptik denklem olarak adlandırılır.

Bazen (1.8) denklemi katsayı fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgeye göre farklı tipte olabilir. Örneğin;

$$yu_{xx} - xu_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

denklemi ilk çeyrek ve üçüncü çeyrek düzlemde ($x > 0,\ y > 0$ ve $x < 0,\ y < 0$) hiperbolik, diğer çeyrek düzlemlerde eliptiktir (Boyce and DiPrima.,1977; Tichanov and Samarskii., 1990).

1.6. Periyodik Sınır Değer Problemleri

İkinci mertebeden adi türevli

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \qquad (1.9)$$

lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $x \in [a,b]$ için P, Q, R ve G fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. Eğer (1.9) denklemine periyodik sınır şartları denilen

$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b) \tag{1.10}$$

şartları ilave edilirse (1.9), (1.10) problemine *periyodik sınır değer* problemi denir (Allan, 2002).

Örnek 1.6.1. Periyodik sınır şartları altında homojen difüzyon (ısı yayılımı) denklemini göz önüne alalım:

$$a^2 u_{xx} = u_t, \;\; 0 < x < 2l, \;\; t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 2l,$$

$$u(0,t) = u(2l,t), \quad u_x(0,t) = u_x(2l,t), \quad t \ge 0.$$

Problemin çözümünü

$$u(x,t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{cn}(t) \cos\frac{n\pi x}{l} + u_{sn}(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \right] \tag{1.11}$$

şeklinde arayalım. Burada $f(x)$ integrallenebilir ve $u_0(t), u_{cn}(t)$ ve $u_{sn}(t)$ t'ye göre en az bir defa sürekli türevi olan fonksiyonlardır. $u(x,t)$'yi denklemde yerine yazalım:

$$\frac{u_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{cn}'(t) \cos\frac{n\pi x}{l} + u_{sn}'(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 \left[u_{cn}(t) \cos\frac{n\pi x}{l} + u_{sn}(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \right] = 0.$$

Bu eşitliği sırasıyla $1, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \;\; k = 1,2,\dots$ ile çarpıp $[0,2l]$ aralığında x'e göre integral alıp, ortogonalliği de dikkate alırsak;

$$u_0'(t) = 0,$$

$$u_{cn}'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_{cn}(t) = 0,$$

$$u_{sn}'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_{sn}(t) = 0, \;\; n = 1,2,\dots$$

olmak üzere birinci mertebeden sabit katsayılı sonsuz sayıda denklemlerden oluşan homojen denklem sistemi elde edilir.

Başlangıç şartını dikkate alırsak;

$$u(x,0) = f(x) = \frac{u_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[u_{cn}(0)\cos\frac{n\pi x}{l} + u_{sn}(0)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

eşitliğini $1, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l},\ k = 1,2,\ldots$ ile çarpıp x'e göre $[0,2l]$ aralığında integral alırsak;

$$u_0(0) = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(\xi)d\xi = f_{0,}$$

$$u_{cn}(0) = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(\xi)\cos\frac{n\pi x}{l}d\xi = f_{cn},$$

$$u_{sn}(0) = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}d\xi = f_{sn},\ \ n = 1,2,\ldots$$

Böylece verilen problem aşağıdaki başlangıç değer problemlerine indirgenmiş oldu. Her bir problemi sırasıyla çözelim.

1) $u_0'(t) = 0,\ u_0(0) = f_{0,}$

$$u_0(t) = f_0,$$

2) $u_{cn}'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_{cn}(t) = 0,\ \ u_{cn}(0) = f_{cn},$

$$u_{cn}(t) = f_{cn}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t},$$

3) $u_{sn}'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_{sn}(t) = 0,\ \ u_{sn}(0) = f_{sn},$

$$u_{sn}(t) = f_{sn}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}$$

elde edilir. (1.11) ifadesinde yerine yazalım.

$$u(x,t)=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\left[f_{cn}\cos\frac{n\pi x}{l}+f_{sn}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

veya

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]d\xi.$$

Buradan,

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(\xi)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\right)d\xi$$

elde edilir.

$$G(\xi-x,t):=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)$$

dersek;

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(\xi)\,G(\xi-x,t)d\xi$$

olarak bulunur.

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)$$

fonksiyon serisinin $t\geq t_0>0$ ve $0\leq x\leq 2l$ için mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür. Böylece $u(x,t)$ çözümü sürekli bir fonksiyondur. $u(x,t)$'nin denklemi ve sınır şartlarını sağladığı gösterilebilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada,

$\forall(x,t) \in D \coloneqq \{(x,t) |\ 0 < x < 2\pi,\ \ 0 < t < T\}$ olmak üzere aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,u); \quad (0 < t < T;\ 0 < x < 2\pi;\ -\infty < u < \infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x); \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t); \ \ (0 \le t \le T)$$

başlangıç ve periyodik sınır değer (karışık) problemin çözümünün varlık ve tekliğini $\mathcal{B}$ Banach uzayında inceliyoruz.

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[0,2\pi]$ aralığında, $f(x,t,u)$, $D\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x,t)$ ise aranan (çözüm) fonksiyondur.

Problemin çözümü değişken katsayılı Fourier serisi olarak bilinen

$$u(x,t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{cn}(t) \cos nx + u_{sn}(t) \sin nx]$$

şeklinde aranır. Bilinmeyen $u_0(t), u_{cn}(t)$ ve $u_{sn}(t)$ katsayılarını belirlemek için bulunan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemler sistemi için başlangıç değer problemi bilinen (Lagrange-sabitlerin değişimi-) yöntemlerle çözülmektedir. Elde edilen çözümün de art arda yaklaşımlar metodu kullanılarak varlığı ve tekliği gösterilmektedir.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu kısımda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,u); \quad (0 < t < T;\ 0 < x < 2\pi;\ -\infty < u < \infty) \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x); \ (0 \le x \le 2\pi) \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t); \ (0 \le t \le T) \tag{3.3}$$

Yarı lineer hiperbolik denklem için periyodik sınır şartlı karışık probleminin önce zayıf çözümünü tanımlayalım. (3.1) denklemini $v(x,t)$ ile çarpıp integral alalım.

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} [u_{tt} - a^2 u_{xx} - f(x,t,u)] v(x,t) dxdt = 0 \tag{3.4}$$

$$v(x,T) = v_t(x,T) = 0; v(0,t) = v(2\pi,t); v_x(0,t) = v_x(2\pi,t)$$

(3.4) ifadesinde kısmi integrasyon alıp sınır şartlarını uygularsak;

$$\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v\, dt = -v(x,0)\, \psi(x) + v_t(x,0) \varphi(x) + \int_0^T u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\, dt$$

olur. Böylece,

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v\, dxdt = \int_0^T \int_0^{2\pi} u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dxdt + \int_0^{2\pi} \varphi(x) \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} dx - \int_0^{2\pi} v(x,0) dx$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v\, dx = \int_0^{2\pi} u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx$$

olur. (3.4) eşitliğinden,

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} [u_{tt} - a^2 u_{xx} - f(x,t,u)] v(x,t) dxdt$$

$$= \int_0^T \int_0^{2\pi} [u(v_{tt} - a^2 v_{xx}) - f(x,t,u)v] dxdt$$
$$+ \int_0^{2\pi} [\varphi(x) v_t(x,0) - \psi(x) v(x,0)] dx = 0 \qquad (3.5)$$

elde edilir.

Tanım 3.1. $\overline{D} = \{(x,t) |\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le t \le T < \infty\}$ bölgesinde sürekli, x'e t'ye göre (denklemin içerdiği mertebeden) sürekli kısmi türevlere sahip ve $v(x,T) = v_t(x,T) = 0$, $v(0,t) = v(2\pi,t), v_x(0,t) = v_x(2\pi,t)$ şartlarını sağlayan $v(x,t)$ fonksiyonuna test fonksiyonu denir.

Tanım 3.2. Keyfi $v(x,t)$ test fonksiyonu için (3.5) eşitliğini sağlayan $u(x,t) \in C(\overline{D})$ fonksiyonuna (3.1)-(3.3) probleminin *zayıf genelleştirilmiş çözümü* denir (Chandirov, 1970).

Şimdi (3.1)-(3.3) probleminin zayıf genelleştirilmiş çözümüne bakalım. Çözümü

$$u(x,t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{cn}(t) \cos nx + u_{sn}(t) \sin nx] \qquad (3.6)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_0(t), u_{cn}(t)$ ve $u_{sn}(t)$ bilinmeyen katsayılardır (Fourier katsayıları). Biçimsel olarak (3.6) ile verilen $u(x,t)$ fonksiyonunu (3.1) denkleminde yazalım.

$\frac{u_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(u_{cn}''(t) + a^2 n^2 u_{cn}(t) \right) \cos nx + \left(u_{sn}''(t) + a^2 n^2 u_{sn}(t) \right) \sin nx \right] =$

$f(x,t,\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{cn}(t) \cos nx + u_{sn}(t) \sin nx])$.

Her iki tarafı $1, \cos kx, \sin kx,\ k = 1,2, ...$ ile çarpıp $[0,2\pi]$ aralığında integral alırsak;

$$u_0''(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)d\xi$$

$$u_{cn}''(t) + a^2n^2u_{cn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)\cos n\xi\, d\xi \tag{3.7}$$

$$u_{sn}''(t) + a^2n^2u_{sn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)\sin n\xi\, d\xi,\;\; n = 1,2, \dots.$$

sonsuz integro-diferansiyel denklemler sistemi elde edilir. (3.2) başlangıç şartlarını göz ününe alırsak (3.7) sisteminin başlangıç şartları;

$$u_0(0) = \varphi_0,\;\; u_0'(0) = \psi_0$$

$$u_{cn}(0) = \varphi_{cn}, u_{cn}'(0) = \psi_{cn} \tag{3.8}$$

$$u_{sn}(0) = \varphi_{sn}, u_{sn}'(0) = \psi_{sn}, \qquad n = 1,2, \dots$$

olur. Burada $\mathcal{A}u(\xi,t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[u_{ck}(t)\cos k\xi + u_{sk}(t)\sin k\xi]$ olarak alındı. (3.7) sistemindeki $f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)$ fonksiyonu (3.8) sisteminin Fourier katsayıları olduğu aşikârdır.

$$f_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)d\xi$$

$$f_{cn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)\cos n\xi\, d\xi$$

$$f_{sn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\big(\xi, t, \mathcal{A}u(\xi,t)\big)\sin n\xi\, d\xi\,, n = 1,2, \dots$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)d\xi, \qquad \varphi_{cn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)\cos n\xi\, d\xi\,,$$

$$\varphi_{sn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)\sin n\xi\, d\xi\,, n = 1,2, \dots$$

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)d\xi, \qquad \psi_{cn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\cos n\xi\, d\xi,$$

$$\psi_{sn}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\sin n\xi\, d\xi\,, n = 1,2, \dots.$$

Bu durumda (3.7), (3,8) problemini aşağıdaki şekilde ele alabiliriz.

$u_0''(t) = f_0(t);\ \ u_0(0) = \varphi_0,\ u_0'(0) = \psi_0$

$u_{cn}''(t) + (an)^2 u_{cn}(t) = f_{cn}(t);\ \ u_{cn}(0) = \varphi_{cn},\ u_{cn}'(0) = \psi_{cn}$

$u_{sn}''(t) + (an)^2 u_{sn}(t) = f_{sn}(t);\ \ u_{sn}(0) = \varphi_{sn},\ u_{sn}'(0) = \psi_{sn}, n = 1,2, ...$

İkinci basamaktan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemlerden oluşan başlangıç değer problemi elde edilir. Bu sistemi sabitlerin değişimi yöntemiyle çözersek;

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) f_0(\tau) d\tau$$

$$u_{cn}(t) = \varphi_{cn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an} \int_0^t f_{cn}(\tau) \sin an(t-\tau)\, d\tau \tag{3.9}$$

$$u_{sn}(t) = \varphi_{sn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an} \int_0^t f_{sn}(\tau) \sin an(t-\tau)\, d\tau$$

$n = 1,2, ...$

elde edilir. Burada $f_0(\tau), f_{cn}(\tau)$ ve $f_{sn}(\tau)$ yerine yazılırsa;

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} (t-\tau)\, f\big(\xi, \tau, \mathcal{A}u(\xi, t)\big)\, d\xi d\tau$$

$$u_{cn}(t) = \varphi_{cn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} f\big(\xi, \tau, \mathcal{A}u(\xi, t)\big) \sin an(t-\tau) \cos n\xi\, d\xi d\tau$$

$$u_{sn}(t) = \varphi_{sn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} f\big(\xi, \tau, \mathcal{A}u(\xi, t)\big) \sin an(t-\tau) \sin n\xi\, d\xi d\tau$$

$n = 1,2, ...$

çözümü elde edilir.

Çözümün varlığını ve tekliğini incelemek için,

$\{\bar{u}(t)\} := \{\frac{u_0(t)}{2}, u_{c1}(t), u_{s2}(t), \ldots, u_{cn}(t), u_{sn}(t), \ldots\}$,fonksiyon dizilerinden

$\frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}|u_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|u_{cn}(t)| + \max_{t\in[0,T]}|u_{sn}(t)| < \infty$

eşitsizliğini sağlayanların kümesini $\mathcal{B}$ ile gösterip, normu da

$$\|\bar{u}(t)\|_{\mathcal{B}} := \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}|u_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|u_{cn}(t)| + \max_{t\in[0,T]}|u_{sn}(t)| < \infty$$

alalım. Kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{B}$ bir Banach uzayıdır (Edwards, 1994).

(3.9) sisteminin $\mathcal{B}$ de çözüm olduğunu incelemek için art arda yaklaşımlar metodunu kullanacağız. Yaklaşım bağıntılarını

$$u_0^{(k)}(t) = u_0^{(0)}(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)\, f(\xi,\tau,\frac{1}{2}u_0^{(k-1)} + \sum_{m=1}^{\infty}(u_{cm}^{(k-1)}(t)\cos m\xi + u_{sn}^{(k-1)}(t)\sin m\xi)d\xi d\tau$$

u_0^0(t)=$\varphi_0 + \psi_0 t$

$$u_{cn}^{(k)}(t) = u_{cn}^{(0)}(t) + \frac{1}{an\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,\frac{u_0^{(k-1)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(u_{cn}^{(k-1)}(t)\cos m\xi + u_{sn}^{(k-1)}(t)\sin m\xi)\cos n\xi\,\sin an(t-\tau)\,d\xi d\tau$$

$$u_{cn}^{(0)}(t) = \varphi_{cn}\cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an}\sin ant$$

$$u_{sn}^{(k)}(t) = u_{sn}^{(0)}(t) + \frac{1}{an\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,\frac{u_0^{(k-1)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(u_{cm}^{(k-1)}(\tau)\cos m\xi + u_{sn}^{(k-1)}(t)\sin m\xi))\sin n\xi\,\sin an(t-\tau)\,d\xi d\tau$$

$u_{sn}^{(0)}(t) = \varphi_{sn}\cos ant + \frac{\psi_{sn}}{an}\sin ant,\ \ n = 1,2,\ldots$

şeklinde alalım. Basitlik için,

$$\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau) := \frac{u_0^{(k)}(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(u_{cm}^{(k)}(\tau)\cos m\xi + u_{sn}^{(k)}(t)\sin m\xi\Big)$$

olarak alalım.

$$\max_{0\le\tau\le T}\left|\mathcal{A}u^{(k)}\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{0\le\tau\le T}\left|u_0^{(k)}(\tau)\right| + \sum_{m=1}^{\infty}\max_{0\le\tau\le T}\left|u_{cm}^{(k)}(\tau)\right| + \max_{0\le\tau\le T}\left|u_{sm}^{(k)}(\tau)\right|$$

$$= \left\|\bar{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right\|_{\mathcal{B}},\ \ 0\le\xi\le 2\pi,\ \ 0\le\tau\le T.$$

$$\left\{\frac{1}{2}u_0^{(k)}(t), u_{c1}^{(k)}(t), u_{s1}^{(k)}(t), \dots, u_{cn}^{(k)}(t), u_{sn}^{(k)}(t), \dots\right\} := \left\{\bar{u}^{(k)}(t)\right\}$$

ile gösterelim.

Sistemin önce $\max_{0\le t\le T}\left|\bar{u}^{(k)}(t)\right| < \infty$ sağladığını yani $\bar{u}^{(k)}(t) \in \mathcal{B}$ olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\ \right\|_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2}\max_{0\le t\le T}\left|u_0^{(0)}(t)\right| \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|u_{cm}^{(0)}(t)\right| + \max_{0\le t\le T}\left|u_{sm}^{(0)}(t)\right| \\ &\le \frac{1}{2}(|\varphi_0| + |\psi_0|T) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_{cn}| + \left|\frac{\psi_{cn}}{an}\right| + |\varphi_{sn}| + \left|\frac{\psi_{sn}}{an}\right|\right)\end{aligned} \tag{*}$$

$\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ sağdaki seri yakınsak olacak şekilde seçilir. Buradan $\max_{0\le t\le T}\left|\bar{u}^{(0)}(t)\right| < +\infty$ yani $\bar{u}^{(0)}(t) \in \mathcal{B}$ olur.

Şimdi $k = 1,2,\dots$ için eşitsizliklere bakalım.

$$u_0^{(1)}(t) = u_0^{(0)}(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)\big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0)\big)\,d\xi d\tau$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)f(\xi,\tau,0)\,d\xi d\tau,$$

üçgen eşitsizliğinden

$$\left|u_0^{(1)}(t)\right| \le \left|u_0^{(0)}(t)\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0)]\,d\xi d\tau\right|$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)f(\xi,\tau,0)\,d\xi d\tau\right|.$$

Sağ tarafa τ'ya göre Cauchy eşitsizliği uygulayalım.

$$\le \left|u_0^{(0)}(t)\right| + \frac{1}{\pi}\left[\int_0^t(t-\tau)^2\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}}(\int_0^t[\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))$$

$$-f(\xi,\tau,0))\,d\xi]^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}(t-\tau)^2\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\left[\int_0^{2\pi}f(\xi,\tau,0)d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bu sefer ξ'ye göre Cauchy eşitsizliği uygularsak (fonksiyonlardan birini 1 olarak alınmaktadır.)

$$\le \left|u_0^{(0)}(t)\right| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}(\int_0^t[(\int_0^{2\pi}1^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))$$

$$-f(\xi,\tau,0)]^2\,d\xi)^{\frac{1}{2}}]^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}(\int_0^t[(\int_0^{2\pi}1^2 d\xi)^{\frac{1}{2}})(\int_0^{2\pi}f^2(\xi,\tau,0)d\xi)^{\frac{1}{2}}]^2\,d\tau)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\left|u_0^{(1)}(t)\right| \le \left|u_0^{(0)}(t)\right| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau) - f(\xi,\tau,0)]^2 d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}f^2\,(\xi,\tau,0)d\xi d\tau\right)^{1/2}.$$

Lipschitz şartını uygularsak

$$\le \left|u_0^{(0)}(t)\right| + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}b^2(\xi,\tau)(\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}$$

bulunur. Buradan,

$$\left|u_0^{(1)}(t)\right| \le \left|u_0^{(0)}(t)\right|$$

$$+\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right) \tag{3.10}$$

elde edilir. Benzer yolla $u_{cn}^{(1)}(t)$'yi değerlendirelim

$$u_{cn}^{(1)}(t)=u_{cn}^{(0)}(t)+\frac{1}{an\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,\frac{u_0^{(0)}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(u_{cm}^{(0)}(\tau)\cos m\xi+u_{sm}^{(0)}(\tau)\sin m\xi))$$

$$\times\sin an(t-\tau)\cos n\xi\, d\xi d\tau$$

$$|u_{cm}^{(1)}(t)| \le |u_{cn}^{(0)}(t)|+$$

$$\frac{1}{an\pi}\left|\int_0^t \sin an(t-\tau)\int_0^{2\pi}\left[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0)\right]\cos n\xi\, d\xi d\tau\right|$$

$$+\frac{1}{an\pi}\left|\int_0^t \sin an(t-\tau)\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi d\tau\right|.$$

τ'ya göre Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\le \left|u_{cn}^{(0)}(t)\right|+\frac{1}{an\pi}\left(\int_0^t \sin^2(t-\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^t\left[(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}+$$

$$\frac{1}{an\pi}\left(\int_0^t \sin^2 an(t-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi]^2\, d\tau\right)^{1/2}$$

$$\le \left|u_{cn}^{(0)}(t)\right|+\frac{\sqrt{T}}{an\pi}\left(\int_0^t[\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi]^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{an\pi}(\int_0^t [\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi \, d\xi]^2 d\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Böylece $n = 1,2,...$ üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| +$$

$$\frac{\sqrt{T}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^t [\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0))\cos n\xi \, d\xi]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^t [\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(\xi,\tau,0)\cos n\xi \, d\xi]^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Toplam ve integrali yer değiştirip, Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| + \frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0))\cos n\xi \, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi \, d\xi]^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| +$$

$$\frac{\sqrt{T}}{a}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi]^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| + \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0)]^2\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} f^2(\xi,\tau,0)\, d\xi d\tau\right)^{1/2}.$$

Lipschitz şartını uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| + \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)(\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))^2\, d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} f^2(\xi,\tau,0)d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$t\in[0,T]$ aralığında maksimum alalım,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right|$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right| + \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}} + \|f(x,t,0)\|_{L_2(L} \tag{3.11}$$

Benzer şekilde,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(1)}(t)\right|$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(0)}(t)\right| + \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}} + \|f(x,t,(\tag{3.12}$$

(3.10), (3.11), (3.12) eşitsizliklerinden

$$\frac{\left|u_0^{(1)}(t)\right|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|u_{cn}^{(1)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(1)}(t)\right|\right)\leq\frac{\left|u_0^{(0)}(t)\right|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|u_{cn}^{(0)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(0)}(t)\right|\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}+\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right)$$

elde edilir. Buradan t'ye göre maksimum alırsak

$$\left\|\bar{u}^{(1)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

$$\leq\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\left(\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}+\frac{3\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right)$$

veya

$$\left\|\bar{u}^{(1)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}\leq\left(1+\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}\left(T+\frac{\pi}{a}\right)\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\right)\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

$$+\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}\left(T+\frac{\pi}{a}\right)\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}<\infty$$

bulunur. Benzer yolla;

$$\left\|\bar{u}^{(2)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

$$\leq\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}\left(T+\frac{\pi}{a}\right)\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(1)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right)<\infty$$

bulunur.

Süreci devam ettirirsek

$$\left\|\bar{u}^{(k)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

$$\leq\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}\left(T+\frac{\pi}{a}\right)\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(k-1)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right)<\infty$$

elde edilir. Şimdi ardışık yaklaşımlar için sırasıyla

$$\left|u_0^{(k+1)}(t) - u_0^{(k)}(t)\right|, \ \left|u_{cn}^{(k+1)}(t) - u_{cn}^{(k)}(t)\right|, \ \left|u_{sn}^{(k+1)}(t) - u_{sn}^{(k)}(t)\right|; \ k = 0,1,2,\dots$$

farklarını değerlendirelim.

$$\left|u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t)\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^t \int_0^{2\pi} (t-\tau) f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) d\xi d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^t \int_0^{2\pi} (t-\tau)(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau) - f(\xi,\tau,0)) d\xi d\tau\right|$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^t \int_0^{2\pi} (t-\tau) f(\xi,\tau,0) d\xi d\tau\right|$$

t'ye göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\left|u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t)\right| \leq \left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^t \left[\int_0^{2\pi} (f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0)) d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sağ taraftaki integralleri hesaplayıp bu sefer x'e göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \left[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0)\right]^2 d\xi d\tau\right)^{1/2} +$$

$$\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} f^2(\xi,\tau,0)d\xi d\tau\right)^{1/2}.$$

Lipschitz şartını kullanırsak

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\,(\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} f^2(\xi,\tau,0)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \max_{0\leq t\leq T}\left|\mathcal{A}\bar{\mathcal{U}}^{(0)}(t)\right| + \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} f^2(\xi,\tau,0)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Netice olarak

$$\left|u_0^{(1)}(t)-u_0^{(0)}(t)\right| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}} + \|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right) \tag{3.13}$$

elde edilir. Şimdi diğer değerlendirmelere bakalım,

$$\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right| \leq \frac{1}{an\pi}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))\cos n\xi\; d\xi d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{an}(\left|\int\limits_0^t \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} [f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)) - f(\xi,\tau,0)]\cos n\xi\; d\xi d\tau\right|$$

$$+\left|\int\limits_0^t \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\; d\xi d\tau\right|)$$

t'ye göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{T}}{an}\left(\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{an}\left(\int_0^t(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$n = 1,2, \ldots$ üzerinden toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{T}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\int_0^t[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi]^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{1/2}.$$

Eşitsizliğin sağ tarafında toplamla integralin değişebilir olduğunu varsayıp (gerekli şartlardan sonra belirtilecek) Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left[\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left[\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi,\tau,0)\cos n\xi\,d\xi\right)^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^t\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,0))^2d\xi d\tau\right]^{1/2}$$

$$+\left[\int_0^t\int_0^{2\pi}f^2(\xi,\tau,0)\,d\xi d\tau\right]^{1/2}$$

Lipschitz şartını uygulayalım

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|$$

$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left[\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}b^2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right].$$

Sonuç olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|$$
$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(1)}(t)-u_{sn}^{(0)}(t)\right|$$
$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right) \tag{3.15}$$

(3.13), (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2}\left|u_0^{(1)}(t)-u_0^{(0)}(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(1)}(t)-u_{sn}^{(0)}(t)\right|\right]$$

$$\leq\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}\left(T+\frac{\pi}{a}\right)\left(\|b(x,t)\|_{L_2(D)}\left\|\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}+\|f(x,t,0)\|_{L_2(D)}\right)=A_T \tag{3.16}$$

Burada $0\leq A_T<\infty$ olduğu açıktır. O halde (3.16) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2}\left|u_0^{(1)}(t)-u_0^{(0)}(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(1)}(t)-u_{sn}^{(0)}(t)\right|\right]\leq A_{T,}$$

Buradan

$$\left\|\bar{u}^{(1)}(t)-\bar{u}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}\leq A_{T.} \tag{3.17}$$

bulunur.

Şimdi $\left|u_0^{(2)}(t)-u_0^{(1)}(t)\right|$ farkını değerlendirelim.

$$\left|u_0^{(2)}(t)-u_0^{(1)}(t)\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))d\xi d\tau\right|.$$

İki defa Cauchy eşitsizliği ardından Lipschitz şartını uygularsak

$$\leq\left(\int_0^t(t-\tau)^2d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)))d\xi]^2d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq\sqrt{\frac{T^3}{3}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)\right)]^2d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}(\int_0^t\int_0^{2\pi}b^2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau)^{\frac{1}{2}}\left\|u_0^{(1)}(t)-u_0^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

(3.17) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|u_0^{(2)}(t)-u_0^{(1)}(t)\right|\leq\sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}A_T\|b(x,t)\|_{L_2(D)}. \tag{3.18}$$

Şimdi $\left|u_{cn}^{(2)}(t)-u_{cn}^{(1)}(t)\right|$ ve $\left|u_{sn}^{(2)}(t)-u_{sn}^{(1)}(t)\right|$ farklarını değerlendirelim.

$$\left|u_{cn}^{(2)}(t)-u_{cn}^{(1)}(t)\right|$$
$$=\frac{1}{an\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))\right)\cos n\xi\, d\xi d\tau\right|.$$

t'ye göre Cauchy eşitsizliği alalım.

$$\leq\frac{\sqrt{T}}{an}\left[\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))]\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$n=1,2,...$ için toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(2)}(t)-u_{cn}^{(1)}(t)\right|\leq\frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\left[\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau))\right)\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right]^{1/2}.$$

Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(0)}(\xi,\tau)\right))^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lipschitz şartını da uygulayalım.

$$\leq\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}b^2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)^{1/2}\left\|u_{cn}^{(1)}(t)-u_{cn}^{(0)}(t)\right\|_{\mathcal{B}}$$

eşitsizliğini de göz önüne alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(2)}(t)-u_{cn}^{(1)}(t)\right| \le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\|b(x,t)\|_{L_2(D)}. \tag{3.19}$$

Benzer yolla,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(2)}(t)-u_{sn}^{(1)}(t)\right| \le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\|b(x,t)\|_{L_2(D)} \tag{3.20}$$

olur. Bulunan (3.15), (3.16) ve (3.17) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_0^{(2)}(t)-u_0^{(1)}(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|u_{cn}^{(2)}(t)-u_{cn}^{(1)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(2)}(t)-u_{sn}^{(1)}(t)\right|\right)$$

$$\left|\bar{u}^{(2)}(t)-\bar{u}^{(1)}(t)\right| \le \sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)A_T\|b(x,t)\|_{L_2(D)} \tag{3.21}$$

Benzer şekilde

$$\left|u_0^{(3)}(t)-u_0^{(2)}(t)\right|$$

$$\le \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))\right)^2 d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

Lipschitz uygulayalım.

$$\le \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau)-\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\bar{u}^{(2)}(\tau)-\bar{u}^{(1)}(\tau)\right|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Son eşitsizlikte (3.21) eşitsizliğini dikkate alıp gereken işlemi yapalım;

$$\left|u_0^{(3)}(t)-u_0^{(2)}(t)\right|$$

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)A_T\left(\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\,[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1]d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$T\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\left[A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\right]\left(\int_0^t[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1]d\,[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau_1]\right)^{1/2}$$

$$= T\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\left[A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\right]\left(\frac{1}{2!}\left[\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]^2\right)^{1/2}.$$

Sonuç olarak

$$\left|u_0^{(3)}(t)-u_0^{(2)}(t)\right| \leq T\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\left[A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{3\pi}}\right]\sqrt{\frac{1}{2!}}\|b(x,t)\|^2_{L_2(D)} \qquad (3.22)$$

ve

$$\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{T}}{an}\left(\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))\right)\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

n'ye göre toplam alıp Hölder, Bessel ve Lipschitz eşitsizliklerini uygularsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right| \leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau))-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))\right)\cos n\xi\, d\xi\right)^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(1)}(\xi,\tau))\right)^{1/2}d\,\xi\, d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\bar{u}^{(2)}(\tau)-\bar{u}^{(1)}(\tau)\right|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3.21) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left[A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2\left[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$=\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\left(\int_0^t\left[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]d\left[\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi\, d\tau_1\right]\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right|\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\left(\frac{1}{2!}\left[\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]^2\right)^{1/2}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right| \leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2!}}\|b(x,t)\|_{L(D)}^2. \tag{3.23}$$

Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(3)}(t)-u_{sn}^{(2)}(t)\right|\leq \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2!}}.. \tag{3.24}$$

(3.22), (3.23) ve (3.24) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2}\left|u_0^{(3)}(t)-u_0^{(2)}(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|u_{cn}^{(3)}(t)-u_{cn}^{(2)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(3)}(t)-u_{sn}^{(2)}(t)\right|\right]$$

$$\leq\left[\frac{T}{2}\sqrt{\frac{T}{3\pi}}A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{3\pi}}+\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]\frac{1}{\sqrt{2!}}\|b(x,t)\|_{L_2(D)}^2.$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left|\bar{u}^{(3)}(t)-\bar{u}^{(2)}(t)\right| \leq A_T\left[\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\right]^2 \frac{1}{\sqrt{2!}}\|b(x,t)\|_{L_2(D)}^2 \tag{3.25}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\left|u_0^{(4)}(t)-u_0^{(3)}(t)\right| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\bar{u}^{(3)}(t)-\bar{u}^{(2)}(t)\right| d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

(3.25) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left[\int_0^\tau\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]^2 d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2 \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]^2 d\left[\int_0^\tau\int_0^{\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{3!}}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Buradan,

$$\left|u_0^{(4)}(t)-u_0^{(3)}(t)\right| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{3!}}\|b(x,t)\|_{L_2(D)}^3. \tag{3.26}$$

Benzer şekilde

$$\left|u_{cn}^{(4)}(t)-u_{cn}^{(3)}(t)\right| \leq$$

$$\frac{\sqrt{T}}{an}\int_0^t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(3)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(2)}(\xi,\tau))\right)\cos n\xi\, d\xi d\tau\right)^{1/2},$$

toplam alıp gerekli eşitsizlikleri uyguladıktan sonra,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(4)}(t)-u_{cn}^{(3)}(t)\right| \le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\bar{u}^{(3)}(t)-\bar{u}^{(2)}(t)\right|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

(3.25) eşitsizliğinden,

$$\le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2\frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left[\int_0^\tau\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]^2 d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2\times$$

$$\left(\frac{1}{2!}\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]^2 d\left[\int_0^\tau\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1\right]\right)^{1/2}.$$

Sonuç olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{cn}^{(4)}(t)-u_{cn}^{(3)}(t)\right| \le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2\frac{1}{\sqrt{3!}}\|b(x,t)\|_{L_2(D)}^3 \qquad (3.27)$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{sn}^{(4)}(t)-u_{sn}^{(3)}(t)\right| \le \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}A_T\left[\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right]^2\frac{1}{\sqrt{3!}}\|b(x,t)\|_{L_2(D)}^3. \qquad (3.28)$$

(3.26), (3.27) ve (3.28) eşitsizliklerinden,

$$\frac{1}{2}\left|u_0^{(4)}(t)-u_0^{(3)}(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|u_{cn}^{(4)}(t)-u_{cn}^{(3)}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(4)}(t)-u_{sn}^{(3)}(t)\right|\right]$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 \right) \frac{1}{\sqrt{3!}} \|b(x,t)\|_{L_2(D)}^3.$$

Düzenlersek,

$$\left| \bar{u}^{(4)}(t) - \bar{u}^{(3)}(t) \right| \leq A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^3 \frac{1}{\sqrt{3!}} \|b(x,t)\|_{L_2(D)}^3$$

elde edilir. Tümevarımla

$$\left| \bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right| \leq A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^k \frac{1}{\sqrt{k!}} \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)^{k/2}$$

veya

$$\left\| \bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{\sqrt{k!}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^k \|b(x,t)\|_{L_2(D)}^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir. Sonuç olarak, $b(x,t) \in L_2(D)$, $f(x,t,0) \in L_2(D)$, $|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq b(x,t)|u(x,t) - v(x,t)|$ ve $\varphi(x), \psi(x)$ (*) şartını sağladığında

$$\left\{ \frac{1}{2} u_0^{(k)}(t), u_{c1}^{(k)}(t), u_{s1}^{(k)}(t), \ldots, u_{cn}^{(k)}(t), u_{sn}^{(k)}(t), \ldots \right\} := \left\{ \bar{u}^{(k)}(t) \right\}$$

dizisi $\mathcal{B}$ Banach uzayında düzgün yakınsaktır.

$$\bar{u}^{(k)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{u}^{(j)}(t) - \bar{u}^{(j-1)}(t) \right)$$

olmak üzere

$$\lim_{k \to \infty} \bar{u}^{(k)}(t) := \bar{u}(t) := \left\{ \frac{1}{2} u_0(t), u_{c1}(t), u_{s1}(t), \ldots, u_{cn}(t), u_{sn}(t), \ldots \right\}$$

$\bar{u}(t)$'nin (3.9) sistemini sağladığını gösterelim.

$$\frac{1}{2} \left| u_0^{(k+1)}(t) - u_0(t) \right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)\big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau))\big)d\xi d\tau\right|.$$

τ'ya göre Cauchy eşitsizliğini kullanalım,

$$\leq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau))\big)\,d\xi\right]^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diğer değerlendirmelere bakalım,

$$\left|u_{cn}^{(k+1)}(t)-u_{cn}(t)\right|=$$

$$\frac{1}{an\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}\big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau))\big)\sin an(t-\tau)\cos n\,\xi\,d\xi d\tau\right|$$

$$\leq\frac{1}{an}\underbrace{\left(\int_0^t\sin^2(t-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1}\times$$

$$\left(\int_0^t\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau))-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau))\big)\cos n\,\xi d\xi\right]^2d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{an}\sqrt{T}\left(\int_0^t\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)\right)-f\big(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau)\big)\right)\cos n\,\xi d\xi\right]^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Benzer olarak,

$$\left|u_{sn}^{(k+1)}(t)-u_{sn}(t)\right|\leq$$

$$\frac{1}{an}\sqrt{T}\left(\int_0^t\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)\right)-f\big(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau)\big)\right)\sin n\,\xi d\xi\right]^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$n=1,2,\dots$ için toplam alıp, taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{1}{2}\left|u_0^{(k+1)}(t)-u_0(t)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|u_{cn}^{(k+1)}(t)-u_{cn}(t)\right|+\left|u_{sn}^{(k+1)}(t)-u_{sn}(t)\right|\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)\right)-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau)\right)\right)d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{an}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)\right)-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau)\right)\right)\cos n\,\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{an}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)\right)-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u(\xi,\tau)\right)\right)\sin n\,\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Hölder eşitsizliğini uygulayalım,

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}\right)-f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u\right)\right)d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)})-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)\cos n\xi\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)})-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)\sin n\xi\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Toplam ve integralleri değişip Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}\right)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)d\,\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}\right)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)^2 d\,\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)}\right)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)^2 d\,\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Birinci integrale tekrar Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)})-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)^2 d\,\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{2}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)})-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)^2 d\,\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u^{(k)})-f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)\right)^2 d\,\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lipschitz şartından,

$$\leq\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left(\mathcal{A}u^{(k)}(\xi,\tau)-\mathcal{A}u(\xi,\tau)\right)^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(T+\frac{2\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)\left|\bar{u}^{(k)}(\tau)-\bar{u}(\tau)\right| d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tümevarım hipotezi gereği $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\bar{u}^{(k)}(t)-\bar{u}(t)\right\|=0$ olduğundan $\bar{u}(t)$ (3.9) sistemini sağlar.

Çözümün tekliğini gösterelim.

$$\bar{v}(t)=\left\{\frac{v_0(t)}{2},v_{c1}(t),v_{s1}(t),\dots,v_{cn}(t),v_{sn}(t),\dots\right\}$$

(3.9) sisteminin bir diğer çözümü olsun.

$$\frac{1}{2}|u_0(t)-v_0(t)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi}(t-\tau)\left(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\right)d\,\xi d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big)\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{1}{2}|u_0(t)-v_0(t)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big) d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b(\xi,\tau)|\mathcal{A}u-\mathcal{A}v| d\xi\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$|u_{cn}(t)-v_{cn}(t)| = \frac{1}{an\pi}\left|\int_0^t\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big) \sin n(t-\tau)\cos n\xi \; d\xi d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{an}\left(\int_0^t \sin^2 an(t-\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big) \cos n\xi d\xi\right]^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|u_{cn}(t)-v_{cn}(t)| \leq \frac{1}{an}\sqrt{T}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big) \cos n\xi \; d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

Benzer olarak,

$$|u_{sn}(t)-v_{sn}(t)| \leq \frac{1}{an}\sqrt{T}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(\xi,\tau,\mathcal{A}u)-f(\xi,\tau,\mathcal{A}v)\big) \sin n\xi \; d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$n = 1,2, \ldots$ için toplam alıp Hölder eşitsizliği uygulayalım.

$$|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)| \leq \left(T+\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)\left(\int_0^t\int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau\right)^{1/2}$$

$$|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)|^2 \leq \left(T+\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}\right)^2 \int_0^t \int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau)|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau.$$

Burada Grönwall eşitsizliğini uygularsak;

$$\max_{0\leq t\leq \tau}|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)|^2 \leq 0\times\exp\int_0^t \int_0^{2\pi} b^2(\xi,\tau) d\xi d\tau = 0,$$

elde edilir. Böylece $\max_{0\leq t\leq \tau}|\bar{u}(t)-\bar{v}(t)|^2 = 0 \Longrightarrow \bar{u}(t)=\bar{v}(t)$ bulunur. Yani çözüm tektir. Böylece aşağıdaki teoremleri elde etmiş olduk;

Teorem 3.1. Aşağıdaki şartların sağlandığını farz edelim;

a. $f(x,t,u)$ bütün bağımsız değişkenlerine göre $\bar{D}\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli,
b. $|f(x,t,u)-f(x,t,v)| \leq b(x,t)|u-v|,\ b(x,t)\in L_2(D),\ b(x,t)\geq 0,$
c. $f(x,t,0)\in L_2(D),$
d. $\varphi(0)=\varphi(2\pi),\ \varphi'(0)=\varphi'(2\pi), \varphi(x)\in C^1[0,2\pi],\ \psi(0)=\psi(2\pi);\ \psi(x)\in C[0,2\pi].$

Bu durumda (3.9) sistemi $\mathcal{B}$ Banach uzayında tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.2. Teorem 3.1.'in şartları gerçekleşsin. Bu durumda (3.1)-(3.3) probleminin tek bir zayıf genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm katsayı fonksiyonları $D=\{(x,t)|\ 0<x<2\pi,\ 0<t<T<\infty\}$'de sürekli olan düzgün yakınsak (3.6) serisi ile verilir.

3. SONUÇ ve ÖNERİLER

Yarı lineer hiperbolik başlangıç değer ve periyodik sınır değer şartlı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,u); \quad (0 < t < T;\ 0 < x < 2\pi;\ -\infty < u < \infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x); \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t); \quad (0 \le t \le T)$$

$$\forall (x,t) \in D \coloneqq \{(x,t) |\ 0 < x < 2\pi, \qquad 0 < t < T\}$$

($f \in \overline{D} \times (-\infty, \infty)$ ve Lipschitz şartını sağlar) probleminin (zayıf) genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğini gösterilmiştir.

Genelde lineer olmayan kısmi türevli denklemler için bir genel çözüm vermek imkânsız olduğundan lineer ve yarı lineer (parabolik, hiperbolik veya eliptik) denklemler pratikte önem arz etmektedir. Bu tür denklemlerin farklı başlangıç ve sınır veya her iki (karışık) şartlarda farklı yöntemler uygulayarak pek çok araştırmacının inceleme konusu olmuştur (örneğin Lavrenyuk and Ptashnyk, 1999; Bouziani and Mesloub, 2002; Halilov and Çiftçi, 2009 vs.) ancak Fourier yöntemiyle periyodik sınır şartlı problemler nispeten daha az araştırılmıştır.

Fourier yöntemi, yarı doğrusal ve doğrusal olmayan parabolik, hiperbolik veya daha yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için periyodik sınır şartlı karışık problemlerin çözümüne de uygulanabilir. Daha güçlü genelleştirilmiş çözüm tanımlanıp varlığı ve tekliği incelenebilir. Fakat bu araştırma, yüksek lisans konusu olmaktan ziyade doktora düzeyinde yapılabilir.

KAYNAKLAR

Tikhanov, A. N., Samarskii, A. A, 1990. Equations of Mathematical Physics, Dover Publications, Inc., New York, ISBN: 0-486-66428-8, 784 s.

Allan K., 2002. Hilbet spaces, Boundary Value Problem and orthonal Polinoms, Birkhauser, 1 st. ed., ISBN: 3-7643-6701-6, 352s.

Bouziani, A. and Mesloub, S., 2002. Mixed Problem with a Weighted Integral Condition for a Parabolic Equation with the Bessel operator, Jou. of App. Math. and Stoc. Anal.,V. 15, N0. 3, 277-286.

Chandirov, G.I. 1970. On Mixed Problem for a Class of Quasilinear Hiporbolic Equation, Ph.D. Thesis, Tbilisi, 96s.

Halilov, H. and Çiftçi İ., 2009. Fourier Method for Quasilinear Pseudo-Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition, Int. Jour. of Pure and Applied Matematics, V.52, No.5, 717-727.

Lavrenyuk, S.P. and Ptashnyk, M.B., 1999. On Certain Nonlinear Pseudoparabolic Variational Inequalities without Initial Conditions, Ukr. Math. Jour., V. 51,No. 3, 34-46.

Çağlayan, M., Çelebi, O., 2010. Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa, ISBN: 978-605-4118-75-5, 268 s.

Edwards, R. E., 1994. Functional Analysis, Theory and Applications, Dover publications, Inc., New York, ISBN: 0-486-68143-2, 783s.

Ronald B. Gunher and John W. Lee, 1988. Partial Differential Equations of Mathematical Phisics and Integral Equations, Dover Publications, Inc. New York, ISBN 0-486-68889-5, 562 s.

Saban, G., 1981. Analiz Dersleri II, Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 363s.

Tuncer, T., 1969. Alıştırmalarla Diferensiyel Denklemler, 1969. Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 187s.

William E. Boyce and Richard C. DiPrima, 1977. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, NY, 582 s.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma TATLI ADAL, 30/12/1989 tarihinde Erzurum-Horasan’da doğdu. İlköğretimini 2002 yılında Horasan ilçesinde İnkılap İlköğretim Okulu’nda ve Ortaöğretimini 2006 yılında Horasan ilçesinde Horasan Lisesi’nde tamamladı. 2007 yılında başladığı lisans eğitimini 2011 yılında Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2014 yılında özel bir kurumda Matematik öğretmenliği yapmaya başladı. 2015 yılında Ağrı Öğretmenler Anadolu Lisesi’ne atandı, 2016 yılında İzmit Atatürk Meslek ve Teknik Lisesi’nde halen Matematik öğretmenliğe ’ne devam etmektedir.